ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов,
А.В. Купцов

Мет. 1.rar	200 К байт	14.10.2008	уч.-изд. 2,1 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»

ИНТЕГРАЛЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика»
для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»
очной формы обучения

Воронеж 2009

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов

УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 « Управление и информатика в технических системах»,140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»,140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Интегралы / ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2009. * с.

Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра очного обучения.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 6.rar»

Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме:“Интегралы”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие неопределенного интеграла.

Пусть *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на промежутке

x, то есть $F'(x)=f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$) для $\forall x \in X$.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции *f(x)* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* на промежутке *x* и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где *C*- произвольная постоянная.

1.2. Основные правила интегрирования.

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

б) $\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$, где a – постоянная;

г) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

д) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то

$\int f(u)du = F(u) + C$.

1.3. Таблица простейших неопределенных интегралов.

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \;\; (a \neq -1),$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

3) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C_1 \; (a \neq 0),$

4) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \;\; (a \neq 0),$

$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C \; (a \neq 0),$

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \;\; (a \neq 0),$

6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C, \; (a > 0)$,

7) $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \; (a > 0)$, $\int e^x dx = e^x + C,$

8) $\int \cos x dx = \sin x + C,$

9) $\int \sin x dx = \cos x + C,$

10 $\int \dfrac{1}{\sin^2(x)} dx = -ctg\, x,\;\; \int \dfrac{1}{\cos^2(x)} dx = tg\, x,$

11) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C,$

12) $\int chx\,dx = sh\,x + C$,

13) $\int shx\,dx = ch\,x + C$,

14) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$;

15) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\,cthx + C$.

Замечание. Правило д) значительно расширяет таблицу простейших интегралов. В силу этого правила таблица интегралов оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования незави-симой переменной или дифференцируемой функцией.

1.4. Метод подстановки. Замена переменой в неопределенном интеграле.

Интегрирование путем введения новой переменной t основано на формуле

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ монотонная непрерывно-дифференцируемая функция переменной t. Функцию φ выбирают таким образом , чтобы правая часть формулы приобрела более удобный вид. Иногда применяется подстановка вида $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Допустим, что подынтегральное выражение уда-лось преобразовать к виду $f(x)\,dx = g(u)\,du$, где $u = \psi(u)$ тогда , если известен $\int g(u)du = F(u) + C$, то

$$\int f(x)dx = F[\psi(x)] + C.$$

1.5. Тригонометрические подстановки.

а) если интеграл содержит радикал вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, то полагают $x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$), откуда получается

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \times \cos t$ (или $\sqrt{a^2 - x^2} = a \times \sin t$)

б) если интеграл содержит радикал вида $\sqrt{x^2 - a^2}$,

то полагают $x = \dfrac{a}{\sin t}$ (или $x = \dfrac{a}{\cos t}$),

откуда $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot tgt$ (и $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot ctgt$).

в) если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то

полагают $x = a \cdot tgt$ (или $x = a \cdot ctgt$), откуда

$\sqrt{x^2 + a^2} = \dfrac{a}{\cos t}$ (или $x = \dfrac{a}{\sin t}$).

Замечание. Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться гиперболическими подстановками: $x = a \cdot tht$, $x = a \cdot ctht$, $x = a \cdot sht$.

1.6. Метод интегрирования по частям.

Если $u = j(x)$ и $v = y(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x, то

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Замечание. Иногда, чтобы свести исходный интеграл к табличному, приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз. В некоторых случаях получают уравнение, из которого определяется начальный интеграл.

1.7. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложений на простейшие.

Рассмотрим рациональную функцию (или рациональную дробь)

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ – многочлены степеней *n* и *m* соответственно относительно переменной *x*.

Если $n \geq m$, то есть дробь неправильная, то ее можно представить в виде

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$, (где $k < m$), то есть выделить

из нее целую часть $P_{n-m}(x)$. Пусть знаменатель

$Q_m(x) = (x-a)^r \dots (x^2 + px + q^2)^s \dots$

разлагается на линейные квадратичные множители. Тогда

правильная рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ разлагаются на суммы

простейших дробей с вещественными коэффициентами следующего вида:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^r}$, где $r \geq 1$ – целое число;

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}$ - q < 0, то есть квадратный трехчлен,

и $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, где $s \geq 1$ целое число, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочленов

$P_{n-m}(x)$ степени *(n-m)* и от простейших дробей, каждая из которых интегрируется в элементарных функциях:

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$,

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)\cdot(x-a)^{r-1}} + C$,

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx =$

$= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s} dx =$

$= \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s}$.

Первый интеграл в правой части легко находится с помощью

Подстановки $x^2 + px + q = z$, а второй преобразуем так

$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$, где $x + \frac{p}{2} = t$; $q - \frac{p^2}{4} = a^2$.

Для интеграла

$I_s = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$ (s – целое положительное число).

Имеет место следующая рекуррентная формула

$$I_s = \frac{1}{2a^2(S-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{s-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2S-3}{2S-2} \cdot I_{s-1}.$$

Эта формула после (s-1) – кратного применения

позволяет свести данный интеграл I_s к табличному

интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

1.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

а) *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам 5 и 6

б) *интегралы вида* $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ путем выделения в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня разлагается на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}dx +$$

$$+(B - \frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$$

Первый из полученных интегралов путем замены ax^2+bx+c сводится к табличному виду 1

, а второй рассмотрен в п. 1.

в) интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подста-

новки $\frac{1}{mx+n} = t$ приводятся к виду, рассмотренному в п. 2.

г) интегралы вида $\int R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$

где R- рациональная функция; $m_1,\ldots,m_k$, $n_1,\ldots,n_k$ - целые чис-

ла. С помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$,

где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1,\ldots,n_k$.

д) интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где m,n,p – рациональные числа выражаются
через конечную комбинацию элементарных функций
лишь в следующих трех случаях:

1) если p – целое число, подстановкой $x = t^s$,
s – знаменатель дроби p;

2) если $\frac{m+1}{n}$ - целое, подстановкой $\frac{a+bx^n}{n} = t^s$,
где s – знаменатель дроби p.

3) $\frac{m+1}{n}$ + p – целое, подстановкой
$\frac{a+bx^n}{n} = t^s$, s – знаменатель p.

1.9. Интегрирование тригонометрических функций.

а) интегралы вида

$\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$

находятся с использованием тригонометрических формул

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(m\alpha+\beta)).$$

б) интегралы вида

$$I_{m,n} = \int \sin^n x\cdot\cos^m x dx,$$

где n и m – четные числа, находятся с помощью формул

$\sin^2 x=(1-\cos(2x))/2$; $\cos^2 x=(1+\cos(2x))/2$,
$\sin(x)\cos(x)=0{,}5\sin(2x)$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – четное, то интеграл находится, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную. В частности, если $m=2k+1$, то

$$I_{n,m} = \int \sin^n(x)\cdot\cos^{2k+1}x dx = \int \sin^n(x)\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos x dx =$$

$$= \int \sin^n(x)\cdot(1-\sin^2 x)^k d(\sin x)$$

Полагая *t=sinx*, получим интеграл вида $\int t^k (1-t^2)^k dt.$

в) интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ приводятся
к интегралу от рациональной функции новой переменной с помощью, так называемой универсальной

тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$ при

этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Если *R(sin x, cos x)*= *R(sin x, cos x),* то целесообразно применить подстановку *tg x=t*, при этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ x = arctg\, t, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Определенный как предел интегральной суммы.

Определенным интегралом от функции *f(x)* в промежутке *[a, b]* называется предел ее интегральной суммы, когда число *n* элементарных отрезков неограниченно возрастает,

а длина наибольшего из них (*max* Δx_i) стремится к 0, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x, \text{ где } \Delta(x_i) = x_{i+1} - x_i, \ x_i \le x_i \le x_{i+1}.$$

Если *f(x)* непрерывна, то она интегрируема на *[a, b]* и предел этот не зависит от способа разбиения промежутка *[a, b]* на частичные отрезки и выбора точек ξ_i на этих промежутках.

2.2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.

Если $F'(x) = f(x)$,то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

2.3. Замена переменной в определенном интеграле.

Если 1) функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a, b];*
2) функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на *[a, b]*, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2.4. Формула интегрирования по частям.

Если *u(x)* и *v(x)* имеют непрерывные производные на *[a, b]*, то

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

2.5. Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0,$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

3) если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируем на $[a, b]$, C_1 и C_2 - любые вещественные числа, то функция $C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dx = C_1 \int_a^b f_1(x)dx + C_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

4) если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, d]$, то она интегрируема также и на $[a, b]$, причём

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

При этом точка c может быть произвольно расположена относительно a и b.

5) если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция

$|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx (a < b).$$

6) если $f(x) \ge 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \ (a \ge b)$

7) если $f(x) \ge g(x)$ для каждого

$x \epsilon (a, b)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \ (a < b)$.

8) если M – наибольшее значение функции $f(x)$ на

отрезке $[a, b]$, а m – наименьшее и a$\leq$b, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

*9) е*сли $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, то

существует $\xi \epsilon [a, b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Число $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним

значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода).

Пусть $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < +\infty$. Тогда по определению полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

В последнем равенстве слева несобственный интеграл сходится тогда, когда сходится каждый из несобственных интегралов в правой части.

3.2. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема. Пусть для всех $x \ge a$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, тогда:

1) если $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится, причём

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx;$$

2) если

$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ - расходится, то расходится и

$$\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = . \lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\cdot x^{m}\right\} = A \ne \infty, A \ne 0$$

Следствие. Если $f(x) \ge 0$ и, то есть $f(x) \sim \frac{A}{x^{m}}$

при $x \to \infty$, то

а) при m>1 $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;

б) при $m \le 1$ - расходится.

3.3. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода).

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна при $a \le x < b$, а при $x=b$ либо неопределенна, либо терпит разрыв. Тогда по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если предел, стоящий в правой части, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы; если функция имеет разрыв при $x=a$, либо при $x=c$, где $c \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;\quad \int\limits_a^b f(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$$

Признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема. Пусть при $x \in [a,b]$ выполнены неравенства $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ либо не определены, либо имеют разрыв при $x=b$.
Тогда:

1) если $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) если $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и

$\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Следствие. Если $f(x) \ge 0$ и

$$\lim_{x \to b}\left\{f(x) \cdot |x-b|^m\right\} = A \ne \infty, A \ne 0$$, то есть

$$f(x) \sim \frac{A}{|b-x|^m}$$ при $x \to b$; то

1) при $m<1$ интеграл (1) сходится;
2) при $m \ge 1$ - расходится.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1. Площади плоских фигур.

1) площадь в прямоугольных координатах.

Если площадь S ограничена двумя непрерывными Кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ при $a \le x \le b$, то $S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$.

2) площадь, ограниченная кривой, заданной в параметрическом виде.

Если кривая в параметрическом виде *x=x(t), y=y(t),* то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими *x=a, x=b* и отрезком оси *OX*, выражается интегралом

$$S = \int\limits_a^b y(t) \cdot x'(t)\,dt$$

, где t_1, t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ ($y(t) \geq 0$ на $[t_1, t_2]$).

3) площадь в полярных координатах.

Площадь, ограниченная непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ Равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

.

4.2.Длина дуги кривой.

1) длина дуги в прямоугольных координатах

Длина дуги гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой *y=f(x),* содержащейся между точками с абсциссой *x=a* и *x=b*, равна

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

2) длина дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме *x=x(t), y=y(t),* где *x(t)* и *y(t)* непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги равна

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

где t_1, t_2 - значения параметра, соответствующие концам дуги;

3) длина дуги в полярных координатах

Если $r=r(\varphi)\quad(\alpha\le\varphi\le\beta)$, то

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

4.3. Объёмы тела.

1) объём тела вращения

Объёмы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)*, осью *OX* и двумя вертикалями *x=a* и *x=b*, вокруг осей *OX* и *OY*, выражаются соответственно формулами

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx;\quad V_y=2\pi\int_a^b xy\,dx.$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной *x=g(y)*, осью *OY* и двумя параллелями *y=c* и *y=d* определяется по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то в приведённых формулах нужно сделать замену переменной интегрирования.

Объём тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r=r(\varphi)$ и полярными радиусами $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ вокруг полярной оси r

равен $V_r = \frac{2}{3}\int_a^b r^3 \sin j \, dj$

2) Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям

Если *S(x)* – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси *OX* в точке абсциссой *x*,

то объём этого тела равен $V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx$,

где x_1, x_2 – абсциссы крайних точек сечения тела.

5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Теоретические упражнения.

1. Следует ли из интегрируемости суммы двух функций интегрируемость слагаемых? Ответ обоснуйте примерами.
2. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций?
3. Показать, что сумма, произведение и частное двух неинтегрируемых функций могут быть интегрируемы.
4. Известно, что |*f(x)*| - интегрируемая функция. Что можно сказать об интегрируемости *f(x)*? Приведите примеры.
5. Пусть *f(x)* – непрерывная периодическая функция с периодом *T*.
6. Доказать, что $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ для всех a.
7. Доказать, что для непрерывной на *[-l,l]* функции *f(x)* справедливо равенство

а) $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$, если *f(x)*- чётная функция;

б) $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$, если *f(x)* – нечётная функция.

Дайте геометрическую иллюстрацию этих фактов.

8. Известно, что $\int_{a}^{b} f(x) \geq 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a,b]$. Приведите примеры.

9. В чём состоит геометрический смысл теоремы о среднем значении?

10. Объясните, почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница (т.е. использование этой формулы без учёта условий её применимости) приводит к неверным результатам на примере вычисления

$$\int_{0}^{l} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

11. Может ли при вращении бесконечной кривой вокруг какой-либо из осей координат получиться тело конечного объёма? Приведите пример.

12. Можно ли сходящийся несобственный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ от неограниченной функции *f(x)* рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы?

13. Можно ли в интеграле $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ сделать формальную замену переменной *x=1\t ?*

13. Можно ли вычислить интеграл от $\int_{0}^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$

с помощью замены переменной *x=sint.*

14. Не проводя вычислений, ответить на вопрос: чему равен интеграл

$$\int_{-4}^{4} \frac{x^5}{x^4 - 6x^2 + 3}\,dx ?$$

<u>Примеры решения задач.</u>

1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Решение.

Так как $\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dx}{e^{x}\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C =$$

$= -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C$.Здесь замена переменной $t = e^{-x}$ приводит к табличному интегралу.

2. Найти $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция является функцией от *sin x* и *cos x*. Применим подстановку $tg\frac{x}{2} = t$. При этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Тогда

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Преобразование, произведённое в знаменателе, называется выделением полного квадрата:

$$t^2 + t + 2 = t^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}.$$

3. Найти $\int x^2 \arccos x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, где $U = \arccos x, dV = x^2 dx$. Находим $V = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, dU = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Получим

$$\int x^2 \arccos x dx = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\sqrt{1-x^2}) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2} dx^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^3}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C, |x| \le 1.$$

4.Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{\frac{1}{4}} dx$$

, откуда следует, что это интеграл от дифференциального бинома при *m=0, n=4, p=-1/4.* Так как $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, то имеем третий случай интегрируемости. Подстановка $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, где s - знаменатель p в данном случае примет вид $x^{-4} + 1 = t^4$, откуда

$$x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt,\sqrt[4]{1+x^4}=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\int\frac{t^2dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}.$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим её на простейшие дроби

$$-\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1},$$ откуда

$$A(t-1)(t^2+1)+B(t+1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)=-t^2.$$

Полагая последовательно *t=1 и t=-1*, получим
B(1+1)(1+1)=-1, 4B=-1, B=-1/4;
A(-1-1)((-1)(-1)+1)=-(-1)(-1), -4A=-1, A=1/4.
Неопределённые коэффициенты *C* и *D* можно найти, приравнивая коэффициенты при t^1,t^0 в тождестве слева и справа, получим
A+B-C=0, C=0, -A+B-D=0, D=-1/2.
Следовательно

$$-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+1}dt-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

5. Найти $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку *x=a sht, dx=a cht dt*, получим

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+sh^2t)}=a\ cht.$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = a^2\int ch^2t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(ch2t+1)dt =$$

$= \dfrac{a^2\cdot sh2t}{4} + \dfrac{a^2\cdot t}{2} + C.$ Можно получить

$$sh2t = 2sht\sqrt{1+sh^2t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}.$$

Из равенства $sht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ находим, что

$e^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Поскольку

$e^t > 0 \Rightarrow\ t = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| - \ln a$. Поэтому окончательно получаем

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C_1,$$

где $C_1 = C - \dfrac{a}{2}\ln^2 a$ - новая произвольная постоянная.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

Решение. Эллипс задан в параметрическом виде. В силу симметрии эллипса достаточно найти площадь S_1 одной его четверти ($x \geq 0, y \geq 0$). Если x изменяется в пределах от 0 до a, то параметр t изменяется в пределах от $\pi/2$ до 0, которые находятся из уравнений $a\cos t=0$, $t_1 = \pi/2$; $a\cos t=a$, $\cos t=1$, $t_2=0$. По формуле для вычисления площади кривой, получим

$$S = 4S_1 = 4\int_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt = \pi ab$$

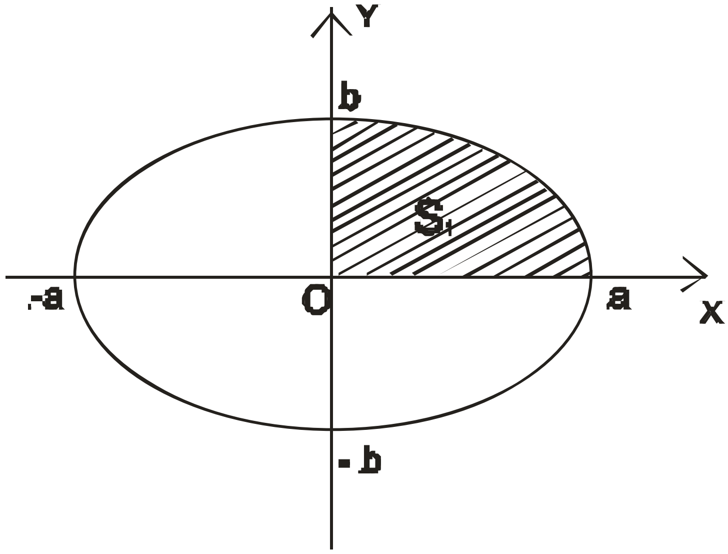

Рис.1

7. Найти длину дуги кардиоиды $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

Решение. Кривая задана в полярных координатах. В силу её симметрии относительно полярной оси достаточно вычислить длину L, её половины, при этом полярный угол φ изменяется от π до 0. По формуле для вычисления дуги кривой в полярных координатах имеем

$$L = 2L_1 = 2\int_{\pi}^{0}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi = \Big|_{\pi}^{0} = 8a.$$

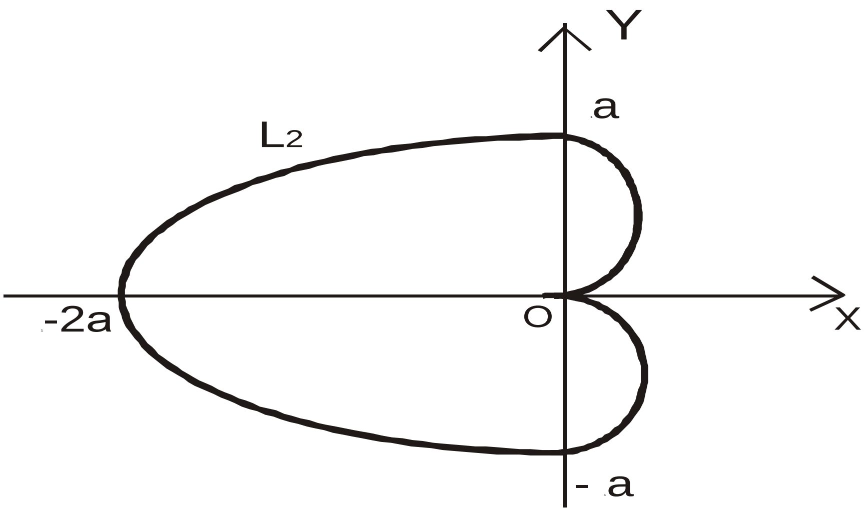

Рис. 2

8. Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями

$y=\pm b$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси OY (см. рис.3).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления объёма тела вращения .

$$V=\int_{-b}^{b}x^2dy=\pi a^2\int_{-b}^{b}\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{8}{3}\pi a^2b.$$

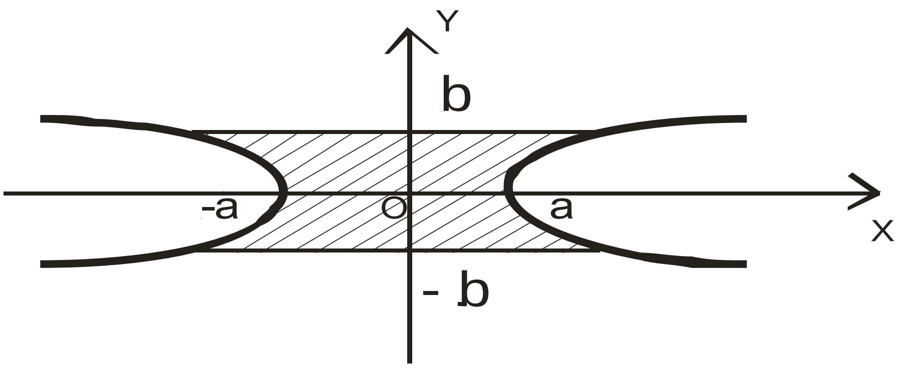

Рис. 3

9. Найти объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$(рис.4)

Решение. В общем случае, когда $a\neq b\neq c$ эллипсоид нельзя считать телом вращения. Поэтому его объём надо вычислять с помощью формулы объёма тела по известным площадям поперечных сечений.

Поперечные сечения эллипсоида плоскостями, параллельными оси OX, являются эллипсами, уравнения которых имеют вид

$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[\sqrt{1-\frac{x}{a^2}}\right]^2}=1,$

Поэтому полуоси эллипса, находящегося в сечении плоскостью $x=x$, равны соответственно

$$b(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c(x)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$ Известно, что

площадь эллипса с полуосями b и c вычисляется по формуле $S=\pi bc$.

Следовательно, площадь поперечного сечения $S(x)=\pi b(x)c(x)$. Теперь получим

$$V=\pi\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности при $a=b=c=R$ получаем формулу для нахождения объема шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

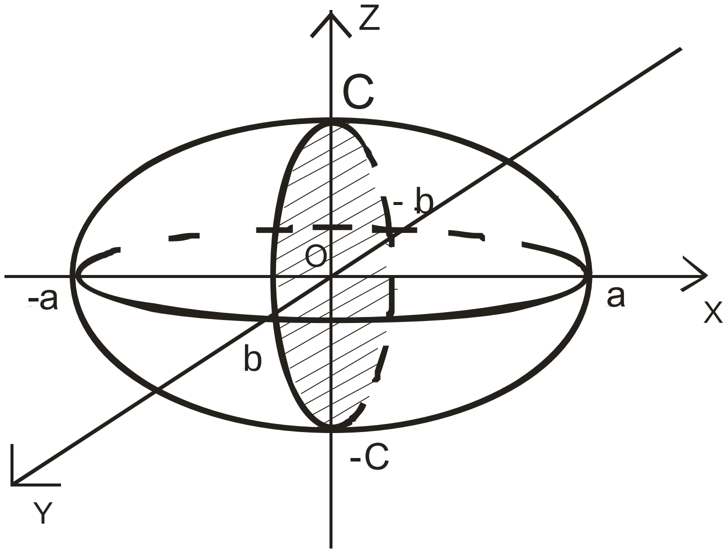

Рис. 4

10. Вычислить $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Так как подынтегральная дробь разлагается на простейшие дроби вида

$$\frac{1}{x^2+x+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),\text{ то}$$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_2^{b}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\bigg|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left|\ln\frac{b-1}{b+2}-\ln\frac{1}{4}\right|=\frac{2}{3}\ln 2.$$

11.Исследовать сходимость интеграла $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости для несобственных интегралов 1-го рода в виде неравенства. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\frac{1}{x}$

при $x>2$. Вычислим

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\bigg|_2^{\infty}=\infty$$ - расходится.

12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$. Решение при $x\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, то сходится и исходный интеграл по следствию из признака сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

13. Вычислить интеграл $\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при *x=1*.Это несобственный интеграл от неограниченной функции (2-го рода). По определению

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta \to 0} \int_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) = \infty .$$

Значит данный интеграл расходится.

14. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв при *x=1*. воспользуемся признаком сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для сравнения возьмем функцию $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Очевидно, что $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$,

при $x \in [0,1]$. Найдем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 .$$

Так как $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.;

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 1972. Т.1. 429 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной /О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

ИНТЕГРАЛЫ

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.
Уч.-изд. л. * «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14