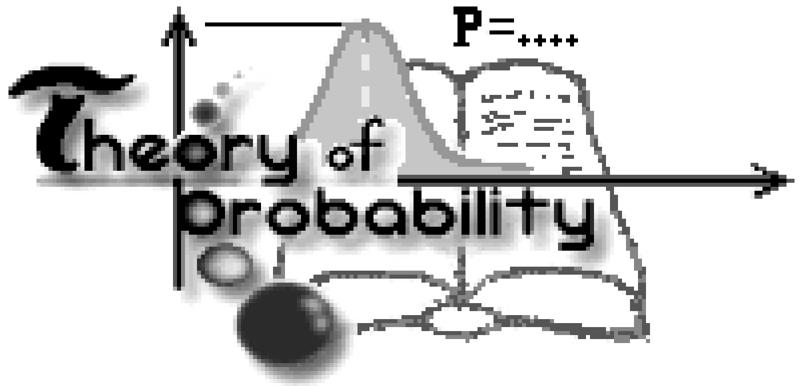
А.Б. Токарев

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 1

Учебное пособие



Воронеж 2005

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Воронежский государственный
технический университет

А.Б. Токарев

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 1

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2005

УДК 621.391

Токарев А.Б. Вероятностные методы в радиотехнике: Учеб. пособие. Ч.1. Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2005. 173 с.

Учебное пособие предназначено для освоения студентами радиотехнических специальностей курса “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”, который является составной частью учебной дисциплины “Радиотехнические цепи и сигналы”. Пособие содержит теоретические сведения, примеры решения задач, материалы для самоконтроля и наборы тестовых заданий, которые могут быть использованы для проведения практических занятий, а также при приеме экзаменов по данному курсу. Первая часть пособия охватывает исследования случайных событий, свойств случайных величин и их систем.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 654200 “Радиотехника” специальности 200700 “Радиотехника”. Пособие предназначено для студентов 2, 3 курсов очной и 4 курса очно-заочной (вечерней) форм обучения.

Табл. 5. Ил. 27. Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты: кафедра радиотехнических систем Воронежского института МВД РФ;
канд. физ.-мат. наук А. А. Жуков

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике” всегда являлся весьма сложным для освоения студентами. Причинами этого служат в первую очередь:

1) невозможность постижения вероятностных понятий без детального анализа многочисленных практических задач;

2) разнообразие литературы и несоответствие обозначений, используемых различными авторами.

Для помощи студентам в преодолении указанных выше факторов и написано данное учебное пособие.

Пособие содержит большой набор подробно разобранных задач, иллюстрирующих практическое применение изучаемой теории. Большое внимание уделено поиску ключевых моментов, отличающих внешне схожие ситуации друг от друга, и способам прямой и/или косвенной проверки правильности получаемых результатов. Применяемые в пособии обозначения согласованы с лекционным курсом, а образцы решений направлены на формирование у студентов навыка корректно и грамотно излагать ход рассуждений.

Пособие содержит также большой набор заданий для самостоятельного решения, разделенный на два класса. Первый класс заданий сопровождается ответами и может использоваться студентами для самопроверки полученных знаний. Задачи второго класса различны по сложности, не содержат готовых ответов и могут быть использованы для проведения коллоквиумов (практических занятий) по курсу.

Автор надеется, что предложенный набор примеров и задач поможет всем желающим лучше освоить учебную дисциплину “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”, и будет благодарен за любую информацию о найденных неточностях и опечатках, а также за идеи по расширению и дополнению данного учебного пособия.

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

1.1. Краткое теоретическое введение

Если при проведении n опытов со случайным исходом в n_A из них наблюдалось событие A, то говорят, что событие A наблюдалось с **частотой**

$$P^*\{A\} = \frac{n_A}{n}. \qquad (1.1)$$

Эта частота $P^*\{A\}$, как и число n_A зарегистрированных событий A, вследствие фактора случайности может существенно изменяться даже при тщательном воспроизведении проведенной серии опытов. Однако при увеличении числа опытов n частота проявляет так называемую статистическую устойчивость и стремится к конкретному предельному значению.

Константа, к которой стремится частота $P^*\{A\}$ наблюдения события A, характеризует объективную меру возможности наступления A и называется **вероятностью** свершения этого события $P\{A\}$

$$P^*\{A\} \underset{n\to\infty}{\to} P\{A\}. \qquad (1.2)$$

Если все исходы, которыми может завершиться проводимый опыт, равновероятны, а их число конечно и равно m, то для определения вероятности произвольного события, являющегося результатом данного опыта, необходимо лишь подсчитать число m_A исходов, сопровождающихся появлением события A. Вероятность свершения случайного события A в такой ситуации определяется соотношением

$$P\{A\} = \frac{m_A}{m}. \qquad (1.3)$$

Формула (1.3) и составляет суть алгебраического метода расчета вероятности.

Примечание: Использовать для обозначения вероятности A более короткую запись P_A не рекомендуется, т.к. она требует заранее строго определить суть события A и неудобна при работе с условными вероятностями.

Непосредственно определить общее число исходов m и число благоприятных исходов m_A удается не всегда. В подобных сложных случаях полезными являются комбинаторные подходы, позволяющие рассчитать количество допустимых комбинаций (различимых расстановок) применительно к многим различным вариантам выбора и комбинирования разнотипных элементов. Наиболее часто используемые типы расстановок представлены в табл. 1.1.

Примеры расстановок (комбинаций):

1. Если набор пронумерованных шариков ①, ②, ③ переупорядочивать различными способами, то можно получить комбинации

①, ②, ③; ①, ③, ②; ②, ①, ③; ②, ③, ①; ③, ①, ②; ③, ②, ①.

С позиций комбинаторики речь идет о наборе из трех разнотипных элементов, из которого для формирования комбинации каждый раз берут все n элементов, причем отличаются друг от друга комбинации порядком расположения элементов.

Таким образом, речь идет о различных перестановках набора из $n = 3$ элементов. Соответствующее число комбинаций равно

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

2. Если из того же набора шариков ①, ②, ③ для формирования комбинации выбирать лишь какие-то 2, то можно получить

①, ②; ②, ①; ①, ③; ③, ①; ②, ③; ③, ②.

Таблица 1.1

Число различимых комбинаций, которые можно составить из n элементов различными способами

Типы комбинаций	Характеристики набора элементов	Число элементов, входящих в расстановку	Учет взаимного расположения элементов	Формула для расчета числа различимых комбинаций (разных расстановок)
Перестановки	n разнотипных элементов (все n элементов – различимые)	n	да	$P_n = n!$
Размещения		k	да	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Сочетания		k	нет	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
Перестановки с повторениями	n_1 эл-тов первого типа; n_2 эл-тов второго типа; …n_m эл-тов m-го типа; $n_1+n_2+\ldots+n_m = n$	n	да	$P_{n_1,n_2\ldots n_m} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!}$

Теперь из набора, включающего $n = 3$ разнотипных элемента для формирования комбинации каждый раз берут лишь $k = 2$ элемента и, по-прежнему, учитывается порядок расположения элементов. В результате речь идет о “размещениях по 2 элемента из 3 имеющихся”, а соответствующее число комбинаций равно

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1} = 6.$$

3. Наконец, если в предыдущем примере комбинации, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считать неразличимыми, то остается лишь три варианта выбора

① + ②; ① + ③ и ② + ③.

Указанные расстановки, не учитывающие взаимного расположения элементов, называются сочетаниями и их число равно

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\times 1} = 3.$$

Пусть теперь число равновозможных исходов проводимого опыта m бесконечно велико. Вероятность события A при этом, по-прежнему, определяется долей благоприятствующих событию A вариантов в общем количестве возможных исходов, однако рассчитать эту долю на основе соотношения (1.3) уже невозможно. При использовании геометрического метода расчета вероятности каждому из равновозможных исходов опыта ставится в соответствие некоторая точка геометрического пространства, так что все возможные исходы занимают некоторую область пространства, а благоприятствующие событию A варианты – некоторую часть этой области. Установленное соответствие позволяет определить вероятность случайного события A как соотношение геометрических размеров указанных областей. Например, при использовании двумерного пространства для представления точек – исходов опыта, вероятность будет определяться соотношением площадей соответствующих фигур

$$P\{A\} = \frac{S_A}{S_{общ}}, \tag{1.4}$$

при работе в трехмерном пространстве придется оценивать соотношение объемов и т.д. Конкретные примеры, поясняющие практическое применение этого метода, будут приведены ниже.

1.2. Типовые задачи

Задача 1. Слово «СТАТИСТИКА» разрезали на карточки, каждая из которых содержит по одной букве, и из этих карточек выбрали наугад 5 штук. Какова вероятность, что выбранные карточки содержат лишь несовпадающие буквы?

Решение

а) В соответствии с условиями задачи любой набор из пяти карточек может быть выбран с одинаковой вероятностью, а общее число способов выбора является конечным, поэтому данную задачу можно решать на основе алгебраического метода.

б) Так как порядок, в котором расположатся выбранные карточки, роли не играет, то в дальнейшем их взаимное расположение будем игнорировать. Это позволит при расчете числа исходов рассматривать различные комбинации карточек как сочетания (см. табл. 1.1).

в) Общее количество вариантов, которыми могут быть выбраны $k = 5$ карточек из $n = 10$ имеющихся составляет

$$m = C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\cdot(10-5)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times\ 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 252\,.$$

Для подсчета же числа благоприятных вариантов учтем, что слово «СТАТИСТИКА» состоит из пяти букв, среди которых "С" встречается 2 раза, "Т" – 3 раза, "А" – 2 раза, "И" – 2 раза и "К" – однократно. Чтобы все выбранные карты содержали разные буквы, каждая из букв должна оказаться выбранной ровно один раз, причем неважно которая именно из карточек с буквой "С" окажется выбранной с какой-то из букв "Т".

Итак, « какая-то из букв "С" вместе с какой-то из букв "Т", какой-то из букв "И" и т.д. » может быть выбрана

$$m_A = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1 = 24 \text{ способами.}$$

В результате, согласно (1.3), вероятность получения набора лишь из различающихся карточек составляет

$$P = \frac{m_A}{m} = \frac{24}{252} = \frac{2}{21}.$$

Задача 2. 7 пронумерованных по порядку деталей одинакового размера и формы находятся в одной емкости. 7 раз детали поочередно (наугад) вынимают, записывая номер детали в протокол. Какова вероятность того, что протокол будет содержать строго убывающую последовательность номеров деталей, если

1) внесенные в протокол детали сразу используются в производстве;

2) после внесения в протокол детали возвращаются обратно в емкость (т.е. могут быть вынуты повторно еще несколько раз).

Решение

а) Как и в предыдущей задаче, однотипность деталей означает равновозможность выбора любой из деталей, находящихся в емкости, на каждом этапе опыта, а их конечное число – ограничение общего числа возможных исходов, поэтому для решения задачи вновь воспользуемся алгебраическим методом.

б) Для возникновения заданного условием события необходимо, чтобы каждая деталь была зарегистрирована только один раз (это становится важным при рассмотрении случая №2) и доставать детали нужно в строго определенном порядке, т.е.

существует лишь единственный “благоприятный” протокол $m_A = 1$.

в) Так как в случае № 1 детали не возвращаются в емкость, то соответствующие этому случаю протоколы автоматически содержат каждую из деталей ровно один раз и отличаются друг от друга лишь порядком следования номеров деталей. Таким образом, общее количество протоколов определяется числом различимых перестановок $n = 7$ деталей (см. табл. 1.1)

$$m = P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040,$$

а вероятность получить один конкретный протокол составляет

$$P_1 = 1 / 5040 \approx 1{,}98 \cdot 10^{-4}.$$

г) Если же детали возвращаются в емкость, то каждый раз, выбирая деталь, можно получить любой из семи номеров деталей, а значит общее число равновозможных протоколов увеличивается до

$$m = 7^{7} = 823543.$$

Таким образом, в случае №2 вероятность получить строго убывающую последовательность номеров деталей уменьшается до

$$P_2 = 1 / 823543 \approx 1{,}21 \cdot 10^{-6}.$$

Задача 3. В 6-значном телефонном номере пропущены 2 цифры. Определить вероятность угадывания правильного номера с первой попытки, если

1) известно, что пропущенные цифры являются последними и отличаются друг от друга (хотя, возможно, совпадают с какими-то из начальных цифр номера);

2) известно, что пропущенные цифры не совпадают друг с другом и могут размещаться в любой части номера (в том числе начинать его), но значение и взаимное расположение других 4 цифр номера известно точно.

Решение

а) Правильный номер – единственный и угадать его надо за одну попытку, поэтому во всех перечисленных в условии случаях число благоприятных вариантов завершения опыта $m_A = 1$. Отличаются эти случаи лишь общим количеством возможных исходов m.

б) В первом случае подлежащие перебору телефонные номера можно выразить шаблоном, например, “1609◆◆”, где знак “◆” соответствует неизвестной цифре. Номера, отличающиеся порядком следования последних цифр, являются различными, поэтому подставляя на вакантные две позиции номера какие-то две из имеющихся десяти цифр, следует учитывать их взаимное расположение. В результате, число комбинаций (а значит и телефонных номеров, которые при этом образуются) определяется числом размещений из $n = 10$ по $k = 2$ (см. табл. 1.1)

$$m = A_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 = 90.$$

В результате искомая вероятность угадывания номера составляет

$$P_1 = \frac{1}{90}.$$

Примечание: Данный вариант задачи можно было бы решить и не используя комбинаторику, т.к. общее число двухзначных комбинаций, начиная с “00” и заканчивая “99” равно 100, а если из их числа исключить сочетания совпадающих цифр “00”, “11”…”99”, то останется как раз 90 чисел.

в) Во втором случае к уже рассмотренному выше добавляется еще целый ряд допустимых шаблонов, отличающихся расположением в номере забытых цифр, например “1◆609◆”, “16◆◆09”, “◆1◆609” и т.п. Чтобы выяснить, сколько всего существует различных шаблонов, следует учесть, что k = 2 позиции внутри номера, состоящего из n = 6 позиций, можно выбрать

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\times4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{6\cdot5}{2} = 15 \text{ способами.}$$

В результате, общее число допустимых вариантов становится равным

$$\text{m} = C_6^2\cdot A_{10}^2 = 15\cdot90 = 1350\,,$$

а вероятность угадывания одного конкретного из них

$$P_2 = 1 / 1350 \approx 7{,}4\cdot10^{-4}.$$

Примечание 1: При подсчете числа шаблонов было использовано число сочетаний, т.к. если воспользоваться числом размещений, то учет взаимного расположения позиций, содержащих пропущенные цифры, будет дублировать контроль взаимного расположения цифр, подставляемых в шаблон, что приведет к ошибке - удвоению расчетного числа вариантов.

Примечание 2: В приведенных выше рассуждениях есть маленькая неточность, т.к., например, при подстановке сочетания цифр "6, 9" в шаблоны "1◆60◆9" и "16◆09◆" получается один и тот же телефонный номер. Назовем условно шаблон, где позиции забытых цифр располагаются левее – первичным, а тот, где позиции смещены вправо – вторичным. Первичный шаблон не может содержать забытых цифр в последней позиции, поэтому общее число первичных шаблонов (а значит и дубликатов) равно

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\times3\cdot2\cdot1} = \frac{5\cdot4}{2} = 10 \text{ и подобная поправка}$$

практически не сказывается на найденной выше вероятности.

Задача 4. В некоторой емкости находится 10 конденсаторов разных номиналов, из которых 3 – бракованные. Из емкости наугад взято 6 конденсаторов. Какова вероятность того, что 2 из них – бракованные?

Решение

а) Различные варианты выбора конденсаторов из емкости отличаются друг от друга составом (т.е. наличием хотя бы одного конденсатора иного номинала, чем в предыдущих комбинациях), однако их взаимное расположение значения не имеет. В связи с этим общее количество вариантов, которыми можно выбрать n = 6 конденсаторов из N = 10 имеющихся, равно $\text{m} = C_N^n$.

б) В благоприятный для анализируемого события набор элементов должно войти ровно k = 2 бракованных конденсатора, а значит остальные j = 4 входящие туда же элементы должны быть из числа годных. Так как любая комбинация бракованных деталей может сочетаться с любым сочетанием годных элементов, то для оценки общего числа благоприятных вариантов необходимо перемножить число вариантов выбора k = 2 элементов из K = 3 бракованных и j = 2 элементов из J = 10 – 3 = 7 годных $\text{m}_A = C_K^k\cdot C_J^j$.

в) Итак, искомая вероятность

P{ среди взятых конденсаторов ровно 2 бракованных } =

$$= C_3^2\cdot C_7^4 \Big/ C_{10}^6 = \frac{3\cdot2\cdot1}{1\times2\cdot1}\cdot\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} =$$

$$= 3\cdot(7\cdot5)\cdot\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = 3\cdot(7\cdot5)\cdot\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{2}.$$

Задача 5. Синхронизация двух передатчиков радиосигналов осуществляется в два этапа. Этап грубой синхронизации заключается в перестройке начальной фазы ведомого передатчика в диапазоне плюс-минус 15º от фазы ведущего, а этап тонкой синхронизации завершает обеспечение синфазности колебаний. Какова вероятность того, что при очередном выходе передатчиков в эфир грубая подстройка фазы не потребуется.

Решение

а) Из физического смысла задачи ясно, что до синхронизации разность фаз между несущими передатчиков равновероятно может принимать любые значения от минус 180º до плюс 180º. Этих значений бесконечно много, поэтому алгебраический метод, ориентированный на конечное число равновозможных исходов, здесь применить нельзя, а вот геометрический подход – вполне уместен.

б) Единственной независимой переменной, случайно принимающей значения из диапазона $-180^{\circ} \le \varphi \le +180^{\circ}$, является в данной задаче разность фаз. В связи с этим точки, соответствующие различным исходам опыта, можно разместить в одномерном пространстве, т.е. на прямой (см. рис. 1.1).

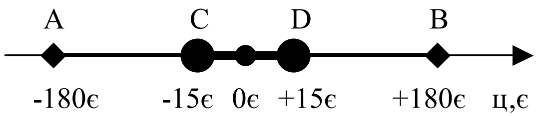


Рис. 1.1

Всем возможным исходам опыта соответствует совокупность точек, заполняющая отрезок AB, а благоприятной областью (при попадании в которую не требуется грубой синхронизации) является отрезок CD. Геометрические размеры отрезков определяются их длинами, поэтому для определения доли благоприятных исходов в составе всех исходов опыта достаточно сопоставить длины указанных отрезков

$$P\{\text{ грубой синхронизации не требуется }\} = \frac{P_{CD}}{P_{AB}} = \frac{30^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{12}.$$

Задача 6. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки M и L. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

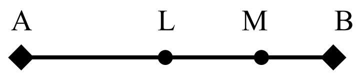


Рис. 1.2

Решение

а) На любом отрезке содержится бесконечное множество точек, а все варианты расстановки M и L согласно условию равновозможны, поэтому решать данную задачу следует на основе геометрического метода расчета.

б) Обратите внимание, что хотя исходная задача геометрически привязана к отрезку (т.е. одномерному пространству), для оценки искомой вероятности нужно контролировать положение на отрезке AB двух независимых друг по отношению к другу величин: координат точек M и L. Случайное положение этих точек на отрезке приводит к тому, что длины отрезков AL, BL, AM и BM могут равновозможно принимать любые значения от 0 до l. *Опираться же в решении на длину отрезка ML нельзя, т.к. хотя она тоже может изменяться от 0 до l, но наибольшее значение наблюдается гораздо реже, чем значения малые (Длина ML равна l лишь если позиции обеих точек M и L совпадают с границами отрезка AB).*

Итак, будем в дальнейшем опираться в решении на длины отрезков AL и AM, независимо друг от друга принимающих любые значения от 0 до l. Тогда отдельному элементарному исходу опыта будет соответствовать некоторая точка двумерного пространства, а всем возможным вариантам размещения точек M и L будут соответствовать точки, принадлежащие квадрату со стороной l, показанному на рис. 1.3.

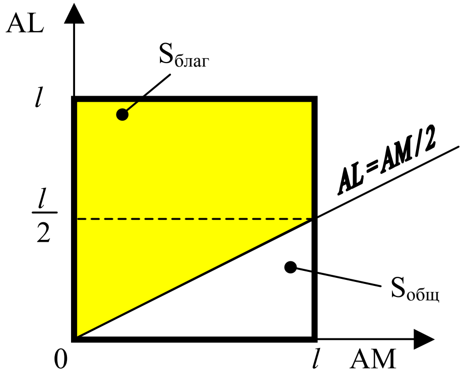


Рис. 1.3

в) Отметим, что если точка L лежит правее M, то требования условия выполняются автоматически. Если же, напротив, L находится левее M, то для выполнения поставленных требований необходимо, чтобы точка L лежала правее середины отрезка AM, т.е. выполнялось неравенство

$$AL \geq AM / 2.$$

Отобразив на рис. 1.3 линию AL = AM/2, нетрудно видеть, что требованиям условия удовлетворяют все точки, лежащие выше этой линии, что позволяет выделить штриховкой ту часть общей (квадратной) области, которая соответствует благоприятным исходам опыта.

г) Сопоставляя геометрические размеры благоприятной части с общими размерами области исходов, получаем

$$\mathrm{P}\{\, L \text{ ближе к } M, \text{ чем к } A \,\} = \frac{S_{благ}}{S_{общ}} = \frac{l \cdot l - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2}}{l \cdot l} = \frac{3}{4}.$$

<u>Задача 7.</u> Два человека условились встретиться в определенном месте между 7 и 8 часами утра. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если моменты их прихода в точку встречи случайны, независимы и равновероятны в течение указанного часа?

<u>Решение</u>

а) Если описанный в условии опыт повторять многократно, то наблюдаемые ситуации будут отличаться друг от друга совокупностью моментов прихода в точку встречи первого и второго человека. Обозначим эти моменты прихода через x и y. Поскольку моменты x и y могут быть (в пределах отведенного часа) произвольными, то и равновозможных элементарных исходов опыта, определяемых конкретной парой чисел x и y, оказывается бесконечно много, поэтому для решения поставленной задачи придется воспользоваться геометрическим методом расчета вероятностей.

б) Отличие данной задачи от предыдущей заключается в том, что теперь существуют <u>две независимые друг по отношению к другу величины x и y</u>. Для отражения факта независимости каждую из величин придется откладывать на своей оси, а совокупность точек, отображающих элементарный исход конкретного опыта, будет заполнять квадратную область плоскости, показанную на рис. 1.4.

в) Для того чтобы встреча состоялась, разница между моментами прихода x и y не должна превышать 1/3 часа (20 минут), поэтому к благоприятным можно отнести все исходы, удовлетворяющие неравенству $|x - y| \leq 1/3$, которое можно переписать также в форме $-1/3 \leq x - y \leq 1/3$ или в виде совокупности неравенств

$$\begin{cases} y \leq x + 1/3, \\ y \geq x - 1/3. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Геометрическое место точек, соответствующих соотношению (1.5), показано на рис. 1.4 в виде заштрихованной области.

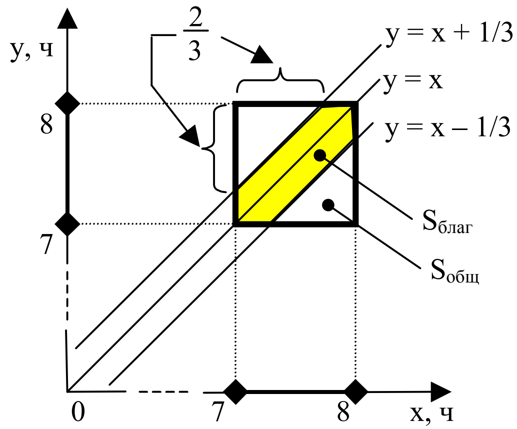


Рис. 1.4

г) Геометрические размеры областей двумерного пространства определяются их площадями, поэтому для расчета искомой вероятности осталось сопоставить площадь заштрихованной фигуры (квадрат за вычетом двух угловых треугольников) с площадью всего квадрата. В результате получаем

$$P\{\text{ встреча состоится }\} = \frac{S_{благ}}{S_{общ}} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}{1 \cdot 1} = \frac{5}{9}.$$

1.3. Задачи для самоконтроля

1.1. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

Ответ: 30.

1.2. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность того, что следующий транзистор будет стандартным.

Ответ: $P = \begin{cases} (n-k)/(n+m-k), & \text{при } \mathrm{k} < \mathrm{n}, \\ 0 \ \text{ при } \mathrm{k} \geq \mathrm{n}. \end{cases}$

1.3. Куб все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что извлеченный наудачу кубик будет иметь две окрашенные грани.

Ответ: 0,096.

1.4. (Задача Бюффона, 1777 г.) На пол, разграфленный параллельными прямыми на полосы ширины L, бросается наугад игла длиной l (l<L). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Ответ: $2l/\pi$ L.

1.5. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметром $2r$<a. Найти вероятность того, что: а) монета попадет целиком внутрь одного квадрата; б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

Ответ: а) $(a-2r)^2/a^2$; б) $1-4r^2/a^2$.

1.6. Имеется прямоугольная решетка из цилиндрических прутьев радиуса r. Расстояние между осями прутьев равны соответственно a и b. Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки.

Ответ: $(a-2r-d)\cdot(b-2r-d)/(a\cdot b)$.

1.7. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток (а отход может приходиться и на начало следующих суток). Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.

Ответ: 139/1152.

1.8. Коэффициенты a и b, входящие в квадратное уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$, с одинаковой вероятностью принадлежат всем точкам из прямоугольника $|a| \le n, |b| \le m$. Определить вероятность того, что уравнение имеет вещественные корни.

Ответ: $\begin{cases} 1 - 2m^2/3n & \text{при } n \ge m^2, \\ \sqrt{n}/3m & \text{при } n < m^2. \end{cases}$

1.9. Имеется коробка с k конденсаторами разных номиналов. Из коробки m раз вынимают по одному конденсатору ($m \le k$), его номинал записывается, а сам конденсатор возвращается в коробку. Найти вероятность того, что все выписанные номиналы окажутся различными.

Ответ: $k!\,/\,((m-k)! \cdot k^m)$.

1.4. Контрольные задания

1.10. Одновременно подбрасывается N монет. Найти вероятность того, что выпадут…

Номер	N	Событие
1	3	ровно два “герба”
2	3	по меньшей мере два “герба”
3	3	ровно три “герба”
4	3	нечетное число “гербов”
5	4	ровно две “решки”
6	4	по меньшей мере две “решки”
7	4	ровно три “решки”
8	4	нечетное число “решек”
9	5	менее двух “гербов”
10	5	менее трех “решек”

1.11. Имеется набор карточек с буквами, состав которого показан в левом столбце таблицы (см. ниже). Ребенок наугад достает N карточек (см. центральный столбец таблицы) и раскладывает их в ряд. Какова вероятность, что после вытаскивания очередной карточки перед ним образуется слово, указанное в правом столбце таблицы?

Номер	Набор карточек	N	Слово
1	“А”, “А”, “А”, “Е”, “И”, “К”, “М”, “М”, “Т”, “Т”	10	“МАТЕМАТИКА”
2	“А”, “А”, “О”, “С”, “Т”, “Т”, “Ч”	7	“ЧАСТОТА”
3	”В”, ”Е”, ”Н”, ”О”, ”О”, ”Р”, ”С”, ”Т”, ”Т”, ”Ь”, ”Я”	11	“ВЕРОЯТНОСТЬ”
4	”О”, ”О”, ”П”, ”Т”, ”Т”, ”Ы”	4	“ОПЫТ”
5	“А”, “Й”, “К”, “Л”, “М”, “Н”, “О”, “С”, “У”, “Ч”	6	“СЛУЧАЙ”
6	“А”, “Б”, “В”, “Г”, “Д”	3	“ДВА”
7	“А”, “К”, “О”, “О”, “О”, “П”, “П”, “П”, “Т”, “Ы”	7	“ПОПЫТКА”
8	“И”, “О”, “П”, “Р”, “С”, “Т”	3	“ТРИ”

9	“Е”, “И”, “М”, “Н”, “О”, “Р”	5	“НОМЕР”
10	“А”, “Е”, “З”, “К”, “Л”, “Р”, “У”, “Т”, “Т”, “Т”, “Т”, “Ь”	9	“РЕЗУЛЬТАТ”

1.12. Два человека А и В, а также еще 8 человек стоят в очереди. Определить вероятность того, что…

Номер	Событие
1	А и В стоят рядом друг с другом
2	А стоит на нечетном, а В – на четном месте в очереди
3	и А, и В стоят на нечетных местах в очереди
4	А и В отделены друг от друга ровно тремя лицами
5	А и В отделены друг от друга по меньшей мере двумя лицами
6	А и В отделены друг от друга более чем пятью лицами
7	между А и В стоит нечетное количество человек
8	между А и В стоит четное (положительное) число лиц
9	как после А, так и после В стоит не менее шести человек
10	как перед А, так и перед В стоит не менее пяти человек

1.13. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся последовательно две карточки. Определить вероятность того, что…

Номер	Событие
1	обе карточки будут содержать нечетные числа
2	одна из карточек будет содержать четное, а другая – нечетное число
3	сумма чисел на двух карточках будет равна 19
4	образуемую из двух полученных чисел дробь можно будет сократить. (Например: 2/6=1/3)
5	число на первой карточке превышает число со второй карточки более чем на 3
6	число на первой карточке минимум вдвое превысит число со второй карточки
7	числа отличаются по абсолютной величине не более чем на 2
8	сумма чисел на двух карточках будет менее 12
9	сумма чисел на этих карточках будет четным числом
10	произведение чисел на карточках превысит 70

1.14. Какова вероятность, что при одновременном броске N игральных кубиков…

Номер	N	Событие
1	2	выпавшие значения будут различными?
2	2	выпавшие значения будут совпадающими?
3	2	сумма выпавших значений будет нечетным числом?
4	2	сумма выпавших значений превысит 9?
5	2	произведение выпавших значений будет не менее 25?
6	3	все выпавшие значения будут различными?

7	3	по крайней мере на одном кубике выпадет “1”?
8	3	сумма выпавших значений будет меньше 5?
9	3	произведение выпавших значений будет равно 8?
10	3	произведение выпавших значений будет меньше 4?

1.15. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли N человек. Предполагая, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго, найти вероятность того, что…

Номер	N	Событие
1	3	все пассажиры выйдут на разных этажах
2	3	двое выйдут на одном этаже, а остальные на разных
3	3	хотя бы один из них выйдет на 5-м этаже или выше
4	4	все пассажиры выйдут на разных этажах
5	4	двое выйдут на одном этаже, а остальные на разных
6	4	по меньшей мере двое выйдут на 6-м этаже или выше
7	5	все пассажиры выйдут на разных этажах
8	5	двое выйдут на одном этаже, а остальные на разных
9	5	по меньшей мере трое выйдут на 7-м этаже или выше
10	6	все пассажиры выйдут на разных этажах

1.16. В кассе сопротивлений лежат *n* резисторов разных номиналов. Из кассы *n* раз подряд выбирается случайный элемент, его номинал записывается, а элемент возвращается обратно. Найти вероятность того, что выписанный ряд номиналов будет содержать…

Номер	Событие
1	лишь несовпадающие значения
2	значения, расположенные строго в порядке возрастания
3	значения лишь одного и того же номинала
4	пять значений одного номинала, а остальные – какого-то другого номинала
5	ровно два совпадающих значения (а остальные – различные)
6	три совпадающих значения, а все остальные – различные
7	какую-то комбинацию, включающую три самых малых номинала
8	комбинацию, включающую ровно четыре произвольных номинала
9	две пары совпадающих, а все остальные – различные значения
10	пять пар произвольных значения

1.17. В кассе сопротивлений имеется пять резисторов номиналом 1 кОм, три резистора номиналом 3 кОм и два – по 5 кОм. Взятые наугад три резистора соединяются последовательно. Какова вероятность того, что получившееся соединение будет…

Номер	Событие
1	состоять лишь из резисторов разных номиналов?
2	состоять лишь из резисторов одного номинала?
3	включать по меньшей мере пару совпадающих резисторов?

4	иметь сопротивление ровно 3 кОм?
5	иметь сопротивление ровно 5 кОм?
6	иметь сопротивление ровно 7 кОм?
7	иметь сопротивление более 12 кОм?
8	иметь сопротивление более 10 кОм?
9	иметь сопротивление менее 8 кОм?
10	иметь сопротивление менее 6 кОм?

1.18. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Пусть (ξ,η) - ее координаты. Найти вероятность того, что…

Номер	Событие
1	будет выполняться неравенство $e^{\xi} - 1 \le \eta$
2	одновременно выполнятся неравенства $\xi+\eta \le 1$ и $\xi\cdot\eta \le 2/9$
3	одновременно выполнятся неравенства $\xi+\eta > 1$ и $\xi\cdot\eta \le 2/9$
4	удаление точки от начала координат не превысит 1
5	точка (ξ,η) попадет внутрь круга, вписанного в данный квадрат
6	точка (ξ,η) будет лежать вне круга, вписанного в данный квадрат
7	корни уравнения $x^2 - \xi\cdot x + \eta = 0$ будут действительными числами
8	произведение корней уравнения $x^2 + \xi\cdot x + \eta = 0$ будет меньше $\xi/3$
9	уравнение $x^2 + \xi\cdot x + \eta = 0$ будет иметь совпадающие корни
10	сумма корней уравнения $x^2 - \xi\cdot x + \eta = 0$ будет меньше $\eta/3$

1.19. Квадратное уравнение $x^2 - a \cdot x + b = 0$ имеет два вещественных корня, первый из которых с равной вероятностью принадлежит любой из точек диапазона $1 \le x_1 \le 4$; а второй лежит в диапазоне $0 \le x_2 \le 8$. Какова вероятность того, что …

Номер	Событие
1	отношение x_2 / x_1 не превысит 2 ?
2	произведение корней уравнения не превысит 4?
3	сумма корней уравнения будет больше 8 ?
4	корни будут отличаться друг от друга не более чем на 1 ?
5	корни будут отличаться друг от друга более чем на 2 ?
6	будет выполняться неравенство $a < 4$?
7	будет выполняться неравенство $b \ge 24$?
8	будет выполняться неравенство $a > 2 \cdot b$?
9	одновременно выполнятся неравенства $a > 3$ и $b < 4$?
10	одновременно выполнятся неравенства $a \le 5$ и $b \ge 4$?

1.20. Взломщик пытается угадать (подобрать) состоящий из десятичных цифр четырехзначный пароль, затрачивая на каждую попытку 5 секунд. Найти вероятность того, что ему удастся справиться с этой задачей за 15 минут, если известно, что…

Номер	Событие
1	пароль является нечетным числом, превышающим 4567
2	пароль включает лишь четные цифры (включая “0”)
3	в пароль по меньшей мере дважды входит цифра “7”

4	пароль состоит из цифр “2”, “3”, “7” и “8”, взаимное расположение которых неизвестно
5	пароль начинается с нечетной цифры и состоит из несовпадающих цифр
6	какие-то две цифры пароля совпадают между собой (а две другие не совпадают ни с этой парой, ни друг с другом)
7	пароль представляет собой четное число, состоящее лишь из несовпадающих цифр
8	в пароль ровно один раз входят цифры “0” и “9”, расположение которых неизвестно, а две другие цифры – произвольные
9	первая и последняя цифры пароля гарантировано совпадают друг с другом, а остальные могут быть какими угодно
10	две начальные цифры пароля совпадают между собой, а конечные не совпадают ни с этой парой, ни друг с другом

1.21. На окружности с центром в точке O, имеющей радиус R, размещена некоторая фиксированная точка F. На ту же самую окружность случайно и независимо по отношению друг к другу помещают еще две точки: A и B. Определить вероятность того, что…

Номер	Событие
1	т. A окажется ближе к т. B, чем к центру окружности
2	т. A окажется ближе к т. B, чем к т. F
3	длина отрезка AB превысит R/2
4	отрезок AB окажется как минимум вдвое больше, чем AF
5	угол AFB окажется больше 120º

6	площадь треугольника AOF окажется больше $R^2/4$
7	площадь сектора AOF окажется больше $R^2/4$
8	площадь треугольника AOB окажется больше $R^2/4$
9	площадь сектора AOB окажется больше $R^2/4$
10	площадь треугольника AFB окажется больше $R^2/4$

2. РАСЧЁТ ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

2.1. Краткое теоретическое введение

Пересечением $\prod_{j=1}^{N} A_j$ **(логическим произведением)** N событий A_j называют событие, заключающееся в одновременном наблюдении <u>всех</u> событий A_j. В частности, пересечением событий A и B называют событие **A·B** (или "A∩B"), наблюдаемое, когда <u>и A, и B наступают в одном и том же опыте</u> (рис. 2.1а). Признаком пересечения в текстовых формулировках событий служит союз **"и"**.

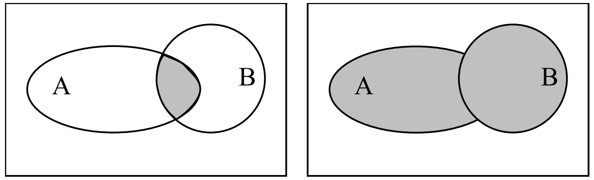
Объединением $\sum_{j=1}^{N} A_j$ **(логической суммой)** N событий A_j ($1 \le j \le n$) называют событие, которое наблюдается каждый раз, когда наступает <u>хотя бы одно из</u> событий A_j. В частности, объединением событий A и B называют событие **A+B** (или "A∩B"), которое наблюдается, когда <u>наступает или A, или B или оба этих события одновременно</u> (рис. 2.1б). Признаком пересечения в текстовых формулировках событий служит союз **"или"**.

События, наступление которых в одном опыте невозможно, называются **несовместными** (рис. 2.1в), а событие $\overline{A}$, возникающее в опыте <u>всегда, когда не происходит</u> событие A, называется ему **противоположным** (рис. 2.1г).

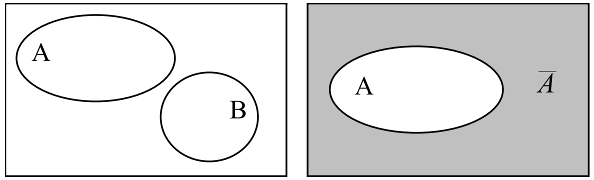
<u>Вероятность пересечения</u> событий A и B равна

$$P\{A \cdot B\} = P\{A\} \cdot P\{B|A\} = P\{B\} \cdot P\{A|B\}, \quad (2.1)$$

где $P\{B|A\}$ – условная вероятность события B, т.е. вероятность, вычисленная при условии, что событие A уже произошло; $P\{A|B\}$ – условная вероятность события A, определяющая возможность наступления этого события при уже свершившемся событии B.



а) Пересечение событий **A·B**; б) Объединение событий **A+B**;



в) Несовместные события; г) Противоположные события

Рис. 2.1

События, для которых условная вероятность отличается от безусловной $P\{B|A\} \ne P\{B\}$, называются **зависимыми**, а те, у которых эти вероятности совпадают ($P\{B|A\} = P\{B\}$), – **независимыми**.

<u>Вероятность объединения</u> двух событий A и B равна

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\}, \quad (2.2)$$

где $P\{A \cdot B\}$ – вероятность того, что события A и B будут наблюдаться в одном и том же опыте совместно. Отсюда следует, что <u>для несовместных событий</u> вероятность наступления хотя бы одного из них определяется суммой их вероятностей

$$P\left\{\sum_{j=1}^{N} A_j\right\} = \sum_{j=1}^{N} P\{A_j\}. \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что <u>для противоположных событий</u> (одно из которых в опыте обязательно происходит) справедливо

$$P\{A\} + P\{\overline{A}\} = 1. \quad (2.4)$$

Формулы (2.1)-(2.4) являются основой при расчете вероятностей сложных событий. На их основе можно получить важный частный случай расчета вероятностей для последовательности независимых испытаний. Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А может свершиться с одной и той же вероятностью p, то вероятность того, что за n опытов А произойдет ровно k раз равна

$$P\{\text{“ровно в } k \text{ опытах из } n \text{ произойдет событие А”}\} = \\ = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) является точной и удобна при небольшом числе производимых опытов n, однако при n >> 1 ее вычислительная сложность стремительно нарастает. В связи с этим полезно рассмотреть два приближенных подхода к решению той же задачи.

Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа. Если число производимых опытов n велико ($n >> 1$), вероятность свершения события А одинакова для всех опытов и равна p, а произведение $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 10$, то для расчёта вероятности многократного появления события A в n опытах можно использовать приближенные формулы Муавра-Лапласа:

$$P\{\text{ событие А произойдет ровно k раз }\} \approx \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D}} \exp\left(-\frac{(k-n\cdot p)^2}{2\cdot D}\right),$$

$$P\{\text{ событие А произойдет от } k_1 \text{ до } k_2 \text{ раз включительно }\} \approx \\ \approx F_{\text{ст}}\left(\frac{k_2 - n\cdot p}{\sqrt{D}}\right) - F_{\text{ст}}\left(\frac{k_1 - n\cdot p}{\sqrt{D}}\right), \qquad (2.6)$$

где $D = n \cdot p \cdot (1-p)$, а $F_{\text{ст}}(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, определяемая интегралом $F_{\text{ст}}(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2)\,dz$. Таблица значений этой функции приведена в приложении А.

Формула Пуассона. Если число производимых опытов n велико (n>>1), вероятность p мала ($p < 0{,}1$), а произведение $n \cdot p \leq 10$, то

$$P\{\text{ событие А произойдет ровно k раз }\} \approx \frac{(n\cdot p)^k e^{-n\cdot p}}{k!}. \qquad (2.7)$$

Наконец, если поток наблюдаемых событий является пуассоновским (т.е. обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последействия), то вероятность наступления за время наблюдения τ ровно k событий равна

$$P\{\text{ событие А произойдет ровно k раз }\} \approx \frac{(\lambda\cdot\tau)^k e^{-\lambda\cdot\tau}}{k!}, \qquad (2.8)$$

где λ – интенсивность потока, определяемая средним числом событий, наблюдаемых в единицу времени.

2.2. Типовые задачи

Задача 1. В двух партиях 85 и 60% доброкачественных деталей соответственно. Из каждой партии наугад выбирается по одному изделию. Какова вероятность того, что:
1) оба изделия окажутся бракованными;
2) одно изделие будет доброкачественным и одно бракованным;
3) хотя бы одно из изделий окажется бракованным?

Решение

а) Введем следующие обозначения для событий:

A_1 = “из первой партии выбрано качественное изделие”;

A_2 = “из второй партии выбрано качественное изделие”;

Исходя из условия, эти два события являются взаимно независимыми, а их вероятности равны $P\{A_1\} = 0{,}85$ и $P\{A_2\} = 0{,}6$.

б) Для того, чтобы оба выбранных изделия оказались бракованными, необходимо, чтобы в одном и том же опыте произошло **и** событие $\overline{A}_1$, **и** событие $\overline{A}_2$ (черта сверху означает событие противоположное исходному). Таким образом, искомое событие является <u>пересечением</u> $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, поэтому для расчета его вероятности следует опираться на (2.1) и (2.4)

$P_1 = P\{$ "оба изделия бракованные" $\} = P\{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2\} =$
$= P\{\overline{A}_1\} \cdot P\{\overline{A}_2\} = (1 - P\{A_1\}) \cdot (1 - P\{A_2\}) = 0{,}15 \cdot 0{,}4 =$ 0,06.

Примечание: Обратите внимание, что как $P\{\overline{A}_1\} > P\{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2\}$, *так и* $P\{\overline{A}_2\} > P\{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2\}$. *Это вполне логично, т.к. требование "**и** первое изделие бракованное, **и** второе бракованное" является более жестким, чем требование недоброкачественности лишь одного из изделий, удовлетворить этому требованию труднее, поэтому и вероятность его выполнения меньше, чем у каждого из частных требований в отдельности.*

в) Важно понимать, что рассматриваемое в случае №2 событие <u>отличается</u> от события "первое изделие доброкачественное, а второе – нет", т.к. в его формулировке указано лишь <u>общее число</u> хороших и плохих изделий. Правильной формулировкой для рассматриваемого в случае №2 события является:

"(первое изделие доброкачественное, а второе бракованное)
ИЛИ (первое изделие бракованное, а второе доброкачественное)".

Объединяемые здесь союзом "или" варианты не могут реализоваться в одном и том же опыте (являются несовместными), поэтому расчет вероятности данного события следует производить на основе (2. 3) и (2.1)

$P_2 = P\{$ "одно изделие доброкачественное и одно бракованное" $\} =$
$= P\{ (A_1 \cdot \overline{A}_2) + (\overline{A}_1 \cdot A_2) \} = P\{A_1\} \cdot (1 - P\{A_2\}) +$
$+ (1 - P\{A_1\}) \cdot P\{A_2\} = 0{,}85 \cdot 0{,}4 + 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}34 + 0{,}09 = 0{,}43.$

г) По отношению к событиям $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ формулировка "хотя бы одно из изделий бракованное" означает, что должно выполниться **или** $\overline{A}_1$, **или** $\overline{A}_2$, **или** оба этих события одно-

временно. Таким образом, речь идет об <u>объединении</u> событий, вероятность которого определяется соотношением (2.2)

$P_3 = P\{$ "хотя бы одно из изделий бракованное" $\} = P\{\overline{A}_1 + \overline{A}_2\} =$
$= P\{\overline{A}_1\} + P\{\overline{A}_2\} - P\{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2\} = 0{,}15 + 0{,}4 - 0{,}15 \cdot 0{,}4 = 0{,}49.$

Примечание: Последнее (отрицательное по знаку), слагаемое в предыдущей формуле является обязательным, так как события $\overline{A}_1$ *и* $\overline{A}_2$ *являются совместными, и, следовательно*
1) в состав события $\overline{A}_1$ *входит* $\overline{A}_1 \cdot A_2$ *и* $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$;
2) событие $\overline{A}_2$ *включает в себя как* $A_1 \cdot \overline{A}_2$, *так и* $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$.
В результате, без указанного слагаемого вероятность события $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$ *оказалась бы включенной в расчеты дважды.*

д) При проведении вероятностных расчетов рекомендуется по возможности решать задачу разными способами и придумывать всевозможные способы косвенной проверки правдоподобности результата. В разобранной выше задаче это можно сделать несколькими способами. Например, перепроверим последний этап расчетов, решая ту же задачу через вероятность противоположного события

$P\{$"оба изделия доброкачественные"$\} = P\{A_1 \cdot A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\} =$
$= 0{,}85 \cdot 0{,}6 = 0{,}51.$

Откуда $P\{$"хотя бы одно из изделий бракованное"$\} = 1 - 0{,}51 = 0{,}49.$

Если же сопоставить события, рассматривавшиеся ранее, то видно, что события №1 и №2 являются несовместными, а их объединение (т.е. ситуация, когда **или** "оба изделия бракованные", **или** "одно изделие доброкачественное и одно бракованное") эквивалентно событию "хотя бы одно из изделий бракованное", которое рассматривалось в случае №3. Суммируя, в соответствии с (2.3), вероятности первых двух событий, получим

$$P_1 + P_2 = 0{,}06 + 0{,}43 = 0{,}49 = P_3$$

– вероятность события №3. Это является достаточно убедительной косвенной проверкой правильности проведенных расчетов.

Задача 2. Для освещения в помещении установлено 3 обычных лампы накаливания и одна лампа аварийного освещения, питающаяся от отдельного источника питания (см. рис. 2.2). Вероятность отключения сети “220 В” составляет 0,1; вероятность выхода из строя источника аварийного питания равна 0,02. Определить вероятность того, что помещение будет хотя бы частично освещено, если

1) вероятность выхода из строя лампы аварийного освещения пренебрежимо мала;

2) мощные лампы накаливания перегорают независимо по отношению друг к другу;

3) вероятность выхода из строя для каждой из ламп накаливания составляет 0,2.

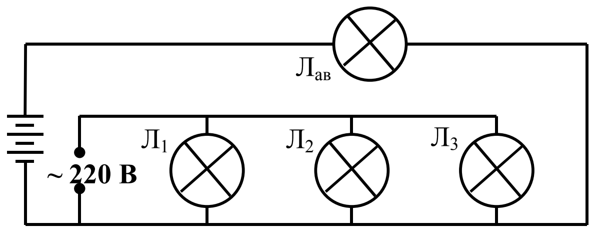


Рис. 2.2

Решение

а) Пусть событие A состоит в том, что “в помещении работает аварийное освещение” (из условия очевидно, что $P\{A\} = 1-0{,}02 = 0{,}98$), а событие B заключается в том, что “хотя бы одна из ламп $Л_1$–$Л_3$ светится”. Тогда итоговое событие C, предполагающее “хотя бы частичную освещенность помещения” будет представлять собой объединение событий A и B.

б) Следует иметь в виду, что правило (2.2) рассчитано на объединение лишь двух событий, а при добавлении третьего существенно усложняется. А именно, пусть

$P\{D_j\}$= P{“Лампа $Л_j$ находится в рабочем состоянии”}= 1–0,2 = 0,8.

Тогда P{“хотя бы одна из ламп накаливания работоспособна”} =

$$=P\{D_1+D_2+D_3\}=P\{(D_1+D_2)+D_3\}=P\{D_1+D_2\}+P\{D_3\}-P\{(D_1+D_2)\cdot D_3\}=$$

$$=P\{D_1\}+P\{D_2\}+P\{D_3\}-P\{D_1\cdot D_2\}-P\{D_1\cdot D_3\}-P\{D_2\cdot D_3\}+P\{D_1\cdot D_2\cdot D_3\}.$$

Так как события D_1, D_2 и D_3 независимы (лампы выходят из строя независимо по отношению друг к другу), то вероятность их пересечения определяется произведением $P\{D_j\}$, поэтому

P{“хотя бы одна из ламп накаливания работоспособна”} =

$$= 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8\cdot0.8 - 0{,}8\cdot0{,}8 - 0{,}8\cdot0{,}8 + 0{,}8\cdot0{,}8\cdot0{,}8 = 0{,}992.$$

При расчете вероятности объединения более чем трех событий прямая расчетная формула становится уже чрезвычайно громоздкой, поэтому тот же результат гораздо выгоднее получить через вероятность противоположного события:

P{“все лампы накаливания – в неработоспособном состоянии”} = $= P\{\ \overline{D}_1\cdot\overline{D}_2\cdot\overline{D}_3\ \} = 0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}008.$

P{“хотя бы одна из ламп $Л_1$–$Л_3$ работоспособна”}= 1– 0,008 = 0,992.

в) Введенное выше событие B требует, чтобы хотя бы одна из ламп $Л_1$–$Л_3$ была работоспособна **и** в сети “220 В” было напряжение, поэтому вероятность события B можно определить как пересечение этих двух составляющих

$$P\{\ B\ \} = 0{,}992\cdot(1-0{,}1) = 0{,}8928.$$

г) Объединяя, наконец, события A и B, получим

P{ “помещение будет хотя бы частично освещено» } = P{C} =
= P{A}+ P{B} – P{A·B} = 0,98 + 0,8928 – 0,98·0,8928 = 0,9978.

Примечание: Обратите внимание на тот факт, что если в предыдущем выражении при расчете вероятности логической суммы событий пропустить последнее (отрицательное) слагаемое, то результат суммирования окажется заметно больше единицы. Но по своей физической сути <u>*вероятность не может превышать единицу*</u>*. Поэтому, обнаружение подобного результата явно свидетельствовало бы, что допущена ошибка.* <u>*Не забывайте на каждом этапе проверять (прямо или косвенно) достоверность получаемых сведений и не стесняйтесь помещать подтверждающие корректность рассуждений факты в оформление решения задач.*</u>

<u>Задача 3.</u> Проводится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых событие А может наблюдаться с одной и той же вероятностью $p > 0$. Какова вероятность того, что для достижения n успехов потребуется (n + k) испытаний (k=0,1,...)?

<u>Решение</u>

а) Для завершения последовательности испытаний в условиях задачи необходимо совместное свершение двух событий:
C_1 = в совокупности опытов, предшествующих последнему, событие А наблюдалось ровно (n – 1) раз;
C_2 = последний опыт завершился успешно, т.е. с наступлением события А.
Согласно (2.5) для первого из этих событий

$$P\{C_1\} = C_{n+k-1}^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^{(n+k-1)-(n-1)} = C_{n+k-1}^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^k,$$

а вероятность второго определяется вероятностью наступления самого события А, поэтому

$$P\{\text{“для достижения n успехов потребуется (n + k) испытаний”}\} = P\{C_1\} \cdot P\{C_2\} = C_{n+k-1}^{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^k.$$

Примечание: Последнее соотношение иногда записывают в виде

$$P(n, n+k) = C_{-n}^k p^n (p-1)^k,$$

где $$C_{-n}^k = \frac{(-n)(-n+1)...(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k C_{n+k-1}^k$$

и называют отрицательным биноминальным распределением.

При n=1 оно превращается в геометрическое $P(1, k+1) = pq^k$.

<u>Задача 4.</u> Две артиллерийские установки, имеющие равную скорострельность, ведут артиллерийскую дуэль на предельной дальности. Вследствие этого, у установки, начавшей дуэль, вероятность попадания в противника составляет лишь 1/5. Вероятность же того, что установка, вступившая в борьбу второй, попадет в инициатора дуэли составляет при каждом выстреле 1/4. Полагая, что число снарядов неограниченно, а стрельба ведется строго поочередно, определить вероятность того, что победит в дуэли вторая установка.

<u>Решение</u>

а) Введем следующие обозначения для событий:
A = “удачный выстрел установки, начавшей дуэль”;
B = “попадание в цель установки, вступившей в борьбу второй”.
Исходя из условия, эти два события являются взаимно независимыми, а их вероятности равны P{A} = 1/5 и P{B} = 1/4.

б) По условию продолжительность дуэли не ограничена, важен лишь конечный результат, поэтому условие победы в дуэли второй из установок можно сформулировать следующим образом:

“ (первая установка промахнулась, вторая – попала) **ИЛИ**
(первая установка промахнулась, вторая – промахнулась,
первая – промахнулась вторично, вторая – попала
(своим вторым выстрелом)) **ИЛИ** (…) ”

<u>Объединяемые</u> здесь союзом “или” варианты не могут реализоваться в одном и том же опыте (являются несовместными),

поэтому расчет вероятности данного события следует производить на основе (2. 3). Особенность лишь в том, что количество слагаемых в сумме будет неограниченным

P{ “в дуэли победит вторая установка” } =

$$= P\{ \overline{A}\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}\cdot B + \ldots \} =$$

$$= (1 - P\{A\})\cdot P\{B\} + (1 - P\{A\})\cdot(1 - P\{B\})\cdot(1 - P\{A\})\cdot P\{B\} + \ldots =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots$$

Обратите внимание, что слагаемые, входящие в последнее найденное выражение, образуют бесконечную геометрическую прогрессию с начальным элементом $a_0 = 1/5$ и знаменателем прогрессии $q = 3/5$. Их сумма может быть получена в виде

$$P\{ \text{“в дуэли победит вторая установка”} \} = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1/5}{1-3/5} = \frac{1}{2}.$$

Итак, несмотря на бесконечно большое число исходов, которыми может закончиться дуэль, <u>общая вероятность победы установки, вступившей в борьбу второй, ограничена и составляет 1/2</u>, т.е. совпадает с вероятностью победы установки, начавшей дуэль. Подобное совпадение шансов оказалось возможным за счет того, что

1) первая установка имеет “фору” в один выстрел;

2) меткость стрельбы в среднем выше у второй установки.

<u>Задача 5.</u> Игровой автомат выдает выигрышные комбинации в среднем в 3 случаях из 10. Сколько нужно запланировать попыток, чтобы с вероятностью 99% можно было гарантировать наличие среди них по меньшей мере одной удачной? Какова вероятность, что из запланированного числа попыток какие-то три окажутся удачными?

<u>Решение</u>

а) Отметим, что все приведенные в теоретическом разделе формулы ориентированы лишь на расчет вероятностей, а число попыток и прочие параметры проводимых опытов можно найти лишь в правой части выражений. По этой причине для определения необходимого числа попыток придется составить и решить некоторое уравнение. Итак, пусть n – это число попыток, необходимое и достаточное для выполнения требований задания.

б) Событие A = “хотя бы одна из n попыток является удачной” можно рассматривать как объединение n несовместных событий

A_1 = “ровно 1 из n попыток – удачная”,

A_2 = “ровно 2 из n попыток – удачные”,

…

A_n = “все n попыток – удачные”,

однако такой подход приводит к весьма громоздкому уравнению. Гораздо проще решать данную задачу, анализируя событие противоположное A. Событие $\overline{A}$ состоит в том, что “ни одна из n попыток не является удачной” и для соответствия условию должно выполняться

$$P\{\overline{A}\} = 1 - P\{A\} \le 100\% - 99\% = 1\%.$$

в) Учитывая, что вероятность удачного исхода каждой отдельной попытки составляет $p_{\oplus} = 3/10 = 0{,}3$, а неудачного– $p_{\Theta} = 1 - p_{\oplus} = 0{,}7$ для $P\{\overline{A}\}$ получаем уравнение

$$P\{\overline{A}\} = (p_{\Theta})^n \le 0{,}01,$$

откуда

$$n \ge \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}7)} = 12{,}91.$$

Итак, наименьшим целочисленным n, удовлетворяющим условию задачи, является $n = 13$, т.е. нужно запланировать 13 попыток.

г) Для игрового автомата вероятность удачи при каждой из последующих попыток не зависит от того, каковы исходы предыдущих, поэтому проводимая серия из 13 попыток является с позиции теории вероятностей последовательностью независимых испытаний. Оценивая вероятность того, что ровно 3 попытки из 13 окажутся удачными, следует иметь в виду, что

1) удачные попытки можно выбрать из имеющихся C_{13}^{3} способами,

2) каждый конкретный вариант расположения успешных попыток может реализоваться с вероятностью $(p_{\oplus})^3 \cdot (p_{\Theta})^{10}$.

В результате, итоговая вероятность возникновения ровно трех удачных попыток определится формулой (2.5)

$$P\{\text{“ровно 3 попытки из 13 будут удачными”}\} = C_{13}^{3} \cdot p_{\oplus}^{3} \cdot p_{\Theta}^{10} =$$

$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^{10} = 286 \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}02825 = 0{,}218.$$

Полученный результат показывает, что при намеченных тринадцати попытках почти наверняка несколько из них будут удачными, однако существует незначительная вероятность $p_0 = 0{,}7^{13} = 0{,}0097$ того, что все 13 попыток не дадут выигрыша. Близкая к 1% величина p_0 может служить косвенным подтверждением корректности решения задачи.

Задача 6. По радиоканалу в условиях действия помех передается сообщение из 100 символов. Вероятность искажения очередного символа не зависит от успешности передачи предыдущего и составляет 0,2. Какова вероятность, что в сообщении ровно 75 символов будет принято верно (а остальные придут искаженными)?

Решение

а) Символы сообщения передаются независимо по отношению друг к другу, т.е. последовательно производится $n = 100$ опытов, в каждом из которых с вероятностью $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ может наблюдаться успешная передача символа, а с вероятностью $q = 0{,}2$ – противоположное событие (искажение символа). Итак, как и предыдущая, эта задача подходит под схему последовательности независимых испытаний, а значит вероятность того, что успешная передача символа будет наблюдаться ровно k раз должна удовлетворять соотношению (2.5).

б) К сожалению, произвести расчет непосредственно по (2.5) – затруднительно. Дело в том, что число C_{100}^{75} является огромным, а значения $0{,}8^{75}$ и $0{,}2^{25}$ – очень маленькими, а потому обеспечить достаточную точность при их подстановке в (2.5) практически невозможно. По указанной причине придется отказаться от непосредственного применения (2.5) и воспользоваться каким-либо из приближенных подходов.

в) Так как число проводимых опытов $n = 100$ достаточно велико $n >> 1$, а произведение $D = n \cdot p \cdot (1–p) = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16 > 10$, то для подсчета вероятности можно воспользоваться приближением Муавра-Лапласа. Вероятность того, что в серии из 100 опытов событие “успешная передача символа” произойдет ровно $k = 75$ раз равна

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 16}} \exp\left(-\frac{(75 - 100 \cdot 0{,}8)^2}{2 \cdot 16} \right) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left(-\frac{25}{32} \right) = 0{,}0456.$$

Задача 7. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов?

Решение

а) День рождения каждого из студентов может равновероятно приходиться на любой день года, поэтому вероятность попадания дня рождения конкретного студента именно на 1 сентября составляет

$$p = 1/365.$$

б) Для определения общего числа студентов, имеющих дни рождения 1 сентября, нужно последовательно проверить данные каждого из $n = 1825$ студентов. Тем самым, анализируемая задача оказывается подходящей под схему последовательности независимых испытаний, однако произвести точный расчет, опирающийся на (2.5), затруднительно из-за того, что $n >> 1$.

в) Так как произведение $n \cdot p = 1825 / 365 = 5 < 10$, то приближенная формула Муавра-Лапласа здесь будет неприменима (даст слишком большую погрешность), а формула Пуассона вполне может быть использована. Итак, в соответствии с (2.7), где $k = 4$, запишем

$$P\{\text{ день рождения придется на 1 сентября ровно 4 раза }\} \approx$$
$$\approx \frac{(1825/365)^4 \cdot e^{-1825/365}}{4!} = \frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 0{,}1755.$$

Задача 8. Изготавливаемая радиоаппаратура требует замены радиодеталей в среднем 10 раз за 10000 часов непрерывной работы. Какова вероятность возникновения отказов радиоаппаратуры за 100 часов непрерывной работы?

Решение

а) Исходя из физического смысла задачи поток отказов радиоаппаратуры является пуассоновским и характеризуется интенсивностью $\lambda = 10 / 10000 = 10^{-3}$ отказов/час. Вероятность любого конкретного числа отказов за интервал времени будет определяться соотношением (2.8). Но в число исходов, удовлетворяющих условию задачи, входит произвольное положительное количество отказов, поэтому прямой подсчет является неоптимальным. Выгоднее определить вероятность безотказной работы (k=0) за контрольный интервал времени

$$P\{\text{нет отказов за 100 часов}\} \approx \frac{(10^{-3} \cdot 100)^0 \cdot e^{-10^{-3} \cdot 100}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-0,1}}{1} = 0{,}9048.$$

б) Наличие какого-либо числа отказов является событием противоположным к уже проанализированному, поэтому

$$P\{\text{ за 100 часов возникали отказы }\} = 1 - 0{,}9048 = 0{,}0952.$$

2.3. Задачи для самоконтроля

2.1. Из общего числа конденсаторов, находящихся в ящике, 60 % рассчитаны на рабочее напряжение 200 В, 30 % – на 400 В, а остальные – на 600 В. Какова вероятность, что первый взятый конденсатор будет рассчитан на напряжение не менее 400 В?

Ответ: 0,4.

2.2. Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до одного года равна 0,13, а при эксплуатации сроком до трех лет равна 0,36. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от одного до трех лет?

Ответ: 0,23.

2.3. Вероятность попадания в цель первым стрелком p_1, а вторым стрелком – p_2. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другой не попадет?

Ответ: $p_1 + p_2 – 2 \cdot p_1 \cdot p_2$.

2.4. Вероятности попадания в цель при стрельбе каждого из трёх орудий соответственно равны 0,7, 0,6 и 0,5. Какова вероятность хотя бы однократного поражения цели при двух залпах из всех орудий?

Ответ: 0,9964.

2.5. Имеется 5 станций, с которыми поддерживается связь. Время от времени связь прерывается из-за атмосферных помех. Вследствие удаленности станций друг от друга перерыв связи с каждой из них происходит независимо от остальных с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в данный момент времени будет иметься связь не более чем с двумя станциями.

Ответ: 0,0579.

2.6. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять партий из восьми?

Ответ: вероятнее выиграть три из четырех.

2.7. Два игрока поочередно подбрасывают монетку до тех пор, пока у кого-либо из них не выпадет “решка”. Игрок, выбросивший “решку”, выигрывает (например, начинающий игру может выиграть, если сразу выбросит “решку”, или если при первом броске и у него, и у второго игрока выпадет “орёл”, а при втором броске первого игрока выпадет “решка” и т. д.). Определить общую вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Ответ: для начинающего игру 2/3; для его партнера 1/3.

2.8. Вероятность появления символа “1” в каждой из независимых позиций кодовой комбинации равна 0,8. Какова должна быть длина кодовой комбинации, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что “1” появится не менее 75-ти раз?

Ответ: не менее 100 символов.

2.9. Телефонная станция, обслуживающая 2000 абонентов – жителей посёлка – должна соединять их с городом. Известно, что средняя продолжительность разговора каждого абонента составляет две минуты в час. Какое число линий связи должно быть организовано для связи с городом, чтобы вероятность сигнала «занято» при попытке соединиться с городом не превышала 0,003?

Ответ: не менее 89.

2.10. При передаче по каналу связи знаки, образующие сообщение, независимо друг по отношению к другу искажаются из-за помех с вероятностью 0,2 (на каждый символ). Общая длина сообщения – 10 000 знаков. Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет: а) ровно 2002 искажения; б) от 2000 до 2100 искажений?

Ответ: а) ≈1%; б) 0,4938.

2.11. Функционирование ЭВМ сопровождается одиночными сбоями, происходящими в случайные моменты времени независимо друг от друга. Средняя интенсивность отказов при круглосуточной работе составляет 3,5 сбоя в неделю. Найти вероятность того, что за четыре часа работы не произойдет ни одного сбоя.

Ответ: 0,92.

2.12. Какое число одинаковых сообщений необходимо передать по каналу связи независимым образом, чтобы с вероятностью $P=0{,}9$ можно было утверждать, что сообщение принято не менее одного раза правильно (вероятность правильного приёма одного сообщения – 0,226). На сколько необходимо увеличить число передаваемых сообщений, чтобы вероятность P возросла с 0,9 до 0,99?

Ответ: не менее 10 сообщений для $P=0{,}9$ и 20 сообщений для $P=0{,}9$.

2.4. Контрольные задания

2.13. Каждый из четырех студентов, проживающих в одной комнате общежития, может равновероятно присутствовать или не присутствовать на лекции по теории вероятностей. Определить вероятность того, что…

Номер	Событие
1	ни одного из студентов на лекции не будет
2	на лекции присутствует ровно один из четырех студентов
3	на лекции присутствует хотя бы один из четырёх студентов
4	на лекции присутствуют ровно два из четырех студентов
5	на лекции присутствуют не менее двух из четырех студентов

6	на лекции присутствуют ровно три из четырех студентов
7	на лекции присутствуют по меньшей мере три студента
8	на лекции присутствуют все четыре студента
9	на лекции присутствует менее трех из четырех студентов
10	на лекции присутствует менее двух из четырех студентов

2.14. Из 10 имеющихся в наличии светодиодов, 4 из которых бракованные, случайным образом произведён выбор N приборов. Какова вероятность того, что среди выбранных…

Номер	N	Событие
1	2	будет один годный и один бракованный прибор?
2	2	будет по меньшей мере один годный прибор?
3	2	будет по меньшей мере один бракованный прибор?
4	3	будет не более двух годных светодиодов?
5	3	будет не более двух бракованных светодиодов?
6	3	будет нечетное число бракованных светодиодов?
7	4	будут лишь бракованные приборы?
8	4	будет ровно 3 бракованных светодиода?
9	5	будет ровно 2 бракованных прибора?
10	5	будут лишь годные светодиоды?

2.15. На ограничитель поступает последовательность из N случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом $P_{прев}$ указана во втором столбце таблицы. Сколько импульсов (N) должно входить в последовательность, чтобы вероятность того, что из них…

Номер	$P_{прев}$	Событие
1	0,2	хотя бы один превысит порог составила не менее 0,8?
2	0,25	хотя бы один превысит порог составила не более 0,6?
3	0,3	все будут ниже порога была не меньше 0,4?
4	0,4	все будут ниже порога была не больше 0,2?
5	1/2	ровно 2 будут ниже порога была равна 3/8? *(перебором)*
6	1/3	ровно 1 будет ниже порога была равна 8/81? *(перебором)*
7	0,25	хотя бы один будет ниже порога составила не менее 0,99?
8	0,3	хотя бы один будет ниже порога составила не более 0,95?
9	0,4	все будут выше порога была не меньше 0,1?
10	0,5	все будут выше порога была не больше 0,2?

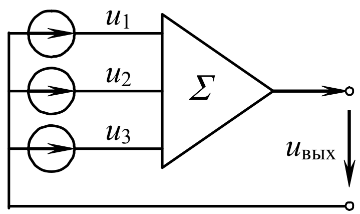


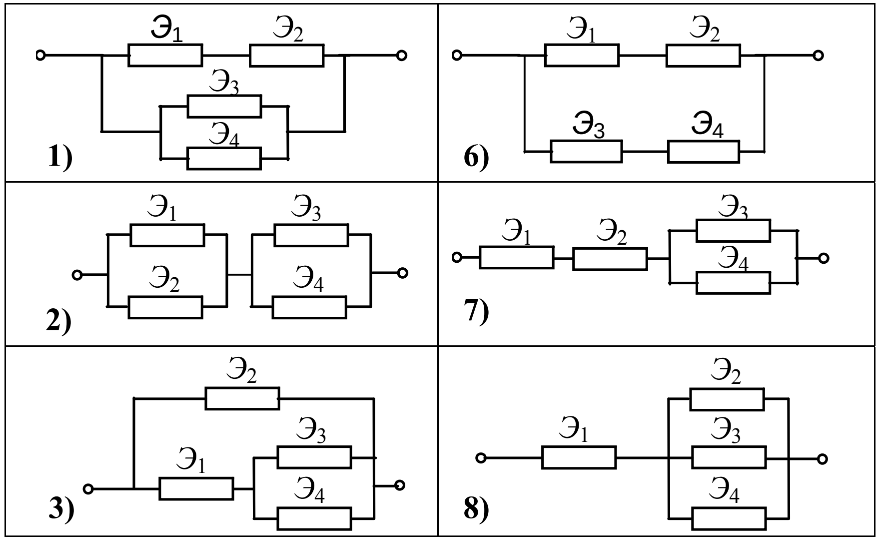
Рис. 2.3

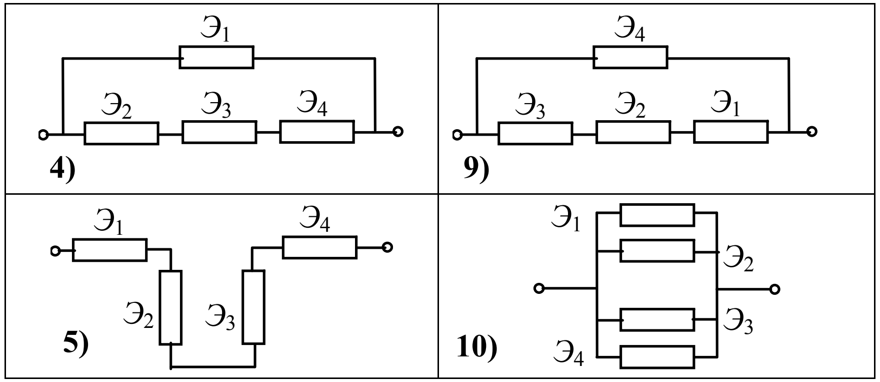
2.16. На входы сумматора, показанного на рис. 2.3, поступают три независимых постоянных во времени случайных напряжения u_1, u_2 и u_3. Каждое из этих напряжений может принимать либо значение 0.5 В (“низкий” уровень), либо 5 В (“высокий” уровень). Вероятности принятия каждым из напряжений “низкого” уровня потенциала равны 0,5, 0,4 и 0,3 соответственно. Определить вероятность того, что напряжение на выходе сумматора примет значение…

Номер	Событие

1	менее 6 вольт.
2	ровно 6 вольт.
3	не менее 6 вольт.
4	менее 11 вольт.
5	ровно 10,5 вольт.
6	не менее 10,5 вольт.
7	менее 10,5 вольт.
8	от 6 до 10,5 вольт (включительно).
9	ровно 1,5 вольта
10	ровно 15 вольт.

2.17. Цепь, структура которой в соответствии с индивидуальными подвариантами заданий представлена в таблице, состоит из четырёх элементов $Э_{1,2,3,4}$. Вероятности безотказной работы элементов в течение года соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Выходы из строя элементов цепи – независимые события. Какова вероятность разрыва цепи в течение года?





2.18. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Какова вероятность того, что суммарное число бросков, которое успеют сделать игроки до окончания игры будет…

Номер	Событие
1	четным?
2	нечетным?
3	меньше 4?
4	больше 4?
5	равно 4?
6	не более 3?
7	лежать в диапазоне от 1 до 4 (включительно)?
8	лежать в диапазоне от 2 до 4 (включительно)?
9	лежать в диапазоне от 3 до 4 (включительно)?
10	лежать в диапазоне от 3 до 5 (включительно)?

2.19. Радиолокационная станция ведет наблюдение за группой из N объектов (второй столбец таблицы). Каждый объект за время наблюдения может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что за время наблюдения…

Номер	N	Событие
1	4	все объекты будут потеряны
2	4	хотя бы один объект будет потерян
3	5	не менее двух объектов будет потеряно
4	5	ни один из объектов не будет потерян
5	6	по меньшей мере 3 объекта будет потеряно
6	6	будет потеряно нечетное число объектов
7	7	будет потеряно четное положительное число объектов
8	7	будет потеряно ровно 3 объекта
9	8	будет потеряно ровно 2 объекта
10	8	будет потеряно не более одного объекта

2.20. Вероятность того, что какой-то абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает N абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонит…

Номер	N	Событие
1	400	ровно 5 абонентов
2	300	более 4 абонентов
3	200	не более 3 абонентов
4	100	не более 2 абонентов
5	100	по меньшей мере 3 абонента
6	200	ровно 2 абонента
7	400	менее 4 абонентов
8	600	менее 3 абонентов
9	800	менее 2 абонентов
10	1000	четное число абонентов

2.21. Имеется набор из 11 непромаркированных и совпадающих по размерам сопротивлений. Среди них 3 штуки по 1 кОм, еще 5 штук по 2 кОм, а остальные по 3 кОм. Выбрав из этого набора наугад 3 детали, их соединяют последовательно друг с другом. Какова вероятность того, что получившееся соединение будет иметь сопротивление…

Номер	Событие
1	ровно 4 кОм?
2	ровно 5 кОм?
3	ровно 6 кОм?
4	ровно 7 кОм?
5	ровно 8 кОм?
6	ровно 9 кОм?
7	не менее 8 кОм?
8	или 7, или 8 кОм?
9	или 4, или 5 кОм?
10	не более 4 кОм?

2.22. За время технологической практики студенты изготовили большую партию однотипных изделий, из которых 20% оказались негодными. Какова вероятность, выбрав из этой партии наугад N изделий, обнаружить среди выбранных…

Номер	N	Событие
1	100	ровно 20 бракованных изделий
2	81	менее 12 бракованных изделий

3	64	более 5 бракованных изделий
4	49	только годные изделия
5	49	от 8 до 12 бракованных изделий (включительно)
6	64	более 50 годных изделий
7	81	от 60 до 65 годных изделий (включительно)
8	81	не менее 60 годных изделий
9	100	ровно 80 годных изделий
10	100	менее 72 годных изделий

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА О ГИПОТЕЗАХ

3.1. Краткое теоретическое введение

Если **условия** проведения некоторого опыта со случайным исходом представляют собой несколько взаимоисключающих случайных событий, то такие события принято называть **гипотезами** и обозначать $H_1, H_2 \ldots H_N$. Любое событие A, которым может закончиться подобный опыт, будет, таким образом, всегда наблюдаться совместно с одной из этих гипотез. Если вероятности реализации всех гипотез $P\{H_i\}$ известны, и известны также условные вероятности события A при каждой из гипотез $P\{A|H_i\}$, то определить вероятность наступления события A можно по правилу

$$P\{A\} = \sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A \mid H_i\}, \qquad (3.1)$$

где суммирование производится по всем возможным гипотезам. Правило (3.1) называют формулой полной вероятности.

Используемые в (3.1) вероятности $P\{H_i\}$ характеризуют возможность реализации каждой из гипотез по состоянию на момент **до** проведения опыта и называются **априорными** (доопытными). Однако в ходе проведения опыта одна из гипотез реально реализуется, и это, естественно, влияет на возможность

возникновения события A. По этой причине и информация о том, чем завершился опыт, в свою очередь влияет на распределение вероятностей между гипотезами. Таким образом, после проведения опыта вероятность того, что в проведенном опыте реализовалась гипотеза H_i, оказывается отличающейся от исходной и называется **апостериорной** (послеопытной). При условии, что в проведенном опыте событие A произошло, эту апостериорную вероятность можно рассчитать по теореме о гипотезах:

$$P\{H_i \mid A\} = \frac{P\{H_i\} \cdot P\{A \mid H_i\}}{P\{A\}}, \qquad (3.2)$$

где для расчета знаменателя может быть использована формула полной вероятности (3.1.1).

3.2. Типовые задачи

Задача 1. Сообщение передаётся по каналу связи последовательностью двух символов: “0” и “1”. Известно, что символов “0” посылается в 5/3 раза больше, чем “1”. Помехи искажают 2/5 всех нулей (при этом “0” переходит в “1”) и 1/3 всех единиц (при этом “1” переходит в “0”). Предполагается, что символы сообщения искажаются независимо друг от друга. По каналу связи послан один символ. Какова вероятность того, что на приёмной стороне будет получен “0”?

Решение

а) Обратите внимание на двухуровневый характер неопределенности, заложенный в данной задаче. С одной стороны, неизвестно, какой символ посылается в данный момент передатчиком. (Впрочем, если бы этот символ был известен, то его уже и незачем было бы пересылать.) С другой стороны, даже если бы посылаемый символ стал известен, невозможно предсказать влияние помех на процесс приема данного символа приемником. В результате конечный результат и в этом случае остался бы неопределенным (неизвестным).

Итак, условия проведения опыта по пересылке информационного символа от передатчика на приемник являются случайными и включают две взаимоисключающие возможности: передавался "0" или передавалась "1". Это позволяет рассматривать данные условия проведения опыта в качестве гипотез.

б) Введем следующие обозначения для гипотез:

H_0=передатчик излучил радиоимпульс, соответствующий символу "0";

H_1=передатчиком была послана на приемную сторону логическая "1".

В качестве конечного события в соответствии с вопросом задачи примем событие

A = принятый радиоимпульс воспринят приемником как символ "0".

С учетом этих обозначений информация о соотношении числа "нулей" и "единиц" в сообщении, и о возможности их искажения может быть представлена в виде:

$$P\{H_1\} \,/\, P\{H_0\} = 5/3;$$

$P\{\bar{A}|H_0\} = 2/5$, т.к. прием "1" есть событие, противоположное A,

откуда $P\{A|H_0\} = 1 - P\{\bar{A}|H_0\} = 3/5$;

и, наконец, $P\{A|H_1\} = 1/3$.

в) Гипотезы всегда обязаны составлять полную группу событий, т.е. какая-то одна и только одна из них обязательно реализуется в проводимом опыте, а т.к. это события несовместные, то

$$\sum_i P\{H_i\} = 1. \qquad (3.3)$$

Объединяя данное правило с соотношением вероятностей гипотез из предыдущего пункта, получаем несложную систему уравнений

$$\begin{cases} P\{H_0\} + P\{H_1\} = 1, \\ P\{H_0\}/P\{H_1\} = 5/3, \end{cases}$$

решив которую, получим априорные вероятности гипотез

$$P\{H_0\} = 5/8,\ \ P\{H_1\} = 3/8.$$

г) Для определения итоговой вероятности получения на приемной стороне символа "0" остается лишь воспользоваться формулой полной вероятности (3.1)

$$P\{A\} = P\{H_0\} \cdot P\{A|H_0\} + P\{H_1\} \cdot P\{A|H_1\} = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Обратите внимание, что хотя символов "0" в исходном сообщении было заметно больше, чем "1", они чаще искажаются, в результате чего вероятности встретить на приемной стороне как "0", так и "1" оказываются уже совпадающими.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи после передачи некоторого символа на приёмной стороне была зафиксирована "1". Какова вероятность того, что и посылался символ "1"?

Решение

а) Принципиально важным является то, что вероятность передачи символа "1" требуется оценить не в произвольный момент времени, а применительно к тому опыту, когда на приемной стороне была зафиксирована "1", т.е. не наблюдалось событие A. Эта вероятность рассчитывается после завершения опыта, т.е. является апостериорной. С учетом введенных в задаче 1 обозначений, искомая вероятность имеет вид $P\{H_1|\bar{A}\}$.

б) Для расчета апостериорных вероятностей гипотез предназначена теорема о гипотезах. Для ее применения осталось лишь учесть, что $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{\bar{A}\} = 1 - 1/2 = 1/2$,

и что $P\{\bar{A}|H_1\} = 1 - P\{A|H_1\} = 1 - 1/3 = 2/3$.

Подставляя эти вероятности в (3.2), получим

$$P\{H_1 \,|\, \overline{A}\} = \frac{P\{H_1\} \cdot P\{\overline{A} \,|\, H_1\}}{P\{\overline{A}\}} = \frac{3/8 \cdot 2/3}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Обратите внимание, что хотя как "нули", так и "единицы" часто искажаются, но все же более чем в половине случаев прием этих символов осуществляется корректно, поэтому прием “1” повышает вероятность того, что в данном опыте именно этот символ и передавался. Действительно, априорная вероятность передачи “единицы” была $P\{H_1\} = 3/8$, а полученная только что апостериорная вероятность составляет уже $P\{H_1|\bar{A}\} = 1/2$. Если бы вероятности искажения символов при передаче были ниже, то и наблюдаемое увеличение вероятности (т.е. уверенность в принятом символе) оказалось более высоким.

Задача 3. 2 автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

а) Описанная в условии задачи ситуация вновь характеризуется двухуровневой неопределенностью: качество находящихся на конвейере деталей является случайным, причем вероятность появления детали отличного качества зависит от того, каким автоматом выработана данная деталь, а это, в свою очередь, является неопределенным. Так как в отношении “происхождения” детали могут быть истинными лишь два взаимоисключающих предположения, то для вероятностного описания ситуации вновь разумно использовать гипотезы:

H_1 = взятая с конвейера деталь была изготовлена первым автоматом;
H_2 = взятая с конвейера деталь изготовлена автоматом №2.

Из разницы в производительности автоматов следует, что вероятности введенных гипотез составляют $P\{H_1\} = 2/3$ и $P\{H_2\} = 1/3$.

б) Если событие A = “контролируемая деталь отличного качества”, то из условия задачи следует, что условные вероятности возникновения этого события при каждой из гипотез равны соответственно

$$P\{A \mid H_1\} = 0{,}60, \qquad P\{A \mid H_2\} = 0{,}84,$$

поэтому полная (безусловная) вероятность того, что взятая с конвейера наугад деталь окажется отличного качества согласно (3.1) составит

$$P\{A\} = 2 \cdot 0{,}60 / 3 + 1 \cdot 0{,}84 / 3 = 0{,}68.$$

в) Поскольку вероятность того, что “изготовитель детали – первый автомат” требуется оценить именно для того опыта, когда взятая деталь обладала отличным качеством т.е. наблюдалось событие A, то исследуемая вероятность является апостериорной. Используя для ее расчета теорему о гипотезах (3.2), получаем

$$P\{H_1 \mid A\} = \frac{P\{H_1\} \cdot P\{A \mid H_1\}}{P\{A\}} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

Задача 4. Первый стрелок поражает мишень с вероятностью 60%, второй – с вероятностью 50%, а для третьего стрелка вероятность попадания составляет 40%. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал третий стрелок в мишень или нет?

Решение

а) Здесь, как и в предыдущих задачах, можно выделить некоторое конечное событие A = “при одном выстреле каждого из стрелков наблюдается ровно два попадания в мишень”. Вероятность выполнения этого события зависит от меткости стрелков, а вопрос задачи фактически касается апостериорных вероятностей событий, вычисляемых применительно к случаю, когда A уже реализовалось. Вычисление апостериорных вероятностей событий опирается на теорему о гипотезах, поэтому решение задачи следует начать с определения совокупности возможных гипотез.

б) Гипотезы – это случайные взаимоисключающие ситуации, конкретизирующие условия проведения опыта. В анализируемой задаче конкретизацией события А является информация о том, кто именно попал в мишень. Соответственно, возникает следующий набор гипотез:

H_0 – все стрелки промахнулись;
H_1 – в мишень попал лишь первый стрелок;
H_2 – в мишень попал лишь стрелок №2;
H_3 – выстрел был удачным лишь у стрелка №3;
H_{12} – первые двое стрелков поразили мишень, а третий – промахнулся;
H_{23} – стрелок №1 промахнулся, а двое других – попали в мишень;
H_{13} – в мишень попали лишь первый и третий стрелок;
H_{123} – все стрелки попали в мишень.

Вероятности этих гипотез и условные вероятности введенного выше события А будут равны

$P\{ H_0 \} = (1 – 0,6) \cdot (1 – 0,5) \cdot (1 – 0,4) = 0,12$	$P\{ A \mid H_0 \} = 0$
$P\{ H_1 \} = 0,6 \cdot (1 – 0,5) \cdot (1 – 0,4) = 0,18$	$P\{ A \mid H_1 \} = 0$
$P\{ H_2 \} = (1 – 0,6) \cdot 0,5 \cdot (1 – 0,4) = 0,12$	$P\{ A \mid H_2 \} = 0$
$P\{ H_3 \} = (1 – 0,6) \cdot (1 – 0,5) \cdot 0,4 = 0,08$	$P\{ A \mid H_3 \} = 0$
$P\{ H_{12} \} = 0,6 \cdot 0,5 \cdot (1 – 0,4) = 0,18$	$P\{ A\mid H_{12} \} = 1$
$P\{ H_{23} \} = (1 – 0,6) \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,08$	$P\{ A\mid H_{23} \} = 1$
$P\{ H_{13} \} = 0,6 \cdot (1 – 0,5) \cdot 0,4 = 0,12$	$P\{ A\mid H_{13} \} = 1$
$P\{ H_{123} \} = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,12$	$P\{A\mid H_{123} \} = 0$

(Несложно убедиться, что сумма вероятностей всех гипотез равна 1)

в) На основе (3.1) рассчитаем полную вероятность того, что стрельба по мишени завершится ровно двумя попаданиями

$$P\{A\} = \sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A \mid H_i\} = 0,18 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1 + 0,12 \cdot 1 = 0,38.$$

Апостериорные же вероятности гипотез составляют

$$P\{ H_{12} \mid A \} = 0,18 \cdot 1 / 0,38 \approx 0,47.$$
$$P\{ H_{23} \mid A \} = 0,08 \cdot 1 / 0,38 \approx 0,21.$$
$$P\{ H_{13} \mid A \} = 0,12 \cdot 1 / 0,38 \approx 0,32.$$

Из полученных вероятностей можно сделать следующие выводы:

Вероятность $P\{H_{12}|A\}$, означающая, что промахнулся именно третий стрелок, существенно превышает вероятности $P\{H_{23}|A\}$ и $P\{H_{13}|A\}$. Это вполне логично, т.к. именно у стрелка №3 меткость самая низкая. Однако, попадание стрелка №3 в мишень может наступить в результате любого из несовместных событий H_{23} и H_{13}, поэтому

$$P\{ \text{стрелок №3 попал в мишень} \mid A \} = P\{H_{23}|A\} + P\{H_{13}|A\} = \\ = 0,21 + 0,32 = 0,53 ,$$

что превышает $P\{H_{12}|A\}$. В результате мы приходим к следующему, довольно любопытному заключению: “несмотря на низкую меткость третьего стрелка вероятность того, что он попал в мишень, оказывается выше, чем вероятность промаха”. (Объединение двух маловероятных несовместных событий имеет бо́льшую вероятность, чем одно, хотя бы и происходящее достаточно часто.)

Примечание: Большинство из перечисленных в п.”б” гипотез в решении реально оказались неиспользованными, т.к. при них заведомо не могло наблюдаться событие А. В связи с этим, в принципе, было необязательно тратить время на их перечисление и расчет их вероятностей. Но для самоконтроля логики рассуждений при решении подобных задач крайне важно хотя бы мысленно сформулировать полный комплект гипотез, чтобы убедиться в отсутствии внутренних противоречий и в том, что сумма вероятностей всех гипотез равна единице.

Задача 5. Имеется a черных и b белых шаров одинакового веса и размера. Эти шары каким-то образом распределены по двум урнам. В проводимых опытах наудачу выбирается урна, а из нее один шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность вынуть белый шар была максимальной?

Решение

а) Обозначим число черных шаров, положенных в первую урну, через x $(x \le a)$; тогда число тех же шаров, лежащих во второй урне, будет равно $(a-x)$. Аналогично, пусть y и $(b-y)$ – число белых шаров, лежащих в первой и второй урне.

б) Как и во всех предыдущих задачах при проведении описанного эксперимента можно отметить двухуровневую неопределенность, заключающуюся в том, что сначала наугад выбирается одна из двух урн (две взаимоисключающие возможности), а затем из выбранной урны наугад вытаскивается шар. В связи с этим введем гипотезы H_1 = выбрана первая урна, H_2 = выбрана вторая урна и конечное событие A = вытащен белый шар.

Учитывая равную возможность выбора любой из урн,

имеем $$P\{H_1\} = P\{H_2\} = 0{,}5\ ,$$

а условные вероятности вытаскивания белого шара составляют

$$P\{A|H_1\} = x/(x+y),\ \ P\{A|H_2\} = (a-x)/(a-x+b-y).$$

Объединяя найденные значения, на основе формулы полной вероятности (3.1) для события – будет вытащен белый шар – получаем

$$P\{A\} = \frac{x}{2(x+y)} + \frac{a-x}{2(a-x+b-y)}\ . \tag{3.4}$$

в) К сожалению, прямой анализ (3.4) как функции двух переменных приводит к излишне громоздким выражениям, поэтому рассмотрим сначала поведение производной от (3.4) по аргументу y

$$\frac{dP\{A\}}{dy} = -\frac{x}{2(x+y)^2} + \frac{a-x}{2(a-x+b-y)^2} \tag{3.5}$$

Несложно установить, что для каждого возможного x максимум (3.4) по переменной y может наблюдаться лишь на правой или левой границе допустимого диапазона значений y.

Действительно, при $x = 0$ производная (3.5) для всех y неотрицательна, а значит максимум (3.4) будет наблюдаться при $y = \mathrm{b}$, когда $P\{A\} = 0{,}5$.

При $x = 1$ выражение (3.5) принимает вид

$$\left.\frac{dP\{A\}}{dy}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{a-1}{(a-1+b-y)^2} - \frac{1}{(1+y)^2}\right\},$$

т.е. при $y = 0$ эта производная отрицательна (следовательно P{A} убывает, а $y = 0$ – одна из возможных точек максимума), а затем знак производной сменяется на положительный и P{A} начинает расти, что делает еще одной точкой потенциального максимума $y = \mathrm{b}$. Аналогичное поведение функции (3.5) наблюдается и при всех иных x.

г) Проследим теперь зависимость P{A} от x при $y = 0$ и $y = \mathrm{b}$. Для этого проанализируем производную

$$\frac{dP\{A\}}{dx} = \frac{y}{2(x+y)^2} + \frac{y-b}{2(a+b-x-y)^2}\ . \tag{3.6}$$

При $y = 0$ для всех x (кроме $x = 0$, которое недопустимо по смыслу задачи, т.к. первая из урн окажется пустой) производная отрицательна и, следовательно, максимальное значение вероятности P{A} соответствует $x = 1$ и равно P{A} = = 0,5 · (1 + (a – 1) / (a + b – 1)).

При $y = \mathrm{b}$ для всех x (кроме $x = \mathrm{a}$, которое недопустимо по смыслу задачи, т.к. вторая из урн окажется пустой) производная положительна и, следовательно, максимальное значение вероятности P{A} соответствует $x = \mathrm{a} - 1$ с такой же как и выше вероятностью P{A} = 0,5 · (1 + (b – 1) / (a + b – 1)). Эта вероятность превышает полученное в п.”в” значение 0,5 и, таким образом, является максимально возможной.

Итак, для достижения максимальной вероятности вытаскивания белого шара следует в одной урне один белый шар, а в другой все остальные.

3.3. Задачи для самоконтроля

3.1. При помещении в урну n тщательно перемешанных шаров, из которых m белых и $(n-m)$ черных, один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне $(n-1)$ шаров наугад вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

Ответ: m/n.

3.2. По самолету производят три одиночных выстрела из зенитного орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором — 0,5, при третьем — 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, а при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

Ответ: 0,458.

3.3. Иван и Игорь по очереди подбрасывают монетку до тех пор, пока не выпадет “орел”. (Если “орел” выпадает при первом же броске, то игра считается завершенной с победой того, кто сделал этот бросок, а его противник проигрывает, даже не сделав ни одного броска.) В очередной игре победил Иван. Какова вероятность того, что в этот раз именно он начинал игру?

Ответ: 2/3.

3.4. На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала и шума (помехи), а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует

наличие сигнала. Если поступает только помеха, то наличие сигнала также может оказаться зарегистрированным, но с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала, какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Ответ: 0,96.

3.5. Прибор состоит из двух узлов, надёжность (вероятность безотказной работы в течение заданного интервала времени) первого из которых составляет 0,8, а надёжность второго – 0,9. Функционирование каждого узла, безусловно, необходимо для работы устройства в целом. При испытании прибора выяснилось, что он неисправен. Какова вероятность того, что отказал только первый узел, а второй – работоспособен?

Ответ: 0,64.

3.6. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

Ответ: 6/7.

3.7. Вероятности того, что при одном выстреле из орудия получаются недолёт, попадание и перелёт, равны 0,1, 0,8 и 0,1 соответственно. Для другого орудия вероятности этих событий равны 0,2, 0,6 и 0,2. Наугад выбранное орудие стреляет трижды. Отмечены один недолёт, одно попадание и один перелёт. Какова вероятность того, что стреляло второе орудие?

Ответ: 3/4.

3.8. Система передачи информации передает 70% сообщений при хороших условиях распространения радиоволн, а 30% - при плохих условиях. Надежность передачи сообщений в плохую погоду вдвое ниже, чем в хорошую (т.е. вероятность ошибок при плохой погоде в 2 раза выше, чем при хорошей). Какова вероятность правильной передачи сообщения в хорошую погоду, если общая (безусловная) вероятность ошибки составляет 13% ?

Ответ: 0,9.

3.9. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью p_0, а если применяет – то с вероятностью $p_1 < p_0$. Вероятность применения объектом помех во время текущего цикла обзора составляет $p_{пом}$ и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы 1 раз за n циклов обзора.

Ответ: $1 - \{ 1 - [(1 - p_{пом}) \cdot p_0 + p_{пом} \cdot p_1] \}^n$.

3.4. Контрольные задания

3.10. Мощные СВЧ транзисторы для радиоаппаратуры поставляют четыре завода. Качественные и количественные показатели этих поставок представлены в следующей таблице

Характеристика предприятия	Номер завода			
	1	2	3	4
Количество транзисторов, выпускаемых данным заводом (в % от общего числа)	40	30	20	10
Процент транзисторов, выпускаемых с малым разбросом параметров	70	90	75	100

Какова вероятность того, что…

1	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена первым заводом, если она оказалась с малым разбросом параметров
2	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена вторым заводом, если она оказалась с малым разбросом параметров
3	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена третьим заводом, если она оказалась с малым разбросом параметров
4	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена заводом №4, если она оказалась с малым разбросом параметров
5	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена первым заводом, если она оказалась с большим разбросом параметров
6	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена вторым заводом, если она оказалась с большим разбросом параметров
7	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена третьим заводом, если она оказалась с большим разбросом параметров
8	выбранная наугад партия транзисторов была изготовлена заводом №4, если она оказалась с большим разбросом параметров
9	выбираемая наугад партия СВЧ-транзисторов будет обладать большим разбросом параметров?
10	выбираемая наугад партия СВЧ-транзисторов будет обладать малым разбросом параметров?

3.11. Показатели качества радиоаппаратуры, собираемой разными по квалификации радиомонтажниками, представлены в таблице

Радиомонтажник	Процент аппаратуры, начинающей работать…			
	сразу	после подстройки	после 2-3 доработок	никогда
Опытный	70	20	10	0
Выпускник – отличник	40	50	10	0
Выпускник – хорошист	10	40	40	10
Выпускник – троечник	0	10	40	50

Количество радиомонтажников каждой квалификации, работающих на некоторой фирме, показано в средних четырех столбцах таблицы ниже. Какова вероятность, что очередное изделие было изготовлено выпускником вуза – хорошистом, если оно…

Номер	Опытных	Отличников	Хорошистов	Троечников	Событие
1	2	5	2	1	заработало после подстройки
2	4	4	2	0	заработало сразу
3	3	2	2	3	заработало после 3 доработок
4	1	4	4	1	не заработало
5	0	5	5	0	заработало после подстройки
6	0	6	3	1	заработало сразу
7	1	2	3	4	заработало после 3 доработок
8	0	3	5	2	не заработало
9	2	3	3	2	заработало после подстройки
10	3	1	2	4	заработало сразу

3.12. Известно, что 20% радиостанций противника используют амплитудно-модулированные сигналы, 40% – применяют частотную модуляцию, еще 30% – передают информацию сигналами относительной фазовой телеграфии (ОФТ), а остальные базируются на сигналах с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты (ППРЧ). При постановке помех вероятность подавления АМ составляет 80%, ЧМ – 50%, сигналов ОФТ – 20%, сигналов ППРЧ – 10%. Определить вероятность того, что случайным образом выбранная радиостанция…

1	будет продолжать работу в условиях помех
2	использовала АМ, если при постановке помех ее работа оказалась нарушенной
3	использовала АМ, если она продолжала успешно работать и после постановки помех
4	использовала ЧМ, если при постановке помех ее работа оказалась нарушенной
5	использовала ЧМ, если она продолжала успешно работать и после постановки помех
6	использовала ОФТ, если при постановке помех ее работа оказалась нарушенной
7	использовала ОФТ, если она продолжала успешно работать и после постановки помех
8	использовала ППРЧ, если при постановке помех ее работа оказалась нарушенной
9	использовала ППРЧ, если она продолжала успешно работать и после постановки помех
10	будет подавлена за счет действия помех

3.13. Информационная система использует для передачи сообщений три отличающихся по характеристикам радиоканала, причем по первому каналу отправляется 50% сообщений, по второму – 30%, а остальные передаются по третьему каналу. Руководствуясь вероятностями ошибочной передачи информации, приведенными в таблице ниже, определите вероятность события, помеченную знаком ?

Номер	Вероятность возникновения ошибки (%)			
	безусловная (без учета канала)	в первом канале	во втором канале	в третьем канале
1	15	10	20	?
2	15	12	?	15
3	4	?	5	7,5
4	?	2	10	5
5	5	?	10	5

6	3	2	?	4
7	4	1	5	?
8	6	8	?	2,5
9	5	?	5	2,5
10	?	4	6	1

3.14. Закодированное двоичным кодом сообщение содержит 40% нулевых и 60% единичных символов, причем вероятность появления на очередной позиции “0” или “1” не зависит от предыдущих символов сообщения. Вероятность искажения при передаче для “0” составляет 25%, а для “1” – 20%. При приеме очередного фрагмента сообщения на приемной стороне была получена последовательность логических символов, представленная в среднем столбце таблицы ниже. Определить вероятность того, что…

Номер	Принятая последовательность символов	Событие, вероятность которого необходимо оценить
1	“00”	передавались символы “00”
2	“00”	передавались символы “01”
3	“00”	передавались символы “10”
4	“10”	передавались символы “11”
5	“10”	передавались символы “10”
6	“10”	передавались символы “00”
7	“11”	передавались символы “11”
8	“11”	передавались символы “00”
9	“11”	передавались символы “01”
10	“000”	передавались символы “101”

3.15. Блок аппаратуры состоит из трех основных узлов, надежность которых составляет соответственно 70, 60 и 40%.

Нормальное функционирование каждого узла безусловно необходимо для работоспособности устройства в целом. При проверке устройства выяснилось, что оно неработоспособно. Определить вероятность того, что…

Номер	Событие
1	отказал лишь первый узел, а остальные работоспособны
2	отказал лишь второй узел, а остальные работоспособны
3	отказал лишь третий узел, а остальные работоспособны
4	отказали первый и второй узлы, а третий работоспособен
5	отказали первый и третий узлы, а второй работоспособен
6	отказали второй и третий узлы, а первый работоспособен
7	все узлы отказали одновременно
8	отказал лишь первый узел, а остальные работоспособны
9	отказал лишь второй узел, а остальные работоспособны
10	отказал лишь третий узел, а остальные работоспособны

3.16. Коммерческая фирма получает заказы от покупателей при их личном визите, по телефону, по почте и через Интернет. Личный приход обеспечивает безошибочное оформление заказов, а при других способах подачи заявок вероятности ошибок составляют соответственно 20, 40 и 10%. Средний процент ошибочных заказов составляет 18%. Определите помеченные знаком ? вероятности событий из таблицы ниже.

Номер	Доля покупателей (%), использовавших для заказа			
	личный визит	телефон	Почту	Интернет
1	50	10	?	?
2	30	?	?	20

3	?	?	35	15
4	?	20	30	?
5	20	40	?	?
6	10	?	?	40
7	?	?	30	50
8	?	10	40	?
9	?	35	?	25
10	30	?	20	?

3.17. 4 человека любят разыгрывать друг друга, намеренно искажая передаваемую информацию в 2 случаях из 3. Однажды через подобную цепочку из 4 человек (“испорченный телефон”) пришла информация о некотором событии, которое могло произойти или не произойти (информация типа “да”/“нет”). То есть первый из шутников получил достоверную информацию, передал ее (возможно неправильно) второму, тот третьему и затем от четвертого информация (возможно и здесь исказившись) попала ко всем остальным. В результате, озвученная последним в цепочке шутником информация *может содержать правильные сведения* относительно произошедшего события даже если он (по привычке) *исказил* переданные ему *неверные* сведения. Какова в этих условиях вероятность того, что…

Номер	Событие
1	третий в этой цепочке шутников сообщит четвертому правильные сведения об обсуждаемом событии?
2	последний в этой цепочке шутников сообщит остальным слушателям правильные сведения об обсуждаемом событии?
3	первый шутник сообщил второму правду, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались правильными?
4	первый шутник сообщил второму неправду, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались правильными?
5	последний в этой цепочке шутников сообщит остальным слушателям неправильные сведения об обсуждаемом событии?
6	первый шутник сообщил второму правду, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались неправильными?
7	первый шутник сообщил второму неправду, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались неправильными?
8	второй шутник исказил поступившую к нему информацию при передаче ее третьему, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались правильными?
9	второй шутник (против привычки) передал третьему поступившую к нему информацию без искажения, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались правильными?
10	второй шутник исказил поступившую к нему информацию при передаче ее третьему, если сведения о событии, озвученные четвертым, оказались неправильными?

3.18. Для хранения информации используются разные носители, отличающиеся по надежности. Их показатели качества представлены в таблице

Тип носителя	Вероятность сбоя в (%) при сроке хранения…		
	менее 3 лет	от 3 до 10 лет	более 10 лет
Жесткий диск	10	30	50
Компакт-диск	10	50	70
Дискета 3,5”	20	60	90

Для повышения надежности любая информация параллельно сохраняется на носителях двух типов, а в целом соотношение типов носителей, используемых для хранения различных данных в некоторой фирме, представлено в таблице ниже. Какова вероятность, что для хранения конкретных данных (с неизвестным сроком давности) не использовался компакт-диск, если попытка их чтения с обоих дублирующих носителей…

Номер	На жестком диске	На компакт-диске	На дискете	Событие
1	50	30	20	закончилась неудачно
2	40	30	30	закончилась неудачно
3	30	60	10	закончилась неудачно
4	20	50	30	закончилась неудачно
5	20	80	0	закончилась неудачно
6	50	50	0	завершилась удачно
7	20	50	30	завершилась удачно
8	30	30	40	завершилась удачно
9	40	50	10	завершилась удачно
10	50	30	20	завершилась удачно

3.19. Некоторое сообщение закодировано двоичным кодом, причем вероятность появления на очередной позиции “0” или “1” не зависит от предыдущих символов сообщения. Вероятности искажения информационных символов при передаче представлены в таблице ниже. Определить соотношение числа

нулей и единиц в сообщении, если известно что общая вероятность…

Номер	P{ “0”→”1” }	P{ “1”→”0” }	Дополнительная информация
1	10%	30%	ошибки составляет 16%
2	20%	25%	приема “0” составляет 69%
3	25%	20%	правильного приема составляет 78%
4	30%	10%	приема “1” составляет 66%
5	10%	30%	ошибки составляет 13%
6	20%	25%	приема “0” составляет 58%
7	20%	10%	правильного приема составляет 84%
8	30%	10%	приема “1” составляет 60%
9	20%	40%	ошибки составляет 30%
10	10%	20%	приема “0” составляет 62%

4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Краткое теоретическое введение

Функцией распределения вероятностей (ФРВ) случайной величины ξ называют функцию $F_\xi(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, не превосходящее x:

$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}. \tag{4.1}$$

Для любой случайной величины эта функция является безразмерной неубывающей функцией аргумента x, принимающей значения от нуля до единицы. Она позволяет рассчитать вероятность попадания значений СВ ξ в любой интервал

$$P\{a < \xi \le b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a). \tag{4.2}$$

Для оценки вероятности принятия случайной величиной единственного конкретного значения этот интервал следует сжать до точки

$$P\{\xi = c\} = \lim_{x\to c_{+0}} F_\xi(x) - \lim_{x\to c_{-0}} F_\xi(x). \tag{4.3}$$

Вероятностный смысл отдельных участков ФРВ СВ поясняется в табл. 4.1.

Плотностью распределения вероятностей (ПРВ) случайной величины ξ называют функцию $W_\xi(x)$, характеризующую вероятность попадания СВ в бесконечно малую окрестность аргумента x. Численно она определяется отношением вероятности попадания в бесконечно малый интервал, включающий точку x, к ширине этого интервала и связана с ФРВ соотношением

$$W_\xi(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x \le \xi \le x + \Delta x)}{\Delta x} = F'_\xi(x). \tag{4.4}$$

Таблица 4.1

Вероятностный смысл отдельных участков функции распределения вероятностей случайной величины

На данном участке ФРВ	Вероятностный смысл
постоянна	значения, относящиеся к данному участку, случайная величина принимать не может
плавно нарастает	любые значения из данного участка могут наблюдаться в опытах, но каждое из них имеет бесконечно малую вероятность появления
претерпевает разрыв I рода	соответствует разрешенному (наблюдаемому) значению СВ, причем само значение определяется координатой x точки разрыва, а вероятность его наблюдения – приращением $F_\xi(x)$ в точке разрыва

Плотность вероятности принимает лишь неотрицательные значения и имеет размерность, обратную размерности самой величины ξ. Она также позволяет рассчитать вероятность попадания значений СВ ξ в любой интервал

$$P\{a < \xi \le b\} = \int_a^b W_\xi(x)\,dx. \tag{4.5}$$

Отсюда, в частности, следует, что обратная связь между ПРВ и ФРВ имеет вид

$$F_\xi(x_0) = P\{\xi \le x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} W_\xi(x)\,dx. \tag{4.6}$$

Другим очень полезным следствием (4.5) является свойство нормировки для плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_\xi(x)\,dx = 1, \tag{4.7}$$

которое <u>должно выполняться для любых СВ</u>. С геометрических позиций свойство (4.7) означает, что для любой СВ площадь фигуры под кривой ее плотности вероятности всегда равна единице (рис 4.1).

Вероятностный смысл отдельных участков ПРВ СВ поясняется в табл. 4.2.

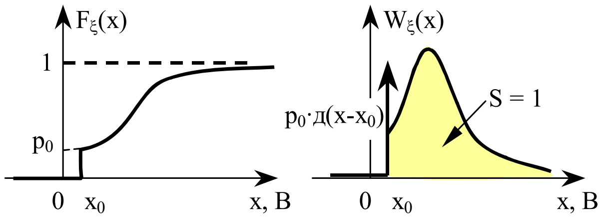


Рис. 4.1. Пример функции и плотности распределения вероятностей

Таблица 4.2

Вероятностный смысл отдельных участков плотности распределения вероятностей случайной величины

На данном участке ПРВ	Вероятностный смысл
равна нулю	значения, относящиеся к данному участку, случайная величина принимать не может
положительна	любые значения из данного участка могут наблюдаться в опытах, но каждое из них имеет бесконечно малую вероятность появления
определяется слагаемым $p_0 \cdot \delta(x-x_0)$	значение x_0 наблюдается с положительной вероятностью p_0

Случайная величина называется нормальной или гауссовской, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$W_{норм}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4.8)$$

где a и σ $(\sigma>0)$ – параметры распределения. Функция распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины не выражается в элементарных функциях. Ее значения для стандартной случайной величины, имеющей параметры $a = 0$ и $\sigma = 1$, приведены в таблице в приложении 1.

Учитывая, что плотность вероятности нормального распределения является четной функцией относительно точки $x = a$, для вероятности попадания в интервал значений, симметричный по отношению к этой точке (с учетом свойств из приложения 1), получаем

$$P\{ a-\Delta \le \xi \le a+\Delta \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{a-\Delta}^{a+\Delta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Delta/\sigma}^{\Delta/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= F_{ст}(\Delta/\sigma) - F_{ст}(-\Delta/\sigma) = 2\cdot F_{ст}(\Delta/\sigma) - 1. \qquad (4.9)$$

4.2. Типовые задачи

<u>Задача 1.</u> Для освещения некоторого помещения установили две мощные лампы и три лампы аварийного освещения в соответствии со схемой, представленной на рис. 4.2. Для каждой из мощных ламп вероятность выхода из строя в течение месяца составляет 0,4, а каждая из аварийных ламп должна успешно прослужить тот же срок с вероятностью 90%. Случайная величина ξ – это число ламп, которые будут светиться в помещении через месяц после начала работы. Определить закон распределения случайной величины ξ.

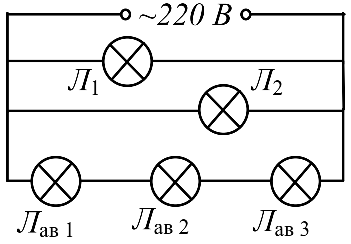


Рис. 4.2. Исследуемая схема освещения помещения

Решение

а) Из постановки задачи следует, что ξ – дискретная СВ, максимальное значение которой равно пяти (функционируют все лампы), а минимальное равно нулю (освещение отсутствует). Наиболее удобной формой записи дискретной СВ является ряд распределения, т.е. таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и вероятности, с которыми каждое конкретное значение может наблюдаться в опытах.

б) На количество освещающих помещение ламп будет существенно влиять состояние цепи ламп аварийного освещения, поэтому рассмотрим ее отдельно. При перегорании даже одной из ламп $Л_{ав\ i}$ цепь питания остальных разрывается и они уже не могут светиться. В результате событие A = “светятся все лампы аварийного освещения” и событие “цепь ламп аварийного освещения не работает” являются противоположными друг другу (составляют полную группу). Событие A фактически есть пересечение трех одинаковых, но независимых по отношению друг к другу событий, поэтому

$$P\{\text{“светятся все лампы аварийного освещения”}\} = P\{ A \} = 0{,}9^3 \approx 0{,}73.$$

$$P\{ \text{“аварийное освещение не работает”} \} = P\{ \bar{A} \} = 1 - P\{ A \} \approx 0{,}27.$$

в) Относительно же мощных ламп несложно получить

$$P\{ B_0 \} = P\{\text{“обе мощные лампы вышли из строя”}\} = 0{,}4^2 = 0{,}16;$$

$$P\{ B_2 \} = P\{\text{“обе мощные лампы продолжают работать”}\} = 0{,}6^2 = 0{,}36;$$

$P\{ B_1 \} = P\{$ “работает ровно одна из мощных ламп” $\} = 2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}48$.

В последнем случае удвоение соответствует тому, что работающей (перегоревшей) может оказаться любая из двух мощных ламп.

г) Теперь последовательно рассмотрим вероятность принятия случайной величиной ξ различных целочисленных значений, начиная с нуля.

$$P\{ \xi = 0 \} = P\{ \bar{A}\cdot B_0 \} = P\{ \bar{A} \} \cdot P\{ B_0 \} = 0{,}27 \cdot 0{,}16 = 0{,}0432.$$

$$P\{ \xi = 1 \} = P\{ \bar{A}\cdot B_1 \} = P\{ \bar{A} \} \cdot P\{ B_1 \} = 0{,}27 \cdot 0{,}48 = 0{,}1296.$$

$$P\{ \xi = 2 \} = P\{ \bar{A}\cdot B_2 \} = P\{ \bar{A} \} \cdot P\{ B_2 \} = 0{,}27 \cdot 0{,}36 = 0{,}0972.$$

$$P\{ \xi = 3 \} = P\{ A\cdot B_0 \} = P\{ A \} \cdot P\{ B_0 \} = 0{,}73 \cdot 0{,}16 = 0{,}1168.$$

$$P\{ \xi = 4 \} = P\{ A\cdot B_1 \} = P\{ A \} \cdot P\{ B_1 \} = 0{,}73 \cdot 0{,}48 = 0{,}3504.$$

$$P\{ \xi = 5 \} = P\{ A\cdot B_2 \} = P\{ A \} \cdot P\{ B_2 \} = 0{,}73 \cdot 0{,}36 = 0{,}2628.$$

Сводя полученные значения в таблицу, получаем ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0432	0,1296	0,0972	0,1168	0,3504	0,2628

Обратите внимание, что если просуммировать все вероятности, стоящие в нижней строке таблицы, то получится ровно 1,0. Так и должно быть, поскольку в каждом конкретном опыте СВ ξ обязательно принимает какое-то одно (и только одно значение) из перечисленных в таблице. Факт равенства единице суммы вероятностей, составляющих ряд распределения СВ, называют свойством нормировки ряда распределения.

Задача 2. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$W_\varsigma(x) = \begin{cases} C\cdot\cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти константу С и определить функцию распределения СВ ξ.

Решение

а) Хотя в условии и не указано, чему равна константа С, она может принимать лишь единственное значение. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_\xi(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C\cdot\cos(x)\,dx = C\cdot\sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2\cdot C,$$

но согласно свойству нормировки (4.7) этот интеграл обязан равняться единице, а потому $C = 0{,}5$.

б) Для расчета по ПРВ функции распределения вероятностей воспользуемся соотношением (4.6)

$$F_\xi(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} W_\xi(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{x_0} 0{,}5\cdot\cos(x)\,dx =$$

$$= 0{,}5\cdot\sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{x_0} = 0{,}5\cdot[\,\sin(x_0) + 1\,], \quad -\pi/2 \le x_0 \le +\pi/2.$$

Обратите внимание, что верхний предел интегрирования – это аргумент ФРВ, т.е. переменная величина. Именно в такой символьной форме он входит и в конечное выражение, ведь отыскивая ФРВ, мы ищем именно функцию (т.е. зависимость от некоторого аргумента), а не какое-то отдельное значение (константу).

Исходная $W_\xi(x)$ и полученная $F_\xi(x)$ функции показаны на рис. 4.3.

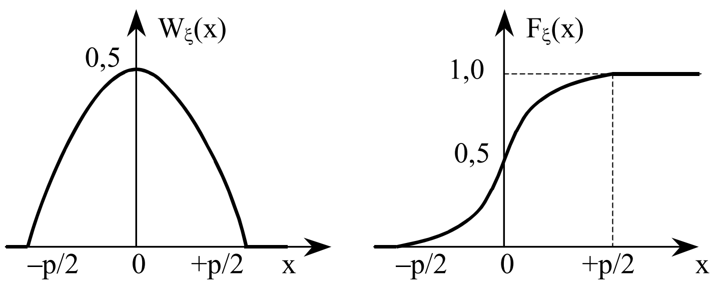


Рис. 4.3. Законы распределения СВ ξ из задачи 2

Задача 3. Баскетбольным мячом три раза бросают в корзину. Вероятность попадания не зависит от номера броска и составляет для каждого из них 0,6. Построить функцию распределения $F_\xi(x)$ для числа попаданий мячом в корзину.

Решение

а) Анализируемая СВ может принимать лишь одно из немногих целочисленных значений, т.е. является дискретной СВ. В связи с этим решение задачи целесообразно начать с построения ряда распределения этой СВ.

б) Поскольку вероятность попадания при очередном броске не зависит от результативности других попыток, то, бросая мяч три раза, мы фактически получаем последовательность независимых испытаний и, следовательно, величина ξ – число успешных бросков – будет подчиняться биномиальному закону распределения

$$P\{\,\xi = k\,\} = C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \quad (\,0 \le k \le n\,), \qquad (4.10)$$

где n – число проводимых испытаний, p – вероятность возникновения нужного результата в отдельном испытании, q – вероятность противоположного события.

В анализируемом случае $n = 3$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, поэтому ряд распределения ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

в) Соответствующая полученному ряду функция распределения показана на рис. 4.4. При ее построении было учтено следующее:

1) Так как наименьшее значение, принимаемое СВ ξ, равно нулю, то для любого отрицательного аргумента x наблюдать $\xi \le x$ невозможно и, согласно (4.1), $F_\xi(x) = P\{\,\xi \le x\,\} = 0$.

2) Точка $x = 0$ отличается от любой, расположенной левее, тем, что получить $\xi = 0$ возможно, а потому $F_\xi(0) = P\{\xi \le 0\} = P\{\xi = 0\} = 0{,}064$.

3) Для любой близкой к $x = 0$ точки, лежащей правее начала координат, неравенство $\xi \le x$ также может оказаться справедливым, но лишь при том же самом условии $\xi = 0$, т.е. $F_\xi(x) = P\{\xi = 0\} = 0{,}064$.
В результате вплоть до точки $x = 1$ (не включая ее) ФРВ остается постоянной; на графике возникает горизонтальная ступенька.

4) В точке $x = 1$ для выполнения неравенства $\xi \le x$ открываются уже две несовместные возможности: или $\xi = 0$, или $\xi = 1$. По этой причине в точке $x = 1$ ФРВ получает приращение на величину вероятности $P\{\xi = 1\} = 0{,}288$ и достигает значения $F_\xi(x) = P\{\xi \le 1\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 0{,}352$ и т.д.

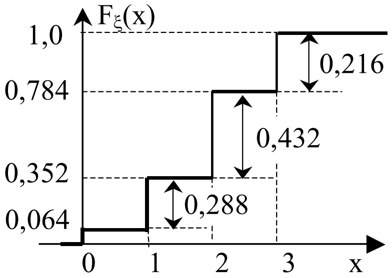


Рис. 4.4. Функция распределения числа попаданий баскетбольным мячом в корзину

Итак, у <u>любой</u> дискретной случайной величины функция распределения вероятностей имеет ступенчатый вид, причем <u>ступеньки располагаются</u> в тех точках оси x, которые совпадают с <u>разрешенными</u> (наблюдаемыми) <u>значениями</u> данной СВ, а <u>высота</u> каждой из ступенек равна <u>вероятности принятия</u> случайной величиной <u>данного значения</u>.

<u>Задача 4.</u> Случайное напряжение u, распределено по закону Рэлея $$W_u(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x \ge 0$$
с параметром $\sigma = 2$ В. Определить наиболее вероятное значение воздействующего на реле напряжения и вероятность его превышения.

<u>Решение</u>

а) Рассмотрим производную заданной в условии ПРВ:

$$\frac{dW_u(x)}{dx} = \left(\frac{x}{\sigma^2}\right)' \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \frac{x}{\sigma^2} \cdot \left\{ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)' \right\} =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2 \cdot x^2}{2 \cdot \sigma^4} \right\} = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{\sigma^2 - x^2}{\sigma^4}, \quad \text{где } x \ge 0.$$

Среди неотрицательных аргументов x есть лишь одна точка $x = \sigma$, обращающая эту производную в нуль, причем при меньших x производная положительна, а при б**о**льших – отрицательна. Таким образом, $W_u(\sigma) = 1/\sigma\sqrt{e}$ является максимумом зависимости $W_u(x)$, а сама координата $x = \sigma$ и является наиболее вероятным значением напряжения u.

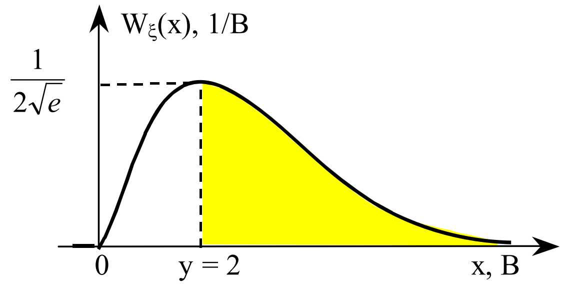


Рис. 4.5. Плотность распределения вероятностей напряжения u

б) Превышение наиболее вероятного значения соответствует попаданию напряжения u в интервал от σ до бесконечности. В соответствии с (4.5) эта вероятность определяется интегралом $P\{ u > \sigma \} = \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$.

Для расчета данного интеграла удобно воспользоваться заменой переменных $y = x^2/2\sigma^2$. Изменению x от σ до бесконечности будет в таком случае соответствовать изменение новой переменной y от $y_{min} = \sigma^2/2\cdot\sigma^2 = 0{,}5$ до бесконечности, а $dy = (x/\sigma^2) \cdot dx$, поэтому

$$P\{ u > \sigma \} = \int\limits_{0,5}^{+\infty} e^{-y}\, dy = -e^{-y}\Big|_{0,5}^{+\infty} = 0 + e^{-0,5} = 0{,}607.$$

(*Геометрически - это площадь заштрихованной фигуры на рис. 4.5*).

Задача 5. Источник постоянного напряжения генерирует нестабильную ЭДС E, распределённую по *нормальному* закону с параметрами $a = 5$ В и $\sigma = 20$ мВ. Известна вероятность ($P = 0.97$) того, что напряжение, поданное в схему от источника питания, отличается от 5 В не более чем на ΔE. Определить величину ΔE.

Решение

а) Так как центр интервала значений, вероятность попадания в который в условии задана, совпадает с параметром a нормального распределения, то эта вероятность связана с величиной ΔE соотношением (4.9)

$$P = 2 \cdot F_{ст}(\Delta E / \sigma) - 1 = 0{,}97.$$

Из этого соотношения следует, что должно выполняться

$$F_{ст}(\Delta E / \sigma) = 0{,}985.$$

В свою очередь, последнее соотношение (согласно данным приложения А) будет выполняться для аргумента

$$\Delta E / \sigma \approx 2{,}2.$$

Итак, $\Delta E \approx 2{,}2 \cdot \sigma \approx 44$ мВ.

Задача 6. Цикл работы установленного на некотором перекрестке светофора составляет одну минуту, причем и красный, и желтый, и зеленый сигналы занимают в среднем одинаковые интервалы времени. В некоторый (не синхронизированный с работой светофора) момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Построить плотность распределения вероятностей СВ τ – времени ожидания автомобилем возможности проехать перекресток, если движение разрешено лишь на зеленый свет.

Решение

а) Так как на зеленый свет проезд разрешен, то этот случай существенно отличается от ситуации, возникающей при красном или желтом свете светофора. В связи с этим выгодно ввести и рассмотреть подробнее две взаимоисключающие гипотезы:

H_0 = автомобиль подъезжает к перекрестку на зеленый свет;

H_1 = автомобиль подъезжает на желтый или красный свет.

Поскольку частота наблюдения каждого из сигналов светофора, в соответствии с условием, одинакова, а последняя гипотеза объединяет в себе сразу два случая, то вероятности введенных гипотез будут равны

$$P\{ H_0 \} = 1/3; \quad P\{ H_1 \} = 2/3.$$

б) На зеленый свет проезд разрешен, поэтому значение, принимаемое СВ τ при истинности гипотезы H_0 всегда равно нулю и, следовательно,

$$P\{ \tau \le x \mid H_0 \} = 1 \quad \text{для всех } x \ge 0.$$

Для желто-красной части цикла, напротив, любые значения времени ожидания, начиная с нуля и до максимума, равного 40 секунд, являются равновероятными. В связи с этим вероятность выполнения неравенства $\tau \le x$ будет нарастать пропорционально увеличению x, достигая единицы при $x = 40$ секунд

$$P\{ \tau \le x \mid H_1 \} = x / 40 \quad \text{для всех } 0 \le x \le 40.$$

в) Объединяя полученные выше результаты на основе формулы полной вероятности, получим

$$F_\tau(x) = P\{H_0\} \cdot P\{\tau \le x | H_0\} + P\{H_1\} \cdot P\{\tau \le x | H_1\} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{для } x = 0, \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{60} & \text{для } 0 \le x \le 40. \end{cases}$$

Для сокращения записи ФРВ и ПРВ принято упоминать лишь те участки оси частот, которые соответствуют наблюдаемым для данной СВ значениям. В связи с этим для приведенной выше строки “по умолчанию” предполагается, что $F_\tau(x)=0$ *при* $x<0$ *и* $F_\tau(x)=1$ *при* $x>40$.

г) Для получения плотности распределения вероятностей, согласно (4.4), полученный результат необходимо продифференцировать по x. В точке $x = 0$ дифференцируемая функция претерпевает разрыв первого рода – бесконечно малому приращению аргумента x соответствует увеличение функции на величину 1/3 – поэтому производная $F_\tau(x)$ в этой точке бесконечно велика и может быть записана лишь посредством δ–функции. Для согласования масштабов функции и ее производной амплитудный коэффициент δ–функции должен совпадать с величиной приращения, т.е. быть равен 1/3. Поскольку δ–функция отличается от нуля лишь в одной точке оси x, ее можно просто прибавить к производной, характеризующей свойства ПРВ для ненулевых аргументов. В результате для ПРВ СВ τ получаем

$$W_\tau(x) = \frac{1}{3} \cdot \delta(x) + \frac{1}{60} \quad \text{для } 0 \le x \le 40.$$

Найденные законы распределения для времени ожидания автомобилем возможности проехать перекресток показаны на рис. 4.6.

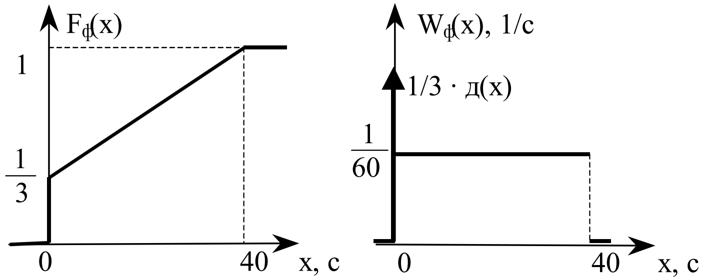


Рис. 4.6. Законы распределения СВ τ из задачи 6

<u>Задача 7.</u> Время безотказной работы некоторого прибора T распределено по показательному закону распределения

$$W_T(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \; t \ge 0.$$

При выходе прибора из строя он сразу заменяется новым, аналогичным по свойствам старому. Определить вероятность того, что за время τ прибор придется заменить ровно 1 раз.

<u>Решение</u>

а) Необходимость единственной замены за интервал времени τ означает, что в проводимых опытах для первого прибора случайное время наработки на отказ T окажется меньшим, чем τ, а у прибора, использованного для замены, время T превысит остаток интервала τ.

Так как все используемые для замены приборы являются однотипными, то вероятность превышения величиной T некоторого значения t_0 для каждого из них составляет

$$P\{T > t_0\} = \int_{t_0}^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, dt = -e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{+\infty} = 0 + e^{-\lambda t_0} = e^{-\lambda t_0}.$$

б) Если бы величина T принимала лишь дискретные значения, то можно было бы выдвинуть ряд конкретных гипотез о времени, которое проработает первый прибор до выхода из строя, поставить каждой из них в соответствие условную вероятность, определяющую способность второго прибора проработать после этого по меньшей мере до завершения интервала τ и получить итоговую вероятность необходимости ровно одной замены прибора на основе формулы полной вероятности (3.1).

Реальная ситуация, когда время наработки на отказ T может принимать произвольные значения от 0 до бесконечности (а в интересующих нас случаях: от 0 до τ), отличается лишь тем, что число подобных гипотез становится бесконечно большим. Но самой логики рассуждений подобное отличие не изменяет и, следовательно, правило расчета итоговой вероятности оказывается аналогичным (3.1), где лишь необходимо дискретную сумму заменить интегральной. Итак, вероятность того, что за время τ потребуется ровно 1 замена, определяется выражением

$$\mathrm{P} = \int\limits_0^{\tau} \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda(\tau - \mathrm{t}_0)}}_{\substack{\text{второй прибор проработает} \\ \text{по меньшей мере } (\tau - \mathrm{t}_0)}} \cdot \underbrace{\left(\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t_0}\right) dt_0}_{\substack{\mathrm{P}\{\mathrm{H_i}\} = \text{время замены} \\ \text{вервого прибора равно } \mathrm{t}_0}} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \cdot \int\limits_0^{\tau} dt = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}.$$

Обратите внимание, что полученный нами результат представляет собой частный случай выражения (2.8) для k = 1. Это произошло потому, что определяемая условиями задачи последовательность моментов времени, в которые происходит замена вышедших из строя приборов новыми, является пуассоновским потоком событий.

4.3. Задачи для самоконтроля

4.1. Из 25-ти транзисторов, среди которых 10 бракованных, случайным образом отобраны три транзистора для проверки их параметров. Построить функцию распределения вероятностей случайного числа бракованных транзисторов в выборке.

Ответ: практически не отличается от результата задачи 2, представленного на рис. 4.3.

4.2. Вероятность получения отметки цели на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна p. Цель считается обнаруженной, если получено n отметок. Найти закон распределения случайной величины X – числа оборотов радиолокатора до обнаружения цели.

Ответ: $P\{X = k\} = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, k = n, n+1, \ldots$

4.3. Известна функция распределения вероятностей случайного тока i некоторой цепи

$$\mathrm{F}_i(x) = \begin{cases} -0.5 \cdot x^2 + 0.5, & -1\,\text{мА} \le x \le 0, \\ +0.5 \cdot x^2 + 0.5, & 0 < x \le 1\,\text{мА}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Примечание: x следует подставлять в (4.11) в миллиамперах.

Определить ширину интервала возможных значений тока i, который заключал бы случайный ток цепи с вероятностью 0.5, если нижняя граница интервала соответствует значению «минус» 0.5 мА. Получить аналитическое выражение для плотности распределения вероятностей тока i.

Ответ: $\Delta = 1{,}366$ мВ; $\mathrm{W}_i(x) = |\,x\,|$ при $|\,x\,| \le 1$ мА.

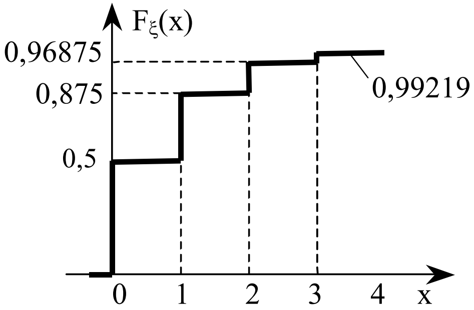
4.4. Задана функция распределения вероятностей случайной амплитуды U радиосигнала на входе приёмника

$$\mathrm{F_U}(x) = 1 - \exp(-x^2 / (2 \cdot \sigma^2)) \quad \text{при } x \ge 0,$$

где $\sigma = 10$ мВ. Найти плотность распределения вероятностей СВ U. Выяснить, при каком значении $\mathrm{U_0}$ вероятность превышения случайной амплитудой U величины U_0 равна 0.003.

Ответ: $\mathrm{U}_0 = 34$ мВ; $W_\mathrm{U}(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), \ x \ge 0$.

4.5. Два игрока подбрасывают по очереди монетку, пока у кого-либо из них не выпадет “орел”. Построить функцию распределения количества бросков, которые до завершения игры сделает второй игрок.



Ответ:

4.6. Случайная величина δ – ошибка измерительного прибора (вольтметра) – описывается нормальной плотностью распределения вероятностей. Систематическая ошибка прибора отсутствует ($a = 0$), параметр $\sigma = 4$ мВ. Какова вероятность того, что при отдельном измерении ошибка δ окажется лежащей в интервале +1.6 мВ … +3.6 мВ?

Ответ: приблизительно 0,16.

4.7. Сообщение передаётся последовательностью прямоугольных импульсов с шагом квантования Δ (Δ – наименьшая разность амплитуд двух импульсов). На сообщение накладываются шумы, мгновенное значение u которых распределено по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ мВ. Если абсолютная величина мгновенного значения шумов превышает *половину* шага квантования, то при передаче сообщения возникает ошибка. Определить, при какой величине шага квантования Δ вероятность ошибки из-за шумов составит 0.1.

Ответ: 3,3 мВ.

4.8. Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием. Вероятность попадания этой СВ на участок от минус А до плюс А (где А – некоторая константа) равна 80%. Как связаны между собой величина А и среднеквадратическое отклонение величины ξ.

Ответ: $\sigma_\xi \approx 0{,}8 \cdot A$.

4.9. Случайная величина ξ подчиняется закону распределения $$F_o(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, \quad x \ge x_0,$$

где $x_0 > 0$ и $\alpha > 0$ – некоторые параметры.

Определить значение константы x^*, для которого справедливо $P\{\xi \ge x^*\} = 0{,}5$.

Ответ: $x^* = 2^{\frac{1}{\alpha}} \cdot x_0$.

4.4. Контрольные задания

4.10. Сообщение, содержащее N логических нулей и M логических единиц, передается по двоичному каналу связи. Из-за помех вероятность искажения “0” составляет P_{01}, а вероятность искажения “1” – P_{10} (см. таблицу ниже). Случайная величина ξ – это значение очередного символа, пришедшего от передатчика на приемную сторону. Рассчитать ряд распределения вероятностей случайной величины ξ, если...

Номер	N	M	P_{01}	P_{10}
1	1000	9000	0,2	0,1
2	2000	8000	0,1	0,25
3	3000	7000	0,1	0,2
4	4000	6000	0,25	0,15
5	5000	5000	0,2	0,1
6	6000	4000	0,1	0,25
7	7000	3000	0,1	0,2
8	8000	2000	0,25	0,15
9	9000	1000	0,2	0,3

10	500	500	0,1	0,2

4.11. Два радиомонтажника параллельно друг с другом изготавливают одинаковые устройства. Изделия, изготавливаемые первым радиомонтажником, оказываются работоспособными сразу после сборки с вероятностью 80%. Вероятность готовности к работе для изделий второго радиомонтажника составляет лишь 0,5. Построить функцию распределения вероятностей числа годных к работе изделий, изготовленных за рабочий день, если за это время…

Номер	первым радиомонтажником изготовлено	вторым радиомонтажником изготовлено
1	2 изделия	3 изделия
2	4 изделия	1 изделие
3	5 изделий	0 изделий
4	2 изделия	2 изделия
5	3 изделия	1 изделие
6	0 изделий	4 изделия
7	1 изделие	4 изделия
8	2 изделия	1 изделие
9	3 изделия	0 изделий
10	4 изделия	0 изделий

4.12. Два человека поочередно подбрасывают пару игральных кубиков, грани которых размечены цифрами от 1 до 6 (т.е. сначала первый кидает пару кубиков одновременно, затем то же самое делает второй и т.д.). Построить функцию распределения вероятностей общего числа бросков, которое сделают

игроки до завершения игры, если условием завершения игры является появление в очередном броске…

Номер	Условие завершения игры
1	“решки” хотя бы на одном из кубиков, брошенных игроком
2	“решек” на обоих кубиках, брошенных игроком
3	совпадающих значений на брошенных одновременно кубиках
4	на брошенных кубиках одного “орла” и одной “решки”
5	“орла” на первом из кубиков, брошенных игроком
6	“орла” на втором из кубиков, брошенных игроком
7	совпадение значений на первом кубике, брошенном текущим игроком, с тем, что выпадало на первом кубике у предыдущего
8	совпадение значений на обоих кубиках, брошенных текущим игроком, с тем, что выпадало у предыдущего
9	“орла” хотя бы на одном из кубиков, брошенных игроком
10	“орла” на обоих кубиках, брошенных игроком

4.13. Случайная величина ξ характеризуется представленной в таблице ниже функцией распределения. Найти вероятность попадания этой СВ в интервал от A до B и построить плотность вероятности $W_\xi(x)$, если…

Номер	Функция распределения СВ ξ	A	B
1	$(x-2)^2$, при $2 \le x \le 3$	1,0	2,5
2	x^2, при $0 \le x \le 1$	0,1	0,8

3	$1 - 1/x$, при $1 \le x < +\infty$	4,0	$+\infty$
4	$1 + x$, при $-1 \le x \le 0$	–0,5	+0,5
5	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}5, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$	2,5	3,5
6	$\begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}25, & x = 1 \\ 0{,}125 + x/8, & 1 < x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$	0,0	3,0
7	$\sin(\pi \cdot x / 4)$, при $0 \le x \le 2$	1,5	2,0
8	$\exp(2 \cdot x)$, $x \le 0$	$-\infty$	–0,5
9	$1 / (1 + x^2)$, $x \le 0$	–0,5	0,0
10	$\cos(\pi \cdot x / 4)$, при $-2 \le x \le 0$	–1,0	0,0

Примечание: если в формулах, приведенных выше, не учтены какие-либо интервалы, то это означает, что функция распределения принимает для подобных аргументов вырожденное значение (0 или 1)

4.14. Определить неизвестный параметр(ы) функции распределения случайной величины ξ и определить вероятность попадания этой величины в интервал от нуля до двух $P\{ 0 \le \xi \le 2 \}$, если…

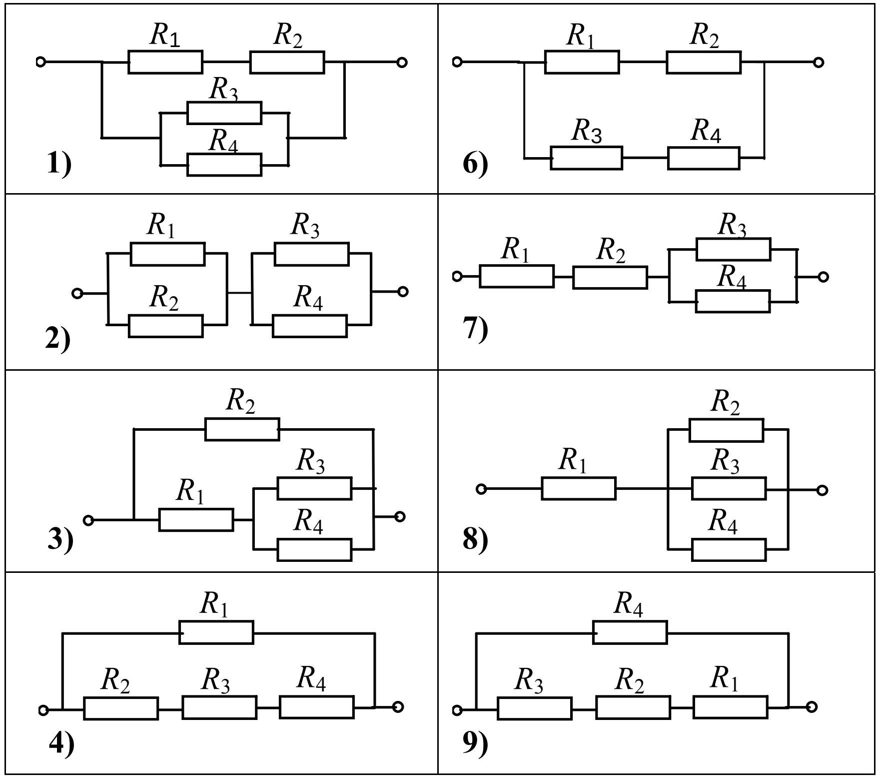
Номер	Функция распределения СВ ξ имеет вид	Диапазон допустимых значений аргумента x
1	$A + B \cdot \mathrm{arctg}(x)$	$-\infty < x < +\infty$
2	$A \cdot x^2 - 1$	$\sqrt{2} \le x \le 2$
3	$A - B / x^2$	$1 < x < +\infty$
4	$A \cdot x + B$	$-1 \le x \le 3$
5	$A - B \cdot \exp(-x / 2)$	$0 \le x < +\infty$
6	$(A \cdot x)^2$	$0 \le x \le 4$
7	$A + B \cdot \sin(\pi \cdot x / 2)$	$-1 \le x \le 1$
8	$A + B \cdot \sin(\pi \cdot x / 6)$	$-1 \le x \le 1$
9	$A \cdot (x - 0{,}5 \cdot x^2)$	$0 \le x \le 1$
10	$A \cdot x^3 + B$	$-1 \le x \le 2$

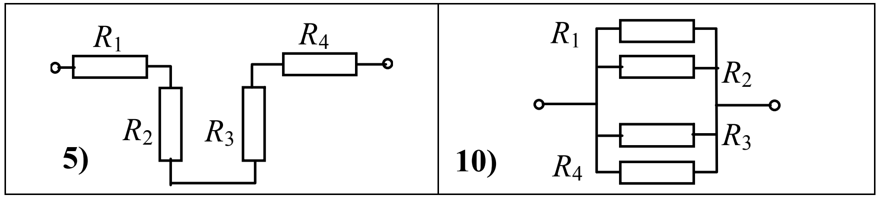
4.15. Непрерывная случайная величина ξ задана своей плотностью распределения вероятностей, приведенной в таблице ниже. Определить значение входящего в выражение для $W_\xi(x)$ неизвестного параметра A и определить вероятность попадания этой величины в интервал, указанный в правой колонке таблицы.

Номер	Плотность распределения СВ ξ	Искомая вероятность
1	$A \cdot x$ при $0 \le x \le 4$	$P\{ \xi < +1{,}5 \}$
2	$A \cdot (1 - \lvert x \rvert / 2)$ при $-2 \le x \le 2$	$P\{ \lvert \xi \rvert < 1{,}0 \}$
3	$A \cdot (x - 0{,}5)$ при $1 \le x \le 2$	$P\{ \xi > 1{,}0 \}$
4	$A \cdot \sin(x)$ при $0 \le x \le \pi$	$P\{ \xi < \pi / 2 \}$
5	A / x^4 при $1 \le x < +\infty$	$P\{ \xi > 2{,}0 \}$
6	$2 \cdot \cos^2(x) / A$ при $-\pi/2 \le x \le +\pi/2$	$P\{ -\pi/3 < \xi < 0{,}0 \}$
7	$A \cdot \exp(x)$ при $0 \le x \le 2$	$P\{ \xi > 1{,}0 \}$
8	$A \cdot \sin(\pi \cdot x / 2)$ при $0 \le x \le 1$	$P\{ 0{,}5 < \xi < 1{,}0 \}$
9	$A / (1 + x^2)$ при $1 \le x < +\infty$	$P\{ \xi < \sqrt{3} \}$

10	$A \cdot \exp(-2 \cdot \lvert x \rvert)$ при $-\infty < x < +\infty$	$P\{\lvert \xi \rvert < 1{,}0\}$

4.16. Цепь, структура которой в соответствии с индивидуальными подвариантами заданий представлена в таблице, состоит из четырёх резисторов $R_{1,2,3,4}$. Резисторы R_3 и R_4 имеют сопротивление 4 кОм, а резисторы R_1 и R_2 могут равновероятно принимать значения 2 или 4 кОм. Построить график функции распределения сопротивления цепи.





4.17. Рассчитать и построить функцию распределения вероятностей случайной величины ξ, плотность вероятности которой задана в таблице

Номер	Плотность вероятности	Номер	Плотность вероятности
1	$1/\pi \cdot (1+x^2)$ при любых x	6	$[1+\cos(x)]/\pi$ при $0 \le x \le \pi$
2	$0{,}3+0{,}4 \cdot \delta(x-1)$ при $-1 \le x \le 1$	7	$\exp(x)$ при $-\infty < x \le 0$
3	$0{,}4 \cdot (1-\lvert x \rvert)$ при $\lvert x \rvert \le 2{,}5$	8	$3 \cdot x^2$ при $0 \le x \le 1$
4	$\begin{cases} 0{,}2 & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}6 & \text{при } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	9	$\begin{cases} 0{,}2 \cdot x & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}1 & \text{при } 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$
5	$\begin{cases} 0{,}5 & \text{при } -1 \le x \le 0 \\ 0{,}5 \cdot \exp(-x) & \text{при } 0 \le x < \infty \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	10	$\begin{cases} 0{,}25 & \text{при } -3 \le x \le -1 \\ 0{,}25 & \text{при } 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$

4.18. По представленной в таблице функции распределения случайной величины ξ определить ширину интервала, вероятность попадания в который составляла бы 50%, если нижней границей этого интервала служит величина, указанная в правом столбце таблицы.

Номер	Функция распределения СВ ξ	Нижняя граница искомого интервала
1	$1 - \exp(-x)$ при $0 \le x \le +\infty$	0,5
2	$1 - \exp(-x^2)$ при $0 \le x \le +\infty$	0,2
3	$1 - \cos(\pi \cdot x/8)$ при $0 \le x \le 4$	2,0
4	$\sqrt{2} \cdot \sin(\pi \cdot x/4)$ при $0 \le x \le 1$	0,0
5	$2 \cdot \mathrm{arctg}(x) / \pi$ при $x \ge 0$	$1/\sqrt{3}$
6	$0{,}5 + x^3/16$ при $\lvert x \rvert \le 2$	–1,0
7	$(x^2 + x - 2)/4$ при $1 \le x \le 2$	+1,0
8	$(x - 2)/4$ при $2 \le x \le 6$	3,0
9	$\exp(x/4)$ при $x \le 0$	$4 \cdot \ln(0{,}2)$
10	$1 + 2 \cdot \mathrm{arctg}(x) / \pi$ при $x \le 0$	$-\sqrt{3}$

Примечание: если в формулах, приведенных выше, не учтены какие-либо интервалы, то это означает, что функция распределения принимает для подобных аргументов вырожденное значение (0 или 1)

4.19. Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения, параметры которого указаны в двух центральных столбцах приведенной ниже таблицы. Определить вероятность события, указанного в правой колонке таблицы.

Номер	a_ξ	σ_ξ	Событие, вероятность которого необходимо определить
1	–4	2	$\xi > 0$
2	–4	3	$\xi > 2$
3	–2	4	$\xi > 0$
4	–2	5	$\xi < -7$
5	0	4	$\lvert \xi \rvert > 4$
6	0	3	$\lvert \xi \rvert < 3$
7	2	2	$\xi > 0$
8	2	3	$\xi < -2$
9	4	4	$\lvert \xi \rvert > 2$
10	4	5	$\lvert \xi \rvert < 3$

5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1. Краткое теоретическое введение

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется константа, к которой стремится среднее арифметическое k-тых степеней значений, принятых величиной ξ в бесконечно большой серии опытов. Для дискретной случайной величины (ДСВ), принимающей значения x_i с вероятностями p_i, этот начальный момент определяется формулой

$$m_k\{\,\xi\,\} = \sum_i x_i^k \cdot p_i\,, \qquad (5.1)$$

где в суммировании участвуют все возможные значения СВ ξ. Для непрерывной случайной величины (НСВ), характеризуемой плотностью вероятности $W_\xi(x)$, начальный момент k-го порядка рассчитывают по формуле

$$m_k\{\,\xi\,\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot W_o(x)\,dx\,. \qquad (5.2)$$

Особое место среди начальных моментов занимает начальный момент первого порядка, называемый математическим ожиданием. **Математическое ожидание** случайной величины ξ определяет константу, к которой стремится среднее арифметическое наблюдаемых значений этой СВ, и может быть рассчитано по правилу

$$M_\xi = m_1\{\,\xi\,\} = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot p_i & \text{- для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_o(x)\,dx & \text{- для НСВ.} \end{cases} \qquad (5.3)$$

Примечание: Геометрически математическое ожидание соответствует горизонтальной координате центра масс фигуры, образуемой

плотностью вероятностей анализируемой случайной величины. Это означает, что если под графиком ПРВ разместить в точке $x = M_\xi$ опору, то на данной опоре фигура, образуемая графиком ПРВ, будет находиться в равновесии. Из этого, в частности, следует, что для любой СВ, плотность вероятности которой оказывается четной относительно некоторой точки, эта точка и определяет математическое ожидание (рис. 5.1).

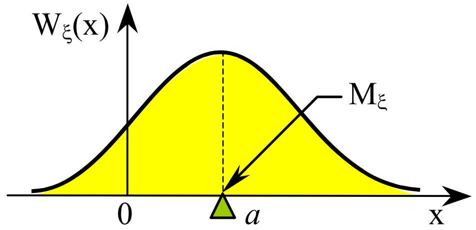


Рис. 5.1. Для СВ с симметричной плотностью вероятности математическое ожидание находится в центре симметрии

Центральный момент k-го порядка определяется аналогично (5.1)-(5.2), но отличается от начального тем, что усреднению подвергаются k-е степени отклонений наблюдаемых значений СВ ξ от ее математического ожидания. Соответственно, расчетная формула для k-го центрального момента имеет вид

$$\mu_k\{\,\xi\,\} = \begin{cases} \sum_i \left(x_i - M_o\right)^k \cdot p_i & \text{- для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M_o\right)^k \cdot W_o(x)\,dx & \text{- для НСВ.} \end{cases} \qquad (5.4)$$

Важнейшим центральным моментом случайной величины является её второй центральный момент, называемый дисперсией. **Дисперсия** D_ξ характеризует степень разброса значений, принимаемых случайной величиной, относительно ее математического ожидания. Она рассчитывается по правилу

$$D_\xi = \mu_2\{\,\xi\,\} = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M_o)^2 \cdot p_i & \text{- для ДСВ,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M_o)^2 \cdot W_o(x)\, dx & \text{- для НСВ.} \end{cases} \qquad (5.5)$$

Если раскрыть квадраты, входящие в состав (5.5), и проанализировать возникающие при этом слагаемые, то несложно получить следующее, полезное во многих практических ситуациях, соотношение

$$D_\xi = m_2\{\,\xi\,\} - M_\xi^2, \qquad (5.6)$$

гласящее: "дисперсия – это матожидание квадрата минус квадрат матожидания случайной величины ξ".

Часто вместо дисперсии в расчетах используют **среднеквадратическое отклонение** (СКО) или, иначе, **эффективное значение** случайной величины

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_o}\,. \qquad (5.7)$$

Эффективное значение, как и дисперсия, характеризует степень разброса значений, принимаемых случайной величиной, и отличается от нее единицей измерения.

Полезные для использования в практических расчетах свойства наиболее важных числовых характеристик приведены в табл. 5.1.

Помимо перечисленных выше в теории вероятностей используются и другие числовые характеристики, например, мода и медиана распределения. **Модой распределения** называют наивероятнейшее значение случайной величины $x_{мод}$, определяемое максимумом ее плотности распределения вероятностей

$$x_{мод} = \arg\max W_\xi(x). \qquad (5.8)$$

Медианой $x_{0,5}$ называют значение СВ, для которого справедливо

$$F_\xi(x_{0,5}) = P\{\,\xi \le x_{0,5}\,\} = P\{\,\xi > x_{0,5}\,\} = 0{,}5. \qquad (5.9)$$

Таблица 5.1

Свойства числовых характеристик случайной величины

Свойство	Матожидание M_η	Дисперсия D_η	СКО σ_η
Размерность	$[\,\eta\,]$	$[\,\eta\,]^2$	$[\,\eta\,]$
Для константы $\eta = c$	c	0	0
После умножения на константу $\eta = c \cdot \xi$	$c \cdot M_\xi$	$c^2 \cdot D_\xi$	$\lvert c\rvert \cdot \sigma_\xi$
Для линейного преобразования $\eta = \sum\limits_i a_i \cdot \xi_i$ некоррелированных ξ_i	$\sum\limits_i a_i \cdot M_i$	$\sum\limits_i a_i^2 \cdot D_i$	$\sqrt{\sum\limits_i a_i^2 \cdot D_i}$

Примечание: обозначение $[\,\eta\,]$ *соответствует размерности случайной величины* η.

5.2. Типовые задачи

Задача 1. Баскетбольным мячом три раза бросают в корзину. Вероятность попадания не зависит от номера броска и составляет для каждого из них 0,6. Определить математическое ожидание и дисперсию числа попаданий мячом в корзину.

Решение

а) Случайная величина ξ – число попаданий мячом в корзину в изложенных выше условиях – уже анализировалась выше в задаче 3 подраздела 4.2 и характеризуется рядом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

б) Применяя к этому ряду формулы (5.3) и (5.5), получаем

$$M_\xi = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}064 + 1 \cdot 0{,}288 + 2 \cdot 0{,}432 + 3 \cdot 0{,}216 = 1{,}8.$$

$$D_\xi = \sum_i (x_i - M_o)^2 \cdot p_i = (0\text{–}1{,}8)^2 \cdot 0{,}064 + (1\text{–}1{,}8)^2 \cdot 0{,}288 + (2\text{–}1{,}8)^2 \cdot 0{,}432$$

$$+$$

$$+ (3\text{–}1{,}8)^2 \cdot 0{,}216 = 0{,}20736 + 0{,}18432 + 0{,}01728 + 0{,}31104 = 0{,}72.$$

в) Для проверки полученных результатов можно воспользоваться тем фактом, что для биномиально распределенных СВ, числовые характеристики подчиняются соотношениям

$$M_\xi = n \cdot p, \qquad D_\xi = n \cdot p \cdot q, \qquad (5.10)$$

где n – число проводимых испытаний, p – вероятность возникновения нужного результата в отдельном испытании, q – вероятность противоположного события.

Для $n = 3$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$ в соответствии с (5.10) получаем

$$M_\xi = 3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8; \qquad D_\xi = 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}72$$

что совпадает с результатами произведенных выше вычислений.

Задача 2. Зенитная установка, обладающая неограниченным запасом снарядов, обстреливает самолёт до тех пор, пока он не будет поражен. Вероятность попадания для каждого из выстрелов сохраняется одной и той же и составляет 0,2. Каково среднее число снарядов η, затрачиваемых зениткой “впустую” (без поражения цели)? Какова вероятность, что при обстреле очередной цели впустую будет потрачено больше снарядов, чем тратится на то же самое в среднем?

Решение

а) Анализируемая СВ может принимать лишь целочисленные неотрицательные значения, поэтому решение задачи целесообразно начать с расчета ряда распределения этой величины.

Для получения результата в общем виде обозначим заданную в условии вероятность попадания при каждом отдельном

выстреле через p_1. Наименьшее значение СВ η, равное нулю, наблюдается лишь если первый же сделанный зениткой выстрел является удачным. Вероятность этого составляет $P\{ \eta = 0 \} = p_1$. Следующее возможное значение $\eta = 1$ возникает, если первый выстрел по цели завершился промахом **и** сразу после него произошло попадание. Таким образом, речь идет о пересечении двух независимых событий, а потому соответствующая вероятность $P\{ \eta = 1 \} = (1 - p_1) \cdot p_1$. Рассуждая аналогично, получаем ряд распределения

x_i	0	1	…	k	…
p_i	p_1	$(1 - p_1) \cdot p_1$	…	$(1 - p_1)^k \cdot p_1$	…

б) Непосредственное применение к этому ряду формулы (5.3) не дает возможности получить компактный ответ, т.к. число слагаемых в сумме бесконечно велико, и они не образуют ни арифметической, ни геометрической прогрессии, ни какой-либо иной удобной для суммирования последовательности

$$M_\xi = \sum_i x_i \cdot p_i = p_1 + 2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1 + \ldots + k \cdot (1 - p_1)^k \cdot p_1 + \ldots$$

В связи с этим для выполнения вычислений необходимо использовать какой-либо иной косвенный метод расчета, например, метод производящих функций.

в) <u>*Метод производящих функций*</u> оказывается полезным в случаях, когда дискретная СВ принимает лишь целочисленные значения и опирается на использование свойств функции

$$\varphi_\xi(z) = \sum_k p_k \cdot z^k , \qquad (5.11)$$

где p_k – вероятность принятия случайной величиной ξ значения k.

Взяв производную от обеих частей (5.11) по переменной z, получаем

$$\varphi_o'(z) = \sum_k k \cdot p_k \cdot z^{k-1} .$$

Если теперь принять $z = 1$, то для принимающей лишь целочисленные значения СВ стоящая справа сумма совпадёт с выражением, получаемым на основе (5.3), т.е. будет представлять собой математическое ожидание этой СВ. Итак,

$$\mathrm{M}_{\xi} = \varphi_{o}'(z)_{|z=1}\,. \qquad (5.12)$$

г) Применяя метод производящих функций к рассматриваемой задаче, в качестве функции $\varphi_{\xi}(z)$ имеем

$$\varphi_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{p}_1 \cdot (1-\mathrm{p}_1)^{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{z}^{\mathrm{k}} = \mathrm{p}_1 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(1-\mathrm{p}_1)\cdot \mathrm{z}\right]^{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{p}_1}{1-(1-\mathrm{p}_1)\cdot z}\,.$$

Замена представленной выше суммы дробью оказывается возможной в силу того, что слагаемые $[(1 - \mathrm{p}_1) \cdot \mathrm{z}]^{\mathrm{k}}$ *образуют бесконечную геометрическую прогрессию, а, как известно,* $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{q} + \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{q}^2 + \ldots = \mathrm{a}_1 / (1 - \mathrm{q})$.

Используя теперь соотношение (5.12) получаем

$$\mathrm{M}_{\xi} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\mathrm{p}_1}{1-(1-\mathrm{p}_1)\cdot z}\right\}_{|z=1} = \frac{(1-\mathrm{p}_1)\cdot \mathrm{p}_1}{\left[1-(1-\mathrm{p}_1)\cdot z\right]^2}_{|z=1} = \frac{(1-\mathrm{p}_1)\cdot \mathrm{p}_1}{\mathrm{p}_1^{\ 2}} = \frac{(1-\mathrm{p}_1)}{\mathrm{p}_1}\,.$$

д) Учитывая окончательно, что по условию задачи вероятность p_1 составляла $\mathrm{p}_1 = 0{,}2$ для среднего числа снарядов, расходуемых зенитной установкой “впустую” (т.е. до попадания в цель), имеем

$$\mathrm{M}_{\xi} = (\,1 - \mathrm{p}_1\,) / \mathrm{p}_1 = 0{,}8 / 0{,}2 = 4.$$

е) Для ответа на второй вопрос задачи остается выяснить, сколь часто число затрачиваемых снарядов оказывается равным пяти, шести или более. С учетом уже найденного в подпункте “а” ряда распределения для расчета этой вероятности необходимо лишь вычислить сумму

$$\mathrm{P}\{\text{“будет потрачено более 4 снарядов”}\} = \sum_{k=5}^{+\infty} \mathrm{p}_1 \cdot (1-\mathrm{p}_1)^{\mathrm{k}}\,.$$

Эта сумма вновь образует бесконечную геометрическую прогрессию с начальным членом $\mathrm{a}_1 = \mathrm{p}_1 \cdot (\,1 - \mathrm{p}_1\,)^5$, поэтому

$$\mathrm{P}\{\,\xi > 4\,\} = \frac{\mathrm{p}_1 \cdot (1-\mathrm{p}_1)^5}{1-(1-\mathrm{p}_1)} = (\,1 - \mathrm{p}_1\,)^5 = 0{,}8^5 \approx 0{,}328.$$

Задача 3. Некоторое напряжение равновероятно принимает любые значения от 2 вольт до неизвестной константы U_{max}. Определить значение константы U_{max}, при котором дисперсия напряжения составит $3\ \mathrm{В}^2$.

Решение

а) Анализируемое напряжение характеризуется равномерным законом распределения, поэтому для решения поставленной задачи предварительно определим числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины.

б) Если некоторая СВ ξ подчиняется равномерному распределению с границами a и b, то плотность вероятности этой СВ будет иметь прямоугольный вид, показанный на рис. 5.2. Относительно точки $\mathrm{x} = (a + b)/2$ этот прямоугольник является четной функцией, поэтому математическое ожидание величины ξ составляет

$$\mathrm{M}_{\text{равн}} = \frac{a+b}{2}\,. \qquad (5.13)$$

Для расчета дисперсии воспользуемся соотношением (5.6) и предварительно определим второй начальный момент распределения. В соответствии со свойством нормировки (4.7) в пределах от a до b высота плотности вероятности составляет $1/(b–a)$, поэтому

$$\mathrm{m}_2\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{W}_{o}(x)\, dx = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b\text{-}a}\, dx = \left.\frac{x^3}{3\cdot(b\text{-}a)}\right|_{a}^{b} = \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b\text{-}a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

.

В соответствии с (5.6) для дисперсии CD ξ получаем

$$\mathrm{D}_{\text{равн}} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}\,. \qquad (5.14)$$

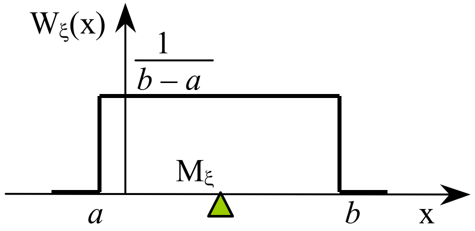


Рис. 5.2. Плотность вероятности равномерно распределенной СВ ξ

в) Возвращаясь к исходной задаче, где нижняя граница распределения $a = 2$ В, а верхняя – неизвестна $b = U_{max}$, на основе (5.14) получаем уравнение

$$(U_{max} - 2)^2 / 12 = 3,$$

откуда окончательно получаем $U_{max} = 8$ В.

Задача 4. Найти дисперсию нормальной случайной величины ξ, подчиняющейся закону распределения

$$W_{норм}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right).$$

Решение

а) Соответствующая анализируемой СВ плотность вероятности фактически уже была показана выше на рис. 5.1. Она оказывается симметричной относительно линии $x = a$, поэтому эта координата и служит математическим ожиданием данной случайной величины

$$M_{норм} = a. \qquad (5.15)$$

б) Дисперсия СВ ξ определяется соотношением (5.5)

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 W_o(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)dx.$$

Воспользуемся заменой переменных $z = (x - a) / \sigma$. При изменении переменной x от минус бесконечности до плюс бесконечности новая переменная z также будет изменяться в бесконечных пределах. Учитывая дополнительно, что $(x - a) = \sigma\cdot z$ и $dx = \sigma\cdot dz$, получаем

$$D_\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = \sigma^2\cdot\left[\frac{-z}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz\right].$$

Во втором выражении в строке выше применено интегрирование по частям, где $u = z$, $dv = z\cdot\exp(-z^2/2)$ *и соответственно* $du = 1$, $v = -\exp(-z^2/2)$.

Учитывая, что линейная функция z нарастает медленнее, чем уменьшается экспонента $\exp(-z^2/2)$, можно убедиться, что первое слагаемое в полученной сумме как при верхнем, так и при нижнем пределе равно нулю. Второе же слагаемое представляет собой интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения вероятностей нормальной СВ с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, который в соответствии со свойством нормировки (4.7) всегда равен единице. По указанным причинам содержимое всей квадратной скобки в представленном выше выражении равно единице и, следовательно,

$$D_{норм} = \sigma^2. \qquad (5.16)$$

Итак, параметры, входящие в выражение ПРВ нормальной СВ $W_{норм}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)$ определяют математическое ожидание (a) и среднеквадратическое отклонение ($\sigma = \sqrt{D_{норм}}$) этой СВ.

Задача 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, обладающей ФРВ $F_\xi(x) = \sin(2\cdot x)$ при $0 \le x \le \pi/4$.

Решение

а) Анализируемая СВ может принимать любые значения из промежутка $[0; \pi/4]$ и, следовательно, является непрерывной случайной величиной. Для расчета матожидания и дисперсии подобных СВ необходимо знать их плотность распределения вероятностей. Найти ПРВ можно, применив к заданной в условии ФРВ, правило (4.4)

$$W_\xi(x) = F'_\xi(x) = 2 \cdot \cos(2x), \qquad 0 \le x \le \pi/4.$$

б) Так как значения плотности вероятностей СВ ξ отличаются от нуля лишь на интервале $x \in [\,0; \pi/4\,]$, заменим бесконечные пределы интегрирования в (5.3) конечными

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_o(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x) dx\,.$$

Используя табличный интеграл (П2) из приложения 2, окончательно имеем $\quad M_\xi = 2 \cdot \left(\frac{\cos 2x}{4} + \frac{x \sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.$

Для перепроверки полученного результата разместим в точке $x = M_\xi$ “подпорку” для функции $W_\xi(x)$. Такая “подпорка”, судя по рис. 5.3, может обеспечить равновесие фигуры, определяемой графиком функции $W_\xi(x)$ (является горизонтальной координатой центра масс этой фигуры), что является косвенным подтверждением корректности произведенных расчетов.

в) Для определения дисперсии воспользуемся соотношением (5.6) и интегралом (П3) из приложения 2. Получим

$$D_\xi = m_2\{\,\xi\,\} - M_\xi^2 = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} x^2 \cdot \cos(2x)\,dx - \left(\frac{\pi - 2}{4} \right)^2 .$$

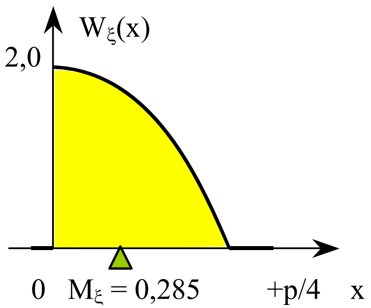


Рис. 5.3. Плотность вероятностей СВ ξ из задачи 3

<u>Задача 6.</u> Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти среднеквадратическое отклонение для расстояния от точки до центра круга.

<u>Решение</u>

а) Обозначим расстояние между точкой и центром круга через ξ. Среднеквадратическое отклонение СВ ξ определяется формулой (5.7), в которой фигурирует дисперсия ξ, а для ее расчета необходима плотность распределения вероятностей этой СВ.

б) Для любого кольца с внутренним радиусом r и шириной Δr площадь составляет (см. рис. 5.4)

$$S_{кольца} = \pi \cdot (\,r + \Delta r\,)^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\,2 \cdot r \cdot \Delta r + \Delta r^2\,).$$

Поскольку точка обязательно лежит где-то внутри заданного круга, то площади $\pi \cdot R^2$ соответствует единичная вероятность попадания, а кольцу шириной Δr соответствует вероятность

$$P\{\text{ точка принадлежит кольцу }\} = \frac{S_{кольца}}{S_{круга}} = \left(2 \cdot \frac{r}{R} + \frac{Дr}{R} \right) \cdot \frac{Дr}{R}\,.$$

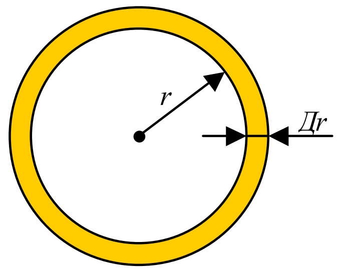


Рис. 5.4. Кольцевая область радиуса r с шириной dr

в) Плотность вероятностей, согласно (4.4), есть вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал значений, отнесенная к ширине интервала при условии, что эта ширина стремится к нулю. Для величины ξ вероятность попасть в интервал от r до $r + \Delta r$ совпадает с вероятностью попадания точки в показанное на рис. 5.4 кольцо, поэтому

$$\mathrm{W}_{\xi}(r) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r} \cdot \left(2 \cdot \frac{r}{R} + \frac{\Delta r}{R} \right) \cdot \frac{\Delta r}{R} = 2 \cdot \frac{r}{R^2}, \quad 0 \le r \le R.$$

г) Математическое ожидание СВ ξ согласно (5.3) равно

$$\mathrm{M}_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{o}}(r)\, dr = \frac{2}{R^2} \cdot \int_{0}^{R} r^2 dr = \left. \frac{2 \cdot r^3}{3 \cdot R^2} \right|_0^R = \frac{2}{3} \cdot R .$$

Вычислять дисперсию выгоднее на основе (5.6), что дает

$$\mathrm{D}_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{o}}(r)\, dr - \mathrm{M}_{\xi}^2 = \frac{2}{R^2} \cdot \int_{0}^{R} r^3 dr - \left(\frac{2}{3} R \right)^2 = \frac{1}{2} R^2 - \frac{4}{9} R^2 = \frac{R^2}{18} .$$

В итоге среднеквадратическое отклонение для СВ ξ составляет

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}_{\xi}} = \frac{R}{3\sqrt{2}} .$$

5.3. Задачи для самоконтроля

5.1. Игральный кубик с гранями, помеченными цифрами от 1 до 6, подбрасывается наугад. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа очков, выпадающих на верхней грани кубика.

Ответ: $\mathrm{M}_{\xi} = 3.5$; $\sigma_{\xi} \approx 1.708$.

5.2. Ведётся стрельба из высокоточного оружия по цели. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,1 и от выстрела к выстрелу не меняется. Построить ряд распределения вероятностей числа попаданий в цель при четырёх выстрелах. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение анализируемой случайной величины.

Ответ:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

$\mathrm{M}_{\xi} = 3,6$
$\sigma_{\xi} = 0,6$

5.3. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найти математическое ожидание и функцию распределения числа бросков монеты.

Ответ: $\mathrm{M}_{\xi} = 3$ броска; $\mathrm{F}_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \sum\limits_{2 \le k < x} 2^{-k+1}, & x > 2. \end{cases}$

5.4. Производится ряд попыток наладить прибор. Вероятность того, что прибор будет налажен с k-й попытки равна p_k ($1 \le k \le n$). После n-й безуспешной попытки наладить прибор наладка прекращается. Найти математическое ожидание случайной величины ξ – общего числа попыток.

Ответ: $\mathrm{M}_{\xi} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} i p_i + n \cdot \left[1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \right]$.

5.5. Изменение частоты колебания, формируемого генератором, из-за самопрогрева подчинено распределению, показанному на рис. 5.5. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение частоты ω.

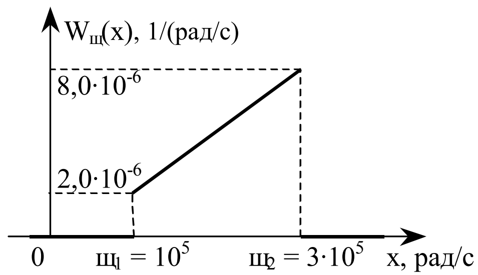


Рис. 5.5. Плотность вероятностей температурного дрейфа частоты ω

Ответ: $\mathrm{M}_{\xi} = 2,2 \cdot 10^5$ рад/с, $\sigma_{\xi} = 0,54 \cdot 10^5$ рад/с.

5.6. При измерении напряжения гармонического колебания вольтметром стрелка прибора из-за наличия помех равномерно колеблется между значениями $\alpha_1 = 0.1$ мВ и $\alpha_2 = 0.2$ мВ.

Определить относительную погрешность $\Delta = \sigma_\alpha / M_\alpha$ измерения амплитуды напряжения (M_α, σ_α – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение показаний вольтметра).

Ответ: $\Delta \approx 19.2\,\%$.

5.7. Сообщение передаётся квантованными импульсами с шагом квантования (наименьшей разностью амплитуд двух импульсов) $\Delta = 1$ мВ. Предполагая, что ошибка квантования ξ равномерно распределена в пределах интервала квантования и имеет нулевое математическое ожидание M_ξ, определить дисперсию D_ξ ошибки. Найти вероятность того, что ошибка квантования ξ примет значение из интервала $[M_\xi - \sigma_\xi,\ M_\xi + \sigma_\xi]$.

Ответ: $D_\xi \approx 8{,}33 \cdot 10^{-8}$ В^2; P ≈ 0,577.

5.8. Время τ безотказной работы самолётного радиоэлектронного оборудования в полёте является случайной величиной, распределенной по показательному закону: $W_\tau(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$ при t > 0. Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полёта, если среднее время безотказной работы оборудования составляет 250 часов.

Ответ: P ≈ 96%.

5.9. Напряжение u на выходе усилителя при отсутствии на его входе полезного сигнала обусловлено шумами и распределено с плотностью вероятностей

$$W_u(x) = (2\pi)^{-1/2} \cdot exp(-0.5 \cdot x^2), 1/\text{мВ}.$$

Рассчитать вероятность события, заключающегося в том, что случайное напряжение u превысит своё матожидание не более чем на величину своего среднеквадратического отклонения.

Ответ: P = 0,3413.

5.4. Контрольные задания

5.10. По приведенному в таблице ряду распределения вероятностей дискретной случайной величины ξ рассчитать для нее вероятность свершения события, указанного в последней колонке таблицы

Номер	Характеристики анализируемой случайной величины					Событие, вероятность которого надо рассчитать
1	x_i	0,2	0,5	1,0	1,5	$\xi \le M_\xi$
	p_i	0,20	?	0,25	0,35	
2	x_i	–5	–2	3	5	$\xi > M_\xi$
	p_i	?	0,1	0,4	0,1	
3	x_i	–2	0	2	3	$\xi \le D_\xi$
	p_i	0,2	?	0,1	0,4	
4	x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	$\xi > D_\xi$
	p_i	0,4	0,3	0,2	?	
5	x_i	12	15	20	22	$\xi \le M_\xi$
	p_i	0,1	0,2	?	0,4	
6	x_i	0,0	1,0	1,2	1,5	$\xi > M_\xi$
	p_i	0,38	0,27	0,16	?	
7	x_i	–20	–15	–10	–5	$\xi \le -D_\xi$
	p_i	?	0,2	0,4	0,2	
8	x_i	2	4	7	10	$\xi > D_\xi$
	p_i	0,3	0,2	0,3	?	
9	x_i	–3	–1	2,6	4	$\xi > \sigma_\xi$ (σ_ξ - среднеквадратическое отклонение)
	p_i	0,1	?	0,5	0,1	
10	x_i	0,1	0,3	0,5	1,0	$\xi \le \sigma_\xi$ (σ_ξ - среднеквадратическое отклонение)
	p_i	0,5	0,3	?	0,1	

5.11. По заданным в таблице ниже математическому ожиданию и дисперсии дискретной случайной величины ξ, принимающей лишь указанные в той же таблице значения A, B и C, определить ее ряд распределения вероятностей.

Номер	Математическое ожидание M_ξ	Дисперсия D_ξ	A	B	C
1	–6	12	–10	–4	0
2	–2	3	–5	–3	0
3	–1,5	2,25	–4	–2	0
4	0	6	–4	0	+2
5	0	4,8	–4	0	+4
6	0,4	1,84	–1	0	+2
7	1	0,6	0	+1	+2
8	2	2,8	0	+1	+4
9	2	3	0	+2	+5
10	5	7	+3	+5	+10

5.12. Определить дисперсию случайной величины ξ, плотность вероятности которой задана в таблице

Номер	Плотность распределения вероятностей СВ ξ	Номер	Плотность распределения вероятностей СВ ξ
1	$2/\pi \cdot \cos^2(x),\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$	6	$3 \cdot x^2,\ \ 0 \le x \le 1$
2	$\begin{cases} 0{,}5, & \text{при } -2 \le x \le -1 \\ 0{,}5, & \text{при } 1 \le x \le 2 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0{,}5, & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0{,}5/x^2, & \text{при } 1 \le x < +\infty \end{cases}$
3	$-x \cdot \exp(x),\ \ x \le 0$	8	$x \cdot \exp(-x),\ \ x > 0$
4	$\begin{cases} x-1, & \text{при } 1 \le x \le 2 \\ 3-x, & \text{при } 2 \le x \le 3 \end{cases}$	9	$\begin{cases} e^{3x/2}, & \text{при } x < 0 \\ e^{-3x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$
5	$3/4 \cdot [\,1-(x-3)^2\,],\ 2 \le x \le 4$	10	$1{,}5 \cdot x^2,\ \ \lvert x \rvert \le 1$

5.13. Рассчитать математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, характеристики которой определяются функцией распределения вероятностей

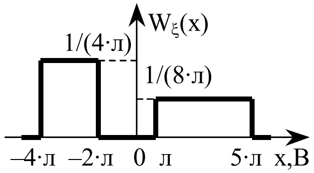
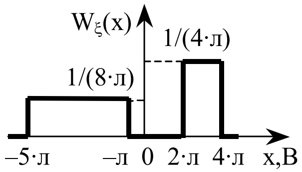
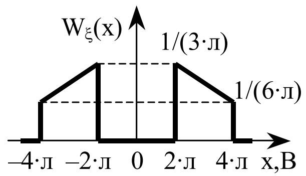
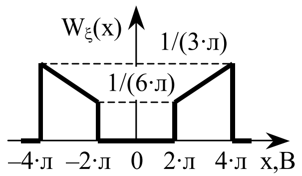
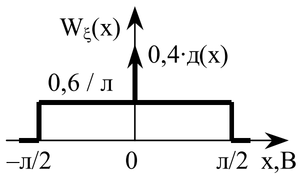
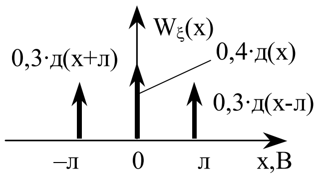
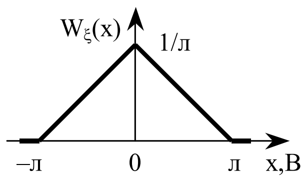
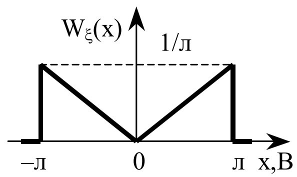
Номер	Функция распределения вероятностей СВ ξ	Номер	Функция распределения вероятностей СВ ξ
1	$\begin{cases} 0{,}5 \cdot e^{\lambda x}, & \text{при } x < 0 \\ 1-0{,}5 \cdot e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 1{,}5 \cdot x, & \text{при } 0 < x < 0{,}5 \\ 2 \cdot x - x^2, & \text{при } 0{,}5 < x < 1 \end{cases}$
2	$\cos^2(\pi \cdot x/8),\ -4 \le x \le 0$	7	$0{,}5 + x/4,\ \ -2 \le x \le 2$
3	$\begin{cases} 0{,}5+x, & \text{при } -0{,}5 < x < 0 \\ \dfrac{4+4x-x^2}{8}, & \text{при } 0 \le x \le 2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 0{,}5+x, & \text{при } -0{,}5 < x < 0 \\ 1-0{,}5 \cdot e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$
4	$1/(1+x^2),\ -\infty < x \le 0$	9	$\sin^2(\pi \cdot x/16),\ 0 \le x \le 8$
5	$ln(x),\ 1 \le x \le e$	10	$0{,}5 \cdot (1+x),\ \ 0 \le x \le 1$

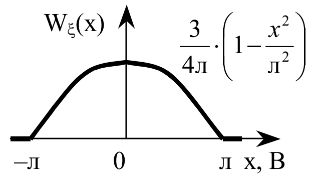
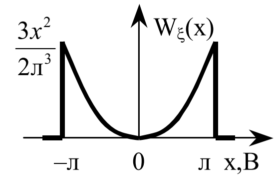
5.14. Рассчитать дисперсию и медиану распределения случайной величины, плотность вероятности которой приведена в таблице…

Номер	Плотность вероятности	Номер	Плотность вероятности
1	$1/\pi(1+x^2)$ при любых x	6	$[1+\cos(x)]/\pi$ при $0 \le x \le \pi$
2	$0{,}3+0{,}4 \cdot \delta(x-1)$ при $-1 \le x \le 1$	7	$\exp(x)$ при $-\infty < x \le 0$
3	$0{,}4 \cdot (1-\lvert x \rvert)$ при $\lvert x \rvert \le 2{,}5$	8	$4 \cdot x^3$ при $0 \le x \le 1$
4	$\begin{cases} 0{,}2 & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}6 & \text{при } 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	9	$\begin{cases} 0{,}2 \cdot x & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}1 & \text{при } 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$

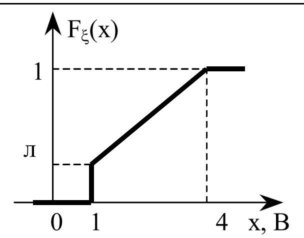
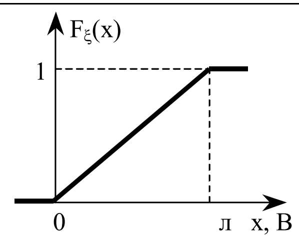
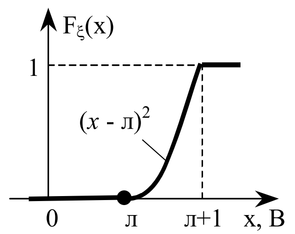
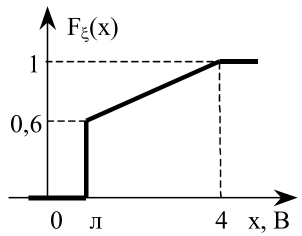
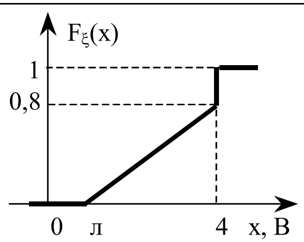
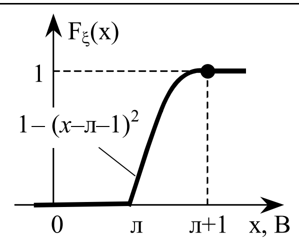
5	$\begin{cases} 0{,}5 \text{ при } -1 \le x \le 0 \\ 0{,}5 \cdot \exp(-x) \text{ при } 0 \le x < \infty \\ 0 \text{ при прочих } x \end{cases}$	10	$\begin{cases} 0{,}25 \text{ при } -3 \le x \le -1 \\ 0{,}25 \text{ при } 1 \le x \le 3 \\ 0 \text{ при прочих } x \end{cases}$

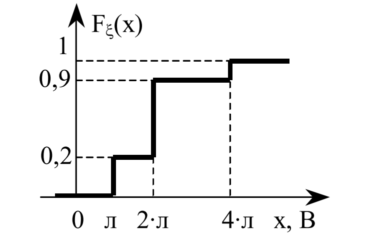
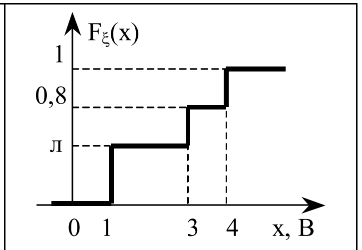
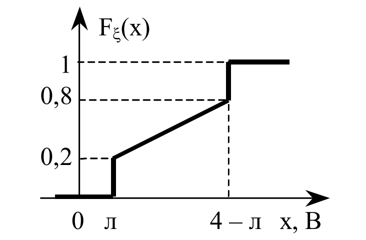
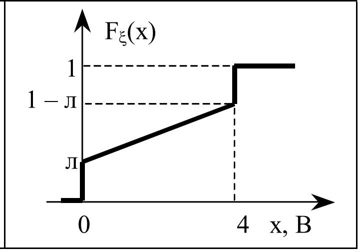
5.15. Форма плотности распределения вероятностей случайного напряжения ξ определяется представленным ниже рисунком, где параметр λ – некоторая неизвестная константа. Определить значение данной константы, если среднеквадратическое отклонение этого напряжения составляет $\sigma_\xi = 2$ В.

Номер	Плотность распределения вероятностей СВ ξ	Номер	Плотность распределения вероятностей СВ ξ
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	

5		10	

5.16. Функция распределения вероятностей случайного напряжения ξ соответствует представленному ниже рисунку, где параметр λ – некоторая неизвестная константа. Определить значение данной константы, если математическое ожидание напряжения составляет $M_\xi = 2$ В.

Номер	Функция распределения вероятностей СВ ξ	Номер	Функция распределения вероятностей СВ ξ
1		6	
2		7	
3		8	

4		9	
5		10	

5.17. Случайное напряжение ξ обладает нормальным распределением. Его дисперсия D_ξ и вероятность попадания в некоторый интервал представлены в таблице ниже. Определить математическое ожидание M_ξ этого напряжения.

Номер	Дисперсия D_ξ, В^2	Известная вероятность события
1	4	$P\{\xi < 1{,}4\} = 58\%$
2	4	$P\{\xi < 2{,}8\} = 99\%$
3	4	$P\{\xi > 1{,}0\} = 70\%$
4	1	$P\{\xi < 1{,}3\} = 90\%$
5	1	$P\{\xi > -2{,}4\} = 65{,}5\%$
6	1	$P\{\xi > 2{,}7\} = 90\%$
7	0,25	$P\{\xi > 1{,}25\} = 30\%$
8	0,25	$P\{\xi < -0{,}35\} = 10\%$
9	0,25	$P\{\xi < -2{,}2\} = 34{,}5\%$
10	1	$P\{\xi < -0{,}2\} = 32\%$

5.18. Какая из числовых характеристик (мода, медиана или математическое ожидание) случайной величины, обладающей функцией распределения вероятности, представленной в таблице ниже, является наибольшей?

Номер	Функция распределения вероятностей СВ ξ	Номер	Функция распределения вероятностей СВ ξ
1	$1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$	6	$(16+12\cdot x - x^3)/32$, $\lvert x \rvert \le 2$
2	$(4-9\cdot x+6x^2-x^3)/4$, $1 \le x \le 3$	7	$e^{\lambda x}$, $x \le 0$
3	$ln(x)$, $1 \le x < e$	8	$2\cdot \mathrm{arctg}(x)/\pi$, $0 \le x < \infty$
4	$(4-3x^2-x^3)/4$, $-2 \le x \le 0$	9	$\exp(x^2)$, $x \le 0$
5	$\sqrt{x/2}$, $0 \le x \le 2$	10	$\sqrt{x+1}$, $-1 \le x \le 0$

5.19. Какая из числовых характеристик (мода, медиана или математическое ожидание) случайной величины, имеющей показанную в таблице ниже плотность вероятности, является наибольшей?

Номер	Плотность распределения вероятностей СВ ξ	Номер	Плотность распределения вероятностей СВ ξ
1	$0{,}5 \cdot \sin(x/2)$, $0 \le x \le \pi$	6	$0{,}5 \cdot \cos(x/2)$, $-\pi \le x \le 0$
2	$4/x^5$, $1 \le x < +\infty$	7	$8 \cdot x$, $0 \le x \le 0{,}5$
3	$\begin{cases} 0{,}2, & -1{,}5 \le x \le 0 \\ 0{,}2 - 0{,}024 \cdot x, & 0 \le x \le 5 \end{cases}$	8	$\begin{cases} (2x-1)/7, & 1 \le x \le 2 \\ (4 - x/2)/7, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$
4	$\exp(-2 \cdot \lvert x \rvert)$, $-\infty < x < +\infty$	9	$0{,}1 \cdot \exp(x/4)$, $0 \le x \le 5$
5	$(36-3x-3x^2)/104$, $-4 \le x \le 0$	10	$(4 \cdot x - x^2)/9$, $0 \le x \le 3$

6. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1. Краткое теоретическое введение

Если каждое значение y случайной величины η возникает как реакция на соответствующее значение x воздействия ξ : $y = \mathrm{f}(x)$, то говорят, что случайные величины ξ и η связаны функциональной зависимостью $\eta = \mathrm{f}(\xi)$. Следствием зависимости между наблюдаемыми значениями СВ является жесткая взаимосвязь между их законами распределения. Характер этой взаимосвязи существенно зависит от типа СВ ξ (дискретная/непрерывная) и от вида обратной функции $x = \varphi(y)$, позволяющей определить воздействие x, необходимое для получения реакции y.

6.1.1. При функциональном преобразовании дискретной СВ ξ возникающая СВ η тоже оказывается дискретной, а преобразование закона распределения сводится, фактически, к изменению набора наблюдаемых значений. Никакой специальной методики для анализа подобного случая не требуется, поэтому для освоения этого типа функционального преобразования достаточно разобрать приведенную ниже (в подразделе 6.2) задачу 1.

6.1.2. Пусть теперь ξ является непрерывной СВ, а функция $y = \mathrm{f}(x)$ не содержит горизонтальных участков (пример подобной функции показан на рис. 6.1). Тогда каждое выходное значение y может быть получено из конечного числа аргументов x, т.е. существует *конечнозначная* обратная функция $x = \varphi_i(y)$, где i – номер ветви обратной функции $\varphi(\cdot)$. В частности, для случая, представленного на рис. 6.1, обратная функция является однозначной для $y \in (-\infty; y_0]$ и трехзначной – для $y \in [y_0; y_1]$ (три разных значения $x_1^* = \varphi_1(y^*)$, $x_2^* = \varphi_2(y^*)$ и $x_3^* = \varphi_3(y^*)$ соответствуют одному и тому же y^*).

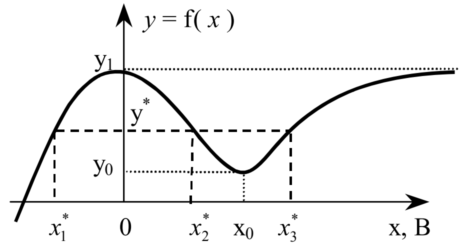


Рис. 6.1. Пример функциональной зависимости с конечнозначной обратной функцией

Если для каждого возможного значения выходной СВ η обратная функция оказывается конечнозначной, то закон распределения η определяется соотношением

$$\mathrm{W}_\eta(y) = \sum_i \mathrm{W}_\text{o}(\varphi_\text{i}(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_\text{i}(y)}{dy} \right|, \qquad (6.1)$$

где суммирование осуществляется по всем ветвям обратной функции.

6.1.3. Если функция $y = \mathrm{f}(x)$, преобразующая непрерывную СВ ξ в СВ η, напротив, состоит лишь из горизонтальных участков (как показано на рис. 6.2), то получаемая СВ η оказывается дискретной, т.к. возможными (наблюдаемыми) для нее будут лишь отдельные значения y_m (на рис. 6.2 подобных значений четыре – от y_1 до y_4).

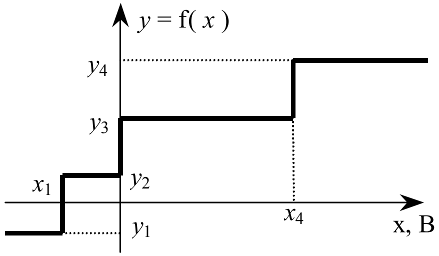


Рис. 6.2. Пример преобразования непрерывной СВ в дискретную

Провести в этом случае расчет по формуле (6.1) уже невозможно, т.к. каждому из значений y_m соответствует бесконечно много аргументов x. Так, значению y_1 соответствуют любые аргументы x, удовлетворяющие неравенству $x < x_1$; значению y_2 – любые аргументы, принадлежащие интервалу $x \in [\,x_1;\,0\,]$, и т.д. В результате оказывается неопределенным (бесконечным) число ветвей, которые нужно суммировать в (6.1).

Учтем, однако, что возникающая в результате преобразования СВ η является дискретной. Закон распределения подобной величины определяется лишь вероятностями, с которыми наблюдаются ее отдельные значения y_m. Вместе с тем СВ η принимает значение y_m в тех и только тех случаях, когда значение исходной СВ ξ лежит в пределах соответствующего этому y_m интервала оси x. Так, применительно к рис. 6.2 вероятность появления значения y_1

$$\mathrm{P}\{\,\eta = y_1\,\} = \mathrm{P}\{\,\xi \le x_1\,\} = \int_{-\infty}^{x_1} \mathrm{W_o}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Аналогично, для уровня y_2 имеем

$$\mathrm{P}\{\,\eta = y_2\,\} = \mathrm{P}\{\,x_1 < \xi \le 0\,\} = \int_{x_1}^{0} \mathrm{W_o}(x)\,\mathrm{d}x$$

и т.д. Поскольку записанные выше вероятности приходятся на отдельные точки оси x плотность вероятности в этих точках

оказывается бесконечно большой и может быть записана посредством дельта-функции

$$\mathrm{W}_\eta(\,\mathrm{y}\,) = \sum_m \mathrm{P}\{\,\eta = y_\mathrm{m}\,\}\cdot\delta(y - y_m)\,, \qquad (6.2)$$

где число слагаемых определяется количеством горизонтальных участков зависимости $y = \mathrm{f}(\,x\,)$.

6.1.4. Объединяя воедино два случая, рассмотренных в п. 6.1.2-6.1.3, получаем следующую <u>*универсальную формулу, определяющую вероятностные свойства результата функционального преобразования случайной величины*</u>

$$W_\eta(y) = \sum_i W_o(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| + \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (6.3)$$

где первая сумма включает все ветви обратных функций по всем наклонным участкам зависимости $y = f(x)$, а вторая сумма – все горизонтальные участки той же самой зависимости.

6.1.5. Числовые характеристики функционально преобразованной случайной величины η могут быть рассчитаны по стандартным правилам (на основе найденной $W_\eta(y)$), а могут быть получены, минуя этап нахождения её закона распределения вероятностей:

$$M_з = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_o(x)\, dx, \quad (6.4)$$

$$D_з = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_з]^2 \cdot W_o(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \cdot W_o(x)\, dx - M_з^2. \quad (6.5)$$

6.2. Типовые задачи

<u>Задача 1.</u> Дискретная СВ ξ равновероятно может принимать любые целочисленные значения от 0 до 7 (включительно). Величина Θ связана с ξ функциональной зависимостью Θ = cos(π·ξ/3). Рассчитать ряд распределения случайной величины Θ.

<u>Решение</u>

а) Запишем ряд распределения СВ ξ и дополним его строкой, в которой отобразим значения СВ Θ, получаемые из соответствующих значений СВ ξ.

ξ:	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
	p_i	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
Θ:	φ_i	1,0	0,5	-0,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0	0,5

б) Из полученной таблицы следует, в частности, что Θ = –1,0 лишь тогда, когда ξ = 3, т.е. с вероятностью 1/8. Значение Θ = –0,5 возникает как при ξ = 2, так и при ξ = 4, а поскольку события "ξ = 2" и "ξ = 4" несовместны, то вероятность наблюдения хотя бы одного из них определяется суммой вероятностей и равна 2 · 1/8 = 1/4. Упорядочивая значения, принимаемые СВ Θ, по возрастанию и объединяя аналогично рассмотренному вероятности появления тех или иных "необходимых" значений СВ ξ, получаем итоговый ряд распределения

Θ:	φ_i	-1,0	-0,5	0,5	1,0
	p_i	1/8	2/8	3/8	2/8

<u>Задача 2.</u> Непрерывная СВ ξ распределена равномерно на интервале от 0 до 1, а СВ η связана с ней формулой η = [(*n*+1) · ξ], где [·] – знак взятия целой части числа, а *n* – целочисленная константа. Определить закон распределения случайной величины η.

<u>Решение</u>

а) Для наглядности имеет смысл построить график зависимости значений *y*, принимаемых выходной величиной η, от значений *x* исходной СВ ξ. Подобный график для *n* = 4 изображен на рис. 6.2.

Действительно, для аргументов $x \in [\,0;\, 1/5\,)$ значение $5 \cdot x$ лежит между нулем и единицей (не достигая ее) и, следовательно, целая часть этого значения оказывается равной нулю; для $1/5 \le x < 2/5$ величина $5 \cdot x$ лежит в диапазоне от 1 до величины чуть меньшей, чем 2, поэтому целая часть этого числа дает единичный результат и т.д.

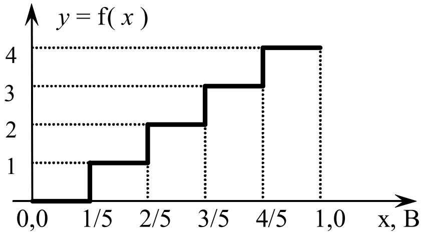


Рис. 6.3. Преобразование $y = \mathrm{f}(\ x\ )$ из задачи 2 при $n = 4$

б) Для расчета закона распределения выходной СВ η наиболее важно, что график на рис. 6.3 не содержит наклонных участков, а состоит лишь из горизонтальных отрезков, так что в результате преобразования допустимыми для СВ η оказываются лишь целочисленные значения 0, 1, 2, 3 и 4. Анализируя саму зависимость $y = [\ (n+1) \cdot x\ ]$, несложно установить, что подобный результат является закономерным и в результате преобразования появляется дискретная величина η, принимающая значения от 0 до n.

в) Значение $\eta = k$ наблюдается тогда, когда значение x исходной СВ лежит в интервале $k/(n+1) \le x < (k+1)/(n+1)$. Исходная же величина, имеющая равномерное распределение, характеризуется плотностью вероятности

$$\mathrm{W}_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{при прочих } x. \end{cases}$$

В результате вероятность наблюдения $\eta = k$ составляет

$$\mathrm{P}\{\ \eta = k\ \} = \int\limits_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} 1 \cdot \mathrm{dx} = \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

т.е. не зависит от k, а определяется лишь константой n.

Итак, функциональная взаимосвязь $\eta = [\ (n+1) \cdot \xi\ ]$ преобразует СВ ξ с непрерывным равномерным распределением в дискретную СВ η, имеющую дискретное равномерное распределение $\mathrm{P}\{\ \eta = k\ \} = 1\ /\ (\mathrm{n}+1)$ для всех целочисленных k из диапазона $0 \le k \le n$.

Задача 3. Показать, что для получения из равномерно распределенной на отрезке от 0 до 1 СВ ξ величины η, обладающей некоторой функцией распределения $\mathrm{F}_{\eta}(\ y\ )$, необходимо в качестве функции преобразования использовать функциональную зависимость, обратную требуемой функции распределения $y = \mathrm{F}_{\eta}^{-1}(x)$. (*Примечание: обратной называется функция, позволяющая выразить аргумент исходной функции через ее результат; соответственно зависимость* $F^{-1}(\cdot)$ *позволяет по результату* $x = \mathrm{F}_{\eta}(\ y\ )$ *найти необходимый аргумент* y).

Решение

а) Согласно теории, изложенной в п. 6.1.2, начинать анализ функционального преобразования следует с поиска функции, обратной соотношению, связывающему y и x, но так как используемая в задаче функциональная взаимосвязь сама является обратной к $\mathrm{F}_{\eta}(y)$, то именно эта зависимость и будет являться необходимой для расчетов функцией $x = \varphi(y) = \mathrm{F}_{\eta}(y)$.

б) Исходная СВ распределена равномерно на интервале от 0 до 1, т.е. имеет плотность вероятности

$$\mathrm{W}_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{при прочих } x. \end{cases}$$

Вместе с тем функция $x = \mathrm{F}_{\eta}(y)$ при любых аргументах y принимает значение, лежащее между нулем и единицей, поэтому для всех без исключения у справедливо

$$\mathrm{W}_{\xi}(\ \mathrm{F}_{\eta}(y)\ ) = 1.$$

в) Наконец, функция $\varphi(y) = \mathrm{F}_{\eta}(y)$ является однозначной для всех своих аргументов y и, следовательно, в универсальной формуле (6.3) сумма “по m”, ориентированная на бесконечнозначную $\varphi(y)$, сейчас в принципе не нужна, а сумма “по i” будет содержать лишь единственное слагаемое

$$\mathrm{W}_{\eta}(\ \mathrm{y}\ ) = \mathrm{W}_{\text{o}}\big(\varphi(y)\big) \cdot \left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right| = \mathrm{W}_{\text{o}}\big(\mathrm{F}_{\text{з}}(y)\big) \cdot \left|\frac{d\mathrm{F}_{\text{з}}(y)}{dy}\right| = \mathrm{W}_{\eta}(\ y\ ),$$

т.к. первый сомножитель в выражении выше (как показано в пп. ‘б’) всегда равен единице, а производная от функции распределения – это и есть плотность распределения вероятности.

Задача 4. Равномерно распределенная на интервале от a до b ($0 \le a \le b$) величина ξ преобразуется в новую случайную величину η по правилу $\eta = \ln(\xi)$. Определить закон распределения величины η и ее математическое ожидание.

Решение

а) Обратной к функции $y = f(x) = \ln(x)$ является функция $x = \varphi(y) = \exp(y)$ однозначная для всех своих возможных аргументов. Это означает (как и в предыдущей задаче), что в универсальной формуле (6.3) сумма “по *m*”, ориентированная на бесконечнозначную $\varphi(y)$, в анализируемом преобразовании отсутствует, а сумма “по *i*” будет содержать лишь единственное слагаемое

$$W_\eta(y) = W_o(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = W_o(e^y) \cdot e^y . \qquad (6.6)$$

б) Важной особенностью решаемой задачи является тот факт, что плотность вероятности исходной СВ отличается от нуля лишь на промежутке от a до b, а потому входящий в правую часть выражения (6.6) сомножитель $W_\xi(e^y)$ будет отличен от нуля лишь при выполнении неравенства $a \le e^y \le b$, т.е. для $y \in [\ln a; \ln b]$. Учитывая, что для $x \in [a; b]$ исходная плотность вероятности равна $1/(b-a)$, запишем окончательно

$$W_\eta(y) = e^y / (b-a) \quad \text{при} \quad \ln a \le y \le \ln b. \qquad (6.7)$$

в) Обратите внимание, что без указания допустимого диапазона аргументов y предыдущая формула становится явно некорректной. Действительно, если никаких ограничений на y наложено не будет, то при любых аргументах от минус бесконечности до плюс бесконечности формула (6.7) будет выдавать положительное значение плотности вероятности, означающее, что подобное значение y СВ η может наблюдаться в каком-то из опытов. Вместе с тем значения исходной СВ, лежащие в диапазоне от a до b, преобразователем $y = \ln x$ могут быть преобразованы лишь в интервал значений от $\ln a$ до $\ln b$, и никаких иных значений в результате анализируемого преобразования физически наблюдаться не может.

Во-вторых, именно при указанных в (6.7) ограничениях выполняется свойство нормировки. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_з(y)\,dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{e^y}{b-a}\,dy = \frac{1}{b-a} \cdot e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = \frac{e^{\ln b} - e^{\ln a}}{b-a} = 1.$$

Без установленных ограничений на аргумент y пределы интегрирования оказались бы иными и выполнение свойства нормировки было нарушено. В связи с этим очень полезно после нахождения закона распределения, характеризующего результат функционального преобразования, проверять полученную формулу на соответствие свойству нормировки, что позволяет выявлять многие потенциально возможные ошибки в расчетах.

г) Наконец, для расчета математического ожидания можно воспользоваться двумя подходами. Во-первых, поскольку плотность вероятности СВ η уже найдена можно использовать стандартное выражение (5.3)

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot W_з(y)\,dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{y \cdot e^y}{b-a}\,dy = \frac{1}{b-a} \cdot \left[y \cdot e^y - e^y \right]_{\ln a}^{\ln b}$$

(в последнем выражении было использовано интегрирование по частям), в результате чего окончательно получим

$$M_\eta = \frac{b \cdot \ln b - a \cdot \ln a}{b-a} - 1.$$

Альтернативный подход к расчету математического ожидания заключается в использовании формулы (6.4)

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,W_o(x)\,dx = \int_a^b \frac{\ln x}{b-a}\,dx = \frac{x \cdot (\ln x - 1)}{b-a} \Bigg|_a^b = \frac{b \cdot \ln b - a \cdot \ln a}{b-a} - 1.$$

Естественно, результаты, полученные как первым, так и вторым способом, совпадают между собой.

Задача 5. Случайная величина ξ, обладающая плотностью вероятности $W_\xi(x) = e^x$ при $x \le 0$, подвергается функциональному преобразованию $\eta = \begin{cases} 16, & \text{при } o \le -6, \\ (o+2)^2, & \text{при иных } o. \end{cases}$

Определить закон распределения и математическое ожидание СВ η.

Решение

а) Если в предыдущей задаче функция $\varphi()$, обратная анализируемому функциональному преобразованию, была очевидной, то в данном случае зависимость $x = \varphi(y)$ будет сравнительно сложной, поэтому начать решение задачи полезно с построения и анализа графика функциональной взаимосвязи

$$y = f(x) = \begin{cases} 16, & \text{при } x \le -6, \\ (x+2)^2, & \text{при иных } x. \end{cases} \qquad (6.8)$$

Соответствующий (6.8) график представлен на рис. 6.4. Из графика следует, что при $x \le 0$ значения, получаемые в результате преобразования, лежат в диапазоне от 0 до 16, однако различным частям этого диапазона соответствует разное число ветвей в обратной функции.

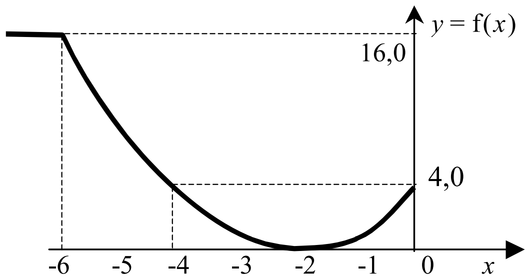


Рис. 6.4. Функциональная зависимость, анализируемая в задаче 5

б) Значениям $y \in [\,0;\,4\,]$ соответствует по два возможных аргумента x, определяемых ветвями обратной функции

$x_1 = \varphi_1(y) = +\sqrt{y} - 2$ и $x_2 = \varphi_2(y) = -\sqrt{y} - 2$. На данном участке слагаемые, входящие в “сумму по m” формулы (6.3) не потребуются, а первая сумма (по ветвям обратной функции) будет содержать два слагаемых

$$W_\eta(\,y\,) = \sum_{i=1}^{2} W_о\big(\varphi_i(y)\big) \cdot \left|\frac{d\varphi_i(y)}{dy}\right| =$$

$$= W_о\big(+\sqrt{y} - 2)\big) \cdot \left|+\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + W_о\big(-\sqrt{y} - 2)\big) \cdot \left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{e^{-2+\sqrt{y}} + e^{-2-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

в) Значениям y, удовлетворяющим неравенству $4 < y < 16$, соответствует единственный аргумент $x = \varphi(y) = -\sqrt{y} - 2$, поэтому вместо полученных в п.’б’ двух слагаемых теперь там останется лишь одно

$$W_\eta(\,y\,) = W_о\big(\varphi(y)\big) \cdot \left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right| = \frac{e^{-2-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

г) И, наконец, горизонтальному участку $y = 16$ соответствует бесконечный по протяженности интервал $x \le -6$, вероятность попадания в который для СВ ξ определяется интегралом

$$P\{\,\eta = 16\,\} = P\{\,\xi \le -6\,\} = \int_{-\infty}^{-6} e^x dx = e^{-6} \approx 0{,}0025.$$

д) Объединяя результаты, полученные в пп. ‘б’-‘г’, воедино плотность вероятности СВ η можно записать окончательно в виде

$$W_\eta(\,y\,) = \begin{cases} e^{-2}\Big(e^{+\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}}\Big)\Big/2\sqrt{y} & \text{при } 0 \le y \le 4 \\ e^{-2-\sqrt{y}}\Big/2\sqrt{y} + 0{,}0025 \cdot \delta(y-16) & \text{при } 4 < y \le 16 \\ 0 & \text{при прочих } y \end{cases}$$

Соответствующий этому выражению график плотности распределения вероятностей представлен на рис. 6.5.

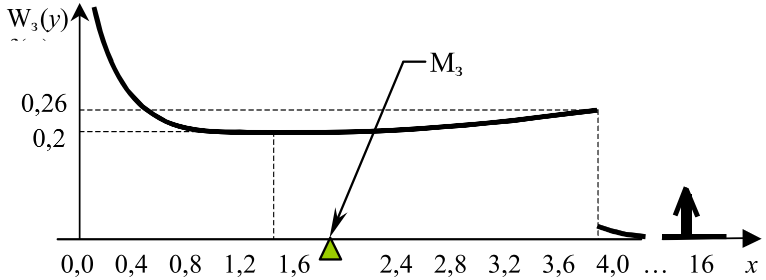


Рис. 6.5. Плотность вероятности, соответствующая СВ η

е) Следует отметить, что на этот раз вычислять числовые характеристики, руководствуясь соотношением (5.1.3), нецелесообразно, т.к. получаемые интегралы оказываются весьма громоздкими (неудобными). Напротив, при использовании формулы (6.4), дважды применив интегрирование по частям, получаем

$$M_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,W_o(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-6}16\cdot e^x dx+\int_{-6}^{0}(x+2)^2\cdot e^x dx=16\cdot e^{-6}+(x+2)^2\cdot e^x\Big|_{-6}^{0}-$$

$$-\int_{-6}^{0}2\,(x+2)\cdot e^x dx=16\cdot e^{-6}+4-16e^{-6}-2(x+2)\cdot e^x\Big|_{-6}^{0}+\int_{-6}^{0}2\cdot e^x dx=$$

$$=4-(4+8e^{-6})+2\cdot e^x\Big|_{-6}^{0}=-8\cdot e^{-6}+2-2\cdot e^{-6}=2-10\cdot e^{-6}.$$

Полученный результат хорошо согласуется с полученной выше плотностью вероятности СВ η, так как согласно рис. 6.5 координата $y = M_\eta \approx 2$ близка к центру масс отображаемой фигуры.

Задача 6. Случайное напряжение, распределенное нормально с параметрами $M_u = 0$ В, $\sigma_u = 1{,}25$ В, воздействует на нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой (ВАХ), представленной на рис. 6.6. Определить закон распределения тока, который будет протекать через этот нелинейный элемент.

Решение

а) Определим аналитическое выражение для ВАХ нелинейного элемента. Характеристика имеет несколько точек излома, в которых свойства ВАХ скачкообразно изменяются, поэтому каждый кусочно-линейный участок придется проанализировать отдельно.

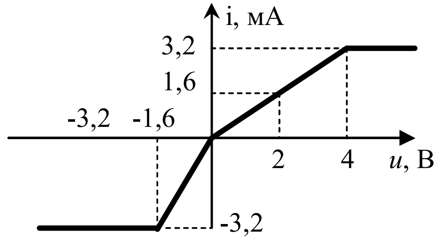


Рис. 6.6. ВАХ нелинейного элемента из задачи 6

В соответствии с классическим уравнением прямой для каждого из наклонных участков связь между током и напряжением будет выражаться формулой $i = k \cdot u + b$. Так как оба наклонных участка проходят через начало координат, то для них коэффициент b оказывается нулевым. Угловой же коэффициент k для участка $0 \le u \le 4$ В будет равен $k_+ = 3{,}2$ мА / 4 В = 0,8 мА/В, а для участка $-1{,}6 \le u \le 0$ В получаем $k_- = -3{,}2$ мА / –1,6 В = 2 мА/В. Объединяя полученную информацию, ВАХ нелинейного элемента можно представить в виде

$$i=f(u)=\begin{cases}-3{,}2 & \text{при } u\le -1{,}6,\\ 2\cdot u & \text{при } -1{,}6<u\le 0,\\ 0{,}8\cdot u & \text{при } 0<u\le 4,\\ +3{,}2 & \text{при } u>4.\end{cases} \qquad (6.9)$$

б) Рис. 6.6, как впрочем и выражение (6.9), показывает, что ток, который под воздействием случайного напряжения будет протекать через нелинейный элемент, будет принимать значения из интервала от минус 3,2 В до плюс 3,2 В. Верхний и нижний граничные уровни тока по абсолютному значению совпадают, однако вероятности их наблюдения будут отличаться друг от друга

$$\mathrm{P}\{\ i=-3{,}2\ \}=\mathrm{P}\{\ u\le -1{,}6\ \}=\int_{-\infty}^{-1{,}6}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_u^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1{,}6/\sigma_u}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=\mathrm{F}_{\text{ст}}\left(-\frac{1{,}6}{1{,}25}\right)\approx 1-\mathrm{F}_{\text{ст}}(\ 1{,}3\ )\approx 0{,}1.$$

$$\mathrm{P}\{\ i=+3{,}2\ \}=\mathrm{P}\{\ u\ge +4\ \}=\int_{+4}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_u^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+4/\sigma_u}^{+\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=1-\mathrm{F}_{\text{ст}}\left(\frac{4}{1{,}25}\right)\approx 1-\mathrm{F}_{\text{ст}}(3{,}2)\approx 0{,}0007.$$

в) Для значений, лежащих между граничными уровнями, обратная к (6.9) функция может быть записана в следующем виде:

$$u=\mathrm{f}(\ i\ )=\begin{cases} i/2 & \text{при } -3{,}2<i\le 0,\\ 1{,}25\cdot i & \text{при } 0\le i<+3{,}2.\end{cases}\qquad(6.10)$$

<u>Важно понимать</u>, что кусочно-линейная форма представления выражения (6.10) указывает лишь на то, что для разных аргументов i значение напряжения u следует рассчитывать по разным правилам. При этом для любого из своих допустимых аргументов эта функция оказывается *однозначной* (существует *единственная*, хотя и представленная двумя отдельными выражениями, ветвь).

В связи со сказанным, для аргументов $y\in(\ -3{,}2;\ +3{,}2\ )$ универсальная формула (6.3) будет представлена лишь единственным слагаемым первого типа

для $-3{,}2<i\le 0$: $\mathrm{W}_i(\ y\ )=\mathrm{W}_u\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\exp\left(-\frac{(y/2)^2}{2\sigma_u^2}\right)$,

для $0\le i<+3{,}2$: $\mathrm{W}_i(y)=\mathrm{W}_u(1{,}25\cdot y)\cdot|1{,}25|=\frac{1{,}25}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_u}\exp\left(-\frac{(1{,}25\cdot y)^2}{2\sigma_u^2}\right)$.

г) Объединяя полученные выше данные, закон распределения тока, наблюдаемого в нелинейном элементе, можно записать в виде

$$\mathrm{W}_i(y)=\begin{cases}\frac{1}{2{,}5\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{y^2}{12{,}5}\right)+0{,}1\cdot\delta(\mathrm{y}+3{,}2) & \text{при } -3{,}2\le i\le 0,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)+0{,}0007\cdot\delta(\mathrm{y}-3{,}2) & \text{при } 0\le i\le +3{,}2.\end{cases}$$

6.3. Задачи для самоконтроля

6.1. По аналогии с разобранной выше задачей 2 показать, что случайная величина $\eta=[\ \ln\xi\ /\ \ln(\ 1-p\ )\ ]$, где р – некоторая константа, а $[\cdot]$ – знак взятия целой части числа имеет геометрическое распределение $\mathrm{P}\{\ \eta=k\ \}=p\cdot(1-p)^k$, $k=0$, 1, 2,…

6.2. Источник напряжения генерирует нестабильную ЭДС E, распределённую по закону Рэлея:

$$W_E(x)=\frac{x}{\sigma_\mathrm{E}^2}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\mathrm{E}^2}\right),\ \ \mathrm{x}\ge 0.$$

Определить плотность вероятности для мощности сигнала, формируемого источником при сопротивлении нагрузки в 1 Ом, ее математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

Ответ: $\mathrm{W_P}(\ y\ )=\frac{1}{2\sigma_\mathrm{E}^2}\cdot\exp\left(-\frac{y}{2\sigma_\mathrm{E}^2}\right)$, $\mathrm{y}\ge 0$. $\mathrm{M_P}=\sigma_\mathrm{P}=2\cdot\sigma_E^2$.

6.3. Случайная величина ξ, имеющая нормальное распределение, подвергается квадратичному преобразованию. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $\eta=\xi^2$, её математическое ожидание и дисперсию, если $\mathrm{M}_\xi=0$.

Ответ: $W_\eta(y) = 1/(\sqrt{2\pi \cdot y} \cdot \sigma_\xi) \cdot exp[-y/(2 \cdot \sigma_\xi)],\ y > 0$;

$M_\eta = \sigma_\xi^2;\ D_\eta = 2 \cdot \sigma_\xi^4.$

6.4. Случайная величина ξ характеризуется некоторой плотностью распределения вероятностей $W_\xi(x)$. Определить законы распределения случайных величин: а) $\eta_1 = a \cdot \xi + b$ (a и b – действительные поправочные коэффициенты); б) $\eta_2 = 1 / \xi$; в) $\eta = \cos(\xi)$.

Ответ: а) $W_1(y) = \frac{1}{|a|} \cdot W_o\left(\frac{y-b}{a}\right)$ при $a \neq 0$; б) $W_2(y) = \frac{1}{y^2} \cdot W_o\left(\frac{1}{y}\right)$ при $y \neq 0$; в) $W_3(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{[W_o(\arccos y + 2\pi k) + W_o(-\arccos y + 2\pi k)]}{\sqrt{1-y^2}}$ при $|y| < 1$.

6.5. Начальная фаза φ принимаемого радиосигнала равномерно распределена в интервале от $-\pi$ до π радиан. Рассчитать математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины η, связанной с φ соотношением $\eta = A_0 \cdot \cos 2(\omega \cdot t + \varphi)$, где A_0, ω и t - неслучайные числа.

Ответ: $M_\eta = A_0 / 2$; $\sigma_\eta = A_0 / \sqrt{2}$.

6.6. Случайные величины ξ и η связаны соотношением $\eta = 4 - |\xi|$. Определить закон распределения и математическое ожидание величины η, если ξ распределена равномерно на интервале от минус 2 до плюс 3.

Ответ: $M_\eta = 2{,}7$; $W_\eta(y) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{при } 1 \le y \le 2, \\ 0{,}4 & \text{при } 2 \le y \le 4. \end{cases}$

6.7. Определить плотность распределения вероятностей тока i диода, ВАХ которого описывается выражением

$$i = \begin{cases} S \cdot (u - U_H), & u > U_H, \\ 0, & u \le U_H \end{cases}$$

при воздействии на диод случайного напряжения u, распределённого по закону $W_u(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$, $x \geq 0$, если $S = 100$ мА/В, $U_н = 0{,}1$ В, $\lambda = 10$ 1/В.

Ответ: $W_i(y) = 0{,}632 \cdot \delta(y) + 0{,}1 \cdot \exp[-\lambda \cdot (y/S + U_н)]$, где $i \geq 0$ – ток, протекающий через диод и измеряемый в миллиамперах.

6.8. На вход схемы, представленной на рис. 6.7, поступает случайное напряжение ξ, распределенное нормально с параметрами $a_\xi = -1$ В, $\sigma_\xi = +2$ В. Диод, используемый в данной схеме, в прямом направлении характеризуется сопротивлением 200 Ом, а в обратном направлении его сопротивление бесконечно велико. Номинал сопротивления R = 100 Ом. Определить закон распределения и математическое ожидание напряжения, наблюдаемого на выходе схемы.

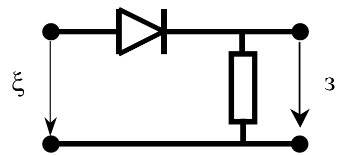


Рис. 6.7. Схема из задачи 6.8

Ответ: $W_\eta(y) = 0{,}69 \cdot \delta(y) + \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(3y+1)^2}{8}\right)$, $y \geq 0$; $M_\eta = 0{,}155$ В.

6.9. Случайное напряжение ξ, поступающее на вход усилителя, характеризуется плотностью распределения вероятностей, представленной на рис. 6.8. Усилитель характеризуется коэффициентом усиления $K_0 = 3$. Определить среднеквадратическое отклонение напряжения, наблюдаемого на выходе схемы.

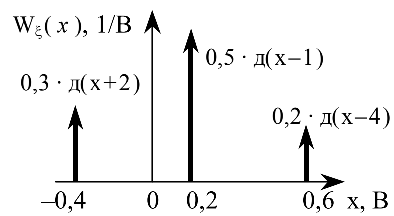


Рис. 6.8. Плотность вероятности напряжения из задачи 6.9

Ответ: $\sigma_\eta \approx 1{,}08$ В.

6.4. Контрольные задания

6.10. Случайная величина ξ, ряд распределения которой имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1

Определить закон распределения и математическое ожидание величины η, получаемой из ξ функциональным преобразованием…

Номер	$\eta = f(\xi)$	Номер	$\eta = f(\xi)$
1	$\eta = \sin(\pi \cdot \xi / 2)$	6	$\eta = \cos(\pi \cdot \xi / 2)$
2	$\eta = (\xi - 4)^2$	7	$\eta = (\xi - 2)^2$
3	$\eta = 1 / \lvert \xi - 2 \rvert$	8	$\eta = 1 / \lvert \xi - 4 \rvert$
4	$\eta = \lvert \xi - 3 \rvert$	9	$\eta = (\xi - 3)^3$
5	$\eta = 25 - \xi^2$	10	$\eta = \sin^2(\pi \cdot \xi / 2)$

6.11. Случайная величина ξ характеризуется представленной в таблице ниже функцией распределения. Определить закон распределения случайной величины, указанной в правой колонке таблицы

Номер	Функция распределения СВ ξ	Искомая величина
1	$\begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}25, & x = 1 \\ 0{,}125 + x/8, & 1 < x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$	$\eta = (4 - \xi)^2$
2	$\begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0{,}5, & 2 \le x < 3 \\ 0{,}3, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$	$\eta = 1 + \cos(\pi \cdot \xi / 3)$

3	$1 / (1 + x^2)$, $x \le 0$	$\eta = \exp(\xi)$
4	$(x - 2)^2$, при $2 \le x \le 3$	$\eta = 4 \cdot \xi$
5	x^2, при $0 \le x \le 1$	$\eta = \arcsin(\xi)$
6	$1 - 1/x$, при $1 \le x < +\infty$	$\eta = \mathrm{arctg}(\xi)$
7	$1 + x$, при $-1 \le x \le 0$	$\eta = \arccos(\xi)$
8	$\exp(2 \cdot x)$, $x \le 0$	$\eta = \exp(-\xi)$
9	$\sin(\pi \cdot x / 4)$, при $0 \le x \le 2$	$\eta = \lvert \xi - 1 \rvert$
10	$\cos(\pi \cdot x / 4)$, при $-2 \le x \le 0$	$\eta = (\xi - 1)^2$

Примечание: если в формулах, приведенных выше, не учтены какие-либо интервалы, то это означает, что функция распределения принимает для подобных аргументов вырожденное значение (0 или 1).

6.12. На диод с кусочно-линейной характеристикой

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ S \cdot u & \text{при } u \ge 0 \end{cases}$$

воздействует случайное напряжение u. Плотность вероятности этого напряжения (с точностью до неизвестной константы А) представлена в центральной колонке, приведенной ниже таблицы. Определить константу А, плотность распределения тока диода $W_i(y)$ и вероятность возникновения значений тока, принадлежащих интервалу, указанному в последней колонке таблицы, если …

Номер	Плотность вероятности распределения напряжения u	Контролируемый интервал значений
1	$A \cdot \cos(\pi \cdot x / 2)$ при $-1 \le x \le 1$	$i > S / 2$
2	$A \cdot \sin(x + \pi/3)$ при $-\pi/3 \le x \le 2\pi/3$	$i < \pi \cdot S/2$
3	$2 \cdot \cos^2(x) / A$ при $-\pi/2 \le x \le +\pi/2$	$i > \pi \cdot S/4$

4	$A \cdot \exp(-2 \cdot \vert x \vert)$ при $-\infty < x < +\infty$	$i < 1{,}0$
5	$A/(\exp(x)+\exp(-x))$ при $-\infty < x < +\infty$	$i > 1{,}0$
6	$A \cdot \vert x \vert$ при $-2 \le x \le 2$	$i < +1{,}5$
7	$A \cdot (1 - \vert x \vert / 2)$ при $-2 \le x \le 2$	$\vert i \vert < 1{,}0$
8	$A \cdot (x + 0{,}5)$ при $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$	$i > 1{,}0$
9	$A / (x+2)^4$ при $-1 \le x < +\infty$	$i > 2{,}0$
10	$A / (1 + x^2)$ при $1 \le x < +\infty$	$i < \sqrt{3}$

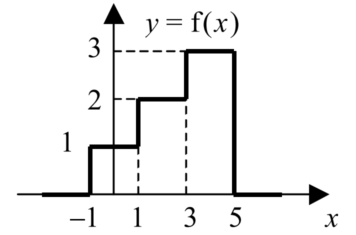
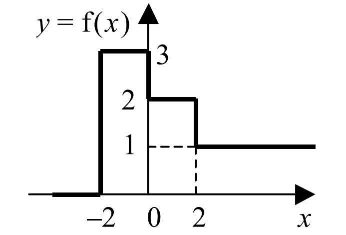
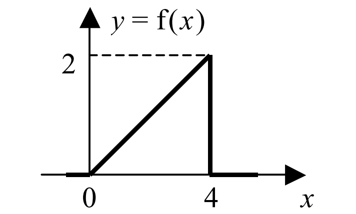
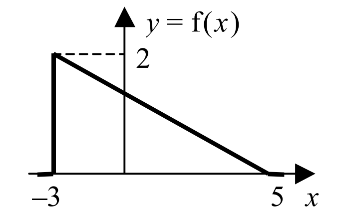
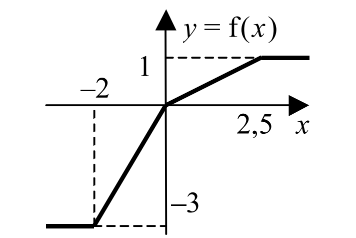
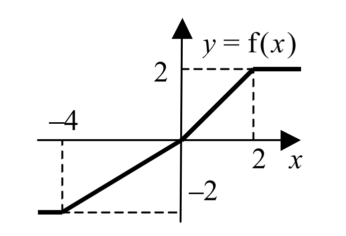
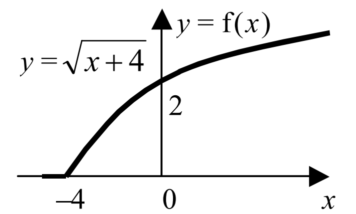
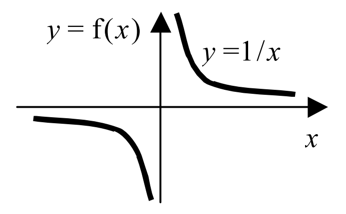
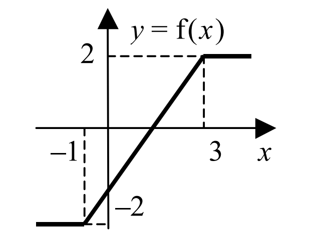
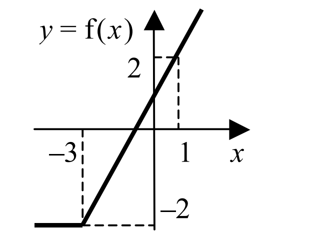
6.13. Напряжение η, наблюдаемое на выходе квадратичного детектора, связано со случайным сигналом ξ, поступающим на вход, соотношением $\eta = 2 \cdot \xi^2$. Определить закон распределения и математическое ожидание величины η, если распределение СВ ξ…

Номер	$W_\xi(x)$	Номер	$W_\xi(x)$
1	соответствует равномерному распределению с пределами $a = -2$, $b = +2$	6	соответствует нормальному распределению с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1{,}5$
2	$\begin{cases} 0{,}2 \cdot x & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}1 & \text{при } -6 \le x \le 0 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0{,}2 & \text{при } -2 \le x \le 0 \\ 0{,}6 & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$
3	$0{,}3+0{,}4 \cdot \delta(x-1)$ при $-1 \le x \le 1$	8	$1/\pi \cdot (1+x^2)$ при любых x
4	$\dfrac{1+\sin(x)}{\pi}$ при $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le +\dfrac{\pi}{2}$	9	$\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi \cdot x}{2}\right)$ при $-1 \le x \le 1$
5	$0{,}5 \cdot \exp(-\vert x \vert)$ при любых x	10	$0{,}4 \cdot (1 - \vert x \vert)$ при $\vert x \vert \le 2{,}5$

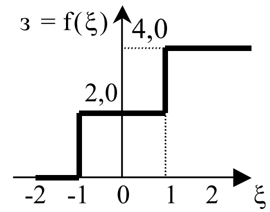
6.14. Случайная величина ξ подчиняется нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и параметром σ, представленным в центральной колонке таблицы ниже. Определить закон распределения случайной величины η, связанной с СВ ξ функцией…

Номер	Параметр распределения σ_ξ	Функциональная зависимость $\eta = f(\xi)$
1	2	$\eta = \begin{cases} -2 & \text{при } o \le -4 \\ 0{,}5 \cdot o & \text{при } -4 \le o \le 0 \\ 2 \cdot o & \text{при } o \ge 0 \end{cases}$
2	3	$\eta = \exp(\xi^2)$
3	2	$\eta = \begin{cases} -2 \cdot o & \text{при } o \le -2 \\ 4 & \text{при } -2 \le o \le 0 \\ 4 + 0{,}5 \cdot o & \text{при } o \ge 0 \end{cases}$
4	1	$\eta = \sqrt{\vert o \vert}$
5	2	$\eta = \begin{cases} o^2 & \text{при } \vert o \vert > 2 \\ 4 & \text{при } \vert o \vert \le 2 \end{cases}$
6	3	$\eta = \vert \xi / 3 \vert$
7	2	$\eta = \begin{cases} \exp(o^2) & \text{при } x < 0 \\ -\exp(o^2) & \text{при } x \ge 0 \end{cases}$
8	1	$\eta = 1 - \xi^2$
9	2	$\eta = \begin{cases} -2 & \text{при } o \le -2 \\ 0 & \text{при } -2 \le o \le 2 \\ 2 & \text{при } o \ge 2 \end{cases}$
10	3	$\eta = 1 + \xi^2$

6.15. Непрерывная случайная величина ξ, имеющая равномерное распределение при $\xi \in [\,-5; +5\,]$. Определить закон распределения и математическое ожидание СВ η, если ее значения y связаны со значениями x, принимаемыми случайной величиной ξ, функциональной взаимосвязью, график которой представлен в таблице…

Номер	$y = f(x)$	Номер	$y = f(x)$
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

6.16. Случайные величины ξ и η связаны между собой функциональной зависимостью, показанной на рисунке.



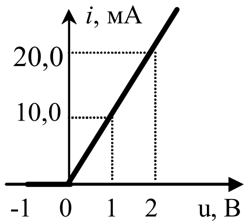
Определить закон распределения и дисперсию случайной величины η, если распределение СВ ξ…

Номер	$F_\xi(x)$	Номер	$F_\xi(x)$
1	$\cos(\pi \cdot x/6),\ -3 \le x \le 0$	6	$\sin(\pi \cdot x/3),\ 0 \le x \le 1{,}5$
2	$\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -4 \\ 0{,}4 + 0{,}1 \cdot x \text{ при } -4 \le x \le 2 \\ 1 \text{ при } 2 \le x \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2 \\ 0{,}5 + 0{,}2 \cdot x \text{ при } -2 \le x \le 2 \\ 1 \text{ при } 2 \le x \end{cases}$
3	$0{,}4 \cdot x$ при $0 \le x \le 2{,}5$	8	$(12+4\cdot x - x^2)/16,\ -2 \le x \le 2$
4	$\begin{cases} \sqrt{(x+5)/16} \text{ при } -5 \le x < 0 \\ 0{,}6 + x/4 \text{ при } 0 \le x \le 1{,}6 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 0{,}4 \cdot e^{+x/4} \text{ при } x < 0 \\ 1 - 0{,}4 \cdot e^{-x/4} \text{ при } 0 \le x \end{cases}$
5	$(1 + x/2)/2,\ -2 \le x \le 2$	10	$0{,}5 + \operatorname{arctg}(x),\ -\infty < x < +\infty$

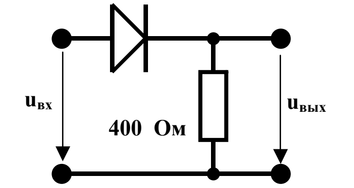
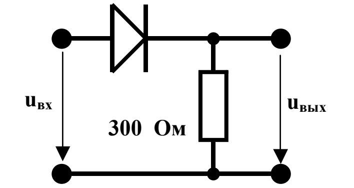
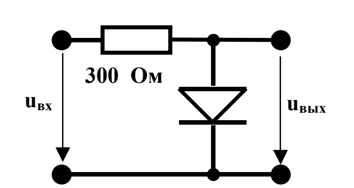
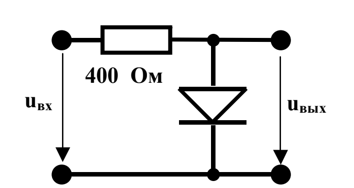
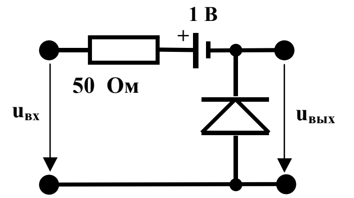
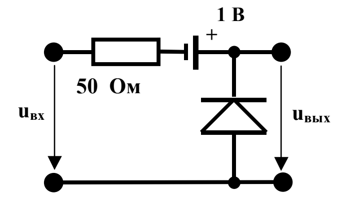
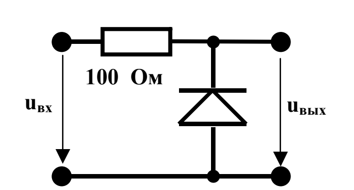
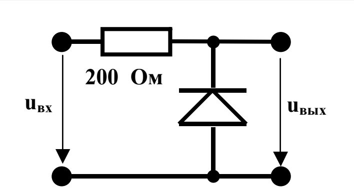
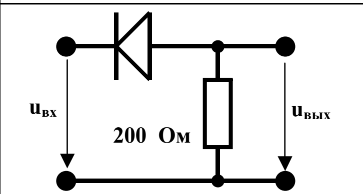
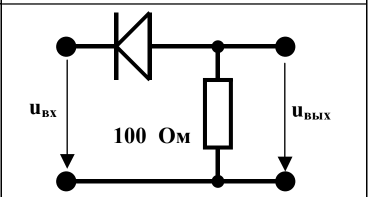
6.17. Напряжение η, наблюдаемое на выходе квадратичного детектора, связано со случайным сигналом ξ, поступающим на вход, соотношением $\eta = 2 \cdot \xi^2$. Определить закон распределения и математическое ожидание величины η, если распределение СВ ξ…

Номер	$W_\xi(x)$	Номер	$W_\xi(x)$
1	соответствует равномерному распределению с пределами $a = -2$, $b = +2$	6	соответствует нормальному распределению с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1{,}5$
2	$\begin{cases} 0{,}2 \cdot x & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 0{,}1 & \text{при } -6 \le x \le 0 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0{,}2 & \text{при } -2 \le x \le 0 \\ 0{,}6 & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$
3	$0{,}3+0{,}4\cdot\delta(x-1)$ при $-1 \le x \le 1$	8	$1/\pi\cdot(1+x^2)$ при любых x
4	$\dfrac{1+\sin(x)}{\pi}$ при $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le +\dfrac{\pi}{2}$	9	$\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi \cdot x}{2}\right)$ при $-1 \le x \le 1$
5	$0{,}5\cdot\exp(-\lvert x\rvert)$ при любых x	10	$0{,}4\cdot(1-\lvert x \rvert)$ при $\lvert x\rvert \le 2{,}5$

6.18. Вольт-амперная характеристика диода аппроксимирована кусочно-линейной зависимостью, представленной на рисунке



Определить закон распределения и математическое ожидание напряжения на выходе цепи, представленной в таблице ниже, если на ее вход воздействует случайное воздействие с плотностью вероятности $W_{u_{вх}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\dfrac{(x-1)^2}{2}\right)$, 1/В

Номер	Цепь	Номер	Цепь
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

6.19. Две случайные величины связаны друг с другом соотношением $\eta = \lambda\cdot|\xi|$. Определить плотность распределения вероятностей случайной величины η и её математическое ожидание, если СВ ξ …

Номер	Индивидуальный вариант условия
1	распределена равномерно в пределах от -2 до +2
2	распределена равномерно в пределах от -2 до +3
3	имеет ПРВ $W_\xi(x) = 0{,}5 \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot \lvert x \rvert)$ при любых x
4	имеет ПРВ $W_\xi(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot (x+2))$ при $x > -2$
5	распределена нормально с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1/\lambda$
6	распределена нормально с параметрами $a = -1/\lambda$, $\sigma = 1/\lambda$
7	имеет ПРВ $W_\xi(x) = 1/(2 \cdot x^2)$ при $\lvert x \rvert > 1$
8	имеет ПРВ $W_\xi(x) = 1/\lambda - \lvert x \rvert / \lambda^2$ при $\lvert x \rvert \le \lambda$
9	имеет ФРВ $F_\xi(x) = (1+x^3)/2$ при $-1 \le x \le +1$
10	имеет ФРВ $F_\xi(x) = (1+x^3)/9$ при $-1 \le x \le +2$

6.20. Случайные величины ξ и η связаны между собой зависимостью
$$\eta = \begin{cases} (о+2)^2 - 4 & \text{при } о \le 0, \\ 4-(о-2)^2 & \text{при } о \ge 0. \end{cases}$$

Определить закон распределения величины η, если СВ ξ подчиняется закону распределения…

Номер	$W_\xi(x)$	Номер	$W_\xi(x)$
1	$1/2,\ -2 \le x \le 0$	6	$1/4 + x/8,\ -2 \le x \le 6$
2	$1/2,\ 0 \le x \le 2$	7	$1/2 + x/8,\ \lvert x \rvert \le 4$
3	$1/4,\ \lvert x \rvert \le 2$	8	$3/4 + x/8,\ -6 \le x \le 2$
4	$1/6,\ -4 \le x \le 2$	9	$x/8,\ 0 \le x \le 8$
5	$1/8,\ -4 \le x \le 4$	10	$1/2 + x/4,\ \lvert x \rvert \le 2$

7. СВОЙСТВА СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

7.1. Краткое теоретическое введение

7.1.1. Вероятностные характеристики

Функцией распределения вероятностей (ФРВ) системы случайных величин ξ и η называют функцию $F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$, определяющую вероятность одновременного выполнения двух неравенств

$$F_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P\{\xi \le x_0, \eta \le y_0\} \qquad (7.1)$$

(на месте запятой в правой части выражения следует подразумевать союз “и”). С геометрических позиций $F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$ определяет вероятность того, что точка со случайными координатами ξ и η попадет на плоскости в нижнюю левую четверть относительно границ $x = x_0$, $y = y_0$.

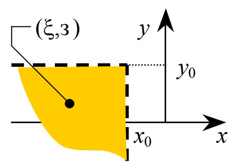


Рис. 7.1. Геометрический смысл функции распределения вероятностей системы СВ

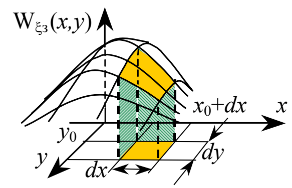


Рис. 7.2. Плотность распределения вероятностей системы СВ

Как и для отдельных случайных величин, функция распределения вероятностей системы СВ является безразмерной неубывающей функцией всех своих аргументов и принимает значения от нуля до единицы.

Вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в произвольную прямоугольную область может быть рассчитана по формуле

$$P\{x_1 < \xi \le x_2;\ y_1 < \eta \le y_2\} = F_{\xi\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi\eta}(x_2, y_1) - F_{\xi\eta}(x_1, y_2) + F_{\xi\eta}(x_1, y_1). \qquad (7.2)$$

Плотностью распределения вероятностей (ПРВ) системы случайных величин ξ и η называют функцию $W_{\xi\eta}(x,y)$, характеризующую вероятность принятия в одном и том же опыте величиной ξ значений, близких к аргументу x, а величиной η значений, близких к аргументу y. Численно она определяется отношением вероятности попадания точек с координатами (ξ, η) в бесконечно малый прямоугольник, лежащий около точки (x, y) (см. выше рис. 7.2), к площади этого прямоугольника и связана с ФРВ соотношением

$$W_{\xi\eta}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{ x < о \le x + \Delta x, y < з \le y + \Delta y \}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial^2 F_{оз}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (7.3)$$

Эта функция неотрицательна и имеет размерность, обратную произведению размерностей величин ξ и η. С ее помощью вероятность попадания точек (ξ, η) в произвольную прямоугольную область может быть рассчитана по правилу

$$P\{ a < \xi \le b,\ c < \eta \le d \} = \int_a^b \int_c^d W_{оз}(x, y)\, dx\, dy. \quad (7.4)$$

Отсюда, в частности, следует, что обратная связь между плотностью и функцией распределения вероятностей имеет вид

$$F_{\xi\eta}(x_0,\ y_0) = P\{ \xi \le x_0, \eta \le y_0 \} = \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_0} W_{оз}(x, y)\, dx\, dy. \quad (7.5)$$

Свойство нормировки для плотности распределения вероятностей системы случайных величин приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{оз}(x, y)\, dx\, dy = 1 \quad (7.6)$$

и означает, что для любой СВ объем тела под поверхностью ее плотности вероятности всегда равна единице (см. выше рис. 7.2).

7.1.2. Числовые характеристики

Двумя основными классами числовых характеристик систем СВ являются, во-первых, “*смешанный начальный момент порядка k, r*”

$$m_{kr}\{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^r \cdot W_{оз}(x, y)\, dxdy, \quad (7.7)$$

а, во-вторых, “*смешанный центральный момент порядка k, r*”

$$\mu_{kr}\{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_о)^k (y - M_з)^r \cdot W_{оз}(x, y)\, dxdy. \quad (7.8)$$

При $k = 0$ или $r = 0$ формулы (7.7), (7.8) преобразуются фактически в (5.3), (5.5) и отражают числовые характеристики СВ ξ и η в отдельности. Первой из специфичных именно для систем СВ числовых характеристик является “смешанный момент порядка 1, 1”. Этот момент называют еще корреляцией величин ξ и η

$$B_{\xi\eta} = m_{11}\{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot W_{оз}(x, y)\, dxdy. \quad (7.9)$$

Нормированным аналогом этой характеристики является коэффициент корреляции между величинами ξ и η, определяемый соотношением

$$r_{\xi\eta} = \frac{m_{11}\{ о, з \} - M_о \cdot M_з}{\sqrt{D_о \cdot D_з}}. \quad (7.10)$$

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной взаимосвязи между величинами ξ и η, входящими в систему. Для любых СВ

$$| r_{\xi\eta} | \le 1, \quad (7.11)$$

причем $r_{\xi\eta} = \pm 1$ соответствует жесткой функциональной связи $\eta = k \cdot \xi + b$ (при $k > 0$ $r_{\xi\eta}$ положителен, а при $k < 0$ – отрицателен), значение $0 \le | r_{\xi\eta} | \le 1$ свидетельствует о наличии мягкой вероятностной взаимосвязи между величинами, а $r_{\xi\eta} = 0$ говорит о том, что линейная взаимосвязь между величинами ξ и η отсутствует. Подобные величины называют некоррелированными.

Случайные величины, для которых вероятностные характеристики допускают представление

$$F_{\xi\eta}(x_0, y_0) = F_{\xi}(x_0) \cdot F_{\eta}(y_0) = P\{\, \xi \le x_0 \,\} \cdot P\{\, \eta \le y_0 \,\}$$

$$\text{или} \qquad W_{\xi\eta}(x_0, y_0) = W_{\xi}(x_0) \cdot W_{\eta}(y_0)$$

называют *независимыми*, поскольку значение, принятое в данном опыте одной из случайных величин, никак не влияет на возможность (способность) принятия конкретных значений другой СВ. Для независимых СВ смешанные начальные моменты любых порядков

$$m_{kr}\{\xi,\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot W_{о}(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^r \cdot W_{з}(y)\,dy = m_k\{\xi\} \cdot m_r\{\eta\}. \quad (7.12)$$

Из (7.10) и (7.12) следует, в частности, что <u>независимые случайные величины всегда являются некоррелированными</u>, однако обратное утверждение справедливо далеко не во всех случаях.

7.1.3. Функциональное преобразование систем СВ.

При функциональном преобразовании одной системы СВ $\{\xi_1, \xi_2\}$ в другую $\{\eta_1, \eta_2\}$ правило, определяющее взаимосвязь между их законами распределения, оказывается аналогичным (6.1), (6.3) и имеет вид

$$W_{з_1з_2}(y_1, y_2) = \sum_i W_{о_1о_2}\big(\varphi_{i1}(y_1, y_2), \varphi_{i2}(y_1, y_2)\big) \cdot |J_i|, \qquad (7.13)$$

где $x_1 = \varphi_{i1}(y_1, y_2)$, $x_2 = \varphi_{i2}(y_1, y_2)$ – это обратные к зависимостям $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ функции, позволяющие рассчитать их аргументы по заданным результатам y_1 и y_2, а последний сомножитель – это модуль якобиана обратного преобразования, задаваемый определителем

$$J_i = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_{i2}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_{i2}}{\partial y_2} \end{vmatrix}. \qquad (7.14)$$

Наиболее часто применяемые случаи функционального преобразования системы случайных величин в новую случайную величину приведены в табл. 7.1

Таблица 7.1

Вероятностный смысл отдельных участков
плотности распределения вероятностей случайной величины

Вид функциональной связи	Взаимосвязь законов распределения
$\eta = \xi_2 + \xi_1$	$W_з(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{о_1о_2}(u, y-u)\,du$
$\eta = \xi_2 - \xi_1$	$W_з(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{о_1о_2}(u, y+u)\,du$
$\eta = \xi_2 \cdot \xi_1$	$W_з(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{о_1о_2}\left(u, \dfrac{y}{u}\right)\dfrac{du}{\lvert u\rvert}$
$\eta = \xi_2 / \xi_1$	$W_з(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{о_1о_2}(u, y \cdot u) \cdot \lvert u \rvert\,du$
$\eta = \min(\xi_2, \xi_1)$	$F_з(y) = F_{о_1}(y) + F_{о_2}(y) - F_{о_1о_2}(y, y) \quad (7.15)$ $W_з(y) = \int_{y}^{+\infty} W_{о_1о_2}(y, x_2)\,dx_2 + \int_{y}^{+\infty} W_{о_1о_2}(x_1, y)\,dx_1$
$\eta = \max(\xi_2, \xi_1)$	$F_з(y) = F_{о_1о_2}(y, y) \quad (7.16)$ $W_з(y) = \int_{-\infty}^{y} W_{о_1о_2}(y, x_2)\,dx_2 + \int_{-\infty}^{y} W_{о_1о_2}(x_1, y)\,dx_1$

7.2. Типовые задачи

Задача 1. Функция распределения вероятностей для системы случайных величин $\{\xi, \eta\}$ имеет вид

$$\mathrm{F}_{\text{оз}}(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le \pi/2, \\ 0 & \text{при прочих } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины в прямоугольник, ограниченный прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/4$, $y_1 = \pi/6$, $y_2 = \pi/3$.

Решение

а) Данная задача очень проста и требует лишь непосредственного применения формулы (7.2)

$$\mathrm{P}\{\, 0 < \xi \le \pi/4,\ \pi/6 < \eta \le \pi/3 \,\} = \sin(\pi/4)\cdot\sin(\pi/3) - \sin(\pi/4)\cdot\sin(\pi/6) -$$
$$- \sin(0)\cdot\sin(\pi/3) + \sin(0)\cdot\sin(\pi/6) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 \approx 0{,}26.$$

Задача 2. Система случайных величин $\{\xi, \eta\}$ характеризуется плотностью вероятности

$$\mathrm{W}_{\text{оз}}(x,y) = \frac{\mathrm{A}}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}. \qquad (7.17)$$

Определить величину A, функцию распределения $\mathrm{F}_{\xi\eta}(x,y)$ и вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в квадрат, ограниченный прямыми x=0, y=0, x=1, y=1.

Решение

а) С геометрических позиций плотность вероятности системы двух случайных величин представляет собой некоторую поверхность над плоскостью своих аргументов x и y. Стоящая в числителе дроби (7.17) константа A регулирует высоту этой поверхности. Вместе с тем свойство нормировки плотности вероятности (7.6) утверждает, что объем тела, заключенного под поверхностью плотности вероятности не может быть произвольным, но обязан равняться единице. Отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{W}_{\text{оз}}(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}\,dxdy = \frac{\mathrm{A}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(3+x^2)} =$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\pi^2\cdot\sqrt{3}}\cdot arctg(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mathrm{A}}{\pi^2\cdot\sqrt{3}}\cdot\pi\cdot\pi = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{3}} = 1,$$

в результате чего для константы A получаем $A = \sqrt{3}$.

б) Функцию распределения системы $\{\xi, \eta\}$ по ее плотности можно определить на основании (7.5)

$$\mathrm{F}_{\text{оз}}(x_0,y_0) = \int_{-\infty}^{y_0}\int_{-\infty}^{x_0} \mathrm{W}_{\text{оз}}(x,y)\,dxdy = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y_0}\frac{dy}{(1+y^2)}\cdot\int_{-\infty}^{x_0}\frac{dx}{(3+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot arctg(y)\Big|_{-\infty}^{y_0}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-\infty}^{x_0} = \left(\frac{arctg(y_0)}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{arctg(x_0/\sqrt{3})}{\pi} - \frac{1}{2}\right).$$

в) Наконец, вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в квадрат, ограниченный прямыми x=0, y=0, x=1, y=1, определяем на основании (7.4)

$$\mathrm{P}\{0 \le \text{о} \le 1,\ 0 \le \text{з} \le 1\} = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{W}_{\text{оз}}(x,y)\,dxdy = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2}\int_0^1\frac{dy}{(1+y^2)}\cdot\int_0^1\frac{dx}{(3+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot arctg(y)\Big|_0^1\cdot\frac{1}{\pi}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{arctg(1)}{\pi}\cdot\frac{arctg(1/\sqrt{3})}{\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = 0{,}0417.$$

Задача 3. Дискретные независимые случайные величины ξ и η заданы своими рядами распределения

ξ:

x_i	1	3
p(x_i)	0,3	0,7

Н:

y_j	2	4
p(y_j)	0,6	0,4

Найти распределение величины $\zeta = \xi + \eta$.

Решение

а) Запишем возможные значения СВ ζ:

$z_1 = x_1 + y_1 = 3$; $z_2 = x_1 + y_2 = 5$; $z_3 = x_2 + y_1 = 5$; $z_4 = x_2 + y_2 = 7$.

Вероятности появления каждого из перечисленных значений, с учетом взаимной независимости величин ξ и η, подчиняются соотношениям

$$\mathrm{P}\{\,\zeta = z_1\,\} = \mathrm{P}\{\,\xi = x_1\,\}\cdot \mathrm{P}\{\,\eta = y_1 \mid \xi = \mathrm{x}_1\,\} = \mathrm{P}\{\,\xi = x_1\,\}\cdot \mathrm{P}\{\,\eta = y_1\,\} =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18.$$

$\mathrm{P}\{\,\zeta = z_2\,\} = \mathrm{P}\{\,\xi = x_1\,\}\cdot \mathrm{P}\{\,\eta = y_2\,\} = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12.$

$\mathrm{P}\{\,\zeta = z_3\,\} = \mathrm{P}\{\,\xi = x_2\,\}\cdot \mathrm{P}\{\,\eta = y_1\,\} = 0{,}7\cdot 0{,}6 = 0{,}42.$

$\mathrm{P}\{\,\zeta = z_4\,\} = \mathrm{P}\{\,\xi = x_2\,\}\cdot \mathrm{P}\{\,\eta = y_2\,\} = 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}28.$

б) Принятие случайной величиной ζ значений z_2 и z_3 – это два несовместных события, однако поскольку $z_2 = z_3 = 5$, то величина ζ принимает значение “5” **или** когда наблюдаются “x_1 вместе с y_2”, **или** когда наблюдаются “x_2 вместе с y_1”. В соответствии с (2.3**)** получаем

$$\mathrm{P}\{\,\zeta = 5\,\} = \mathrm{P}\{\,\zeta = z_2\,\} + \mathrm{P}\{\,\zeta = z_3\,\} = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54.$$

в) Объединяя полученные вероятности в ряд распределения случайной величины ζ, получаем:

ζ:

z_i	3	5	7
$p(z_i)$	0,18	0,54	0,28

Задача 4. Случайные величины ξ и η распределены по закону Пуассона $P\{о = k\} = \dfrac{\lambda_о^k}{k!}\exp(-\lambda_о)$, $P\{з = m\} = \dfrac{\lambda_з^m}{m!}\exp(-\lambda_з)$.

Найти закон распределения их суммы $\zeta = \xi + \eta$.

Решение

а) Будем рассуждать по аналогии с предыдущей задачей. Каждому целочисленному значению n выходной СВ ζ можно поставить в соответствие n+1 вариант его получения, а именно: “ξ = 0 и η = n” или “ξ = 1 и η = n – 1” и т.д. вплоть до

“ξ = n и η = 0”. Все перечисленные варианты представляют собой несовместные события, поэтому для расчета вероятности появления значения ζ = n можно вновь воспользоваться (2.3**)**

$$P\{ж= n\} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_о^k}{k!}\exp(-\lambda_о)\cdot\frac{\lambda_з^{n-k}}{(n-k)!}\exp(-\lambda_з) =$$

$$= \frac{\exp(-\lambda_о)\cdot\exp(-\lambda_з)}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\cdot\frac{\lambda_о^k\cdot\lambda_з^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\exp(-(\lambda_о+\lambda_з))}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\lambda_о^k\cdot\lambda_з^{n-k}.$$

Учитывая, что образовавшаяся сумма есть не что иное, как бином Ньютона, окончательно получаем

$$P\{\zeta = n\} = \frac{(\lambda_о+\lambda_з)^n}{n!}\cdot e^{-(\lambda_о+\lambda_з)}.$$

Таким образом, СВ ζ имеет также пуассоновское распределение, но с интенсивностью потока событий $\lambda_\zeta = \lambda_\xi + \lambda_\eta$.

Задача 5. Функция распределения вероятностей для системы случайных величин {ξ, η} имеет вид

$$\mathrm{F}_{оз}(x,y) = \begin{cases} x\cdot\sin(\pi y/6) + y\cdot\sin(\pi x/6) & \text{при } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{при прочих } x \text{ и } y.\end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции между величинами ξ и η, плотности вероятности для максимальной и минимальной из них, а также законы распределения суммы и разности этих величин.

Решение

а) Определим плотности вероятности для системы случайных величин {ξ, η} в целом и для каждой из величин, входящих в систему, по отдельности

$$\mathrm{W}_{оз}(x,y) = \frac{\partial^2\mathrm{F}_{оз}}{\partial x\cdot\partial y} = \left[\cos(\pi x/6) + \cos(\pi y/6)\right]\cdot\pi/6 \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 1.$$

$$\mathrm{F}_о(x) = \lim_{y\to\infty}\mathrm{F}_{оз}(x,y) = \mathrm{F}_{оз}(x,1) = x/2 + \sin(\pi x/6), \qquad 0\le x\le 1.$$

$$W_о(x)=\frac{\partial F_о(x)}{\partial x}=1/2+\cos(\pi x/6)\cdot\pi/6,\qquad 0\le x\le 1$$

и, по аналогии,

$$F_з(y)=y/2+\sin(\pi y/6),\quad W_з(y)=1/2+\cos(\pi y/6)\cdot\pi/6,\quad 0\le y\le 1.$$

б) Чтобы в дальнейшем воспользоваться формулой (7.10), рассчитаем предварительно числовые характеристики для каждой из величин, входящих в систему

$$M_о=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot W_о(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{2}\,dx+\frac{\pi}{6}\cdot\int_0^1 x\cdot\cos(\pi x/6)\,dx.$$

Последний интеграл в этой сумме несложен, но можно и не тратить на его расчет лишнее время, взяв готовый результат в справочнике или, например, в приложении В (формула 2). В результате получим

$$M_о=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^1+\frac{\pi}{6}\cdot\left.\left(\frac{\cos(\pi x/6)}{(\pi/6)^2}+\frac{x\cdot\sin(\pi x/6)}{(\pi/6)}\right)\right|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{6}{\pi}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\approx 0{,}494.$$

Аналогично, используя (3) из приложения В, для дисперсии имеем

$$D_о=m_2\{о\}-M_о^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot W_о(x)\,dx-M_о^2=\int_0^1\frac{x^2}{2}\,dx+\frac{\pi}{6}\cdot\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)dx-$$

$$-M_о^2=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1+\frac{\pi}{6}\cdot\left.\left(\frac{2x\cdot\cos(\pi x/6)}{(\pi/6)^2}+\left[\frac{x^2}{(\pi/6)}-\frac{2}{(\pi/6)^3}\right]\cdot\sin(\pi x/6)\right)\right|_0^1-M_о^2=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{6}{\pi}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{2}{(\pi/6)^2}\right]-0{,}494^2=\frac{1}{6}+3{,}308-3{,}1476-0{,}244=0{,}083.$$

Так как распределение величины η отличается от распределения ξ лишь формальным обозначением аргумента плотности вероятности, то, очевидно, ее числовые характеристики будут точно такими же

$$M_з=0{,}494,\qquad D_з=0{,}083.$$

в) Корреляция случайных величин ξ и η определяется (7.9), что можно записать в виде

$$m_{11}\{о,з\}=\frac{\pi}{6}\cdot\left\{\int_0^1 y\,dy\cdot\int_0^1 x\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)dx+\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 y\cdot\cos\left(\frac{\pi y}{6}\right)dy\right\}.$$

Учитывая схожесть слагаемых в этой сумме, будем учитывать лишь одно из них, удваивая результат

$$m_{11}\{о,з\}=2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1\cdot\left.\left(\frac{\cos(\pi x/6)}{(\pi/6)^2}+\frac{x\cdot\sin(\pi x/6)}{(\pi/6)}\right)\right|_0^1=\frac{6}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\approx 0{,}244.$$

Применяя к полученному результату (7.10), получим

$$r_{\xi\eta}=\frac{0{,}494-0{,}244^2}{0{,}083}\approx 4{,}3\cdot 10^{-4},$$

откуда следует, что входящие в систему величины практически некоррелированы.

г) Закон распределения максимальной из величин ξ и η следует искать на основе соотношения (7.16), которое принимает вид

$$W_з(y)=\frac{\pi}{6}\cdot\left\{\int_{-\infty}^{y}\left[\cos\left(\frac{\pi y}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi x_2}{6}\right)\right]dx_2+\int_{-\infty}^{y}\left[\cos\left(\frac{\pi x_1}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{6}\right)\right]dx_1\right\}.$$

И вновь, опираясь на схожесть слагаемых в этой сумме, получаем

$$W_{max}(y)=\frac{\pi}{3}\cdot y\cdot\cos\left(\frac{\pi y}{6}\right)+2\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{6}\right),\qquad 0\le y\le 1.$$

Аналогично, на основе (7.15) несложно показать, что минимальная из анализируемых величин, обладает плотностью вероятности

$$W_{min}(y)=\frac{\pi}{3}\cdot(1-y)\cdot\cos\left(\frac{\pi y}{6}\right)+\left[1-2\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{6}\right)\right],\qquad 0\le y\le 1.$$

Полученные плотности вероятности вместе с характеристиками самих величин ξ и η представлены на рис. 7.3.

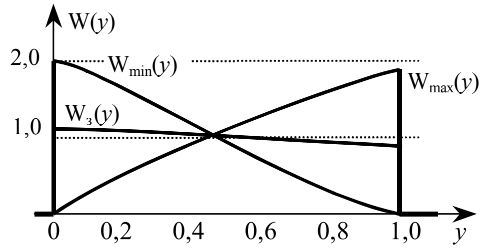


Рис. 7.3. ПРВ для величин, входящих в систему СВ из задачи 5, а также для максимальной и минимальной из них

<u>Задача 6.</u> Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены равномерно на интервале [0; 1]. Случайные величины η_1 и η_2 образуются из ξ_1 и ξ_2 путем функциональных преобразований

$$\eta_1 = a+\sigma\sqrt{-2\ln \xi_2}\cdot\cos(2\pi\xi_1),\quad \eta_2 = a+\sigma\sqrt{-2\ln \xi_2}\cdot\sin(2\pi\xi_1). \quad (7.18)$$

Показать, что случайные величины η_1 и η_2 являются независимыми нормально распределенными с математическим ожиданием a и эффективным значением σ.

<u>Решение</u>

а) Поставив в соответствие случайным величинам ξ_i и η_i принимаемые ими значения x_i и y_i, соотношения (7.18) можно переписать в виде

$$\sigma\sqrt{-2\ln x_2}\cdot\cos(2\pi x_1) = y_1 - a,\quad \sigma\sqrt{-2\ln x_2}\cdot\sin(2\pi x_1) = y_2 - a,$$

откуда несложно найти правила $x_1 = \varphi(y_1, y_2)$ и $x_2 = \varphi(y_1, y_2)$, позволяющие по значениям y_i результатов преобразования (7.18) найти соответствующие им значения аргументов x_i

$$x_1 = \varphi_1(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot arctg\left(\frac{y_2-a}{y_1-a}\right),\quad x_2 = \varphi_2(y_1,y_2) = \exp\left(-\frac{(y_2-a)^2+(y_1-a)^2}{2\text{y}^2}\right).$$

б) Для применения формулы (7.14) вычислим предварительно частные производные от найденных функций φ_i по каждому из аргументов y_i

$$\frac{\partial\varphi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-\frac{y_2-a}{(y_1-a)^2}}{1+\left(\frac{y_2-a}{y_1-a}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-(y_2-a)}{(y_1-a)^2+(y_2-a)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_2(y_1,y_2)}{\partial y_1} = -\frac{(y_1-a)}{\text{y}^2}\exp\left(-\frac{(y_2-a)^2+(y_1-a)^2}{2\text{y}^2}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi_1(y_1,y_2)}{\partial y_2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\frac{1}{(y_1-a)}}{1+\left(\frac{y_2-a}{y_1-a}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(y_1-a)}{(y_1-a)^2+(y_2-a)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_2(y_1,y_2)}{\partial y_2} = -\frac{(y_2-a)}{\text{y}^2}\exp\left(-\frac{(y_2-a)^2+(y_1-a)^2}{2\text{y}^2}\right).$$

Полученный ряд выражений позволяет записать якобиан исследуемого преобразования в виде

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\text{y}^2}\exp\left(-\frac{(y_2-a)^2+(y_1-a)^2}{2\text{y}^2}\right)\cdot\frac{(y_1-a)^2+(y_2-a)^2}{(y_1-a)^2+(y_2-a)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\text{y}^2}\exp\left(-\frac{(y_2-a)^2+(y_1-a)^2}{2\text{y}^2}\right).$$

в) Найденные в п.(а) выражения $x_1 = \varphi(y_1, y_2)$ и $x_2 = \varphi(y_1, y_2)$ являются однозначными (т.е. обратное к (7.18) преобразование включает единственную ветвь), а получаемые при любых y_1 и y_2 значения x_1 и x_2 лежат между нулем и единицей, поэтому для произвольных y_1 и y_2 справедливо $W_{\xi 1\, \xi 2}(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) = 1$. В итоге, применяя (7.13), получаем

$$W_{\eta 1\, \eta 2}(y_1, y_2) = W_{\xi 1\, \xi 2}(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) \cdot |J| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} \exp\left(-\frac{(y_2-a)^2}{2y^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} \exp\left(-\frac{(y_1-a)^2}{2y^2}\right) = W_{з_1}(y_1) \cdot W_{з_2}(y_2).$$

Итак, совместная плотность вероятности для величин η_1 и η_2 может быть записана в виде произведения их частных плотностей вероятности (что доказывает взаимную независимость данных СВ), каждая из которых соответствует нормальной СВ с математическим ожиданием a и эффективным значением σ.

7.3. Задачи для самоконтроля

7.1. Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков, таковы:

ξ:

x_i	1	2	3
$p(x_i)$	0,2	0,3	0,5

η:

y_j	1	2	4
$p(y_j)$	0,1	0,3	0,6

Найти закон распределения суммы очков, выбиваемых двумя стрелками.

Ответ: сумма очков:

2	3	4	5	6
0,02	0,09	0,26	0,33	0,30

7.2. По заданной функции распределения системы двух случайных величин ξ и η

$$F_{оз}(x, y) = (1 - e^{-x/a})(1 - e^{-y/b}), \quad x > 0,\ y > 0,$$

определить плотность распределения вероятностей этой системы и вероятность попадания значений системы в диапазон $\{\xi > a, \eta > b\}$.

Ответ: $W_{оз}(x, y) = e^{-(x/a + y/b)} \big/ a \cdot b,\ x > 0, y > 0$; $P\{\xi > a, \eta > b\} = e^{-2}$.

7.3. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения независимых случайных величин ξ и η с равномерными законами распределения: ξ – на интервале [0; 1], η – [1; 3].

Ответ: 1, 4/9.

7.4. Первая из двух независимых случайных величин (СВ ξ) распределена равномерно на интервале [–1; +1], а вторая имеет нормальное распределение с параметрами $a_\eta = 2$, $\sigma_\eta = 3$. Определить их начальные моменты распределения порядков “3, 2” и “4, 2”.

Ответ: $m_{32}\{\xi, \eta\} = 0$; $m_{42}\{\xi, \eta\} = 0{,}2 \cdot 13 = 13/5$.

7.5. Плотность распределения вероятностей СВ ξ является четной математической функцией. Величина η связана с СВ ξ соотношением $\eta = \xi^2$. Показать что, для этих явно зависимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю.

7.6. Найти корреляцию $B_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η, совместная плотность вероятности которых имеет вид $W_{\xi\eta}(x,y) = 6 \cdot (x+y)^2/7$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Ответ: $B_{\xi\eta} = 17/36$.

7.7. Независимые случайные величины ξ и η заданы своими плотностями распределения вероятностей $W_\xi(x) = e^{-x}$, $x \ge 0$; $W_\eta(y) = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5y}$, $y \ge 0$. Найти плотности распределения вероятности величин $\zeta_1 = \eta + \xi$, $\zeta_2 = \eta / \xi$ и $\zeta_3 = \eta - \xi$.

Ответ: $W_1(z) = e^{-\frac{z}{2}} \cdot (1 - e^{-\frac{z}{2}})$, $z \ge 0$; $W_2(z) = \dfrac{1}{2(1 + z/2)^2}$, $z \ge 0$;

$$W_3(z) = \begin{cases} e^z/3, & z < 0, \\ e^{-z/2}/3, & z \ge 0. \end{cases}$$

7.8. Совместная функция распределения случайных величин ξ и η имеет вид $F_{\xi\eta}(x,y) = [\,(x+y)^4 - x^4 - y^4\,]/14$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Найти функцию распределения максимальной и минимальной из них.

Ответ: $F_{max}(y)= y^4,\ 0 \le y \le 1;$

$F_{min}(y)= [\,4y + 6y^2 + 4y^3 - 7y^4\,] / 7,\ \ 0 \le y \le 1.$

7.9. Величина ξ распределена равномерно на интервале [0; 1], а величина η имеет плотность распределения вероятностей $W_\eta(y) = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5y},\ \ y \ge 0$. Найти закон распределения максимальной и минимальной из этих двух независимых случайных величин.

Ответ: $W_{min}(y) = 0{,}5 \cdot (3 - y) \cdot e^{-0{,}5 \cdot y},\ 0 \le y \le 1;$

$$W_{max}(y) = \begin{cases} 1 + (y-1) \cdot e^{-0{,}5 \cdot y},\ 0 \le y < 1, \\ 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5 \cdot y},\ y \ge 1. \end{cases}$$

7.4. Контрольные задания

7.10. По представленной в таблице ниже функции распределения вероятностей системы случайных величин ξ и η определите вероятность одновременного (в одном опыте) попадания величины ξ в интервал [0; 1], а величины η – в интервал [1; 2].

Номер	Функция распределения вероятностей $F_{\xi\eta}(x,y)$
1	$1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)},\ \ x \ge 0,\ y \ge 0$
2	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{4}(1-x)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{4}y\right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, 0≤x≤3, 1≤y≤2
3	$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}(y-1)\right] + \sin\left[\frac{\pi}{6}(1+x)\right] - \sin\left[\frac{\pi}{6}(y+x)\right] \right\}$, –1≤x≤2, 1≤y≤4
4	$[\,x^2 \cdot (y-1) + x \cdot (y^2 - 1)\,] / 160,\ \ 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 5$
5	$[\,(x+1) \cdot (y^4 - 1) - (x^4 - 1) \cdot (y-1)\,] / 160,\ -1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$
6	$[\,2y^3x - 3x^2y - 3x^2 - 2x\,] / 46,\ \ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$
7	$[\,y^3x + x^3y\,] / 3,\ \ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$
8	$[\,x^4 + y^4 - (y-x)^4\,] / 96,\ \ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$
9	$x^3 \cdot (\,1 - 1/y\,),\ \ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y$
10	$x^3 \cdot (\,y - 1\,) / 8,\ \ 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$

7.11. Найти функцию распределения суммы независимых случайных величин ξ и η, законы распределения которых представлены в таблице.

Номер	Распределение СВ ξ	Распределение СВ η
1	нормальное с параметрами $a_\xi = 2$; $\sigma_\xi = 2$	нормальное с параметрами $a_\eta = -3$; $\sigma_\eta = 3$
2	равномерное на интервале $x \in [\,-2; +2\,]$	$W_\eta(y) = e^{-y},\ \ y \ge 0$
3	$W_\xi(x) = e^{-x},\ \ x \ge 0$	$W_\eta(y) = e^{-y},\ \ y \ge 0$
4	$W_\xi(x) = e^{-x},\ \ x \ge 0$	$W_\eta(y) = e^{+y},\ \ y \le 0$
5	$W_\xi(x) = 2 \cdot x,\ \ 0 \le x \le 1$	$W_\eta(y) = 2 \cdot y / 9,\ \ 0 \le y \le 3$
6	$W_\xi(x) = 1/4,\ -2 \le x \le 2$	$W_\eta(y) = 2 \cdot y / 9,\ \ 0 \le y \le 3$
7	$W_\xi(x) = x/8,\ 0 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = y^2 / 9,\ \ 0 \le y \le 3$
8	$W_\xi(x) = 1/8,\ -4 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = y^2 / 9,\ \ 0 \le y \le 3$
9	равномерное на интервале $x \in [\,-2; +2\,]$	равномерное на интервале $x \in [\,0; 5\,]$
10	нормальное с параметрами $a_\xi = 2$; $\sigma_\xi = 3$	нормальное с параметрами $a_\eta = -2$; $\sigma_\eta = 1$

7.12. ξ и η – независимые СВ, имеющие одинаковое показательное с параметром λ распределение. Найти функцию распределения и плотность вероятности следующих СВ

Номер	Анализируемая СВ	Номер	Анализируемая СВ
1	$\eta + \xi$	6	$\max\{\xi, \eta^3\}$
2	$\eta - \xi$	7	$\min\{\xi, \eta^3\}$
3	$\eta \cdot \xi$	8	η / ξ
4	$\eta^3 + \xi$	9	$\max\{\xi, \eta\}$
5	$\eta^3 - \xi$	10	$\min\{\xi, \eta\}$

7.13. Система случайных величин $\{\xi, \eta\}$ характеризуется совместной функцией распределения вероятностей, приведенной в таблице ниже. Определить закон распределения минимальной из величин ξ и η.

Номер	Функция распределения вероятностей $F_{\xi\eta}(x,y)$
1	$[\,y^3x + x^3y\,] / 3,\quad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$
2	$[\,x^4 + y^4 - (y-x)^4\,] / 96,\quad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$
3	$1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)},\quad x \ge 0,\ y \ge 0$
4	$x^3 \cdot (1 - 1/y),\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y$
5	$x^3 \cdot (y-1)/8,\quad 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$
6	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{\cos\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{4}(1-x)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{4}y\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2$
7	$\frac{1}{2} \cdot \left\{\sin\left[\frac{\pi}{6}(y-1)\right] + \sin\left[\frac{\pi}{6}(1+x)\right] - \sin\left[\frac{\pi}{6}(y+x)\right]\right\}$, $-1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4$

8	$[\,x^2 \cdot (y-1) + x \cdot (y^2 - 1)\,] / 160,\quad 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 5$
9	$[\,(x+1) \cdot (y^4 - 1) - (x^4 - 1) \cdot (y-1)\,] / 160,\ -1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$
10	$[\,2y^3x - 3x^2y - 3x^2 - 2x\,] / 46,\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$

7.14. Определить математическое ожидание случайной величины ξ, входящей в состав системы $\{\xi, \eta\}$, если совместная плотность вероятности СВ, входящих в систему, имеет вид

Номер	Плотность вероятности $W_{\xi\eta}(x,y)$
1	$3 \cdot x^2 / y^2,\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y$
2	$3 \cdot x^2 / 8,\quad 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$
3	$\pi^2 \cdot \sin\{\pi \cdot (x+y)/6\} / 72,\quad -1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4$
4	$[\,y + x\,] / 80,\quad 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 5$
5	$[\,y^3 - x^3\,] / 40,\ -1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$
6	$\frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]$, $0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2$
7	$[\,3 \cdot y^2 - x\,] / 23,\quad 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3$
8	$[\,y^2 + x^2\,] / 54,\quad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$
9	$(y-x)^2 / 8,\quad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$
10	$e^{-(x+y)},\quad x \ge 0,\ y \ge 0$

7.15. Система случайных величин $\{\xi, \eta\}$ характеризуется совместной функцией распределения вероятностей, приведенной в таблице ниже. Определить закон распределения разности СВ, входящих в систему, т.е. величины $\zeta = \eta - \xi$.

Номер	Функция распределения вероятностей $F_{\xi\eta}(x,y)$

1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]-\cos\left[\frac{\pi}{4}(1-x)\right]-\cos\left[\frac{\pi}{4}y\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, 0≤x≤3, 1≤y≤2
2	$\frac{1}{2}\cdot\left\{\sin\left[\frac{\pi}{6}(y-1)\right]+\sin\left[\frac{\pi}{6}(1+x)\right]-\sin\left[\frac{\pi}{6}(y+x)\right]\right\}$, −1≤x≤2, 1≤y≤4
3	$[(x+1)\cdot(y^4-1)-(x^4-1)\cdot(y-1)]\,/\,160,\ -1\le x\le 1,\ 1\le y\le 3$
4	$[\,x^2\cdot(y-1)+x\cdot(y^2-1)\,]\,/\,160,\ \ 0\le x\le 4,\ 1\le y\le 5$
5	$[\,2y^3x-3x^2y-3x^2-2x\,]\,/\,46,\ \ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 3$
6	$[\,x^4+y^4-(y-x)^4\,]\,/\,96,\ \ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2$
7	$1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)},\ \ x\ge 0,\ y\ge 0$
8	$x^3\cdot(\,1-1\,/\,y\,),\ \ 0\le x\le 1,\ 1\le y$
9	$x^3\cdot(\,y-1\,)\,/\,8,\ \ 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2$
10	$[\,y^3x+x^3y\,]\,/\,3,\ \ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3$

7.16. Определить корреляцию $B_{\xi\eta}$ величин ξ и η, характеризуемых законом распределения

Номер	Плотность вероятности $W_{\xi\eta}(x,y)$
1	$[\,y+x\,]\,/\,80,\ \ 0\le x\le 4,\ 1\le y\le 5$
2	$[\,y^3-x^3\,]\,/\,40,\ -1\le x\le 1,\ 1\le y\le 3$
3	$(y-x)^2\,/\,8,\ \ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2$
4	$[\,3\cdot y^2-x\,]\,/\,23,\ \ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 3$
5	$[\,y^2+x^2\,]\,/\,54,\ \ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3$
6	$e^{-(x+y)},\ \ x\ge 0,\ y\ge 0$
7	$3\cdot x^2\,/\,y^2,\ \ 0\le x\le 1,\ 1\le y$
8	$3\cdot x^2\,/\,8,\ \ 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2$
9	$\pi^2\cdot\sin\{\,\pi\cdot(\,x+y\,)\,/\,6\,\}\,/\,72,\ \ -1\le x\le 2,\ 1\le y\le 4$
10	$\frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]$, 0≤x≤3, 1≤y≤2

7.17. Законы распределения независимых случайных величин ξ и η приведены в таблице ниже. Найти плотность распределения вероятностей величины $\zeta=\eta\,/\,\xi$.

Номер	Распределение СВ ξ	Распределение СВ η
1	стандартное нормальное $a_\xi=0$; $\sigma_\xi=1$	стандартное нормальное $a_\eta=0$; $\sigma_\eta=1$
2	$W_\xi(x)=e^{-x},\ \ x\ge 0$	$W_\eta(y)=e^{+y},\ \ y\le 0$
3	$W_\xi(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x},\ \ x\ge 0$	$W_\eta(y)=\lambda\cdot e^{-\lambda y},\ \ y\ge 0$
4	$W_\xi(x)=1/a,\ \ 0\le y\le a$	$W_\eta(y)=1/a,\ \ 0\le y\le a$
5	равномерное на интервале $x\in[\,-2;+2\,]$	$W_\eta(y)=e^{-y},\ \ y\ge 0$
6	$W_\xi(x)=1\,/\,8,\ -4\le x\le 4$	$W_\eta(y)=e^{+y},\ \ y\le 0$
7	$W_\xi(x)=1\,/\,8,\ -4\le x\le 4$	$W_\eta(y)=y^2\,/\,9,\ \ 0\le y\le 3$
8	$W_\xi(x)=2\cdot x,\ \ 0\le x\le 1$	$W_\eta(y)=2\cdot y\,/\,9,\ \ 0\le y\le 3$
9	$W_\xi(x)=1\,/\,4,\ -2\le x\le 2$	$W_\eta(y)=2\cdot y\,/\,9,\ \ 0\le y\le 3$
10	$W_\xi(x)=x\,/\,8,\ \ 0\le x\le 4$	$W_\eta(y)=y^2\,/\,9,\ \ 0\le y\le 3$

7.18. Найти вероятность выполнения неравенства $\eta\ge\xi$, если величины ξ и η – независимые и подчиняются законам распределения

Номер	Распределение СВ ξ	Распределение СВ η
1	стандартное нормальное $a_\xi = 0$; $\sigma_\xi = 1$	стандартное нормальное $a_\eta = 0$; $\sigma_\eta = 1$
2	$W_\xi(x) = x/2,\ 0 \le x \le 2$	$W_\eta(y) = 2 \cdot y/9,\ 0 \le y \le 3$
3	$W_\xi(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x},\ \ x \ge 0$	$W_\eta(y) = \beta \cdot e^{-\beta y},\ \ y \ge 0$
4	$W_\xi(x) = 1/2,\ 0 \le x \le 2$	$W_\eta(y) = 1/3,\ 0 \le y \le 3$
5	$W_\xi(x) = x/8,\ 0 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = y^2/9,\ \ 0 \le y \le 3$
6	$W_\xi(x) = 1/8,\ -4 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = y^2/9,\ \ 0 \le y \le 3$
7	$W_\xi(x) = 2 \cdot x,\ \ 0 \le x \le 1$	$W_\eta(y) = 2 \cdot y/9,\ \ 0 \le y \le 3$
8	$W_\xi(x) = 1/8,\ -4 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = e^{+y},\ \ y \le 0$
9	равномерное на интервале $x \in [-10; 0]$	$W_\eta(y) = e^{+y},\ \ y \le 0$
10	$W_\xi(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x},\ \ x \ge 0$	равномерное на интервале $y \in [0; +10]$

7.19. Определить начальный момент порядка 2, 2 $m_{22}\{\xi,\eta\}$ для независимых случайных величин ξ и η, вероятностные характеристики которых представлены в таблице ниже

Номер	Распределение СВ ξ	Распределение СВ η
1	равномерное на интервале $x \in [-10; 0]$	$W_\eta(y) = e^{+y},\ \ y \le 0$
2	$W_\xi(x) = 1/8,\ -4 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = e^{+y},\ \ y \le 0$
3	$W_\xi(x) = x/8,\ 0 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = y^2/9,\ \ 0 \le y \le 3$
4	$W_\xi(x) = 1/8,\ -4 \le x \le 4$	$W_\eta(y) = y^2/9,\ \ 0 \le y \le 3$
5	$W_\xi(x) = x/2,\ 0 \le x \le 2$	$W_\eta(y) = 2 \cdot y/9,\ 0 \le y \le 3$
6	$W_\xi(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x},\ \ x \ge 0$	$W_\eta(y) = \beta \cdot e^{-\beta y},\ \ y \ge 0$
7	$W_\xi(x) = 1/2,\ 0 \le x \le 2$	$W_\eta(y) = 1/3,\ 0 \le y \le 3$
8	$W_\xi(x) = 2 \cdot x,\ \ 0 \le x \le 1$	$W_\eta(y) = 2 \cdot y/9,\ \ 0 \le y \le 3$
9	$W_\xi(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x},\ \ x \ge 0$	равномерное на интервале $y \in [0; +10]$
10	стандартное нормальное $a_\xi = 0$; $\sigma_\xi = 1$	стандартное нормальное $a_\eta = 0$; $\sigma_\eta = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии материалы составляют, по мнению автора, необходимый минимум практических заданий, соответствующий первой части курса “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”. При этом, безусловно, следует учитывать, что основной целью создания пособия было получение “инструмента” для фронтального проведения практических занятий (коллоквиумов). В связи с этим в данное пособие сознательно не включались задания повышенной сложности, а также ряд интересных примеров, не связанных непосредственно с циклом проводимых практических занятий. Как следствие, студентам, заинтересованным в углубленном изучении учебного курса, будет полезно рассмотреть примеры и задачи, приведенные в других изданиях. Некоторые из подобных полезных книг приведены ниже в библиографическом списке литературы. Курс теории вероятностей является достаточно устоявшимся, поэтому несмотря на то, что некоторые из перечисленных задачников были изданы 20-30 лет назад, они, по-прежнему, не потеряли своей актуальности и могут быть успешно использованы и сегодня.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Функция распределения стандартной нормальной случайной величины $F_{ст}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

X	$F_{ст}(x)$	x	$F_{ст}(x)$	X	$F_{ст}(x)$	x	$F_{ст}(x)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9773	3,0	0,9987
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821	3,1	0,9990
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861	3,2	0,9993
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893	3,3	0,9995
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918	3,4	0,9997
0,5	0,6915	1,5	0,9331	2,5	0,9938	3,5	0,9998
0,6	0,7258	1,6	0,9452	2,6	0,9953	3,6	0,9998
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965	3,7	0,9999
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974	3,8	0,9999
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981	3,9	0,9999

Для отрицательных аргументов x значения можно получить из соотношения $F_{ст}(x)_{|x<0} = 1 - F_{ст}(-x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые неопределенные и определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot sign(a), \text{ где } \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (П1)$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}, \quad (П2)$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax), \quad (П3)$$

$$\int x \cdot \sin(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}, \qquad (П4)$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax)dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cdot \cos(ax). \qquad (П5)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 2000. 366 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. шк., 1999. 400 с.

3. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. – М.: Сов. радио, 1980. 543 с.

4. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. - М.: Связь, 1969. 448 с.

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ
Часть 1

Редактор Т. А. Щепкина

Выпускающий редактор И. В. Медведева

Компьютерный набор А. Б. Токарева

Подписано в печать 12.03.2005.
Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл.печ.л. 10,8. Уч.-изд.л. 9,3. Тираж 150 экз. Зак.№____

Воронежский государственный технический университет

394026 Воронеж, Московский просп., 14