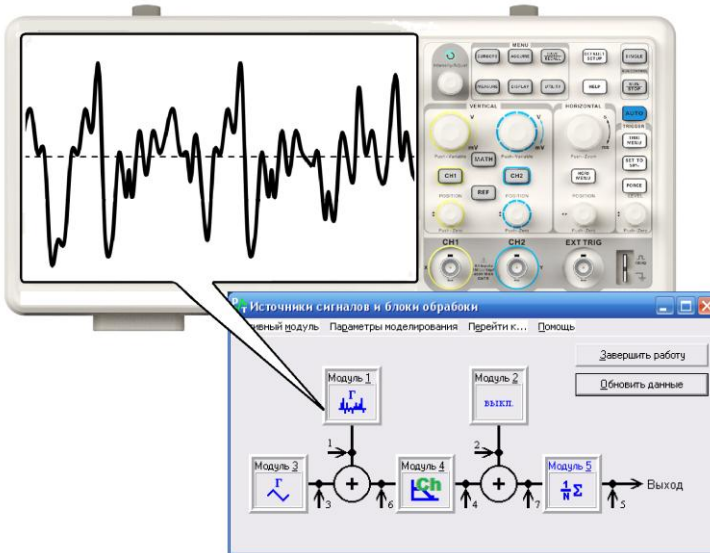


А.Б. Токарев

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 2

Учебное пособие



Воронеж 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет»

А.Б. Токарев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ  
ПРОЦЕССЫ В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 2

Утверждено учебно-методическим советом  
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 621.37:519.21(075.8)

ББК 32:22.19я7

Т 51

Токарев А.Б. Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (2,9 Мб) / А.Б. Токарев. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. Ч. 2. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

Учебное пособие предназначено для освоения студентами дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике». Оно определяет математический аппарат, применяемый при анализе характеристик случайных процессов, наблюдаемых в радиотехнических цепях, а также принципы обработки случайных сигналов в радиотехнических устройствах различного назначения.

Издание соответствует рабочей программе дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике» для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника», направленности «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов».

Табл. 1. Ил. 45. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных систем и технологий Воронежского института МВД РФ (начальник д-р техн. наук, проф. О.И. Бокова); д-р техн. наук, проф. Ю.Г. Пастернак

© Токарев А.Б., 2017

© ФГБОУ ВО «Воронежский  
государственный технический  
университет», 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Научный подход к описанию явлений окружающего нас мира предполагает, в частности, необходимость установления количественных закономерностей между разными сторонами анализируемого явления, а также возможность предсказания направления развития наблюдаемых явлений при продолжении или повторении наблюдений. Во многих научно-технических областях подобные закономерности и методы предсказания опираются на принцип детерминизма. Детерминистический подход предполагает, что при воздействии любого конкретного сигнала на систему с известными свойствами, реакция системы может быть рассчитана со сколь угодно высокой точностью для произвольного по длительности интервала наблюдения.

Преимуществами детерминистического подхода являются относительная простота математического аппарата, четкость и однозначность получаемых формулировок и выводов. Однако, ситуации, когда и исследуемая система, и воздействия на неё точно известны, встречаются на практике далеко не всегда. Например, детальный контроль всей наблюдаемой на практике совокупности воздействий на радиотехническую систему принципиально невозможен, а потому и исследование свойств подобных систем и действующих в них сигналов возможно лишь со статистических позиций.

В настоящем пособии рассматриваются типовые характеристики случайных сигналов, наблюдаемых в радиотехнических цепях, а также анализируется изменение этих характеристик при линейных и нелинейных преобразованиях; рассматриваются типовые для радиотехнической практики виды помех, анализируются основы оптимальной обработки сигналов при передаче и приёме информации в цифровой и аналоговой форме. В центре внимания оказываются стационарные случайные процессы, обрабатываемые в соответствии со спектральной и корреляционной теориями. Для приобретения зна-

ний об особенностях обработки нестационарных случайных процессов рекомендуется обратиться к специализированным источникам, некоторые из которых приведены в списке литературы в конце настоящего учебного пособия.

# 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

## 1.1. Детерминированные и случайные сигналы

При описании сигналов, наблюдаемых в радиотехнических системах, могут быть использованы детерминистический и статистический подходы. Первый предполагает, что сигнал может быть задан конкретной математической функцией, т.е. является точно известным для любого, произвольно выбранного момента времени вдоль всей временной оси. Однако для целей передачи информации подобные сигналы бесполезны, поскольку полностью детерминированный сигнал информации не содержит. Статистический подход предполагает неопределенность в отношении значений, принимаемых сигналом, из-за которой «поведение» сигнала возможно описать лишь с вероятностных позиций. Многократные наблюдения за случайными сигналами в неизменных условиях дают, тем не менее, каждый раз новые зависимости контролируемой величины (напряжения, тока и т.п.) от времени. Эти, соответствующие конкретному опыту зависимости – детерминированные функции времени, называемые **реализациями**, условимся в дальнейшем обозначать  $\xi^{(1)}(t)$ ,  $\xi^{(2)}(t)$ ...  $\xi^{(i)}(t)$ , где верхний индекс, записываемый в круглых скобках (например, « $(i)$ »), будет означать порядковый номер реализации. Существует конечное или даже бесконечное множество потенциально возможных реализаций (форм или «траекторий») случайного сигнала и до проведения опыта невозможно установить, какие именно значения сигнала реализуются на практике.

Итак, **случайный процесс (СП)** – это явление, развивающееся вдоль оси времени случайным образом. Предсказать

заранее форму реализации СП невозможно; можно лишь найти статистические данные, характеризующие с вероятностных позиций возможность наблюдения тех или иных реализаций. Причем указанная неопределенность касается как поведения СП в отдельной временной точке или, как ещё говорят, в отдельном «временном сечении», так и взаимосвязи совокупности значений, соответствующих отдельной реализации СП при её изменении вдоль оси времени. Даже регистрация продолжительного фрагмента какой-то реализации процесса  $\xi(t)$ , как правило, не может обеспечить возможность точного предсказания значений этой же реализации в последующие моменты времени; можно говорить лишь о вероятностных свойствах процесса в одном или нескольких последующих временных сечениях. Характеристики СП, характеризующие его свойства в отдельном временном сечении, принято называть **одномерными**, а аналогичные характеристики сразу для нескольких временных сечений – **многомерными**.

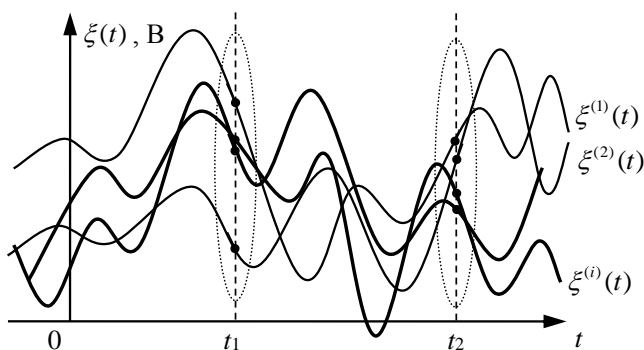


Рис. 1.1. Пример возможных реализаций случайного процесса и двух его временных сечений

## 1.2. Одномерные вероятностные характеристики случайных процессов

**Одномерная функция распределения вероятностей СП** характеризует зависимость от аргумента  $x_1$  вероятности наблюдения в момент времени  $t_1$  значений этого СП, меньших чем  $x_1$

$$F_{\xi}(x_1; t_1) = P\{ \xi(t_1) < x_1 \}. \quad (1.1)$$

Свойства  $F_{\xi}(x_1; t_1)$  в отношении аргумента  $x_1$  дублируют свойства функции распределения случайной величины (см. первую часть настоящего пособия [1]). Наиболее важные из них состоят в следующем:

1. Функция распределения вероятностей (ФРВ) принимает значения

$$0 \leq F_{\xi}(x_1; t_1) \leq 1, \quad (1.2)$$

причем  $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1; t_1) = 0$  и  $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x_1; t_1) = 1$ . (1.3)

2. В любой момент времени  $t_1$  функция распределения является неубывающей функцией своего аргумента  $x_1$ , т.е.

$$F_{\xi}(x_1; t_1) \leq F_{\xi}(x_2; t_1) \text{ для любых } x_1 < x_2. \quad (1.4)$$

3. Вероятность наблюдения в момент времени  $t_1$  значений процесса  $\xi(t)$  из интервала  $[a; b]$  составляет

$$P\{a \leq \xi(t_1) < b\} = F_{\xi}(b; t_1) - F_{\xi}(a; t_1). \quad (1.5)$$

*Примечание: Обратите внимание, что во всех приведенных выше соотношениях  $t_1$  играет роль внешнего параметра. Каких-либо общих «правил поведения» ФРВ СП вдоль оси времени не существует, т.е. влияние этого параметра на изменение  $F_{\xi}(x_1; t_1)$  может быть произвольным и определяется лишь физической сутью проводимого эксперимента.*



**Одномерная плотность распределения вероятностей СП** характеризует возможность наблюдения в момент времени  $t_1$  значений СП из бесконечно малой окрестности аргумента  $x_1$  (рис. 1.2) и численно определяется соотношением

$$W_{\xi}(x_1; t_1) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{P\{x_1 \leq \xi(t_1) < x_1 + \Delta x_1\}}{\Delta x_1} = \frac{\partial F_{\xi}(x_1; t_1)}{\partial x_1}. \quad (1.6)$$

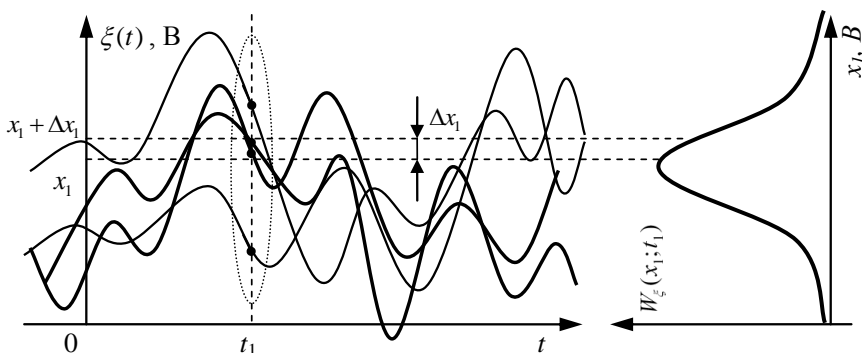


Рис. 1.2. К пониманию понятия плотности распределения вероятностей случайного процесса

Свойства  $W_{\xi}(x_1; t_1)$  в отношении аргумента  $x_1$  дублируют свойства плотности распределения вероятностей для случайной величины из первой части настоящего пособия и, в частности, состоят в том, что

$$P\{a \leq \xi(t_1) < b\} = \int_a^b W_{\xi}(x_1; t_1) dx_1. \quad (1.7)$$

Свойство нормировки: 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x_1; t_1) dx_1 = 1. \quad (1.8)$$

*Примечание: Если для случайных величин функция распределения или плотность вероятности несут в себе всю информацию об их свойствах, то для случайных процессов аналогичные им одномерные законы распределения содержат лишь часть сведений о процессе. Они характеризуют ситуацию лишь в отдельном временном сечении, не позволяя узнать ни что было с реализацией процесса до контролируемого момента времени  $t_1$ , ни что с ней будет после этого момента, т.е. формируют одномоментное, «статическое» представление о процессе. **Одномерные законы распределения принципиально не могут содержать никаких сведений о динамике развития процесса во времени, а потому многие обладающие идентичными одномерными характеристиками случайные процессы могут весьма существенно отличаться друг от друга по своему виду (по динамике развития).***

### 1.3. Многомерные вероятностные характеристики случайных процессов

Многомерная функция распределения вероятностей СП характеризует для произвольной выборки СП вероятность наблюдения в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  значений меньших чем  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{ \xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \dots, \xi(t_n) < x_n \}. \quad (1.9)$$

Подобная функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Она безразмерная и принимает значения

$$0 \leq F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \leq 1. \quad (1.10)$$

2. Функция распределения является неубывающей функцией по любому из своих аргументов, т.е. для любых  $x_{i1} < x_{i2}$

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_{i1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \leq F_{\xi}(x_1, \dots, x_{i2}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_i, \dots, t_n). \quad (1.11)$$

3. Для любого из контрольных уровней  $x_i$

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) = 0, \quad (1.12)$$

но лишь для всех уровней вместе

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty, x_2 \rightarrow +\infty, \\ \dots, x_n \rightarrow +\infty}} F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1, \quad (1.13)$$

Неограниченное же увеличение лишь отдельных контрольных уровней означает, что соответствующее неравенство в определении (1.9) будет гарантированно выполняться (независимо от того, к какому моменту времени  $t_i$  оно привязано), а это означает сокращение числа неравенств, влияющих на вероятность (1.9). В частности,

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n) = \\ = F_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом,  $n$ -мерная функция распределения содержит в себе функции распределения и любых меньших порядков.

**Многомерная плотность распределения вероятностей СП** характеризует возможность наблюдения в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  значений СП, близких к  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и, по аналогии с (1.6), определяется выражением

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}} \frac{P\{x_1 \leq \xi(t_1) < x_1 + \Delta x_1; x_2 \leq \xi(t_2) < x_2 + \Delta x_2; \dots, x_n \leq \xi(t_n) < x_n + \Delta x_n\}}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \times \dots \times \Delta x_n} = \\ = \frac{\partial^n W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Исходя из (1.15), для малых величин  $\Delta x_i$  справедливо

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \times \dots \times \Delta x_n \approx \\ \approx P\{x_1 \leq \xi(t_1) < x_1 + \Delta x_1; x_2 \leq \xi(t_2) < x_2 + \Delta x_2; \dots, x_n \leq \xi(t_n) < x_n + \Delta x_n\}, \end{aligned}$$

т.е.  $n$ -мерная плотность вероятности определяет вероятность прохождения случайного процесса  $\zeta(t)$  через  $n$  щелей, высотой  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Очевидно, что чем больше порядок  $n$  закона распределения СП, тем больше информации о свойствах СП он содержит. При устремлении  $n$  к бесконечности  $n$ -мерная плотность вероятности преобразуется в функционал вероятности  $W\{\xi(t)\}$ , содержащий всю возможную информацию о случайном процессе.

Наиболее важными свойствами многомерных плотностей распределения вероятностей (ПРВ) являются следующие:

1. Они имеют размерность обратную  $n$ -й степени измеряемой величины (в частности, « $1/V^n$ » для случайно изменяющихся напряжений и « $1/A^n$ » для токов) и принимают значения

$$W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0. \quad (1.16)$$

2. Функция распределения может быть рассчитана по плотности вероятности СП в соответствии с правилом

$$F_{\xi}(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*; t_1, t_2 \dots t_n) = \int_{-\infty}^{x_1^*} \int_{-\infty}^{x_2^*} \dots \int_{-\infty}^{x_n^*} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1.17)$$

3. Свойство нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (1.18)$$

4. Свойство согласованности (имеющее схожий смысл с соотношением (1.14))

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-m) \text{ раз}} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_m \dots x_n; t_1, t_2, \dots, t_m \dots t_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n = W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m). \quad (1.19)$$

Как уже упоминалось страницей выше,  $n$ -мерная плотность вероятности не является исчерпывающей характеристикой СП, однако существуют отдельные типы случайных процессов, вероятностные свойства которых полностью определяются законами распределения конечных порядков.

Простейшим классом подобных процессов являются процессы без последействия; они характеризуются независимостью значений, наблюдаемых в разные моменты времени. Соответственно, подобные процессы полностью определяются своей одномерной плотностью вероятности. Действительно, их многомерная ПРВ на основе теоремы умножения вероятностей рассчитывается как

$$W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n W_{\xi}(x_i; t_i). \quad (1.20)$$

ПРВ (1.20) характерна для СП, близких по свойствам к белому шуму (см. далее п. 2.5.1).

Упрощенный вид многомерная ПРВ имеет и для марковских СП; вероятностные характеристики подобных процессов полностью определяются их двумерными ПРВ. Для марковских процессов условная плотность вероятности СП для произвольного момента времени  $t_n$  полностью и однозначно определяется его поведением в предшествующий момент времени

$$W_{\xi}(x_n; t_n | x_{n-1}, \dots, x_{n-k}; t_{n-1}, \dots, t_{n-k}) = W_{\xi}(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}), \quad (1.21)$$

а многомерная ПРВ рассчитывается как

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= W_{\xi}(x_1; t_1) \cdot W_{\xi}(x_2; t_2 | x_1, t_1) \times \dots \times W_{\xi}(x_n; t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где условные ПРВ определяются через плотности вероятности не выше второго порядка

$$W_{\xi}(x_k; t_k | x_i, t_i) = \frac{W_{\xi}(x_k, x_i; t_k, t_i)}{W_{\xi}(x_i; t_i)}. \quad (1.23)$$

## 1.4. Числовые характеристики случайных процессов

Многомерные законы распределения несут в себе большой объем информации о поведении СП, однако это означает, что для экспериментального определения (оценивания) многомерных ФРВ или ПРВ требуется очень большой объем исходных данных. Вместе с тем, для решения многих практических задач можно обойтись заметно меньшим объемом сведений; подобными обобщенными показателями, характеризующими свойства СП, могут служить их математическое ожидание, дисперсия, мода и другие величины, называемые числовыми характеристиками.

Многие числовые характеристики являются частными случаями начальных и центральных моментов распределения. Начальным моментом  $k$ -го порядка СП  $\xi(t)$  называют детерминированную функцию времени, определяемую формулой

$$m_k \{ \xi(t_1) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k W_\xi(x_1, t_1) dx_1. \quad (1.24)$$

Величины  $m_k \{ \xi(t_1) \}$  характеризуют зависимость от времени среднего арифметического  $k$ -х степеней значений СП, наблюдаемых в момент времени  $t_1$ . Наиболее востребованными среди них являются **математическое ожидание**

$$M_\xi(t_1) = m_1 \{ \xi(t_1) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 W_\xi(x_1, t_1) dx_1, \quad (1.25)$$

которое характеризует непосредственно среднее арифметическое наблюдаемых значений и **начальный момент второго порядка**

$$m_2 \{ \xi(t_1) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 W_\xi(x_1, t_1) dx_1, \quad (1.26)$$

определяющий среднее квадратов наблюдаемых значений СП.

Центральным моментом  $k$ -го порядка называют функцию времени, определяемую формулой

$$\mu_k \{ \xi(t_1) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M_\xi(t_1))^k W_\xi(x_1, t_1) dx_1 . \quad (1.27)$$

Наиболее востребованной среди центральных моментов распределения является **дисперсия**, характеризующая степень отклонения значений случайного процесса от его математического ожидания

$$D_\xi(t_1) = \mu_2 \{ \xi(t_1) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M_\xi(t_1))^2 W_\xi(x_1, t_1) dx_1 . \quad (1.28)$$

Определить по внешнему виду реализаций СП характер изменения его математического ожидания и дисперсии СП, как правило, не слишком сложно. К примеру, среднее арифметическое значений СП, представленного набором реализаций на рис. 1.3, вдоль оси времени понижается. Это позволяет предположить, что изменение вдоль оси времени математического ожидания может происходить в соответствии с показанной на том же рисунке линией  $M_\xi(t)$ .

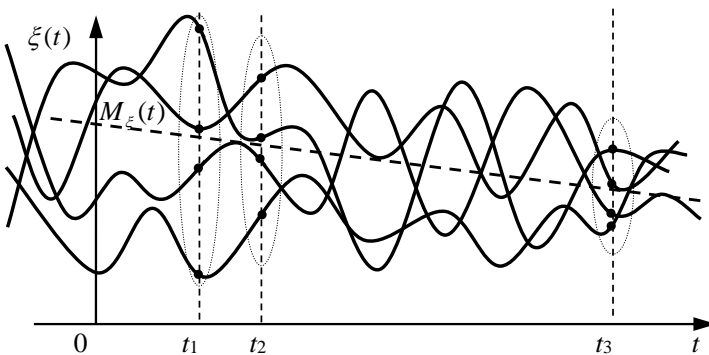


Рис. 1.3. К пониманию понятий математического ожидания и дисперсии случайного процесса

По рис. 1.3 можно заметить, что разброс значений СП относительно линии  $M_{\xi}(t)$  также снижается, а это означает, что и дисперсия процесса для более поздних моментов времени принимает меньшие значения.

В целом, свойства математического ожидания, дисперсии и иных одномерных характеристик СП аналогичны соответствующим свойствам для случайных величин [1] и кратко перечислены в прил. 5. Характеристики же, базирующиеся на двумерных законах распределения будут подробно исследоваться в следующем разделе пособия.

### 1.5. Классификация случайных процессов

Случайные процессы, свойства которых изменяются во времени произвольным образом, называются **нестационарными**. Процессы, свойства которых не зависят от момента начала отсчета времени и остаются неизменными вдоль всей временной оси, называются **стационарными**.

#### Свойства стационарных СП:

У стационарных процессов одномерная функция распределения, характеризующая вероятность наблюдения реализаций, проходящих ниже заданного порога  $x$ , остается неизменной вдоль всей временной оси, а потому аргумент  $t$  называется избыточным

$$F_{\xi}(x;t) = F_{\xi}(x). \quad (1.29)$$

Аналогично, одномерная плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсия стационарных СП не зависят от времени

$$W_{\xi}(x;t) = \frac{\partial F_{\xi}(x;t)}{\partial x} = W_{\xi}(x). \quad (1.30)$$



$$M_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x W_{\xi}(x, t) dx = M_{\xi}, \quad (1.31)$$

$$D_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi}(t))^2 W_{\xi}(x, t) dx = D_{\xi} \quad (1.32)$$

Двухмерные функция распределения и плотность вероятности зависят не от размещения сечений  $t_1$  и  $t_2$  на оси времени, а лишь от интервала  $\tau = t_2 - t_1$  между ними

$$F_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\} = F_{\xi}(x_1, x_2; \tau). \quad (1.33)$$

### Пример 1: Стационарный нормальный (гауссовский) СП

Нормальным называют СП,  $n$ -мерная плотность распределения вероятностей которого имеет вид

$$W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sigma(t_1) \dots \sigma(t_n) \cdot (2\pi)^{n/2} |\mathbf{r}|^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2|\mathbf{r}|} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{x_i - M_{\xi}(t_i)}{\sigma(t_i)} \cdot \frac{x_j - M_{\xi}(t_j)}{\sigma(t_j)} \right\} \quad (1.34)$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $r_{ij}$ , а  $|\mathbf{r}|$  – определитель матрицы СП, состоящей из коэффициентов корреляции [1, (6.37)] значений СП, наблюдаемых в моменты времени  $t_i$  и  $t_j$ .

Если все входящие в (1.34) математические ожидания являются совпадающими константами  $M_{\xi}(t_i) = M_{\xi} = \text{const}$ , а элементы корреляционной матрицы зависят лишь от интервала между временными сечениями  $r_{ij} = r(|t_j - t_i|)$ , то анализируемый СП оказывается стационарным. Двумерная плотность вероятности стационарного нормального случайного процесса имеет вид

$$W_{\xi}(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2(\tau)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(x_1 - M_{\xi})^2 - 2r(\tau)(x_1 - M_{\xi})(x_2 - M_{\xi}) + (x_2 - M_{\xi})^2}{2\sigma^2(1-r^2(\tau))}\right\}, \quad (1.35)$$

где  $r(\tau)$  – нормированная корреляционная функция СП (см. ниже (2.20)).

### Эргодические СП и их свойства:

**Эргодическими** называют стационарные СП, состоящие лишь из однотипных реализаций, по каждой из которых путём её соответствующего усреднения вдоль оси времени можно определить любую вероятностную характеристику всего СП. Для эргодических процессов определяемая  $F_{\xi}(x)$  вероятность проявляет себя в виде среднего времени, которое каждая из реализаций данного СП проводит ниже уровня  $x$

$$F_{\xi}(x; t) = F_{\xi}(x) = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot T_{\left[\xi^{(i)}(t) < x\right]}. \quad (1.36)$$

а плотность вероятности будет показывать отношение частоты наблюдения значений из интервала  $[x; x + \Delta x]$  к ширине этого интервала  $\Delta x$

$$W_{\xi}(x; t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T_{набл} \rightarrow \infty}} \frac{T_{\left[x \leq \xi^{(i)}(t) < x + \Delta x\right]}}{T_{набл} \cdot \Delta x}. \quad (1.37)$$

Математическое ожидание эргодических СП совпадает со средним по времени значением – постоянной составляющей любой из реализаций

$$M_{\xi}(t) = M_{\xi} = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)}. \quad (1.38)$$

Дисперсия эргодических СП совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций СП

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi} = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \left( \xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)} \right)^2 dt = P_{\text{сп} \sim \xi^{(i)}}. \quad (1.39)$$

Ещё раз подчеркнём, что определяемые (1.36)-(1.39) свойства являются проявлением единого принципа: любая характеристика эргодического СП может быть получена путем соответствующего усреднения по времени (на интервале бесконечной протяженности) произвольной реализации этого процесса. Тот же самый принцип можно выразить и иначе: для эргодических процессов “среднее по времени” любой из реализаций совпадает со “средним по ансамблю реализаций процесса”.

На практике правила (1.36)-(1.39) удаётся применять наиболее эффективно для эргодических процессов, реализации которых являются периодическими функциями времени. При этом нет необходимости в устремлении времени наблюдения к бесконечности; в качестве интервала усреднения достаточно использовать один произвольный период любой реализации. В частности, для периодических сигналов формулы расчета числовых характеристик могут быть записаны в форме:

$$M_{\xi} = \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\text{п}}} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)}. \quad (1.40)$$

$$D_{\xi} = \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\text{п}}} \left( \xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)} \right)^2 dt = P_{\text{сп} \sim \xi^{(i)}}. \quad (1.41)$$

*Примечание: Периодические колебания со случайной начальной фазой, распределенной равномерно в пределах периода, являются эргодическими СП. Равновероятные значения фазы гарантируют одинаковое «поведение» СП в любой точке оси времени, т.е. стационарность сигнала. А тот факт, что реализации отличаются друг от друга лишь временным смещением, которое при усреднении по времени на бесконечном интервале теряет свою значимость, позволяет утверждать, что все подобные сигналы – эргодические.*

*Из непериодических сигналов эргодическими оказываются СП, для которых выполняется условие Слуцкого [8]:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T K(\tau) d\tau = 0,$$

*где  $K(\tau)$  – ковариационная функция СП, о которой будет говориться в следующем разделе этого учебного пособия.*

## 2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 2.1. Назначение и свойства корреляционных характеристик

Введенные в п. 1.3 многомерные вероятностные характеристики несут в себе информацию о возможности принятия СП тех или иных значений на последовательности моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Подобная информация позволяет судить о динамике развития СП вдоль оси времени, однако сложность (многомерность) функций  $F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  и  $W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  существенно осложняет их практическое использование. Вместе с тем, если для исследования статистической взаимосвязи между наблюдаемыми в разные моменты времени значениями СП использовать рассмотренные ранее [1, с. 153-156] понятия корреляции и ковариации, то можно получить пусть и грубый (упрощенный), но весьма действенный и практичный механизм анализа динамики развития СП во времени.

2.1.1. **Корреляционная функция** определяется величиной взаимной корреляции значений случайного процесса в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$

$$B_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot W_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (2.1)$$

Для стационарных случайных процессов, свойства которых не изменяются вдоль оси времени, она зависит лишь от продолжительности временного интервала между контролируемыми моментами времени  $\tau = t_2 - t_1$  и характеризует степень линейной взаимосвязи между двумя значениями, разнесенными во времени на интервал  $\tau$ . Как следствие:

1.  $B_\xi(\tau)$  является четной функцией аргумента  $\tau$ .

2.  $B_{\xi}(\tau)$  имеет размерность квадрата случайной величины, в частности,  $V^2$  – для напряжения и  $A^2$  – для тока.

3. Значение, принимаемое корреляционной функцией в начале координат, равно второму начальному моменту процесса, что для эргодических случайных процессов соответствует полной средней мощности любой из реализаций процесса

$$B_{\xi}(0) = m_2\{\xi(t)\} \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t)]^2 dt. \quad (2.2)$$

Отметим, что для эргодических СП, реализации которых являются периодическими функциями времени, в соотношениях (1.38), (1.39) и им аналогичных достаточно осуществлять усреднение во времени лишь на одном произвольном периоде сигнала, например

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{T_n} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_n} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t-\tau) dt. \quad (2.3)$$

Также корреляционная функция  $B_{\xi}(\tau)$  подчиняется теореме Винера-Хинчина, о которой будет говориться в п. 2.3.

2.1.2. Родственной к  $B_{\xi}(\tau)$  является **ковариационная функция**, отличающаяся от (2.1) компенсацией математического ожидания процесса

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M_{\xi}) \cdot (x_2 - M_{\xi}) \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (2.4)$$

и характеризующая степень линейной взаимосвязи между значениями переменной составляющей процесса, наблюдаемыми через временной интервал  $\tau$  друг от друга. Ковариационная функция связана с корреляционным соотношением

$$K_{\xi}(\tau) = B_{\xi}(\tau) - M_{\xi}^2, \quad (2.5)$$

а её значение при  $\tau = 0$  совпадает с дисперсией СП, которая, в свою очередь, для эргодических СП совпадает со средней мощностью переменной составляющей каждой из реализаций

$$K_{\xi}(0) = D_{\xi} \rightarrow P_{\xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)}]^2 dt. \quad (2.6)$$

Для обоснования следующего важного свойства ковариационной функции рассмотрим вполне понятное утверждение

$$m_1 \{ [(x_1 - M_{\xi}) \pm (x_2 - M_{\xi})]^2 \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(x_1 - M_{\xi}) \pm (x_2 - M_{\xi})]^2 \times \\ \times W_{\xi}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \geq 0.$$

Раскрывая квадрат разности в подынтегральном выражении, это утверждение можно переписать в виде

$$m_1 \{ (x_1 - M_{\xi})^2 \} + m_1 \{ (x_2 - M_{\xi})^2 \} \pm 2 \cdot m_1 \{ (x_1 - M_{\xi})(x_2 - M_{\xi}) \} \geq 0$$

где первые два слагаемых можно рассматривать как значения ковариационной функции при  $\tau = 0$  (когда  $x_1$  и  $x_2$ , очевидно, совпадают), а последнее – как её же значение при произвольном  $\tau$ . Таким образом, оказывается доказанным соотношение

$$K_{\xi}(0) \geq \pm K_{\xi}(\tau) \Big|_{\tau \neq 0}. \quad (2.7)$$

Это соотношение имеет простой физический смысл:

«Взаимозависимость значений в разные моменты времени не может быть больше, чем в совпадающие, поэтому значения, принимаемые корреляционной и ковариационной функциями при  $\tau \neq 0$ , не могут превышать их значение в начале координат». Аналогичное соотношение справедливо и для корреляционных функций, и более аккуратно может быть сформулировано с использованием абсолютных значений, а именно для любого стационарного случайного процесса справедливо

$$B_{\xi}(0) \geq \left| B_{\xi}(\tau) \right|_{\tau \neq 0}, \quad K_{\xi}(0) \geq \left| K_{\xi}(\tau) \right|_{\tau \neq 0}. \quad (2.8)$$

Некоторые прочие особенности корреляционных характеристик приведены в сводной таблице свойств в конце данного подраздела.

*Примечание: В разных научных школах названия (и/или способы формального определения) используемых понятий могут немного различаться, поэтому, используя разные литературные источники, следует обязательно перепроверять: соответствуют ли применяемые там понятия введенным выше определениям (2.1) и (2.4)?*

## **2.2. Спектральные характеристики случайных процессов**

2.2.1. Описание свойств СП в частотной области имеет ряд особенностей. Если временные и спектральные характеристики детерминированных сигналов являются взаимнооднозначными, т.е. конкретный спектр соответствует лишь одному сигналу, который по этому спектру может быть однозначно восстановлен, то ожидать, что по спектральным характеристикам СП можно будет восстанавливать отдельные реализации – бессмысленно. Ведь подобные характеристики должны характеризовать СП «в целом», т.е. одна характеристика должна соответствовать бесконечной совокупности реализаций, выделяя и усредняя характерные для них общие качества и отвергая сугубо индивидуальные различия. В первую очередь, подобные различия касаются спектра фаз, который для различных реализаций, как правило, хаотично изменяется. С учетом этого, спектральные характеристики СП должны сохранять информацию о распределении амплитуд и не должны зависеть от фаз спектральных составляющих отдельных реализаций.

Хотя спектры можно рассчитывать для реализаций произвольных СП, в случае нестационарных СП характеристики оказываются достаточно сложными, зависящими как от частот, так и от временных интервалов, для которых осуществляется наблюдение. Подобные случаи и характеристики выходят за рамки настоящего пособия, поэтому далее ограничимся рас-



смотрением лишь стационарных процессов. Фрагмент  $i$ -й реализации подобного СП, ограниченный протяженностью интервала наблюдения  $T$ , будет обладать конечной энергией  $\mathcal{E}_T^{(i)}$ , для расчета которой можно (с использованием известного равенства Парсеваля) предложить временной и частотный подходы

$$\mathcal{E}_T^{(i)} = \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T)|^2 df,$$

где  $\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(i)}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$  – комплексная спектральная плотность анализируемого отрезка  $i$ -й реализации. Тогда всей бесконечно протяженной  $i$ -й реализации стационарного СП можно поставить в соответствие среднюю мощность

$$P_{\text{полн}}^{(i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t)]^2 dt \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T)|^2 df \right\}.$$

Для получения же средней мощности процесса «в целом» записанные выше величины следует усреднить по всем возможным его реализациям. Средние мощности разных реализаций СП, безусловно могут заметно отличаться друг от друга, но для любых реально существующих процессов они будут оставаться конечными по величине, что означает ограниченность по величине и усредняемых слагаемых. Это позволяет менять местами операции усреднения и предельного перехода:

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot |\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T)|^2 \right\} \right\} df. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) показывает, что средняя мощность реализаций стационарного СП складывается из бесконечно большого числа слагаемых, характеризующих распределение этой мощности вдоль оси частот и не зависящих от фазового спектра отдельных реализаций, что позволяет рекомендовать

подобные слагаемые в качестве основы спектрального описания случайных процессов.

2.2.2. **Спектральная плотность мощности СП** характеризует среднее распределение мощности его реализаций вдоль оси частот и численно определяется выражением

$$S_{\xi}(f) = m_1 \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) \right|^2 / T \right\}, \quad (2.10)$$

где 
$$\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(i)}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (2.11)$$

– комплексные спектральные плотности отдельных реализаций процесса  $\xi(t)$ , ограниченных по протяженности интервалом наблюдения  $T$ .

Наиболее важные свойства спектральной плотности мощности (СПМ) состоят в следующем:

1.  $S_{\xi}(f)$  является четной (двухсторонней) функцией частоты  $f$  и принимает неотрицательные действительные значения.

2.  $S_{\xi}(f)$  характеризует мощность, приходящуюся на каждый герц оси частот, и для напряжений имеет размерность  $\text{В}^2/\text{Гц}$ , а для токов –  $\text{А}^2/\text{Гц}$  (даже если частоту измерять в  $\text{рад/с}$ ).

3. Если реализации процесса  $\xi(t)$  обладают дискретными спектральными составляющими, то спектральная плотность мощности на этих частотах выражается  $\delta$ -функциями. В частности, для процессов с ненулевым математическим ожиданием

$$S_{\xi}(f) = S_{\xi_{-}}(f) + M_{\xi}^2 \cdot \delta(f), \quad (2.12)$$

$$S_{\xi}(\omega) = S_{\xi_{-}}(\omega) + 2\pi \cdot M_{\xi}^2 \cdot \delta(\omega).$$

4. Полная средняя мощность реализаций случайного процесса  $\xi(t)$  может быть определена путем интегрирования СПМ вдоль всей оси частот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = m_2\{\xi(t)\} = D_{\xi} + M_{\xi}^2 \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} \quad (2.13)$$

5. Спектральная плотность мощности подчиняется теореме Винера-Хинчина.

Таблица 1

## Основные свойства корреляционных и спектральных характеристик стационарных СП

| Свойство                              | Для корреляционных характеристик   | Для спектральных характеристик  |
|---------------------------------------|--|---|
| Область определения, область значений | $-\infty < \tau < +\infty$ ; $B(\tau)$ и $K(\tau)$ - четные, вещественные; размерность – $B^2, A^2$  | $-\infty < \omega < +\infty$ ; $S(\omega)$ - четная, вещественная; размерность – $B^2/\Gamma_{\text{ц}}, A^2/\Gamma_{\text{ц}}$   |
| Ограничения                           | $ B(\tau)  \leq B(0),  K(\tau)  \leq K(0)$ ;<br>положительно определенная (см. $\rightarrow$ )   | $S(\omega) \geq 0$  |
| Взаимосвязь                           | $B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega$<br>$B(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S(\omega) \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega \right\}$ | $S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$<br>$S(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} B(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}$ |
| Для периодических эргодических СП     | $B(\tau) = \frac{1}{T_n} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_n} \xi_n^{(i)}(t) \cdot \xi_n^{(i)}(t-\tau) dt$   | $S(\omega) = \pi \sum_{i=1}^n P_i (\delta(\omega + \omega_i) + \delta(\omega - \omega_i)),$<br>где $P_i$ – мощности гармоник спектра  |
| Влияние постоянной составляющей       | Не влияет на $K(\tau)$ ; $B(\tau) = K(\tau) + M_{\xi}^2$   | $S(\omega) = S_{\sim}(\omega) + 2\pi M_{\xi}^2 \delta(f)$ (см. (2.12))  |
| Связь с мощностью                     | $P_{\text{ср полн}} = B_{\xi}(0)$ ; $P_{\text{ср } \sim} = D_{\xi} = K_{\xi}(0)$   | $P_{\text{ср } \sim} = D_{\xi} = \frac{1}{\pi} \int_{0+0}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega$  |

### 2.3. Теорема Винера-Хинчина

Теорема, доказанная в 1934 году советским математиком А.Ю. Хинчиным и, независимо от него, американским ученым Н. Винером, утверждает: “Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса связаны интегральным преобразованием Фурье”

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (2.14)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot e^{+j2\pi f\tau} df. \quad (2.15)$$

Для обоснования данного утверждения учтем, что квадрат модуля Фурье-спектра  $|\dot{G}_{\xi(t)}(f, T)|^2$ , входящий в (2.10) может быть записан в виде произведения двух комплексно-сопряженных сомножителей, а само определение (2.10) можно представить в виде (здесь « $+j\omega t_1$ » следствие комплексного сопряжения)

$$m_1 \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{G}_{\xi(t)}(f, T)|^2}{T} \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} m_1 \{ \xi(t_2) \cdot \xi(t_1) \} \cdot e^{-j\omega t_2} \cdot e^{+j\omega t_1} dt_1 dt_2 \right\}$$

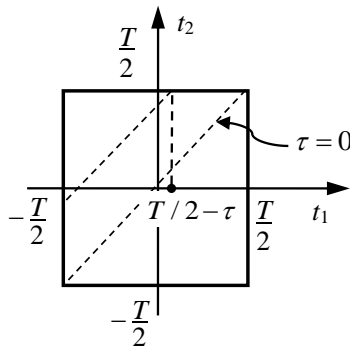


Рис. 2.1. Выбор пределов интегрирования при расчете СПМ

Введем замену переменных  $\tau = t_2 - t_1$ ; тогда для стационарного процесса  $\xi(t)$  справедливо  $m_1 \{ \xi(t_2) \cdot \xi(t_1) \} = B_\xi(\tau)$ , а для определения области интегрирования при использовании новой переменной  $\tau$ , учтем следующее:

а) Каждому фиксированному значению  $\tau$  внутри исходной квадратной области интегрирования соответствует диагональная линия, параллельная показанной на рис. 2.1 главной диагонали, где  $\tau = 0$ . В треугольной области, лежащей выше и левее этой линии раздела, выполняется  $t_2 > t_1$ , а  $\tau$  изменяется от 0 до  $T$ . В нижней правой треугольной области, напротив,  $t_2 < t_1$ , а переменная  $\tau$  изменяется от  $-T$  до 0.

б) Если новую переменную  $\tau$  использовать для замены величины  $t_2$ , то диапазон интегрирования по переменной  $t_1$  в левом верхнем треугольнике будет всегда стартовать с левой границы  $t_1 = -T/2$  и завершаться на высоте  $t_2 = T/2$  при  $t_1 = T/2 - \tau$ .

в) в правом нижнем треугольнике линии интегрирования стартуют с границы  $t_2 = -T/2$ , чему соответствует  $t_1 = -T/2 - \tau$ , и завершаются при  $t_1 = T/2$ .

Таким образом, с учетом  $d\tau = dt_2$ , выражение для расчета спектральной плотности мощности СП приобретает вид:

$$S_\xi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{T/2-\tau} \int_{-T/2}^{T/2-\tau} B_\xi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt_1 d\tau + \int_{-T/2-\tau}^0 \int_{-T/2}^{T/2} B_\xi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt_1 d\tau \right) \right\},$$

а после расчета внутреннего интеграла по  $t_1$  получаем

$$S_\xi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^T (T - \tau) B_\xi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-T}^0 (T + \tau) B_\xi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \right\} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T \frac{T-|\tau|}{T} B_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-T}^0 \frac{T-|\tau|}{T} B_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что выражения (2.14), (2.18) являются лишь одним из многих возможных вариантов записи теоремы Винера-Хинчина. Так, с учетом чётности обеих функций, оказываются также справедливыми варианты записи, приведенные ниже

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (2.17)$$

Пример 2: Найдем корреляционную функцию стационарного СП с гауссовской спектральной плотностью мощности

$$S_{\xi}(\omega) = S_0 \cdot \exp\{-\beta\omega^2\}.$$

Воспользуемся формулой обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{-\beta\omega^2} e^{+j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \cdot e^{-\left(\sqrt{\beta}\omega - \frac{j\tau}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{j\tau}{2\sqrt{\beta}}\right)^2} d\omega = \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{4\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\omega - j\tau/2\beta)^2}{2 \cdot (0,5/\beta)}\right) d\omega = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{4\beta}} \cdot \sqrt{0,5/\beta} \end{aligned}$$

Здесь для вычисления значения интеграла в нем была выделена часть, практически совпадающая с плотностью вероятности нормальной случайной величины (с параметром  $\sigma = \sqrt{0,5/\beta}$ ), и использовано свойство нормировки из первой части настоящего пособия. Окончательно корреляционная функция принимает вид :

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{S_0}{2\sqrt{\pi\beta}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\beta}\right).$$

Следствием теоремы Винера-Хинчина является свойство положительной определенности корреляционной функции случайного процесса. Положительная определенность означает, что корреляционной функцией может быть лишь такая четная функция аргумента  $\tau$ , преобразование Фурье от которой неотрицательно на всех частотах.

## 2.4. Понятия ширины спектра и интервала корреляции случайного процесса

Практической шириной спектра случайного процесса  $\xi(t)$  называют величину

$$Ш_f = \frac{1}{\max_{f>0} S_{\xi}(f)} \cdot \int_{0_{+0}}^{+\infty} S_{\xi}(f) df. \quad (2.18)$$

Смысл этого определения состоит в том, что если взять процесс  $\eta(t)$  с прямоугольным спектром (рис. 2.2), ширина которого в области положительных частот равна  $Ш_f$ , а максимальное значение совпадает с максимумом  $S_{\xi}(f)$ , то процессы  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  будут обладать одинаковыми средними мощностями. Нижний предел интегрирования в (2.18) равный « $0_{+0}$ » указывает на то, что постоянная составляющая в расчете ширины спектра не участвует.

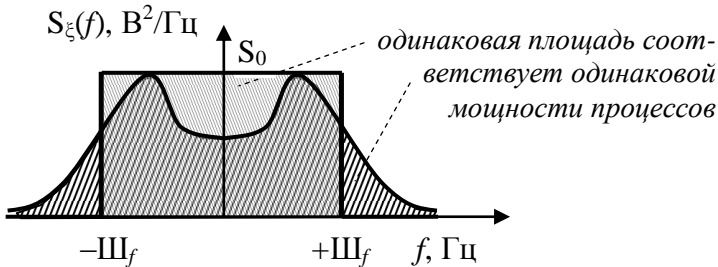


Рис. 2.2. Определение практической ширины спектра СП

Интервалом корреляции случайного процесса  $\xi(t)$  называют величину

$$\tau_{\kappa} = \frac{1}{K_{\xi}(0)} \cdot \int_0^{+\infty} |K_{\xi}(\tau)| d\tau = \int_0^{+\infty} |r_{\xi}(\tau)| d\tau, \quad (2.19)$$

где

$$r_{\xi}(\tau) = \frac{K_{\xi}(\tau)}{K_{\xi}(0)} \quad (2.20)$$

– нормированная корреляционная функция или **коэффициент корреляции** СП.

За счет наличия модуля в подынтегральном выражении интервал корреляции определяется скоростью убывания абсолютных значений корреляционной функции и характеризует временной интервал предсказуемости значений случайного процесса. В соответствии со свойствами преобразования Фурье малый интервал корреляции соответствует процессам с широким спектром и быстро изменяющимися реализациями. Напротив, процессы с большим интервалом корреляции имеют узкий спектр и изменяются медленно, оставаясь достаточно предсказуемыми на протяжении значительного интервала времени.

Для процессов с нулевым математическим ожиданием, неотрицательной (при всех  $\tau$ ) корреляционной функцией и максимумом спектра на нулевой частоте между шириной спектра и интервалом корреляции существует жесткое соответствие

$$Ш_f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\xi}(f)}{S_{\xi}(0)} df = \frac{m_2\{\xi\}}{2 \cdot S_{\xi}(0)} = \frac{B_{\xi}(0)}{2 \cdot \left( 2 \cdot \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau \right)} = \frac{K_{\xi}(0)}{4 \cdot \int_0^{+\infty} |K_{\xi}(\tau)| d\tau}$$

т.е.

$$Ш_f = \frac{1}{4 \cdot \tau_{\kappa}}. \quad (2.21)$$



## 2.5. Типовые корреляционные и спектральные свойства помех и шумов

На качество работы большинства систем связи и на возможность извлечения информации из колебаний электромагнитного поля большое влияние оказывают помехи. Наиболее важной характеристикой, по которой классифицируют помехи, является их спектральная плотность мощности. По этому показателю они подразделяются, как минимум, на три категории:

1. Помехи с узкополосным спектром – это помехи от работающих соседних радиостанций, фон промышленной частоты (50 Гц) от выпрямителей, наводки электросети и т.д.

2. Импульсные помехи – это атмосферные, космические, а также промышленные помехи, появляющиеся вследствие искрения контактов в электродвигателях, двигателях внутреннего сгорания и т.п. Спектр одиночного импульса таких помех сплошной, широкополосный, а его интенсивность падает с увеличением частоты.

3. Флуктуационные помехи – это тепловые и дробовые шумы, внутренние шумы аппаратуры, спектральная плотность мощности которых равномерна в очень широкой полосе частот. Подобные помехи возникают как результат нерегулярного воздействия огромного числа возмущающих хаотических импульсов, следующих друг за другом столь часто, что реакция цепи на очередной импульс не успевает затухнуть к моменту возникновения следующего.

Вместе с тем, начать изучение свойств помех полезно с понятия белого шума.

2.5.1. **Белым шумом** называется случайный процесс, спектральная плотность мощности которого остается постоянной на всех частотах

$$S_{\zeta}(f) = N_0. \quad (2.22)$$

Корреляционная функция такого процесса имеет вид

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \cdot e^{+j2\pi f\tau} df = N_0 \cdot \delta(\tau), \quad (2.23)$$

т.е. его сколь угодно близко расположенные отсчеты не коррелированы. Иначе говоря, значение белого шума невозможно предсказать в момент  $t_2$ , даже сколь угодно близкий к отсчету  $\xi(t_1)$ . Следует иметь в виду, что белый шум – это абстрактная математическая модель и в реальности не встречается, т.к. он должен был бы обладать бесконечной средней мощностью. Полезность понятия белого шума заключается в том, что для наблюдения и обработки случайных процессов в радиотехнике используются реальные цепи, обладающие конечной полосой пропускания, а ширина спектра многих реально существующих шумов существенно превышает эту полосу пропускания, так что по отношению к используемым устройствам обработки реальные шумы вполне допустимо считать белыми.

*Примечание: Одной из активно применяемых в радиотехнике моделей служит нормальный белый шум. Нормальное распределение при некоррелированности даже сколь угодно близких значений означает, что все значения подобного процесса оказываются независимыми в совокупности. Как следствие, плотность вероятности произвольной размерности для нормального белого шума формируется как произведение одномерных нормальных распределений в сечениях процесса.*

**2.5.2. Тепловой шум** возникает преимущественно в активных сопротивлениях вследствие хаотического теплового движения носителей электрических зарядов. Рассмотрим «под микроскопом» внутреннюю структуру проводящего электрический ток материала (рис. 2.3). Несмотря на электрическую нейтральность подобной системы «в целом», вследствие теплового движения электронов внутри материала возникают пере-

менные электромагнитные поля, а на внешних зажимах появляется шумовая разность потенциалов.

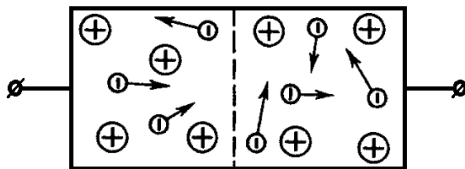


Рис. 2.3. Внутренняя структура проводящего материала

Подробный физический анализ [8] с использованием флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ) и квантовомеханических эффектов показывает, что спектральная плотность мощности теплового шума характеризуется зависимостью

$$S_U(f) = 4kTR \cdot \frac{hf}{kT} \cdot \left( \exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1 \right)^{-1}, \quad (2.24)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура в кельвинах,  $R$  – сопротивление в омах,  $f$  – частота в герцах,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж/с – постоянная Планка.

Частота среза этого затухающего спектра составляет  $f_B \approx kT/h$ .

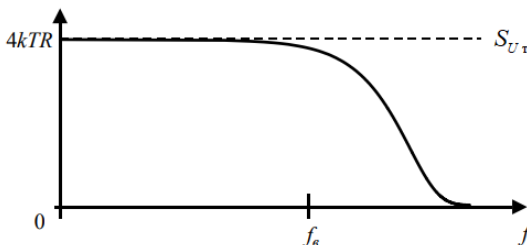


Рис. 2.4. Спектр ЭДС теплового шума

При температуре  $T = 300^\circ\text{K}$  данная частота составляет около 6,2 ТГц, что соответствует длине волны в 0,05 мм. Таким образом, вплоть до миллиметрового диапазона волн тепловой шум можно считать «белым», не зависящим от частоты.

Итак, спектр теплового шума чрезвычайно широк из-за высокой «плотности упаковки» зарядов и большой их средней тепловой скорости, и на частотах радиодиапазона интенсивность теплового шума принято характеризовать **формулой Найквиста**, предложенной в 1927 году

$$S_{U_T} = 4kTR. \quad (2.25)$$

2.5.3. **Дробовой шум** возникает в электровакуумных и полупроводниковых приборах вследствие дискретной природы носителей электрического заряда. Ведь при рассмотрении «под микроскопом» постоянный ток можно и нужно рассматривать как интегральный эффект от огромного количества импульсов тока, создаваемых пролетающими через поперечное сечение проводника зарядами. Если бы в нашем распоряжении был прибор, способный регистрировать эффект от пролета единичного носителя заряда, то на его экране мы увидели бы короткий импульс так называемого конвекционного тока  $i_{кон}(t)$ , причем

$$\int_0^{\tau_{np}} i_{кон}(t) dt = e, \quad (2.26)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона. Огромное число подобных импульсов, перекрывающихся друг с другом во времени и составляют в совокупности «постоянный» ток. Представленный, например, в [6] анализ показывает, что спектр импульсов тока оказывается очень широким и остается практически неизменным по интенсивности вплоть до частот в несколько сотен мегагерц, а затем начинает плавно уменьшаться с ростом частоты. Суммарная мощность исследуемых флуктуаций тока, очевидно, зависит от числа импульсов  $i_{кон}(t)$  и, как следствие, от силы тока в проводнике. Итоговое соотношение, определяющее спектральную плотность мощности дробового тока, получило в радиотехнике название **формулы Шотки** и имеет вид

$$S_j = eI_0, \quad (2.27)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона,  $I_0$  – постоянная составляющая тока в проводнике, измеряемая в амперах.

2.5.4. Медленные флуктуации концентрации носителей зарядов в полупроводниках вблизи  $p$ - $n$  переходов могут приводить к возникновению так называемого эффекта мерцания или **фликкер-шумов**. Подобные шумы радикально отличаются от рассматривавшихся выше медленностью протекания процесса, вследствие чего их спектральная плотность мощности существенно зависит от частоты. Условно считают, что фликкер-шум занимает полосу частот от 0,1 герца до 1 килогерца, причем именно на самых низких частотах наблюдается заметный рост СПМ фликкер-шума (подробнее см. [9]).

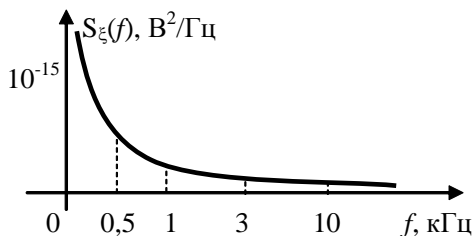


Рис. 2.5. Спектр фликкер-шумов электронных приборов

2.5.5. **Ограниченный по частоте белый шум** является идеализированной моделью низкочастотных шумовых процессов и характеризуется СПМ прямоугольной формы (рис. 2.6)

$$S_{\xi}(f) = \begin{cases} N_0, & |f| \leq F_{\max} \\ 0, & |f| > F_{\max} \end{cases}, \quad (2.28)$$

Воспользовавшись теоремой Винера-Хинчина (2.15), несложно установить, что корреляционная функция такого шума будет иметь *sinc*-образный вид

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-F_{\max}}^{+F_{\max}} N_0 e^{+j2\pi\tau f} df = \frac{N_0}{\pi\tau} \cdot \frac{e^{+j2\pi\tau f}}{+2j} \Big|_{-F_{\max}}^{+F_{\max}} = 2F_{\max} N_0 \operatorname{sinc}(2\pi F_{\max} \tau). \quad (2.29)$$

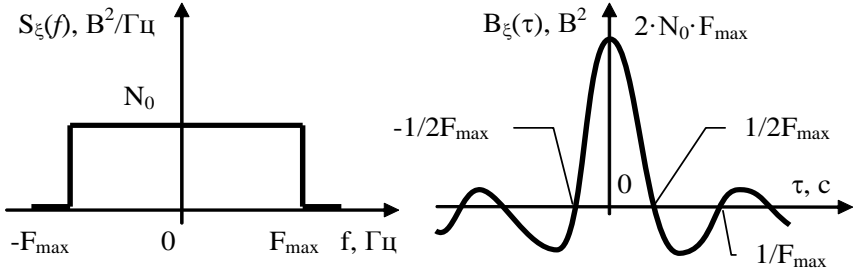


Рис. 2.6. Корреляционные и спектральные характеристики ограниченного по частоте белого шума

Тот факт, что корреляционная функция процесса – знакопеременна, показывает, что реализации шума будут (в вероятностном смысле) квазипериодическими, т.е. состоять из неправильной формы колебаний, где интервалы нарастания и убывания располагаются в среднем через временные интервалы  $\tau > 1/2F_{\max}$ . Поскольку  $\operatorname{sinc}(0) = 1$ , то дисперсия ограниченного по частоте белого шума составит

$$D_{\text{ОЧШ}} = 2F_{\max} N_0. \quad (2.30)$$

2.5.5. На рис. 2.7 представлен **ограниченный по полосе белый шум**. Он является идеализированной моделью шумовых процессов, занимающих узкие полосы частот в небольшой окрестности некоторой центральной частоты  $F_0$ .

Использовать для расчета корреляционной функции выражение (2.15) не слишком выгодно, т.к. потребуются интегрировать два независимых всплеска: в окрестности частоты  $-F_0$  и  $+F_0$ , поэтому воспользуемся аналогом выражения (2.17)

$$\begin{aligned}
B_{\xi}(\tau) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot e^{+j2\pi f\tau} df \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{F_{\min}}^{F_{\max}} N_0 \cdot e^{(+j2\pi\tau)f} df \right\} = \\
&= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{N_0}{\pi\tau} \cdot e^{+j2\pi F_0\tau} \frac{e^{+j\pi\Delta f\tau} - e^{-j\pi\Delta f\tau}}{2j} \right\} = 2\Delta f N_0 \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{\Delta f \cdot \pi\tau} \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{+j2\pi F_0\tau} \right\}
\end{aligned}$$

Таким образом, корреляционная функция ограниченного по полосе белого шума имеет квазигармонический вид

$$B_{\text{ОПБШ}}(\tau) = 2\Delta f N_0 \cdot \operatorname{sinc}(\pi\Delta f\tau) \cdot \cos(2\pi F_0\tau). \quad (2.31)$$

При очень малой ширине спектра СП его корреляционная функция мало отличается от косинусоиды, поэтому реализации подобного СП также будут представлять собой квазигармонические колебания с медленно изменяющимися амплитудой и частотой. По мере расширения спектра форма реализаций становится все более хаотичной, шумоподобной, сохраняя, однако, в среднем подобие периодичности с частотой  $F_0$ .

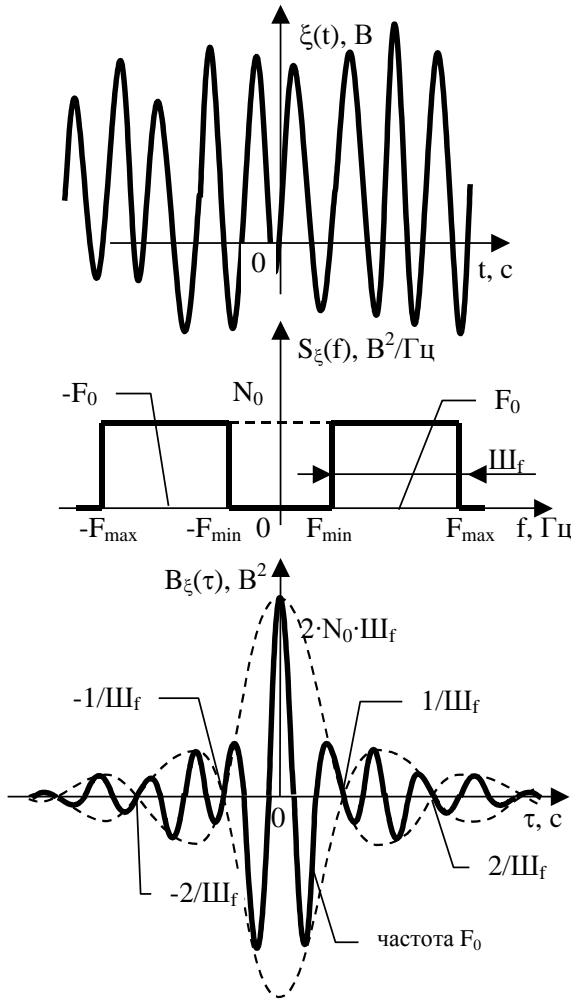


Рис. 2.7. Энергетические характеристики ограниченного по полосе белого шума

2.5.6. Узкополосные случайные процессы, обладают спектральной плотностью мощности, сосредоточенной в полосе частот  $\text{Ш}_\omega$ , ширина которой существенно меньше центральной частоты спектра  $\omega_0$ .



Сопоставим энергетические характеристики низкочастотного и высокочастотного узкополосного процессов, представленных на рис. 2.8. Как следует непосредственно из рисунка, между СПМ процессов имеется соответствие

$$S_{BЧ}(\omega) = S_{HЧ}(\omega + \omega_0) + S_{HЧ}(\omega - \omega_0). \quad (2.32)$$

Используя в соответствии с теоремой Винера-Хинчина преобразование Фурье для расчета корреляционной функции СП, получим

$$B_{BЧ}(\tau) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{BЧ}(\omega) \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_{HЧ}(\omega - \omega_0) \cdot \cos(\omega\tau) d\omega =$$

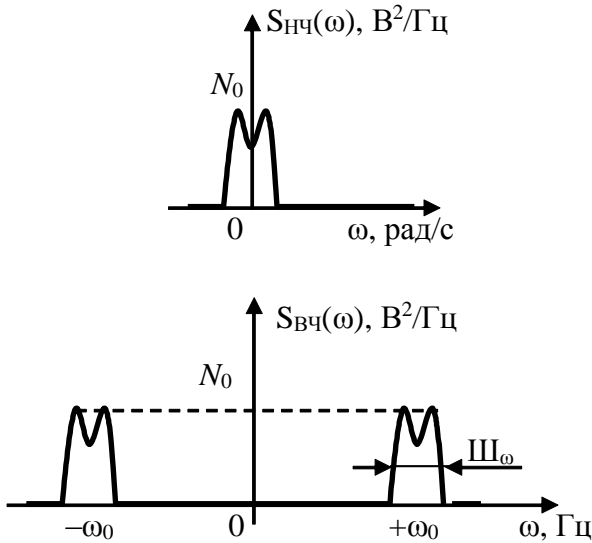


Рис. 2.8. Спектральные плотности мощности низкочастотного и высокочастотного узкополосного процессов

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\infty} S_{HЧ}(x) \cdot \cos((x + \omega_0)\tau) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\omega_0}^{+\infty} S_{HЧ}(x) \cdot \cos(x\tau) \cdot \cos(\omega_0\tau) dx + \right.$$

$$+ \int_{-\omega_0}^{+\infty} \underbrace{S_{НЧ}(x) \cdot \sin(x\tau)}_{\text{нечетная функция}} \cdot \sin(\omega_0\tau) dx \left. \vphantom{\int} \right\} = 2 \cdot B_{НЧ}(\tau) \cdot \cos(\omega_0\tau).$$

В приведенных выше выкладках учтено, что ширина спектра процесса существенно меньше  $\omega_0$ , т.е. в области отрицательных частот составляющие спектра затухают задолго до частоты  $-\omega_0$ , а потому нижний предел интегрирования может быть расширен до минус бесконечности. Это позволяет считать нулевым результат интегрирования синусной компоненты и равным корреляционной функций результат интегрирования косинусной компоненты. Итак, для высокочастотного СП корреляционная функция НЧ-процесса выступает в качестве огибающей

$$B_{ВЧ}(\tau) = 2 \cdot B_{НЧ}(\tau) \cdot \cos(\omega_0\tau). \quad (2.33)$$

Коэффициент «2» в (2.33) появляется вследствие того, что спектр ВЧ-процесса состоит из двух копий спектра НЧ-процесса, т.е. площадь под кривой спектральной плотности мощности у анализируемого ВЧ-процесса в два раза больше.

Отметим, что полученная ранее (в п. 2.5.5) корреляционная функция ограниченного по полосе белого шума также по своей структуре удовлетворяет соотношению (2.33), но приведенный на рис. 2.7 её вид соответствует ситуации, когда ширина спектра процесса не слишком сильно отличается от его центральной частоты. При более строгом выполнении условий узкополосности корреляционная функция приобретает вид, показанный на рис. 2.9; для узкополосного СП в рамках центрального лепестка умещаются сотни и тысячи колебаний заполнения. И чем узкополоснее процесс, тем ближе к строго гармонической оказывается форма корреляционной функции. Данный факт свидетельствует, что и характер взаимосвязи значений СП друг с другом (динамика развития процесса вдоль оси времени) будет мало отличаться от гармонического. Таким образом, все узкополосные процессы представляют собой квазигармонические колебания,

амплитуда и частота которых являются медленными случайными (хаотическими) функциями времени.

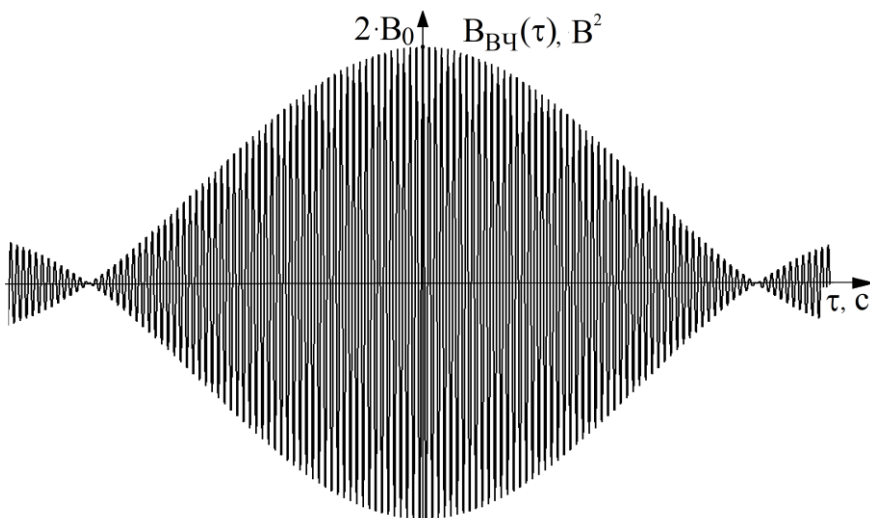


Рис. 2.9. Корреляционная функция узкополосного процесса

## 2.6. Особенности комплексной спектральной плотности реализаций стационарных случайных процессов

Отдельные реализации любого СП являются детерминированными функциями времени, которым с помощью интегрального преобразования Фурье в частотной области можно сопоставить комплексную спектральную плотность

$$\dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{(i)}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (2.34)$$

На реализации наблюдаемых на практике СП, принимающих лишь вещественные значения, операция комплексного сопряжения не может оказывать влияния, поэтому для них справедливо

$$\xi^{(i)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega = [\xi^{(i)}(t)]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi^{(i)}}^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega.$$

Рассмотрим стационарные СП с нулевым средним значением. Равенство  $M_{\xi} = m_1 \{ \xi^{(i)}(t) \} = 0$  должно для них выполняться при любом  $t$ , но со спектральных позиций

$$m_1 \{ \xi^{(i)}(t) \} = \frac{1}{2\pi} \cdot m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 \{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \} \cdot e^{+j\omega t} d\omega,$$

а последнее выражение может тождественно равняться нулю лишь при условии

$$m_1 \{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \} = 0, \quad (2.35)$$

т.е. при нулевом среднем значении комплексной спектральной плотности на всех частотах.

Теперь запишем выражение для корреляционной функции

$$\begin{aligned} m_1 \{ \xi(t) \xi^*(t-\tau) \} &= m_1 \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi^{(i)}}^*(\omega) \cdot e^{-j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 \{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot G_{\xi^{(i)}}^*(\omega) \} \cdot e^{+j(\omega-w)t} \cdot e^{+jw\tau} d\omega dw. \end{aligned}$$

Если входящее в подынтегральное выражение математическое ожидание будет принимать ненулевые значения при  $\omega \neq w$ , то и выражение в целом окажется зависящим как от  $\tau$ , так и от  $t$ . А требование стационарности СП  $m_1 \{ \xi(t) \xi^*(t-\tau) \} = R_{\xi}(\tau)$  будет выполняться лишь при условии

$$B_G(\omega, w) = m_1 \{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot G_{\xi^{(i)}}^*(\omega) \} = 2\pi \cdot S_{\xi}(\omega) \cdot \delta(\omega - w). \quad (2.36)$$

Итак, для стационарных СП функция  $B_G(\omega, w)$ , представляющая собой корреляцию значений комплексной спектральной плотности реализаций процесса на частотах  $\omega$  и  $w$ , должна

иметь вид дельта-функции (см. прил. 4). Значения комплексной спектральной плотности, соответствующие любым двум несовпадающим частотам, обязаны быть некоррелированными между собой. Такой вид корреляционной связи называют дельта-коррелированностью.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Линейные цепи играют важнейшую роль в работе многих радиотехнических систем и устройств. Возможные полезные эффекты и способы анализа изменения характеристик СП при их прохождении через линейные цепи существенно зависят от того, является ли цепь инерционной или безынерционной.

#### 3.1. Прохождение случайных процессов через безынерционные линейные цепи

К безынерционным можно отнести цепи, составленные из резистивных и (применительно к не слишком высоким частотам) из активных элементов: транзисторов, операционных усилителей, электронных ламп и т.п. Подобные цепи позволяют осуществлять лишь ослабление или усиление сигналов, но не могут обладать фильтрующими свойствами. Действительно, импульсная характеристика безынерционной цепи может отличаться от нуля лишь при  $t = 0$ , т.е. обязана быть  $\delta$ -образной

$$g(t) = K_0 \cdot \delta(t), \quad (0.1)$$

а потому их комплексный коэффициент передачи, рассчитываемый при помощи прямого преобразования Фурье, сохраняет неизменное значение вдоль всей оси частот

$$\dot{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 \cdot \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = K_0. \quad (0.2)$$

Случайные процессы на входе и выходе безынерционной цепи отличаются друг от друга лишь масштабами, а потому все их характеристики сохраняют свою форму, отличаясь друг от друга лишь степенью растяжения/сжатия вдоль горизонтальной оси для законов распределения и степенью растяжения/сжатия вдоль вертикальной оси для спектров и корреляционных функций.

## 3.2. Преобразование энергетических характеристик случайных процессов в инерционных линейных цепях

Линейные цепи, включающие в свой состав реактивные элементы (ёмкости, индуктивности), обладают фильтрующими свойствами и являются инерционными, т.е. отклик  $y(t)$ , наблюдаемый в момент времени  $t$  на выходе такой цепи, зависит не только от значения  $x(t)$  воздействующего сигнала в тот же момент времени, но и от значений сигнала на входе цепи в предшествующие моменты времени. Применительно к случайным воздействиям данный факт заметно осложняет задачу определения закона распределения СП на выходе цепи, поэтому анализ реакции цепи на случайное воздействие начнем со спектральных и корреляционных характеристик.

Ограничимся анализом стационарных СП с нулевым средним значением, т.е. с  $M_{\xi} = 0$ . Последнее ограничение не является принципиальным, т.к. при появлении ненулевой постоянной составляющей для анализа отклика достаточно будет учесть коэффициент передачи анализируемой цепи на нулевой частоте.

3.2.1. **Частотный метод** анализа энергетических характеристик СП на выходе линейных цепей базируется на соотношении, связывающем комплексные спектральные плотности детерминированных сигналов на входе и выходе такой цепи

$$\dot{G}_{\eta^{(i)}}(f) = \dot{G}_{\xi^{(i)}}(f) \cdot \dot{K}(f). \quad (3.3)$$

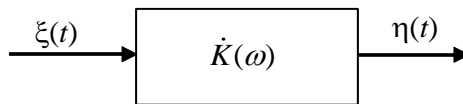


Рис. 3.1. Линейная цепь, характеризуемая комплексным коэффициентом передачи  $\dot{K}(\omega)$

Поскольку в соответствии с определением (2.10) спектральная плотность мощности пропорциональна квадрату амплитудного спектра реализаций СП и не зависит от их фазового спектра, то СПМ процессов на входе и выходе цепи будут связаны соотношением

$$S_{\eta}(f) = S_{\xi}(f) \cdot |\dot{K}(f)|^2. \quad (3.4)$$

Итак, спектральная плотность мощности процесса на выходе линейной цепи пропорциональна квадрату амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) этой цепи.

После расчета СПМ  $S_{\eta}(f)$  корреляционные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (2.14), (2.15).

3.2.2. Для анализа энергетических характеристик отклика линейной цепи на случайное воздействие во временной области целесообразно использовать теоремы о спектрах сигналов. Пусть, к примеру, детерминированные сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  обладают комплексными спектральными плотностями

$$\dot{G}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (3.5)$$

Тогда, согласно теореме о свёртке [6, (2.41)], сигнал  $s(t)$ , спектр которого определяется произведением функций  $\dot{G}_1(\omega)$  и  $\dot{G}_2(\omega)$

$$\dot{G}_s(\omega) = \dot{G}_1(\omega) \cdot \dot{G}_2(\omega), \quad (3.6)$$

может быть во временной области рассчитан посредством интегральной свертки сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) \cdot s_2(t-x) dx. \quad (3.7)$$

Заметим, что входящий в (3.4) квадрат АЧХ цепи может быть (применительно к циклическим частотам  $\omega$ ) записан в виде



$$|\dot{K}(\omega)|^2 = \dot{K}(\omega) \cdot K^*(\omega), \quad (3.8)$$

причем во временной области комплексному коэффициенту передачи  $\dot{K}(\omega)$  соответствует импульсная характеристика цепи

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}(\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega, \quad (3.9)$$

а комплексно-сопряженной величине  $K^*(\omega)$  в соответствии с теоремой об инверсии оси времени [6, (2.30)] будет соответствовать функция

$$g(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(\omega) \cdot (e^{-j\omega t})^* d\omega. \quad (3.10)$$

Это означает, что спектру  $|\dot{K}(\omega)|^2$  во временной области будет соответствовать зависимость  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot g(-(\tau - x)) dx$ . Раскрывая скобки, видим, что образом квадрата АЧХ цепи во временной области служит интеграл от произведения импульсной характеристики цепи на её собственную, задержанную во времени на интервал  $\tau$  копию

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 e^{+j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot g(x - \tau) dx. \quad (3.11)$$

По этой причине характеристику  $R_g(\tau)$  называют **корреляционной функцией импульсной характеристики** линейной цепи.

Применим теперь теорему о свёртке (3.7) к соотношению (3.4). Входящим в его состав спектральным плотностям мощности соответствуют во временной области корреляционные функции входного и выходного процессов. Таким образом, аналогом произведению (3.4) служит во временной области свёртка

$$B_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(x) \cdot R_g(\tau - x) dx. \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) служит основой **временного метода** расчета энергетических характеристик отклика линейной цепи на случайное воздействие. Очевидно, спектральные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по  $B_{\eta}(\tau)$  в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (2.14).

*Пример 3:* Проанализируем энергетические характеристики СП на выходе усилителя малых сигналов с апериодической нагрузкой (рис. 3.2) при воздействии на его вход белого шума.

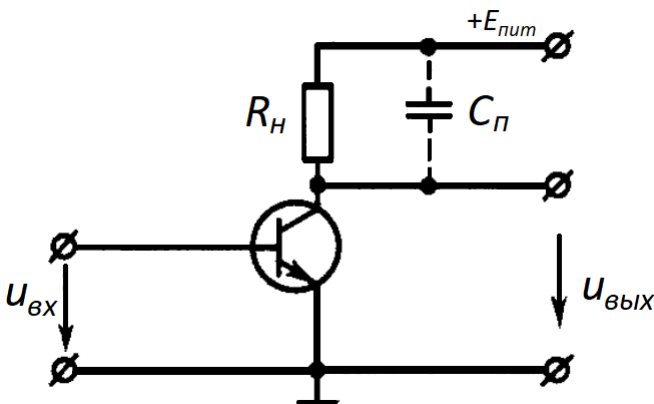


Рис. 3.2. Линейный резистивный усилитель

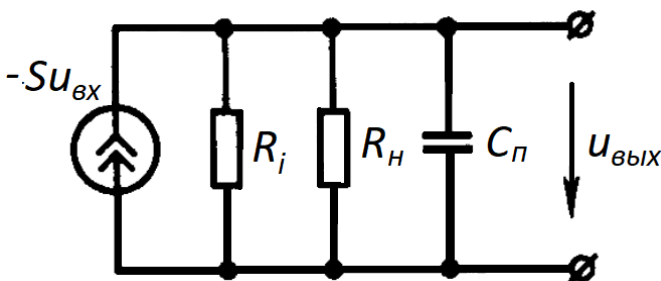


Рис. 3.3. Схема замещения по переменной составляющей линейного резистивного усилителя

Отметим, что показанный на рис. 3.2 пунктиром элемент  $C_{\Pi}$  формально не является частью анализируемой схемы, но отражает факт инерционности транзистора, обязательно проявляющейся по мере роста частоты. Соответственно, этот элемент является неотъемлемой частью схемы замещения усилителя по переменной составляющей, показанной на рис. 3.3.

Выходное сопротивление транзистора  $R_i$ , включенное по переменной составляющей в параллель сопротивлению нагрузки  $R_n$ , уменьшает общее активное выходное сопротивление до величины

$$R_0 = \frac{R_n \cdot R_i}{R_n + R_i}, \quad (3.13)$$

а комплексное сопротивление совокупности элементов, присоединенных к источнику тока, будет равно

$$\dot{Z}_{RC}(\omega) = \frac{R_0 \cdot (1/j\omega C_{\Pi})}{R_0 + 1/j\omega C_{\Pi}} = \frac{R_0}{1 + j\omega C_{\Pi} R_0}. \quad (3.14)$$

Как следствие, если на вход усилителя подать гармонический сигнал, то сторонний ток, формируемый источником сигнала в схеме замещения (рис. 3.3), будет иметь комплексную амплитуду  $\dot{J} = -S\dot{U}_{\text{вх}}$  (здесь  $\dot{U}_{\text{вх}}$  комплексная амплитуда входного напряжения), напряжение на выходе цепи  $\dot{U}_{\text{вых}} = \dot{J} \cdot \dot{Z}_{RC}(\omega)$ , а комплексный коэффициент передачи будет равен

$$\dot{K}_{RC}(\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{-SR_0}{1 + j\omega C_{\Pi} R_0} = \frac{-K_0}{1 + j\omega \tau_{\Pi}}. \quad (3.15)$$

Здесь  $K_0$  – максимум коэффициента усиления (обеспечиваемый на нулевой частоте, т.е. по постоянной составляющей), знак минус указывает на противофазность колебаний на входе и выходе усилителя (т.е. при повышении напряжения на входе выходное напряжение усилителя снижается), а постоянная времени цепи составляет

$$\tau_{\Pi} = C_{\Pi} R_0. \quad (3.16)$$

Для анализа связи энергетических характеристик СП на входе и выходе цепи из (3.16) следует получить выражение для квадрата АЧХ цепи, которое имеет вид

$$\left| \dot{K}_{RC}(\omega) \right|^2 = \frac{|-K_0|^2}{|1 + j\omega\tau_u|^2} = \frac{K_0^2}{1 + (\omega\tau_u)^2}. \quad (3.17)$$

В соответствии с основным соотношением частотного метода анализа (3.4) для спектральной плотности мощности выходного СП запишем

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) \cdot \left| \dot{K}_{RC}(\omega) \right|^2 = \frac{N_0 K_0^2}{1 + (\omega\tau_u)^2}, \quad (3.18)$$

где  $N_0$  – спектральная плотность мощности воздействующего на усилитель белого шума.

Для определения корреляционной функции выходного СП воспользуемся полезным интегралом из справочника

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{1 + (\omega\tau_u)^2} d\omega = \frac{1}{2\tau_u} \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_u}\right). \quad (3.19)$$

Для перехода от спектрального описания СП к временному используем соотношение (2.17)

$$\begin{aligned} B_\eta(\tau) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_\eta(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) d\omega = \\ &= \frac{N_0 K_0^2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{1 + (\omega\tau_u)^2} d\omega = \frac{N_0 K_0^2}{2\tau_u} \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_u}\right). \end{aligned} \quad (0.20)$$

Сравнивая представленные на рис. 3.4 результаты (3.18) и (0.20) с характеристиками белого шума (2.22), (2.23) можно заметить:

а) После прохождения через усилитель спектр процесса утратил свою равномерность. Инерционность транзистора, отражаемая емкостью  $C_{\pi}$ , вызывает частотную избирательность цепи и, как следствие, затухание высокочастотных составляющих спектра СП на выходе усилителя.

б) Значение корреляционной функции при  $\tau = 0$ , уходящее в бесконечность для воздействующего на цепь белого шума, «замещается» на выходе конечной величиной  $N_0 K_0^2 / 2\tau_{ц}$ , увеличивающейся вместе с ростом коэффициента усиления  $K_0$  и снижающейся при увеличении постоянной времени цепи  $\tau_{ц}$ . Последний эффект объясняется тем, что рост  $\tau_{ц}$  обуславливает уменьшение полосы пропускания цепи, а значит и снижение суммарной мощности спектральных составляющих процесса, пропускаемых на выход усилителя.

в) Увеличение постоянной времени цепи  $\tau_{ц}$  сопровождается ещё и расширением корреляционной функции  $B_{\eta}(\tau)$ , что вполне логично. Увеличение инерционности означает расширение интервала предсказуемости поведения процесса на выходе исследуемого усилителя.

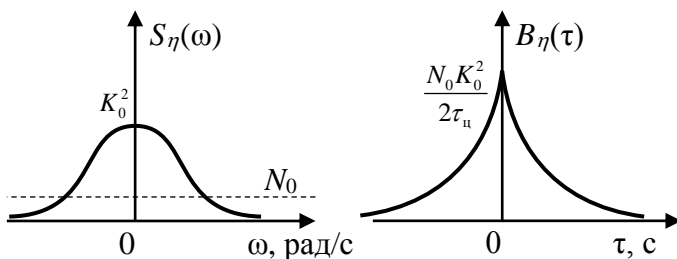


Рис. 3.4. Изменение энергетических характеристик белого шума при его прохождении через линейный резистивный усилитель

Пример 3 (продолжение): Проанализируем энергетические характеристики СП на выходе усилителя (рис. 3.2) с использованием временного метода анализа.

Воспользовавшись полученным ранее выражением (3.17) для квадрата АЧХ усилителя и справочным интегралом (3.19), определим корреляционную функцию импульсной характеристики цепи (3.11)

$$\begin{aligned}
 R_g(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_0^2}{1+(\omega\tau_u)^2} e^{j\omega\tau} d\omega = \\
 &= \frac{K_0^2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{1+(\omega\tau_u)^2} dx = \frac{K_0^2}{2\tau_u} \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_u}\right). \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

При воздействии на вход апериодического усилителя белого шума с корреляционной функцией  $B_\xi(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)$  в соответствии с (3.12) получим

$$B_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \delta(x) \cdot \frac{K_0^2}{2\tau_u} \exp\left(-\frac{|\tau-x|}{\tau_u}\right) dx = \frac{N_0 K_0^2}{2\tau_u} \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_u}\right) \quad (3.22)$$

т.е. выражение идентичное (0.20), полученному ранее. Таким образом, и частотный, и временной методы анализа характеристик СП на выходе линейных цепей позволили получить совпадающие результаты, что является косвенным подтверждением корректности проанализированных зависимостей.

### 3.3. Оценка вероятностных характеристик реакции инерционной линейной цепи на случайное воздействие

Вернёмся к тому факту, что большинство линейных цепей являются инерционными. Сигналы на их выходе определяются не только значениями, воздействующими на вход в данный момент времени, но и всей бесконечной совокупностью значений воздействия, поступавших на вход ранее. Поскольку расчет закона распределения даже для суммы двух случайных величин требует выполнения свертки плотностей вероятности слагаемых [1, (6.53)], а в рассматриваемых случаях таких слагаемых бесконечно много, то общего способа расчета закона распределения реакции линейной цепи на случайное воздействие не существует. Вместе с тем, есть два случая, когда вероятностные свойства реакции цепи можно предсказать:

1. Если на линейную цепь воздействует нормальный СП, то и процесс на выходе цепи будет обладать нормальным распределением.

2. При воздействии на узкополосную цепь широкополосного СП наблюдается “**эффект нормализации**”, заключающийся в том, что закон распределения реакции цепи неограниченно приближается к нормальному.

Первое из приведенных выше правил объясняется тем, что сумма произвольного числа нормальных случайных величин также обладает нормальным распределением (см., например, [1, (6.61)]).

Для обоснования причин появления второго правила проанализируем особенности слагаемых, из которых формируется сигнал на выходе линейной цепи в соответствии с известным интегралом Дюамеля (см., например, [6, (8.8)])

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot s_{\text{ВХ}}(t-x) dx, \quad (3.23)$$

где  $g(x)$  – импульсная характеристика цепи (3.9).

У реальных цепей импульсная характеристика не может отличаться от нуля для отрицательных аргументов, поэтому нижний предел интегрирования в (3.23) можно заменить на нулевой. Заменяя дифференциал  $x$  очень малым, но конечным интервалом приращения значений времени  $\tau$ , запишем приближенное выражение для расчета отклика цепи

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) \approx g(0) \cdot s_{\text{ВХ}}(t) + g(\tau) \cdot s_{\text{ВХ}}(t-\tau) + g(2\tau) \cdot s_{\text{ВХ}}(t-2\tau) + \dots \quad (3.24)$$

Учтем следующие два нюанса:

а) Чем шире спектр случайного процесса, тем меньше его интервал корреляции, поэтому при большой ширине спектра СП его значения, разнесенные даже на малый интервал  $\tau$ , являются слабо коррелированными.

б) Чем уже полоса пропускания линейной цепи, тем медленнее затухает по величине её импульсная характеристика. Это означает, что у узкополосной цепи значения  $g(\tau)$ ,  $g(\tau) \dots g(k\tau)$  являются сопоставимыми по величине даже при  $k \gg 0$ .

Итак, при воздействии широкополосных СП на узкополосную линейную цепь её отклик в любой момент формируется как сумма огромного числа слабо коррелированных случайных слагаемых, а свойства подобной суммы однозначно определяются центральной предельной теоремой Ляпунова [1, с. 180]. «Срабатывание» теоремы Ляпунова и порождает эффект нормализации, при котором вне зависимости от законов распределения суммируемых слагаемых результат суммирования – процесс на выходе узкополосной линейной цепи – подчиняется нормальному закону распределения.

### 3.4. Понятие шумовой полосы пропускания цепи

Достаточно часто на практике возникает задача расчета мощности шума, наблюдаемого на выходе линейной цепи, при воздействии на её вход широкополосного шума. В подобной ситуации для расчетов удобно использовать понятие эффективной (шумовой) полосы пропускания линейной цепи. Она представляет собой полосу пропускания идеального фильтра, который

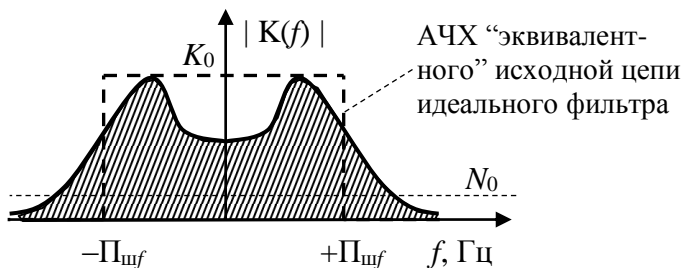


Рис. 3.5. Определение эффективной (шумовой) полосы пропускания линейной цепи



обладает коэффициентом передачи равным максимуму коэффициента передачи анализируемой цепи и обеспечивает на выходе ту же мощность реакции, что и анализируемая цепь.

Условием совпадения мощности откликов анализируемой цепи и заменяющего её фильтра является равенство

$$N_0 \cdot K_0^2 \cdot 2\Pi_{\text{шф}} = 2 \int_0^{+\infty} N_0 \cdot \left| \dot{K}(f) \right|^2 df ,$$

из которого несложно получить выражение для расчета шумовой полосы

$$\Pi_{\text{шф}} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\dot{K}(f)}{K_0} \right|^2 df , \quad (3.25)$$

где  $K_0 = \max_f \left\{ \left| \dot{K}(f) \right|^2 \right\}$  – максимум АЧХ линейной цепи.

*Пример 4:* Рассчитаем шумовую полосу пропускания усилителя малых сигналов с апериодической нагрузкой (рис. 3.2).

Зависимость коэффициента передачи этого усилителя от частоты определяется соотношением (3.15). Заменяя в (3.25) циклическую частоту  $f$  круговой частотой  $\omega$ , преобразуем выражение для расчета шумовой полосы к виду

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{|1 + j\omega\tau_{\text{ц}}|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega\tau_{\text{ц}})^2} = \frac{\arctg(\omega\tau_{\text{ц}})}{2\pi\tau_{\text{ц}}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4\tau_{\text{ц}}} .$$

Отметим, что полоса пропускания этой цепи по уровню 0,707 составляет в герцах величину  $1/(2\pi\tau_{\text{ц}})$ . Таким образом, для усилителей с апериодической нагрузкой (также как для последовательного или параллельного соединения элементов  $R$  и  $C$ ) эффективная (шумовая) полоса пропускания цепи составляет

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{1}{4\tau_{\text{ц}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f \, 0,707} . \quad (3.26)$$

Пример 5: Оценим шумовую полосу пропускания усилителя с резонансной нагрузкой (рис. 3.6).

Применительно к слабым сигналам схема замещения этого усилителя по переменной составляющей показана на рис. 3.7. Для определения комплексного коэффициента передачи представим, что на вход усилителя воздействует гармонический сигнал  $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \psi_0)$ . Тогда комплексная амплитуда тока, формируемого сторонним источником, составит  $\dot{J} = -S U_0 e^{j\omega_0}$ , а комплексная амплитуда выходного напряжения будет равна  $\dot{U}_{\text{вых}} = \dot{J} \cdot \dot{Z}_k(\omega)$ . Зависимость от частоты комплексного сопротивления колебательного контура имеет вид

$$\dot{Z}_k(\omega) = R_k / (1 + j\xi), \quad (3.27)$$

где при  $|\Delta\omega| \ll \omega_p$  обобщенная расстройка  $\xi$  составляет

$$\xi = 2Q_3 \cdot \Delta\omega / \omega_p, \quad (3.28)$$

где  $Q_3$  – эквивалентная добротность контура,  $\omega_p$  – частота резонанса.

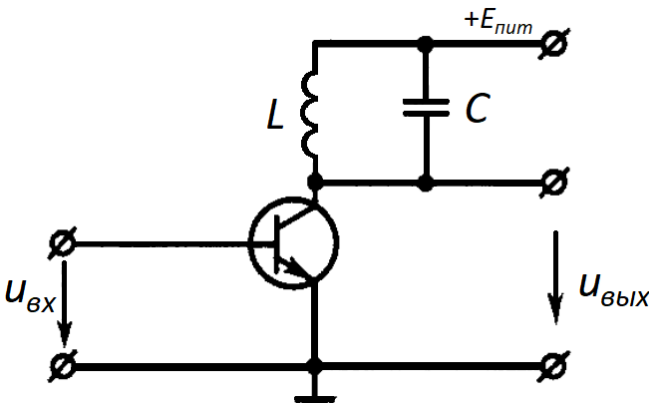


Рис. 3.6. Линейный резонансный усилитель

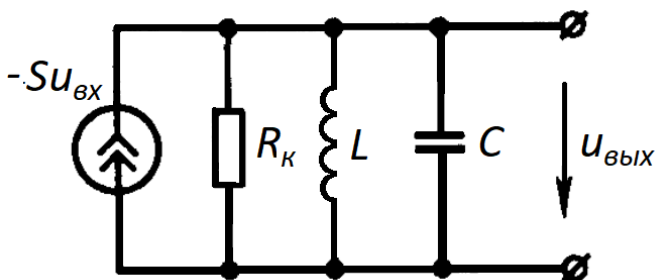


Рис. 3.7. Схема замещения линейного резонансного усилителя по переменной составляющей

*Итак, комплексный коэффициент передачи резонансного усилителя в области положительных частот может быть представлен в виде*

$$\dot{K}(\omega) = \frac{-SR_k}{1 + j \cdot 2Q_3 \cdot (\omega - \omega_p) / \omega_p}. \quad (3.29)$$

*Отметим, что величину  $\tau_k = 2Q_3 / \omega_p$  называют постоянной времени контура, а его полоса пропускания по уровню 0,707 составляет*

$$\Pi_{f \ 0,707} = \frac{1}{\pi \tau_k} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_p}{Q_3} = \frac{f_p}{Q_3}. \quad (3.30)$$

*Подставляя зависимость (3.29) в выражение для расчета шумовой полосы, получим*

$$\Pi_{шф} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + ((\omega - \omega_p)\tau_k)^2} = \frac{\text{arctg}((\omega - \omega_p)\tau_k)}{2\pi\tau_k} \Big|_0^{+\infty} \approx \frac{1}{2\tau_k},$$

*где учтено, что при  $Q_3 \gg 1$  справедливо  $\text{arctg}(-\omega_p \tau_k) \approx -\pi/2$ .*

*Итак, шумовая полоса пропускания колебательного контура*

$$\Pi_{шф} = \frac{1}{2\tau_k} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f \ 0,707}. \quad (3.31)$$

*Примечание: Отражаемая соотношениями (3.26), (3.31) прямая пропорциональность между шумовой полосой пропускания и полосой пропускания по уровню 0,707 является вполне естественной, однако столь большой поправочный коэффициент  $\pi/2 \approx 1,5$  возникает из-за весьма слабой фильтрующей способности цепей первого порядка и колебательного контура. Для фильтров, обладающих более прямоугольной АЧХ, рассогласование между этими двумя видами полос будет заметно меньшим.*

### 3.5. Дифференцирование случайных процессов

Предположим, что стационарный СП  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием поступает на вход дифференцирующего устройства (рис. 3.8); случай  $M_\xi \neq 0$  не представляет особого интереса, т.к. при дифференцировании любое постоянное математическое ожидание на входе будет превращаться в  $M_\eta = 0$  на выходе.

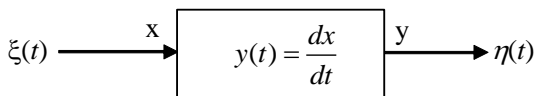


Рис. 3.8. Дифференцирующая линейная цепь

Для анализа корреляционной функции отклика цепи запишем

$$\begin{aligned}
 B_\eta(\tau) &= m_1 \{ \eta(t) \cdot \eta(t-\tau) \} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_1 \left\{ \frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\xi(t-\tau+\Delta t) - \xi(t-\tau)}{\Delta t} \right\} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-2} \cdot m_1 \left\{ -\xi(t+\Delta t) \cdot \xi(t-\tau) + \xi(t) \cdot \xi(t-\tau) + \right. \\
 &\quad \left. + \xi(t+\Delta t) \cdot \xi(t-\tau+\Delta t) - \xi(t) \cdot \xi(t-\tau+\Delta t) \right\} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-2} \cdot \left( -B_\xi(\tau+\Delta t) + 2B_\xi(\tau) - B_\xi(\tau-\Delta t) \right).
 \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой вторую производную корреляционной функции воздействующего СП, взятую с противоположным знаком. Итак,

$$B_{\eta}(\tau) = -B_{\xi}''(\tau) = -\sigma_{\xi}^2 \cdot r_{\xi}''(\tau) . \quad (3.32)$$

Процесс считают дифференцируемым, если дисперсия его производной – конечна, но учитывая (3.32) и тот факт, что  $M_{\eta} = 0$ , имеем  $D_{\eta} = K_{\eta}(0) = -\sigma_{\xi}^2 \cdot r_{\xi}''(0)$ , т.е. для дифференцируемости процесса  $\xi(t)$  необходимо, чтобы его нормированная корреляционная функция (2.20) обладала при  $\tau = 0$  конечной по величине второй производной, т.е., чтобы  $r_{\xi}'(\tau)|_{\tau=0}$  была непрерывной. В частности, рассматривавшийся в примере 3 (см. с. 49) СП с корреляционной функцией вида  $B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot \exp(-\alpha |\tau|)$  не является дифференцируемым, т.к. первая производная его коэффициента корреляции  $r_{\xi}'(\tau)$  в начале координат будет иметь разрыв первого рода. Данный результат вполне понятен; ведь этот СП был получен при воздействии белого шума на интегрирующую RC-цепь и дифференцирование такого СП должно бы вновь порождать белый шум, т.е. процесс с бесконечно большой дисперсией.

Если же рассмотреть СП с корреляционной функцией вида

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot (1 + \alpha |\tau|) \cdot \exp(-\alpha |\tau|) , \quad (3.33)$$

то, получая в результате несложных преобразований

$$B_{\xi}'(\tau) = -\alpha^2 \sigma_{\xi}^2 \tau \cdot \exp(-\alpha |\tau|) , \quad (3.34)$$

убеждаемся, что  $r_{\xi}'(\tau)|_{\tau=0}$  непрерывна, а значит процесс с корреляционной функцией вида (3.33) является дифференцируемым.

Отметим также, что производная СП  $n$ -го порядка существует только в том случае, если существует  $2n$ -кратная производная корреляционной функции этого процесса

$$B_{\frac{\partial^n \xi}{\partial t^n}}(\tau) = (-1)^n \frac{\partial^{2n} B_{\xi}(\tau)}{\partial \tau^{2n}}. \quad (3.35)$$

Взаимосвязь между корреляционными функциями процесса и его производной (3.32) позволяет установить аналогичную связь и для их спектральных плотностей мощности. Для этого следует дважды продифференцировать по параметру  $\tau$  обратное преобразование Фурье, связывающее в соответствии с теоремой Винера-Хинчина корреляционную и спектральную характеристики СП. Получим:

$$S_{\eta}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\xi}(\omega). \quad (3.36)$$

Отсюда, в частности, следует, что дисперсия, т.е. средняя мощность производной случайного процесса может быть рассчитана как

$$D_{\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega^2 \cdot S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (3.37)$$

Таким образом, для дифференцируемости случайного процесса необходимо, чтобы его СПМ убывала по частоте быстрее, чем  $\omega^{-2}$ . Также соотношение (3.37) доказывает, что любой СП, обладающий ограниченным по частоте спектром и, в частности, рассмотренные в подразделе 2.5 ограниченный по частоте и/или по полосе белый шум являются дифференцируемыми.

Оценим теперь статистическую взаимосвязь между мгновенными значениями самого СП и его производной

$$B_{\xi \xi'}(\tau) = m_1 \{ \xi(t) \cdot \xi'(t - \tau) \} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_1 \left\{ \xi(t) \cdot \frac{\xi(t - \tau + \Delta t) - \xi(t - \tau)}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{\xi}(\tau + \Delta t) - B_{\xi}(\tau)}{\Delta t} = B'_{\xi}(\tau). \quad (3.38)$$

При  $\tau=0$  корреляционная функция любого СП максимальна, потому что  $B_{\xi}(\tau=0) = B'_{\xi}(\tau=0) = 0$ , т.е. в совпадающие моменты времени любой СП и его производная по отношению друг к другу некоррелированы.

### 3.6. Выбросы стационарного нормального случайного процесса

В статистической радиотехнике нередко вызывает интерес задача анализа характеристик выбросов случайных процессов. Пусть реализациями процесса  $\zeta(t)$  служат достаточно «гладкие» функции времени. Событие, состоящее в том, что реализация  $\zeta(t)$  пересечет «снизу вверх» некий уровень  $x_0$  называют **положительным выбросом** процесса  $\zeta(t)$  на уровне  $x_0$ . Оценим среднее число подобных выбросов, приходящихся на единицу времени.

Выделим на оси времени столь малый временной интервал  $\Delta t$ , что в его пределах либо вообще не будет выбросов, либо такой выброс будет единственным. Для возникновения на интервале  $\Delta t$  положительного выброса необходимо выполнение условий  $\xi(t) < x_0$  и  $\xi(t + \Delta t) \approx (\xi(t) + \xi' \cdot \Delta t) > x_0$ . Иначе говоря, для появления положительного выброса производная СП в момент времени  $t$  должна быть положительной, а мгновенное значение СП принадлежать интервалу

$$x_0 - \xi' \cdot \Delta t < \xi(t) < x_0. \quad (3.39)$$

Вероятность подобного события может быть выражена через совместную плотность вероятности процесса и его производной

$$P_{\text{пв}} = \int_0^{+\infty} \int_{x_0 - \xi' \cdot \Delta t}^{x_0} W_{\xi\xi'}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx \int_0^{+\infty} W_{\xi\xi'}(x_0, x_2) \cdot x_2 \Delta t dx_2. \quad (3.40)$$

Для строгого перехода от (3.40) к числу выбросов на протяженном интервале времени требуется учитывать эффекты «последствия», однако в первом приближении среднее число положительных выбросов, происходящих за 1 секунду, можно считать равным

$$n_{\text{пв}}(x_0) \approx \int_0^{+\infty} W_{\xi\xi'}(x_0, x_2) \cdot x_2 \, dx_2. \quad (3.41)$$

Если анализируемый процесс  $\xi(t)$  является нормальным с известной корреляционной функцией  $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot r_\xi(\tau)$ , то выражение (3.41) можно заметно конкретизировать. Действительно, вследствие линейности операции дифференцирования производная нормального СП сама подчиняется нормальному распределению, причем в соответствии с (3.32)  $D_{\xi'} = -\sigma_\xi^2 \cdot r_\xi''(0)$ . Из некоррелированности же СП и его производной в совпадающие моменты времени (см. комментарий к (3.38)) следует их независимость, т.е.

$$W_{\xi\xi'}(x_0, x_2) = W_\xi(x_0) \cdot W_{\xi'}(x_2). \quad (3.42)$$

Поскольку интеграл в (3.41) берется по  $x_2$ , то  $W_\xi(x_0)$  следует рассматривать лишь как постоянный множитель, т.е.

$$n_{\text{пв}}(x_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} e^{\frac{-x_0^2}{2\sigma_\xi^2}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi'}\sqrt{-r_\xi''(0)}} e^{\frac{-x_2^2}{2\sigma_{\xi'}^2(-r_\xi''(0))}} \cdot x_2 \, dx_2,$$

а последний интеграл не требует каких-то сложных вычислений; его значение составляет  $(\sqrt{2\pi})^{-1} \sigma_{\xi'}\sqrt{-r_\xi''(0)}$ . В итоге, для расчета среднего числа выбросов нормального случайного процесса на интервале длительностью в 1 секунду получаем приближенное соотношение



$$n_{\text{пв}}(x_0) \approx \frac{\sqrt{-r_{\xi}''(0)}}{2\pi} \exp\left\{\frac{-x_0^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}. \quad (3.43)$$

Если выбрать в качестве контрольного уровня  $x_0$  нулевое значение, то  $n_{\text{пв}}(0)$  будет определять среднее число положительных, а значит и отрицательных «полувольт» реализаций СП в единицу времени или, иначе говоря, «квазичастоту» их колебаний. Учитывая (3.37), формула для расчета «квазичастоты» может быть также представлена в виде

$$n_{\text{пв}}(0) \approx \frac{\sqrt{-r_{\xi}''(0)}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega^2 S_{\xi}(\omega) d\omega}. \quad (3.44)$$

### 3.7. Интегрирование случайных процессов

Пусть стационарный СП  $\xi(t)$  поступает на вход идеального интегратора (рис. 3.9), который к моменту времени  $t = 0$  находился в нулевом начальном состоянии. В случае  $M_{\xi} \neq 0$ , математическое ожидание на выходе интегратора будет изменяться во времени в соответствии с соотношением

$$M_{\eta}(t) = \int_0^t m_1\{\xi(t)\} dt = M_{\xi} \cdot t, \quad (3.45)$$

что означает, процесс  $\eta(t)$  – нестационарный.

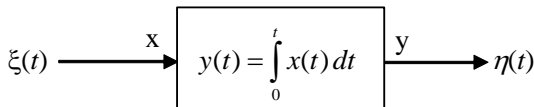


Рис. 3.9. Интегрирующая линейная цепь

Однако и при нулевом математическом ожидании отклик интегратора представляет собой реализацию нестационарного СП. К примеру, корреляционная функция на выходе интегратора

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} m_1 \{ \xi(u) \cdot \xi(v) \} dudv \quad (3.46)$$

зависит от конкретных значений  $t_1$  и  $t_2$ , а не только от их разности.

Вызываемая эффектом накопления нестационарность СП на выходе интегрирующей цепи будет проявляться и в нарастании флуктуаций. К примеру, при хаотическом входном воздействии с  $M_{\xi} = 0$  отклик интегратора также будет обладать нулевым средним значением, однако дисперсия этих колебаний будет вдоль оси времени неограниченно возрастать.

### 3.8. Установление сигналов на выходе линейных цепей

В моменты подключения сигналов или при изменении коммутации в цепях наблюдаются переходные процессы. При этом сама цепь ведет себя как параметрическая, а отклик цепи даже на стационарное воздействие представляет собой нестационарный СП. Для анализа характеристик выходных СП можно в подобных условиях рекомендовать временной метод, метод стохастических дифференциальных уравнений или метод комплексных огибающих [10].

Временной метод базируется на использовании интеграла Дюамеля с поправкой на то, что до момента начала отсчета исследуемая цепь находилась при нулевых начальных условиях, а значит реализации на входе и выходе цепи (см. рис. 3.1) связаны соотношением

$$\eta^{(i)}(t) = \int_0^t \xi^{(i)}(x) \cdot g(t-x) dx. \quad (3.47)$$

Осуществляя усреднение во времени, на основе (3.47) можно получить корреляционную функцию процесса на выходе цепи

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B_{\xi}(y-x) \cdot g(t_1-x) \cdot g(t_2-y) dx dy. \quad (3.48)$$

Как уже упоминалось выше, корреляционная функция отклика явно зависит как от  $t_1$ , так и от  $t_2$ , что характерно для нестационарных случайных процессов.

Достаточно подробное описание метода стохастических дифференциальных уравнений можно найти в [5].

Метод комплексных огибающих базируется на использовании понятия динамического коэффициента передачи цепи [10]. Динамический коэффициент передачи (ДКП) определяется как преобразование Фурье от начального фрагмента импульсной характеристики цепи

$$\dot{k}(\omega, t) = \int_0^t g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.49)$$

и характеризует комплексную огибающую [6] отклика цепи в переходный период времени при гармоническом воздействии единичной амплитуды.

С использованием ДКП отклик цепи на воздействие на неё начиная с момента времени  $t = 0$  реализации  $\xi^{(i)}(t)$  стационарного СП может быть записан в виде

$$\eta^{(i)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \dot{k}(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.50)$$

где  $\dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega)$  – комплексная спектральная плотность отдельной реализации воздействующего СП.

Прежде чем воспользоваться соотношением (3.50) для расчета корреляционной функции на выходе цепи вернемся к соотношению (2.36) и, учитывая то, что для вещественных сигналов справедливо  $\dot{G}_{\xi^{(i)}}(-\omega) = G_{\xi^{(i)}}^*(\omega)$ , перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
 m_1 \left\{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot \dot{G}_{\xi^{(i)}}(w) \right\} &= \\
 &= m_1 \left\{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \cdot \dot{G}_{\xi^{(i)}}^*(-w) \right\} = 2\pi \cdot S_{\xi}(w) \cdot \delta(\omega + w). \quad (0.51)
 \end{aligned}$$

Теперь запишем выражение для корреляционной функции на основании усреднения реализаций  $\eta^{(i)}(t)$ , рассчитываемых с использованием ДКП

$$\begin{aligned}
 B_{\eta}(t_1, t_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 \left\{ \dot{G}_{\xi^{(i)}}(\omega) \dot{G}_{\xi^{(j)}}(w) \right\} \dot{k}(\omega, t_1) \dot{k}(w, t_2) \times \\
 &\times e^{j(\omega t_1 + w t_2)} d\omega dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{k}(\omega, t_1) e^{j\omega t_1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(w) \cdot \delta(\omega + w) \times \right. \\
 &\left. \times \dot{k}(w, t_2) e^{jw t_2} dw \right\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(-\omega) \dot{k}(\omega, t_1) \dot{k}(-\omega, t_2) e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Учитывая четность спектральной плотности мощности для корреляционной функции устанавливающегося на выходе цепи процесса получаем выражение

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \dot{k}(\omega, t_1) \dot{k}^*(\omega, t_2) e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega. \quad (3.52)$$

Подставляя в (3.52)  $t_1 = t_2 = t$  для второго начального момента выходного процесса получим выражение

$$m_2 \{ \eta(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \left| \dot{k}(\omega, t) \right|^2 d\omega. \quad (3.53)$$

Таким образом, для устанавливающегося процесса на выходе цепи аналогом спектральной плотности мощности (3.4) служит зависящая от времени величина

$$S_{\eta}(\omega, t) = S_{\xi}(\omega) \cdot \left| \dot{k}(\omega, t) \right|^2. \quad (3.54)$$

Отметим, что если импульсная характеристика цепи известна, то для расчета ДКП цепи наряду с определением (3.49)

может оказаться полезным подход, базирующийся на операторном коэффициенте передачи цепи

$$\dot{K}(p) = \frac{F(p)}{V(p)}, \quad (3.55)$$

где  $F(p)$  и  $V(p)$  – полиномы, определяющие числитель и знаменатель дробно-рационального коэффициента передачи. Связь операторного коэффициента передачи цепи с её импульсной характеристикой имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{K}(p)e^{pt} dp = \sum_{i=1}^n \frac{F(p_i)}{V'(p_i)} \cdot e^{p_i t}. \quad (3.56)$$

где  $p_i$  – корни характеристического полинома цепи.

Подставляя (3.56) в (3.49), получим

$$\begin{aligned} \dot{k}(p, t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{F(p_i)}{V'(p_i)} \cdot e^{-(p-p_i)\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i [1 - e^{-(p-p_i)t}] \prod_{k=1; k \neq i}^n (p - p_k)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где  $a_i = \frac{F(p_i)}{V'(p_i)}$  – вычет в  $i$ -м корне характеристического полинома.

Пример 6: Проанализируем процесс установления колебаний на выходе усилителя сигналов с апериодической нагрузкой (рис. 3.2) при воздействии на его вход белого шума.

Для импульсной характеристики вида

$$g(t) = \frac{K_0}{\tau_u} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_u}} \quad (3.58)$$

в соответствии с (3.49) имеем

$$\dot{k}(\omega, t) = \int_0^t K_0 \cdot e^{-(j\omega + 1/\tau_{\text{ц}})\tau} d\tau = \frac{K_0 / \tau_{\text{ц}}}{-(j\omega + 1/\tau_{\text{ц}})} \cdot (e^{-(j\omega + 1/\tau_{\text{ц}})t} - 1)$$

или, окончательно,

$$\dot{k}(\omega, t) = \frac{K_0}{1 + j\omega\tau_{\text{ц}}} \cdot (1 - e^{-t/\tau_{\text{ц}}} e^{-j\omega t}). \quad (3.59)$$

Перепроверим данный расчет операторным методом. Коэффициент передачи цепи

$$\dot{K}(p) = \frac{K_0}{1 + p\tau_{\text{ц}}} \quad (3.60)$$

обладает единственным полюсом  $p_1 = -1/\tau_{\text{ц}}$ , вычет в котором составляет  $a_1 = K_0 / \tau_{\text{ц}}$ . Тогда, в соответствии с (3.57)

$$\dot{k}(p, t) = \frac{K_0 / \tau_{\text{ц}} [1 - e^{-(p + 1/\tau_{\text{ц}})t}]}{(p + 1/\tau_{\text{ц}})} = \frac{K_0}{1 + p\tau_{\text{ц}}} [1 - e^{-t/\tau_{\text{ц}}} e^{-pt}], \quad (3.61)$$

что при  $p = j\omega$  совпадает с (3.59).

При воздействии на вход цепи белого шума  $S_{\xi}(\omega) = N_0$ . Подставим полученный выше ДКП в выражение (3.52) для корреляционной функции устанавливающегося СП

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{N_0 K_0^2}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-t_1/\tau_{\text{ц}}} e^{-j\omega t_1}}{1 + j\omega\tau_{\text{ц}}} \cdot \frac{1 - e^{-t_2/\tau_{\text{ц}}} e^{+j\omega t_2}}{1 - j\omega\tau_{\text{ц}}} e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega.$$

Используя в дальнейших расчетах четность косинусной и нечетность синусной составляющих  $\exp[j\omega(\dots)]$ , а также табличный интеграл (3.19), получим

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{N_0 K_0^2}{2\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(t_1 - t_2)} d\omega}{1 + (\omega\tau_{\text{ц}})^2} - e^{-t_1/\tau_{\text{ц}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t_2} d\omega}{1 + (\omega\tau_{\text{ц}})^2} - \right. \\ \left. - e^{-t_2/\tau_{\text{ц}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+j\omega t_1} d\omega}{1 + (\omega\tau_{\text{ц}})^2} + e^{-(t_1 + t_2)/\tau_{\text{ц}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega\tau_{\text{ц}})^2} \right\} = \frac{N_0 K_0^2}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_{\text{ц}}}\right) - \right.$$

$$- \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{\text{ц}}} - \frac{|t_2|}{\tau_{\text{ц}}}\right) - \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_{\text{ц}}} - \frac{|t_1|}{\tau_{\text{ц}}}\right) + \exp\left(-\frac{(t_1+t_2)}{\tau_{\text{ц}}}\right) \Bigg\}.$$

Процесс установления колебаний имеет смысл анализировать лишь при выполнении условий  $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$ , поэтому полученное выше выражение можно упростить до вида

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{N_0 K_0^2}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_{\text{ц}}}\right) - \exp\left(-\frac{(t_1 + t_2)}{\tau_{\text{ц}}}\right) \right\}. \quad (3.62)$$

Для второго начального момента, совпадающего при  $M_{\eta} = 0$  с дисперсией выходного процесса, подставляя в (3.62)  $t_1 = t_2 = t$ , получим выражение

$$D_{\eta}(t) = \frac{N_0 K_0^2}{2\tau_{\text{ц}}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{\text{ц}}}\right) \right), \quad (3.63)$$

переходящее при  $t \rightarrow \infty$  в уже наблюдавшуюся ранее (см. рис. 3.4) величину  $N_0 K_0^2 / 2\tau_{\text{ц}}$ , определяющую мощность стационарного процесса на выходе аperiodического усилителя.

*Примечание: Для многокаскадной аperiodической цепи, а также для цепей второго порядка (колебательного контура) анализ и итоговые выражения, аналогичные (3.63), можно найти, например, в [11, с. 94].*

## 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

При воздействии случайных процессов на нелинейные цепи с постоянными параметрами методика анализа и сложность расчетов существенно зависят от инерционных свойств анализируемой цепи. Если по отношению к воздействию цепь можно считать безынерционной, то расчет свойств отклика цепи оказывается относительно несложным. Если же инерционность цепи является существенной для исследуемого явления, то сложность анализа значительно возрастает и достижимым, как правило, оказывается лишь приближенное решение задачи.

### 4.1. Безынерционные нелинейные преобразования случайных процессов

Если каждое значение  $y(t)$  случайного процесса  $\eta(t)$  на выходе нелинейного преобразователя определяется значением  $x(t)$  сигнала  $\xi(t)$ , воздействующего на вход преобразователя в тот же самый момент времени, то говорят, что случайные процессы  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  связаны безынерционным нелинейным преобразованием  $y = f(x)$ . Отсутствие влияния предыдущих или последующих значений СП на значения, возникающие на выходе цепи в момент времени  $t$ , приводит к тому, что правила расчета вероятностных характеристик СП при безынерционных нелинейных преобразованиях СП не отличаются от аналогичных правил для преобразования случайных величин [1].

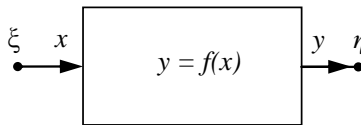


Рис. 4.1. Безынерционный нелинейный преобразователь



Для функций  $y = f(x)$ , не содержащих горизонтальных участков (см. пример на рис. 4.2 слева), каждое выходное значение  $y$  может быть получено из конечного числа аргументов  $x$ , т.е. существует конечнозначная обратная функция  $x = \varphi_i(y)$ , где  $i$  – номер ветви обратной функции  $\varphi(\cdot)$ . В таком случае взаимосвязь между одномерными законами распределения выходного и входного СП имеет вид

$$W_{\eta}(y) = \sum_i W_{\xi}(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right|, \quad (4.1)$$

где суммирование идет по всем ветвям обратной функции.

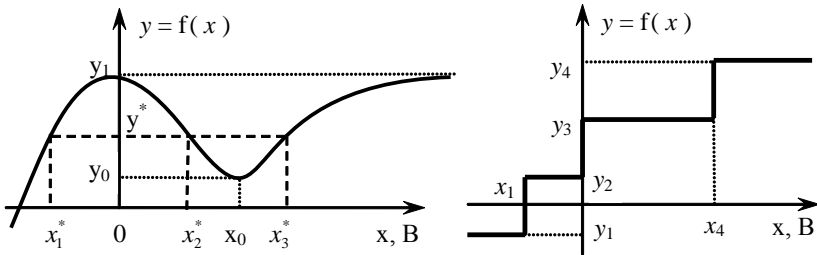


Рис. 4.2. Возможные варианты функции прямого преобразования для безынерционного преобразователя

Если же функция прямого преобразования  $y = f(x)$ , напротив, состоит лишь из горизонтальных участков (как показано на рис. 4.2 справа), то получаемый СП может принимать лишь квантованное множество значений  $y_m$  (на рис. 4.2 справа подобных значений четыре – от  $y_1$  до  $y_4$ ). Значение  $y_m$  на выходе будет наблюдаться только в тех случаях, когда значение воздействия  $\xi(t)$  будет лежать в пределах соответствующего этому  $y_m$  интервала оси  $x$ . Например, вероятность появления значения  $y_1$

$$P\{ \eta = y_1 \} = P\{ \xi \leq x_1 \} = \int_{-\infty}^{x_1} W_{\xi}(x) dx .$$

Аналогично, для уровня  $y_2$  имеем

$$P\{\eta = y_2\} = P\{x_1 \leq \xi < 0\} = \int_{x_1}^0 W_\xi(x) dx.$$

И поскольку записанные выше вероятности приходятся на отдельные точки оси  $x$  плотность вероятности в этих точках оказывается бесконечно большой и может быть записана посредством дельта-функции

$$W_\eta(y) = \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (4.2)$$

где число слагаемых определяется количеством горизонтальных участков зависимости  $y = f(x)$ .

**Универсальная формула**, определяющая одномерную плотность вероятности СП на выходе безынерционного нелинейного преобразователя, имеет вид:

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| + \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (4.3)$$

где первая сумма включает все ветви обратных функций по всем наклонным участкам зависимости  $y = f(x)$ , а вторая сумма – все горизонтальные участки той же самой зависимости.

Числовые характеристики СП на выходе безынерционного нелинейного преобразователя могут быть рассчитаны либо по стандартным правилам (на основе найденной  $W_\eta(y)$ ), либо минуя данный этап по правилам:

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_\xi(x) dx, \quad (4.4)$$

$$D_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_\eta]^2 \cdot W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \cdot W_\xi(x) dx - M_\eta^2. \quad (4.5)$$

Расчет корреляционной функции можно осуществить по правилу

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (4.6)$$

Если на цепь воздействует стационарный СП, то при постоянстве параметров цепи отклик тоже будет стационарным, его корреляционная функция будет зависеть лишь от  $\tau = (t_2 - t_1)$ , а спектральные свойства отклика в соответствии с теоремой Винера-Хинчина можно будет рассчитать при помощи преобразования Фурье

$$S_{\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.7)$$

*Пример 7:* На двухполупериодный выпрямитель (рис. 4.3) воздействует стационарный нормальный белый шум, ограниченный по частоте (2.28). Необходимо определить вероятностные и энергетические характеристики напряжения, выделяющегося на сопротивлении  $R_H$ .

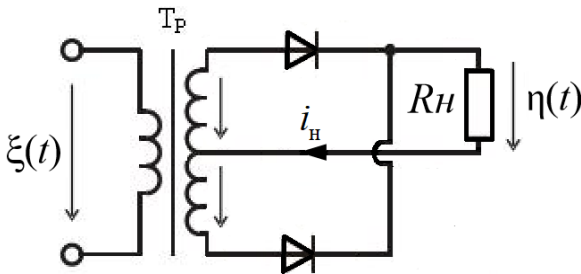


Рис. 4.3. Двухполупериодный выпрямитель со средней точкой

Будем полагать, что ограничивающая спектр шума частота  $F_{\max}$  не слишком велика, так что инерционностью цепи по отношению к воздействию СП можно пренебречь, а совместную вольтамперную характеристику соединения двух диодов можно с достаточной для решения задачи точностью аппроксимировать квадратичной зависимостью (рис. 4.4).

Тогда взаимосвязь между входным и выходным напряжением можно записать в виде

$$\eta(t) = a \cdot \xi^2(t). \quad (4.8)$$

Для анализа вероятностных характеристик отклика цепи воспользуемся формулой (4.3). Очевидно, что обратная функция для зависимости  $y = ax^2$  будет состоять из двух ветвей

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y) = -\sqrt{y/a}, \\ x_2 &= \varphi_2(y) = +\sqrt{y/a}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

а слагаемых, образующих в (4.3) правую сумму, в анализируемом случае не потребуются, т.к. квадратичная зависимость не включает в свой состав горизонтальных участков. Итак,

$$W_\eta(y) = W_\xi(-\sqrt{y/a}) \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{ay}} \right| + W_\xi(+\sqrt{y/a}) \cdot \left| +\frac{1}{2\sqrt{ay}} \right|.$$

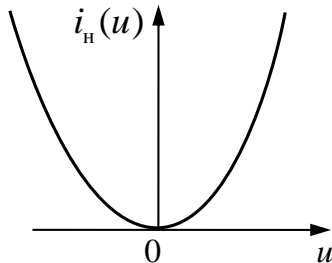


Рис. 4.4. Вольтамперная характеристика цепи

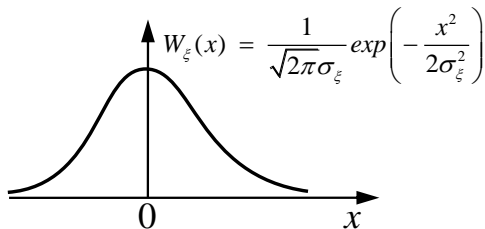


Рис. 4.5. Плотность вероятности воздействующего шума

Одномерная плотность вероятности для нормального закона распределения зависит лишь от квадрата аргумента, поэтому оба приведенных выше слагаемых будут давать одинаковый вклад в результирующее распределение

$$\begin{aligned}
 W_{\eta}(y) &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left(-\frac{(-\sqrt{y/a})^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{ay}} = \\
 &= \frac{1}{\sigma_{\xi}\sqrt{2\pi ay}} \exp\left(-\frac{y}{2(a\sigma_{\xi})^2}\right), \quad y \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Отметим, что в анализируемом случае использование (4.4) для расчета математического ожидания отклика цепи оказывается существенно выгоднее правила (1.25). Действительно, при  $M_{\xi} = 0$  справедливо  $x^2 = (x - M_{\xi})^2$ , и потому второй из интегралов является, по сути, расчетом дисперсии нормального шума

$$M_{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_{\xi}(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot W_{\xi}(x) dx = a\sigma_{\xi}^2. \tag{4.11}$$

Для расчета энергетических характеристик напряжения на выходе выпрямителя воспользуемся правилом (4.6), где при  $M_{\xi} = 0$  на основе (1.35) запишем двумерную плотность вероятности воздействия в форме

$$W_{\xi}(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_{\xi}^2(1-r^2)}\right\}, \tag{4.12}$$

где  $r$  – значение коэффициента корреляции  $r(\tau)$  (см. (2.20)).

При подстановке, имеем

$$\begin{aligned}
 B_{\eta}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ax_1^2 \cdot ax_2^2}{2\pi\sigma_{\xi}^2\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{x_1^2 - rx_1^2 + (x_2 - rx_1)^2}{2\sigma_{\xi}^2(1-r^2)}\right\} dx_2 dx_1 = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2 x_1^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} \cdot \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\} \cdot J(x_1) dx_1, \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

$$\text{где } J(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_\xi \sqrt{1-r^2})} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x_2 - rx_1)^2}{2(\sigma_\xi \sqrt{1-r^2})^2} \right\} dx_2$$

после подстановки  $z = (x_2 - rx_1)$  можно представить в виде

$$J(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2 + 2rx_1 \cdot z + (rx_1)^2)}{\sqrt{2\pi}(\sigma_\xi \sqrt{1-r^2})} \cdot \exp \left\{ -\frac{z^2}{2(\sigma_\xi \sqrt{1-r^2})^2} \right\} dz \quad (4.14)$$

Из 3 слагаемых, на которые распадается данный интеграл, первое вновь может восприниматься как дисперсия нормальной СВ с нулевым математическим ожиданием и эффективным значением  $\sigma_\xi \sqrt{1-r^2}$ , второе дает нулевое значение вследствие нечетности подынтегрального выражения, а при вычислении последнего может быть использовано свойство нормировки (1.18). Как следствие, интеграл (4.14), по сути, рассчитывать не требуется; для него сразу можно записать

$$J(x_1) = \sigma_\xi^2(1-r^2) + 0 + (rx_1)^2. \quad (4.15)$$

Подставляя вычисленный интеграл (4.15) в (4.13), имеем

$$B_\eta(\tau) = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 \cdot (\sigma_\xi^2(1-r^2) + (rx_1)^2) \cdot \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{2\sigma_\xi^2} \right\} dx_1. \quad (4.16)$$

Заметим, что при  $M_\xi = 0$  входящие в (4.16) слагаемые есть вто-

рой:  $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 \cdot W_\xi(x_1) dx_1 = \mu_2\{\xi\}$  и четвертый  $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^4 \cdot W_\xi(x_1) dx_1 = \mu_4\{\xi\}$

центральные моменты распределения. Чтобы ускорить расчет, воспользуемся формулой для четвертого центрального момента нормального распределения [1, (4.16)] и получим

$$B_\eta(\tau) = a^2 \cdot [\sigma_\xi^2(1-r^2) \cdot \sigma_\xi^2 + r^2 \cdot 3\sigma_\xi^4] = a^2 \cdot [\sigma_\xi^4 + 2r^2\sigma_\xi^4].$$

Полученное выражение не содержит явной зависимости от аргумента  $\tau$ , поскольку этот аргумент рядом с « $r$ » был для

краткости записи опущен. Теперь же, в соответствии с (2.20), расширим символ «r» до реального значения, а конкретнее, учтем

$$\sigma_{\xi}^2 \cdot r = K_{\xi}(0) \cdot r_{\xi}(\tau) = K_{\xi}(\tau) \underset{\text{при } M_{\xi}=0}{=} B_{\xi}(\tau). \quad (4.17)$$

Окончательно, взаимосвязь между корреляционными характеристиками процессов на входе и выходе квадратичного двухполупериодного выпрямителя можно представить в виде

$$B_{\eta}(\tau) = \left( a\sigma_{\xi}^2 \right)^2 + 2a^2 B_{\xi}^2(\tau). \quad (4.18)$$

Здесь первое слагаемое отражает факт отличия от нуля математического ожидания процесса на выходе выпрямителя (см. (4.11)), а второе слагаемое характеризует изменение динамики развития процесса вдоль оси времени.

В анализируемой ситуации на выпрямитель действует стационарный нормальный белый шум с корреляционной функцией (2.29). При квадратичном преобразовании подобной зависимости её центральный лепесток сузится, указывая на уменьшение интервала корреляции процесса, что косвенно свидетельствует о расширении спектра выходного процесса, однако для детального анализа изменения формы спектра следует вновь воспользоваться теоремой Винера-Хинчина.

Отметим, что согласно [7, табл. 2.2] треугольному сигналу длительности  $\tau_{\Pi}$ :  $s(t) = 1 - 2 \cdot |t| / \tau_{\Pi}$  при  $|t| \leq 0,5 \cdot \tau_{\Pi}$  соответствует комплексная спектральная плотность

$$G_s(\omega) = 0,5\tau_{\Pi} \cdot \text{sinc}^2(0,25\omega\tau_{\Pi}), \quad (4.19)$$

а из дуальности временного и спектрального описания сигналов следует, что временной зависимости

$$u(t) = 0,5\Omega \cdot \text{sinc}^2(0,25\Omega t) = \pi F \cdot \text{sinc}^2(0,5\pi F t) \quad (4.20)$$

соответствует спектральная плотность треугольной формы

$$G_u(f) = 1 - \frac{2 \cdot |f|}{F}, \quad |f| \leq F/2. \quad (4.21)$$

Тогда (при учете  $F = 4F_{\max}$ ) корреляционной функции процесса на выходе квадратичного выпрямителя

$$B_\eta(\tau) = (a\sigma_\xi^2)^2 + 2a^2(2F_{\max}N_0 \cdot \text{sinc}(2\pi F_{\max}\tau))^2 \quad (4.22)$$

будет соответствовать спектральная плотность мощности

$$G_u(f) = (a\sigma_\xi^2)^2 \cdot \delta(f) + \frac{2}{\pi} a^2 F_{\max} N_0^2 \cdot \left(1 - \frac{|f|}{2F_{\max}}\right), \quad |f| \leq 2F_{\max}. \quad (4.23)$$

Итак, при квадратичном преобразовании спектр воздействующего на выпрямитель процесса расширяется, меняя форму с прямоугольной на треугольную. Для выяснения причин этого эффекта полезно обратить внимание на то, что квадрат суммы двух гармоник может быть представлен в виде:

$$(\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 1 + \frac{\cos(2\alpha)}{2} + \frac{\cos(2\beta)}{2} + \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta). \quad (4.24)$$

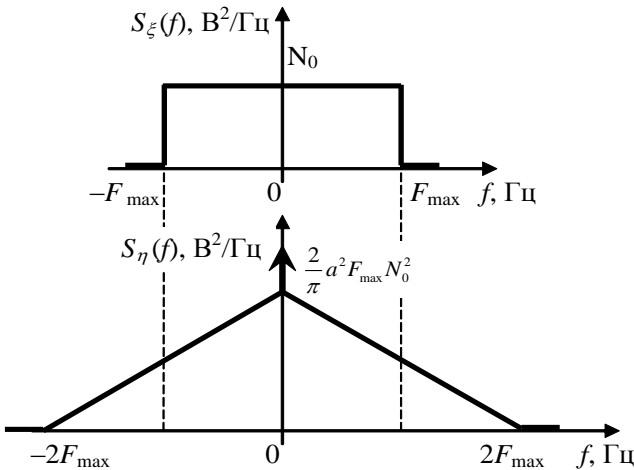


Рис. 4.6. Спектральные характеристики процессов на входе и выходе квадратичного выпрямителя



*Наличие удвоенных и суммарных частот объясняет, почему спектр процесса расширяется именно до  $2F_{\max}$ , а равное единиче первое слагаемое указывает на неизбежное появление на выходе ненулевой постоянной составляющей, порождающей дельта-функцию на нулевой частоте.*

## **4.2. Амплитудное и фазовое детектирование узкополосных нормальных случайных процессов**

4.2.1. Понятие огибающей и фазы случайного процесса. Особенности использования преобразователя Гильберта для формирования ортогональной компоненты СП

Как уже говорилось в п. 2.5.6, узкополосными называют СП, центральная частота спектра которых существенно превышает их ширину, а реализации представляют собой квазигармонические колебания

$$\xi(t) = A(t) \cdot \cos(\Theta(t)) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi(t)). \quad (4.25)$$

При выполнении условия узкополосности закон изменения амплитуды сигнала определяет медленная функция времени  $A(t)$ , называемая огибающей СП, а правило изменения во времени фазы  $\Theta(t)$  называют полной фазой процесса.

Если ввести в рассмотрение вспомогательный процесс

$$\eta(t) = A(t) \cdot \sin(\Theta(t)) = A(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi(t)), \quad (4.26)$$

то для расчета огибающей и полной фазы окажутся справедливыми правила

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}, \quad (4.27)$$

$$\Theta(t) = \arctg\left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right). \quad (4.28)$$

Ряд свойств определяемой правилом (4.27) огибающей  $A(t)$  можно получить, даже не конкретизируя правило формирования вспомогательного СП. Для этого запишем подробнее производную огибающей СП

$$A'(t) = \frac{2\xi(t)\xi'(t) + 2\eta(t)\eta'(t)}{2\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}} = \frac{\xi(t)\xi'(t) + \eta(t)\eta'(t)}{A(t)}$$

и отметим тот факт, что в моменты времени, когда  $\eta(t) = 0$ , неравенство

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} \geq |\xi(t)| \quad (4.29)$$

превращается в равенство, и при этом

$$|A'(t)| = |\xi'(t)|. \quad (4.30)$$

Учет знаков производной и самого процесса показывает, что функция  $A(t)$  действительно огибает пиковые значения процесса

$\xi(t)$  и в точках соприкосновения скользит по касательной относительно реализаций  $\xi(t)$ .

Свойствами (4.29), (4.30) огибающая (4.27) будет обладать независимо от способа формирования вспомогательного процесса  $\eta(t)$ . Если же в соответствии с [4, 8, 11] формировать  $\eta(t)$  как результат преобразования Гильберта (см. прил. 6), то анализ статистических характеристик огибающей заметно упрощается, поскольку сопряженный по Гильберту с исходным СП приобретает ряд интересных особенностей.

Во-первых, поскольку преобразователь Гильберта является фазовращателем и не изменяет интенсивности спектральных составляющих, то спектральные плотности мощности процессов на его входе и выходе останутся совпадающими. В соответствии с теоремой Винера-Хинчина (см. п. 2.3) это означает совпадение и дисперсий, и корреляционных функций этих процессов

$$D_\eta = D_\xi, \quad B_\eta(\tau) = B_\xi(\tau). \quad (4.31)$$

Для получения второго свойства следует проанализировать взаимнокорреляционную функцию процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$

$$B_{\xi\eta}(\tau) = m_1 \{ \xi(t) \cdot \eta(t-\tau) \} = m_1 \left\{ \xi(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(x)}{\pi(t-\tau-x)} dx \right\}$$

Изменяя порядок суммирования (т.е. перенося операцию усреднения по ансамблю реализаций внутрь интеграла), и учитывая, что  $m_1 \{ \xi(t) \cdot \xi(x) \} = B_\xi(t-x)$ , запишем

$$B_{\xi\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_\xi(t-x)}{\pi(t-\tau-x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_\xi(\theta)}{\pi(\theta-\tau)} d\theta = -\text{Hilb} \{ B_\xi(\tau) \},$$

т.е. функция  $B_{\xi\eta}(\tau)$  с точностью до знака может быть рассчитана как преобразование Гильберта от  $B_\xi(\tau)$ , а взаимная спектральная плотность мощности по правилу

$$S_{\xi\eta}(\omega) = -S_\xi(\omega) \cdot \dot{K}_r(\omega). \quad (4.32)$$

Представим взаимнокорреляционную функцию  $B_{\xi\eta}(\tau)$  как результат обратного преобразования Фурье от  $S_{\xi\eta}(\omega)$

$$\begin{aligned} B_{\xi\eta}(\tau) &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega) \dot{K}_r(\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega = \frac{-j}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S_\xi(\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega + \\ &+ \frac{j}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_\xi(\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{+\infty} S_\xi(-\Omega) e^{-j\Omega\tau} d\Omega - \frac{1}{2\pi j} \int_0^{+\infty} S_\xi(\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

С учётом четности спектральной плотности мощности несложно заметить, что косинусные компоненты двух интегралов будут компенсировать друг друга, а синусные – дополнять

$$B_{\xi\eta}(\tau) = - \int_0^{+\infty} S_\xi(\omega) \frac{e^{+j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2\pi j} d\omega = - \int_0^{+\infty} S_\xi(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega. \quad (4.33)$$

Из (4.33) следует, что в совпадающие моменты времени, т.е. при  $\tau = 0$  процессы на входе и выходе преобразователя Гильберта являются некоррелированными.

#### 4.2.2. Амплитудное и фазовое детектирование нормального шума

Для выделения огибающей и фазы случайных процессов используют амплитудный и фазовый детекторы. Идеальным амплитудным детектором называют устройство, которое в ответ на воздействие узкополосного СП  $\xi(t)$  формирует на своем выходе его огибающую  $A(t)$ . Напряжение на выходе идеального фазового детектора, формируемое в ответ на воздействие узкополосного СП  $\xi(t)$ , определяется набегом фазы, т.е. пропорционально  $\Delta\varphi(t) = \Theta(t) - 2\pi \cdot f_0 \cdot t$ . Устройствами, реализующими операции детектирования, могут служить амплитудный коллекторный детектор [6, с. 295-296], диодный детектор [6, с. 297], фазовый диодный детектор [6, с. 298-299] и другие устройства.

Для определения характеристик процессов, возникающих при детектировании нормального шума, обратим внимание на то, что:

а) процесс  $\eta(t)$ , возникающий на выходе линейного преобразователя Гильберта в ответ на нормальное входное воздействие  $\xi(t)$ , обязан также иметь нормальное распределение;

б) согласно (4.33) значения этих процессов в совпадающие моменты некоррелированы, что при нормальном законе распределения означает их независимость;

в) из равенства дисперсий этих процессов (см. (4.31)) следует, что совпадают и эффективные значения этих процессов  $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma$ ;

г) наконец, мгновенные (т.е. соответствующее конкретному моменту времени  $t$ ) значения огибающей и фазы формируются в соответствии с (4.27) и (4.28) из мгновенных значений самого СП  $\xi(t)$  и процесса  $\eta(t)$ , сопряженного с ним по Гильберту.

Таким образом, расчет характеристик огибающей  $A(t)$  и фазы  $\Theta(t)$  фактически не отличается от определения свойств полярных координат точки, декартовы координаты которой подчиняются нормальному распределению. Используя результаты анализа из [1, с. 160-161], зафиксируем, что совместная двумерная плотность вероятности огибающей и фазы будет подчиняться соотношению

$$W_{A\Theta}(r, \varphi) = r \cdot W_{\xi\eta}(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi), \quad r \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq +\pi, \quad (4.34)$$

Из (4.34) по аналогии с [1, (6.49), (6.50)] можно установить:  
 1. Для нормального случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым средним значением огибающая имеет релеевский закон распределения с параметром  $\sigma$ , равным эффективному значению воздействия

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_\xi^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2}\right), \quad x \geq 0. \quad (4.35)$$

При этом, в соответствии со свойствами распределения Релея

$$M_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_\xi \approx 1,25 \cdot \sigma_\xi, \quad (4.36)$$

$$D_A = \sigma_\xi^2 \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \approx 0,43 \cdot \sigma_\xi^2. \quad (4.37)$$

2. Фаза нормального случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым средним имеет равномерный в пределах от минус  $\pi$  до плюс  $\pi$  закон распределения.

#### 4.2.3. Амплитудное и фазовое детектирование смеси нормального шума и гармонического сигнала

Пусть теперь детектированию подвергается смесь детерминированного гармонического сигнала и узкополосного нормального шума

$$\zeta(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \psi_0) + \xi(t), \quad (4.38)$$

где  $U_0$ ,  $\omega_0$  и  $\psi_0$  – некоторые константы. Смесь шума с детерминированным сигналом также будет подчиняться нормальному распределению, однако процесс  $\zeta(t)$  уже не будет стационарным; его математическое ожидание будет изменяться во времени в соответствии с детерминированной компонентой

$$m_1 \{ \zeta(t) \} = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (4.39)$$

Ортогональный к исходному процесс  $\zeta_r(t)$ , формируемый на выходе преобразователя Гильберта, будет также состоять из двух компонент: детерминированного сигнала (см. (П6.4))

$$m_1 \{ \zeta_r(t) \} = U_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \psi_0). \quad (4.40)$$

и нормального шума  $\xi_r(t)$  некоррелированного и независимого по отношению к исходной шумовой компоненте  $\xi(t)$ .

Факт взаимной независимости нормальных компонент, входящих (4.27), (4.28) позволяет записать для смеси соотношение (4.34) в виде

$$\begin{aligned} W_{A\Theta}(r, \varphi) &= r \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{[r \cdot \cos \varphi - U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \psi_0)]^2}{2\sigma^2}\right) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{[r \cdot \sin \varphi - U_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \psi_0)]^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + U_0^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{rU_0 \cdot \cos(\varphi - (\omega_0 t + \psi_0))}{\sigma^2}\right). \quad (4.41) \end{aligned}$$

Для выделения из (4.41) сведений, относящихся к огибающей процесса, проинтегрируем  $W_{A\Theta}(r, \varphi)$  по всем возможным значениям фазы  $\varphi$

$$W_A(r) = \int_{-\pi}^{+\pi} W_{A\Theta}(r, \varphi) d\varphi = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + U_0^2}{2\sigma^2}\right) \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \exp\left(-\frac{rU_0 \cdot \cos \Psi}{\sigma^2}\right) d\Psi$$

Здесь введено обозначение

$$\Psi = \varphi - (\omega_0 t + \psi_0) \quad (4.42)$$

для разности между потенциально возможным значением фазы  $\varphi$  и полной фазой детерминированной компоненты сигнала в момент времени  $t$ , а также обозначение  $\alpha = -(\omega_0 t + \psi_0)$  для упрощения записи подлежащего интегрированию диапазона углов. Для завершения расчетов используем табличный интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(m \cdot \cos x) dx = I_0(m), \quad (4.43)$$

где  $I_0()$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода (функция Бесселя для мнимого аргумента).

В итоге, плотность вероятности огибающей смеси гармонического сигнала с амплитудой  $U_0$  и нормального шума с эффективным значением  $\sigma$  имеет вид

$$W_A(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + U_0^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{rU_0}{\sigma^2}\right), \quad r \geq 0. \quad (4.44)$$

Это распределение называется обобщенным законом распределения Релея или законом Релея-Райса, а краткую таблицу значений модифицированной функции Бесселя можно найти в прил. 3.

Математическое ожидание распределения Релея-Райса равно

$$M_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_\xi \cdot \left\{ I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + h^2 \cdot \left[ I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.45)$$

где отношение сигнал-шум  $h^2 = 0,5 \cdot U_0^2 / \sigma_\xi^2$ . (4.46)

Расчет отклика на смесь сигнала и шума фазового детектора, формирующего на своем выходе набег фазы  $\Delta\varphi(t)$ , требует расчета интеграла

$$W_\Theta(\varphi) = \int_0^{+\infty} W_{A\Theta}(r, \varphi) dr = \int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{U_0^2 + r^2 - 2rU_0 \cos \Psi}{2\sigma^2}\right) dr.$$

Добавлением в показатель экспоненты двух противоположных по знаку слагаемых  $\pm(U_0 \cos \chi)^2$  этот интеграл можно преобразовать к виду

$$W_{\Theta}(\varphi) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{U_0^2(1-\cos^2\Psi)}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(r-U_0 \cos \Psi)^2}{2\sigma^2}\right) dr = \\ = \exp\left(-\frac{U_0^2 \sin^2 \Psi}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-U_0 \cos \Psi}^{+\infty} \frac{(z+U_0 \cos \Psi)}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr.$$

Окончательно, для фазы смеси гармонического сигнала с нормальным шумом получаем плотность вероятности

$$W_{\Delta\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{U_0^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\chi \cdot F_{cm}(\chi)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{\chi^2}{2} - \frac{U_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.47)$$

где  $\chi = \left(\frac{U_0}{\sigma}\right) \cdot \cos \Psi = \left(\frac{U_0}{\sigma}\right) \cdot \cos(\varphi - (\omega_0 t + \psi_0))$ . (4.48)

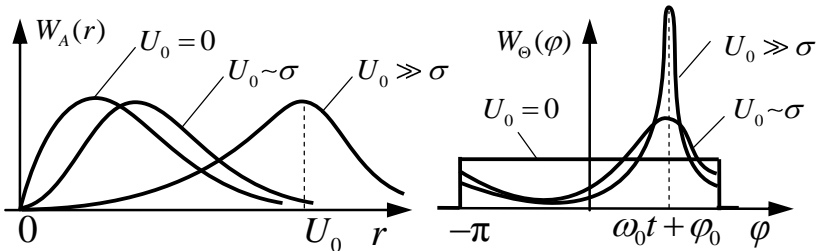


Рис. 4.7. Вероятностные характеристики процессов на выходе амплитудного и фазового детекторов

Итак, при близких к нулю отношениях сигнал-шум распределение огибающей смеси гармонического сигнала с нормальным шумом оказывается близким к релейевскому, а распределение фазы почти не отличается от равномерного. Однако, по мере роста интенсивности сигнала на выходе амплитудного детектора возрастает вероятность наблюдения значений близких к  $U_0$ , а на выходе фазового детектора, регистрирующего набег



фазы, т.е. её отклонение от линейной компоненты  $\omega_0 t$ , наиболее вероятные значения будут концентрироваться в небольшой окрестности истинного значения  $\Delta\varphi \approx \psi_0$ .

Отметим, что при использовании аппроксимации

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{8x} + \dots\right), \quad x \gg 0, \quad (4.49)$$

распределение Релея-Райса может быть представлено в виде

$$W_A(r) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(r-U_0)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sqrt{\frac{r}{U_0}}, \quad r \geq 0, U_0 \gg \sigma. \quad (4.50)$$

т.е. характер случайного отклика амплитудного детектора незначительно отличается от нормального с параметрами  $a \approx U_0$ ,  $\sigma_A \approx \sigma$ .

В завершение, проанализируем возможность использования амплитудного детектора для обнаружения гармонического сигнала на фоне узкополосного нормального шума. Поскольку мгновенные значения огибающей на выходе детектора как при воздействии на его вход лишь шума, так и при наличии сигнала являются случайными, то в качестве контролируемой величины будем рассматривать среднее значение отклика детектора на протяженном интервале времени.

При отсутствии полезного сигнала это среднее значение будет совпадать с математическим ожиданием распределения Релея

$$M_{A|U_0=0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma. \quad (4.51)$$

Для смеси шума с мощным гармоническим колебанием при расчете математического ожидания будем руководствоваться (4.45), (4.46), аппроксимацией (4.49) и соотношением

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 - \frac{3}{8x} + \dots\right), \quad x \gg 0. \quad (4.52)$$

Подставляя (4.49), (4.53) в (4.45), получим

$$M_{A|U_0 \gg \sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \cdot e^{-0,5h^2} \cdot \left[ \frac{e^{0,5h^2}}{\sqrt{\pi h}} \left( 1 + \frac{1}{4h^2} \right) + h^2 \left( \frac{e^{0,5h^2}}{\sqrt{\pi h}} \left( 1 + \frac{1}{4h^2} \right) + \frac{e^{0,5h^2}}{\sqrt{\pi h}} \left( 1 - \frac{3}{4h^2} \right) \right) \right] \approx \sqrt{2} \sigma h. \quad (4.53)$$

Таким образом, для больших отношений сигнал-шум имеем

$$\frac{M_{A|U_0 \gg \sigma}}{M_{A|U_0=0}} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} h, \quad (4.54)$$

т.е. величина отклика детектора на мощное гармоническое воздействие возрастает прямо пропорционально отношению сигнал-шум.

Если же амплитуда гармонического колебания будет мала, то при расчете математического ожидания можно считать

$$\text{при } x \approx 0: \quad I_0(x) \approx 1, \quad I_1(x) \approx x/2, \quad e^{-x} \approx 1-x, \quad (4.55)$$

следовательно,

$$M_{A|U_0 > 0} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \cdot e^{-0,5h^2} \cdot \left[ 1 + h^2 \left( 1 + \frac{h^2}{4} \right) \right], \quad (4.56)$$

а значит для малых отношений сигнал-шум

$$\frac{M_{A|U_0 > 0}}{M_{A|U_0=0}} \approx 1 + \frac{h^2}{2}, \quad h < 1. \quad (4.57)$$

Учитывая особенности квадратичной зависимости, можно отметить, что при  $h < 1$  наличие гармонической компоненты в смеси с шумом почти не влияет на величину отклика детектора. Т.е. при амплитудном детектировании слабые сигналы подавляются помехой.

*Примечание: Анализ воздействия смеси гармонического сигнала и нормального шума на частотный детектор можно найти, например, в [11, с. 66-69].*

### **4.3. Нелинейное инерционное преобразование случайных процессов**

Проанализированные выше нелинейные преобразования либо являлись безынерционными, либо формируемые на выходе преобразователей сигналы являлись «медленными» функциями времени, такими, что по отношению к продуктам преобразования инерционностью цепи можно было пренебречь. В частности, хотя амплитудный детектор и является инерционным по отношению к воздействию на его вход высокочастотному колебанию, но по отношению к формирующейся на его выходе огибающей он безынерционен. Аналогично и фазовый детектор, выделяющий «медленный» закон изменения набега фазы воздействующего на него колебания по отношению к этому выходному сигналу безынерционен, что позволяет ограничиться относительно простым способом анализа отклика детектора.

Если же инерционностью нелинейной цепи при заданных воздействиях нельзя пренебрегать, то взаимосвязь процессов на входе и выходе цепей будет описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, общих методов решения которых не существует. Поэтому задачи, связанные с исследованием нелинейных инерционных преобразований случайных процессов, почти всегда решаются лишь приближенно, на основе различных искусственных приемов.

Один из таких приемов состоит в представлении нелинейной инерционной цепи комбинацией линейной инерционной и нелинейной безынерционной цепей. Задача исследования воздействия случайных процессов на линейную цепь рассматривалась в предыдущем, третьем разделе. Было показано, что при прохождении СП через линейные цепи достаточно просто определить спектральную плотность (или корреляционную

функцию) выходного сигнала, но сложно – закон распределения. В нелинейных безынерционных цепях основная трудность состоит в нахождении корреляционной функции. При замене же нелинейной инерционной цепи комбинацией линейной инерционной и нелинейной безынерционной цепей сложности этих двух подходов дополняют друг друга, позволяя получать лишь приближенные и весьма громоздкие результаты.

## **5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ**

### **5.1. Аналоговые и цифровые системы передачи информации**

По принципу функционирования системы передачи информации можно разделить на цифровые и аналоговые. В цифровых системах передаваемые сообщения должны быть представлены последовательностью символов какого-то алфавита, каждому из которых ставится в соответствие радиосигнал точно известной формы. Излучаемая передатчиком системы передачи информации (СПИ) последовательность радиоимпульсов искажается в канале связи из-за действия помех, однако если интенсивность помех не слишком значительна, то вероятность правильного распознавания на приемной стороне передававшейся последовательности сигналов будет оставаться высокой, обеспечивая корректный прием сообщения.

Однако первыми, задолго до цифровых СПИ, появились аналоговые системы передачи информации. С позиций схемотехники они гораздо проще цифровых СПИ, т.к. излучаемые радиосигналы получаются в них за счет непосредственной амплитудной, частотной или фазовой модуляции подлежащих передаче информационных сигналов. На приемной же стороне для извлечения информации достаточно соответствующего аналогового демодулятора. Формирование и использование для передачи информации высокочастотных модулированных радиосигналов преследует в аналоговых СПИ две цели:

1. Для эффективного излучения и приёма радиоизлучения размеры антенных систем должны быть соизмеримы с длиной волны колебания, поэтому для излучения длинноволновых колебаний (с частотами до 300 кГц) формально необходимы антенны километровых размеров, в то время как частоте 300 МГц соответствует длина волны в 1 метр.

2. При сосуществовании в эфире радиосигналов разных СПИ наиболее простым способом разделения информации, предназначенной разным абонентам, является разнесение сигналов по частоте. При этом для выделения «своего» сигнала каждой системе достаточно осуществить легко реализуемую частотную фильтрацию принимаемых колебаний.

Прием информации в аналоговых СПИ осложняется наличием помех в каналах связи. И полезные сигналы, и помехи в аналоговых СПИ являются случайными процессами и имеют одинаковую физическую природу, поэтому способов безошибочного выделения полезного сигнала из смеси с помехами в аналоговых СПИ не существует. Однако если динамика изменения сигнальной и помеховой составляющих смеси отличаются друг от друга, то можно попытаться воспользоваться этими различиями для ослабления влияния помех на полезный сигнал.

Отметим, что системы обработки могут быть как линейными, так и нелинейными. Нелинейные фильтры могут оказаться эффективными при фильтрации сигналов на фоне негауссовских, импульсных помех. К примеру, весьма эффективным средством устранения импульсных помех является медианный фильтр, обеспечивающий заметно меньшее, чем иные типы фильтров, искажение таких фрагментов сигналов, как резкий перепад или совокупность кусочно-линейных участков. Однако достижение подобных полезных эффектов возможно лишь при точном и детальном учете свойств обрабатываемых сигналов и шумов, а анализировать нелинейные системы существенно сложнее, чем линейные. Вместе с тем, узкополосная фильтрация, часто применяемая при приеме радиосигналов, как правило, сопровождается эффектами нормализации, а, как доказывается в [4], при гауссовских помехах достичь снижения среднеквадратической погрешности за счет перехода к нелинейной фильтрации невозможно, поэтому далее будем рассматривать вопросы лишь оптимальной линейной фильтрации сигналов.

## 5.2. Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации

На вход устройства обработки на фоне аддитивного шума  $n(t)$  поступает полезный сигнал  $s(t)$  неизвестной формы. И шум, и сигнал являются некоррелированными стационарными случайными процессами, а их энергетическими характеристиками, отражающими также динамику изменения процессов во времени, служат спектральные плотности мощности  $N(\omega)$  и  $S(\omega)$ .

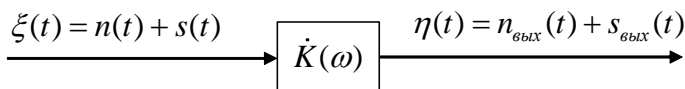


Рис. 5.1. Сигналы на входе и выходе фильтрующей цепи

Необходимо найти линейный фильтр с постоянными параметрами, обеспечивающий минимальную среднеквадратическую погрешность выделения полезного сигнала  $s(t)$  из его смеси с помехой  $n(t)$ . Если для сигнала ошибки ввести обозначение

$$\Delta(t) = \eta(t) - s(t), \quad (5.1)$$

то критерий оптимизации при фильтрации сигнала неизвестной формы может быть представлен в виде

$$P_{\Delta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \Delta^2(t) dt \right\} \xrightarrow{\dot{K}(\omega) = \dot{K}_{\text{opt}}(\omega)} \min. \quad (5.2)$$

## 5.3. Характеристики и причины оптимальности фильтра Колмогорова-Винера

Искомое устройство фильтрации должно быть линейным, поэтому для него будет справедлив принцип суперпозиции,

позволяющий отдельно анализировать влияние на выходной сигнал  $\eta(t)$  шумовой и сигнальной компонент воздействия  $\xi(t)$ .

Перепишем сигнал ошибки  $\Delta(t)$  в виде суммы двух некоррелированных стационарных случайных процессов

$$\Delta(t) = n_{\text{ошибка}}(t) + \Delta_s(t), \quad (5.3)$$

где 
$$\Delta_s(t) = s_{\text{ошибка}}(t) - s(t). \quad (5.4)$$

Обозначим через  $\dot{G}_s^{(i)}(\omega)$  комплексный спектр  $i$ -й реализации воздействия  $s(t)$ . Тогда спектр  $i$ -й реализации компоненты  $\Delta_s(t)$  будет равен  $\dot{K}(\omega) \cdot \dot{G}_s^{(i)}(\omega) - \dot{G}_s^{(i)}(\omega)$ , а коэффициент передачи, определяющий формирование компоненты  $\Delta_s(t)$  из полезного сигнала  $s(t)$  составит  $(\dot{K}(\omega) - 1)$ . В то же время формирование шумовой компоненты  $n_{\text{ошибка}}(t)$  происходит в соответствии с коэффициентом передачи фильтра  $\dot{K}(\omega)$ . Различие коэффициентов передачи для разных компонент сигнала ошибки возникает из-за того, что шум входит в  $\Delta(t)$  «как есть», а разность (5.4) характеризует изменение сигнала после фильтрации по отношению к его исходному виду.

Приведенные выше рассуждения с опорой на (3.4) позволяют записать выражение для расчета средней мощности сигнала ошибки  $\Delta(t)$  в виде

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ S(\omega) \cdot |\dot{K}(\omega) - 1|^2 + N(\omega) \cdot |\dot{K}(\omega)|^2 \right] d\omega. \quad (5.5)$$

Представим комплексный коэффициент передачи фильтра в виде

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega) \cdot \exp(j \cdot \varphi_K(\omega)), \quad (5.6)$$

где  $K(\omega)$  – амплитудно-частотная, а  $\varphi_K(\omega)$  – фазо-частотная характеристики фильтра, и оценим влияние ФЧХ фильтра на мощ-



ность  $P_{\Delta}$ . Очевидно, что на второе слагаемое в подынтегральном выражении в (5.5) ФЧХ фильтра оказывать влияния не будет, а для первого слагаемого можно записать

$$\begin{aligned} \left| \dot{K}(\omega) - 1 \right|^2 &= (K(\omega) \cdot \cos(\varphi_K(\omega)) - 1)^2 + (K(\omega) \cdot \sin(\varphi_K(\omega)))^2 = \\ &= K^2(\omega) + 1 - 2K(\omega) \cdot \cos(\varphi_K(\omega)). \end{aligned}$$

Оба слагаемых в подынтегральном выражении в (5.5) неотрицательны, поэтому минимум  $P_{\Delta}$  будет наблюдаться при минимальном  $\left| \dot{K}(\omega) - 1 \right|^2$ , для чего в предыдущем выражении следует брать  $\cos(\dots) = 1$ , что обеспечивается при

$$\varphi_K(\omega) \equiv 0. \quad (5.7)$$

При выполнении (5.7) справедливо

$$\left| \dot{K}(\omega) - 1 \right|^2 = \left[ K^2(\omega) + 1 - 2K(\omega) \cdot \cos(\varphi_K(\omega)) \right] = (K(\omega) - 1)^2.$$

Учтем дополнительно допустимость записи

$$S(\omega) = \frac{S(\omega)(S(\omega) + N(\omega))}{S(\omega) + N(\omega)} = \frac{S^2(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)} + \frac{S(\omega) \cdot N(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)}.$$

Тогда выражение (5.5) можно будет переписать в виде

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ K^2(\omega) \cdot (S(\omega) + N(\omega)) - 2K(\omega) \cdot S(\omega) + S(\omega) \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( K(\omega) \sqrt{S(\omega) + N(\omega)} \right)^2 - 2K(\omega) \sqrt{S(\omega) + N(\omega)} \cdot \frac{S(\omega)}{\sqrt{S(\omega) + N(\omega)}} + \right. \\ &\left. + \left( \frac{S(\omega)}{\sqrt{S(\omega) + N(\omega)}} \right)^2 + \frac{S(\omega) \cdot N(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)} \right] d\omega, \quad \text{откуда окончательно} \end{aligned}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( K(\omega) \sqrt{S(\omega) + N(\omega)} - \frac{S(\omega)}{\sqrt{S(\omega) + N(\omega)}} \right)^2 + \frac{S(\omega) \cdot N(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)} \right] d\omega.$$

Минимальное значение последнего полученного выражения достигается, очевидно, при выполнении условия

$$K(\omega) \sqrt{S(\omega) + N(\omega)} \equiv \frac{S(\omega)}{\sqrt{S(\omega) + N(\omega)}},$$

что позволяет выразить требования к амплитудно-частотной характеристике оптимального фильтра в виде

$$K_{\text{опт}}(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)} = \frac{1}{1 + N(\omega) / S(\omega)}, \quad (5.8)$$

где  $S(\omega)$  – спектральная плотность мощности полезного сигнала;  $N(\omega)$  – спектральная плотность мощности помехи, в смеси с которой полезный сигнал поступает на вход устройства обработки.

Фильтр с амплитудно-частотной характеристикой (5.8) и фазо-частотной характеристикой

$$\varphi_{K_{\text{опт}}}(\omega) = -\omega \cdot t_3 \quad (5.9)$$

называется **фильтром Колмогорова-Винера** и обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку выделения сигнала неизвестной формы из смеси со стационарным аддитивным шумом. Полученная ранее нулевая фазо-частотная характеристика (5.7) является частным случаем требования (5.9) и предполагает восстановление сигнала без его задержки. Если же задержка сигнала на незначительную величину  $t_3$  считается допустимой, то это позволяет расширить класс подходящих фильтров и ограничиться требованием линейности фазо-частотной характеристики (5.9).

Отметим, что полученное ранее выражение для  $P_{\Delta}$  позволяет не только определить требования к оптимальному фильтру, но и получить формулу для расчета обеспечиваемой им минимальной средней мощности сигнала ошибки

$$P_{\Delta cp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega) \cdot N(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1/N(f) + 1/S(f)} df. \quad (5.10)$$

Проанализируем физический смысл требований (5.8)-(5.9). Амплитудно-частотная характеристика фильтра Колмогорова-Винера оказывается:

- нулевой на всех частотах, где нет спектральных составляющих полезного сигнала, чтобы предотвратить передачу на выход компонент помехи;

- единичной на частотах, где действует лишь сигнал, чтобы предотвратить его искажения;

- близкой к единице на участках с высоким отношением сигнал-шум (ОСШ), где важнее минимизировать искажения сигнала, чем отфильтровать шум, и близкой к нулю там, где ОСШ мало и «спасать сигнал» почти бесполезно.

Фазо-частотная характеристика фильтра никак не влияет на шумовую компоненту сигнала ошибки, а для сигнала любая нелинейность ФЧХ будет приводить к рассогласованию времён задержки разных составляющих и искажению формы сигнала, что и объясняет оптимальность линейной ФЧХ.

#### 5.4. Пример применения фильтра Колмогорова-Винера для фильтрации полезного сигнала из смеси с шумом

Пусть полезный сигнал с показанной на рис. 5.2 СПМ, постоянной и равной  $S(f) = 2 \cdot 10^{-12}$  (В<sup>2</sup>/Гц) в интервале частот  $1 \pm 0,2$  МГц, поступает на вход обработки в смеси с низкочастотным аддитивным шумом, обладающим СПМ (в В<sup>2</sup>/Гц)

$$N(f) = (1 + f^2)^{-1}. \quad (5.11)$$

Определим АЧХ фильтра Колмогорова-Винера, рассчитаем среднюю мощность сигнала ошибки, сопровождающую его применение, а также мощность сигнала ошибки, получаемого

при идеальной полосовой фильтрации исходного случайного процесса.

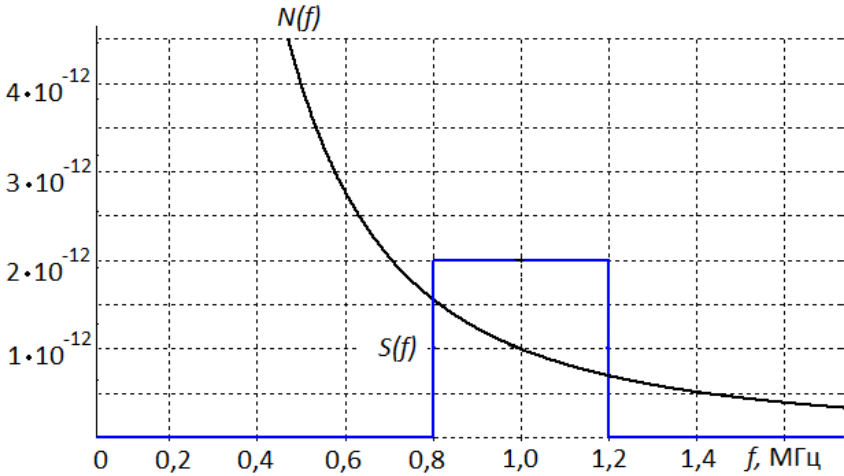


Рис. 5.2. Спектральные плотности мощности сигнала и шума

Опираясь на требования (5.8) к АЧХ фильтра Колмогорова-Винера, запишем

$$K_{\text{opt}}(f) = \frac{S(f)}{S(f) + N(f)} \approx \frac{1 + f^2}{5 \cdot 10^{11} + f^2}, \quad |f - 10^6| \leq 2 \cdot 10^5. \quad (5.12)$$

График АЧХ (5.12) показан на рис. 5.3. На частоте 0,8 МГц шум характеризуется СПМ близкой по величине к СПМ сигнала, поэтому коэффициент передачи фильтра оказывается близким к 0,5. На правой же границе полосы частот, занятой сигналом, интенсивность шума заметно ослабевает, а коэффициент передачи фильтра заметно увеличивается.

Для расчета средней мощности сигнала ошибки, обеспечиваемой при оптимальной фильтрации, воспользуемся (5.10):

$$P_{\Delta cp} = 2 \cdot \int_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} \frac{1}{(1+f^2)+5 \cdot 10^{11}} df = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^{11}}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{f}{\sqrt{5 \cdot 10^{11}}} \right) \Big|_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} =$$

$$= 1,4 \cdot 10^{-6} \cdot [\operatorname{arctg}(1,7) - \operatorname{arctg}(1,13)] = 2,73 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2.$$

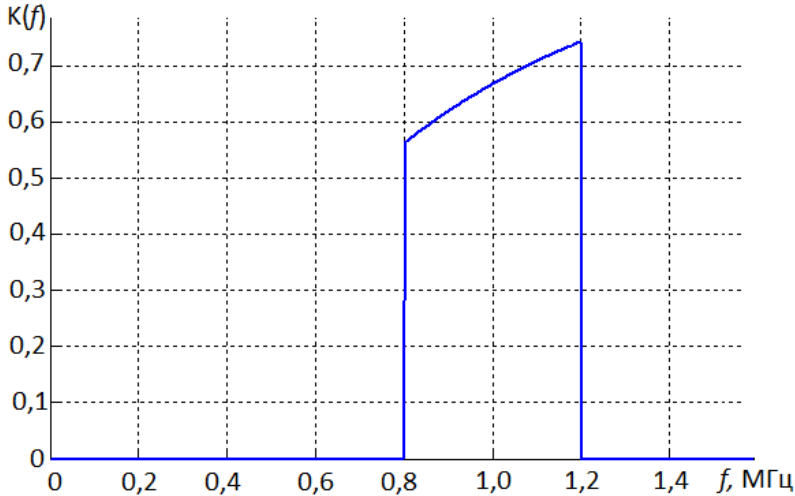


Рис. 5.3. Коэффициент передачи фильтра Колмогорова-Винера

Если же попытаться воспользоваться идеальным полосовым фильтром, то сигнал искажаться не будет, но весь шум, уместяющийся в полосу пропускания ИПФ, будет «как есть» составлять сигнал ошибки  $\Delta(t) = n_{\text{вх}}(t)$ . В этом случае:

$$P_{\Delta cp} = 2 \cdot \int_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} N(f) df = 2 \cdot \int_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} \frac{df}{1+f^2} = 2 \cdot \operatorname{arctg}(f) \Big|_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} =$$

$$= 2 \cdot [\operatorname{arctg}(1,2 \cdot 10^6) - \operatorname{arctg}(0,8 \cdot 10^6)] = 8,33 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2.$$

Таким образом, более высокий по сравнению с фильтром Колмогорова-Винера коэффициент передачи не обеспечивает необходимой фильтрации шума, из-за чего средняя мощность сигнала ошибки увеличивается более чем втрое.

Проанализируем целесообразность уменьшения коэффициента передачи ИПФ до  $K_0 = 0,6$ . При этом средняя мощность шума, проходящего на выход фильтра, снижается до  $P_{n \text{ вых}} = 0,6^2 \cdot 8,33 \cdot 10^{-7} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2$ , что всё равно чуть превышает величину  $P_{\Delta \text{ cp}}$  для фильтра Колмогорова-Винера, плюс к  $P_{n \text{ вых}}$  следует ещё добавить составляющую, возникающую из-за искажений полезного сигнала. Таким образом, подбор величины коэффициента передачи ИПФ хотя и позволяет снизить среднюю мощность сигнала ошибки, но погрешность фильтрации всё же остаётся более высокой чем для случая фильтра Колмогорова-Винера.

Отметим, что при увеличении интенсивности полезного сигнала, например, вдвое ( $S(f) = 4 \cdot 10^{-12} \text{ В}^2/\text{Гц}$ ), мощность сигнала ошибки тоже увеличивается

$$P_{\Delta \text{ cp } 2} = 2 \cdot \int_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} \frac{1}{(1 + f^2) + (4 \cdot 10^{-12})^{-1}} df = \frac{1}{0,5 \cdot 10^6} \cdot \arctg \left( \frac{f}{0,5 \cdot 10^6} \right) \Bigg|_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} = \\ = 2 \cdot 10^{-6} \cdot [\arctg(2,4) - \arctg(1,6)] = 3,28 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2,$$

однако здесь нет парадокса, т.к. степень искажений определяется соотношением между  $P_{\Delta \text{ cp}}$  и мощностью самого полезного сигнала. Для исходной ситуации

$$P_S = 2 \cdot \int_{0,8 \cdot 10^6}^{1,2 \cdot 10^6} 2 \cdot 10^{-12} df = 2 \cdot 0,4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-12} = 1,6 \cdot 10^{-6},$$

т.е. мощность сигнала ошибки  $P_{\Delta cp} = 2,73 \cdot 10^{-7}$  составляет примерно 17% от мощности случайного процесса  $S(t)$ . В новой же ситуации, при  $P_{S_2} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2$ , увеличившаяся мощность сигнала ошибки  $P_{\Delta cp 2} = 3,28 \cdot 10^{-7}$  составляет примерно 10% от мощности полезного сигнала, что соответствует лучшему качеству фильтрации.

## 6. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ ПОМЕХ

### 6.1. Теоретические основы обнаружения сигналов известной формы

Целью обработки данных при обнаружении сигналов является принятие решения о наличии обнаруживаемого сигнала в составе принятой выборки данных. И как бы сложно или просто ни была организована обработка данных на финальном этапе нужно будет принимать лишь одно из двух решений: «Да = сигнал был» или «Нет = сигнал не наблюдался». Как следствие, основой принятия решения может служить пороговая схема, показанная на рис. рис. 6.1. Здесь на вход обнаружителя поступает либо помеха  $\xi(t)$ , либо детерминированный полезный сигнал  $u(t)$  в смеси с той же помехой. Обработанный шум (либо смесь сигнала и шума) поступает на вход решающего устройства, обозначенного на рисунке как «РУ», которое и обязано сформировать решение о регистрации сигнала.

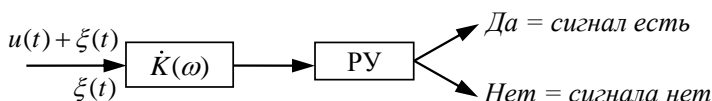


Рис. 6.1. Структурная схема обнаружителя  
точно известного сигнала

Формально, в качестве устройства обработки могут использоваться как линейные, так и нелинейные устройства, однако сопоставление потенциальных возможностей подобных подходов показывает, что нелинейная обработка может обеспечить преимущества над линейной лишь при заметном отличии распределения помехи  $\xi(t)$  от нормального. Однако большинство систем, в состав которых могут входить обнару-



жители, как правило, предусматривают относительно узкополосную фильтрацию поступающих на их вход процессов, что сопровождается проявлением эффекта нормализации (см. п. 3.3). Таким образом, сопровождающая появление полезного сигнала помеха  $\xi(t)$ , как правило, является стационарной и имеет распределение близкое к нормальному, когда добавление в обнаружитель нелинейных элементов не даёт каких-либо преимуществ. Наконец, и трудоемкость анализа нелинейных фильтров существенно превосходит трудности исследования фильтров линейных.

В связи с этим, ограничимся анализом обнаружителей, в которых в роли обработчика смеси полезного сигнала с помехой выступает линейный фильтр с комплексным коэффициентом передачи  $K(\omega)$ .

## **6.2. Критерий качества при обнаружении полезного сигнала на фоне аддитивного шума**

Как правило, помехой, сопровождающей полезный сигнал, является СП с нулевой постоянной составляющей, что означает: в отсутствие полезного сигнала прошедший через линейный фильтр и поступающий на вход решающего устройства процесс также будет иметь нулевое математическое ожидание. Приход вместе с помехой полезного сигнала может сместить среднее значение отклика обрабатывающего фильтра в отрицательную или положительную область. Если это смещение будет иметь значительную величину, то плотности вероятности формируемых линейным фильтром СП будут существенно разнесены друг относительно друга, что может служить основой их успешного различения (см. рис. 6.2). Таким образом, обнаружение полезного сигнала на фоне шума будет осуществляться тем надежнее, чем меньше степень перекрытия распределений, представленных на рис. 6.2.

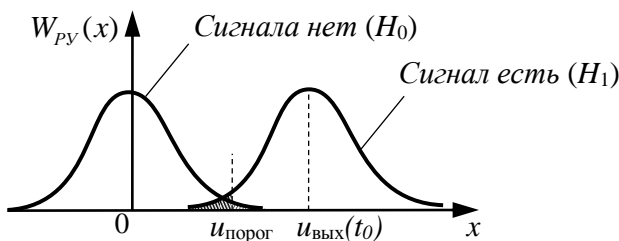


Рис. 6.2. Распределения процессов, поступающих на вход решающего устройства при обнаружении сигналов

Механизм обнаружения состоит в том, что в некоторый заранее выбранный момент времени  $t_0$  решающее устройство сравнивает мгновенное значение сигнала, поступающего с выхода линейного фильтра, с пороговым уровнем  $u_{порог}$  и при фиксации превышения порога принимается решение о том, что сигнал на вход устройства поступал, а при значениях  $u_{вых}(t_0)$  меньших порога считается, что полезный сигнал отсутствовал. При этом возможны ошибки двух типов:

а) ошибка первого рода или **ложная тревога** наступает, если в отсутствие полезного сигнала на входе решающего устройства будет наблюдаться значение, превышающее порог

$$\alpha = \int_{u_{порог}}^{+\infty} W_{PY}(x | H_0) dx . \quad (6.1)$$

б) ошибка второго рода или **пропуск сигнала** возникает, если при наличии полезного сигнала отклик линейного фильтра на смесь сигнала и шума окажется меньше порога

$$\beta = \int_{-\infty}^{u_{порог}} W_{PY}(x | H_1) dx . \quad (6.2)$$

Изменяя величину порога  $u_{порог}$  можно влиять на вероятности этих ошибок, но уменьшение  $\alpha$  за счет повышения порога будет сопровождаться ростом вероятности пропуска сигнала, а сни-

жение порога позволит уверенно обнаруживать даже слабые сигналы, но повлечет рост вероятности ложной тревоги.

Для повышения «контрастности» распределений и одновременного снижения как  $\alpha$ , так и  $\beta$ , необходимо обеспечить максимально возможное значение величины

$$q = \frac{u_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{Ш ВЫХ}}}, \quad (6.3)$$

где  $\sigma_{\text{Ш ВЫХ}}$  – эффективное значение шума на выходе линейного фильтра,  $u_{\text{ВЫХ}}(t_0)$  – отклик этого фильтра на детерминированный обнаруживаемый полезный сигнал  $u(t)$  в момент принятия решения  $t_0$ .

Итак, при решении задачи обнаружения точно известного сигнала на фоне аддитивного шума оптимальным фильтром, обеспечивающим минимум вероятности ошибочных решений, служит фильтр, гарантирующий максимально возможное отношение сигнал-шум

$$\dot{K}_{\text{опт}}(\omega) = \arg \max q(\dot{K}(\omega)). \quad (6.4)$$

### **6.3. Обнаружение сигналов на фоне белого шума. Согласованные фильтры и их характеристики**

#### **6.3.1. Анализ предельно возможного отношения сигнал-шум на выходе линейного фильтра**

Пусть помеха  $\xi(t)$ , в смеси с которой на вход обнаружителя может поступать полезный сигнал, представляет собой белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0$ . В соответствии с частотным методом анализа СПМ шума на выходе линейного фильтра можно определить как

$$S_{\eta}(\omega) = N_0 \cdot |\dot{K}(\omega)|^2, \quad (6.5)$$

где  $|\dot{K}(\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика фильтра.

Тогда эффективное значение шума на выходе фильтра составит

$$\sigma_{\text{ш вых}} = \sqrt{N_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (6.6)$$

Отклик того же фильтра на детерминированный полезный сигнал запишем на основе обратного преобразования Фурье

$$u_{\text{вых}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}(\omega) \cdot \dot{G}_u(\omega) \cdot e^{+j\omega t_0} d\omega, \quad (6.7)$$

где  $\dot{G}_u(\omega)$  – комплексная спектральная плотность сигнала  $u(t)$ .

Для сопоставления откликов на полезный сигнал и шумовую компоненту воспользуемся детально проанализированным в прил. 7 неравенством Коши-Буняковского. Для этого обозначим

$$\dot{y}(\omega) = \dot{K}(\omega), \quad (6.8)$$

$$\dot{x}(\omega) = \dot{G}_u(\omega) \cdot e^{+j\omega t_0} \quad (6.9)$$

и воспользуемся соотношением (П7.4), в соответствии с которым

$$u_{\text{вых}}(t_0) \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_u(\omega) e^{+j\omega t_0}|^2 d\omega}.$$

В соответствии с известным равенством Парсеваля [6, (2.42)]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_u(\omega) e^{+j\omega t_0}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_u(\omega)|^2 d\omega = \mathcal{E}_u, \quad (6.10)$$

где  $\mathcal{E}_u$  – энергия обнаруживаемого сигнала.

Отсюда получаем

$$\frac{u_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{ш вых}}} \leq \frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega} \cdot \sqrt{\mathcal{E}_u}}{\sqrt{N_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_u}{N_0}}, \quad (6.11)$$

причем следствие (П7.5) из неравенства Коши-Буняковского позволяет установить условия, когда данное неравенство превращается в равенство, а именно при

$$\dot{K}(\omega) = A \cdot \left( \dot{G}_u(\omega) \cdot e^{+j\omega t_0} \right)^*, \quad (6.12)$$

где (...) \* – знак комплексного сопряжения.

**Фильтр с комплексным коэффициентом передачи**

$$\dot{K}_{C\Phi}(\omega) = A \cdot \dot{G}_u^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (6.13)$$

где  $\dot{G}_u(\omega)$  – комплексная спектральная плотность обнаруживаемого сигнала,  $t_0$  – момент принятия решения об обнаружении, **называют согласованным с сигналом  $u(t)$** . При воздействии на вход такого фильтра сигнала  $u(t)$  в аддитивной смеси с белым шумом отношение сигнал-шум на его выходе составит

$$q_{C\Phi} = \frac{u_{\text{ВЫХ } C\Phi}(t_0)}{\sigma_{\text{Ш Вых } C\Phi}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_u}{N_0}}. \quad (6.14)$$

где  $N_0$  – спектральная плотность мощности шума,  $\mathcal{E}_u$  – энергия полезного сигнала, определяемая соотношением

$$\mathcal{E}_u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{G}_u(\omega) \right|^2 d\omega. \quad (6.15)$$

Отклик на то же воздействие любого иного линейного фильтра будет давать меньшее соотношение сигнал-шум

$$q \leq q_{C\Phi}, \quad \text{при } \dot{K}(\omega) \neq \dot{K}_{C\Phi}(\omega). \quad (6.16)$$

Таким образом, согласованный фильтр является оптимальным линейным фильтром при обнаружении полностью известного сигнала на фоне аддитивного белого шума.

### 6.3.2. Физические причины оптимальности согласованного фильтра при обнаружении детерминированных сигналов

Проанализируем физические причины оптимальности согласованного фильтра. Для этого рассмотрим подробнее выражение для расчета отклика фильтра на «свой» сигнал  $u(t)$

$$u_{\text{ВЫХ СФ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_u(\omega) \cdot A G_u^*(\omega) e^{-j\omega t_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_u(\omega)|^2 e^{+j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{A \cdot \Delta\omega}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} |\dot{G}_u(i \cdot \Delta\omega)|^2 \cos(i \cdot \Delta\omega(t-t_0)). \quad (6.17)$$

Совокупность составляющих, из которых складывается выходной сигнал  $u_{\text{ВЫХ СФ}}(t)$ , представлена на рис. 6.3. Как видно из рисунка, благодаря особенностям фазочастотной характеристики согласованного фильтра обеспечивается такое сочетание фаз составляющих  $u_{\text{ВЫХ СФ}}(t)$ , что все они в момент времени  $t_0$  суммируются синфазно.

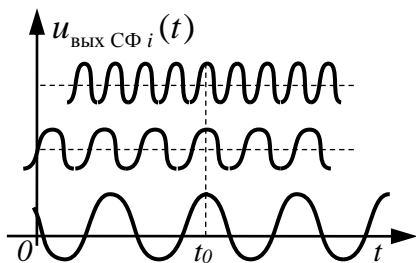


Рис. 6.3. Временная диаграмма составляющих, из которых складывается отклик согласованного фильтра на «свой» сигнал

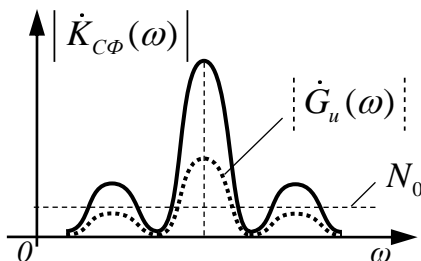


Рис. 6.4. Особенности амплитудно-частотной характеристики согласованного фильтра

Для выявления причин оптимальности АЧХ согласованного фильтра целесообразно рассмотреть рис. 6.4. Отметим, что при белом шуме, обладающем равномерной по частоте СПМ, изменение для смеси отношения сигнал-шум вдоль оси частот будет определяться формой модуля спектральной плотности полезного сигнала. Таким образом, АЧХ согласованного фильтра определяется отношением сигнал-шум на разных частотах. Там, где сигнал существенно превосходит шум, составляющие передаются на выход фильтра с достаточно большим коэффициентом передачи, а на частотах, где отношение сигнал-шум мало, и коэффициент передачи фильтра стремится к нулю.

Что же касается входящего в формулу (6.13) поправочного коэффициента  $A$ , то, формально, этот коэффициент может выбираться произвольно, т.к. он одинаково влияет на прохождение через фильтр как сигнальной (полезной), так и шумовой компоненты, а увеличение (или уменьшение) в одно и то же число раз как числителя, так и знаменателя (6.14) указывает, что при изменении  $A$  отношение сигнал-шум будет оставаться неизменным. В реальности на выбор  $A$  будут оказывать влияние нюансы схемотехники приёмника, а также необходимость уменьшения уровня собственных шумов радиоприёмника.

Для выяснения ограничений, налагаемых на момент времени  $t_0$ , когда необходимо принимать решение, следует сначала уточнить свойства согласованного фильтра во временной области.

### 6.3.3. Свойства согласованного фильтра во временной области

На основе (6.13) определим импульсную характеристику согласованного фильтра

$$g_{сф}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}_{сф}(\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_u^*(\omega) \cdot e^{+j\omega(t-t_0)} d\omega =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_u(-\omega) \cdot e^{-j\omega(t_0-t)} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}_u(\Omega) \cdot e^{+j\Omega(t_0-t)} d\Omega = A \cdot u(t_0 - t).$$

Здесь учтено, что для вещественных сигналов значения комплексной спектральной плотности на положительных и отрицательных частотах являются комплексно-сопряженными.

Итак, импульсная характеристика согласованного фильтра определяется выражением

$$g_{сф}(t) = A \cdot u(t_0 - t), \quad (6.18)$$

где  $u(t)$  – обнаруживаемый сигнал;  $t_0$  – момент принятия решения.

Анализ выражения (6.18) позволяет уточнить требования к моменту  $t_0$ , выбор которого принципиально важен для эффективного функционирования согласованного фильтра. Наибольший практический интерес вызывает обнаружение сигналов относительно короткой длительности. Пусть сигнал  $u(t)$  действует на временном интервале с границами  $[t_n, t_k]$ , тогда сигнал  $u(-t)$  будет располагаться на интервале от минус  $t_k$  до минус  $t_n$ , а  $g_{сф}(t)$  будет располагаться в границах  $(t_0 - t_k) \dots (t_0 - t_n)$ . Однако для реализуемости фильтра требуется, чтобы его импульсная характеристика была тождественно равна нулю при отрицательных значениях аргумента. Таким образом, требуется выполнение условия  $(t_0 - t_k) \geq 0$ . Итак, момент принятия решения об обнаружении сигнала должен выбираться в соответствии с требованием

$$t_0 \geq t_k, \quad (6.19)$$

где  $t_k$  – момент окончания сигнала  $u(t)$ .

Впрочем, о необходимости соблюдения требования (6.19) можно было бы догадаться и без анализа импульсной характеристики фильтра. Ведь хотя при значительной продолжительности сигнала  $u(t)$  об его появлении в эфире, как правило, можно было догадаться и по результатам наблюдения начального фрагмента, но такое решение, вынесенное ещё до окончания действия сигнала, конечно, не может быть оптимальным.



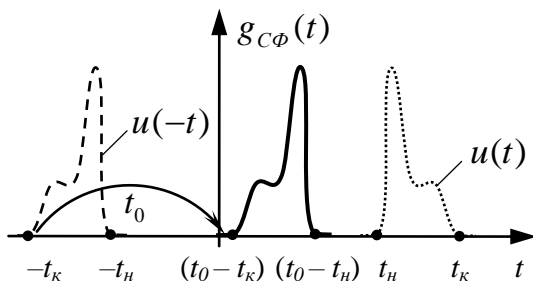


Рис. 6.5. Особенности импульсной характеристики согласованного фильтра

Выбор момента принятия решения  $t_0 \gg t_k$  вряд ли целесообразен, поскольку к моменту  $t = t_k$  вся полезная информация об обнаруживаемом сигнале уже поступила и дальнейшее ожидание не имеет особого смысла. Выбор  $t_0 > t_k$  может иногда оказаться полезным лишь из технологических (схмотехнических) соображений, например, когда небольшая дополнительная задержка может упростить реализацию согласованного фильтра. Однако в дальнейших рассуждениях будем исходить из наиболее рационального варианта выбора, когда решение об обнаружении сигнала принимается сразу в момент его возможного окончания.

*Пример 8:* Проанализируем процедуру обнаружения детерминированного сигнала, представленного на рис. 6.6.

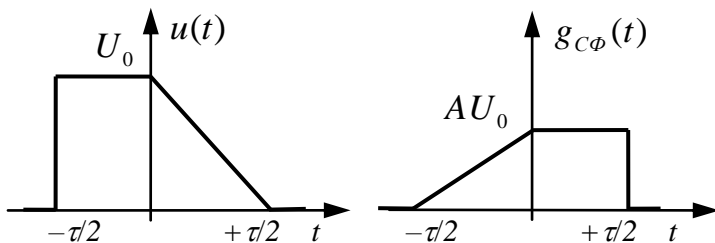


Рис. 6.6. Сигнал  $u(t)$  и характеристика согласованного фильтра

*Поскольку согласованный фильтр является устройством линейным, то отклик фильтра на шумовую и сигнальную компоненты можно анализировать отдельно. Отклик на точно известное воздействие  $u(t)$  является детерминированным сигналом и может быть рассчитан с помощью интеграла Дюамеля*

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot g_{\text{CF}}(t-x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot Au(x-(t-t_0)) dx = A \cdot R_u(t-t_0), \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

*где  $R_u(t-t_0)$  – автокорреляционная функция детерминированного сигнала  $u(t)$ , являющаяся аналогом корреляционной функции (2.3), для которого справедливо  $R_u(0) = \mathcal{E}_u$ .*

*Некоторая сложность с расчетами, основанными на (6.20), связана лишь с тем, что сигнал  $u(t)$  имеет кусочно-линейный характер, т.е. задается разными аналитическими выражениями на разных интервалах конечной длительности. Для уточнения возникающих при этом реальных границ интервала интегрирования отобразим компоненты выражения (6.20) на рис. 6.7 как функции переменной интегрирования « $x$ ». При этом в качестве момента принятия решения используем  $t_0 = t_{\text{к}} = \tau/2$ . Первый сомножитель  $u(x)$  будет иметь фиксированный вид, а положение на оси « $x$ » второго сомножителя будет зависеть от того, для какого момента времени производится расчет, и возможны 4 разных случая взаимного расположения компонент (6.20). Пределы интегрирования для каждого случая взаимного расположения сомножителей  $u(x)$  и  $Au(x-(t-t_0))$  показаны на рис. 6.7 областями с диагональной*

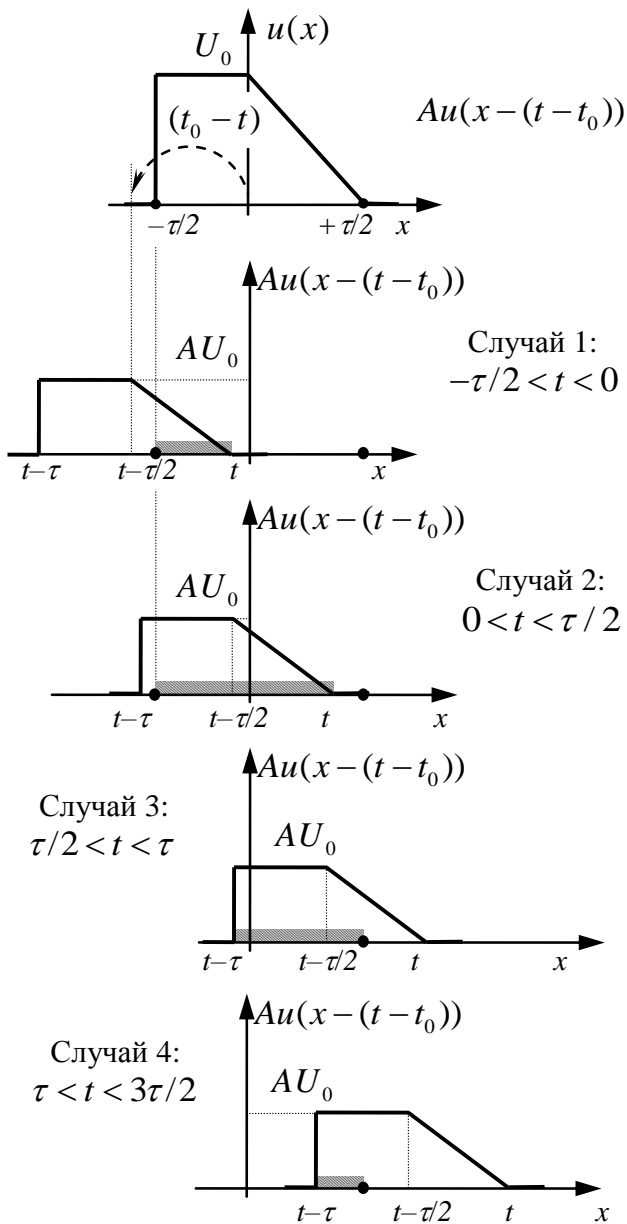


Рис. 6.7. Компоненты интеграла Дюамеля из примера 8

итриховкой. Что же касается подынтегрального выражения, то для всех случаев оно формируется однотипно и базируется на зависимости

$$u(x) = \begin{cases} U_0, & -\tau/2 < x \leq 0, \\ U_0 \cdot (1 - 2x/\tau), & 0 < x \leq \tau/2. \end{cases} \quad (6.21)$$

Отметим, что

$$\mathcal{E}_u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \int_{-\tau/2}^0 U_0^2 dt + \int_0^{\tau/2} U_0^2 (1 - 2x/\tau)^2 dt = \frac{2}{3} U_0^2 \tau \quad (6.22)$$

Тогда отклик на  $u(t)$  для  $-\tau/2 < t \leq 0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_{-\tau/2}^t U_0 \cdot AU_0 (1 - 2(x - (t - t_0))/\tau) dx = \\ &= A\mathcal{E}_u \frac{3}{2\tau^2} [x \cdot 2t - x^2] \Big|_{-\tau/2}^t = A\mathcal{E}_u \frac{3}{2} \cdot \left[ \frac{1}{4} + \frac{t}{\tau} + \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

На интервале  $0 < t \leq \tau/2$  аналогично получаем

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_{-\tau/2}^{t-\tau/2} AU_0^2 dx + \int_{t-\tau/2}^0 U_0 \cdot AU_0 (1 - 2(x - (t - t_0))/\tau) dx + \\ &+ \int_0^t U_0 (1 - 2x/\tau) \cdot AU_0 (2t - 2x)/\tau dx = A\mathcal{E}_u \cdot \left[ \frac{3}{8} + \frac{3t}{2\tau} - \left( \frac{t}{\tau} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

На интервале  $\tau/2 < t \leq \tau$  также имеем три интеграла

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= AU_0^2 \left[ \int_{t-\tau}^0 1 \cdot dx + \int_0^{t-\tau/2} (1 - 2x/\tau) dx + \int_{t-\tau/2}^{\tau/2} (1 - 2x/\tau) \cdot (2t - 2x)/\tau dx \right] = \\ &= A\mathcal{E}_u \cdot \left[ \frac{21}{24} + \frac{3t}{2\tau} - 3 \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 + \left( \frac{t}{\tau} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

И, наконец, на интервале  $\tau < t \leq 3\tau/2$  имеем

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = AU_0^2 \int_{t-\tau}^{t+\tau/2} (1 - 2x/\tau) dx = A\mathcal{E}_u \cdot \frac{3}{2} \left[ \frac{9}{4} - 3\frac{t}{\tau} + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right]. \quad (6.26)$$

График, объединяющий все фрагменты выходного сигнала, показан на рис. 6.8. Из графика видно, что в ответ на приход «своего» сигнала согласованный фильтр формирует отклик, вид которого существенно отличается от формы обнаруживаемого сигнала  $u(t)$ , но к моменту времени  $t_0 = \tau/2$  на выходе фильтра действительно формируется высокий пик отклика, позволяющий надёжно установить факт появления сигнала  $u(t)$ .

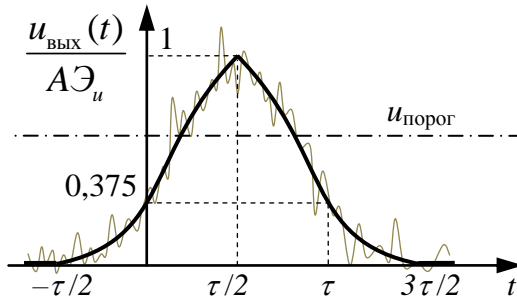


Рис. 6.8. Отклик на сигнал  $u(t)$  согласованного фильтра из примера 8

Что же касается шумовой компоненты воздействия на согласованный фильтр, то отклик на него будет стационарным СП с дисперсией

$$\sigma_{\text{Ш Вых}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \cdot |AG_u^*(\omega)e^{-j\omega t_0}|^2 d\omega = A^2 N_0 \mathcal{E}_u. \quad (6.27)$$

Таким образом, квадрат отношения сигнал-шум на выходе согласованного фильтра будет равен

$$\frac{u_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{\sigma_{\text{Ш Вых}}^2} = \frac{(A\mathcal{E}_u)^2}{A^2 N_0 \mathcal{E}_u} = \frac{\mathcal{E}_u}{N_0}, \quad (6.28)$$

что вполне соответствует выведенному ранее соотношению (6.14).

*Примечание 1: Будет ошибкой считать, что согласованный фильтр усиливает, либо «очищает» сигнал от помех. Вместо этого согласованный фильтр преобразует смесь шума и полезного сигнала таким образом, чтобы максимально «подчеркнуть», выделить присутствие обнаруживаемого сигнала в шуме, формируя к заранее выбранному моменту времени  $t_0$  пик отклика на «свой» сигнал.*

*Примечание 2: Обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал-шум не зависит от формы обнаруживаемого сигнала, а определяется лишь его энергией и спектральной плотностью мощности помехи в соответствии с (6.14). Как следствие, вероятности ошибок при обнаружении также от формы сигнала не зависят, но вот при различении нескольких сигналов достоверность решений существенно зависит от различия их формы, однако вопросы различения сигналов лежит за рамками данного пособия.*

#### **6.4. Обнаружение сигналов на фоне окрашенного шума**

Если помеха  $\xi(t)$ , в смеси с которой на вход обнаружителя поступает полезный сигнал, не является белым шумом, то согласованный фильтр уже нельзя считать оптимальным устройством, гарантирующим минимальную вероятность ошибки при обнаружении сигналов. Для определения характеристик фильтра, обеспечивающего на своем выходе максимально возможное отношение сигнал-шум (6.3) при наличии на входе фильтра помимо сигнала  $u(t)$  помехи, характеризуемой спектральной плотностью мощности  $S_\xi(\omega)$ , воспользуемся следующим приёмом.

Рассмотрим линейный фильтр, АЧХ которого удовлетворяет условию

$$\left| \dot{K}_{обет}(\omega) \right|^2 = \frac{N_0}{S_\xi(\omega)}. \quad (6.29)$$

Если подобный фильтр разместить на входе устройства обработки, то он обеспечивал бы преобразование помехи  $\xi(t)$  с неравномерной СПМ в белый шум; соответственно, подобный фильтр можно назвать «обеляющим». Его физическая нереализуемость принципиальной роли не играет, т.к. он необходим лишь на этапе теоретического анализа, а в конечной структурной схеме обнаружителя этот фильтр не потребуется.

Прохождение полезного сигнала  $u(t)$  вместе с шумом  $\xi(t)$  через обеляющий фильтр преобразует исходную задачу в задачу обнаружения видоизмененного сигнала  $u_{\text{флт}}(t)$  на фоне белого шума, оптимальное решение которой уже известно. Для получения на выходе линейной фильтрующей системы максимально возможного отношения сигнал-шум следует использовать фильтр, согласованный с сигналом  $u_{\text{флт}}(t)$ .

Спектральная плотность сигнала  $u_{\text{флт}}(t)$ , получаемого из  $u(t)$  на выходе обеляющего фильтра, будет, очевидно, равна

$$\dot{G}_{u_{\text{флт}}}(\omega) = \dot{G}_u(\omega) \cdot \dot{K}_{\text{обел}}(\omega), \quad (6.30)$$

а комплексный коэффициент передачи фильтра, согласованного с  $u_{\text{флт}}(t)$ , можно записать в виде

$$\dot{K}_{\text{сф}}(\omega) = A \cdot \left( \dot{G}_u(\omega) \cdot \dot{K}_{\text{обел}}(\omega) \right)^* e^{-j\omega t_0}. \quad (6.31)$$

Но если при воздействии на согласованный фильтр сигнала  $u_{\text{флт}}(t)$ , на выходе формируется отклик с максимально возможным отношением сигнал-шум, то комбинация из обеляющего и согласованного фильтра, показанная на рис. 6.9, очевидно, дает отклик с максимально возможным отношением сигнал-шум уже по отношению к смеси исходного сигнала  $u(t)$  с помехой  $\xi(t)$ .

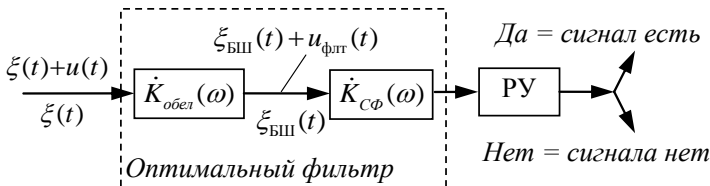


Рис. 6.9. Структура обнаружителя точно известного сигнала на фоне окрашенного шума

Итак, структура оптимального обнаружителя точно известного сигнала  $u(t)$  на фоне окрашенного шума показана на рис. 6.9 и включает в свой состав линейный фильтр с комплексным коэффициентом передачи

$$\begin{aligned} \dot{K}_{\text{опт}}(\omega) &= \dot{K}_{\text{обел}}(\omega) \cdot \dot{K}_{\text{сф}}(\omega) = \\ &= A \cdot \dot{G}_u^*(\omega) \cdot \left| \dot{K}_{\text{обел}}(\omega) \right|^2 e^{-j\omega t_0} = A \cdot \frac{\dot{G}_u^*(\omega)}{S_\xi(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Из сопоставления  $\dot{K}_{\text{опт}}(\omega)$  с коэффициентом передачи согласованного фильтра можно видеть, что оптимальность этих фильтров базируется на единых физических основах:

а) Фазочастотная характеристика фильтров обеспечивает синфазное суммирование спектральных составляющих сигнала  $u(t)$  в момент принятия решения  $t_0$ . Попытка же оптимизировать ФЧХ в отношении шумовой составляющей смысла не имеет, т.к. сочетание фаз составляющих шума является случайным, что не позволяет целенаправленно воздействовать на шумовую компоненту.

б) Форма амплитудно-частотной характеристики фильтра определяется изменением отношения сигнал-шум по отношению к спектральным составляющим разных частот. На участках оси частот, где сигнал заметно превышает шум, и АЧХ фильтра повышается; там же, где интенсивность полезных составляющих спектра невелика по отношению к составляющим шума, АЧХ фильтра понижается, т.к. негативное влияние шумовых компонент опаснее подавления части полезного сигнала.

Отметим, что отношение сигнал-шум, обеспечиваемое оптимальным фильтром с коэффициентом передачи (6.32), составит

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \dot{G}_s(\omega) \right|^2}{S_\xi(\omega)} d\omega. \quad (6.33)$$



## **6.5. Проблемы практической реализации оптимальных фильтров. Когерентный и некогерентный прием сигналов. Квазиоптимальная фильтрация**

6.5.1. Проблема практической реализации когерентного приема радиосигналов. Достоинства и недостатки некогерентного приема

Рассмотрим задачу о разработке и анализе обнаружителя радиоимпульсов прямоугольной формы, наблюдаемых на фоне белого шума. Будем полагать, что на длительности радиоимпульса  $T_C$  уместается целое число периодов высокочастотного заполнения. Симметричность (четность) подобной функции времени относительно её середины (точки  $T_C/2$ ) означает, что импульсная характеристика фильтра, согласованного с радиоимпульсом, будет иметь идентичную ему форму и может отличаться лишь масштабом, задаваемым поправочным коэффициентом  $A$ . Входящие в интеграл Дюамеля (6.20) смещаемые вдоль оси времени копии импульсной характеристики, а также сигналы на входе и на выходе фильтра представлены на рис. 6.10.

Как видно из рисунка, отклик согласованного фильтра на радиоимпульс представляет собой колебание, достигающее максимума в момент окончания сигнала, что является ещё одним примером правильной работы согласованного фильтра. Однако, если сравнить отклик на рис. 6.10 с полученным ранее откликом на видеосигнал на рис. 6.8, то можно отметить существенную деталь, влияющую на работу обнаружителя в реальных условиях. Оптимальность решения, принимаемого решающим устройством «РУ», в качестве неперемного условия предполагает, что момент контроля мгновенного значения сигнала на входе РУ будет совпадать с моментом формирования на выходе фильтра пика отклика на «свой» сигнал. Для соблюдения этого условия необходимо, чтобы момент окончания сигнала был заранее точно известен. Однако сигнал формируется передатчиком, а принимается приемником, который территориально удален от передатчика, а потому без специальных мер

момент появления и окончания сигнала  $u(t)$  будет известен лишь приближенно.

Итак, в реальном обнаружителе момент принятия решения  $t_0$  будет флуктуировать относительно действительного положения на оси времени момента окончания сигнала  $T_C$ . Для видеосигналов (см. рис. 6.8) незначительное рассогласование  $t_0 \neq T_C$  особого значения иметь не будет, а вот для радиосигналов такое рассогласование может оказаться фатальным. Действительно, уже при рассогласовании в  $1/4$  периода высокочастотного сигнала  $u_{\text{вых}}(t)$  отклик на полезный сигнал окажется нулевым, т.е. сигнал будет пропущен, и даже при заметно меньшем рассогласовании отношение сигнал-шум  $q$  окажется заметно уступающим  $q_{\text{сф}}$ .

Бороться с выявленной проблемой можно путём высокоточной синхронизации работы передатчика и приёмника, когда за счёт специальных мер удаётся обеспечить предсказание на приёмной стороне момента окончания сигнала с пренебрежимо малой погрешностью, существенно меньше периода колебания. Прием сигналов, осуществляемый с учетом фазы принимаемого колебания, называется **когерентным**.

Альтернативное решение базируется на отказе от контроля мгновенных значений отклика согласованного фильтра, формированию с помощью амплитудного детектора (блок «АД» на рис. 6.11) огибающей и на контроле превышения этой огибающей порога обнаружения. Замена высокочастотного колебания плавно изменяющейся огибающей  $u_{\text{АД}}(t)$  радикально снижает требования к точности определения момента принятия решения, т.к. даже заметные промахи (но малые по отношению к  $T_C$ ) будут приводить лишь к плавному снижению отношения сигнал-шум, но не будут сопровождаться аномальными ошибками.

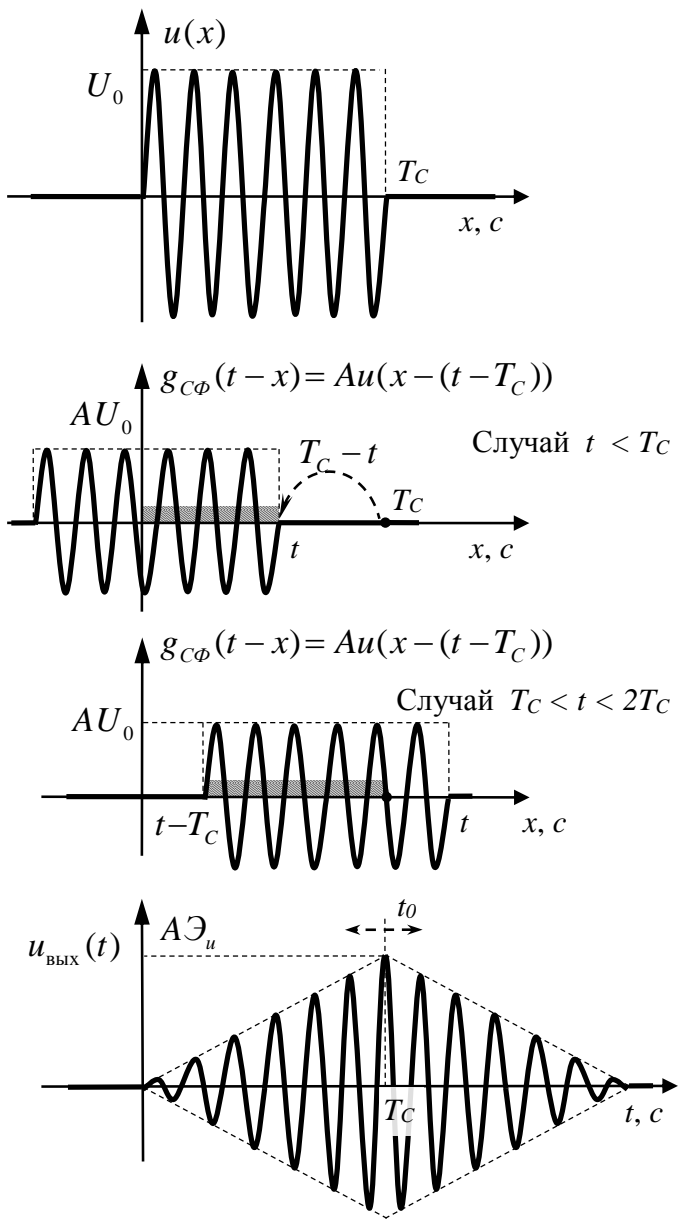


Рис. 6.10. Отклик согласованного фильтра на радиоимпульс

Показанный на рис. 6.11 обнаружитель радиоимпульсов, нечувствительный к фазе принимаемых радиосигналов, называется **некогерентным**. К сожалению, по своим возможностям он несколько уступает когерентному. Для упрощенной оценки величины этого проигрыша пренебрежем флуктуациями огибающей и рассчитаем отношение сигнал-шум, соответствующее средним значениями сигналов.

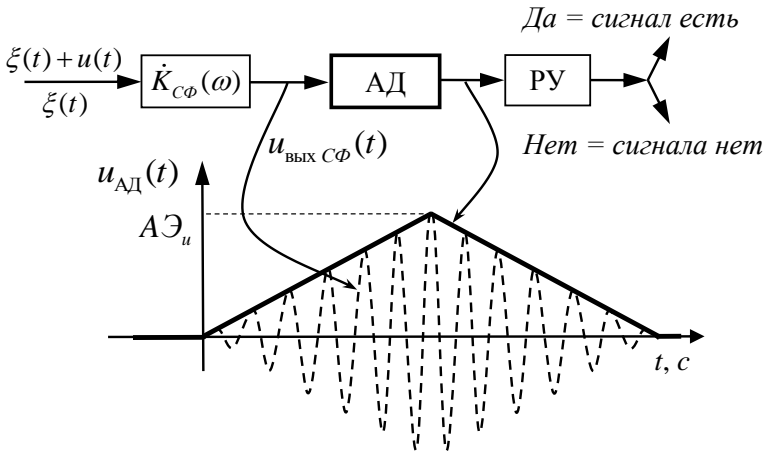


Рис. 6.11. Структурная схема некогерентного обнаружителя радиоимпульсов

С учетом свойств распределений Релея и Релея-Райса (4.36), (4.50), а также (6.27) различие сигналов на выходе детектора составит

$$q_{\text{неког}} \approx \frac{M_{u_{\text{ВЫХ}}} |_{H_1}}{M_{u_{\text{ВЫХ}}} |_{H_0}} = \frac{AЭ_u}{\sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{A^2 Э_u N_0}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{Э_u}{N_0}} \approx 0,8 \cdot q_{\text{СФ}}. \quad (6.34)$$

Таким образом, «платой» за переход от когерентной обработки к некогерентной является уменьшение отношения сигнал-шум приблизительно в  $\sqrt{\pi/2}$  раз.

## 6.5.2. Проблемы практической реализации оптимальных фильтров

Пусть необходимо разработать обнаружитель видеоимпульса прямоугольной формы, наблюдаемого на фоне белого шума. В соответствии с п. 6.3.3 импульсная характеристика такого фильтра также должна быть прямоугольной. Для реализации такого фильтра в виде аналоговой системы понадобились бы идеальный интегратор, идеальная линия задержки и формирователь разности сигналов в двух каналах схемы (рис. 6.12).

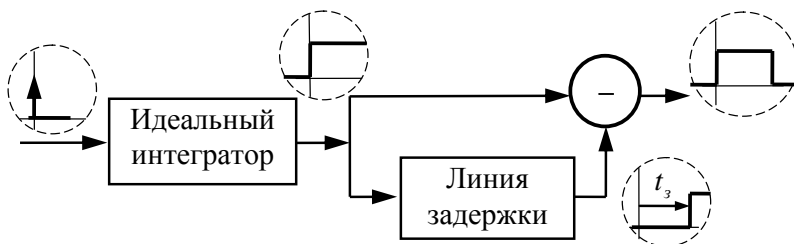


Рис. 6.12. Структура фильтра для обнаружителя прямоугольных видеоимпульсов на фоне белого шума

К сожалению, реализовать на практике идеальные элементы, входящие в структуру такого фильтра, не представляется возможным. Как следствие, возникает вопрос, следует ли тратить силы на попытки разработки и внедрения в практику максимально близких к идеалу аналогов необходимых элементов или следует идти каким-то иным путем?

Прежде чем ответить на поставленный вопрос оценим, что произойдет, если попытаться использовать для обработки подобной смеси сигнала и шума какой-нибудь иной, хотя бы приближенно подходящий к ситуации фильтр. Учтем, что спектр видеосигнала прямоугольной формы сосредоточен преимущественно в низкочастотной области, а значит фильтр, обеспечивающий максимум отношения сигнал-шум обязан быть низкочастотным. Проанализируем, какое отношение сигнал шум мож-

но получить, воспользовавшись для фильтрации обычной интегрирующей RC-цепью с постоянной времени  $\tau_{ц}$ .

В подразделе 3.4 было установлено, что шумовая полоса пропускания RC-цепи определяется соотношением (3.26), а значит средняя мощность шума, возникающего на выходе RC-цепи при воздействии на её вход белого шума, составит

$$\sigma_{ш\text{ вых}}^2 = 2\Pi_{ш\text{ ф}}N_0K_0^2 = \frac{N_0}{2\tau_{ц}}. \quad (6.35)$$

Если же на RC-цепь, находящуюся при нулевых начальных условиях, подать прямоугольный видеоимпульс длительности  $T_C$ , то зарядка емкости цепи будет происходить по экспоненциальному закону и к моменту окончания сигнала напряжение на ёмкости достигнет величины

$$u_C(t_0) = U_0 \cdot (1 - \exp(-T_C/\tau_{ц})). \quad (6.36)$$

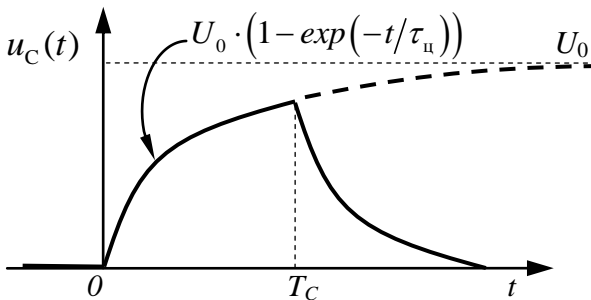


Рис. 6.13. Отклик интегрирующей RC-цепи на видеоимпульс прямоугольной формы

Учитывая, что энергия прямоугольного видеоимпульса составляет  $\mathcal{E}_u = U_0^2 T_C$  выражение для квадрата отношения сигнал-шум в момент времени  $t_0 = T_C$  можно будет записать в виде

$$q_{RC}^2 = \frac{u_C^2(t_0)}{\sigma_{ш\text{ вых}}^2} = \frac{U_0^2 \cdot (1 - \exp(-T_C/\tau_{ц}))^2}{N_0/2\tau_{ц}} =$$

$$= \frac{U_0^2 T_C}{N_0} \cdot \frac{2\tau_{ц}}{T_C} \cdot (1 - \exp(-T_C/\tau_{ц}))^2 = q_{C\Phi}^2 \cdot 2\chi \cdot (1 - \exp(-1/\chi))^2, \quad (6.37)$$

где  $q_{C\Phi}^2$  – отношение сигнал-шум, которое обеспечил бы согласованный фильтр,  $\chi = \tau_{ц}/T_C$  – соотношение между постоянной времени цепи и длительностью обнаруживаемого сигнала.

Зависимость от  $\chi$  поправочного коэффициента  $q_{RC}^2/q_{C\Phi}^2$  между квадратами отношений сигнал-шум для тестируемой RC-цепи и для согласованного фильтра показана на рис. 6.14. Как видно из рисунка, обеспечиваемое RC-цепью качество фильтрации хуже, чем у согласованного фильтра, однако при правильном выборе постоянной времени цепи проигрыш в отношении сигнал-шум  $q$  составит лишь  $1 - \sqrt{q_{RC}^2/q_{C\Phi}^2} \approx 10\%$ .

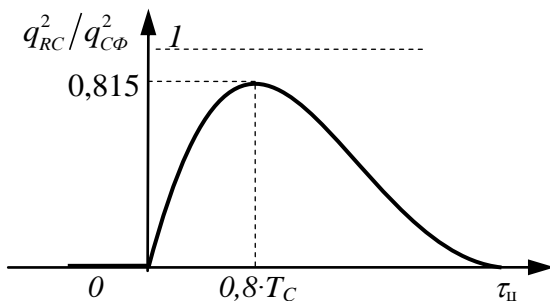


Рис. 6.14. Зависимость от постоянной времени цепи значения поправочного коэффициента  $q_{RC}^2/q_{C\Phi}^2$

Итак, если обнаружитель видеоимпульсов прямоугольной формы строить не на основе согласованного фильтра, точная реализация которого проблематична из-за отсутствия идеального интегратора и идеальной линии задержки, а с использова-

нием простейшей RC-цепи, то это будет приводить к потерям в обеспечиваемом отношении сигнал-шум  $q$ , однако для компенсации этих потерь достаточно увеличить амплитуду обнаруживаемого сигнала ориентировочно на 10% (либо пренебречь с некоторым, не слишком значительным ростом вероятности ошибок при приеме сигналов).

Фильтры, обеспечивающие близкие к максимально возможным показатели обнаружения сигналов при существенно более простой их практической реализации, называются **квази-оптимальными**.

Следует отметить, что, хотя проведенный выше анализ позволил получить неплохие показатели почти что «наугад», но это никак не умаляет ценность понятий согласованного и оптимального фильтра. Кажущаяся простота, с которой удалось получить фильтр с показателями, не слишком значительно уступающими предельно возможным, базировалась на нескольких введенных ранее понятиях и принципах:

а) исходя из особенностей спектра полезного сигнала для его фильтрации на фоне помех было решено применять низкочастотный фильтр (причем простая форма как самого сигнала, так и его спектра позволила обойтись стандартным, а не специально разработанным «под сигнал» устройством);

б) контролируемым и оптимизируемым показателем служило отношение сигнал-шум (6.3), и хорошие показатели были достигнуты лишь после оптимизации.

Крайне важным для практики является тот факт, что после проведенного исследования можно гарантировать: любое альтернативное техническое решение, вне зависимости от его стоимости и сложности, не сможет улучшить отношение сигнал-шум по отношению к оптимизированной RC-цепи более чем на 10%.

Итак, сопоставление показателей качества реального фильтра с предельными характеристиками, обеспечиваемыми фильтром согласованным, позволяет разработчику заранее знать



потенциальный проигрыш разработанной конструкции по отношению к продукции конкурентов и принимать взвешенное решение в отношении того, можно ли принять найденное решение окончательным или разработанный обнаружитель требует дальнейшего усовершенствования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии теоретические сведения и примеры составляют, по мнению автора, минимальный законченный объем материала, необходимый для ознакомления с методами обработки случайных процессов в радиотехнических цепях. Автор сознательно стремился к минимизации объема пособия, поэтому ряд интересных примеров, детально рассмотренных в иных литературных источниках, не был включен в состав пособия (в некоторых случаях указаны лишь ссылки на рекомендуемые источники).

Студентам, заинтересованным в углубленном изучении дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике», будет полезно рассмотреть примеры и задачи, приведенные в других изданиях. При этом не следует игнорировать и источники, выпущенные 20, 30 и более лет назад, т.к. освоение дисциплины направлено на изучение математического аппарата и методов обработки сигналов, которые не теряют своей актуальности и могут быть успешно использованы и сегодня, и в будущем.

Автор будет благодарен за любую информацию о найденных неточностях и опечатках, а также за идеи по расширению и дополнению данного учебного пособия.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Функция распределения стандартной нормальной случайной величины

Данная функция распределения равна  $F_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

| $X$ | $F_{\text{ст}}(x)$ | $x$ | $F_{\text{ст}}(x)$ | $x$ | $F_{\text{ст}}(x)$ | $x$ | $F_{\text{ст}}(x)$ |
|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|
| 0,0 | 0,5000             | 1,0 | 0,8413             | 2,0 | 0,9773             | 3,0 | 0,9987             |
| 0,1 | 0,5398             | 1,1 | 0,8643             | 2,1 | 0,9821             | 3,1 | 0,9990             |
| 0,2 | 0,5793             | 1,2 | 0,8849             | 2,2 | 0,9861             | 3,2 | 0,9993             |
| 0,3 | 0,6179             | 1,3 | 0,9032             | 2,3 | 0,9893             | 3,3 | 0,9995             |
| 0,4 | 0,6554             | 1,4 | 0,9192             | 2,4 | 0,9918             | 3,4 | 0,9997             |
| 0,5 | 0,6915             | 1,5 | 0,9331             | 2,5 | 0,9938             | 3,5 | 0,9998             |
| 0,6 | 0,7258             | 1,6 | 0,9452             | 2,6 | 0,9953             | 3,6 | 0,9998             |
| 0,7 | 0,7580             | 1,7 | 0,9554             | 2,7 | 0,9965             | 3,7 | 0,9999             |
| 0,8 | 0,7881             | 1,8 | 0,9641             | 2,8 | 0,9974             | 3,8 | 0,9999             |
| 0,9 | 0,8159             | 1,9 | 0,9713             | 2,9 | 0,9981             | 3,9 | 0,9999             |

Для отрицательных аргументов  $x$  значения можно получить из соотношения  $F_{\text{ст}}(x)|_{x<0} = 1 - F_{\text{ст}}(-x)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Некоторые неопределенные и определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(a), \quad \text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (\text{П2.1})$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}, \quad (\text{П2.2})$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax), \quad (\text{П2.3})$$

$$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}, \quad (\text{П2.4})$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax) dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \cos(ax). \quad (\text{П2.5})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### Модифицированные функции Бесселя

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{П3.1})$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{z^2/4}{(1!) \cdot (2!)} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!) \cdot (3!)} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!) \cdot (4!)} + \dots \right] \quad (\text{П3.2})$$

| $x$ | $\exp(-x) \cdot I_0(x)$ | $\exp(-x) \cdot I_1(x)$ | $x$ | $\exp(-x) \cdot I_0(x)$ | $\exp(-x) \cdot I_1(x)$ |
|-----|-------------------------|-------------------------|-----|-------------------------|-------------------------|
| 0,0 | 1,0000                  | 0,0000                  | 2,0 | 0,3085                  | 0,2153                  |
| 0,2 | 0,8269                  | 0,0823                  | 2,2 | 0,2913                  | 0,2121                  |
| 0,4 | 0,6974                  | 0,1367                  | 2,4 | 0,2766                  | 0,2085                  |
| 0,6 | 0,5883                  | 0,1722                  | 2,6 | 0,2639                  | 0,2047                  |
| 0,8 | 0,5241                  | 0,1945                  | 2,8 | 0,2528                  | 0,2007                  |
| 1,0 | 0,4658                  | 0,2079                  | 3,0 | 0,2430                  | 0,1968                  |
| 1,2 | 0,4198                  | 0,2153                  | 3,2 | 0,2343                  | 0,1930                  |
| 1,4 | 0,3831                  | 0,2185                  | 3,4 | 0,2264                  | 0,1892                  |
| 1,6 | 0,3533                  | 0,2190                  | 3,6 | 0,2193                  | 0,1856                  |
| 1,8 | 0,3289                  | 0,2177                  | 3,8 | 0,2129                  | 0,1821                  |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### Дельта-функция Дирака

#### Общие свойства

По определению дельта-функция  $\delta(t-t_0)$  для любой действительной величины  $t_0$  равна нулю при  $t \neq t_0$  и неограниченно велика при  $t = t_0$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq t_0, \\ \infty, & \text{при } t = t_0. \end{cases} \quad (\text{П4.1})$$

Интеграл от этой функции

$$\int_a^b \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 1, & \text{при } a < t_0 < b, \\ 1/2, & \text{при } t_0 = a \text{ или } t_0 = b, \\ 0, & \text{при } t_0 < a \text{ или } t_0 > b. \end{cases} \quad (\text{П4.2})$$

Дельта-функция – это предельная функция от однопараметрического семейства непрерывных функций, причем примеров таких семейств очень много. Рассмотрим, например, совокупность  $s(t, \tau)$  прямоугольных импульсов единичной площади, длительность которых составляет  $\tau$ , а высота  $1/\tau$

$$s(t, \tau) = \begin{cases} 1/\tau, & \text{при } t_0 \leq t < t_0 + \tau, \\ 0, & \text{при } t < t_0 \text{ и } t \geq t_0 + \tau. \end{cases} \quad (\text{П4.3})$$

Если длительность импульса  $\tau$  устремить к нулю, то в результате предельного перехода получим дельта-функцию.

Альтернативным вариантом получения  $\delta$ -функции может быть

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 t^2 + 1)} = \delta(t). \quad (\text{П4.4})$$

Если дельта-функция  $\delta(t-t_0)$  выступает в качестве множителя при любой ограниченной и непрерывной в точке  $t_0$  функции  $f(t)$ , то интеграл от подобного произведения определяется так называемым фильтрующим свойством дельта-функции

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & \text{при } a < t_0 < b, \\ 0,5 \cdot f(t_0), & \text{при } t_0 = a \text{ или } t_0 = b, \\ 0, & \text{при } t_0 < a \text{ или } t_0 > b. \end{cases} \quad (\text{П4.5})$$

Если же функция  $f(t)$  имеет в точке  $t_0$  разрыв (первого рода), то фильтрующее свойство *дельта-функции* приобретает вид [3]

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = 0,5 \cdot [f(t_{0-}) + f(t_{0+})], \quad \text{при } a < t_0 < b, \quad (\text{П4.6})$$

где  $f(t_{0-})$  и  $f(t_{0+})$  значения  $f(t)$  слева и справа от точки разрыва.

### Свойства производных дельта-функции

Производные от дельта-функции определяются как пределы соответствующих производных от аппроксимирующих функций. Например, используя (П4.4), для первой производной дельта-функции имеем

$$\delta'(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-2\lambda^3 t}{\pi(\lambda^2 t^2 + 1)^2}. \quad (\text{П4.7})$$

Нетрудно видеть, что при любом  $t \neq 0$  эта производная принимает нулевые значения, а в самой точке  $t=0$  наблюдается разрыв, причем производная стремится к  $+\infty$  при подходе к точке разрыва слева и к  $-\infty$  при стремлении к  $t=0$  справа. На производные распространяются и фильтрующие свойства дельта-функции. Свертка производной дельта-функции  $n$ -го порядка с любой функцией, имеющей непрерывную в точке  $t_0$  производную  $n$ -го порядка равна

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n \cdot f^{(n)}(t_0), \quad \text{при } a < t_0 < b, \quad (\text{П4.8})$$

Любопытно, что существуют и иные функции, обладающие фильтрующим свойством, например, функция  $\sin(x)/x$ . Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{\sin[\pi b(x-a)]}{\pi b(x-a)} \right\} dx = \frac{f^{(n)}(a)}{b}. \quad (\text{П4.9})$$

### Спектральные характеристики дельта-функции

Из фильтрующего свойства дельта-функции следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \cdot \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega t_0), \quad (\text{П4.10})$$

т.е. спектр дельта-функции равномерный на всех частотах и имеет единичную интенсивность. Соответственно, спектр суммы двух дельта-функций  $0,5 \cdot [\delta(t-t_0) + \delta(t+t_0)]$  равен

$$0,5 \cdot [\exp(+j\omega t_0) + \exp(-j\omega t_0)] = \cos(\omega t_0). \quad (\text{П4.11})$$

Для обратного преобразования Фурье получаем соответственно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+j\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) d\omega = \delta(t), \quad (\text{П4.12})$$

а также

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+j\omega t) \cdot \cos(\omega t_0) d\omega = 0,5 \cdot [\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)]. \quad (\text{П4.13})$$

### Размерность и особенности нормировки

Размерность дельта-функции обратна размерности её аргумента, т.е. если аргументом дельта-функции служит время  $t$ , выражаемое в секундах, то значения  $\delta(t-t_0)$  выражаются в «1/с», а для функции  $\delta(u-u_0)$ , аргументом которой служит напряжение, результаты будут выражаться в «1/В».

Дельта-функции нередко появляются в составе плотности вероятности, спектральной плотности мощности и т.п., то есть характеризуют плотность  $y(x)$  распределения некоторой величины  $Y$  вдоль оси аргумента  $x$ . Своеобразие их поведения проявляется при попытке изменения масштаба аргумента, т.е. при переходе от  $y(x)$  к функции  $y(v)$  нового аргумента  $v = k \cdot x$ .

Рассмотрим сначала особенности поведения зависимостей  $y(\cdot)$ , не имеющих в своём составе дельтаобразных компонент. Если функции  $y(x)$  и  $y(v)$  имеют совпадающую размерность, то никаких мер по нормировке значений принимать не требуется, а правило расчета доли величины  $Y$ , приходящейся на произвольный интервал от  $x_{min}$  до  $x_{max}$ , возникает при интегрировании автоматически - путем очевидной замены переменных

$$Y_{|x_{min} \leq x \leq x_{max}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} y(x) dx = \frac{1}{k} \cdot \int_{v_{min}}^{v_{max}} y(v) dv, \quad (\text{П4.14})$$

где, очевидно,  $v_{min} = k \cdot x_{min}$  и  $v_{max} = k \cdot x_{max}$ .

*Классические примеры подобной нормировки можно найти, например, в области спектрального анализа. Частотные характеристики могут выражаться функциями циклической частоты  $f$ , измеряемой в герцах, или функциями круговой частоты  $\omega$ , измеряемой в радианах за секунду. Однако, вне зависимости от конкретного используемого аргумента значения характеристик сигналов и цепей остаются неизменными и лишь при интегрировании по частоте  $\omega$  перед интегралом появляется нормировочный коэффициент  $\langle 1 / 2\pi \rangle$ .*

Если же замена аргумента сопровождается соответствующим изменением размерности результатов, то значения функции должны быть увеличены в  $k$  раз. Например, если плотность печати принтера составляет 600 точек на дюйм, то при пересчете к 1 метру, включающему 39,37 дюйма, плотность печати будет уже 23622 точек на метр, что соответствует соотношению между аргументами  $v = 39,37 \cdot x$ . В подобных случаях, очевидно, расчетная формула (П4.14) распадается на две независимые части, каждая из которых не требует поправочных коэффициентов

$$Y_{|x_{min} \leq x \leq x_{max}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} y(x) dx = \int_{v_{min}}^{v_{max}} y(v) dv. \quad (\text{П4.15})$$



### Изменение размерности аргумента дельтообразных компонент

Пусть теперь в составе зависимости  $y(x)$ , имеется слагаемое вида  $Y_0 \cdot \delta(x-x_0)$ . Это означает, что доля величины  $Y$ , приходящейся на бесконечно малую окрестность точки  $x_0$ , составляет  $Y_0$ . Очевидно, что в бесконечно малой окрестности точки  $v_0 = k \cdot x_0$  должна содержаться та же доля  $Y$ .

Если функции  $y(x)$  и  $y(v)$  дают результаты с совпадающей размерностью, то для расчета этой доли  $Y$  будет использоваться (П4.14), а значит для сохранения  $Y$  поправочные коэффициенты потребуются увеличить в  $k$  раз, т.е.

$$y(v) = y_{\text{непрер}}(v) + k \cdot Y_0 \cdot \delta(v - v_0), \quad (\text{П4.16})$$

где  $y_{\text{непрер}}(v)$  - часть зависимости, не содержащая дельтообразных компонент.

Если же замена аргумента сопровождается изменением размерности результатов, то в соответствии с (П4.15) корректировка коэффициентов при дельта-функции не требуется

$$y(v) = k \cdot y_{\text{непрер}}(v) + Y_0 \cdot \delta(v - v_0). \quad (\text{П4.17})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

### **Свойства числовых характеристик случайных величин**

К важнейшим свойствам числовых характеристик СВ можно отнести:

1) свойства масштабирования

$$M\{c \cdot \xi\} = c \cdot M_{\xi}. \quad (\text{П5.1})$$

$$D\{c \cdot \xi\} = c^2 \cdot D_{\xi}. \quad (\text{П5.2})$$

2) свойства суммирования

$$M\left\{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \xi_i\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot M_{\xi_i} \quad (\text{П5.3})$$

$$D \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot \xi_i \right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot D_{\xi_i} + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij} \quad (\text{П5.4})$$

3) свойства произведения СВ

$$m_1 \{ \xi \cdot \eta \} = B_{\xi\eta} = M_{\xi} \cdot M_{\eta} + K_{\xi\eta}, \quad (\text{П5.5})$$

где  $K_{\xi\eta}$  – ковариация случайных величин.

Для некоррелированных СВ математическое ожидание произведения СВ равно произведению математических ожиданий, а при  $K_{\xi\eta} \neq 0$  требуется поправка на величину ковариации.

Наконец, для произведения независимых СВ справедливо

$$M \left\{ \prod_{i=1}^n \xi_i \right\} = \prod_{i=1}^n M_{\xi_i} \quad (\text{П5.6})$$

$$D \left\{ \prod_{i=1}^n \xi_i \right\} = \prod_{i=1}^n (D_{\xi_i} + M_{\xi_i}^2) - \prod_{i=1}^n M_{\xi_i}^2. \quad (\text{П5.7})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

### Характеристики преобразователя Гильберта

Преобразователем Гильберта называется линейная цепь с импульсной характеристикой

$$g_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi t}. \quad (\text{П6.1})$$

Данная цепь является абстрактной (идеализированной) математической моделью, поскольку её импульсная характеристика, имеющая отличные от нуля значения при отрицательных значениях аргумента  $t$ , нарушает принцип причинности. Однако, отложив пока проблемы практической реализации, проанализируем, какими свойствами могла бы обладать такая цепь.

Взяв за основу интеграл [6]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \omega > 0, \quad (\text{П6.2})$$

и учитывая тот факт, что в приведенном ниже интеграле «косинусная составляющая» пропадает, т.к. порождает интеграл в симметричных пределах от нечетной функции, определим комплексный коэффициент передачи цепи

$$K_{\Gamma}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\Gamma}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\pi t} dt - j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} dt = -j \cdot \text{sign}(\omega),$$

где  $\text{sign}()$  – функция определения знака аргумента. Таким образом, преобразователь Гильберта является **идеальным фазовращателем**

$$K_{\Gamma}(\omega) = -j \cdot \text{sign}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & \omega > 0, \\ e^{+j\pi/2}, & \omega < 0. \end{cases} \quad (\text{П6.3})$$

Он не меняет амплитуд поступающих на его вход колебаний, но поворачивает фазы всех составляющих положительной частоты на угол  $-\pi/2$ , а для составляющих отрицательной частоты на  $+\pi/2$ . При воздействии на вход преобразователь Гильберта колебания  $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0) = U_0 (e^{j(\omega_0 t + \psi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \psi_0)})/2$  на выходе цепи будет наблюдаться

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= U_0 (e^{j(\omega_0 t + \psi_0 - \pi/2)} + e^{-j(\omega_0 t + \psi_0 - \pi/2)})/2 = \\ &= U_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0 - \pi/2) = U_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0), \end{aligned} \quad (\text{П6.4})$$

т.е. преобразователь Гильберта превращает воздействующие на него косинусоиды в синусоиды.

На практике вместо идеального преобразователя Гильберта используются его приближенные аналоги [12].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7

### Обоснование неравенства Коши-Буняковского

Для обоснования соотношения, известного как неравенство Коши-Буняковского, рассмотрим двойной интеграл

$$J = 0,5 \cdot \int_a^b \int_a^b \left| \dot{y}(t)x^*(s) - x^*(t)\dot{y}(s) \right|^2 ds dt, \quad (\text{П7.1})$$

где  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  – произвольные комплексно-значные функции времени,  $()^*$  – знак комплексного сопряжения.

Учитывая, что для любого комплексного числа справедливо

$$|\dot{z}|^2 = \dot{z} \cdot z^*, \quad (\text{П7.2})$$

выражение (П7.1) можно преобразовать таким образом

$$\begin{aligned} J &= 0,5 \cdot \int_a^b \int_a^b \left( \dot{y}(t)x^*(s) - x^*(t)\dot{y}(s) \right) \left( y^*(t)\dot{x}(s) - \dot{x}(t)y^*(s) \right) ds dt = \\ &= 0,5 \cdot \left\{ \int_a^b \dot{y}(t)y^*(t)dt \cdot \int_a^b x^*(s)\dot{x}(s)ds + \int_a^b \dot{y}(s)y^*(s)ds \cdot \int_a^b x^*(t)\dot{x}(t)dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \dot{y}(s)\dot{x}(s)ds \cdot \int_a^b y^*(t)x^*(t)dt - \int_a^b \dot{y}(t)\dot{x}(t)dt \cdot \int_a^b y^*(s)x^*(s)ds \right\}. \end{aligned}$$

Учтём, что замена всех слагаемых в сумме их комплексно-сопряженными величинами делает и результат суммирования комплексно-сопряженным, поэтому

$$\int_a^b y^*(s)x^*(s)ds = \left( \int_a^b \dot{y}(s)\dot{x}(s)ds \right)^*$$

Разделение двойного интеграла на одинарные делает переменные интегрирования независимыми по отношению друг к другу. При замене переменной интегрирования «s» на «t» последнее слагаемое в выражении для  $J$ , с учетом (П7.2), приобретает вид

$$\int_a^b \dot{y}(t)\dot{x}(t)dt \cdot \left( \int_a^b \dot{y}(s)\dot{x}(s)ds \right)^* = \left| \int_a^b \dot{y}(t)\dot{x}(t)dt \right|^2.$$

Переходя к переменной интегрирования на « $t$ » и во всех прочих одинарных интегралах в выражении для  $J$  и учитывая однотипность возникающих слагаемые, запишем интеграл (П7.1) в виде

$$J = \int_a^b |\dot{y}(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |\dot{x}(t)|^2 dt - \left| \int_a^b \dot{y}(t)\dot{x}(t)dt \right|^2.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\left| \int_a^b \dot{y}(t)\dot{x}(t)dt \right|^2 = \int_a^b |\dot{y}(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |\dot{x}(t)|^2 dt - J, \quad (\text{П7.3})$$

справедливое для произвольных границ интегрирования и для произвольных комплексно-значных функций  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$ .

Интеграл  $J$  не может принимать отрицательных значений (см. (П7.1)), поэтому левая часть (П7.3) может быть либо меньше, либо равной первому слагаемому правой части. Это позволяет записать соотношение, известное как **неравенство Коши-Буняковского**

$$\left| \int_a^b \dot{y}(t)\dot{x}(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |\dot{y}(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |\dot{x}(t)|^2 dt}. \quad (\text{П7.4})$$

Равенство левой и правой частей в (П7.4) возникает лишь при условии  $J=0$ , что возможно, если  $\dot{y}(t)x^*(s) \equiv x^*(t)\dot{y}(s)$ , т.е. при любых  $s$  и  $t$  соблюдается условие  $\dot{y}(t)/x^*(t) = \dot{y}(s)/x^*(s) = A$ .

Итак, неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство для функций  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$ , связанных соотношением

$$\dot{y}(t) = A \cdot x^*(t), \quad (\text{П7.5})$$

где  $A$  – произвольная по значению константа.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Токарев А.Б. Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике [Текст]: учеб. пособие / А.Б. Токарев. – Ч.1. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015. – 197 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – М.: Наука, 1988. – 480 с.

3. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.

4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники [Текст] / Б.Р. Левин – М.: Радио и связь, 1989. – 653 с.

5. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике [Текст] / А.М. Заездный – М.: Связь, 1969. – 448 с.

6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] / С.И. Баскаков – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.

7. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]: учеб. пособие для вузов / Д.В. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др.; под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.

8. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику [Текст] / С.М. Рытов. – Ч. 1. – М.: Наука, 1976. – 435 с.

9. Ван дер Зил А. Шум (источники, описание, измерение) [Текст] / А. Ван дер Зил; пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1973. – 178 с.

10. Филиппский Ю.К. Анализ обобщенных переходных характеристик четырехполосников / Ю.К. Филиппский // Изв.вузов СССР. Радиотехника. – 1978. – №3. – С. 114-116.

11. Филиппский Ю.К. Случайные сигналы в радиотехнике [Текст] / Ю.К. Филиппский. – Киев: Вища школа, 1986. – 126 с.

12. Ланнэ А.А. Синтез преобразователей Гильберта [Текст] / А.А. Ланнэ, В.С. Шапгала // Цифровая обработка сигналов. – 2002. – № 2. – С. 23-26.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....</b>                                     | <b>5</b>  |
| 1.1. Детерминированные и случайные сигналы .....  | 5         |
| 1.2. Одномерные вероятностные характеристики случайных процессов.....                                   | 7         |
| 1.3. Многомерные вероятностные характеристики случайных процессов .....                                 | 9         |
| 1.4. Числовые характеристики случайных процессов .....  | 13        |
| 1.5. Классификация случайных процессов .....  | 15        |
| <b>2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....</b>                         | <b>20</b> |
| 2.1. Назначение и свойства корреляционных характеристик .   | 20        |
| 2.2. Спектральные характеристики случайных процессов..  | 23        |
| 2.3. Теорема Винера-Хинчина.....  | 27        |
| 2.4. Понятия ширины спектра и интервала корреляции случайного процесса .....                            | 30        |
| 2.5. Типовые корреляционные и спектральные свойства помех и шумов .....                                 | 32        |
| 2.6. Особенности комплексной спектральной плотности реализаций стационарных случайных процессов .....   | 42        |
| <b>3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ .....</b>                                     | <b>45</b> |
| 3.1. Прохождение случайных процессов через безынерционные линейные цепи .....                           | 45        |
| 3.2. Преобразование энергетических характеристик случайных процессов в инерционных линейных цепях.....  | 46        |
| 3.3. Оценка вероятностных характеристик реакции инерционной линейной цепи на случайное воздействие .... | 53        |

|  |            |
|--|------------|
| 3.4. Понятие шумовой полосы пропускания цепи .....   | 55         |
| 3.5. Дифференцирование случайных процессов .....   | 59         |
| 3.6. Выбросы стационарного нормального случайного<br>процесса.....   | 62         |
| 3.7. Интегрирование случайных процессов .....  | 64         |
| 3.8. Установление сигналов на выходе линейных цепей ....   | 65         |
| <b>4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ<br/>СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....</b>                                | <b>71</b>  |
| 4.1. Безынерционные нелинейные преобразования<br>случайных процессов .....                                   | 71         |
| 4.2. Амплитудное и фазовое детектирование узкополосных<br>нормальных случайных процессов .....               | 80         |
| 4.3. Нелинейное инерционное преобразование случайных<br>процессов.....                                       | 90         |
| <b>5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ<br/>НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ .....</b>                               | <b>92</b>  |
| 5.1. Аналоговые и цифровые системы передачи<br>информации .....  | 92         |
| 5.2. Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации .   | 94         |
| 5.3. Характеристики и причины оптимальности фильтра<br>Колмогорова-Винера .....                              | 94         |
| 5.4. Пример применения фильтра Колмогорова-Винера для<br>фильтрации полезного сигнала из смеси с шумом ..... | 98         |
| <b>6. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ<br/>ФОРМЫ НА ФОНЕ ПОМЕХ.....</b>                            | <b>103</b> |
| 6.1. Теоретические основы обнаружения сигналов<br>известной формы .....                                      | 103        |
| 6.2. Критерий качества при обнаружении полезного сигнала<br>на фоне аддитивного шума.....                    | 104        |
| 6.3. Обнаружение сигналов на фоне белого шума.<br>Согласованные фильтры и их характеристики .....            | 106        |



|  |            |
|--|------------|
| 6.4. Обнаружение сигналов на фоне окрашенного шума ..  | 117        |
| 6.5. Проблемы практической реализации оптимальных фильтров. Когерентный и некогерентный прием сигналов. Квазиоптимальная фильтрация..... | 120        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>  | <b>129</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.... ..</b>  | <b>130</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. НЕКОТОРЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ .....</b>   | <b>130</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ .....</b>  | <b>131</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА.....</b>  | <b>132</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 5. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....</b>  | <b>136</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ГИЛЬБЕРТА.....</b>   | <b>137</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 7. ОБОСНОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВА КОШИ-БУНЯКОВСКОГО.....</b>  | <b>139</b> |
| <b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>   | <b>141</b> |

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В РАДИОТЕХНИКЕ  
ЧАСТЬ 2

В авторской редакции

Компьютерный набор А.Б. Токарева

Подписано к изданию 08.12.2017.

Объем данных 2,9 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14