

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение

высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

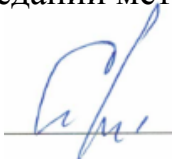
для практических занятий

по учебному предмету «ОУП.04 Математика»

строительно-политехнического колледжа

Методические указания обсуждены на заседании методического совета
СПК

20.01.2023 года Протокол №5

Председатель методического совета СПК  Сергеева С. И.

Методические указания одобрены на заседании педагогического совета
СПК

27.01.2023 года Протокол №5

Председатель педагогического совета СПК  Дегтев Д. Н.

2023

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Составители: *З. И. Шахбазова, С. Л. Рыбина, Н. В. Федотова,
И. И. Корчагин*

Решение логарифмических уравнений: методические указания к выполнению самостоятельных работ по математике для студентов 1 курса/ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: З. И. Шахбазова, С. Л. Рыбина, Н. В. Федотова, И. И. Корчагин. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2020. 17 с.

Даны теоретические сведения по решению логарифмических уравнений, приведены примеры решения уравнений, даны задания для самостоятельной работы. Могут использоваться для подготовки индивидуальных проектов и для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Предназначены для самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов 1 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ ЛРУ pdf.

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Рецензент – *М. Ю. Глазкова, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры технологии строительных материалов, изделий и конструкций ВГТУ*

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов 1 курса Строительно-политехнического колледжа (далее - СПК) всех специальностей в освоении методов решения логарифмических уравнений.

Сообщаются основные определения, формулы, методы решения логарифмических уравнений. Приводятся примеры решения логарифмических уравнений.

Методические указания содержат задания для самостоятельного решения.

Общие положения

Самостоятельная работа студентов – это работа, которая выполняется ими по заданию преподавателя, без его непосредственного участия (но под его руководством) в специально представленное для этого время.

Цели и задачи самостоятельной работы:

- систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;
- углубления и расширения теоретических и практических знаний;
- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских знаний.
- обеспечение базы знаний для профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;
- формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;
- подготовка к формированию и развитию профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.
- систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
- развитие исследовательских умений.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при решении уравнений;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями ФГОС СПО.

1. Общие сведения о логарифмических уравнениях

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестное только под знаком логарифма или в основании логарифма.

Например: $\log_2 x = 3$; $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$; $\log_{x-3} 4 = 2$

Уравнения вида $\log_a x = b$ (1) и $\log_x m = n$ (2),

где x – неизвестное, а a, b, m, n – заданные числа, являются простейшими логарифмическими уравнениями.

Если $x > 0, a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение (1) при любом действительном значении x имеет единственное решение $x = a^b$.

Если $m > 0, x > 0$ и $x \neq 1$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = \sqrt[n]{m}$.

Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются только на множестве действительных чисел.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, применяемые при решении логарифмических уравнений.

($a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$)

1. $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

2. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

3. $\log_c a^n = n \log_c a$

4. $\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

5. $a^{\log_a N} = N$ – основное логарифмическое тождество.

6. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ – формула перехода от одного основания логарифмов к другому.

7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

8. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n \log_a b}$

9. $\log_b a = \log_{b^n} a^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a}$

Преобразования, которые применяются при решении логарифмических и показательных уравнений.

1. Потенцирование.

$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} q(x)$ (1) Могут появиться посторонние корни!

$f(x) = q(x)$ (2) Необходима проверка!

2. Логарифмирование.

$$f(x) = q(x)(1)$$

Могут быть потеряны корни!

$$\log_a f(x) = \log_a q(x)(2)$$

Но если $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, q(x) > 0$, то (2) равносильно (1). В этом случае логарифмирование допустимо.

3. Применение свойств логарифмов.

Возможно появление посторонних корней. Необходима проверка!

2. Уравнения, решаемые по определению логарифма

Решение сложных логарифмических уравнений сводится в большинстве случаев к решению простейших логарифмических уравнений.

Уравнение $\log_a f(x) = b, f(x) > 0$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$ (1)

Уравнение $\log_x f(a) = b, f(a) > 0, x > 0, x \neq 1$ равносильно уравнению $f(a) = x^b, x = \sqrt[b]{f(a)}$ (2)

Рассмотрим решение простейших логарифмических уравнений.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_3(1 - 2x) = 1$

Область определения уравнения: $1 - 2x > 0; -2x > -1; x < \frac{1}{2}$

На основании определения логарифма можно записать

$$1 - 2x = 3$$

$$-2x = 2$$

$$x = -1 \quad -1 < \frac{1}{2}$$

Проверка: $\log_3(1 - 2 \cdot (-1)) = \log_3 3 = 1; 1 = 1$.

Ответ: -1.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_x \sqrt[5]{36^{-1}} = -0,4$

Область определения уравнения: $x > 0; x \neq 1$

На основании определения логарифма можно записать

$$x^{-0,4} = 36^{-\frac{1}{5}}$$

$$x^{-0,4} = 6^{-\frac{2}{5}} = 6^{-0,4}$$

$$x = 6$$

В этом и последующих примерах проверку делайте самостоятельно!

Ответ: 6.

3. ВЫЧИСЛИТЬ x : $\log_{0,32} \frac{2\sqrt{2}}{5} = x$

Данное уравнение равносильно уравнению:

$$(0,32)^x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Преобразуем это уравнение:

$$\left(\frac{8}{25}\right)^x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\left(\frac{\sqrt{8}}{5}\right)^{2x} = \frac{\sqrt{8}}{5}$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\lg(81 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2-8x}}) = 0, x \in R$

Данное уравнение равносильно уравнению:

$$81 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 10^0 = 1$$

$$3^4 \cdot 3^{\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0$$

$$3^{4+\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0$$

$$4 + \frac{x^2-8x}{3} = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0; x_1 = 2, x_2 = 6$$

Проверка:

$$1) \lg(81 \cdot \sqrt[3]{3^{2^2-8 \cdot 2}}) = \lg(81 \cdot 3^{-\frac{12}{3}}) = \lg(3^4 \cdot 3^{-4}) = \lg 1 = 0$$

$$2) \lg(81 \cdot \sqrt[3]{3^{6^2-8 \cdot 6}}) = \lg(81 \cdot 3^{-\frac{12}{3}}) = \lg(3^4 \cdot 3^{-4}) = \lg 1 = 0$$

Ответ: 2; 6.

5. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_2(3\log_3(\log_2 x)) = 0$

Область определения уравнения: $3\log_3(\log_2 x) > 0$,

$\log_3(\log_2 x) > 0, \log_2 x > 1, x > 2$

Из определения логарифма следует:

$$3\log_3(\log_2 x) = 2^0 = 1$$

$$\log_3(\log_2 x) = \frac{1}{3}$$

Решив уравнение, получим:

$$\log_2 x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}; x = 2^{\sqrt[3]{3}}$$

Так как $\sqrt[3]{3} > 1, 2^{\sqrt[3]{3}} > 2$, а, следовательно, полученный корень принадлежит области определения уравнения.

Ответ: $2^{\sqrt[3]{3}}$.

6. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_{x-1}(3x-1) = 3$.

Область определения уравнения:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \quad x > 1, x \neq 2; (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

Из определения логарифма следует:

$$3x-1 = (x-1)^3$$

Решаем это уравнение:

$$3x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0; \quad x_{1,2} = 0, x_3 = 3$$

$x_{1,2} = 0$ не входят в область определения уравнения, их надо отбросить.

Убедитесь, что $x = 3$ является корнем уравнения.

Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнения

$$1. \log_2(9 - 2^x) = 3 - x \quad 3; 0$$

$$2. \lg(10^x + 10^{2x} - 10^{1-2x} + 9) = x \quad 0$$

$$3. \log_5 \log_3(x^2 - 9x + 23) = 0 \quad 4; 5$$

$$4. \lg \sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1$$

$$5. \log_x(2x^{x-2} - 1) = 2x - 4$$

$$6. \log_x \left(8 \cdot \sqrt[5]{0,25} \right) = \frac{13}{5}$$

$$7. \log_\pi \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$$

$$8. 2 \log_{\log_2 x}^2 = 1$$

$$9. \lg(36 + 2^{2(x-1)})^{\frac{3}{2}} = 3$$

$$10. \log_5 \log_{10} \sqrt{x^2 + 19} = 0$$

$$11. \log_7 \log_4 \log_3^2(x - 7) = 0$$

3. Уравнения, решаемые потенцированием

Логарифмические уравнения $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$ (1), где $a > 0, a \neq 1$, после потенцирования приводятся к виду $f_1(x) = f_2(x)$. Потенцирование может привести к появлению посторонних корней. Источник появления посторонних корней – применение формулы логарифма произведения.

В этом случае проверка обязательна, она является составной частью решения.

$$1. \text{РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } \log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$$

Область определения уравнения:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

На основании формулы $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ имеем:

$$\log_2(3 - x) \cdot (1 - x) = 3$$

По определению логарифма будем иметь:

$$(3 - x) \cdot (1 - x) = 8$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 5, x_2 = -1$$

Первое значение неизвестного не принадлежит области определения, его отбрасываем.

Проверкой убедитесь, что $x = -1$ является корнем уравнения.

Ответ: -1.

$$2. \text{РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } 2 \lg(2x + 3) = 1 + \lg(x + 0,9)$$

Область определения уравнения:

$$\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > -0,9 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$\lg(2x + 3)^2 = \lg 10 + \lg(x + 0,9)$$

$$\lg(2x + 3)^2 = \lg(10 \cdot (x + 0,9))$$

Пропотенцировав, получим:

$$(2x + 3)^2 = 10(x + 0,9)$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 10x + 9$$

$$4x^2 + 2x = 0$$

$$2x(2x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -0,5$$

Оба корня входят в область определения.

Ответ: -0,5;0.

$$3. \text{ РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } \lg(2^x + x - 41) = x(1 - \lg 5)$$

Область определения уравнения: $2^x + x - 41 > 0$

Преобразуем правую часть:

$$x(1 - \lg 5) = x(\lg 10 - \lg 5) = x \lg \frac{10}{5} = x \lg 2 = \lg 2^x$$

После преобразования получим уравнение:

$$\lg(2^x + x - 41) = \lg 2^x$$

Пропотенцировав, будем иметь: $2^x + x - 41 = 2^x$, $x = 41$

Проверка – непосредственной подстановкой, так как нахождение области определения сложно.

$$\lg(2^{41} + 41 - 41) = 41(1 - \lg 5)$$

$$\lg 2^{41} = 41(1 - \lg 5) = 41(\lg 10 - \lg 5) = 41 \lg 2 = \lg 2^{41}; 2^{41} = 2^{41}$$

Ответ: 41.

$$4. \text{ РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } \log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$$

Область определения уравнения: $x \in \mathbb{R}$.

Перепишем данное уравнение:

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2 4 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2(4 \cdot (3^{x-1} + 1))$$

Пропотенцировав, получим:

$$3^{2(x-1)} + 7 = 4 \cdot (3^{x-1} + 1)$$

$$3^{2(x-1)} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$$

Решив полученное показательное уравнение, находим:

$$1) 3^{x-1} = 1, x_1 = 1; 2) 3^{x-1} = 3, x_2 = 2. \text{ Ответ: } 1; 2.$$

$$5. \text{ РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } \frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg \sqrt[3]{x-40}} = 3.$$

Область определения уравнения: $(40, +\infty)$; $x \neq 41$

Освободимся от знаменателя дроби:

$$\lg(\sqrt{x+1}+1) = 3 \lg \sqrt[3]{x-40} = \lg(x-40)$$

Пропотенцировав, получим:

$$\sqrt{x+1}+1 = x-40$$

$$\sqrt{x+1} = x-41$$

Пусть $\sqrt{x+1} = y$, тогда $x+1 = y^2$, $x = y^2 - 1$.

Уравнение имеет вид: $y^2 - y - 42 = 0$

Решив уравнение, будем иметь: $y_1 = -6$; $y_2 = 7$.

а) $\sqrt{x+1} = -6$ – уравнение не имеет корней.

б) $\sqrt{x+1} = 7$, $x+1 = 49$, $x = 48$.

Проверка подтверждает, что $x = 48$ – корень.

Ответ: 48.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнения

1. $2\lg x = -\lg(6 - x^2)\sqrt{2} \pm 1$

2. $0,5 \lg(2x - 1) + \lg\sqrt{x - 9} = 1$

3. $\frac{\log_3(x-4)-1}{\log_3(x-2)} + 1 = 0$

4. $\lg 9^{-1} + \frac{1}{3} \lg 3^{x(5x-7)} = 0 - 0,6; 2$

5. $\lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 10^{2x} - \lg 4^x$

6. $5 \log_2 3 + 2 \log_2 \sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - \frac{5}{3} \log_2 27 = 1,5$

7. $\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$

8. $\lg\left(x - \frac{8}{9}\right) = 2\lg\frac{1}{6}\frac{11}{12}$

9. $\lg 10 + \frac{1}{3} \lg(271 + 3^{\sqrt{2x}}) = 2$

10. $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1) - 2 \log_4(\sqrt{\lg x} + 1) = 1$

4. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим уравнениям

В некоторых случаях с помощью подстановки (замены переменной) $y = \log_a x$ или $y = \log_x a$ [$y = \log_a u$ или $y = \log_u a$, где $u = u(x)$] логарифмическое уравнение сводится к алгебраическому.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_2^3 x + 3 = 2 \log_2 x^2$.

Область определения: $x > 0$

Преобразуем уравнение к виду $\log_2^3 x - 4 \log_2 x + 3 = 0$

Замена $\log_2 x = u$ уприводит уравнение к квадратному уравнению.

$y^2 - 4y + 3 = 0$, $y_1 = 1$; $y_2 = 3$, т.е. $\log_2 x = 3$, $x_1 = 8$; $\log_2 x = 1$, $x_2 = 2$.

Проверка:

$\log_2^3 8 + 3 = 2 \log_2 8^2$, $12 = 12$;

$\log_2^3 2 + 3 = 2 \log_2 2^2$, $4 = 4$.

Ответ: 2; 8.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\frac{\lg(6-x)}{2} = \frac{1}{3 \lg(6-x)-1}$.

Область определения: $x \in (-\infty; 6 - \sqrt[3]{10}) \cup (6 - \sqrt[3]{10}; 6)$

Преобразуем уравнение к виду: $3\lg^2(6-x) - \lg(6-x) - 2 = 0$

Введем замену: $\lg(6-x) = y$, получим $3y^2 - y - 2 = 0$

Решив уравнение, будем иметь: $y_1 = -\frac{2}{3}$; $y_2 = 1$.

$$\lg(6-x) = -\frac{2}{3}, 6-x = 10^{-\frac{2}{3}}, x_1 = 6 - \sqrt[3]{0,01};$$

$$\lg(6-x) = 1, 6-x = 10, x_2 = -4.$$

Оба значения входят в область определения. Проверкой можно убедиться, что оба значения являются корнями данного уравнения.

Ответ: $6 - \sqrt[3]{0,01}; -4$.

3. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$.

Область определения: $\begin{cases} x > 0; \\ 5 - \lg x \neq 0; \\ 1 + \lg x \neq 0. \end{cases} \begin{cases} x > 0; \\ \lg x \neq 5; \\ \lg x \neq -1. \end{cases} \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 10^5; \\ x \neq 0,1. \end{cases}$

$$x \in (0; 0,01) \cup (0,1; 10^5) \cup (10^5; +\infty).$$

Введем подстановку $\lg x = y$, тогда относительно y уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{5-y} + \frac{2}{1+y} = 1$$

Решим полученное уравнение:

$$1+y + (5-y)2 = (5-y)(1+y)$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0, y_1 = 2; y_2 = 3.$$

Тогда получим:

$$\lg x = 2; x_1 = 100;$$

$$\lg x = 3; x_2 = 1000.$$

Ответ: 100; 1000.

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\lg 10x \lg 0,1x = \lg x^3 - 3$.

Область определения: $x > 0$

Преобразуем уравнение к виду:

$$(1 + \lg x)(-1 + \lg x) = 3 \lg x - 3$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x + 2 = 0.$$

Введем замену: $\lg x = y$ и получим:

$$y^2 - 3y + 2 = 0, y_1 = 1; y_2 = 2$$

$$\lg x = 1, x_1 = 10; \lg x = 2, x_2 = 100.$$

Ответ: 10; 100.

Задания для самостоятельного решения и самоконтроля.

Решить уравнения

1. $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0$

2. $\lg^2 100x + 2 \lg x = 20$

3. $\lg^2 x - \lg x^2 = \lg^2 3 - 1$

4. $2 - \frac{1}{2 - \log_2 x} = \frac{3}{4 - \log_2 x}$

5. $\sqrt{\lg x} + \sqrt[4]{\lg x} = \frac{3}{4} 10^{\frac{1}{16}}$

6. $\lg x^4 - \frac{30}{\lg x} = 210^{-\frac{5}{2}}; 1000$

7. $3 \lg^2(x-1) - 10 \lg(x-1) + 3 = 01 + \sqrt[3]{10}; 1001$

8. $\lg^2 x - \lg x^3 + 2 = 0$

9. $\frac{1}{\lg^2 x} + \frac{\lg^2 x}{100} = 0,29$

5. Уравнения, решаемые посредством логарифмирования

Способ логарифмирования применяется для решения показательно-логарифмических уравнений.

Уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени x под знаком логарифма, называется показательно-логарифмическим.

Логарифмируя обе части уравнения, приводят их к логарифмическим.

Замечание. Уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ и $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$ неравносильны, при логарифмировании сужается область определения уравнения (на 2-ое уравнение накладывается ограничительные условия: $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, следовательно, возможна потеря корней).

Если $f_1(x) > 0, f_2(x) > 0, a > 0, a \neq 1$, то оба уравнения равносильны, логарифмирование допустимо.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $5^{3\lg x} = 12,5x$.

Область определения: $x > 0$.

Логарифмируем по основанию 10:

$$3 \lg x \lg 5 = \lg 12,5 + \lg x.$$

Решим уравнение относительно $\lg x$:

$$(3 \lg 5 - 1) \lg x = \lg 12,5;$$

$$\lg x = \frac{\lg 12,5}{3 \lg 5 - 1} = \frac{\lg 12,5}{\lg 125 - \lg 10} = \frac{\lg 12,5}{\lg 12,5} = 1, \text{ тогда } x = 10.$$

Ответ: 10.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$.

Область определения: $x > 0$

Прологарифмируем по основанию 10:

$$\frac{\lg x + 7}{4} \lg x = (\lg x + 1) \lg 10$$

$$\lg^2 \frac{x}{4} + \frac{7}{4} \lg x = \lg x + 1$$

$$\lg^2 x + 7 \lg x - 4 \lg x - 4 = 0$$

После упрощения получаем уравнение:

$$\lg^2 x + 3 \lg x - 4 = 0.$$

Решаем его как квадратное уравнение относительно $\lg x$.

$$\lg x = -4; \lg x = 1$$

$$x_1 = 10^{-4} = 0,0001; x_2 = 10.$$

Ответ: 0,0001; 10.

3. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = \frac{1}{x}$.

Область определения: $x > 0$

Прологарифмируем по основанию 2 и упростим уравнение:

$$(\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3) \log_2 x = -\log_2 x$$

$$3\log_2^2 x - \log_2^3 x - 3\log_2 x + \log_2 x = 0$$

$$\log_2^3 x - 3\log_2^2 x + 2\log_2 x = 0$$

Вынесем общий множитель за скобки и решим уравнение:

$$\log_2 x (\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2) = 0$$

$$\log_2 x = 0, x_1 = 1$$

$$\log_2 x = 1, x_2 = 2$$

$$\log_2 x = 2, x_3 = 4$$

Ответ: 1; 2; 4.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения

$$1. x^{\lg^3 x - 5 \lg x} = 0,0001$$

$$2. x^{\log_2 x} = 4x$$

$$3. x^{\log_2 x + 2} = 8^{\frac{1}{8}}; 2$$

$$4. x^{2\lg^2 x} = 10x^3 \frac{1}{10}; 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

$$5. x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$$

$$6. x^{1 - \lg x} = 0,01$$

$$7. x^{\frac{1}{4}(\lg x + 7)} = 10^{\lg x + 1}$$

$$8. x^{\lg^3 x - 5 \lg x} = 0,0001$$

$$9. x^{2\lg^3 x - \frac{3}{2}\lg x} =$$

$$10. x^{\lg x - 3} = 10^{\lg \frac{10}{x} - 1}$$

6. Уравнения, в которых используется модуль перехода и различные логарифмические тождества

$$1. \text{РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } \log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6.$$

Область определения: $x > 0, x \neq 1$

Перейдем к основанию x , используя формулу $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$,

$$\log_x 7 + \frac{\log_x 7}{\log_x x^2} = 6$$

$$\log_x 7 + \frac{\log_x 7}{2} = 6$$

$$3\log_x 7 = 12, \log_x 7 = 4, x^4 = 7, x = \sqrt[4]{7}. \quad \text{Ответ: } \sqrt[4]{7}.$$

$$2. \text{РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: } \log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0.$$

Область определения: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{10}, x \neq \frac{1}{100}$

Используя тождество $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, получим:

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{2}{\lg 10x} + \frac{3}{\lg 100x} = 0$$

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} + \frac{3}{2 + \lg x} = 0, \quad 3 \lg^2 x + 5 \lg x + 1 = 0$$

Решив относительно $\lg x$ уравнение, получим: $\lg x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}, x = 10^{\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}}$.

Ответ: $10^{\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}}$.

3. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log^2_3 x = 1$.

Область определения: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}$

Перейдем к логарифмам по основанию 3:

$$\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log^2_3 x = 1$$

$$(1 - \log_3 x)(1 - (1 + \log_3 x)^2) = 0$$

Приравняв каждый множитель к нулю, получим:

$$\log_3 x = 1, x_1 = 3$$

$$\log_3 x = 0, x_2 = 1$$

$$\log_3 x = -2, x_3 = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}; 1; 3$.

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_a ax \log_x ax = \log_{a^2} \frac{1}{a}, a > 0, a \neq 1$.

Область определения: $x > 0, x \neq 1$

$$\log_a ax = 1 + \log_a x$$

$$\log_x ax = \log_x a + 1 = \frac{1}{\log_a x} + 1 = \frac{1 + \log_a x}{\log_a x}$$

$$\log_{a^2} \frac{1}{a} = \log_a a^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$(1 + \log_a x) \frac{1 + \log_a x}{\log_a x} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(1 + \log_a x)^2}{\log_a x} = -\frac{1}{2}$$

$$\log^2_a x + \frac{5}{2} \log_a x + 1 = 0$$

Решив относительно $\log_a x$ уравнение, получим

$$\log_a x = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\log_a x = -2, x_2 = \frac{1}{a^2} \quad \text{.} \quad \text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{a^2}.$$

5. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_4(x + 12) \log_x 2 = 1$.

Область определения: $x > 0, x \neq 1$

Приведем оба логарифма к основанию 2:

$$\log_4(x + 12) = \log_2 \sqrt{x + 12} = \frac{1}{2} \log_2(x + 12); \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\frac{1}{2} \log_2(x + 12) \frac{1}{\log_2 x} = 1$$

$$\frac{1}{2} \log_2(x+12) = \log_2 x$$

$$\log_2(x+12) = \log_2 x^2$$

После потенцирования получим: $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = 4, x_2 = -3$ (не входит в область определения)

Ответ: 4.

6. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\lg 10^{\lg(x^2+21)} - 1 = \lg x$.

Область определения: $\begin{cases} x^2 + 21 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством и получим:

$$\lg(x^2 + 21) - \lg 10 = \lg x$$

Используем свойство: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

$$\lg \frac{x^2 + 21}{10} = \lg x, x^2 + 21 = 10x; x_1 = 3, x_2 = 7$$

Ответ: 3; 7.

7. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$

Область определения: $x > 0, x \neq 1$

Упростим первое слагаемое в левой части уравнения:

$$6^{\log_6^2 x} = (6^{\log_6 x})^{\log_6 x} = x^{\log_6 x}.$$

Подставим в данное уравнение и упростим: $x^{\log_6 x} = 6$

Прологарифмируем по основанию 6: $\log_6 x \log_6 x = 1, \log_6^2 x = 1$.

$$\log_6 x = \pm 1, x_1 = 6; x_2 = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}; 6$.

8. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $4^{\log_{64}(x-3) + \log_2 5} = 50$.

Область определения: $x > 0$.

Используем формулу: $\log_b a = \log_{b^n} a^n = \log_{n\sqrt{b}} \sqrt[n]{a}$

$$4^{\log_4 \sqrt[3]{x-3} + \log_2 5} = 50, 4^{\log_4 \sqrt[3]{x-3}} 4^{\log_2 5} = 50.$$

Применим основное логарифмическое тождество:

$$\sqrt[3]{x-3} 2^{\log_2 25} = 50, 25 \sqrt[3]{x-3} = 50, \sqrt[3]{x-3} = 2, x = 11.$$

Ответ: 11.

9. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_x 2 \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

Область определения: $x > 0, x \neq 1, x \neq 16, x \neq 64$.

Перейдем к основанию 2: $\frac{1}{\log_2 x} \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \frac{x}{64}}$.

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0.$$

Введем замену: $\log_2 x = y$, тогда получим уравнение:

$$y^2 - 5y + 6 = 0, y_1 = 2; y_2 = 3.$$

$$\log_2 x = 2, x_1 = 4;$$

$$\log_2 x = 3, x_2 = 8.$$

Ответ: 4; 8.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Муравин, Г. К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс [Текст] : учебник : рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации / Г.К. Муравин, О. В. Муравина. - 2-е изд., стер. - Москва : Дрофа, 2015. - 189 с. : ил. - Предм. указ.: с. 184-185. - Библиогр.: с. 186-189. - ISBN 978-5-358-14918-2 : 445-00.

2. Шарыгин, И. Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10 - 11 классы [Текст] : учебник : рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации / И. Ф. Шарыгин. - 2-е изд., стер. - Москва : Дрофа, 2015 (Тверь : Тверской полиграф. комбинат дет. лит., 2015). - 238 с. : ил. - Предм. указ.: с. 233-234. - ISBN 278-5-358-15250-2: 393-00

3. Алпатов, А. В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО/ А. В. Алпатов— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019.— 162 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/80328.html>.— ЭБС «IPRbooks»

4. Растопчина, О. М. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ О. М. Растопчина — Электрон. текстовые данные.— М.: Московский педагогический государственный университет, 2018.— 150 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/79053.html>.— ЭБС «IPRbooks»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Общие сведения о логарифмических уравнениях	4
2. Уравнения, решаемые по определению логарифма	5
3. Уравнения, решаемые потенцированием	7
4. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим уравнениям	9
5. Уравнения, решаемые посредством логарифмирования	11
6. Уравнения, в которых используется модуль перехода и различные логарифмические тождества	12
Библиографический список	15