

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Утверждено

В составе образовательной программы
Учебно-методическим советом ВГТУ

17 . 01 . 2025 протокол № 5

**Оценочные материалы
учебного предмета
УП.04 Математика**

Специальность: 38.02.03 Операционная деятельность в логистике

Квалификация выпускника: операционный логист

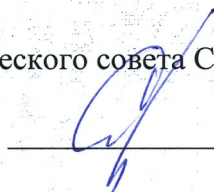
Нормативный срок обучения: 2 года 10 месяцев

Форма обучения: очная

Год начала подготовки: 2025 г.

Программа обсуждена на заседании методического совета СПК
6 декабря 2024 года Протокол № 3

Председатель методического совета СПК



С.И. Сергеева

Программа одобрена на заседании педагогического совета СПК
20 декабря 2024 года Протокол № 4

Председатель педагогического совета СПК



Н.А. Донцова

Оценочные материалы учебного предмета УП.04 Математика разработаны на основе:

- федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, утвержденного приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 г. № 413 с изменениями, внесенными приказами Министерства просвещения Российской Федерации от 12 августа 2022 г. №732 и от 27 декабря 2023г. №1028;

- федеральной образовательной программы среднего общего образования, утвержденной приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18 мая 2023 г. №371;

- федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования 38.02.03 «Операционная деятельность в логистике», утвержденного приказом Министерства Просвещения России от 21.04.2022 года , № 257 (ред. от 03.07.2024).

Организация-разработчик: ВГТУ

Разработчик:

Позднякова И.В. – преподаватель высшей квалификационной категории

СОДЕРЖАНИЕ

1.	ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА ОЦЕНОЧНОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ	4
2.	ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ	16
3.	ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ	143
4.	ОСОБЕННОСТИ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ	148

1. ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА ОЦЕНОЧНОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

1.1 Оценочные средства предназначены для оценки результатов освоения учебного предмета УП.04 Математика.

Формой промежуточной аттестации по учебному предмету Математика является экзамен с выставлением отметки по системе «отлично, хорошо, удовлетворительно, неудовлетворительно».

1.2 Оценочные материалы разработаны на основании:

- образовательной программы по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям);
- рабочей программы учебного предмета УП.04 Математика.

1.3 Цели изучения учебного предмета Математика

Приоритетными целями обучения математике являются:

- формирование центральных математических понятий (число, величина, геометрическая фигура, переменная, вероятность, функция), обеспечивающих преемственность и перспективность математического образования обучающихся;
- подведение обучающихся на доступном для них уровне к осознанию взаимосвязи математики и окружающего мира, понимание математики как части общей культуры человечества;
- развитие интеллектуальных и творческих способностей обучающихся, познавательной активности, исследовательских умений, критичности мышления, интереса к изучению математики;
- формирование функциональной математической грамотности: умения распознавать математические аспекты в реальных жизненных ситуациях и при изучении других учебных предметов, проявления зависимостей и закономерностей, формулировать их на языке математики и создавать математические модели, применять освоенный математический аппарат для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты.

1.4 Планируемые результаты освоения учебного предмета Математика

ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате изучения математики на уровне среднего общего образования у обучающегося будут сформированы следующие личностные результаты:

1) гражданского воспитания:

сформированность гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представление о

математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и другое), умение взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением;

2) патриотического воспитания:

сформированность российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской математики, ценностное отношение к достижениям российских математиков и российской математической школы, использование этих достижений в других науках, технологиях, сферах экономики;

3) духовно-нравственного воспитания:

осознание духовных ценностей русского народа, сформированность нравственного сознания, этического поведения, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью учёного, осознание личного вклада в построение устойчивого будущего;

4) эстетического воспитания:

эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений, восприимчивость к математическим аспектам различных видов искусства;

5) физического воспитания:

сформированность умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственное отношение к своему здоровью (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), физическое совершенствование при занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью;

6) трудового воспитания:

готовность к труду, осознание ценности трудолюбия, интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой и её приложениями, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы, готовность и способность к математическому образованию и самообразованию на протяжении всей жизни, готовность к активному участию в решении практических задач математической направленности;

7) экологического воспитания:

сформированность экологической культуры, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознание глобального характера экологических проблем, ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды, планирование поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды;

8) ценности научного познания:

сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладение языком

математики и математической культурой как средством познания мира, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.

МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате освоения программы по математике на уровне основного общего образования у обучающегося будут сформированы метапредметные результаты, характеризующиеся овладением универсальными познавательными действиями, универсальными коммуникативными действиями и универсальными регулятивными действиями.

Овладение универсальными познавательными действиями

Базовые логические действия:

выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;

воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие, условные;

выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях, предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;

делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;

проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные суждения и выводы;

выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

Базовые исследовательские действия:

использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;

проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами;

самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;

прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Работа с информацией:

выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи;

выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;

структурировать информацию, представлять её в различных формах, иллюстрировать графически;

оценивать надёжность информации по самостоятельно сформулированным критериям, сформулированным самостоятельно.

Овладение универсальными коммуникативными учебными действиями

воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;

в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;

представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта, самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории.

Овладение универсальными регулятивными учебными действиями

Самоорганизация:

составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации.

Самоконтроль, эмоциональный интеллект:

владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов, владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;

предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, данных, найденных ошибок, выявленных трудностей;

оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или не достижения результатов деятельности, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

Совместная деятельность:

понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач, принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы, обобщать мнения нескольких людей;

участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнениями, «мозговые штурмы» и иные), выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды, оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Студент на базовом уровне научится:

Учебный курс «Алгебра и начала математического анализа»

Числа и вычисления:

оперировать понятиями: натуральное, целое число, использовать признаки делимости целых чисел, разложение числа на простые множители для решения задач;

оперировать понятиями: рациональное и действительное число, обыкновенная и десятичная дробь, проценты;

выполнять арифметические операции с рациональными и действительными числами;

выполнять приближённые вычисления, используя правила округления, делать прикидку и оценку результата вычислений;

оперировать понятиями: степень с целым показателем, стандартная форма записи действительного числа, корень натуральной степени, использовать подходящую форму записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных;

оперировать понятием: степень с рациональным показателем;

оперировать понятиями: синус, косинус и тангенс произвольного угла, использовать запись произвольного угла через обратные тригонометрические функции;

оперировать понятиями: логарифм числа, десятичные и натуральные логарифмы.

Уравнения и неравенства:

оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство, целое, рациональное, иррациональное уравнение, неравенство, тригонометрическое уравнение;

выполнять преобразования тригонометрических выражений и решать тригонометрические уравнения;

выполнять преобразования целых, рациональных и иррациональных выражений и решать основные типы целых, рациональных и иррациональных уравнений и неравенств;

применять уравнения и неравенства для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры;

применять свойства степени для преобразования выражений, оперировать понятиями: показательное уравнение и неравенство, решать основные типы показательных уравнений и неравенств;

выполнять преобразования выражений, содержащих логарифмы, оперировать понятиями: логарифмическое уравнение и неравенство, решать основные типы логарифмических уравнений и неравенств;

находить решения простейших тригонометрических неравенств;

оперировать понятиями: система линейных уравнений и её решение, использовать систему линейных уравнений для решения практических задач;

находить решения простейших систем и совокупностей рациональных уравнений и неравенств;

моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства и системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Функции и графики:

оперировать понятиями: функция, способы задания функции, область определения и множество значений функции, график функции, взаимно обратные функции;

оперировать понятиями: чётность и нечётность функции, нули функции, промежутки знакопостоянства;

использовать графики функций для решения уравнений;

строить и читать графики линейной функции, квадратичной функции, степенной функции с целым показателем;

использовать графики функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни, выражать формулами зависимости между величинами;

оперировать понятиями: периодическая функция, промежутки монотонности функции, точки экстремума функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, использовать их для исследования функции, заданной графиком;

оперировать понятиями: графики показательной, логарифмической и тригонометрических функций, изображать их на координатной плоскости и использовать для решения уравнений и неравенств;

изображать на координатной плоскости графики линейных уравнений и использовать их для решения системы линейных уравнений;

использовать графики функций для исследования процессов и зависимостей из других учебных дисциплин.

Начала математического анализа:

оперировать понятиями: последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии;

оперировать понятиями: бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

задавать последовательности различными способами;

использовать свойства последовательностей и прогрессий для решения реальных задач прикладного характера;

оперировать понятиями: непрерывная функция, производная функции, использовать геометрический и физический смысл производной для решения задач;

находить производные элементарных функций, вычислять производные суммы, произведения, частного функций;

использовать производную для исследования функции на монотонность и экстремумы, применять результаты исследования к построению графиков;

использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах;

оперировать понятиями: первообразная и интеграл, понимать геометрический и физический смысл интеграла;

находить первообразные элементарных функций, вычислять интеграл по формуле Ньютона–Лейбница;

решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, средствами математического анализа.

Множества и логика:

оперировать понятиями: множество, операции над множествами;

использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений, при решении задач из других учебных предметов;

оперировать понятиями: определение, теорема, следствие, доказательство.

Учебный курс «Геометрия»

оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость;

применять аксиомы стереометрии и следствия из них при решении геометрических задач;

оперировать понятиями: параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей;

классифицировать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве;

оперировать понятиями: двугранный угол, грани двугранного угла, ребро двугранного угла, линейный угол двугранного угла, градусная мера двугранного угла;

оперировать понятиями: многогранник, выпуклый и невыпуклый многогранник, элементы многогранника, правильный многогранник;

распознавать основные виды многогранников (пирамида, призма, прямоугольный параллелепипед, куб);

классифицировать многогранники, выбирая основания для классификации (выпуклые и невыпуклые многогранники, правильные многогранники, прямые и наклонные призмы, параллелепипеды);

оперировать понятиями: секущая плоскость, сечение многогранников;

объяснять принципы построения сечений, используя метод следов;

строить сечения многогранников методом следов, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу;

решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам, применяя известные аналитические методы при решении стандартных математических задач на вычисление расстояний между двумя точками, от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми;

решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам, применяя известные аналитические методы при решении стандартных математических задач на вычисление углов между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями, двугранных углов;

вычислять объёмы и площади поверхностей многогранников (призма, пирамида) с применением формул, вычислять соотношения между площадями поверхностей, объёмами подобных многогранников;

оперировать понятиями: симметрия в пространстве, центр, ось и плоскость симметрии, центр, ось и плоскость симметрии фигуры;

извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках;

применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения, если условия применения заданы в явной форме;

применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении стереометрических задач;

приводить примеры математических закономерностей в природе и жизни, распознавать проявление законов геометрии в искусстве;

применять полученные знания на практике: анализировать реальные ситуации и применять изученные понятия в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные

ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин;

оперировать понятиями: цилиндрическая поверхность, образующие цилиндрической поверхности, цилиндр, коническая поверхность, образующие конической поверхности, конус, сферическая поверхность;

распознавать тела вращения (цилиндр, конус, сфера и шар);

объяснять способы получения тел вращения;

классифицировать взаимное расположение сферы и плоскости;

оперировать понятиями: шаровой сегмент, основание сегмента, высота сегмента, шаровой слой, основание шарового слоя, высота шарового слоя, шаровой сектор;

вычислять объёмы и площади поверхностей тел вращения, геометрических тел с применением формул;

оперировать понятиями: многогранник, вписанный в сферу и описанный около сферы, сфера, вписанная в многогранник или тело вращения;

вычислять соотношения между площадями поверхностей и объёмами подобных тел;

изображать изучаемые фигуры от руки и с применением простых чертёжных инструментов;

выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу, строить сечения тел вращения;

извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках;

оперировать понятием вектор в пространстве;

выполнять действия сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число, объяснять, какими свойствами они обладают;

применять правило параллелепипеда;

оперировать понятиями: декартовы координаты в пространстве, вектор, модуль вектора, равенство векторов, координаты вектора, угол между векторами, скалярное произведение векторов, коллинеарные и компланарные векторы;

находить сумму векторов и произведение вектора на число, угол между векторами, скалярное произведение, раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам;

задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат;

применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения, если условия применения заданы в явной форме;

решать простейшие геометрические задачи на применение векторно-координатного метода;

решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам, применяя известные методы при решении стандартных математических задач;

применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении стереометрических задач;

приводить примеры математических закономерностей в природе и жизни, распознавать проявление законов геометрии в искусстве;

применять полученные знания на практике: анализировать реальные ситуации и применять изученные понятия в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Учебный курс «Вероятность и статистика»

читать и строить таблицы и диаграммы;

оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее, наименьшее значение, размах массива числовых данных;

оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт) и случайное событие, элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта, находить вероятности в опытах с равновероятными случайными событиями, находить и сравнивать вероятности событий в изученных случайных экспериментах;

находить и формулировать события: пересечение и объединение данных событий, событие, противоположное данному событию, пользоваться диаграммами Эйлера и формулой сложения вероятностей при решении задач;

оперировать понятиями: условная вероятность, независимые события, находить вероятности с помощью правила умножения, с помощью дерева случайного опыта;

применять комбинаторное правило умножения при решении задач;

оперировать понятиями: испытание, независимые испытания, серия испытаний, успех и неудача, находить вероятности событий в серии независимых испытаний до первого успеха, находить вероятности событий в серии испытаний Бернулли;

оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, диаграмма распределения;

сравнивать вероятности значений случайной величины по распределению или с помощью диаграмм;

оперировать понятием математического ожидания, приводить примеры, как применяется математическое ожидание случайной величины, находить математическое ожидание по данному распределению;

иметь представление о законе больших чисел;

иметь представление о нормальном распределении.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ПРОЕКТА

Выполнение Индивидуального проекта по математике предполагает достижение обучающимися следующих результатов:

ЛИЧНОСТНЫХ:

- развитие личностных, в том числе духовных и физических, качеств, обеспечивающих защищенность обучаемого для определения жизненно важных интересов личности в условиях кризисного развития экономики, сокращения природных ресурсов;
- формирование системы знаний об экономической жизни общества, определение своих места и роли в экономическом пространстве;
- воспитание ответственного отношения к сохранению окружающей природной среды, личному здоровью как к индивидуальной и общественной ценности;

МЕТАПРЕДМЕТНЫХ:

- овладение умениями формулировать представления об экономической науке как системе теоретических и прикладных наук, изучение особенности применения экономического анализа для других социальных наук, понимание сущности основных направлений современной экономической мысли;
- овладение обучающимися навыками самостоятельно определять свою жизненную позицию по реализации поставленных целей, используя правовые знания, подбирать соответствующие правовые документы и на их основе проводить экономический анализ в конкретной жизненной ситуации с целью разрешения имеющихся проблем;
- формирование умения воспринимать и перерабатывать информацию, полученную в процессе изучения общественных наук, вырабатывать в себе качества гражданина Российской Федерации, воспитанного на ценностях, закрепленных в Конституции Российской Федерации;
- генерирование знаний о многообразии взглядов различных ученых по вопросам, как экономического развития Российской Федерации, так и мирового сообщества; умение применять исторический, социологический, юридический подходы для всестороннего анализа общественных явлений;

ПРЕДМЕТНЫХ:

- сформированность системы знаний об экономической сфере в жизни общества как пространстве, в котором осуществляется экономическая деятельность индивидов, семей, отдельных предприятий и государства;

- понимание сущности экономических институтов, их роли в социально-экономическом развитии общества; понимание значения этических норм и нравственных ценностей в экономической деятельности отдельных людей и общества, сформированность уважительного отношения к чужой собственности;
- сформированность экономического мышления: умения принимать рациональные решения в условиях относительной ограниченности доступных ресурсов, оценивать и принимать ответственность за их возможные последствия для себя, своего окружения и общества в целом;
- владение навыками поиска актуальной экономической информации в различных источниках, включая Интернет; умение различать факты, аргументы и оценочные суждения; анализировать, преобразовывать и использовать экономическую информацию для решения практических задач в учебной деятельности и реальной жизни;
- сформированность навыков проектной деятельности: умение разрабатывать и реализовывать проекты экономической и междисциплинарной направленности на основе базовых экономических знаний и ценностных ориентиров;
- умение применять полученные знания и сформированные навыки для эффективного исполнения основных социально-экономических ролей (потребителя, производителя, покупателя, продавца, заемщика, акционера, наемного работника, работодателя, налогоплательщика);
- способность к личностному самоопределению и самореализации в экономической деятельности, в том числе в области предпринимательства; знание особенностей современного рынка труда, владение этикой трудовых отношений;
- понимание места и роли России в современной мировой экономике; умение ориентироваться в текущих экономических событиях, происходящих в России и мире.

2. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ

Текущий контроль проводится на практических занятиях и включает в себя оценку знаний и умений, компетенций обучающихся.

Формы проведения текущего контроля:

- 1 устный опрос, письменный опрос (в форме тестирования);
- 2 выполнение практических работ при проведении практических занятий;
- 3 внеаудиторная самостоятельная работа, в том числе сообщение по теме или реферативное задание.

Оценочное средство 1.1

для проведения текущего контроля в форме входного контроля

Входной контроль состоит из заданий, частично взятых из открытого банка ОГЭ по математике. На выполнение заданий входного контроля дается 1 академический час (45 минут).

Входной контроль состоит из 9 заданий, первые 5 из которых являются минимального обязательного уровня. Правильность выполнения этих заданий оценивается 3 баллами. Остальные задания – более сложные, они оцениваются 4-5 баллами. За частичное решение заданий выставляется 1-2 балла.

При выполнении заданий требуется представить ход решения и указать полученный ответ. Задания можно выполнять в любой последовательности, сохраняя нумерацию в карточке.

Баллы, полученные за все выполненные задания, суммируются.

Критерии оценки оценочного средства 1.1

для проведения текущего контроля в форме входного контроля

Шкала перевода баллов в отметки по пятибалльной системе

Отметка	Число баллов, необходимых для получения отметки
«3» (удовл)	12-16
«4» (хорошо)	17-24
«5» (отлично)	более 24

Примерные задания входного контроля

№	Содержание задания	Кол бал
1	Вычислить: $0,6 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$.	3
2	Решить уравнение: $5x^2 - 8x - 4 = 0$.	3

3	Решить систему неравенств: $\begin{cases} 2 - 10x > 8, \\ 3x + 4 < 4. \end{cases}$	3
4	Упростить выражение: $\frac{a^2 - 4}{a} \cdot \frac{1}{a + 2} - \frac{a + 2}{a}$.	3
5	Найти координаты и длину вектора $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$.	3
6	Решить уравнение: $\sqrt{2x - 11} = 3$.	4
7	Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$	4
8	Решить уравнение: $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$.	5
9	Решить неравенство: $\frac{14}{(10x + 5)(1 - x)} < 0$.	5

Оценочное средство 1.2 для проведения текущего контроля в форме опроса

Теоретические вопросы для устного и (или) письменного опроса для оценки знаний в ходе текущего контроля.

Раздел 1. Алгебра и начала математического анализа

Тема 1.1. Действительные числа

1. Дайте определение арифметического квадратного корня
2. Дайте определение корня n-ой степени из числа
3. Запишите и произнесите вслух все известные вам свойства корней.
4. Запишите и произнесите вслух все известные вам свойства степеней.
5. Чему равен корень четной степени из отрицательного числа? Приведите пример.
6. Чему равен корень нечетной степени из отрицательного числа? Приведите пример.
7. Назовите правило внесения множителя под знак корня.
8. Как избавляются от иррациональности в знаменателе?
9. Дайте определение степени с дробным и отрицательным показателем, сформулируйте их свойства.
10. Приведите пример арифметической прогрессии.
11. Приведите пример геометрической прогрессии.
12. Приведите пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Тема 1.2. Степенная функция

1. Дайте определение функции.
2. Перечислите способы задания функции.
3. Дайте определение аргумента функции.
4. Дайте определение значения функции.
5. Дайте определение области определения функции.
6. Дайте определение области значения функции.
7. Дайте определение четной функции.
8. Дайте определение нечетной функции.

9. Дайте определение возрастающей функции.
10. Дайте определение убывающей функции.
11. Определение периодической функции.
12. Дайте определение сложной функции.
13. Дайте определение максимума функции.
14. Дайте определение минимума функции.
15. Дайте определение нулей функции.
16. Определение асимптоты графика функции.
17. Дайте определение ограниченной функции.
18. Степенная функция – это функция ...
19. Свойства степенной функции различаются в зависимости от ...
20. Свойства степенной функции при четном значении n . Графиком функции является ... , расположенная в ... полуплоскости координат.
21. Свойства степенной функции при нечетном значении n . Графиком функции является ...
22. Схематический график функции $y = x^{2n}$.
23. Схематический график функции $y = x^{2n+1}$.
24. Схематический график функции $y = x^{-2n}$.
25. Схематический график функции $y = x^{-(2n+1)}$.
26. Схематический график функции $y = \sqrt[n]{x}$.
27. Схематический график функции $y = \sqrt[n]{x^{2n+1}}$.
28. Уравнения, в которых переменная, называются иррациональными.
29. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению ...
30. На что стоит обратить внимание при решении иррациональных, дробнорациональных уравнений и неравенств?

Тема 1.3 Показательная функция

1. Какая функция называется показательной?
2. Что является областью определения и множеством значений показательной функции?
3. Является ли показательная функция четной?
4. При каком условии показательная функция является возрастающей?
5. При каком условии показательная функция является убывающей?
6. Как зависит изменение показательной функции от основания?
7. Перечислите свойства показательной функции с основанием больше единицы.
8. Перечислите свойства показательной функции с основанием меньше единицы.
9. Схематический график показательной функции с основанием больше единицы.
10. Схематический график показательной функции с основанием меньше единицы.
11. Какое уравнение называется показательным?
12. Сформулируйте правило решения простейших показательных уравнений.
13. В чем заключается графический способ решения уравнений.
14. Дайте определение показательного неравенства?
15. Сформулируйте методы решения показательных неравенств

Тема 1.4 Логарифмическая функция

1. Дайте определение логарифма.
2. Сформулируйте название действия нахождения логарифма.
3. Запишите основание натурального логарифма.

4. Сформулируйте основное логарифмическое тождество.
5. Сформулируйте теорему о логарифме произведения.
6. Сформулируйте теорему о логарифме частного.
7. Приведите формулу перехода к новому основанию.
8. Какие свойства логарифма используются при выполнении тождественных преобразований?
9. Какой логарифм называется десятичным?
10. Дайте определение логарифмической функции.
11. Сформулируйте определение логарифмического уравнения.
12. Сформулируйте методы решения логарифмических уравнений.
13. Дайте определение логарифмического неравенства.
14. Сформулируйте методы решения логарифмических неравенств.
15. Запишите общий вид логарифмической функции.
16. Как представить число в виде логарифма по основанию a ?
17. Изобразите схематично график логарифмической функции.
18. Как определить посторонний корень логарифмического уравнения?
19. Перечислите основные свойства логарифмов $a > 1$, $a \neq 1$.
20. Обязательно ли при решении логарифмического уравнения находить область существования функций, входящих в уравнение?
21. На что, в первую очередь следует обратить внимание при решении логарифмического неравенства?

Тема 1.5 Тригонометрические формулы

1. Как строится угол на числовой окружности?
2. Дайте определение 1 радиана и 1 градуса.
3. Запишите формулу перехода от градусного измерения угла к радианному.
4. Дайте определение основным тригонометрическим функциям произвольного угла.
5. Дайте определение основным тригонометрическим функциям острого угла в прямоугольном треугольнике.
6. Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.
7. Приведите знаки основных тригонометрических функций в разных четвертях.
8. Запишите основное тригонометрическое тождество.
9. Запишите формулу, связывающую тангенс и котангенс угла.
10. Запишите формулы, связывающие тангенс с косинусом и синус с котангенсом.
11. Перечислите основные формулы сложения.
12. Сформулируйте мнемоническое правило для запоминания формул приведения.
13. Сформулируйте правило написания формул приведения.
14. Приведите пример на применение формул приведения.
15. Приведите формулы суммы углов.
16. Запишите формулы двойного угла тригонометрических функций.
17. Запишите формулы половинного аргумента тригонометрических функций.
18. Запишите формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Тема 1.6 Тригонометрические уравнения

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Дайте определение арксинуса числа.
3. Дайте определение арккосинуса числа.
4. Как проходит линия тангенсов?

5. Как проходит линия котангенсов?
6. Приведите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
7. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.
8. Объясните метод решения простейших тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности.
9. Приведите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
10. Укажите два основных метода решения тригонометрических уравнений.
11. Дайте определение однородного тригонометрического уравнения первой и второй степеней.
12. Укажите способ решения однородного тригонометрического уравнения первой степени.
13. Приведите методы решения тригонометрических уравнений в зависимости от типа.
14. Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?
15. Проиллюстрируйте решение неравенства $\sin x > m$ на единичной окружности.

Тема 1.8 Производная и её геометрический смысл

1. Продолжите определение: «Производная – это...».
2. Раскройте геометрический смысл производной.
3. Продолжите определение: «Касательная – это...».
4. Раскройте физический смысл производной.
5. Что такое дифференцирование?
6. Перечислите правила вычисления производных.
7. Чему равна производная константы?
8. Чему равна производная независимой переменной?
9. Чему равна производная степенной функции?
10. Чему равна производная функции корень квадратный?
11. Чему равна производная показательной функции?
12. Чему равна производная экспоненты?
13. Чему равна производная логарифмической функции?
14. Чему равна производная функции натурального логарифма?
15. Чему равна производная функции синус?
16. Чему равна производная функции косинус?
17. Чему равна производная функции тангенс?
18. Чему равна производная функции котангенс?
19. Чему равна производная алгебраической суммы функций?
20. Чему равна производная произведения константы на функцию?
21. Чему равна производная произведения двух функций?
22. Чему равна производная частного от деления двух функций?
23. Чему равна производная частного от деления константы на функцию?
24. Чему равна производная частного от деления функции на константу?
25. Какой вид имеет уравнение касательной?
26. Когда касательная параллельна оси Ox

Тема 1.9 Применение производной к исследованию функций

1. Точки, в которых производная равна нулю, называются...
2. Сформулируйте признак возрастания функции.
3. Если на интервале функция возрастает, то значение производной на этом интервале...
4. Дифференцируемая функция может иметь экстремум в тех точках, где ...
5. Сформулируйте признак убывания функции.

6. Сформулируйте признак точки максимума функции.
7. Сформулируйте признак точки минимума функции.
8. Если график производной расположен выше оси Ox на интервале, то функция...
9. Если график производной пересекает ось Ox в точке x_0 , располагается сначала ниже, потом выше Ox , то x_0 для функции является ...
10. Какие точки называются точками экстремума?
11. Какая точка называется точкой перегиба?
12. Составьте алгоритм решения задач на нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке?
13. Составьте алгоритм исследования и построения графика функции с помощью производной.
14. Как найти вертикальную асимптоту графика функции

Тема 1.10 Интеграл

1. Определение дифференциала функции.
2. Какое действие обратное действию дифференцирования?
3. Определение первообразной функции.
4. Определение неопределенного интеграла.
5. Какие методы нахождения неопределенного интеграла вы знаете?
6. Чему равен неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций?
7. Что можно делать с константой умноженной на функцию в неопределенном интеграле?
8. Чему равен неопределенный интеграл от дифференциала независимой переменной?
9. Чему равен неопределенный интеграл от независимой переменной?
10. Чему равен неопределенный интеграл от степенной функции?
11. Чему равен неопределенный интеграл от показательной функции?
12. Чему равен неопределенный интеграл от экспоненты?
13. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x}$?
14. Чему равен неопределенный интеграл от функции синус?
15. Чему равен неопределенный интеграл от функции косинус?
16. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$?
17. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$?
18. Определение определенного интеграла.
19. Формула Ньютона – Лейбница.
20. Чему равен определенный интеграл, если его пределы интегрирования равны?
21. Что будет с определенным интегралом, если поменять местами пределы интегрирования?
22. Чему равен определенный интеграл от алгебраической суммы функций?
23. Что можно делать с постоянным множителем в определенном интеграле?
24. Определение криволинейной трапеции. Рисунок.
25. Формула площади криволинейной трапеции.
26. Формула нахождения уравнения линии по заданному уравнению углового коэффициента.
27. Формула нахождения закона движения по заданному уравнению скорости.
28. Формула нахождения уравнения скорости по заданному уравнению ускорения.
29. Определение интегральных кривых.
30. Геометрический смысл неопределенного интеграла.
31. Геометрический смысл определенного интеграла.

Раздел 2. «Геометрия»

Тема 2.1. Введение. Параллельность прямых и плоскостей

1. Сформулируйте три аксиомы стереометрии
2. Сформулируйте теоремы, следующие из аксиом стереометрии
3. Дайте определение параллельных прямых в пространстве.
4. Перечислите случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.
5. Дайте определение параллельности прямой и плоскости.
6. Перечислите случаи взаимного расположения прямой и плоскости.
7. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
8. Дайте определение скрещивающихся прямых.
9. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
10. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
11. Сформулируйте свойства параллельных плоскостей.
12. Сформулируйте теоремы о параллельности прямых в пространстве
13. Верно ли, что через точку вне данной плоскости проходит прямая, параллельная данной плоскости, и при том только одна?
14. Верно ли, что через точку вне данной плоскости проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна?
15. Могут ли скрещивающиеся прямые быть параллельными одной плоскости?
16. Могут ли скрещивающиеся прямые быть параллельными третьей прямой?

Тема 2.2 Перпендикулярность прямых и плоскостей

1. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Сформулируйте теорему о прямой, перпендикулярной к плоскости.
4. Сформулируйте свойства, связывающие параллельность прямых и их перпендикулярность к плоскости.
5. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
6. Сформулируйте теорему, обратную к теореме о трех перпендикулярах.
7. Дайте определение двугранного угла.
8. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
9. Сформулируйте теорему о диагонали прямоугольного параллелепипеда.
10. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
11. Верно ли, что плоскость, перпендикулярна к данной прямой, перпендикулярна к любой плоскости, содержащей эту прямую?
12. Верно ли, что прямая, перпендикулярная к двум данным пересекающимися прямыми, перпендикулярна к любой плоскости, содержащей эти прямые?
13. Может ли расстояние от точки до плоскости изображаться двумя различными отрезками?
14. Может ли расстояние между параллельными плоскостями изображаться двумя различными отрезками?
15. OA – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC . Назовите угол между прямой OB и плоскостью ABC .
16. OA – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC . Назовите угол между прямой OC и плоскостью ABC .

Тема 2.3 Многогранники

1. Дайте определение прямой призмы.
2. Дайте определение правильной призмы.

3. Дайте определение правильной пирамиды.
4. Дайте определение апофемы правильной пирамиды.
5. Запишите формулы площадей боковой и полной поверхности правильной призмы.
6. Запишите формулы площадей боковой и полной поверхностей правильной пирамиды.
7. Дайте определение правильной усеченной пирамиды. Запишите формулы площадей ее боковой и полной поверхностей.
8. Дайте определение правильного многогранника.
9. Перечислите элементы симметрии многогранника.
10. Перечислите виды правильных многогранников.
11. Верно ли, что все грани прямой призмы – прямоугольники?
12. Верно ли, что боковые грани наклонной призмы – параллелограммы?
13. Может ли сечение куба делить его на две правильные призмы?
14. Может ли сечение куба делить его на две прямых треугольных призмы?
15. В треугольной пирамиде $DABC$ назовите высоту, если боковые грани DAB и DBC перпендикулярны к основанию ABC .
16. В треугольной пирамиде $DABC$ назовите высоту, если боковые грани DBC и DAC перпендикулярны к основанию ABC .

Тема 2.4 Цилиндр, конус, шар

1. Дайте определение цилиндра. Нарисуйте цилиндр, укажите его образующую и осевое сечение.
2. Дайте определение конуса. Нарисуйте конус, укажите его образующую и осевое сечение.
3. Запишите формулы площадей боковой и полной поверхностей конуса.
4. Запишите формулы площадей боковой и полной поверхностей цилиндра.
5. Дайте определение сферы и шара.
6. Дайте определение касательной плоскости к сфере.
7. Запишите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса.
8. Запишите формулу площади сферы.
9. Запишите уравнение сферы с данным центром и радиусом. Опишите все случаи взаимного расположения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на заданное расстояние.
10. Сформулируйте свойство и признак касательной плоскости к сфере.
11. Верно ли, что все точки шара удалены от центра на расстояние, равное радиусу шара?
12. Верно ли, что все точки сферы удалены от центра на расстояние, равное радиусу сферы?
13. Может ли осевое сечение цилиндра быть трапецией.
14. Может ли осевое сечение конуса быть неравносторонним треугольником?

Тема 2.5 Объемы тел

1. Запишите формулу объема прямоугольного параллелепипеда.
2. Запишите формулу объема куба.
3. Запишите формулу объема прямой призмы.
4. Запишите формулу объема конуса.
5. Запишите формулу объема цилиндра.
6. Запишите формулу объема пирамиды.
7. Запишите формулу объема шара.
8. Запишите формулу площади сферы.
9. Запишите формулу объема усеченной пирамиды.
10. Запишите формулу объема усеченного конуса.

11. Верно ли, что прямая и наклонная призмы с соответственно равными основаниями могут иметь равные объемы?
12. Верно ли, что правильная и неправильная пирамиды с равными основаниями могут иметь равные объемы?
13. Могут ли два цилиндра с равными объемами иметь неравные радиусы?
14. Могут ли два шара с равными объемами иметь неравные радиусы?

Тема 2.6 Векторы в пространстве

1. Дайте определение вектора.
2. Дайте определение коллинеарных векторов.
3. Дайте определение произведения вектора на число.
4. Дайте определение равных векторов.
5. Сформулируйте правило треугольника для сложения двух векторов.
6. Сформулируйте правило многоугольника для сложения нескольких векторов.
7. Дайте определение компланарных векторов.
8. Сформулируйте признак компланарности трех векторов.
9. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.
10. Опишите с помощью чертежа правило параллелепипеда для сложения трех некомпланарных векторов.

Тема 2.7 Метод координат в пространстве

1. Верно ли, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора?
2. Может ли длина вектора быть меньше одной из его координат?
3. Может ли длина вектора равняться одной из его координат?
4. Назовите координатную плоскость, в которой лежит точка $M(0; -2; 8)$.
5. Назовите координатную плоскость, в которой лежит точка $M(-1; 0; 5)$.
6. Из точек $A(2; 0; -4)$, $B(3; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(-1; 7; 0)$, $E(0; 0; 11)$ выберите точку, лежащую на оси аппликат
7. Из точек $A(2; 0; -4)$, $B(3; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(-1; 7; 0)$, $E(0; 0; 11)$ выберите точку, лежащую на оси ординат.
8. Верно ли, что величина скалярного произведения векторов зависит от величины угла между ними?
9. Верно ли, что величина скалярного произведения векторов зависит от их длины?
10. Может ли скалярное произведение двух векторов быть равным их сумме?
11. Может ли скалярное произведение двух векторов быть равным произведению одного из них на число?
12. Запишите формулу координат середины отрезка.
13. Запишите формулу длины вектора в пространстве.
14. Запишите формулу расстояния между двумя точками в пространстве.
15. Дайте определение скалярного произведения векторов в пространстве.
16. Запишите формулу вычисления скалярного произведения двух векторов по их координатам

Раздел 3. «Вероятность и статистика»

Тема 3. 1 Комбинаторика

Тема 3. 2 Элементы теории вероятностей

Тема 3. 3 Статистика

1. Определение факториала.
2. Определение сочетаний из n элементов по m элементов.
3. Определение перестановок из n элементов.
4. Определение размещений из n элементов по k элементов.
5. Определение события.
6. Определение случайного события.
7. Определение достоверного события.
8. Определение невозможного события.
9. Что изучает теория вероятностей?
10. Что изучает комбинаторика?
11. Определение элементарного события.
12. Определение суммы событий.
13. Определение произведения событий.
14. Определение несовместных событий.
15. Классическое определение вероятности события.
16. Чему равна вероятность невозможного события?
17. Чему равна вероятность достоверного события?
18. Что можно сказать о величине вероятности случайного события?
19. Как найти среднее арифметическое числового ряда?
20. Как найти медиану числового ряда?
21. Как вычисляется размах числового ряда?
22. Может ли ряд чисел иметь более одной моды?
23. Ряд, в котором каждое последующее число меньше (или больше) предыдущего, называется...
24. Для чего нужны диаграммы, графики? Перечислите виды диаграмм.
25. Приведите примеры проявления закона больших чисел в природных явлениях.
26. Приведите примеры проявления закона больших чисел в общественных явлениях.
27. Что изучает статистика?

Критерии оценки оценочного средства 1.2 для проведения текущего контроля в форме опроса

Шкала перевода баллов в отметки по пятибалльной системе

Отметка	Число баллов	Критерии оценки
«5» (отлично)	5	• полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой и учебником; • изложил материал грамотным языком, точно используя математическую терминологию и символику, в определенной логической последовательности; • правильно выполнил рисунки, чертежи, графики, сопутствующие ответу; • показал умение иллюстрировать теорию конкретными примерами, применять ее в новой ситуации при выполнении практического задания; • продемонстрировал знание теории ранее изученных сопутствующих тем, сформированность и устойчивость используемых при ответе умений и

		навыков; • отвечал самостоятельно, без наводящих вопросов преподавателя; • возможны одна – две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил после замечания преподавателя.
«4» (хорошо)	4	• удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при этом имеет один из недостатков: • в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа; • допущены один – два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные после замечания преподавателя; • допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные после замечания преподавателя.
«3» (удовлетворительно)	3	• неполно раскрыто содержание материала (содержание изложено фрагментарно, не всегда последовательно), но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для усвоения программного материала; • имелись затруднения или допущены ошибки в определении математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов преподавателя; • студент не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания, но выполнил задания обязательного уровня сложности по данной теме; • при достаточном знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность основных умений и навыков.
«2» (неудовлетворительно)	2-0	• не раскрыто основное содержание учебного материала; • обнаружено незнание студентом большей или наиболее важной части учебного материала; • допущены ошибки в определении понятий, при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов преподавателя.

Тестовые задания по математике

Раздел 1. «Алгебра и начала математического анализа»

Тест 1. Определение производной.

1 вариант.

1. Производная функции $y = \frac{1}{4}x^4 + 5$ равна:

а) $\frac{1}{4}x^3$; б) $x^3 + 5$; в) x^6 ; г) x^3 .

2. Производная функции $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$ в точке $x = 2$ равна:

а) 5; б) 4,5; в) 6; г) 3,5.

3. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x) = -2x^2 + 1$?

а) $-2x$; б) $-4x$; в) $-4x + 1$; г) $-4x^3$.

2 вариант.

1. Производная функции $y = \frac{1}{7}x^7 - 3$ равна:

а) x^6 ; б) x^7 ; в) $\frac{1}{7}x^6$; г) $x^6 - 3$.

2. Производная функции $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 3$ в точке $x = -2$ равна:

а) $10\frac{2}{3}$; б) $2\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{1}{3}$; г) $-10\frac{2}{3}$.

3. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x) = 3x^3 - 5$?

а) x^2 ; б) $9x^2 - 5$; в) $9x^2$; г) $9x^4$.

3 вариант.

1. Производная функции $y = \frac{1}{6}x^6 - 4$ равна:

а) x^7 ; б) x^5 ; в) $x^7 - 4$; г) $x^5 - 4$.

2. Производная функции $f(x) = \frac{1}{4}x^6 - 1$ в точке $x = -1$ равна:

а) $-1,5$; б) $1,5$; в) $-0,75$; г) $0,75$.

3. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x) = -4x^4 - 3$?

а) $-x^3$; б) $-16x^2 - 3$; в) $-16x^5$; г) $-16x^3$.

4 вариант.

1. Производная функции $y = \frac{1}{5}x^5 + 2$ равна:

а) $x^6 + 2$; б) $x^4 + 2$; в) x^4 ; г) x^6 .

2. Производная функции $f(x) = \frac{1}{5}x^{10} + 1$ в точке $x = 1$ равна:

а) 1,2; б) 2; в) $-1,2$; г) 2,5.

3. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x) = -5x^5 + 2$?

а) $-25x^4$; б) x^4 ; в) $-25x^4 + 2$; г) $-25x^6$.

**Тест 2. Правила нахождения производной.
Степенная и тригонометрические функции.**

1 вариант.

- Производная функции $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 8$ равна:
 а) $\frac{1}{5}x^4 - 4x^2$; б) $x^4 - 12x^2$; в) $x^5 - 4x^3$; г) $x^6 - 12x^4 + 8x$.
- Производная функции $y = x \cos x + x^2 \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равна:
 а) $1 - \pi^2$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.
- Производная функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = -1$ равна:
 а) 0,5; б) 1; в) -0,5; г) -1.
- Производная функции $y = \sqrt{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ равна:
 а) 0,5; б) -0,5; в) 1; г) 0.

2 вариант.

- Производная функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5$ равна:
 а) $\frac{1}{4}x^3 - 3x$; б) $x^4 - 3x^2$; в) $x^3 - 6x$; г) $x^5 - 6x^3 + 5x$.
- Производная функции $y = x^2 \cos x + x \sin x$ в точке $x_0 = \pi$ равна:
 а) $1 - \pi^2$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.
- Производная функции $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ в точке $x_0 = 1$ равна:
 а) 0,5; б) 1; в) -0,5; г) -1.
- Производная функции $y = \sqrt{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi} x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$ равна:
 а) 0,5; б) -0,5; в) 1; г) 0.

3 вариант.

- Производная функции $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + 2x^4 - 7$ равна:
 а) $\frac{1}{7}x^6 + 5x^3$; б) $x^7 + 20x^5$; в) $x^7 + 5x^4$; г) $x^6 + 8x^3$.
- Производная функции $y = x^2 \sin x - x \cos x$ в точке $x_0 = \pi$ равна:
 а) $1 - \pi^2$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.
- Производная функции $y = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$ в точке $x_0 = 1$ равна:
 а) 0,5; б) 1; в) -0,5; г) -1.
- Производная функции $y = \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{\pi} x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ равна:
 а) 0,5; б) -0,5; в) 1; г) 0.

4 вариант.

- Производная функции $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - 5x^4 - 6$ равна:
 а) $x^5 - 20x^3$; б) $\frac{1}{6}x^5 - 5x^3$; в) $x^6 - 5x^3$; г) $x^7 - 20x^5 - 6x$.
- Производная функции $y = x \sin x - x^2 \cos x$ в точке $x_0 = \pi$ равна:
 а) $1 - \pi^2$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.
- Производная функции $y = \frac{1+x}{x^2-1}$ в точке $x_0 = 0$ равна:
 а) 0,5; б) 1; в) -0,5; г) -1.
- Производная функции $y = \sqrt{2} \sin x - \frac{2}{\pi} x^2 - \cos \frac{\pi}{6}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ равна:
 а) 0,5; б) -0,5; в) 0; г) 1.

**Тест 3. Правила нахождения производной.
Логарифмическая и показательная функции.**

1 вариант.

- Производная функции $y = \sin 2x \cdot e^{2x-1}$ равна нулю в точках:
 а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Производная функции $f(x) = x - e^x$ в точке $x = \ln 2,5$ равна:
 а) $\ln 2,5 - 1$; б) 3,5; в) -1,5; г) 1.
- Производная функции $f(x) = 3^x - x \ln x \ln 3$ в точке $x_0 = 1$ равна:
 а) $2 \ln 3$; б) $3 \ln 2$; в) $-3 \ln 2$; г) $-2 \ln 3$.
- Производная функции $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ в точке $x = \ln 2$ равна:
 а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

2 вариант.

- Производная функции $y = -\cos 3x \cdot e^{3x+1}$ равна нулю в точках:
 а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Производная функции $f(x) = e^{-x} + x$ в точке $x = \ln 3$ равна:
 а) $\ln 3 - 1$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 1,5; г) $\frac{2}{3}$.
- Производная функции $f(x) = 2^x + x \ln x \ln 2$ в точке $x_0 = 1$ равна:
 а) $2 \ln 3$; б) $3 \ln 2$; в) $-3 \ln 2$; г) $-2 \ln 3$.
- Производная функции $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}}$ в точке $x = \ln 2$ равна:
 а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

3 вариант.

- Производная функции $y = \cos 2x \cdot e^{2x+1}$ равна нулю в точках:
а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Производная функции $f(x) = e^{-x} - x$ в точке $x = \ln 4$ равна:
а) $-1,25$; б) $-\ln 4 - 1$; в) $-0,75$; г) $1,5$.
- Производная функции $f(x) = -2^x - x \ln x \ln 2$ в точке $x_0 = 1$ равна:
а) $2 \ln 3$; б) $3 \ln 2$; в) $-\ln 2$; г) $-3 \ln 2$.
- Производная функции $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ в точке $x = \ln 2$ равна:
а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

4 вариант.

- Производная функции $y = \sin 3x \cdot e^{3x-2}$ равна нулю в точках:
а) $\frac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\frac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\frac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\frac{\pi}{8}(4k-1)$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Производная функции $f(x) = x + e^x$ в точке $x = \ln 2$ равна:
а) $\ln 2 + 1$; б) 3 ; в) 1 ; г) $1,5$.
- Производная функции $f(x) = -3^x + x \ln x \ln 3$ в точке $x_0 = 1$ равна:
а) $2 \ln 3$; б) $3 \ln 2$; в) $-3 \ln 2$; г) $-2 \ln 3$.
- Производная функции $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} - e^x}$ в точке $x = \ln 2$ равна:
а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{7}{9}$; в) $-\frac{16}{25}$; г) $\frac{16}{25}$.

Тест 4. Геометрический смысл производной.

1 вариант.

- Угловым коэффициентом касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ в точке с абсциссой $x=1$ равен:
а) -1 ; б) $-2\frac{2}{3}$; в) 1 ; г) $\frac{1}{3}$.
- Угловым коэффициентом касательной к графику функции $f(x) = 2 \cos 2x - \sin 4x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{4}$ равен:
а) 8 ; б) 2 ; в) -2 ; г) 0 .
- Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:
а) $y = 2x - 2$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -2x + 2$; г) $y = -2x - 2$.

2 вариант.

- Угловым коэффициентом касательной к графику функции $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ в точке с абсциссой $x = -1$ равен:

- а. а) 3; б) 4; в) 7; г) $\frac{3}{4}$.
2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 3\sin 3x - \cos 2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$ равен:
- а. а) $\sqrt{3}$; б) 10; в) $9 + \sqrt{3}$; г) 6.
3. Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \frac{3+2x^2}{x+1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:
- а) $y = -3x + 3$; б) $y = 3x + 3$; в) $y = 3x - 3$; г) $y = -3x - 3$.

3 вариант.

1. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4$ в точке с абсциссой $x = -1$ равен:
- а. а) 6; б) 4; в) 8; г) -0,75.
2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \cos 3x - 2\sin 2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$ равен:
- а. а) 0; б) 7; в) -1; г) 1.
3. Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:
- а) $y = 2x + 1$; б) $y = -2x - 1$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = -2x + 1$.

4 вариант.

1. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 3x + \frac{1}{6}x^3$ в точке с абсциссой $x = 1$ равен:
- а. а) 4; б) 2,5; в) 1,5; г) 3,5.
2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \sin 6x + 2\cos 3x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ равен:
- а. а) 1; б) -1; в) 6; г) 0.
3. Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \frac{1-3x}{x^2+1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:
- а) $y = 3x + 1$; б) $y = 3x - 1$; в) $y = -3x + 1$; г) $y = -3x - 1$.

Тест 5. Физический смысл производной.

1 вариант.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2$, равна
- а) $\frac{1}{3}t^2 - 5t$; б) $t^3 - 5t$; в) $t^2 - 10t$; г) $\frac{1}{3}t^4 - 5t^3$.

2. Точка движется по прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 3t - 1$. Её мгновенная скорость $v(3)$ равна:
а) 8; б) 6; в) 10; г) 9.
3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t) = t^3 - 5t^2$ равно:
а) $2(3t - 5)$; б) $9t^2 - 10$; в) $3t^2 - 10t$; г) $6t - 8$.
4. Тело массой m движется по закону $x(t) = 3 \cos 3\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t = \frac{1}{3}$, равна:
а) 0; б) $27\pi^2 m$; в) $9\pi^2 m$; г) $9m$.

2 вариант.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t$, равна
а) $\frac{1}{2}t^2 - 4t$; б) $t^2 - 4t$; в) $\frac{1}{2}t^3 - 4t^2$; г) $t - 4$.
2. Точка движется по прямой по закону $s(t) = 4t^2 - 5t + 7$. Её мгновенная скорость $v(2)$ равна:
а) 11; б) 13; в) 12; г) 10.
3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t) = 2t^2 - t^3$ равно:
а) $6 - 6t$; б) $2(2 - 3t)$; в) $-3t^2 + 4t$; г) $-3t + 4$.
4. Тело массой m движется по закону $x(t) = -2 \sin 2\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t = \frac{1}{4}$, равна:
а) 0; б) $8m$; в) $8\pi^2 m$; г) $4\pi^2 m$.

3 вариант.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t) = 3t^3 + 2t^2$, равна
а) $9t^2 + 4t$; б) $3t^2 + 2t$; в) $9t^2 + 2t$; г) $3t^4 + 2t^3$.
2. Точка движется по прямой по закону $s(t) = -t^2 + 10t - 7$. Её мгновенная скорость $v(1)$ равна:
а) 6; б) 8; в) 10; г) 9.
3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t$ равно:
а) $t^2 - 6$; б) $3t - 1$; в) $2t$; г) $2t - 6$.
4. Тело массой m движется по закону $x(t) = 2 \sin 4\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t = \frac{1}{8}$, равна:
а) 0; б) $16\pi^2 m$; в) $16m$; г) $-32\pi^2 m$.

4 вариант.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t) = 2t^3 + \frac{1}{4}t^2$, равна
а) $2t^2 + \frac{1}{4}t$; б) $6t^2 + 0,5t$; в) $6t^2 + \frac{1}{4}t$; г) $6t^2 + 0,5$.

- Точка движется по прямой по закону $s(t) = 3t^2 + 2t - 1$. Её мгновенная скорость $v(3)$ равна:
а) 18; б) 16; в) 20; г) 14.
- Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t) = t^2 - t$ равно:
а) $2t - 1$; б) $t - 1$; в) $t^3 - t^2$; г) 2.
- Тело массой m движется по закону $x(t) = -3 \cos 2\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t = \frac{1}{2}$, равна:
а) $-12\pi^2 m$; б) 0; в) $-12m$; г) $12m$.

Тест 6. Исследование функций с помощью производной.

1 вариант.

- Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ является:
а) $(-3; 2)$; б) $(-\infty; -3)$; в) $(2; +\infty)$; г) $[-3; 2]$.
- Область значений функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ является:
а) $[-7; 7]$; б) $[1; 7]$; в) $[3; 4]$; г) $[-5; 5]$.
- Функция $y = 9x + 3x^2 - x^3$ возрастает на промежутке:
а) $[3; +\infty)$; б) $[-1; 3]$; в) $[-1; +\infty)$; г) $(-\infty; -1]$.
- Критическими (стационарными) точками функции $y = \cos x + x$ являются:
а) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; б) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$; в) πn ; г) $\frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

2 вариант.

- Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ является:
а) $(3; +\infty)$; б) $(-1; 3)$; в) $[1; 3]$; г) $(-1; +\infty)$.
- Область значений функции $y = 5 \sin x - 12 \cos x$ является:
а) $[-13; 13]$; б) $[-17; 17]$; в) $[-7; 17]$; г) $[5; 12]$.
- Функция $y = x^3 + 1,5x^2 - 18x$ убывает на промежутке:
а) $(-\infty; 3]$; б) $[2; +\infty)$; в) $[-3; 2]$; г) $[-3; +\infty)$.
- Критическими (стационарными) точками функции $y = x - \sin x$ являются:
а) πn ; б) $2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; г) $\frac{\pi}{2}(4n-1), n \in \mathbb{Z}$.

3 вариант.

- Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{7x-10-x^2}}$ является:
а) $(5; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $(2; 5)$; г) $[2; 5]$.
- Область значений функции $y = 12 \sin x + 5 \cos x$ является:
а) $[5; 12]$; б) $[-13; 13]$; в) $[-17; 17]$; г) $[-5; 12]$.
- Функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 - 6x$ убывает на промежутке:
а) $(-\infty; -2]$; б) $(-\infty; 3]$; в) $[3; +\infty)$; г) $[-2; 3]$.
- Критическими (стационарными) точками функции $y = \sin x + x$ являются:

- а) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; б) π ; в) $\pi(2n+1)$; г) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

4 вариант.

- Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x+6-x^2}}$ является:

а) $(-\infty; -2)$; б) $(3; +\infty)$; в) $[-2; 3]$; г) $(-2; 3)$.
- Область значений функции $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ является:

а) $[-7; 7]$; б) $[1; 4]$; в) $[-5; 5]$; г) $[-4; 4]$.
- Функция $y = 3,5x^2 - 10x - \frac{1}{3}x^3$ возрастает на промежутке:

а) $[2; 5]$; б) $(-\infty; 2]$; в) $[2; +\infty)$; г) $[5; +\infty)$.
- Критическими (стационарными) точками функции $y = x - \cos x$ являются:

а) π ; б) $\frac{\pi}{2}n$; в) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; г) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тест 7. Наибольшее и наименьшее значения функции.

1 вариант.

- На отрезке $[-1; 3]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$ достигает наибольшего значения в точке с абсциссой:

а) -1 ; б) -2 ; в) 3 ; г) 0 .
- Наименьшее значение функции $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$ на интервале $(0; 1)$ равно:

а) $-\frac{4}{27}$; б) 2 ; в) $-\frac{11}{54}$; г) 2 .
- Положительное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наименьшее значение, равно:

а) 1 ; б) 2 ; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}$.
- Стороны прямоугольника наибольшей площади при его периметре 12 м равны:

а) 2 и 4 м; б) 3 и 3 м; в) 1 и 5 м; г) 1,5 и 4,5 м.

2 вариант.

- На отрезке $[-1; 4]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ достигает наименьшего значения в точке с абсциссой:

а) -1 ; б) 3 ; в) 4 ; г) 0 .
- Наибольшее значение функции $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$ на интервале $(-1; 0)$ равно:

а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -2 ; г) $\frac{3}{8}$.
- Число, куб которого превышает утроенный его квадрат на минимальное значение, равно:

а) 1 ; б) 2 ; в) $\frac{1}{3}$; г) -1 .
- Стороны прямоугольника наименьшего периметра при его площади 114 м² равны:

а) 4 и 36 м; б) 8 и 18 м; в) 12 и 12 м; г) 9 и 16 м.

3 вариант.

1. На отрезке $[-3;1]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$ достигает наименьшего значения в точке с абсциссой:
а) -1 ; б) 0 ; в) 1 ; г) -2 .
2. Наибольшее значение функции $y = \frac{8}{3}x^3 - x^2 - x$ на интервале $(-1;0)$ равно:
а) $\frac{7}{48}$; б) 0 ; в) $-\frac{8}{3}$; г) 2 .
3. Число, квадрат которого превышает его куб на максимальное значение, равно:
а) 1 ; б) 2 ; в) $\frac{1}{3}$; г) -1 .
4. Стороны прямоугольника наименьшего периметра при его площади 64 м^2 равны:
а) 2 и 32 м ; б) 4 и 16 м ; в) $6,4$ и 10 м ; г) 8 и 8 м .

4 вариант.

1. На отрезке $[-3;2]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ достигает наибольшего значения в точке с абсциссой:
а) -3 ; б) 2 ; в) 0 ; г) -2 .
2. Наименьшее значение функции $y = \frac{8}{3}x^3 - x^2 - x$ на интервале $(0;1)$ равно:
а) 0 ; б) $-\frac{5}{12}$; в) 1 ; г) $\frac{2}{3}$.
3. Отрицательное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наибольшее значение, равно:
а) $-\frac{1}{2}$; б) -2 ; в) $-\frac{1}{3}$; г) -1 .
4. Стороны прямоугольника наибольшей площади при его периметре 16 м равны:
а) 4 и 4 м ; б) 2 и 6 м ; в) 3 и 5 м ; г) $3,5$ и $4,5 \text{ м}$.

Тест «Неопределенный и определенный интегралы»

Вариант I

Время выполнения 15 минут.

Выбери правильный ответ:

1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y=f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство:
а) $f'(x) = F(x)$; б) $F'(x) = f(x)$; в) иной ответ.
2. Неопределенный интеграл от независимой переменной равен:
а) $x^2 + C$; б) $x + C$; в) $\frac{x^2}{2} + C$.
3. Неопределенный интеграл от степенной функции равен:
а) $nx^{n-1} + C$; б) $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; в) $\frac{a^x}{\ln a} + C$.
4. Неопределенный интеграл от функции косинус равен:
а) $\sin x + C$; б) $-\sin x + C$; в) $\cos x + C$.
5. Неопределенный интеграл от частного дифференциала независимой переменной и квадрата косинуса независимой переменной равен:

- a) $-\operatorname{tg} x + C$; b) $-\operatorname{ctg} x + C$; c) $\operatorname{tg} x + C$.
6. *Определенным интегралом от a до b функции $f(x)$ называется:*
a) $F(a) - F(b)$; b) $F(b) - F(a)$; c) $F(x) - F(a)$.
7. *Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то интеграл:*
a) станет равным нулю;
b) не изменится;
c) поменяет знак на противоположный.
8. *Вычисли $\int \left(\frac{x^2}{3} - \sin 2x \right) dx$ и выбери правильный ответ:*
a) $\frac{x^3}{9} + \cos 2x + C$; b) $\frac{x^3}{9} + \frac{\cos 2x}{2} + C$; c) $x^3 - \frac{\cos 2x}{2} + C$; d) $\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \cos x + C$.
9. *Вычисли $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x + 9) dx$ и выбери правильный ответ:*
a) 27; b) 24; c) 18; d) 21.

Вариант II

Время выполнения 15 минут.

Выбери правильный ответ:

1. *Неопределенным интегралом от функции $y=f(x)$ на некотором промежутке называется:*
a) множество всех функций; b) множество всех производных функции $f(x)$;
c) множество всех первообразных функции $f(x)$.
2. *Неопределенный интеграл от дифференциала независимой переменной равен:*
a) $x^2 + C$; b) $x + C$; c) $\frac{x^2}{2} + C$.
3. *Неопределенный интеграл от показательной функции равен:*
a) $nx^{n-1} + C$; b) $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; c) $\frac{a^x}{\ln a} + C$.
4. *Неопределенный интеграл от функции синус равен:*
a) $-\cos x + C$; b) $\cos x + C$; c) $\sin x + C$.
5. *Неопределенный интеграл от частного дифференциала независимой переменной и квадрата синуса независимой переменной равен:*
a) $-\operatorname{tg} x + C$; b) $-\operatorname{ctg} x + C$; c) $\operatorname{tg} x + C$.
6. *Если в определенном интеграле пределы интегрирования равны, то интеграл равен:*
a) 1; b) - 1; c) 0.
7. *Определенный интеграл от дифференциала независимой переменной равен:*
a) $b - a$; b) $a - b$; c) иной ответ.
8. *Вычисли $\int \left(\frac{x^3}{2} - \cos 3x \right) dx$ и выбери правильный ответ:*

a) $\frac{x^4}{8} - 3 \sin 3x + C$; б) $\frac{x^4}{8} - \frac{\sin 3x}{3} + C$; в) $\frac{x^4}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C$; г) $\frac{x^4}{2} - 3 \sin 3x + C$

9. Вычисли $\int_{-3}^1 (x^2 + 4x + 4) dx$ и выбери правильный ответ:

a) $8\frac{1}{3}$; б) $9\frac{1}{3}$; в) $8\frac{2}{3}$; г) $9\frac{2}{3}$.

Критерий оценки:

Правильный ответ заданий 1-7 оценивается - 1 балл, заданий 8, 9 – 2 балла.

«3» - 6 -7 баллов

«4» - 8 – 9 баллов

«5» - 10 – 11 баллов

Ответы к тесту

«Неопределенный и определенный интегралы»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вариант I	б	с	б	а	с	б	с	б	д
Вариант II	с	б	с	а	б	с	а	б	б

Тест «Интеграл»

Вариант I

Время выполнения 45 минут.

Дополни:

- Дифференциалом функции называется
- Действие обратное дифференцированию -
- Функция $F(x)$ называется первообразной к функции $y=f(x)$ на некотором интервале, если для всех x из этого интервала выполняется равенство
- Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен ...
- Неопределенный интеграл от дифференциала независимой переменной равен
- Неопределенный интеграл от степенной функции равен
- Неопределенный интеграл от экспоненты равен
- Неопределенный интеграл от функции синус равен
- Неопределенный интеграл от частного дифференциала независимой переменной и квадрата косинуса независимой переменной равен
- Охарактеризуйте непосредственное интегрирование.
- Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ на отрезке $[a; b]$ называется
- Если в определенном интеграле пределы интегрирования равны, то ...
- Определенный интеграл от дифференциала независимой переменной равен
- Постоянный множитель в определенном интеграле
- Запишите алгоритм метода замены переменной интегрирования для определенного интеграла.
- Криволинейная трапеция это - фигура
- Уравнение линии по заданному уравнению углового коэффициента находится по формуле

18. Уравнение скорости по заданному уравнению ускорения находится по формуле ...
19. Неопределённый интеграл геометрически представляет собой ...
20. Вычисление площади криволинейной трапеции выполняется по формуле ...

Вариант II

Время выполнения 45 минут.

Дополни:

1. Интегрирование проверяется ...
2. Неопределённым интегралом от функции $y=f(x)$ на некотором промежутке называется ...
3. Константу, умноженную на функцию в неопределённом интеграле, ...
4. Неопределённый интеграл от независимой переменной равен ...
5. Неопределённый интеграл от показательной функции равен ...
6. Неопределённый интеграл от частного дифференциала независимой переменной и независимой переменной равен ...
7. Неопределённый интеграл от функции косинус равен ...
8. Неопределённый интеграл от частного дифференциала независимой переменной и квадрата синуса независимой переменной равен ...
9. Определённый интеграл от алгебраической суммы функций равен ...
10. Если в определённом интеграле поменять местами пределы интегрирования, то ...
11. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то определённый интеграл ...
12. Запишите алгоритм вычисления определённого интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
13. Метод замены переменной интегрирования – это ...
14. Запишите формулу площади криволинейной трапеции.
15. Уравнение закона движения по заданному уравнению скорости находится по формуле ...
16. Вычисление пути, пройденного телом за промежуток времени $t \in [t_1;t_2]$ выполняется по формуле ...
17. Вычисление ускорения движения тела за промежуток времени $t \in [t_1;t_2]$ выполняется по формуле ...
18. Интегральные кривые – это ...
19. Определённый интеграл геометрически представляет собой ...
20. Вычисление объёма тела вращения выполняется по формуле ...

Критерии оценки:

Правильный ответ оценивается 1 балл.

«3»-12-15 баллов

«4»-16-18 баллов

«5»-19-20 баллов

Раздел 2. «Геометрия»

Тест «Объём призмы, пирамиды»

1. В наклонной призме боковое ребро равно 7см, перпендикулярное сечение - прямоугольный треугольник с катетами: 4см и 3см. Найдите объём призмы.
а) 10 см^3 , б) 42 см^3 , в) 60 см^3 , г) 30 см^3 .
2. В правильной шестиугольной пирамиде сторона ее основания 2см. Объём пирамиды равен 6 см^3 . Чему равна высота?

а) $\sqrt{3} \text{ см}$, б) 3 см, в) $\frac{1}{3} \text{ см}$.

3. Объем пирамиды равен 56см^3 , площадь основания 14см^2 . Чему равна высота?
а) 14 см, б) 12 см, в) 16 см.
4. В правильной треугольной пирамиде высота равна 5см, стороны основания 3 см. Чему равен объем пирамиды?
а) $\frac{15\sqrt{3}}{4}\text{см}^3$, б) $\frac{25\sqrt{3}}{2}\text{см}^3$, в) $\frac{75\sqrt{3}}{4}\text{см}^3$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 9см. Сторона основания 4см. Найдите объем пирамиды.
а) 50см^3 , б) 48см^3 , в) 16см^3 .
6. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 27см^3 , высота 9см. Найти сторону основания.
а) 12 см, б) 9 см, в) 3 см.
7. Объем усеченной пирамиды равен 210см^3 , площадь нижнего основания 36см^2 , верхнего 9см^2 . Найдите высоту пирамиды.
а) 1см, б) 15 см, в) 10см.
8. Равновеликие призма и правильная четырехугольная пирамида имеют равные высоты. Чему равна сторона основания пирамиды, если площадь основания призмы равна S ?
а) $\frac{1}{3}S$, б) $3S$, в) $\sqrt{3S}$.

Критерий оценки:

Правильный ответ оценивается - 1 балл.

«3» - 5 баллов

«4» - 6 баллов

«5» - 7 – 8 баллов

Таблица ответов.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	б	а	б	а	б	в	в	в

Тест «Объемы тел»

- Вычислить объем прямой призмы с площадью основания $S=12$ и высотой $h=4$.
- Вычислить объем пирамиды с площадью основания $S=18$ и высотой $h=5$.
- Вычислить объем прямого конуса с радиусом основания $r=2$ и высотой $h=5$ (при условии что $\pi=3$).
- Вычислить объем правильного параллелепипеда, если даны его линейные величины: $a=3$, $b=4$, $c=3$.
- Вычислить объем прямого цилиндра, если радиус его основания равен $r=5$, а высота $h=2$. (считать $\pi=3$).

6. Вычислить объем шара с радиусом $r=4$, если считать, что $\pi=3$.
7. Дана площадь поверхности шара $S=64\pi$. Вычислить объем шара V , если считать что $\pi=3$.

Критерий оценки:

Правильный ответ оценивается - 1 балл

«3» - 4 балла

«4» - 6 баллов

«5» - 7 баллов

Раздел 3. «Вероятность и статистика»

Тест «Комбинаторика»

1. Комбинаторика – раздел математики, изучающий вопрос...
 - а) о том, сколько и каких комбинаций можно получить из элементов данного множества;
 - б) о том, как строятся логические выражения;
 - в) о подсчете числа выборов, отличающихся порядком расположения или составом элементов.
2. В классе 20 мальчиков и 12 девочек. Сколькими способами можно выбрать 1 человека из класса?
 - а) 20; б) 12; в) 8; г) 32; д) 240
3. Если объект A можно выбрать 5 способами, а $B - 7$, то сколькими способами можно выбрать объект « A и B »?
 - а) 12; б) 35; в) 2.
4. О какой выборке идет речь в задаче: «Из 15 учащихся класса выбирают дежурного и старосту»?
 - а) сочетания; б) размещения; в) перестановки; г) дополнения
5. О какой выборке идет речь в задаче: «Из 15 учащихся класса выбирают 2 дежурных»?
 - а) сочетания; б) размещения; в) перестановки; г) выборки без повторения элементов; д) вычитания
6. О какой выборке идет речь в задаче: «15 томов энциклопедий расставляются в ряд на книжной полке»?
 - а) размещения; б) перестановки.
7. Сочетаниями называются выборки, отличающиеся только
 - а) порядком расположения элементов; б) составом элементов; в) числовым значением элементов.
8. Перестановками называются выборки, отличающиеся только
 - а) порядком расположения элементов; б) составом элементов; в) количеством элементов.
9. Размещениями называются выборки, отличающиеся только ...
 - а) порядком расположения элементов; б) составом элементов;
 - в) количеством элементов; г) порядком расположения или составом элементов.
10. По формуле: $\frac{k!}{y!(k-y)!}$ вычисляется число...
 - а) перестановок; б) размещений; в) сочетаний; г) дополнений; д) выборов.

11. По формуле: $\frac{k!}{(k-y)!}$ вычисляется число...
- а) перестановок; б) сочетаний; в) размещений; г) выборки с повторениями.
12. По формуле: $k!$ вычисляется число...
- а) перестановок; б) перестановок из k элементов; в) перестановок без повторений из k элементов; г) сочетаний; д) размещений.
13. На 3 карточках написаны цифры 1, 2, 3. Сколько однозначных чисел можно получить из этих карточек?
- а) 6; б) 3; в) 1.
14. Из карточек с буквами «а», «б» и «в» составлены выборки: «аб», «ав», «бв». Как называются такие выборки?
- а) сочетания; б) размещения; в) перестановки; г) выборки с повторениями элементов; д) дополнения.
15. На карточках написаны цифры 2, 5, 9. Составляют выборки: 259, 295, 592 и т.д. Как называются такие выборки?
- а) размещения; б) сочетания; в) перестановки; г) дополнения без повторений.
16. На карточках написаны буквы «а», «б», «в». Делают выборки: «аб», «ба», «ав», «ва», «бв», «вб».
- Как называются такие выборки?
- а) размещения; б) сочетания; в) перестановки; г) дополнения; д) повторения.

Время выполнения 20 минут.

Критерии оценки:

- «3» - 11-12 правильных ответов;
«4» - 13-14 правильных ответов;
«5» - 15-16 правильных ответов.

Ключ: 1-а, 2-г, 3-б, 4-б, 5-а, 6-б, 7-б, 8-а, 9-д, 10-в, 11-в, 12-в, 13-б, 14-а, 15-в, 16-а.

Тест «Элементы теории вероятностей»

Вариант 1

1. Условной вероятностью события В при условии, что событие А с ненулевой вероятностью произошло, называется:
- а) $p(B/A) = p(AB) / p(B)$
б) $p(B/A) = p(AB) p(A)$
в) $p(B/A) = p(AB) / p(A)$
2. Стрелок попадает в цель в среднем в 8 случаях из 10. Найдите вероятность, что, сделав три выстрела, он два раза попадет:
- а) 0,314 б) 0,384 в) 0,324
3. Человеку, достигшему 20-летнего возраста, вероятность умереть на 21-м году жизни равна 0,01. Найдите вероятность того, что из 200 застраховавшихся человек в возрасте 20-ти лет один умрет через год:

- а) 0,256 б) 0,246 в) 0,271
4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель у одного стрелка 0,7, у другого – 0,8. Найти вероятность того, что цель будет поражена:
- а) 0,85 б) 0,96 в) 0,94
5. В круг радиусом 20 см помещен меньший круг радиусом 10 см так, что их центры совпадают. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения:
- а) 0,75 б) 0,075 в) 0,5
6. Изделия изготавливаются независимо друг от друга. В среднем одно изделие из ста оказывается бракованным. Найдите вероятность того, что из двух взятых наугад изделий окажутся неисправными оба:
- а) 0,001 б) 0,0001 в) 0,01
7. Два стрелка стреляют по разу в общую цель. Вероятность попадания в цель у одного стрелка 0,8, у другого – 0,9. Найти вероятность того, что цель не будет поражена ни одной пулей:
- а) 0,02 б) 0,96 в) 0,46
8. Производится n независимых испытаний, в которых вероятность наступления события A равна p . n велико. Вероятность того, что событие A наступит m раз, вычисляется по формуле или используются асимптотические приближения:
- а) вычисляется по формуле Бернулли
б) по формуле Байеса
в) используются асимптотические приближения
9. X и Y – независимы. $D(X) = 5$, $D(Y) = 2$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$:
- а) 76 б) 38 в) 19
10. Два стрелка стреляют по разу в общую цель. Вероятность попадания в цель у одного стрелка 0,6, у другого – 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена двумя пулями:
- а) 0,42 б) 0,96 в) 0,56
11. Лампочки изготавливаются независимо друг от друга. В среднем одна лампочка из тысячи оказывается бракованной. Найдите вероятность того, что из двух взятых наугад лампочек окажутся исправными обе:
- а) 0,9 б) 0,98 в) 0,998001
12. Теннисист идет на игру. Если ему дорогу перебежит черная кошка, то вероятность победы 0,2; если не перебежит, то – 0,7. Вероятность, что кошка перебежит дорогу – 0,1; что не перебежит – 0,9. Вероятность победы:

- а) $0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,3$
 б) $0,1 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,7$ в) $0,1 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,7$
13. Изделия изготавливаются независимо друг от друга. В среднем одно изделие из ста оказывается бракованным. Найдите вероятность того, что из 200 взятых наугад изделий 2 окажутся неисправными:
- а) 0,271 б) 0,01 в) 0,024
14. Возникновение теории вероятностей как науки относят к:
- а) средним векам б) 18 веку в) 20 веку
15. Количество способов, которыми можно выбрать 4 экзаменационных билетов из 9, равно
- а) 147 б) 135 в) 126 г) 122
16. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей
- | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|
| значения X | 0 | 1 | 3 |
| вероятности P | 0,4 | 0,2 | 0,4 |
- Дисперсия $D(X)$ равна
- а) 3,8 б) 10 в) 1,84 г) 2,4

Вариант 2

1. Проводится n независимых испытаний, в которых вероятность наступления события A равна p . Вероятность того, что событие A наступит M раз, вычисляется по формуле Бернулли:
- а) нет б) да в) по формуле Байеса
2. Выпущено 100 лотерейных билетов, причем установлены призы, из которых 8 по 1 руб., 2 – по 5 руб. и 1 – 10 руб. Найдите вероятности p_0 (билет не выиграл), p_1 (билет выиграл 1 руб.), p_5 (билет выиграл 5 руб.) и p_{10} (билет выиграл 10 руб.) событий:
- а) $p_0=0,89$; $p_1=0,08$; $p_5=0,02$; $p_{10}=0,01$
 б) $p_0=0,9$; $p_1=0,08$; $p_5=0,02$; $p_{10}=0,01$
 в) $p_0=0,89$ $p_1=0,08$; $p_5=0,01$; $p_{10}=0,02$
3. Станок-автомат производит изделия трех сортов. Первого сорта – 80%, второго – 15%. Определите вероятность того, что наудачу взятое изделие будет или второго, или третьего сорта:
- а) 0,8 б) 0,2 в) 0,95
4. Для проверки на всхожесть было посеяно 2000 семян, из которых 1700 проросло. Определите вероятность p прорастания отдельного семени в этой партии и количество семян в среднем (назовем это число M), которое взойдет из каждой тысячи посеянных:
- а) $p=0,85$; $M=850$
 б) $p=0,15$; $M=150$
 в) $p=17/20$; $M=750$

5. Студенту предлагают 6 вопросов и на каждый вопрос 4 ответа, среди которых один верный, и просят дать верные ответы. Студент не подготовился и выбирает ответы наугад. Найдите вероятность того, что он правильно ответит ровно на половину вопросов (С точностью до 3-х знаков после запятой):
- а) 0,164 б) 0,132 в) 0,144
6. События А и В называются несовместными, если:
- а) $p(AB)=1$ б) $p(AB)=0$ в) $p(AB)=p(A)+p(B)$
7. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,1, для второго – 0,2 и для третьего – 0,15. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа хотя бы один из станков потребует внимания рабочего:
- а) 0,935 б) 0,635 в) 0,388
8. Вероятность того, что дом может сгореть в течение года, равна 0.01. Застраховано 500 домов. Определите асимптотическое приближение, чтобы сосчитать вероятность того, что сгорит не более 5 домов:
- а) локальной формулой Муавра-Лапласа
 б) распределением Пуассона
 в) интегральной формулой Муавра-Лапласа
9. Если имеется группа из n несовместных событий H_i , в сумме составляющих все пространство, и известны вероятности $P(H_i)$, а событие А может наступить после реализации одного из H_i и известны вероятности $P(A/H_i)$, то P (вычисляется по формуле):
- а) Муавра-Лапласа
 б) Полной вероятности
 в) Бернулли
10. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность попадания для стрелка при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, из обычной винтовки – 0,7. Стрелок наудачу берет винтовку и стреляет. Найти вероятность того, что мишень будет поражена:
- а) 0,8 б) 0,45 в) 0,85
11. Бросается 5 монет. Найдите вероятность того, что три раза выпадет герб:
- а) 15/32 б) 5/16 в) 17/32
12. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента при включении прибора – 0,05, второго – 0,08. Найти вероятность того, что при включении прибора оба элемента будут работать:
- а) 0,806 б) 0,874 в) 0,928
13. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что

вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры:

а) 0,25

б) 0,5

в) 0,75

14. Раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними:

а) теория случайных цифр

б) теория величин

в) теория вероятностей

15. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

значения X	3	4	6
вероятности P	0,3	0,3	0,4

Математическое ожидание $M(X)$ равно

а) 4,5

б) 13

в) 2,4

г) 1,2

16. В урне находится 11 красных и 4 черных шаров. Вероятность наудачу, достать, два красных шара равна

а) $\frac{121}{225}$

б) $\frac{104}{225}$

в) $\frac{11}{15}$

г) $\frac{11}{21}$

Правильный ответ оценивается 1 балл

Критерии оценки:

«3»-10-12 баллов

«4»-13-14 баллов

«5»-15-16 баллов

Критерии оценивания тестовых работ по математике

Тесты составлены из набора заданий, отражающих уровни усвоения учебного материала по конкретной теме. За правильно выполненное задание дается по одному баллу.

При проведении тестирования все верные ответы берутся за 100%, тогда отметка выставляется в соответствии с таблицей:

Шкала перевода баллов в отметки по пятибалльной системе

Процент выполнения задания	Отметка
85% и более	отлично
70-84%	хорошо
51-69%	удовлетворительно
Менее 50%	неудовлетворительно

Оценочное средство 1.3
для проведения текущего контроля по результатам практических
занятий

Раздел 1. Алгебра и начала математического анализа

Тема 1.1. Действительные числа

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА
Преобразование выражений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания уч-ся по теме: «Преобразование числовых и буквенных выражений».
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. С помощью справочных пособий по алгебре повторить:
 - а) правила действий над обыкновенными дробями;
 - б) формулы сокращенного умножения;
 - в) способы разложения выражения на множители;
 - г) правило сокращения дробей.
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

Правила действий над обыкновенными дробями:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2); \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Вычислите значение выражения: $\left(\left(2,15 - 1\frac{5}{16} \right) : 33,5 + 5\frac{1}{7} \cdot 3,85 - 15,7 \right) \cdot \frac{8}{11} + 2,25$.
2. Упростите выражение: $\left(\frac{x+10}{5x+25} - \frac{1}{x+5} \right) \frac{5}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}$.

Вариант 2.

1. Вычислите значение выражения: $\left(75 : 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} \cdot 3 \right) \left(1\frac{5}{18} + 0,35 - \frac{11}{15} \right) : 1,4$.
2. Упростите выражение: $\frac{y^2}{y^2-1} + \frac{1}{y^2-1} : \left(\frac{2}{2y-y^2} - \frac{1}{2-y} \right)$.

Вариант 3.

1. Вычислите значение выражения: $45,09 : 1,5 - \left(2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} - 2,5 \cdot 2\frac{1}{2} \right) : 4\frac{1}{4}$.
2. Упростите выражение: $\frac{2m}{m^2 - 4} - \frac{2}{m^2 - 4} : \left(\frac{m+1}{2m-2} - \frac{1}{m-1} \right)$.

Вариант 4.

1. Вычислите значение выражения: $\left(3\frac{1}{3} \cdot 6,6 + 2 : 12,75 \right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{20}{51} + 1\frac{16}{17} \right) : 2,5$.
2. Упростите выражение: $\frac{3a}{a^2 - 9} - \frac{3}{a^2 - 9} : \left(\frac{a+2}{3a-3} - \frac{1}{a-1} \right)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Преобразование выражений, содержащих корень n-ой степени

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений преобразовывать и вычислять выражения с корнем n-ой степени.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Дайте определение корня n-ой степени. Что такое арифметический корень n-ой степени?
 - б) Перечислите свойства арифметических корней n-ой степени.
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{-27}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = -16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{1000 \cdot 27 \cdot 8}$; б) $4\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0,4^5 \cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$?

Вариант 2.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{625}$.
2. Решите уравнение: $x^3 = 125$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{64 \cdot 125 \cdot 729}$; б) $5\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$; в) $6\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6} \cdot 12^6$; г) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\frac{5}{4}}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[8]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$?

Вариант 3.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[7]{-128}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = 64$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 0,0016 \cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{16^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 0,125}$; г) $\frac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[4]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

Вариант 4.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.
2. Решите уравнение: $x^5 = -\frac{1}{243}$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{16 \cdot 625 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{192} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt[4]{27^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot (0,5)^4}$; г) $\frac{\sqrt[5]{224}}{\sqrt[5]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{7}$ или $\sqrt[6]{50}$?

Вариант 5.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[5]{-32}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = 16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot 100000}$; б) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; в) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^9}$; г) $\frac{\sqrt{200} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{-11}$ или $\sqrt[5]{-7}$?

Вариант 6.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.
2. Решите уравнение: $x^5 = -32$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[5]{0,00001 \cdot 32 \cdot 0,00243}$; б) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; в) $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^{20}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[6]{0,04}$ или $\sqrt[6]{\frac{1}{26}}$?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений вычислять степени с дробным показателем.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Дайте определение степени с натуральным, отрицательным и дробным показателями.

б) Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.

2. Изучить условие заданий для практической работы.

3. Оформить отчет о работе.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

Вычислите: а) 2^{-1} ; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625 \cdot 5^{-3}}$.

Вариант 2.

Вычислите: а) 1^{-7} ; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $9 \cdot 0,027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $48^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Вариант 3.

Вычислите: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\frac{12^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$.

Вариант 4.

Вычислите: а) $(-1)^{-7}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0,75} - 12 \cdot 0,0081^{-0,25}$; г) $\sqrt[5]{64} : 2^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^6$.

Вариант 5.

Вычислите: а) $5^0 \cdot (-3)^{-2} + (-3)^{-2}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Вариант 6.

Вычислите: а) $0^{\frac{5}{6}}$; б) $100^{-\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; г) $\frac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + (\sqrt{3})^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

Вариант 7.

Вычислите: а) $(6 \cdot 2^{-2})^{-1}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{6^{1,7} \cdot 2^{1,3}}{3^{-1,3}}$.

Вариант 8.

Вычислите: а) $(-3)^{-4}$; б) $0,01^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

$$г) 136^0 + 0,027^{-\frac{1}{3}} + \left(0,2^{-13} \cdot 125^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^4 \right)^{-2}$$

Контрольная работа №1
по теме «Действительные числа»

ОБРАЗЕЦ

1. Вычислить:

$$1) \frac{\sqrt[3]{9} \cdot 3^5}{15^0 \cdot 27^2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}}}; \quad 2) (\sqrt[3]{2\sqrt{16}})^2.$$

2. Известно, что $12^x = 3$. Найти 12^{2x-1} .

3. Выполнить действия ($a > 0, b > 0$):

$$1) a^{4+\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\sqrt{5}-1}} \right)^{\sqrt{5}+1}; \quad 2) \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{b}.$$

4. Сравнить числа:

$$1) \left(\frac{2}{7} \right)^{\frac{3}{7}} \text{ и } \left(\frac{2}{7} \right)^{\frac{5}{7}}; \quad 2) (4,2)^{\sqrt{7}} \text{ и } \left(4\frac{2}{5} \right)^{\sqrt{7}}.$$

5. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь $0,2(7)$ в виде обыкновенной.

$$6. \text{ Упростить } \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ при } a > 0, a \neq 1.$$

Критерии оценки:

«3» - 1-4 задания

«4» - 1-4 и любое задание после черты

«5» - все задания

Тема 1.2. Степенная функция

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА Свойства функций

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений определять свойства функции.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Что называется функцией?
 - б) Что такое область определения функции?
 - в) Какая функция называется четной, нечетной?
 - г) Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2,1)$, если $f(x) = x^3$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = x^2 - x$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = x + 1$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = x^3 - 4x$ с осью OY и нули функции.

Вариант 2.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2,1)$, если $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{1}{x-3}$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = x^2 - 5$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = 1 - x^4$ с осью OY и нули функции.

Вариант 3.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2,1)$, если $f(x) = x^3 - 1$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = -x^2$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = x^4 - x^2$ с осью OY и нули функции.

Вариант 4.

1. Найдите $f(5)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(-2,1)$, если $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = x^3 + x$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = 1 - x^3$ с осью OY и нули функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Решение иррациональных уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений при решении иррациональных уравнений.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить методические рекомендации для решения иррациональных уравнений.
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. ПАМЯТКА

При решении иррациональных уравнений следует учитывать, что:

- 1) подкоренное выражение корня **четной** степени должно быть **неотрицательным** и значение корня неотрицательно;
- 2) все корни **нечетной** степени определены при **любом** действительном значении подкоренного выражения;
- 3) используются два основных метода – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень и введение новой переменной;
- 4) при возведении обеих частей уравнения в четную степень **возможно** появление посторонних корней, поэтому проверка является составной частью решения.

2. ПРИМЕРЫ:

№ 1. Решите уравнение $\sqrt{x+16} - x + 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Уединим радикал и затем возведем обе части в квадрат

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+16})^2 &= (x-4)^2, \quad x+16 = x^2 - 8x + 16, \\ x^2 - 9x &= 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 9.\end{aligned}$$

Проверка показывает, что $x_1 = 0$ – посторонний корень.

ОТВЕТ: 9.

№ 2. Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную $t = \sqrt{x^2 + 3x - 6}$, $t \geq 0$. Тогда $x^2 + 3x = t^2 + 6$ и уравнение примет вид

$$t^2 + 6 - 18 + 4t = 0, \quad t^2 + 4t - 12 = 0, \quad t_1 = 2 \text{ или } t_2 = -6 - \text{ не подходит по смыслу.}$$

Далее

$$\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2, \quad x^2 + 3x - 6 = 4, \quad x^2 + 3x - 10 = 0, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 2.$$

ОТВЕТ: - 5; 2.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x+12} = 2x+10$; б) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$; в) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{11x+1} = \sqrt{7x+4}$.

Вариант 2.

Решите уравнения:

а) $2\sqrt{x+5} = x+2$; б) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$; в) $\sqrt{18 - \sqrt[3]{x+10}} = 4$.

Вариант 3.

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x+5} + 1 = x$; б) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$; в) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$.

Вариант 4.

Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x+14} = 2x+12$; б) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$; в) $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$.

Контрольная работа №3 по теме «Степенная функция»

ОБРАЗЕЦ

1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{4 - x^2}.$$

2. Изобразить эскиз графика функции $y = x^{-5}$.

1) Выяснить, на каких промежутках функция убывает.

2) Сравнить числа:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-5} \text{ и } 1; \quad (3,2)^{-5} \text{ и } (3\sqrt{2})^{-5}.$$

3. Решить уравнение:

1) $\sqrt{1-x} = 3$; 2) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}$; 3) $\sqrt{1-x} = x+1$;

$$4) \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1.$$

4. Найти функцию, обратную к функции

$$y = (x-8)^{-1},$$

указать её область определения и множество значений.

5. Решить неравенство $\sqrt{x+8} > x+2$.

Критерии оценки:

«3» - задания до черты

«4» - любые 4 задания

«5» - все задания

Тема 1.3 Показательная функция

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Решение показательных уравнений и неравенств

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений при решении показательных уравнений и неравенств и построении графиков функций.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить условие заданий для практической работы.
2. Оформить отчет о работе.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = 2^x$, $y = 2^x - 1$ и $y = 2^{x+2} - 1$.
2. Решите уравнение: а) $8^{-1} \cdot 2^{3x} = 8$; б) $5^x - 7 \cdot 5^{x-2} = 90$; в) $9^x + 3^{x+1} = 18$.
3. Решите неравенство: а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$; б) $4^x + 16 > 10 \cdot 2^x$.

Вариант 2.

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.
2. Решите уравнение: а) $27^{-1} \cdot 3^{3x} = 27$; б) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$; в) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.
3. Решите неравенство: а) $0,5^x \leq 2\sqrt{2}$; б) $9^x + 3 \cdot 3^x > 18$.

Контрольная работа №4 по теме «Показательная функция»

ОБРАЗЕЦ

1. Решить уравнение:

$$1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25; \quad 2) 4^x + 2^x - 20 = 0.$$

2. Решить неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ 5^{x+y} = 25. \end{cases}$

4. Решить неравенство:

$$1) (\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}; \quad 2) \left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1.$$

5. Решить уравнение $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$.

Критерии оценки:

«3» - первые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Тема 1.4 Логарифмическая функция

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА
Преобразование выражений, содержащих логарифмы

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений на преобразование логарифмических выражений.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Дайте определение логарифма числа.
 - б) Запишите основное логарифмическое тождество.
 - в) Перечислите основные свойства логарифмов.
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Найдите: а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; б) $\log_{49} 7$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $3^{2+\log_3 2}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 2 выражение $16b^7 \cdot \sqrt[5]{c}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_3 x = 2\log_3 7 + \frac{2}{3}\log_3 27 - \frac{3}{2}\log_3 16$.

Вариант 2.

1. Найдите: а) $\log_5 \frac{1}{25}$; б) $\log_{64} 8$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $2^{1+\log_2 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^4}}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_2 x = 2\log_2 5 - \frac{1}{3}\log_2 8 + \log_2 0,2$.

Вариант 3.

1. Найдите: а) $\lg 10000$; б) $\log_8 1$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+\log_3 2}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 3 выражение $\frac{27\sqrt{b}}{c^4}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_5 x = \log_5 1,5 + \frac{1}{3}\log_5 8$.

Вариант 4.

1. Найдите: а) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; б) $\lg 0,01$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\sqrt{2}^{2+\log_4 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 0,7 выражение $\frac{0,49b^3}{c^5 \cdot \sqrt{c}}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\lg x = 1 + 2\lg 3 - \frac{2}{3}\lg 125$.

Вариант 5.

1. Найдите: а) $\log_3 \frac{1}{81}$; б) $\log_4 \sqrt{2}$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $3^{2+\log_3 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 5 выражение $25b^3 \cdot \sqrt[4]{c^7}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_4 x = 2\log_4 10 + \frac{3}{4}\log_4 81 - \frac{2}{3}\log_4 125$.

Вариант 6.

1. Найдите: а) $\log_5 \frac{1}{5}$; б) $\log_2 16\sqrt{2}$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\log_2 3}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 0,2 выражение $\frac{0,0016b^4}{c \cdot \sqrt[7]{c^2}}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16 - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28$.

Вариант 7.

1. Найдите: а) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$; б) $\lg 0,1$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $5^{-1+\log_5 2}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{0,001\sqrt[3]{c^2}}{b^3}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_4 x = \frac{1}{2}\log_4 7 + \log_4 32 - \frac{1}{2}\log_4 28$.

Вариант 8.

1. Найдите: а) $\log_{0,2} 25$; б) $\lg 0,001$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $0,2^{1+\log_{0,2} 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\sqrt{10}b^5 c^{-\frac{1}{3}}$ ($c > 0, b > 0$).
4. Найдите x , если $\log_3 x = \log_3 12 - \frac{1}{2}\log_3 32 + \frac{1}{2}\log_3 6$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Решение логарифмических уравнений и неравенств

Цель работы: Сформировать умения и навыки решения простейших логарифмических уравнений и неравенств.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал

1. Логарифмические уравнения.

✎ Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

✎ При решении логарифмических уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0, a \neq 1$) используется следующее свойство: $(\log_a f(x) = \log_a g(x)) \Leftrightarrow (f(x) = g(x))$.

Примеры решения логарифмических уравнений

Пример №1. Решить уравнение: $\log_3(x-12) = 2$.

Решение:

Используя определение логарифма, и учитывая область определения, получим

$$\log_3(x-12) = \log_3 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-12 > 0, \\ x-12 = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 12, \\ x = 9+12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 21.$$

Ответ: 21.

Пример №2. Решить уравнение: $\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ \log_x \left(\frac{16}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ \log_x 8 = \log_x x^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ x^{\frac{1}{2}} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 64.$$

Ответ: 64.

Пример №3. Решить уравнение: $x^{\lg x} = 100x$.

Решение:

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$$x^{\lg x} = 100x \Leftrightarrow \lg x^{\lg x} = \lg 100x \Leftrightarrow \lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x \Leftrightarrow \lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение заменой $\lg x = y$, находим

$$\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ y = 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -1, \\ \lg x = 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \lg 10^{-1}, \\ \lg x = \lg 10^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1, \\ x = 100. \end{cases}$$

Ответ: 0,1; 100.

Пример №4. Решить уравнение: $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

Решение:

Здесь $x > 0$. Используя формулу $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$, преобразуем левую часть уравнения к основанию 3:

$$\log_{\sqrt{3}} x = \log_{\frac{1}{3^2}} x = 2 \log_3 x; \quad \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{3^{-1}} x = -\log_3 x. \text{ Таким образом,}$$

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^3 \Leftrightarrow x = 3^3 \Leftrightarrow x = 27.$$

2. Логарифмические неравенства.

Неравенства вида $\log_a x > c$, $\log_a x < c$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называются *простейшими логарифмическими неравенствами*.

Имеют место следующие равносильные преобразования:

$$\log_a x > c \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ x > a^c \\ 0 < a < 1, \\ 0 < x < a^c; \end{cases} \quad \log_a x < c \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 0 < x < a^c \\ 0 < a < 1, \\ x > a^c; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример №5. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

Решение:

Используя равносильные преобразования, получим

$$\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 > 0, \\ x+1 > 0, \\ 0 < \frac{1}{5} < 1, \\ 3x-5 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 5, \\ x > -1, \\ 3x-x < 1+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x > -1, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < 3.$$

Ответ: $\frac{5}{3} < x < 3$.

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

Задание №1. Решить уравнение: $\log_{x-1}(x^2 - 7x + 41) = 2$.

Задание №2. Решить уравнение: $\lg x + \lg(x+3) = 1$.

Задание №3. Решить уравнение: $\log_3 x - \log_9 x + \log_{81} x = \frac{3}{4}$.

Задание №4. Решить уравнение: $x^{1+\lg x} = 0,1^{-2}$.

Задание №5. Решить неравенство: $\log_3(x-3) > 0$.

Вариант 2

Задание №1. Решить уравнение: $\log_{2-x}(2x^2 - 5x + 2) = 2$.

Задание №2. Решить уравнение: $\lg(x^2 - 17) - \lg(2x - 2) = 0$.

Задание №3. Решить уравнение: $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$.

Задание №4. Решить уравнение: $x^{\lg x} = 1$.

Задание №5. Решить неравенство: $\log_2(x - 3) < 1$.

Вариант 3

Задание №1. Решить уравнение: $\log_x(2x^2 - 3x) = 1$.

Задание №2. Решить уравнение: $\lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg \frac{1}{2} - \lg x$.

Задание №3. Решить уравнение: $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 14$.

Задание №4. Решить уравнение: $x^{\lg x - 2} = 1000$.

Задание №5. Решить неравенство: $\lg(x - 7) > 1$.

1. При выполнении заданий **№1, 2** необходимо обратить внимание на **Примеры №№1, 2 и свойства логарифмов** (см. методические рекомендации, плакат «Логарифм и его свойства»).
2. При выполнении задания **№3** необходимо обратить внимание на **Пример №4 и свойства логарифмов** (см. методические рекомендации, плакат «Логарифм и его свойства»).
3. При выполнении задания **№4** необходимо обратить внимание на **Пример №3 и свойства логарифмов** (см. методические рекомендации, плакат «Логарифм и его свойства»).
4. При выполнении задания **№5** необходимо обратить внимание на **Пример №5 и равносильные преобразования при решении логарифмических неравенств** (см. методические рекомендации).
4. Ответьте на контрольный вопрос:
 - 1). Какие способы решения логарифмических уравнений и неравенства использовались при выполнении практической работы?
5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
 - 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольный вопрос.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Контрольная работа №6 по теме «Логарифмическая функция»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Вычислить $\log_{\frac{1}{2}} 16$.	1
2	Вычислить $5^{1+\log_5 3}$.	1
3	Вычислить $\log_3 135 - \log_3 20 + 2 \log_3 6$.	1
4	Сравнить $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{5}$.	3
5	Решить уравнение $\log_5 (2x - 1) = 2$.	3
6	Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} (x - 5) > 1$.	3
7	Решить уравнение $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3$.	4
8	Решить уравнение $\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} x = 14$.	5
9	Решить неравенство $\log_3^2 x - 2 \log_3 x \leq 3$.	5

Критерии оценки:

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 16 баллов

Минимум на оценку «5» 21 балл

Тема 1.5 Тригонометрические формулы

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Определение тригонометрических функций числового аргумента

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний и сформированности умений при определении тригонометрических функций числового аргумента.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

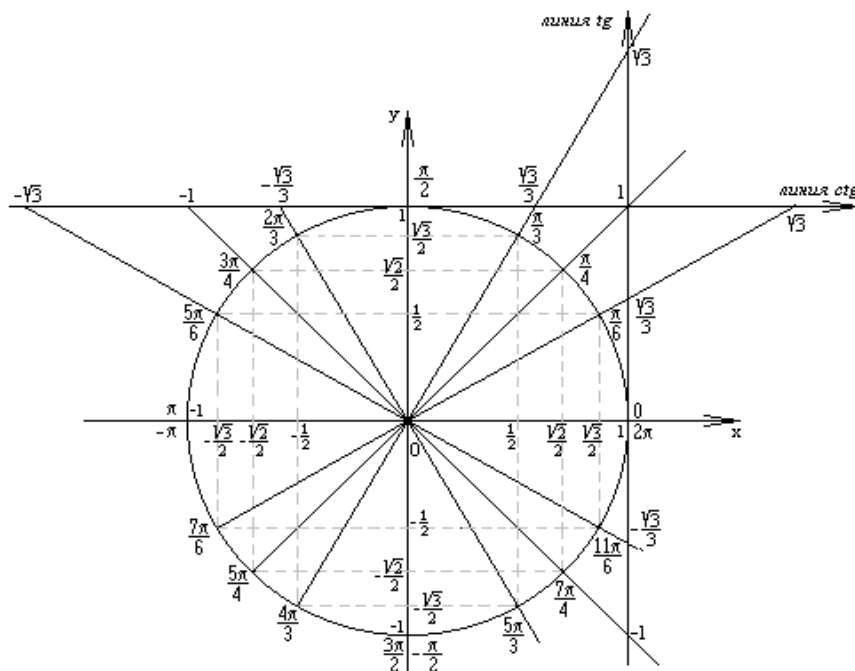
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Что такое угол в 1 радиан?
 - б) Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α .
 - в) Как зависят знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ от того, в какой координатной четверти расположена точка P_α ? Назовите эти знаки.

- Изучить условие заданий для практической работы.
- Оформить отчет о работе.

Опорный чертеж

На рисунке совмещены декартова система координат и окружность единичного радиуса. Окружность «эквивалентна» понятию координатной прямой (начало отсчета – точка пересечения окружности с положительной частью оси Ox , положительное направление – против часовой стрелки, единичный отрезок выражен через число π). На окружности отмечены точки, полученные при повороте радиуса окружности, совпадающего с положительной частью оси Ox , на различные углы α . Абсциссы этих точек – $\cos \alpha$, ординаты – $\sin \alpha$. Дополнительно проведены две касательные к окружности (линии тангенса и котангенса).



ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

- Выразите величину угла: а) в радианной мере: 18^0 , -250^0 ; б) в градусной мере: $\frac{\pi}{15}$, $-\frac{\pi}{3}$.
- Отметьте на единичной окружности точку P_α . Покажите на чертеже значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если α равно $\frac{\pi}{3}$.
- Определите знак: $\sin(-212^0)$ и $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$.
- Вычислите: а) $2 \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi + \sin \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\sin 4\pi - \sin \frac{5\pi}{2} + \cos 3\pi}{\cos 8\pi}$.

Вариант 2.

- Выразите величину угла: а) в радианной мере: -360^0 ; 225^0 ; б) в градусной мере: $\frac{\pi}{18}$, $\frac{3\pi}{2}$.

- Отметьте на единичной окружности точку P_α . Покажите на чертеже значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если α равно $-\frac{\pi}{4}$.
- Определите знак: $\cos 305^\circ$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$.
- Вычислите: а) $2\sin\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos 2\pi$; б) $\frac{\operatorname{tg} 8\pi - \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{2} + \sin 3\pi}{1 + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$.

Вариант 3.

- Выразите величину угла: а) в радианной мере: -10° ; 240° ; б) в градусной мере: $\frac{\pi}{9}$; 3π .
- Отметьте на единичной окружности точку P_α . Покажите на чертеже значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если α равно $\frac{5\pi}{2}$.
- Определите знак: $\cos(-105^\circ)$ и $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{9}$.
- Вычислите: а) $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{\cos \pi} + (\cos 2\pi)^{\sin 1,5\pi}$; б) $\cos 420^\circ + \sin 720^\circ - \operatorname{tg} 405^\circ$.

Вариант 4.

- Выразите величину угла: а) в радианной мере -60° , 135° ; б) в градусной мере $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{6}$.
- Отметьте на единичной окружности точку P_α . Покажите на чертеже значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если α равно $-\frac{\pi}{6}$.
- Определите знак: $\sin(-324^\circ)$ и $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4}$.
- Вычислите: а) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)^{\sin \pi}$;
б) $\sqrt{2} \sin(-765^\circ) - \cos(-1140^\circ) + \operatorname{tg} 585^\circ + \sqrt{3} \operatorname{ctg}(-240^\circ)$.

Практическая работа

Тождественные преобразования и вычисления тригонометрических выражений

Цель работы: Научиться пользоваться формулами при решении упражнений на тождественные преобразования, на вычисление значений тригонометрических функций.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал

- Знаки, числовые значения и свойства четности и нечетности тригонометрических функций**

Пример №1. Вычислить: $tg^2(\pi/3) + ctg(\pi/6) - 2 \sin(\pi/3) + \sin \pi + 4 \cos(3\pi/2) - 2 \cos(\pi/3)$

Решение:

$$\begin{aligned} & tg^2(\pi/3) + ctg(\pi/6) - 2 \sin(\pi/3) + \sin \pi + 4 \cos(3\pi/2) - 2 \cos(\pi/3) \\ &= (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - \\ & - 2 \cdot (\sqrt{3}/2) + 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot (1/2) = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример №2. Какие знаки имеют: 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 320^\circ$; 3) $tg 220^\circ$; 4) $ctg 400^\circ$?

Решение:

- 1) $90^\circ < 150^\circ < 180^\circ$ (II четверть); $\cos 150^\circ < 0$
- 2) $270^\circ < 320^\circ < 360^\circ$ (IV четверть); $\sin 320^\circ < 0$
- 3) $180^\circ < 220^\circ < 270^\circ$ (III четверть); $tg 220^\circ > 0$
- 4) $360^\circ < 400^\circ < 360^\circ + 90^\circ$ (I четверть); $ctg 400^\circ < 0$.

2. Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (1)$$

$$tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z; \quad (2)$$

$$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \quad (3)$$

$$1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in Z. \quad (4)$$

Пример №3. Дано: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II четверть). Вычислить: 1) $\cos \alpha$; 2) $tg \alpha$; 3) $ctg \alpha$.

Решение:

- 1) По формуле (1) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - (3/5)^2} = -4/5$ (перед радикалом стоит минус, так как во II четверти $\cos \alpha < 0$);
- 2) По формуле $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $tg \alpha = (3/5) : (-4/5) = -3/4$;
- 3) По формуле (2) $ctg \alpha = -4/3$.

Пример №4. Дано: $\cos \alpha = -12/13$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (III четверть). Вычислить: 1) $\sin \alpha$; 2) $tg \alpha$; 3) $ctg \alpha$.

Решение:

- 1) По формуле (1) $\sin \alpha = -\sqrt{1 - (-12/13)^2} = -5/13$ (перед радикалом стоит минус, так как в III четверти $\sin \alpha < 0$);
- 2) По формуле $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $tg \alpha = (-5/13) : (-12/13) = -5/12$;
- 3) По формуле (2) $ctg \alpha = 12/5$.

3. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции углов $\pi/2 \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $3\pi/2 \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через тригонометрические функции угла α .

При применении формул приведения рекомендуется пользоваться следующими правилами:

- 1) Если α откладывается от оси OX , то наименование приводимой функции, т.е. функции аргумента — α , $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, не изменяется. Если же α откладывается от оси OY , то наименование приводимой функции, т.е. функции аргумента $\pi/2 \pm \alpha$,

$3\pi/2 \pm \alpha$, заменяется на сходное (синус - на косинус, тангенс - на котангенс, и наоборот).

2) Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части в предположении, что $0 < \alpha < \pi/2$.

Пример №5. Составить формулу приведения для $tg(3\pi/2 + \alpha)$.

Решение:

Так как α откладывается от оси OY , то тангенс следует заменить на котангенс. Формула верна при всех допустимых значениях аргумента α , следовательно, она верна и для $0 < \alpha < \pi/2$; но в этом случае дуга $3\pi/2 \pm \alpha$ оканчивается в IV четверти, в которой тангенс отрицателен.

Значит, $tg(3\pi/2 + \alpha) = -ctg \alpha$.

4. Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ tg(\alpha + \beta) &= \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha tg \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), tg \alpha tg \beta \neq 1; \\ tg(\alpha - \beta) &= \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha tg \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), tg \alpha tg \beta \neq -1; \\ ctg(\alpha + \beta) &= \frac{ctg \alpha ctg \beta - 1}{ctg \alpha + ctg \beta}, \alpha \neq \pi k, \beta \neq \pi k, \alpha \neq -\beta + \pi k; \\ ctg(\alpha - \beta) &= \frac{ctg \alpha ctg \beta + 1}{ctg \alpha - ctg \beta}, \alpha \neq \pi k, \beta \neq \pi k, \alpha \neq \beta + \pi k.\end{aligned}$$

Пример №6. Вычислить: $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha = -4/5$, $\sin \beta = -24/25$,

$\pi < \alpha < 3\pi/2$ (III четверть), $3\pi/2 < \beta < 2\pi$ (IV четверть).

Решение:

Находим $\sin \alpha = -\sqrt{1 - (4/5)^2} = -3/5$ (перед радикалом стоит минус, так как в III четверти $\sin \alpha < 0$);

$\cos \beta = \sqrt{1 - (-24/25)^2} = 7/25$ (перед радикалом стоит плюс, так как в IV четверти $\cos \alpha > 0$);

По формуле $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ получим:

$$\sin(\alpha - \beta) = (-3/5) \cdot (7/25) - (-4/5) \cdot (-24/25) = -117/125.$$

Пример №7. Вычислить: $\cos(\alpha + \beta)$, если $tg \alpha = -24/7$, $tg \beta = 15/8$,

$\pi/2 < \alpha < \pi$ (II четверть), $\pi < \beta < 3\pi/2$ (III четверть).

Решение:

Из формулы $1 + tg^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ имеем $\cos \alpha = \pm 1/\sqrt{1 + tg^2 \alpha}$. Учитываем, что $\pi/2 < \alpha < \pi$, находим $\cos \alpha = -1/\sqrt{1 + (-24/7)^2} = -7/25$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - (-7/25)^2} = 24/25$.

Аналогично находим $\cos \beta = -8/17$ и $\sin \beta = -15/17$.

По формуле $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ получаем:

$$\cos(\alpha + \beta) = (-7/25) \cdot (-8/17) - (24/25) \cdot (-15/17) = 416/425.$$

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

Задание №1. Вычислите $\frac{(\sin(\pi/4)+\cos(3\pi/2))\cdot tg(\pi/3)}{\operatorname{ctg}(\pi/6)-\operatorname{ctg}(\pi/2)}$.

Задание №2. Определите знак выражения $\frac{\cos 100^\circ \operatorname{tg} 250^\circ}{\sin 300^\circ \operatorname{ctg} 100^\circ}$.

Задание №3. Вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α , если $\sin \alpha = -3/5$ и $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

Задание №4. Упростите

$$\cos(3\pi/2 + \alpha) \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) - \sin(\pi/2 - \alpha) + \operatorname{ctg}(3\pi/2 - \alpha) - \operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha).$$

Задание №5. Вычислите: $\cos(\alpha + \beta)$, если

$$\sin \alpha = -15/17, \cos \beta = 8/17, \pi < \alpha < 3\pi/2, 3\pi/2 < \beta < 2\pi.$$

Вариант 2

Задание №1. Вычислите $\frac{2 \operatorname{tg}(\pi/4) (\operatorname{tg}(\pi/3)+\cos(\pi/6))}{\cos \pi - 2 \sin(3\pi/2)}$

Задание №2. Определите знак выражения $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ \sin 200^\circ}{\cos 320^\circ \operatorname{ctg} 140^\circ}$

Задание №3. Вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α , если $\cos \alpha = -4/5$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$

Задание №4. Упростите

$$\sin(\alpha - 2\pi) \cos(3\pi/2 - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \operatorname{tg}(3\pi/2 + \alpha) + \cos^2(\pi/2 - \alpha).$$

Задание №5. Вычислите: $\sin(\alpha - \beta)$, если

$$\cos \alpha = 3/5, \cos \beta = -7/25, 3\pi/2 < \alpha < 2\pi, \pi < \beta < 3\pi/2.$$

- При выполнении задания **№1** необходимо обратить внимание на **Пример №1** (см. методические рекомендации).
 - При выполнении задания **№2** необходимо обратить внимание на **Пример №2** (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания **№3** необходимо обратить внимание на **Примеры №3,4** (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания **№4** необходимо обратить внимание на **Примеры №5,1** (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания **№5** необходимо обратить внимание на **Примеры №6,7** (см методические рекомендации)
4. Ответьте на контрольные вопросы:
 - 1). Какие тригонометрические функции являются четными, и какие - нечетными?
 - 2). Какие формулы называются формулами приведения?
 5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
 - 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).

- 3) Ответить на контрольные вопросы.
- 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Контрольная работа №8 по теме «Тригонометрические формулы»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол баллов
1	Вычислить: $tg(-450^\circ)$	3
2	Вычислить: $\sin \frac{17\pi}{3}$	3
3	Упростить: $(\sin \alpha + \cos \alpha) : \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$	3
4	Упростить: $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{tg(2\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$	3
5	Найти значения остальных тригонометрических функций, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	3
6	Докажите тождество: $\frac{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} \cdot ctg 4\alpha = 1$.	4
7	Найти $\sin(\alpha + \beta)$, если известно, что $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \beta = -\frac{7}{25}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$	5

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 16 баллов

Минимум на оценку «5» 21 балл

Тема 1.6 Тригонометрические уравнения

Практическая работа

Решение тригонометрических уравнений и неравенств

Цель работы: Сформировать умения и навыки решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Оборудование: Плакаты («Решение тригонометрических уравнений», «Решение тригонометрических неравенств», «Тригонометрические функции синус, косинус, тангенс и котангенс»); инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал

1. Простейшие тригонометрические уравнения.

✎ Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $\sin x = m, \cos x = m, \operatorname{tg} x = m, \operatorname{ctg} x = m$, где m – данное число.

✎ Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит, найти множество всех значений аргумента, при которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение m .

1) Уравнение $\sin x = m, |m| < 1$

$$x = (-1)^k \arcsin m + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Пример №1. $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -1 \cdot (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) Уравнение

$$\operatorname{tg} x = m, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частный случай:

$$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Пример №3. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение:

$$x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) Уравнение $\cos x = m, |m| < 1$

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pm \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Пример №2. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4) Уравнение $\operatorname{ctg} x = m, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \operatorname{arccotg} m + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частный случай:

$$\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Пример №4. $\operatorname{ctg} x = 1$.

Решение:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

5) Уравнение $\sin^2 x = m$, $m \in [0;1] \Rightarrow x = \pm \arcsin \sqrt{m} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

6) Уравнение $\cos^2 x = m$, $m \in [0;1] \Rightarrow x = \pm \arccos \sqrt{m} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

7) Уравнение $\operatorname{tg}^2 x = m$, $m > 0 \Rightarrow x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{m} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

8) Уравнение $\operatorname{ctg}^2 x = m$, $m > 0 \Rightarrow x = \pm \operatorname{arcctg} \sqrt{m} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2. Методы решения тригонометрических уравнений.

1) Уравнения, сводящиеся к квадратным

✎ Уравнение, являющееся или сводящееся к квадратному относительно одной тригонометрической функции, решается вначале как квадратное, а затем сводится к решению простейшего тригонометрического уравнения.

Пример №5. Решить уравнение: $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение:

$$\sin x = y \Rightarrow 2y^2 - 7y + 3 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$$

$$y_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{7+5}{4} = 3.$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{решений нет, т.к. } 3 > 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Пример №6. Решить уравнение: $4\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решение:

Заменим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow 4 \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$,

$$-4\sin^2 x + \sin x + 4 - 1 = 0,$$

$$4\sin^2 x - \sin x - 3 = 0.$$

$$\sin x = y \Rightarrow 4y^2 - y - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49$$

$$y_1 = \frac{1-7}{8} = -\frac{3}{4}; \quad y_2 = \frac{1+7}{8} = 1.$$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{3}{4}, \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $(-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Пример №7. Решить уравнение: $\operatorname{tg} x \cdot \cos x + \operatorname{tg} x - \cos x - 1 = 0$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\operatorname{tg} x (\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1) \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 = 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 1 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример №8. Решить уравнение: $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

Решение:

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 x &= \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x &= 0, \\ \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 1) &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \pi k, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

3) Однородные уравнения

✎ **Однородные уравнения** - это тригонометрические уравнения, у которых левая часть является однородным многочленом относительно $\sin x$ и $\cos x$, имеющих одну и ту же степень, а правая часть равна нулю. Такие уравнения сводятся к уравнениям относительно $\operatorname{tg} x$.

Пример №9. Решить уравнение: $\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.

Решение:

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Получим:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \\ \cos^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 3, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k; \quad \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$.

Пример №10. Решить уравнение: $2 \sin^2 x + 5 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 4 = 0$.

Решение:

Умножив свободный член на $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, получим:

$$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

$$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0,$$

$$-2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0 \quad | * (-1),$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \neq 0,$$

$$\begin{cases} 2tg^2 x - 5tg x + 3 = 0, \\ \cos^2 x \neq 0, \end{cases} \Rightarrow 2tg^2 x - 5tg x + 3 = 0, \quad tg x = y \Rightarrow 2y^2 - 5y + 3 = 0.$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$y_1 = \frac{5-4}{4} = 1; \quad y_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\begin{cases} tg x = 1, \\ tg x = \frac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = \arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, \arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in Z.$

4) Уравнение вида: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c.$

Рассмотрим частный случай: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0, a \neq 0, b \neq 0.$

✎ Уравнение $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$ решается делением обеих частей уравнения на $\sin x$ или $\cos x$, т.к. $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть одновременно равны нулю, потому что они связаны соотношением $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. В результате получается уравнение, равносильное данному.

Пример №11. Решить уравнение: $\sin x - \cos x = 0.$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tg x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg x = 1, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

3. Тригонометрические неравенства.

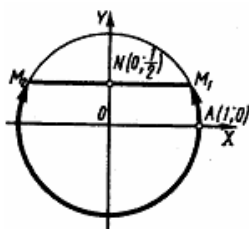
✎ **Простейшими тригонометрическими неравенствами** называются неравенства вида

$\sin x < m, \sin x > m, \cos x < m, \cos x > m, tg x < m, tg x > m, ctg x < m, ctg x > m,$
где m -данное число.

✎ **Решить простейшее тригонометрическое неравенство** - значит найти множество значений аргумента (углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример №12. Решить неравенство: $\sin x < \frac{1}{2}.$

Решение:



Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так: $-1 \leq \sin x < \frac{1}{2}.$ Неравенству $\sin x < \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ (см. **Рис.1**). В силу периодичности синуса общим решением служит множество дуг вида

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример №13. Решить неравенство: $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Решение:

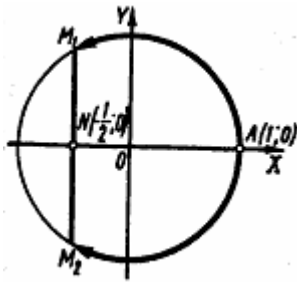


Рис.2

Перепишем данное неравенство так: $-\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$. Неравенству $\cos x > -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ (см. Рис.2). Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример №14. Решить неравенство: $\operatorname{ctg} x > 1$.

Решение:

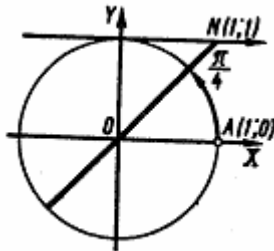


Рис.3

Учитывая свойство неограниченности котангенса, имеем $1 < \operatorname{ctg} x < +\infty$. Неравенству $\operatorname{ctg} x > 1$ удовлетворяют дуги из промежутка $0 < x < \frac{\pi}{4}$ (см. Рис.3). Общим решением служит множество дуг вида $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

Задание №1. Решите уравнение: $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

Задание №2. Решите уравнение: $\sin 3x = 0,5$.

Задание №3. Решите уравнение: $2\cos x + \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} x \cos x - 1 = 0$.

Задание №4. Решите уравнение: $2\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$.

Задание №5. Решите неравенство: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) < 0$.

Вариант 2

Задание №1. Решите уравнение: $3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

Задание №2. Решите уравнение: $\cos 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

Задание №3. Решите уравнение: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$.

Задание №4. Решите уравнение: $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$.

Задание №5. Решите неравенство: $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$.

➤ При выполнении задания **№1** необходимо обратить внимание на **Пример №2** (см. методические рекомендации).

- При выполнении задания №2 необходимо обратить внимание на Пример №1 (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания №3 необходимо обратить внимание на Пример №7 (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания №4 необходимо обратить внимание на Пример №9 (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания №5 необходимо обратить внимание на Примеры №12, 14 (см методические рекомендации)
4. Ответьте на контрольные вопросы:
- 1). Какие тригонометрические уравнения называются простейшими?
 - 2). Что понимается под решением тригонометрического уравнения?
 - 3). Перечислите основные способы решения тригонометрических уравнений.
5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
- 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Контрольная работа №9 по теме «Тригонометрические уравнения»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол баллов
1	Решить уравнение $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$	3
2	Решить уравнение $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$	3
3	Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	3
4	Решить уравнение, сводящееся к квадратному уравнению $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$	3
5	Решить уравнение разложением на множители $\sin^2(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$	3
6	Решить однородное уравнение $\sin x \cos x + 2 \sin^2 x = \cos^2 x$	4
7	Решить однородное уравнение $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$	5

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 16 баллов

Минимум на оценку «5» 21 балл

Тема 1.7 Тригонометрические функции

Практическая работа

Преобразование графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций

Цель работы: Научиться строить графики тригонометрических функций с помощью простейших преобразований.

Оборудование: Плакаты («Графики функций синус и косинус. Преобразование графиков функций синус и косинус», «Графики функций тангенс и котангенс. Преобразование графиков функций тангенс и котангенс», «Арксинус, арккосинус и арктангенс»)

Справочный материал

1. Преобразование амплитуды.

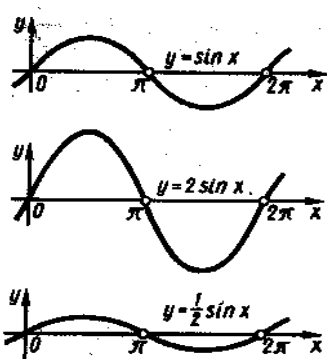


График функции $y = A \sin x$ получается растяжением (сжатием) синусоиды $y = \sin x$ в $A \left(\frac{1}{A} \right)$ раз от оси абсцисс. Такое преобразование называется преобразованием амплитуды.

Пример №1. На Рис. 1 изображены графики функций:

$$y = \sin x, \quad y = 2 \sin x, \quad y = \frac{1}{2} \sin x.$$

Рис. 1

2. Преобразование – сдвиг фазы.

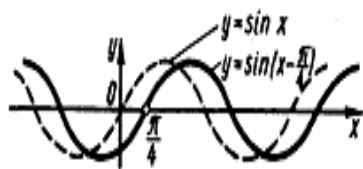


Рис. 2

График функции $y = \sin(x + \alpha)$ получается параллельным переносом синусоиды $y = \sin x$ на величину α :

- вправо, если $\alpha < 0$;
- влево, если $\alpha > 0$.

Такое преобразование называется сдвигом фазы.

Пример №2. На Рис. 2 изображены графики функции

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Преобразование периода.

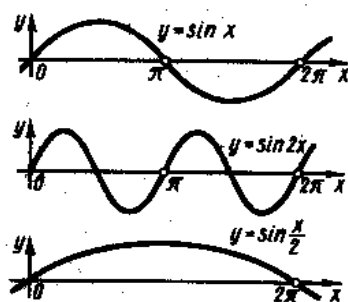


Рис. 3

График функции $y = \sin \omega x$ получается из графика функции $y = \sin x$:

- «сжатием» синусоиды вдоль оси абсцисс в ω раз;
- «растяжением» синусоиды вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{\omega}$ раз.

Такое преобразование называется преобразованием периода.

Пример №3. На Рис. 3 изображены графики функций:

$$y = \sin x, \quad y = \sin 2x, \quad y = \sin \frac{x}{2}.$$



Рис. 4

Пример №4. Построить график функции $y = \sin x + \cos x$.

Решение:

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

График изображен на **Рис. 4**.

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

Задание №1. Постройте график функции: $y = 3\sin x$.

Задание №2. Постройте график функции: $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Задание №3. Постройте график функции: $y = \cos 2x$.

Задание №4. Постройте график функции: $y = -3\arcsin x$.

Задание №5. Постройте график функции: $y = \sin x - \cos x$.

Вариант 2

Задание №1. Постройте график функции: $y = 2\cos x$.

Задание №2. Постройте график функции: $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Задание №3. Постройте график функции: $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

Задание №4. Постройте график функции: $y = -2\arccos x$.

Задание №5. Постройте график функции: $y = \sin^2 x$.

Вариант 3

Задание №1. Постройте график функции: $y = -\frac{1}{3}\sin x$.

Задание №2. Постройте график функции: $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Задание №3. Постройте график функции: $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Задание №4. Постройте график функции: $y = \frac{1}{2}\arcsin x$.

Задание №5. Постройте график функции: $y = \cos^2 x$.

- При выполнении задания **№1** необходимо обратить внимание на **Пример №1** (см. методические рекомендации).
- При выполнении задания **№2** необходимо обратить внимание на **Пример №2** (см. методические рекомендации).
- При выполнении задания **№3** необходимо обратить внимание на **Пример №3** (см. методические рекомендации).

- При выполнении задания №4 необходимо обратить внимание на **Пример №1** (см методические рекомендации)
 - При выполнении задания №5 необходимо обратить внимание на **Пример №4** (см методические рекомендации) или воспользоваться формулой понижения степени тригонометрических функций.
4. Ответьте на контрольный вопрос:
- 1). Перечислите преобразования, с помощью которых были построены графики заданных функций?
5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
- 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольный вопрос.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Контрольная работа №10 по теме «Тригонометрические функции»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол баллов
1	Найти область определения и множество значений функции $y=5\cos x$.	3
2	Выяснить является функция $y=2\sin x - \operatorname{tg} x$ четной или нечетной?	3
3	Изобразить график функции $y= \sin x + 1$ на интервале $(- 2\pi; 2\pi)$.	3
4	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y= 6\sin x \cos x + 3$	4
5	Построить график функции $y=0,5\cos x + 2$. При каких значениях функция убывает; возрастает?	5

Минимум на оценку «3» 9 баллов

Минимум на оценку «4» 13 баллов

Минимум на оценку «5» 18 баллов

Тема 1.8 Производная и её геометрический смысл

Практическая работа

Вычисление производной функции

Цель работы: Закрепить умения и навыки нахождения производных функций.

Оборудование: Плакат (свойства функции). Стенды (таблица производных, формулы дифференцирования).

Справочный материал

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Формулы дифференцирования

1. Производная постоянной равна 0: $C' = 0$.

2. Производная алгебраической суммы функций равна сумме производных этих функций:

$$(u + v)' = u' + v'$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй функции на первую: $(uv)' = u'v + v'u$.

Частный случай: $(Cu)' = Cu'$

4. Производная частного равна $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Частные случаи: $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$, $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$

5. Производная сложной функции: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

6. Производная степени: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ Частный случай: $(x)' = 1$.

7. Производная корня: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

8. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

15. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

9. $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$. 16. $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$.

10. $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$. 17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$. 18. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$. 19. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

13. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1$ 20. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

14. $(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

Примеры. Найти производные функций:

Пример №1. $y = 5x^4 - \frac{2x}{\sqrt{x}} + 3x \cdot \sqrt[3]{x} + 7$.

Решение:

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = 5x^4 - \frac{2x}{x^{1/2}} + 3x \cdot x^{1/3} + 7 = 5x^4 - 2x \cdot x^{-1/2} + 3x^{4/3} + 7 = 5x^4 - 2x^{1/2} + 3x^{4/3} + 7.$$

Находим

$$y' = \left(5x^4 - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{4}{3}} + 7 \right)' = 5(x^4)' - 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 3\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' + (7)' = 5 \cdot 4x^{4-1} - 2 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 3 \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} + 0 = 20x^3 - x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{3}} = 20x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 4 \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Пример №2. $y = (x^2 + 4)^3 \cos(3x - 1).$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \left((x^2 + 4)^3 \cos(3x - 1) \right)' = \left((x^2 + 4)^3 \right)' \cdot \cos(3x - 1) + (x^2 + 4)^3 \cdot (\cos(3x - 1))' = \\ &= 3(x^2 + 4)^2 \cdot (x^2 + 4)' \cdot \cos(3x - 1) + (x^2 + 4)^3 \cdot (-\sin(3x - 1)) \cdot (3x - 1)' = \\ &= 3(x^2 + 4)^2 \cdot 2x \cdot \cos(3x - 1) + (x^2 + 4)^3 \cdot (-\sin(3x - 1)) \cdot 3 = \\ &= 3(x^2 + 4)^2 \cdot (2x \cdot \cos(3x - 1) - (x^2 + 4) \cdot \sin(3x - 1)). \end{aligned}$$

Пример №3. $y = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)'$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1 + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} : (x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Пример №4. $y = \operatorname{ctg}^3(3 - x^2).$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\operatorname{ctg}^3(3 - x^2) \right)' = 3\operatorname{ctg}^2(3 - x^2) \cdot \left(-\frac{(3 - x^2)'}{\sin^2(3 - x^2)} \right) = 3\operatorname{ctg}^2(3 - x^2) \cdot \left(-\frac{-2x}{\sin^2(3 - x^2)} \right) = \\ &= \frac{6x \cdot \operatorname{ctg}^2(3 - x^2)}{\sin^2(3 - x^2)}. \end{aligned}$$

Пример №5. $y = \frac{x^2 - 3}{2x + 1}.$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 - 3}{2x + 1} \right)' = \frac{(x^2 - 3)' \cdot (2x + 1) - (2x + 1)' \cdot (x^2 - 3)}{(2x + 1)^2} = \frac{2x \cdot (2x + 1) - 2 \cdot (x^2 - 3)}{(2x + 1)^2} = \\ &= \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 + 6}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 6}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Пример №6. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$

Решение:

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x)).$$

Находим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} (\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x))' = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} - \frac{(1 - \sin x)'}{1 - \sin x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x \cdot (1 - \sin x) + \cos x \cdot (1 + \sin x)}{(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \cos x \sin x}{1 - \sin^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:
- 4.

Вариант 1

Найти производную функции при данном значении аргумента:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, $x = 2$.
2. $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$, $x = 5$.
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$, $x = 3$.
4. $f(x) = e^{\sin x}$, $x = 0$.
5. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$, $x = \sqrt{3}$.

Вариант 2

Найти производную функции при данном значении аргумента:

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3$, $x = 2$.
2. $f(x) = (x-1)\sqrt{x+1}$, $x = 3$.
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$, $x = 2$.
4. $f(x) = e^{\cos x}$, $x = \frac{\pi}{4}$.
5. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x = \sqrt{3}$.

Вариант 3

Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$1. f(x) = 4x + 10 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x}, \quad x=1.$$

$$2. f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-1}, \quad x=2.$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \quad x=\sqrt{3}.$$

$$4. f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. f(x) = \ln \frac{x-1}{x^2+1}, \quad x=2.$$

- При выполнении задания №1 необходимо обратить внимание на **Пример №1** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - формулы дифференцирования **1, 2, 3, 6, 8** (см. методические рекомендации);
 - определение степени с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
 - При выполнении задания №2 необходимо обратить внимание на **Пример №2** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - формулы дифференцирования **1, 2, 3, 5, 6, 7** (см. методические рекомендации).
 - При выполнении задания №3 необходимо обратить внимание на **Пример №5** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - формулы дифференцирования **1, 2, 4, 6, 7** (см. методические рекомендации).
 - При выполнении задания №4 необходимо обратить внимание на **Примеры №№3, 4** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - формулы дифференцирования **14, 9, 10, 2** (см. методические рекомендации).
 - При выполнении задания №5 необходимо обратить внимание на **Пример №6** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - свойства логарифмов: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
 - формулы дифференцирования **15, 4, 6, 1, 2** (см. методические рекомендации).
5. Ответьте на контрольные вопросы:
- 1). Какую функцию называют сложной? Приведите примеры сложных функций.
 - 2). Как вычисляется производная сложной функции?
6. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
- 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Практическая работа

Геометрический и физический смысл производной

- Цели работы:** 1. Закрепить полученные знания, умения и навыки в процессе изучения темы «Производная и её геометрический смысл».
2. Проверить степень усвоения знаний и сформированности умений при решении заданий на приложения производной функции.

Оборудование: Плакат (свойства функции). Стенды (таблица производных, формулы дифференцирования).

Справочный материал

1. Физические приложения производной.

- ✎ При прямолинейном движении точки скорость V в данный момент времени t равна производной от пути S по времени t : $V(t) = S'(t)$.
- ✎ Ускорение a в данный момент времени t равно производной от скорости V по времени t : $a(t) = V'(t)$.

Пример №1. Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$ с.

Решение:

Скорость движения точки в любой момент времени t : $V(t) = (2t^3 + t^2 - 4)' = 6t^2 + 2t$.

Тогда скорость движения точки в момент t_0 : $V(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104 \left(\frac{м}{с} \right)$.

Ускорение движения точки в любой момент времени t : $a(t) = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2$.

Тогда ускорение движения точки в момент времени t_0 : $a(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \left(\frac{м}{с^2} \right)$.

2. Геометрические приложения производной.

- ✎ *Геометрический смысл производной:* производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту k касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке x_0 : $y'(x_0) = k$ или $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Алгоритм составления уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

1. Найти значение функции в точке x_0 , т.е. $y(x_0)$ (подставить в уравнение кривой значение абсциссы x_0).
2. Найти производную функции $y'(x)$ и вычислить ее значение в точке x_0 , т.е. $y'(x_0)$.
3. Подставить в уравнение касательной $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ найденные значения $y(x_0)$, $y'(x_0)$ и значение абсциссы точки x_0 и привести уравнение к виду $y = kx + b$.

Пример №2. К параболу $y = 3x^2 - x$ в точке $x_0 = -1$ проведена касательная. Составить ее уравнение.

Решение:

1. Найдем $y(x_0)$: $y(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) = 3 + 1 = 4$.
2. Найдем $y'(x)$: $y'(x) = (3x^2 - x)' = 6x - 1$. Вычислим значение $y'(x_0)$: $y'(-1) = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$.
3. Подставим найденные значения $y(-1)$, $y'(-1)$ и значение $x_0 = -1$ в уравнение касательной: $y - 4 = -7(x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = -7(x + 1) \Rightarrow y = -7x - 7 + 4 \Rightarrow y = -7x - 3$.

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

№1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3$. Вычислить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 4$ с.

№2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Вариант 2

№1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2$. Вычислить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 5$ с.

№2. Составить уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Вариант 3

№1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3$. Вычислить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 3$ с.

№2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

- При выполнении задания №1 необходимо обратить внимание на **Пример №1** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - физические приложения производной (см. методические рекомендации).
- При выполнении задания №2 необходимо обратить внимание на **Пример №2** (см. методические рекомендации) и использовать:
 - **Алгоритм составления уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0** (см. методические рекомендации).

4. Ответьте на контрольные вопросы:

- 1). Какие физические задачи решаются с применением производной?
- 2). Как вычисляется угловой коэффициент касательной в данной точке кривой?
5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
 - 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1, 2 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Контрольная работа № 11 по теме «Производная и ее геометрический смысл»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Найти производную функции $y = \frac{3}{5}x^5 - 2x^2 + \frac{5}{3}$.	2

2	Найти производную функции $y = 3\lg x \cdot \ln x$.	2
3	Найти производную функции $y = \frac{x-3}{x+3}$.	2
4	Найти производную функции: $y = (2x+3)^5$.	2
5	Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = 7x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1,5$	2
6	Материальная точка движется по закону $s = t^3 - 3t^2 - 4t$. Найти скорость точки в момент $t = 3$ с.	2
7	Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 + x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.	4
8	Найти значения x , при которых значения производной функции $f(x) = \frac{5-x}{x^2+1}$ отрицательны.	4
9	Найти производную функции $s = \sqrt[4]{\cos^3 3t}$.	5

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 16 баллов

Минимум на оценку «5» 25 баллов

Тема 1.9 Применение производной к исследованию функций

Практическая работа

Исследование функции с помощью производной и построение графика

Цели работы: 1. Закрепить полученные знания, умения и навыки в процессе изучения темы «Применение производной к исследованию функций».

2. Проверить степень усвоения знаний и сформированности умений при решении заданий на приложения производной функции.

Оборудование: Плакат (свойства функции). Стенды (таблица производных, формулы дифференцирования).

Справочный материал

1. Исследование функций с применением производной.

1) Возрастание и убывание функции: если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

2) Признаки максимума и минимума функции.

✎ Точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$, если: $f'(x_0) = 0$ и $f'(x)$ при переходе аргумента через x_0 меняет знак с (+) на (-).

✎ Точка x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$, если: $f'(x_0) = 0$ и $f'(x)$ при переходе аргумента через x_0 меняет знак с (-) на (+).

✎ Точки максимума (max) и минимума (min) функции называются точками экстремума.

Правило исследования функции $y = f(x)$ на экстремум:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Приравнять ее нулю и найти критические точки x_0 функции $y = f(x)$.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
4. Критическая точка x_0 - точка максимума, если производная меняет знак с (+) на (-) при переходе через точку x_0 .
5. Критическая точка x_0 - точка минимума, если производная меняет знак с (-) на (+) при переходе через точку x_0 . Если в промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то точка x_0 экстремума не имеет.
6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

3) Направление выпуклости графика функции.

- ✎ Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вниз в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка.
- ✎ Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вверх в промежутке $a < x < b$, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.
- ✎ Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз; если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх.

4) Точки перегиба.

- ✎ Точка перегиба – это точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки противоположных направлений.
- ✎ Если при переходе через критическую точку вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$:

1. Найти вторую производную $f''(x)$.
2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции.
4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Общая схема построения графиков функций, представленных в виде многочлена:

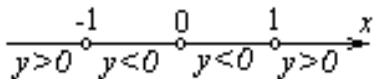
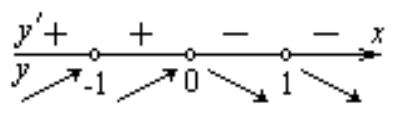
1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, обладает ли функция свойствами четности, нечетности, периодичности.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
5. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
6. Вычислить координаты нескольких промежуточных точек.
7. Построить график функции.

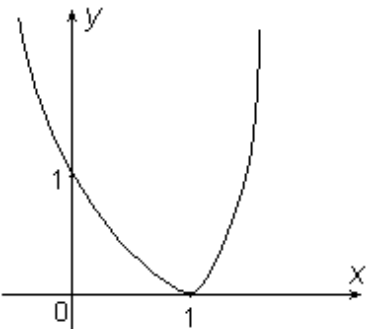
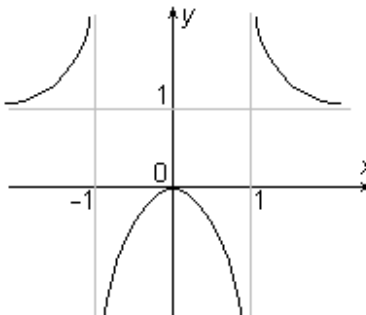
ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

1. **Пример №1.** Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

№ шага	План исследования функции	Применение плана	
		а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$	б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
1	Находим область определения функции	$D(f) = R$	$x^2 - 1 = 0, x = \pm 1,$ $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \neq \pm f(x)$ $\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная	$f(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow$ функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4 - 4x^3 + 1 = 0, (3x^4 - 3x^3) - (x^3 - 1) = 0,$ $(x - 1)^2(3x^2 + 2x + 1) = 0,$ $x - 1 = 0, x = 1$ - нуль функции	$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 0,$ $x = 0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1),$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$ - критические точки функции	$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' =$ $= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1) < 0, y'(0,5) < 0, y'(2) > 0$ $x = 0$ - не является точкой экстремума, $x = 1$ - точка минимума, $y_{min} = y(1) = 0$	 $y'(-2) > 0, y'(-0,5) > 0,$ $y'(0,5) < 0, y'(2) < 0,$ $x = 0$ - точка максимума, $y_{max} = y(0) = 0$
6	Находим предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^4 - 4x^3 + 1) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$

7	Строим эскиз графика функции		
---	------------------------------	--	---

2. Наименьшее и наибольшее значения функции.

Пример №2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке $[0; 2]$.

№ шага	План нахождения y_{min} и y_{max} на $[a; b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
2	Находим критические точки функции	$y' = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$ или $x^2 - 1 = 0$, $x = -1; 0; 1$ - критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a; b]$	$0; 1 \in [0; 2]$
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(0) = -3$ $y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$ $y(2) = 16 - 8 - 3 = 5$
5	Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее	$y_{min} = y(1) = -4$, $y_{max} = y(2) = 5$

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

№1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$.

№2. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}$. Построить схематический график функции.

№3 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-0,5; 0,5]$.

Вариант 2

№1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$.

№2. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую $y = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 10$.

Построить схематический график функции.

№3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1; 1]$.

Вариант 3

№1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = x^4 - 4x + 4$.

№2. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$. Построить схематический график функции.

№3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-0,5; 0,7]$.

- При выполнении задания №1 необходимо обратить внимание на **Исследование функций с применением производной** (см. справочный материал).
 - При выполнении задания №2 необходимо использовать:
 - **Правило исследования функции $y = f(x)$ на экстремум** (см. справочный материал);
 - **Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$** (см. справочный материал);
 - **Общую схему построения графика функции** (см. справочный материал).
 - При выполнении задания №3 необходимо использовать:
 - **Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений $y = f(x)$ на отрезке** (см. справочный материал).
4. Ответьте на контрольные вопросы:
- 1). Приведите примеры функций, имеющих один максимум или минимум, множество максимумов и минимумов, не имеющих ни максимума, ни минимума.
 5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
 - 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1, 2 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любое одно задание

«4» - любые два задания

«5» - все задания

Контрольная работа № 13 по теме «Применение производной к исследованию функций»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Найти стационарные точки функции: $y = x^3 + 12x^2 + 21x - 10$.	2
2	Найти интервалы возрастания и убывания функции: $y = x^3 + 12x^2 + 21x - 10$.	2

3	Найти экстремумы функции: $y = x^3 + 12x^2 + 21x - 10$.	2
4	Найти экстремумы функции: $y = e^{3x} - 3e^{2x}$.	3
5	Построить график функции $y = x^3 + 12x^2 + 21x - 10$ на отрезке $[-3; 0]$.	3
6	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 12x^2 + 21x - 10$ на отрезке $[-7; 1]$	4
7	Число 56 представить в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей, а отношение первого числа ко второму было равно 1:2.	5

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 16 баллов

Минимум на оценку «5» 21 балл

Тема 1.10 Интеграл

Практическая работа

Вычисление неопределенного и определенного интегралов

- Цели работы:**
1. Сформировать умения и навыки вычисления неопределенных и определенных интегралов.
 2. Проверить усвоение методов интегрирования неопределенного и определенного интегралов.

Оборудование: Стенды (таблица неопределённых интегралов, формулы дифференцирования, таблица значений тригонометрических функций).

Справочный материал

1. Неопределенный интеграл.

Множество всех первообразных функции $y=f(x)$ на некотором промежутке называется *неопределенным интегралом* от функции $y=f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где символ $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.
5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + C;$ | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$ |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$ | 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C;$ |
| 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C;$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C;$ | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$ |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ | 13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$ | 14. $\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \ln kx+b + C.$ |

Методы вычисления неопределенного интеграла

1. **Непосредственное интегрирование** - это метод нахождения неопределенных интегралов, основанный на том, что при использовании таблицы интегралов, основных свойств неопределенных интегралов и элементарных тождественных преобразований данный интеграл сводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример №1

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx = \int \left(\frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right) dx = 3 \int x^2 dx + 2 \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 7 \int x^{-2} dx =$$

$$= 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2x - 3 \ln|x| + 7 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = x^3 + 2x - 3 \ln|x| - \frac{7}{x} + C.$$

Пример №2

$$\int \frac{3x^2 \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3 \int x^2 x^{1/2} x^{-2/3} dx = 3 \int x^{11/6} dx = 3 \cdot \frac{x^{11/6+1}}{11/6+1} + C = 3 \cdot \frac{6}{17} x^{17/6} + C = \frac{18}{17} x^2 x^{5/6} + C =$$

$$= \frac{18}{17} x^2 \cdot \sqrt[6]{x^5} + C.$$

2. **Метод подстановки** - это метод интегрирования сложной функции. Сущность метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется с помощью непосредственного интегрирования.

В основе метода лежит формула замены переменной интегрирования в неопределенном интеграле:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, \text{ где } x = \varphi(t), dx = \varphi'(t) dt.$$

Алгоритм метода замены переменной:

1. Ввести новую переменную интегрирования, например $t = \varphi(x)$.
2. Найти дифференциалы от левой и правой частей полученного равенства: $dt = \varphi'(x) dx$.
3. Выразить дифференциал переменной x через дифференциал новой переменной.

4. Вычислить неопределенный интеграл относительно новой переменной интегрирования методом непосредственного интегрирования.
5. В полученном после интегрирования результате перейти снова к переменной x .

Пример №3

$$\int \frac{3x dx}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}} = 3 \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}} = 3 \int \frac{dt}{2\sqrt[3]{t^2}} = \frac{3}{2} \int t^{-\frac{2}{3}} dt =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{t} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2-3} + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right.$$

Пример №4

$$\int \frac{5x^4 dx}{3+4x^5} = 5 \int \frac{x^4 dx}{3+4x^5} = 5 \int \frac{dt}{20t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln|t| + C = \frac{1}{4} \ln|3+4x^5| + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3+4x^5 = t \\ 20x^4 dx = dt \\ x^4 dx = \frac{dt}{20} \end{array} \right.$$

Пример №5

$$\int \sin(4x+3) dx = \int \sin t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \sin t dt = -\frac{1}{4} \cos t + C = -\frac{1}{4} \cos(4x+3) + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x+3 = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right.$$

Пример №6

$$\int \frac{3 \cos x dx}{\sqrt[3]{1+2 \sin x}} = 3 \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1+2 \sin x}} = 3 \int \frac{dt}{2\sqrt[3]{t}} = \frac{3}{2} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{t^2} + C = \frac{9}{4} \sqrt[3]{t^2} + C = \frac{9}{4} \sqrt[3]{(1+2 \sin x)^2} + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+2 \sin x = t \\ 2 \cos x dx = dt \\ \cos x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right.$$

2. Определенный интеграл.

- Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ на отрезке $[a; b]$ называется *определенным интегралом* от a до b функции $y=f(x)$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$, где числа a и b называются пределами интегрирования, a – нижним, b – верхним. Отрезок $[a; b]$ называется отрезком интегрирования. Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.
- *Формула Ньютона – Лейбница* $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.
3. Определенный интеграл от дифференциала независимой переменной равен разности верхнего и нижнего пределов интегрирования $\int_a^b dx = b - a$.
4. Если в определенном интеграле пределы интегрирования равны, то интеграл равен нулю $\int_a^a f(x)dx = 0$.
5. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит знак на противоположный $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
6. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл от этой функции неотрицателен $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0, a < b$.

Методы вычисления определенного интеграла

- I. По формуле Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Алгоритм:

1. Найти неопределенный интеграл от функции $f(x)$, в котором можно принять $C=0$.
2. В полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел b , а затем нижний предел a , и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Пример №7

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Пример №8

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = 2\operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример №9

$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx &= \int_1^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} dx = \int_1^9 (\sqrt{x}-1) dx = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_1^9 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 - (9-1) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_1^9 - 8 = \\ &= \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 1) - 8 = \frac{2}{3} \cdot 26 - 8 = \frac{52-24}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

II. Метод замены переменной по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha), \text{ где } x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt, \quad \alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b).$$

Алгоритм:

1. Ввести новую переменную интегрирования, например $t = \varphi(x)$.
2. Найти дифференциалы от левой и правой частей полученного равенства: $dt = \varphi'(x)dx$.
3. Выразить дифференциал переменной x через дифференциал новой переменной.
4. Найти новые пределы интегрирования α и β , подставив заданные пределы a и b соответственно в введенную замену: $\alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b)$.
5. Вычислить определенный интеграл относительно новой переменной интегрирования и новых пределов интегрирования по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример №10

$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = \int_0^{2\pi} \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^{2\pi} =$$
$$= -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ (2x)' dx = t' dt \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2} \\ \alpha = 2 \cdot 0 = 0 \\ \beta = 2 \cdot \pi = 2\pi \end{array} \right\}$$

Пример №11

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int_{\cos 1}^{\cos(-1)} -\frac{dt}{t} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ (\cos x)' dx = t' dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ \alpha = \cos(-1) = \cos 1 \\ \beta = \cos 1 \end{array} \right\}$$

Пример №12

$$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_0^{e-1} = \frac{1}{5} ((e-1)^5 - 0^5) = \frac{(e-1)^5}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ (e^x - 1)' dx = t' dt \\ e^x dx = dt \\ \alpha = e^0 - 1 = 0 \\ \beta = e^1 - 1 = e - 1 \end{array} \right\}$$

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Найти и вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8 \right) dx;$

2. $\int \sin^2 x \cos x dx;$

3. $\int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1) dx;$

4. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx;$

5. $\int_0^1 (2x^3 - 1)^4 x^2 dx.$

Вариант 2

1. $\int (x^4 - 8x^3 + 4x) dx;$

2. $\int \cos^2 x \sin x dx;$

3. $\int_2^3 (3x^2 - 4x - 1) dx;$

4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \cos x \right) dx;$

5. $\int_0^1 (x^2 + 1)^3 x dx.$

- При выполнении задания №1 необходимо обратить внимание на **Примеры №1, 2** (см. справочный материал) и использовать:
 - формулы из таблицы интегрирования **1, 2** (см. справочный материал);
 - свойства неопределенного интеграла 4, 5 (см. справочный материал).
- При выполнении задания №2 необходимо обратить внимание на **Примеры №№3-6** (см справочный материал) и использовать:
 - Алгоритм метода замены переменной в неопределенном интеграле (см. справочный материал);
 - формулы из таблицы интегрирования **6, 7** (см. справочный материал).
- При выполнении заданий №3, 4 необходимо обратить внимание на **Примеры №№7-9** (см справочный материал) и использовать:
 - Алгоритм вычисления по формуле Ньютона – Лейбница (см. справочный материал);
 - свойства определенного интеграла 1, 2, 3 (см. справочный материал);
 - формулы из таблицы интегрирования **1, 2, 6, 7, 8, 9** (см. справочный материал).
- При выполнении задания №5 необходимо обратить внимание на **Примеры №№10-12** (см справочный материал) и использовать:
 - Алгоритм метода замены переменной в определенном интеграле (см. справочный материал);
 - формулы из таблицы интегрирования **1, 2** (см. справочный материал).
- 4. Ответьте на контрольные вопросы:
 - 1). Какое действие называется интегрированием?
 - 2). Сформулируйте определение подынтегральной функции и подынтегрального выражения.
 - 3). Выпишите формулу Ньютона-Лейбница и объясните ее смысл.
- 5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
 - 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Практическая работа

Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Цель работы: Научиться вычислять площади плоских фигур и объемы тел вращения с помощью определенного интеграла.

Оборудование: Плакаты (формулы площадей плоских фигур, формулы объёмов тел вращения). Стенды (таблица неопределённых интегралов).

Справочный материал

1. Вычисление площадей плоских фигур.

✎ **Геометрический смысл определенного интеграла:** Определенный интеграл неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$, т.е. $S = \int_a^b f(x)dx$ (см. Рис.1).

Основные случаи расположения плоской фигуры и соответствующие формулы площадей

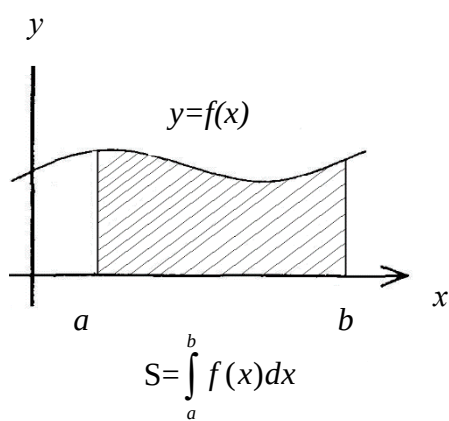


Рис. 1

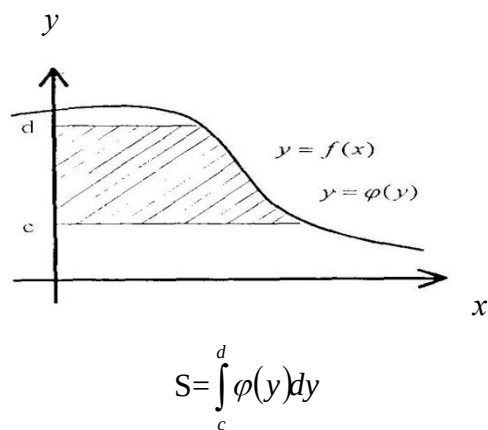


Рис. 2

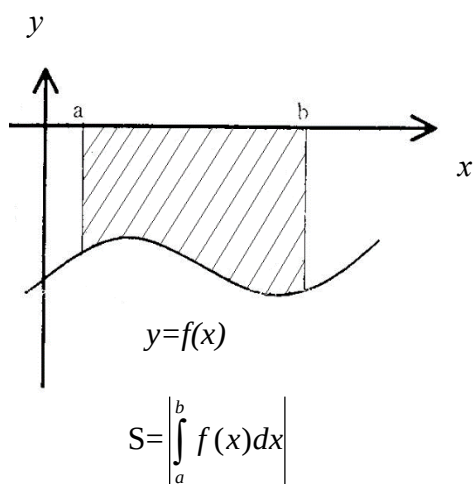


Рис. 3

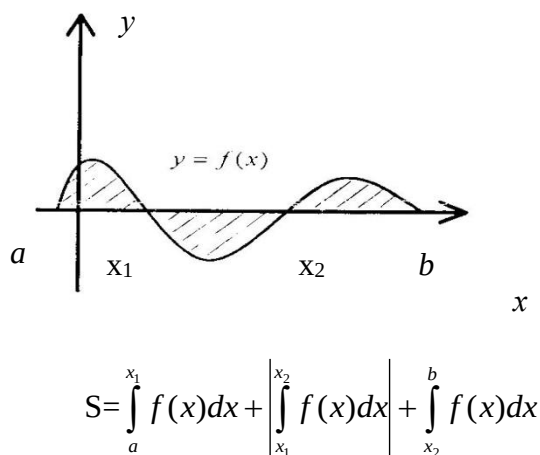


Рис. 4

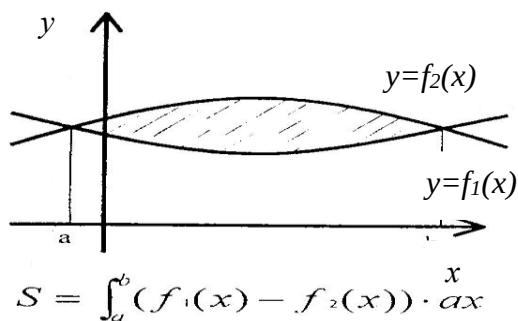


Рис. 5

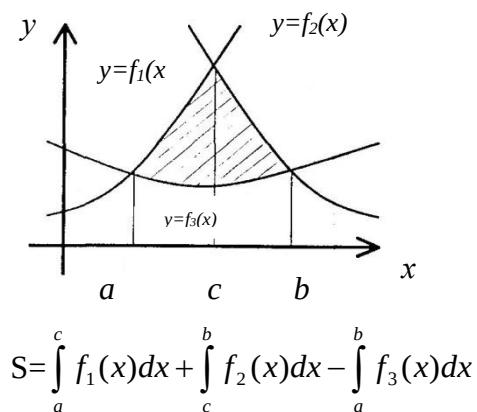
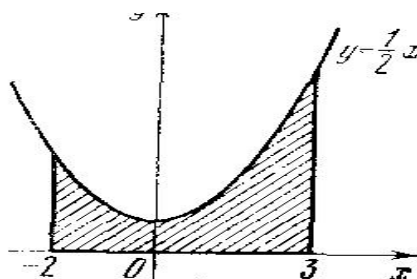


Рис. 6

Алгоритм решения задачи на вычисление площади плоской фигуры:

1. Сделать приблизительный график заданных функций, ограничивающих площадь плоской фигуры.
2. Найти пределы интегрирования.
3. Выяснить, какой формулой площади плоской фигуры удобно пользоваться в данном случае.
4. Вычислить площадь заданной фигуры.

Пример №1



Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

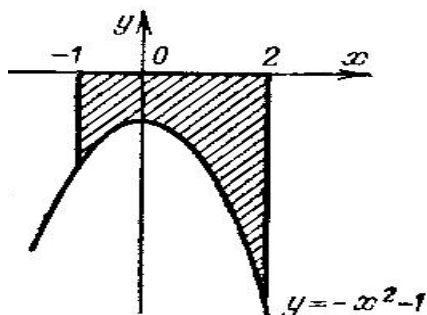
$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1, y = 0, x = -2, x = 3.$$

Решение:

Применив формулу $S = \int_a^b f(x) dx$, найдем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^3 + x \Big|_{-2}^3 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (3^3 - (-2)^3) + (3 - (-2)) = \frac{35}{6} + 5 = 5\frac{5}{6} + 5 = 10\frac{5}{6} (\text{кв.ед.}) \end{aligned}$$

Пример №2



Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

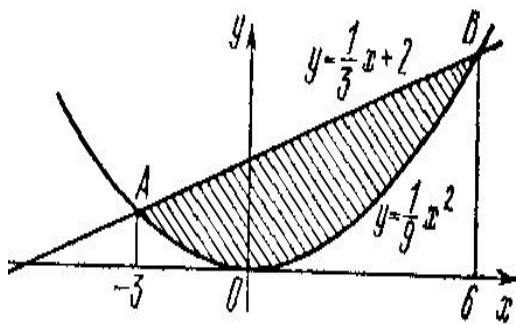
$$y = -x^2 - 1, y = 0, x = -1, x = 2.$$

Решение:

По формуле $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ находим

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^2 (-x^2 - 1) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 -(x^2 + 1) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx \right| = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + x \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (2^3 - (-1)^3) + (2 - (-1)) = \frac{9}{3} + 3 = 6 (\text{кв.ед.}) \end{aligned}$$

Пример №3



Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{3}x + 2$ и $y = \frac{1}{9}x^2$.

Решение:

Пределы интегрирования a и b находим из системы уравнений $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2, \\ y = \frac{1}{9}x^2. \end{cases}$

Отсюда

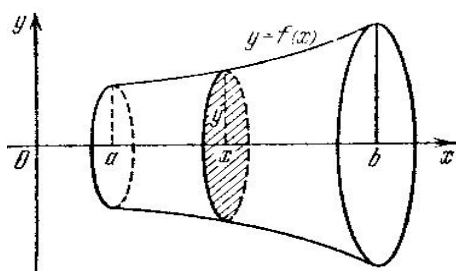
$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{1}{3}x + 2,$$

$$\text{т.е. } x^2 - 3x - 18 = 0, \Rightarrow x = -3 \text{ и } x = 6.$$

Следовательно, $a = -3$ и $b = 6$. По формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$ находим

$$S = \int_{-3}^6 \left(\frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{9}x^2 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^6 + 2x \Big|_{-3}^6 - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^6 = \frac{1}{6} (6^2 - (-3)^2) + 2 \cdot (6 - (-3)) - \frac{1}{27} \cdot (6^3 - (-3)^3) = \frac{27}{6} + 18 - \frac{243}{27} = 4,5 + 18 - 9 = 13,5 (\text{кв.ед.})$$

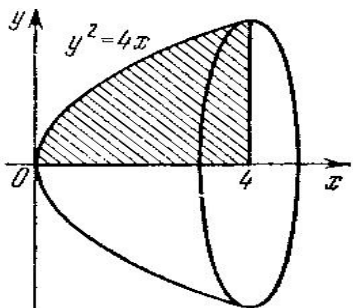
2. **Вычисление объема тела, образованного вращением вокруг оси Oх фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, производится по формуле**



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример №4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oх фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$.

Решение:



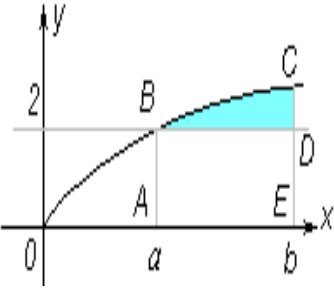
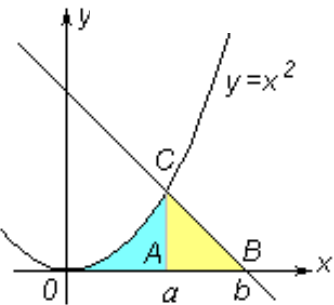
Применив формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$, получим

$$V = \pi \int_0^4 4x dx = 4\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 2\pi (4^2 - 0^2) = 32\pi (\text{куб.ед.})$$

ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

Задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$; б) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

№ шага	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение	плана
		а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$	б) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		
2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S = S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_a^b \sqrt{x} dx - \int_a^b 2 dx$	$S = S_{OAC} + S_{ACB} = \int_0^a x^2 dx + \int_a^b (2 - x) dx$
3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4, \\ a = x_A = 4, b = x_B = 9$	$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x; \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2; 1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле $S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	$S = \int_4^9 \sqrt{x} dx - \int_4^9 2 dx = \left. \frac{2x^{3/2}}{3} \right _4^9 - 2x \Big _4^9 = \frac{2}{3}(27 - 8) - 2(9 - 4) = \frac{8}{3}, \\ S = 2\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$	$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right _0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}, \\ S = \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант I

Задание №1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 9$, $y = 0$.

Задание №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x + 3$.

Задание №3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5.$$

Задание №4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Вариант 2

Задание №1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 16$, $y = 0$.

Задание №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4x - 3$.

Задание №3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 6.$$

Задание №4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

Вариант 3

Задание №1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$, $y = 0$.

Задание №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 5x - 6$.

Задание №3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4.$$

Задание №4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

- При выполнении заданий №1, 3 необходимо обратить внимание на **Примеры №1, 2** (см. справочный материал) и использовать:
 - формулы вычисления площади плоской фигуры в зависимости от ее расположения (см. справочный материал Рис. 1, 2, 3, 4);
 - *Алгоритм решения задачи на вычисление площади плоской фигуры* (см. справочный материал).
 - При выполнении задания №2 необходимо обратить внимание на **Пример №3** (см. справочный материал) и использовать:
 - формулы вычисления площади плоской фигуры в зависимости от ее расположения (см. справочный материал Рис. 5, 6);
 - *Алгоритм решения задачи на вычисление площади плоской фигуры* (см. справочный материал).
 - При выполнении задания №4 необходимо обратить внимание на **Пример №4** (см. справочный материал) и использовать:
 - формулу вычисления объема тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ (см. справочный материал).
- 4.** Ответьте на контрольные вопросы:
- 1). Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
 - 2). Как вычисляется объем тела вращения вокруг оси Oy ?
- 5.** Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
- 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 4 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые два задания

«4» - любые три задания

«5» - все задания

Контрольная работа №15 по теме «Интеграл»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Вычислить: $\int_1^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - 4x \right) dx$.	3
2	Найти интеграл: $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3e^x \right) dx$.	3
3	Найти интеграл: $\int \cos \frac{x}{3} dx$.	3
4	Найти уравнение кривой, проходящей через точку $N(-1;-3)$, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $k = 6x^2 + 4x - 1$.	3
5	Найти скорость точки, движущейся с ускорением $a = (t^3 + 2t - 1) \text{ м/с}^2$, если в момент времени три секунды ее скорость была 9 м/с .	3
6	Найти интеграл: $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{3 - \cos^2 x}}$.	4
7	Найти площадь фигуры, ограниченной и линиями $y^2 = x + 2$, $x = 0$ и $y = 0$.	4
8	Вычислить: $\int \frac{2dx}{\sqrt{16 - 49x^2}}$.	5
9	Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4x$ и $y = x$.	5

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 17 баллов

Минимум на оценку «5» 25 баллов

Раздел 2. Геометрия

Тема 2.1. Введение. Параллельность прямых и плоскостей

Контрольная работа №2 по теме «Параллельность прямых и плоскостей»

ОБРАЗЕЦ

- Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно, причем $AM : MB = 3 : 4$,
 $CN : BC = 3 : 7$.
 - Докажите, что $AC \parallel \alpha$.
 - Найдите AC , если $MN = 16$ см.
- Даны параллельные плоскости α и β . Через точки A и B плоскости α проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1 и B_1 . Найдите A_1B_1 , если $AB = 5$ см.
- Две плоскости параллельны между собой. Из точки M , не лежащей ни в одной из этих плоскостей, ни между плоскостями, проведены две прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках A_1 и A_2 , B_1 и B_2 . Известно, что $MA_1 = 4$ см, $B_1B_2 = 9$ см, $A_1A_2 = MB_1$. Найдите MA_2 и MB_2 .
- $ABCA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром, равным 4.
 - Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , C и D_1 , где K — середина ребра AB .
 - Вычислите периметр P сечения.

Критерии оценки:

- «3» - любые два задания
- «4» - любые три задания
- «5» - все задания

Тема 2.2 Перпендикулярность прямых и плоскостей

Контрольная работа №5 по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Из точки вне плоскости проведена к плоскости наклонная на расстоянии 40 см от неё и образующая с этой плоскостью угол 45° . Найти длину наклонной.	3
2	По условию задачи №1 найти проекцию наклонной на плоскость.	3
3	Из центра O квадрата со стороной 6 см проведен к его плоскости перпендикуляр $OM=4$ см. Найти расстояние от концов	3

	перпендикуляра до середин сторон квадрата.	
4	По условию задачи №3 найти расстояние от точки М до вершин квадрата.	4
5	На грани двугранного угла взяты две точки, расстояние которых от второй грани 10см и 16см. Расстояние второй точки от ребра двугранного угла равно 32см. Найти расстояние первой точки от ребра.	4
6	Катеты прямоугольного треугольника 7см и 24см. Найти расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет с плоскостью треугольника угол 30° .	5

Минимум на оценку «3» 9 баллов

Минимум на оценку «4» 13 баллов

Минимум на оценку «5» 17 баллов

Тема 2.3 Многогранники

Практическая работа

Вычисление площадей поверхностей многогранников

Цель работы: Закрепить знания и умения при решении геометрических задач на вычисление площадей поверхностей геометрических тел.

Оборудование: Плакаты (многогранники), модели геометрических тел, микрокалькуляторы.

Справочный материал

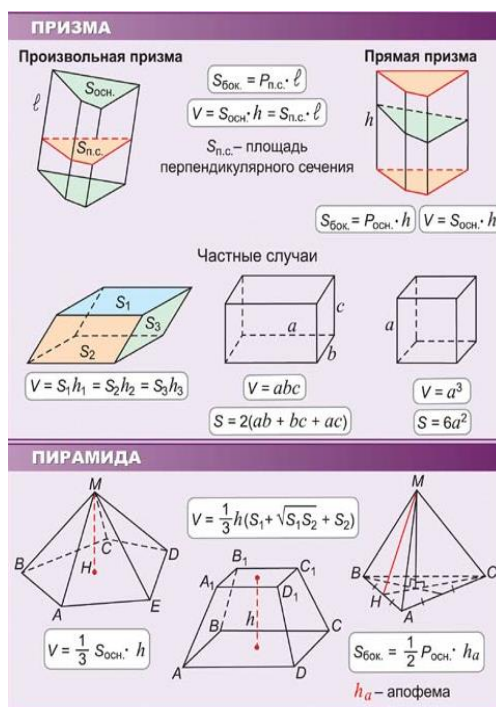


Рис. 1

Рис. 2

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

Задание №1. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания 6см, а апофема равна 8см.

Задание №2. Найти площадь полной поверхности куба со стороной 8см.

Задание №3. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 5см. Боковое ребро призмы равно 10см. Найти площадь полной поверхности призмы.

Вариант 2

Задание №1. Найти площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 4см, 6см и 8см.

Задание №2. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 14см, а высота – 15см.

Задание №3. Найти площадь поверхности куба, если его диагональ равна 20дм.

- При выполнении задания **№1** необходимо обратить внимание на **Рис. 2** (см. методические рекомендации).
- При выполнении заданий **№2** и **№3** необходимо обратить внимание на **Рис. 1** (см. методические рекомендации)

4. Ответьте на контрольные вопросы:

- 1).** Сформулируйте определения площадей боковой и полной поверхностей многогранников.
- 2).** Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
 - 1)** Записать тему, цели работы.
 - 2)** Выполнить задания №№1 – 3 (сделать вывод по работе).
 - 3)** Ответить на контрольные вопросы.
 - 4)** Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любое одно задание

«4» - любые два задания

«5» - все задания

Контрольная работа №7 по теме «Многогранники»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 14см, а высота – 15см.	3
2	Найти площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 4см, 6см и 8см.	3
3	Апофема правильной треугольной пирамиды равна 12, высота пирамиды равна $6\sqrt{2}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием	3
4	Стороны перпендикулярного сечения наклонной треугольной призмы 4см, 13см, 15см. Боковое ребро 40см. Найти площадь боковой поверхности призмы.	4
5	Основание пирамиды – квадрат со стороной 16см, а две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна 12см.	5

Минимум на оценку «3» 9 баллов
 Минимум на оценку «4» 13 баллов
 Минимум на оценку «5» 17 баллов

Тема 2.4 Цилиндр, конус, шар

Контрольная работа № 12 по теме «Цилиндр, конус, шар»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Радиус основания конуса равен 3 м, а высота 4 м. Найти образующую и площадь осевого сечения.	3
2	Радиус основания цилиндра равен 2 см, высота равна 3 см. Найдите площадь полной поверхности.	3
3	Площадь основания конуса равна 16π дм ² , высота – 6 дм. Найдите образующую.	3
4	Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(2; -4; 7)$ и радиусом 7 см.	3
5	Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник с углом 120° и равными сторонами по 16 см. Найдите площадь поверхности конуса.	4
7	Какую поверхность определяет уравнение $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 12y - 16z + 13 = 0$?	4
8	Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 45° и площадь боковой поверхности конуса.	5

Минимум на оценку «3» 9 баллов
 Минимум на оценку «4» 16 баллов
 Минимум на оценку «5» 25 баллов

Тема 2.5 Объемы тел

Практическая работа № 15

Вычисление объемов геометрических тел

Цель работы: Закрепить знания и умения при решении геометрических задач на вычисление объемов геометрических тел.

Оборудование: Плакаты (многогранники, круглые тела), модели геометрических тел, микрокалькулятор.

Справочный материал

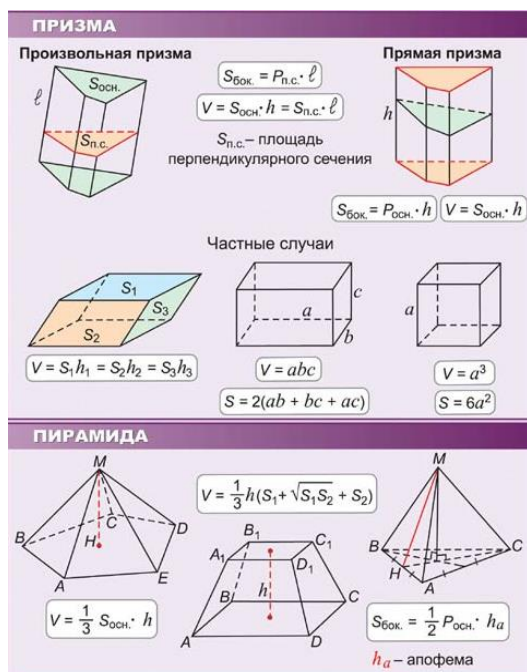


Рис. 1

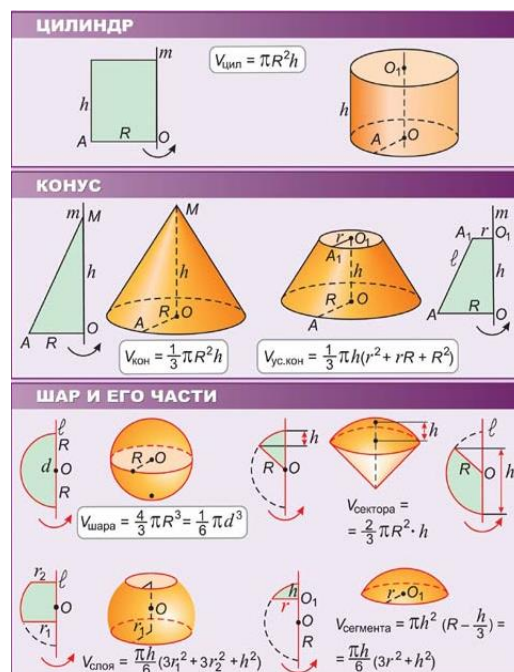


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

- Задание №1.** В правильной четырехугольной пирамиде высота 3см, а боковое ребро -5см. Найти объем пирамиды.
- Задание №2.** Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона основания 8см, а боковое ребро 6см.
- Задание №3.** Измерения прямоугольного параллелепипеда 30см, 50см и 18см. Найти ребро равновеликого ему куба.
- Задание №4.** Диагональ осевого сечения цилиндра равная 12см наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найти объем цилиндра.
- Задание №5.** В равностороннем конусе (в осевом сечении правильный треугольник) образующая равна 10см. Найти объем конуса.

Вариант 2

- Задание №1.** Найти объем правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 6см, а высота 7см.
- Задание №2.** Найти объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 5см, 8см и 6см.
- Задание №3.** Найти объем куба с ребром 3дм. Как изменится объем, если ребро увеличить в 2 раза?
- Задание №4.** Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3см и 9см. Найти объем шара.
- Задание №5.** Радиусы оснований усеченного конуса 10м и 6м, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найти объем конуса

- При выполнении задания **№1** необходимо обратить внимание на **Рис. 2** (см. методические рекомендации).
- При выполнении заданий **№2** и **№3** необходимо обратить внимание на **Рис. 1** (см. методические рекомендации)
- При выполнении задания **№4** необходимо обратить внимание на **Рис. 3** (см. методические рекомендации)

- При выполнении задания №5 необходимо обратить внимание на **Рис. 4** (см методические рекомендации)
4. Ответьте на контрольные вопросы:
- 1). Сформулируйте определения объема тела.
 - 2). Выпишите формулы для определения объема прямоугольного параллелепипеда и прямой призмы и поясните смысл входящих в них параметров.
 - 3). Можно ли применить формулу объема прямой призмы для вычисления объема прямого параллелепипеда?
5. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
- 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 – 5 (сделать вывод по работе).
 - 3) Ответить на контрольные вопросы.
 - 4) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые три задания

«4» - любые четыре задания

«5» - все задания

Контрольная работа № 14 по теме «Объемы тел»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1	Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 8 см, боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите объём пирамиды.	3
2	В прямой треугольной призме стороны основания относятся как 17 : 10 : 9, а боковое ребро равно 16 см. Найдите объём призмы, если площадь её боковой поверхности составляет 1152 см^2 .	3
3	Осевое сечение конуса – равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 9 м^2 . Найдите объём конуса.	3
4	Чему равен объём шарового сектора, если радиус окружности основания равен 60 см, а радиус шара 75 см?	4
5	Усечённый конус имеет радиусы оснований 4 см и 22 см. Чему равен радиус основания равновеликого ему цилиндра, имеющего с усечённым конусом одинаковую высоту?	5

Минимум на оценку «3» 6 баллов

Минимум на оценку «4» 10 баллов

Минимум на оценку «5» 16 баллов

Тема 2.7 Метод координат в пространстве

Практическая работа Векторы на плоскости и в пространстве

Цели работы: 1. Сформировать умения и навыки решения задач с применением векторов.
2. Проверить степень усвоения знаний и сформированности умений применения векторов к решению задач.

Оборудование: Плакаты (векторы).

Справочный материал

1. Понятие вектора.

✎ Вектор – это направленный отрезок. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

2. Координаты вектора.

Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

✎ Чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, надо из координат конца вектора вычесть координаты начала: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x; y) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

3. Разложение вектора по ортам.

✎ Разложение вектора $\vec{a}$ по ортам имеет вид: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$ – единичный вектор на оси Ox , $\vec{j}$ – единичный вектор на оси Oy , $\vec{k}$ – единичный вектор на оси Oz ; числа x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$.

4. Правила действий над векторами в координатной форме.

Если заданы векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

- $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$;
- $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$;
- $m\vec{a} = (mx_1; my_1; mz_1)$.

5. Условие коллинеарности двух векторов.

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ имеет вид

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$, т.е. если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Если $k > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление; если $k < 0$, то векторы противоположно направлены.

Пример №1. При каких значениях n и p векторы $\vec{a} = (-3; n; 4)$ и $\vec{b} = (-2; 4; p)$ коллинеарны?

Решение:

Используя отношения соответствующих координат, имеем:

$$\frac{-3}{-2} = \frac{n}{4} = \frac{4}{p} \Rightarrow \frac{n}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot n = 12 \Rightarrow n = 6, \quad \frac{4}{p} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 \cdot p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{3}.$$

Следовательно, векторы коллинеарны при $n = 6$, $p = \frac{8}{3}$.

6. Длина вектора. Длина вектора $\vec{a}$ (расстояние между двумя точками) вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ или $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Пример №2. Вычислить длину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

Решение:

Найдем координаты вектора

$$3\vec{a} + 2\vec{b} = 3 \cdot (2; 0; 0) + 2 \cdot (1; 1; -1) = (6; 0; 0) + (2; 2; -2) = (8; 2; -2).$$

По формуле вычисления длины вектора найдем длину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$:

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

7. Скалярное произведение двух векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$.
Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, заданных своими координатами, находится по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ имеет вид

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Угол между векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример №3. Проверить, перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = (-3; 2)$ и $\vec{b} = (4; 6)$.

Решение:

По условию перпендикулярности векторов находим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Пример №4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (4; -3; 1)$ и $\vec{b} = (5; -2; -3)$.

Решение:

По формуле скалярного произведения векторов, заданных своими координатами, находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = 23$.

Ответ: 23.

Пример №5. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Найти $\cos(\vec{a}, 3\vec{b})$.

Решение:

Найдем координаты вектора $3\vec{b}$:

$3\vec{b} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3; 3 \cdot 5) = (-6; 9; 15)$. По формуле вычисления угла между векторами получим

$$\begin{aligned} \cos(\vec{a}, 3\vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot 3\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |3\vec{b}|} = \frac{-4 \cdot (-6) + (-3) \cdot 9 + 5 \cdot 15}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + 15^2}} = \frac{24 - 27 + 75}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{342}} = \frac{72}{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{38}} = \\ &= \frac{24}{5\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 19} = \frac{24}{5 \cdot 2 \cdot \sqrt{19}} = \frac{12}{5\sqrt{19}} \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{19}} = \frac{12\sqrt{19}}{95}. \end{aligned}$$

Ответ: $\cos(\vec{a}, 3\vec{b}) = \frac{12\sqrt{19}}{95}$.

Пример №6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, вычислить $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$.

Решение:

Используя формулы скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ и скалярного квадрата вектора $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, получим

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) &= 4\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 4 \cdot |\vec{a}|^2 - 4 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ - 3 \cdot |\vec{b}|^2 = \\ &= 4 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 3^2 = 144 - 36 - 27 = 81. \end{aligned}$$

Ответ: $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 81$.

Порядок выполнения работы

1. Изучите справочный материал, приведенный к данной практической работе.
2. Разберите примеры, приведенные в справочных материалах.
3. Выполните задания из предложенного Вам варианта:

Вариант 1

Задание №1. Дано $\vec{a} = (2; 0; -1)$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти длину вектора $(2\vec{a} + \vec{b})$.

Задание №2. Будет ли вектор $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j}$ перпендикулярен вектору $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$?

Задание №3. При каких значениях m и n вектор $\vec{a} = (3; -7; m)$ будет коллинеарен вектору $\vec{b} = (6; n; 4)$?

Задание №4. Найти $\cos(\widehat{\vec{a}, 2\vec{b}})$, если $\vec{a} = (2; 0; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

Задание №5. Найти скалярное произведение $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; -1; 1)$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Задание №6. Найти скалярное произведение, $(\vec{c} + 2\vec{d}) \cdot (2\vec{c} - \vec{d})$, если $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 4$; $(\vec{c}, \vec{d}) = 60^\circ$.

Вариант 2

Задание №1. Дано $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{d} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Найти длину вектора $(3\vec{c} + \vec{d})$.

Задание №2. Будет ли вектор $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = (-1; 1; -2)$?

Задание №3. При каких значениях α и β вектор $\vec{m} = (5; \alpha; 2)$ будет коллинеарен вектору $\vec{n} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$?

Задание №4. Найти $\cos(\widehat{\vec{a}, 2\vec{b}})$, если $\vec{a} = (2; -1; 3)$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Задание №5. Найти скалярное произведение $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, если $\vec{a} = (3; 0; -2)$; $\vec{b} = (2; 4; -1)$.

Задание №6. Найти скалярное произведение, $(\vec{c} + 2\vec{d}) \cdot \vec{d}$, если $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 3$; $(\vec{c}, \vec{d}) = 30^\circ$.

Вариант 3

Задание №1. Дано $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$. Найти длину вектора $2\vec{a}$.

Задание №2. Будет ли вектор $\vec{c} = (2; -5; 1)$ перпендикулярен вектору $\vec{d} = (0; 5; -1)$?

Задание №3. При каком значении β вектор $\vec{m} = (9; 3; -5)$ будет коллинеарен вектору $\vec{n} = (-3; -1; \beta)$?

Задание №4. Найти $\cos(\widehat{2\vec{m}, \vec{n}})$, если $\vec{m} = (0; 2; 0)$; $\vec{n} = (-1; 4; 1)$.

Задание №5. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} - 3\vec{a})$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

Задание №6. Найти скалярное произведение, $(3\vec{q} - \vec{p}) \cdot (2\vec{q} + 4\vec{p})$, если $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 2$; $(\vec{p}, \vec{q}) = 90^\circ$.

- При выполнении задания **№1** необходимо обратить внимание на **Пример №2** (см. методические рекомендации).
 - При выполнении задания **№2** необходимо обратить внимание на **Пример №3** (см. методические рекомендации)
 - При выполнении задания **№3** необходимо обратить внимание на **Пример №1** (см. методические рекомендации)
 - При выполнении задания **№4** необходимо обратить внимание на **Пример №5** (см. методические рекомендации)
 - При выполнении заданий **№5, 6** необходимо обратить внимание на **Примеры №4, 6** (см. методические рекомендации)
4. Подготовьте отчет о проделанной работе по приведенной ниже форме:
- 1) Записать тему, цели работы.
 - 2) Выполнить задания №№1 –6 (сделать вывод по работе).
 - 3) Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любые четыре задания

«4» - любые пять заданий

«5» - все задания

Контрольная работа №16 по теме «Векторы в пространстве. Метод координат в пространстве»

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол баллов
1	Найти длину вектора $\overline{CD}$, если $C(1; 4; -2)$ и $D(7; -4; 3)$.	3
2	Выяснить, перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = (-1; -5; 2)$ и $\vec{b} = (5; 1; 0)$.	3
3	Найти скалярное произведение векторов $\vec{m} = (-2; -7; 1)$ и $\vec{n} = (-4; 5; -2)$.	3
4	При каких значениях m и n вектор $\vec{a} = (3; m; 2)$ будет коллинеарен вектору $\vec{b} = (6; 1; n)$?	3

5	При каком значении α вектор $\vec{m} = (2; -1; 0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n} = (6; \alpha; 1)$?	3
6	Найти длину вектора $(3\vec{a} - 2\vec{b})$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$.	4
7	Треугольник задан вершинами A(-5; -2), B(7; 6), C (5; -4). Найти длину медианы, проведенной из вершины A.	4
8	Найти угол между векторами $(\vec{a} + \vec{b})$ и $\vec{b}$, если $ \vec{a} = 2$, $ \vec{b} = 4$ и $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.	5
9	По условию задания №7 найти наименьший угол $\triangle ABC$.	5

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 17 баллов

Минимум на оценку «5» 25 баллов

Раздел 3. «Вероятность и статистика»

Тема 3.1 Комбинаторика

Практическая работа

Вычисление числа перестановок, сочетаний, размещений

Цель: Познакомиться с основными понятиями комбинаторики: размещениями, перестановками, сочетаниями.

Методические рекомендации

☞ Группы, составленные из каких-либо элементов, называются **соединениями**.

Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются *комбинаторными*. Раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*.

1. Размещения.

☞ Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их следования:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)).$$

Пример 1. Найти число размещений: 1) из 10 элементов по 4; 2) из $n+4$ элементов по $n-2$.

Решение:

Согласно формуле получим 1) $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$;

2) $A_{n+4}^{n-2} = (n+4) \cdot (n+4-1) \cdot \dots \cdot (n+4-(n-2-1)) = (n+4) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot 8 \cdot 7$.

Пример 2. Решить уравнение $A_n^5 = 30 \cdot A_{n-2}^4$.

Решение:

Используя формулу, перепишем уравнение в виде:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-4) = 30 \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5).$$

Учитывая, что $n \geq 6$, разделим обе части на $(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)$.

Получим

$$n \cdot (n-1) = 30 \cdot (n-5) \Rightarrow n^2 - n - 30n + 150 = 0 \Rightarrow n^2 - 31n + 150 = 0 \Rightarrow n_1 = 6, \quad n_2 = 25.$$

Ответ: 6; 25.

Пример 3. В группе из 30 студентов нужно выбрать старосту, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый из 30 студентов желает быть старостой, являясь членом профсоюза и спортсменом?

Решение:

Используя формулу, получим $A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$.

2. Перестановки.

➤ Перестановками из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Таким образом, число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно.

➤ Произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ первых натуральных чисел обозначается знаком $n!$ (читается « n -факториал»), причем $0! = 1, 1! = 1$. Значит, $P_n = n!$

С использованием этой формулы размещения можно вычислять по формуле

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При решении задач удобно использовать равенство: $A_n^{m+1} = (n-m) \cdot A_n^m$.

Пример 4. Составить все возможные перестановки из элементов a, b, c .

Решение:

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$, т.е. $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 5. Вычислить значения выражений: 1) $5!+6!$; 2) $\frac{52!}{50!}$.

Решение:

$$1) 5!+6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 + 720 = 840;$$

$$2) \frac{52!}{50!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50!} = 52 \cdot 51 = 2652.$$

Пример 6. Сколькими способами можно составить список из 10 человек?

Решение:

Искомое число способов равно числу перестановок из 10 элементов, т.е. $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$.

3. Сочетания.

➤ Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

По определению $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$.

Основные свойства сочетаний:

$$1. C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leq m \leq n).$$

$$2. C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 7. Вычислить значения выражений: 1) C_{15}^{13} ; 2) $C_6^4 + C_5^0$.

Решение:

$$1) C_{15}^{13} = \frac{15!}{13!(15-13)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 = 105;$$

$$2) C_6^4 + C_5^0 + \frac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 15 + 1 = 16.$$

Пример 8. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами. По формуле находим $C_{25}^4 = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 21!} = 25 \cdot 23 \cdot 22 = 12650$.

Порядок выполнения работы

Вариант 1

Задание №1. Вычислите A_7^3 ; P_5 ; C_6^4 .

Задание №2. Сколькими двузначными числами можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

Задание №3. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?

Задание №4. Решить уравнение $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.

Вариант 2

Задание №1. Вычислите P_8 , A_{13}^7 ; C_{21}^6 .

Задание №2. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?

Задание №3. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если можно использовать материал семи различных цветов?

Задание №4. Решить уравнение $30x = A_x^3$.

Вариант 3

Задание №1. Вычислите A_5^3 ; C_{12}^3 , P_6 .

Задание №2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

Задание №3. Сколькими способами можно выбрать гласную букву из слова *журнал*?

Задание №4. Решить уравнение $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$.

Отчет о проделанной работе:

1. Записать тему, цель работы.
2. Выполнить задания №№1 – 4.

Критерии оценки:

- «3» - любые два задания
- «4» - любые три задания
- «5» - все задания

Тема 3. 2 Элементы теории вероятностей

Практическая работа

Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики

Цель работы: сформировать умение решать задачи на вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности с использованием формул комбинаторики

Оборудование: тетрадь, ручка

Теоретические сведения

Классическое определение вероятности: вероятность $P(A)$ события A равна отношению числа возможных результатов опыта (M), благоприятствующих событию A , к числу всех возможных результатов опыта (N):

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

Пример 1. Шесть шариков случайным образом располагаются в шести ящиках так, что для каждого шарика равновероятно попадание в любой ящик и в одном ящике может находиться несколько шариков. Какова вероятность того, что в каждом ящике окажется по одному шарiku?

Решение. Событие A – в каждом ящике по одному шарiku. M – число вариантов распределения шариков, при которых в каждый ящик попадает по одному шарiku, $M=6!$ (число способов переставить между собой 6 элементов). N – общее число вариантов $N=6^6$ (так как каждый шарик может попасть в каждый из ящиков). В результате получаем

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5! \cdot 6}{6^6} = \frac{5!}{6^5}.$$

Пример 2. В урне 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим: A – событие, состоящее в появлении белых шаров; N – число способов вытащить 2 шара из 7; $N = C_7^2$; M – число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров; $M = C_3^2$.

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2! \cdot 5! \cdot 3!}{7! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{3!}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7}$$

Пример 3. В ящике 3 белых и 4 черных шаров. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров один белый, а другой черный. Вынутый шар в урну не возвращается.

Решение.

$$n = C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

$$m = C_3^1 \cdot C_4^1 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$P = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Пример 4. В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

Решение.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$n = C_{22}^3 = \frac{22!}{3! \cdot 19!} = 22 \cdot 7 \cdot 10$$

$$m = C_{13}^3 \cdot C_9^0 = 13 \cdot 11 \cdot 2$$

$$C_9^0 = 1$$

$$C_{13}^3 = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = 13 \cdot 11 \cdot 2$$

$$P = \frac{13 \cdot 11 \cdot 2}{22 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{13}{70}$$

Пример 5. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Какова вероятность того, что он с первого раза наберёт эти цифры правильно, если он помнит, что они различны?

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в том, что абонент, набрав произвольно две цифры, угадал их правильно. M – число правильных вариантов, очевидно, что $M=1$; N – число различных цифр, $N = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$. Таким образом, $P(A)=M/N=1/90$.

Практические задания:

Вариант – 1

1. Из ящика, в котором 10 белых и 6 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что один из них белый, а два черных?
2. Собрание, на котором присутствуют 20 мужчин и 10 женщин, выбирают делегацию из четырех человек. Каждый может быть избран с равной вероятностью. Найти вероятность того, что в делегацию войдут 3 женщины?
3. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, запомнив лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры?
4. 25 экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им вопросов?
5. Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 12.00 до 13.00 часов и ждете друг друга в течение 5 минут?

Вариант – 2

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.
2. Какова вероятность того, что задуманное двузначное число делится на 5.
3. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 пригласительных билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?
4. Подлежат контролю 250 изделий, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых для контроля 2-х изделий, одно окажется нестандартным?
5. В прямоугольник $5 \cdot 4 \text{ см}^2$ вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Контрольные вопросы

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?

3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?

Отчет о проделанной работе:

1. Записать тему, цель работы.
2. Выполнить задания №№1 – 5
3. Ответить (письменно) на контрольные вопросы.
4. Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

- «3» - любые три задания
 «4» - любые четыре задания
 «5» - все задания

Практическая работа **Вычисление вероятностей сложных событий**

Цель работы: научиться вычислять вероятности сложных событий, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, вероятности противоположного события, формулу полной вероятности, формулы Байеса и Бернулли.

Оборудование: тетрадь, ручка

Теоретические сведения

Теоремы умножения и сложения вероятностей

Теорема: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое уже наступило.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B | A).$$

Теорема: Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Теорема: Если A и B – совместные события, то

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

Вероятность противоположного события

Несколько событий в данном опыте образуют *полную группу*, если в результате опыта обязательно должно появиться *хотя бы одно из этих событий*. Отсюда следует, что сумма событий полной группы есть достоверное событие, вероятность которого равна единице. **Теорема:** Два противоположных друг другу события образуют полную группу:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример: Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1-м, 2-м и 3-м справочниках, соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится:

- а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках;
- в) во всех трех справочниках; г) ни в одном справочнике; д) хотя бы в одном справочнике.

Решение

Рассмотрим элементарные события и их вероятности:

A_1 – формула находится в 1-м справочнике, $P(A_1) = 0,6$, $P(\overline{A_1}) = 1 - 0,6 = 0,4$;

A_2 – формула находится во 2-м справочнике, $P(A_2) = 0,7$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0,7 = 0,3$;

A_3 – формула находится в 3-м справочнике, $P(A_3) = 0,8$, $P(\overline{A_3}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Выразим через элементарные события и их отрицания все события а) – д) и применим теоремы сложения и умножения вероятностей:

а) Пусть событие A – формула содержится только в одном справочнике:

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3,$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188.$$

б) Пусть событие B – формула содержится только в двух справочниках:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Далее аналогично пункту а) получим, что

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452.$$

в) Пусть событие C – формула содержится во всех трех справочниках: $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$,

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

г) Пусть событие D – формула не содержится ни в одном справочнике: $D = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$,

$$P(D) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

д) Пусть событие E – формула содержится хотя бы в одном справочнике:

$$E = A_1 + A_2 + A_3.$$

Для вычисления вероятности события E удобно воспользоваться формулой:

$$P(E) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,976.$$

Формула полной вероятности

Пусть событие A происходит совместно с одним из событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые образуют полную группу событий. Тогда справедлива формула полной вероятности события A :

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k),$$

где $P(H_k)$ – вероятность гипотезы H_k , $P(A|H_k)$ – условная вероятность A , т.е. вероятность появления события A при условии, что произошла гипотеза H_k .

Формула Байеса

Пусть вероятности гипотез до опыта были $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. В результате опыта появилось событие A . Тогда условная вероятность $P(H_k|A)$ гипотезы H_k с учетом появления события A вычисляется по формуле Байеса:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Пример 1. На двух станках производят одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Первый станок дает в среднем 80% деталей отличного качества, а второй – 90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Решение

Пусть событие A – взятая наудачу с конвейера деталь отличного качества. Гипотезы: H_1 – деталь изготовлена на первом станке; H_2 – деталь изготовлена на втором станке. Вероятность гипотез до появления события A : $P(H_1) = 3/4$; $P(H_2) = 1/4$.

Условные вероятности

$$P(A|H_1) = \frac{80\%}{100\%} = 0,8; \quad P(A|H_2) = \frac{90\%}{100\%} = 0,9.$$

Вероятности того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется отличного качества, т.е. вероятность события А, вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot 0,8 + \frac{1}{4} \cdot 0,9 = 0,825.$$

Искомая вероятность того, что взятая деталь отличного качества изготовлена на втором

станке, вычисляется по формуле Байеса:
$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0,9}{0,825} \approx 0,273.$$

Пример 2: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение:

Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время. Тогда, пусть Н1 – лампа из первой партии, Н2 – лампа из второй партии и Н3 – лампа из третьей партии. Тогда событие А/Н1 – лампа из первой партии проработает заданное время, А/Н2 – лампа из второй партии проработает заданное время и А/Н3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(H_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(H_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(A/H_1) = 0,7$$

$$p(A/H_2) = 0,8$$

$$p(A/H_3) = 0,9$$

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) = \\ = 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Схема Бернулли. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых однотипных испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью P . Тогда вероятность не появления события А, т.е. $P(\bar{A})$ равна $q=1-p$.

Вероятность того, что событие А произойдет в этих n независимых испытаниях ровно k раз, можно вычислить по **формуле Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Для определения вероятности появления события A менее m раз ($k < m$), более m раз ($k > m$), хотя бы один раз ($k \geq 1$) и т. п. могут быть использованы формулы:

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1),$$

$$P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n),$$

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Пример. Всхожесть семян данного растения равна 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Решение

а) Искомую вероятность находим с помощью формулы Бернулли, учитывая что $n = 4$, $k = 3$, $p = 0,9$, $q = 1 - p = 0,1$.

$$P_4(3) = C_4^3 (0,9)^3 (0,1)^1 = 4 \cdot 0,729 \cdot 0,1 = 0,2916.$$

б) «Не менее трех» означает, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения искомая вероятность равна

$$P_4(k \geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 (0,9)^3 (0,1)^1 + C_4^4 (0,9)^4 (0,1)^0 = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477.$$

Практические задания:

Вариант – 1

1. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена – 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что:
 - а) рекорд будет установлен одним спортсменом;
 - б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом;
 - в) рекорд не будет установлен.
2. На первом станке обрабатывается 80% всей продукции, а на втором – 20%. Первый станок дает 99% качественной продукции, а второй – 96%. Проверенное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно обрабатывалось на втором станке?
3. В течение года за индивидуальной консультацией по математике обращаются в среднем 40 % студентов-первокурсников. Найти вероятность того, что в данном учебном году из 800 студентов этого курса за консультацией обратятся:
 - а) 350 человек;
 - б) не менее 340.

Вариант – 2

1. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично», равна для первого студента 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»:
 - а) двумя студентами;
 - б) хотя бы одним;
 - в) ни одним?
2. На предприятии имеется - три станка одного типа. Один из них дает 20% общей продукции, второй – 30%, третий – 50%. При этом первый станок производит 5% брака, второй 4%, третий – 2%. Найти вероятность того, что случайно отобранное бракованное изделие выпущено первым станком.
3. Швейная фабрика выпускает в среднем 96 % продукции отличного качества. За смену сшито 150 костюмов. Найти вероятность того, что при проверке среди них окажутся отличного качества:
 - а) 146 костюмов;

б) не менее 146 костюмов.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему умножения событий.
2. Сформулируйте теорему сложения событий.
3. Формула условной вероятности.
4. Формула полной вероятности.
5. Формула Байеса.
6. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?
7. Как записывается формула Бернулли?

Отчет о проделанной работе:

1. Записать тему, цель работы.
2. Выполнить задания №№1 – 3:
 - *Задание 1* выполнить, используя теоремы умножения и сложения событий;
 - *Задание 2* выполнить, используя формулу полной вероятности и формулу Байеса;
 - *Задание 3* выполнить, используя формулу Бернулли.
3. Ответить (письменно) на контрольные вопросы.
4. Сдать преподавателю тетрадь на проверку.

Критерии оценки:

«3» - любое одно задания

«4» - любые два задания

«5» - все задания

Тема 3. 3 Статистика

Практическая работа №10

Вычисление числовых характеристик выборок

Цель занятия: развивать практический навык решения задач на первичную обработку статистических данных.

Оборудование: тетрадь, ручка

Практические задания:

Вариант 1

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n . Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану, размах выборки:

x_i	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5
n_i	2	18	40	25	6	5	4

2. Ряд распределения заработной платы рабочих механического цеха приведен в таблице.

Заработная плата (тыс. руб.)	212-214	214-216	216-218	218-220	220-222
Число рабочих	7	12	12	9	5

Требуется: а) вычислить коэффициент вариации V_s ;
б) построить полигон частот;
в) построить гистограмму относительных частот.

Вариант 2

- Для выборки 5, 2, 8, -2, 5, -2, 0, 0, 8, 5 найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану, размах выборки.
- Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города.

Товарооборот (млн. руб.)	25-75	75-125	175-225	225-275	275-325
Число магазинов	7	12	12	9	5

Требуется: а) вычислить коэффициент вариации V_s ;
б) построить полигон частот;
в) построить гистограмму относительных частот.

Отчет о проделанной работе:

- Записать тему, цель работы.
- Выполнить задания №№1, 2
- Сдать преподавателю тетрадь на проверку

Критерии оценки:

«3» - любое одно задание
«4» - 1 задание и любые два пункта из 2 задания
«5» - все задания

Контрольная работа №17 по теме "Комбинаторика. Элементы теории вероятностей. Статистика"

ОБРАЗЕЦ

№	Содержание задания	Кол бал
1.	Найти значение выражения: а) $\frac{P_7 + P_5}{5!}$; б) $\frac{A_4^3}{C_9^6}$.	3
2.	Сколькими способами 5 различных подарочных наборов можно разместить в пяти имеющихся коробках (по одному подарку в коробке)?	3
3.	Сколькими способами можно дать имена двоим родившимся близнецам-мальчикам, выбирая их из 7 имен, понравившихся родителям?	3
4.	В коробке находятся 3 черных, 4 красных и 7 белых шаров. Найти вероятность того, что взятый наудачу один шар окажется не красный.	3

5.	Из колоды карт (36 листов) выбирают 7 карт червовой масти и 2 карты трефовой масти. Сколькими способами можно осуществить такой выбор?	4										
6.	Решить уравнение $5C_{m-1}^3 = C_{m+1}^4$	4										
7.	Задан закон распределения дискретной случайной величины X <table><tr><td>X</td><td>32</td><td>40</td><td>37</td><td>35</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,2</td></tr></table> Найти: 1) математическое ожидание $M(X)$; 2) дисперсию $D(X)$; 3) среднее квадратичное отклонение σ.	X	32	40	37	35	p	0,1	0,3	0,4	0,2	5
X	32	40	37	35								
p	0,1	0,3	0,4	0,2								
8.	Составить таблицу распределения по частотам M и по относительным частотам W значений случайной величины Z – цифр, встречающихся в наборе случайно названных четырехзначных чисел: 5421, 6072. 3946, 8307, 4571, 3156, 9824. Построить полигон частот. Найти моду, медиану, размах, среднее выборки.	5										

Критерии оценки:

Минимум на оценку «3» 12 баллов

Минимум на оценку «4» 16 баллов

Минимум на оценку «5» 21 балл

Критерии оценки для проведения текущего контроля по результатам практических занятий

Оценка письменных работ

Ответ оценивается **отметкой «5»**, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущено более одной ошибки или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Оценочное средство 1.4
для проведения текущего контроля
по результатам самостоятельной работы

Раздел 1. «Алгебра и начала математического анализа»

Индивидуальная самостоятельная работа по теме
Тема 1.1. Действительные числа

Вариант №1

1. Выпишите все элементы множества A , если A – множество нечетных двузначных натуральных чисел.
2. Найдите пересечение и объединение множеств A и B , если $A = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $B = \{-1, 0, 3, 4, 5, 7\}$.
3. Пусть для решения некоторой задачи выделены множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9, 10\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus C$.

Вариант №2

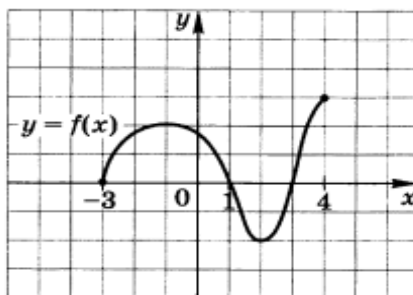
1. Выпишите все элементы множества B , если B – множество четных однозначных чисел.
2. Найдите пересечение и объединение множеств A и B , если $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.
3. Пусть для решения некоторой задачи выделены множества $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 0, 2, 3\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus C$.

Индивидуальная самостоятельная работа по теме
Тема 1.2. Степенная функция

Самостоятельная работа по теме «Степенная функция»

Вариант 1

1. Функция $y = f(x)$ задана графиком
Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.

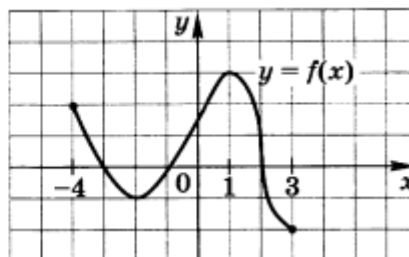


2. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$.
3. Постройте график функции $y = (x-2)^2 - 1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

Вариант 2

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком Укажите для этой функции: а) область определения; б) ну-

ли; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.



2. Найдите область определения функции

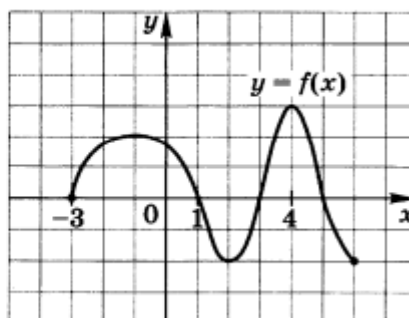
$$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}.$$

3. Постройте график функции $y=(x-4)^2-1$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

Вариант 3

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком

Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.



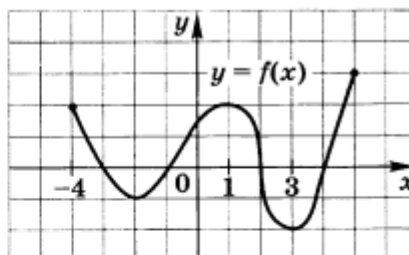
2. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-3}$.

3. Постройте график функции $y=(x+3)^2-4$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

Вариант 4

1. Функция $y=f(x)$ задана графиком

Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) наибольшее и наименьшее значения функции; е) область изменения.



2. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x+3}$.

3. Постройте график функции $y=(x+2)^2-4$. Укажите для этой функции: а) область определения; б) нули; в) промежутки знакопостоянства; г) промежутки возрастания (убывания); д) область изменения.

Критерии оценки:

«3» - любое одно задание

«4» - любые два задания

«5» - все задания

Индивидуальная самостоятельная работа по теме

1.4 Логарифмическая функция

Самостоятельная работа

Преобразование и вычисление логарифмических выражений

Вариант 1

1. Вычислите: $\log_3 \sqrt{27}$.
2. Найдите значение выражения $13^{\log_{13} 7} - 2$.
3. Вычислите $\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{\frac{1}{5}} 625$.
4. Выполните действия $\log_{0,1} 0,005 - \log_{0,1} 0,05$.
5. Сократите дробь $\frac{\log_{\sqrt{3}} 25}{\log_3 5}$.
6. Вычислите $\log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_3 9 : \log_7 \frac{1}{7}$.
7. Найдите $\log_3 \frac{81}{c}$, если $\log_3 c = -5$.
8. Найдите число a по его логарифму: $\lg a = \lg \log_4 256 + \lg 25$.

Вариант 2

1. Вычислите $\log_{\sqrt{3}} 243$.
2. Найдите значение выражения $17^{\frac{1}{2} \log_{17} 3} + \sqrt{17}$.
3. Вычислите $\log_8 32 - \log_8 \frac{1}{2}$.
4. Выполните действия $\log_{45} 5 + \frac{1}{\log_9 45}$.
5. Сократите дробь $\frac{\log_{11} 32}{\log_{11} 4}$.
6. Вычислите $\log_{15} \log_5 \log_2 32$.
7. Известно, что $\log_2 3 = t$. Найдите $\log_3 \frac{1}{2}$.
8. Найдите число b по его логарифму $\log_{0,2} b = \log_{0,2} \log_7 343 - \log_{0,2} 4$.

Критерии оценки:

«3» - любые 4-5 заданий

«4» - любые 6-7 заданий

«5» - все задания

Индивидуальная самостоятельная работа по теме

Тема 1.3 Показательная функция, Тема 1.4 Логарифмическая функция

Задание: построить график показательной или логарифмической функции.

Вариант 1 Построить график функции $y = \log_2 x$	Вариант 2 Построить график функции $y = 3^x + 1$	Вариант 3 Построить график функции $y = \log_{0,5} x - 1$	Вариант 4 Построить график функции $y = 0,5^x$
Вариант 5 Построить график функции $y = \log_{0,2} x$	Вариант 6 Построить график функции $y = \log_3 x$	Вариант 7 Построить график функции $y = -4^x$	Вариант 8 Построить график функции $y = \log_5 x$
Вариант 9 Построить график функции $y = \log_2 x - 1$	Вариант 10 Построить график функции $y = 0,5^x + 1$	Вариант 11 Построить график функции $y = \log_3 x - 3$	Вариант 12 Построить график функции $y = -5^x$
Вариант 13 Построить график функции $y = 3^x - 2$	Вариант 14 Построить график функции $y = 0,3^x - 2$	Вариант 15 Построить график функции $y = \log_{0,2}(x - 1)$	Вариант 16 Построить график функции $y = \log_3(x - 1)$
Вариант 17 Построить график функции $y = 3^{x+2}$	Вариант 18 Построить график функции $y = -3^x + 1$	Вариант 19 Построить график функции $y = \log_3 x + 3$	Вариант 20 Построить график функции $y = \log_5(x + 1)$
Вариант 21 Построить график функции $y = \log_{0,5}(x + 1)$	Вариант 22 Построить график функции $y = -\log_{0,5} x$	Вариант 23 Построить график функции $y = 5^{x+2}$	Вариант 24 Построить график функции $y = 5^{x-2}$
Вариант 25 Построить график функции $y = \log_5(x + 2)$	Вариант 26 Построить график функции $y = \log_5 x + 2$	Вариант 27 Построить график функции $y = -\log_5 x$	Вариант 28 Построить график функции $y = 0,3^x + 1$

Индивидуальная самостоятельная работа по теме
Тема 1.8 Производная и её геометрический смысл

Вариант №1

1. Найти производную функции

1) $\sin x + x^2$; 2) $3\ln x - 2^x$; 3) $\ln x \cdot \cos 3x$; 4) $\frac{3^x}{\sin x}$.

2. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

1) $f(x) = \cos x \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = \frac{x}{1+e^x}, x_0 = 0$.

3. Найти значения x , при которых значения производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2x^3 - x^2$; 2) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$; 3) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

4. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 :

1) $y = x^2 - 2x, x_0 = 3$; 2) $y = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Вариант №2

1. Найти производную функции

1) $\cos x + 2x^5$; 2) $2\ln x + 3^x$; 3) $\log_3 x \cdot \sin 2x$; 4) $\frac{\cos x}{5^x}$.

2. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

1) $f(x) = e^x \ln x, x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}, x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. Найти значения x , при которых значения производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$; 2) $f(x) = (x + 3)^3(x - 4)^2$; 3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

4. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 :

1) $y = x^3 + 3x, x_0 = 3$; 2) $y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Индивидуальная самостоятельная работа по теме
Тема 1.9 Применение производной к исследованию функций

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2$ и постройте ее график.

Вариант 3

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Вариант 4

1. Исследуйте функцию $f(x) = 12x - x^3$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

Вариант 5

1. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ и постройте ее график.

Вариант 6

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и постройте ее график.

Вариант 7

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 4$ и постройте ее график.

Вариант 8

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - x^2$ и постройте ее график.

Тема 1.10 ИнтегралВариант №1

1. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M :

1) $f(x) = \cos x$, $M(\frac{3\pi}{2}, 4)$;

2) $f(x) = e^x$, $M(1, \frac{1}{2})$;

3) $f(x) = 4x^3 + 4$, $M(1, -4)$.

2. Вычислить интеграл:

1) $\int_{-1}^2 (5x^4 - 8x^3) dx$;

2) $\int_0^1 4\sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{4}{x}\right) dx$;

3) $\int_3^7 \sqrt{2x-5} dx$.

Вариант №2

1. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M :

1) $f(x) = \sin x$, $M(\pi, 2)$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(16, 9)$;

3) $f(x) = 3x - 2$, $M(2, 5)$.

2. Вычислить интеграл:

1) $\int_0^4 \sqrt{x} \left(3 - \frac{7}{x}\right) dx$;

2) $\int_0^3 (\sqrt{x+1} - 2) dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) dx$.

Раздел 2. Геометрия

Индивидуальная самостоятельная работа по теме 2.1. Введение. Параллельность прямых и плоскостей

Самостоятельная работа № 1 «Аксиомы стереометрии и их следствия»	
ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. Даны четыре точки, из которых три лежат на одной прямой. Верно ли утверждение, что все четыре точки лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте. 2. а) Докажите, что все вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат в одной плоскости, если его диагонали AC и BD пересекаются. б) Вычислите площадь четырёхугольника, если его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $AC = 10$ см, $BD = 12$ см.	1. Даны две пересекающиеся прямые. Верно ли утверждение, что все прямые, пересекающие данные, лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте. 2. а) Дан прямоугольник $ABCD$, O – точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки A, B и O лежат в плоскости α. Докажите, что точки C и D также лежат в плоскости α. б) Вычислите площадь прямоугольника, если $AC = 8$ см, $\angle AOB = 60^\circ$.
Самостоятельная работа № 2 «Параллельность прямых, прямой и плоскости»	
ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
Дан треугольник ABC, $E \in AB$, $K \in BC$, $BE : EA = BK : KC = 2 : 5$. Через прямую AC проходит плоскость α, не совпадающая с плоскостью треугольника ABC. а) Докажите, что $EK \parallel \alpha$. б) Найдите длину отрезка AC, если $EK = 4$ см	Дан треугольник ABC, $M \in AB$, $K \in BC$, $BM : MA = 3 : 4$. Через прямую MK проходит плоскость α, параллельная прямой AC. а) Докажите, что $BC : BK = 7 : 3$. б) Найдите длину отрезка MK, если $AC = 14$ см.

Индивидуальная самостоятельная работа по теме Тема 2.3 Многогранники

Вариант №1

- Из точек A и B , лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите отрезок AB , если $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 7$ см, $A_1B_1 = 9$ см и двугранный угол равен 60° .
- В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 12 см и 15 см, а высота призмы 13 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.
- В прямом параллелепипеде стороны основания 4 см и 7 см, угол между ними 30° . Боковая поверхность равна 225 см². Найдите полную поверхность.

Вариант №2

- Из точек A и B , лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите отрезок AB , если $AA_1 = 4$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 8$ см и двугранный угол равен 30° .
- В прямой треугольной призме стороны основания равны 8 см, 10 см и 13 см, а высота призмы 11 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

Индивидуальная самостоятельная работа по теме
Тема 2.7 Метод координат в пространстве

Самостоятельная работа по теме «Векторы и координаты»
Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a}\{2; -4; 3\}$ и $\vec{b}\{-3; \frac{1}{2}; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{3; -6; 0\}$ и $\vec{c}\{0; -3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$.
3. Найдите значения m и n , при которых векторы $\vec{a}\{6; n; 1\}$ и $\vec{b}\{m; 16; 2\}$ коллинеарны.
4. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5; -1; 3)$, $B(2; -2; 4)$.
5. Даны векторы $\vec{b}\{3; 1; -2\}$ и $\vec{c}\{1; 4; -3\}$. Найдите $|2\vec{b} - \vec{c}|$.
6. Изобразите систему координат $Oxyz$ и постройте точку $A(1; -2; -4)$. Найдите расстояния от этой точки до координатных плоскостей.
7. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
8. Вычислите угол между прямыми AB и CD , если $A(\sqrt{3}; 1; 0)$, $B(0; 0; 2\sqrt{2})$, $C(0; 2; 0)$, $D(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{2})$.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a}\{1; -3; -1\}$ и $\vec{b}\{-1; 2; 0\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{a}\{2; 4; -6\}$, $\vec{b}\{-3; 1; 0\}$ и $\vec{c}\{3; 0; -1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.
3. Найдите значения m и n , при которых векторы $\vec{a}\{-4; m; 2\}$ и $\vec{b}\{2; -6; n\}$ коллинеарны.
4. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(6; 3; -2)$, $D(2; 4; -5)$.
5. Даны векторы $\vec{a}\{5; -1; 2\}$ и $\vec{b}\{3; 2; -4\}$. Найдите $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.
6. Изобразите систему координат $Oxyz$ и постройте точку $B(-2; -3; 4)$. Найдите расстояния от этой точки до координатных плоскостей.
7. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
8. Вычислите угол между прямыми AB и CD , если $A(6; -4; 8)$, $B(8; -2; 4)$, $C(12; -6; 4)$, $D(14; -6; 2)$.

Критерий оценки:

- «3» - любые 5 заданий
«4» - любые 6-7 заданий
«5» - все задания

Раздел 3. «Вероятность и статистика»
Индивидуальная самостоятельная работа по теме
Тема 3.3 Статистика

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [3] Найти размах выборки:
1) $-100, 98, 72, -34, 49$;
2) $\frac{2}{7}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.
2. [5] Найти дисперсию выборки:
1) 15 м, 12 м, 18 м;
2) 5 ч, 7 ч, 4 ч, 4 ч.
3. [6] Найти среднее квадратичное отклонение от среднего элементов выборки:
 $9 \text{ т}, 15 \text{ т}, 11 \text{ т}, 12 \text{ т}, 13 \text{ т}$.
4. [7] Найти (с точностью до 0,1) среднее квадратичное отклонение от среднего значений случайной величины X :

X	-3	-1	0	4
M	1	2	3	4

5. [7] Даны две выборки: 6, 5, 7, 2 и 9, 7, 10, 12, 8. Определить, какая из них имеет меньшую меру рассеивания своих данных около среднего.

Вариант II

1. [3] Найти размах выборки:
1) $54, -27, 13, 49, -30$;
2) $-\frac{1}{6}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, -\frac{1}{7}$.
2. [5] Найти дисперсию выборки:
1) 16 с, 10 с, 13 с;
2) 6 кг, 11 кг, 8 кг, 7 кг.
3. [6] Найти (с точностью до 0,1) среднее квадратичное отклонение от среднего элементов выборки:
 $21 \text{ м}, 15 \text{ м}, 18 \text{ м}, 14 \text{ м}$.

4. [7] Найти (с точностью до 0,1) среднее квадратичное отклонение от среднего значений случайной величины X :

X	-2	-1	0	1	2
M	2	4	9	4	1

5. [7] Даны две выборки: 4, 3, 5, 6, 7 и 11, 9, 10, 8. Определить, какая из них имеет меньшую меру рассеивания своих данных около среднего.

Междисциплинарные задания с учетом профессиональной направленности

Наименование разделов и тем	Варианты междисциплинарных заданий
Раздел 1. «Алгебра и начала математического анализа»	
Тема 1.4 Логарифмическая функция	Задача 1: Прочность бетона в возрасте 30 дней (R_{30}) составляла 1 кг/см². Через сколько дней прочность бетона составит 2 кг/см², если известно, что прочность бетона через n дней вычисляется по формуле $R_n = R_{30} \frac{\lg n}{\lg 30}$ Задача 2: Вычислить среднюю быстроту действия вращательного масляного вакуумного насоса, при помощи которого в течение $t = 5$ с давление в баллоне снизилось от $p_1 = 760$ мм рт. ст. до $p_2 = 460$ мм рт. ст. Объем баллона $V = 10$ л., средняя быстроте действия S насоса вычисляется по формуле: $S = 2,3 \frac{V}{t} \lg \frac{p_1}{p_2}$. Задача 3: Необходимо вычислить стоимость газового оборудования через 5 лет, если его первоначальная стоимость составляет $4,68 \cdot 10^5$, а ежегодный процент эксплуатации составляет 5,7%. Задача 4: Мастер укладывает диодную ленту по логарифмической спирали. Сколько катушек ленты необходимо использовать мастеру, если в катушке находится 30 м ленты, а радиус спирали составляет 15 м?
Тема 1.7 Тригонометрические функции	Микрогруппа 1 Задача 1. При планировании графика полета, пилот должен рассчитать скорость, v км/ч, на плоскости, принимая во внимание скорость и направление ветра. Скорость в км/ч можно выразить в виде $v = \frac{770 \sin 135^\circ}{\sin \theta}$. Без использования калькулятора, найти значение v, если $\operatorname{tg} \theta = 7$ и $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Задача 2. Найти высоту горы. (рис.1)

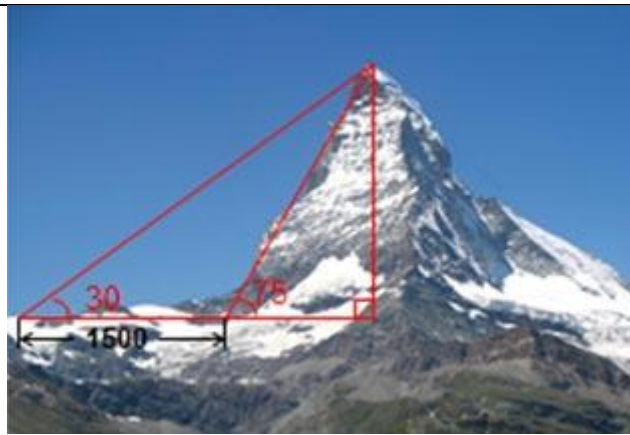


Рис. 1.

Задача 3. Электрическая цепь. В колебательном контуре, заряд, q Кулонов, задан формулой $q = 5e^{-10t} \cos(60t + \frac{1}{4}\sin 60t)$, где t - время в секундах после включения схемы.

1. Найдите первоначальный заряд.
2. Найдите значения A и B , если дано, что $0 < B < \frac{\pi}{2}$, где $q = Ae^{-10t} \cos(60t - B)$.
3. Выведите значение заряда с течением времени.

Микрогруппа 2

Задача 1. Популяция насекомых. Эколог, изучающий вид жука, оценивает популяцию колонии в течение восьми недель. Если t - это количество недель после первоначальной оценки, то численность насекомых в тысячах может быть смоделирована формулой $P(t) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, где $0 \leq t \leq 8$.

1. Какова была первоначальная численность вида?
2. Каковы были самое маленькое и самое большое число популяции?
3. В течение какого интервала(ов) численность превышала 6000?

Задача 2. С подножия здания я должен смотреть 22° вверх, чтобы посмотреть на вершину дерева. С вершины здания, на высоте 150 метров над уровнем земли, я должен смотреть вниз под углом 50° ниже горизонтали, чтобы увидеть вершину дерева. (рис. 2)

1. Насколько высоко дерево?
2. Как далеко от здания растёт это дерево?

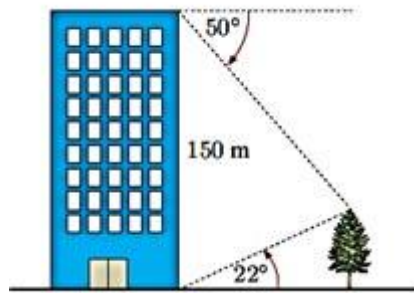


Рис. 2

Задача 3. Равновесие. Диаграмма показывает шар P , присоединенный к двум струнам, которые наклонены под углами A и Q к горизонтали. Напряженностью в струнах являются 10 N (то есть ньютонов) и $F\text{ N}$. Усилие на мяче под воздействием силы тяжести составляет 20 N . (рис.3) Когда мяч находится в равновесии, то можно показать, что $10\cos A = F\cos\theta$ и $10\sin A + F\sin\theta = 20$

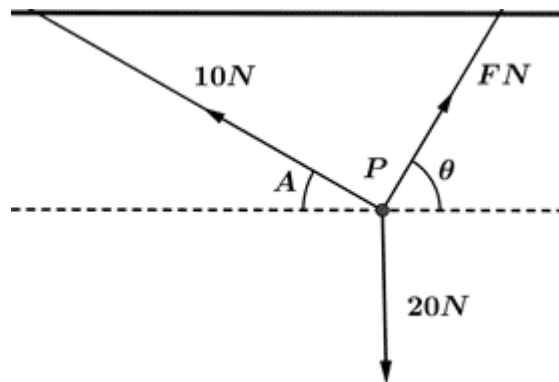


Рис. 3

1. Используйте тождество $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, чтобы выразить F через A .

$$\tan\theta = \frac{2 - \sin A}{\cos A}$$

2. Показать, что
3. Найти точные значения F и θ учитывая, что $A = 30^\circ$.

Микрогруппа 3

Задача 1. Приливы. Высота, в метрах, приливов регистрируется на определенном пляже со временем t часов. Обнаружено, что высота y м, задается уравнением $y = 1,3 + 1,2\cos 2t$.

1. Нарисуйте график y для $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Найти высоту прилива через 4 часа с начала исследования.

Задача 2. Башня связи. Как показано на рисунке, башня связи построена наверху здания. Найдите высоту башни. (рис.4)

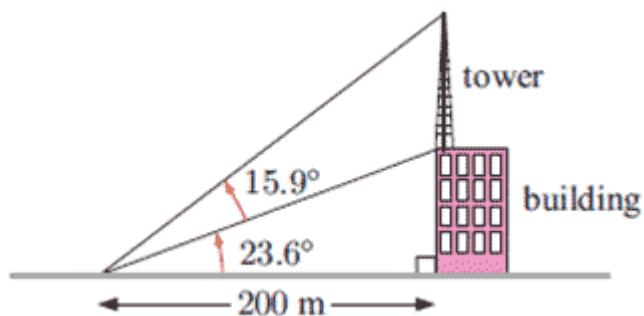


Рис.4

Задача 3. Артериальное давление. Джерри измерил своё артериальное давление P (в мм ртутн) со временем и обнаружил,

$$P = 105 - 20 \cos\left(\frac{16\pi t}{7}\right)$$

что функция, где $t > 10$, примерно соответствует его артериальному давлению в момент времени t (в секундах). Найдите наименьшее значение t больше 10, для которого $P = 100$.

Тема 1.8
Производная и её
геометрический
смысл
Тема 1.9
Применение
производной к
исследованию
функций

Задача 1: Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

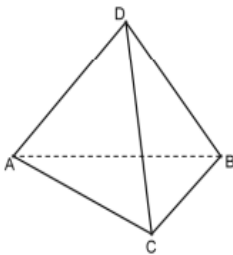
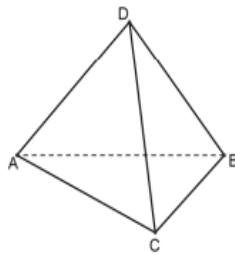
Задача 2: Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Задача 3: Федор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном в первом городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $3t^2$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^2$ часов в неделю, они производят t приборов. За каждый час работы (на каждом из заводов) Федор платит рабочему 1 тысячу руб. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Тема 1.10
Интеграл

Задача 1: Экспериментально установлено, что продуктивность труда работника приближенно выражается формулой $f(t) = -0,0033t^2 - 0,089t + 20,96$, где t – рабочее время в часах. Вычислить объем выпуска деталей за квартал, считая рабочий день 8-часовым, а количество рабочих дней в квартале – 62.

	Задача 2: Во сколько обойдется покупка металлочерепицы ($245\text{руб}/\text{м}^2$) на крышу (уклон крыши составляет 300) деревянного дома размерами $6\text{м} \times 6\text{м}$ при этом запас составляет 15% от всей площади крыши? Задача 3: Производительность труда рабочего в течение смены приблизительно выражается функцией $f(t) = 0,1t^2 - t + 17$, где t – часы работы. Определить среднюю производительность рабочего.				
Раздел 2. «Геометрия»					
Тема 2.3 Многогранники	Сообщение по теме «Симметрия в пространстве. Примеры симметрий в профессии» Выполнить задание: <table border="1"> <thead> <tr> <th>Вариант 1</th><th>Вариант 2</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td> В координатной системе дана точка $A(2;11;16)$. Определи координаты точек, в которые переходит точка А в... 1. ...центральной симметрии относительно начала координат: ; ; 2. ...осевой симметрии относительно оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 ...в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ; </td><td> В координатной системе дана точка $A(11;4;4)$. Определи координаты точек, в которые переходит точка А в... 1. ...центральной симметрии относительно начала координат: ; ; 2. ...осевой симметрии относительно оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 ...в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ; </td></tr> </tbody> </table>	Вариант 1	Вариант 2	В координатной системе дана точка $A(2;11;16)$. Определи координаты точек, в которые переходит точка А в... 1. ...центральной симметрии относительно начала координат: ; ; 2. ...осевой симметрии относительно оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 ...в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ;	В координатной системе дана точка $A(11;4;4)$. Определи координаты точек, в которые переходит точка А в... 1. ...центральной симметрии относительно начала координат: ; ; 2. ...осевой симметрии относительно оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 ...в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ;
Вариант 1	Вариант 2				
В координатной системе дана точка $A(2;11;16)$. Определи координаты точек, в которые переходит точка А в... 1. ...центральной симметрии относительно начала координат: ; ; 2. ...осевой симметрии относительно оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 ...в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ;	В координатной системе дана точка $A(11;4;4)$. Определи координаты точек, в которые переходит точка А в... 1. ...центральной симметрии относительно начала координат: ; ; 2. ...осевой симметрии относительно оси Ox: ; ; оси Oy: ; ; оси Oz: ; ; 3 ...в зеркальной симметрии относительно координатной плоскости (xOy): ; ; координатной плоскости (yOz): ; ; координатной плоскости (xOz): ; ;				

	Дан правильный тетраэдр DABC.  1. С помощью каких движений вершины (ABD) переходят соответственно в вершины A,C,B,D? ☐ все названные движения ☐ симметрия относительно точки ☐ симметрия относительно плоскости ☐ ни одно из названных движений ☐ параллельный перенос ☐ симметрия относительно оси 2. С помощью каких движений все точки грани (ABD) переходят в точки этой же грани (грань отображается на себя)? ☐ ни одно из названных движений ☐ симметрия относительно плоскости ☐ параллельный перенос ☐ симметрия относительно точки ☐ симметрия относительно оси ☐ все названные движения Точка A(−3;−8;−8) в центральной симметрии относительно центра C переходит в точку B(1;4;1). Определи координаты точки C .	Дан правильный тетраэдр DABC.  1. С помощью каких движений вершины (ACD) переходят соответственно в вершины A,C,B,D? ☐ ни одно из названных движений ☐ параллельный перенос ☐ симметрия относительно точки ☐ симметрия относительно оси ☐ все названные движения ☐ симметрия относительно плоскости 2. С помощью каких движений все точки грани (ACD) переходят в точки этой же грани (грань отображается на себя)? ☐ симметрия относительно точки ☐ симметрия относительно оси ☐ все названные движения ☐ симметрия относительно плоскости ☐ параллельный перенос ☐ ни одно из названных движений Точка A(−2;9;1) в центральной симметрии относительно центра C переходит в точку B(1;−3;−1). Определи координаты точки C .									
Раздел 3. «Вероятность и статистика»											
Тема 3. 3 Статистика	Практическая работа Анализ, обработка и графическое предоставление данных Цели занятия: показать степень усвоения знаний и сформированности умений при нахождении числовых характеристик случайных величин, построении графического изображения по заданной выборке. Порядок выполнения работы 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. <table><tr><td>X</td><td>8</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,4</td></tr></table>	X	8	4	6	5	p	0,1	0,3	0,2	0,4
X	8	4	6	5							
p	0,1	0,3	0,2	0,4							

	Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. 2. Используя данные таблицы задания №1, найти: 1) математическое ожидание $M(X)$; 2) дисперсию $D(X)$; 3) среднее квадратическое отклонение σ. 3. Выборка задана в виде распределения частот: <table border="1"><tr><td>x_i</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td><td>13</td><td>15</td><td>18</td></tr><tr><td>p_i</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>14</td><td>10</td><td>9</td></tr></table> Построить полигон частот по данному распределению выборки. Найти распределение относительных частот. 4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки: <table border="1"><tr><td>x_i</td><td>7</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>17</td><td>20</td></tr><tr><td>p_i</td><td>10</td><td>12</td><td>18</td><td>30</td><td>10</td><td>20</td></tr></table> 5. Отмечая время (с точностью до минут), которое токари бригады затратили на обработку одной детали, получили такой ряд данных: 39, 32, 32, 38, 36, 31, 32, 38, 35, 36, 32, 40, 42, 36, 33, 35, 32, 40, 38, 30, 34, 31, 32, 35, 37, 31, 36. Составить таблицу распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины. Найдите размах, моду, медиану и среднее значение для данного ряда (среднее значение округлите до целых) Критерии оценки: «3» - любые три задания «4» - любые четыре задания «5» - все задания							x_i	3	5	8	13	15	18	p_i	4	6	7	14	10	9	x_i	7	9	12	15	17	20	p_i	10	12	18	30	10	20
x_i	3	5	8	13	15	18																													
p_i	4	6	7	14	10	9																													
x_i	7	9	12	15	17	20																													
p_i	10	12	18	30	10	20																													

Оценочное средство 1.5 для проведения текущего контроля по индивидуальному проекту

Индивидуальный проект представляет собой особую форму организации деятельности обучающихся (учебное исследование или учебный проект), является обязательным компонентом всех учебных планов. Индивидуальный проект и подготовка презентации выполняется обучающимся самостоятельно под руководством преподавателя по выбранной теме с учетом получаемой специальности.

ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРОЕКТОВ

1. Математика в будущей специальности.
2. Применение сложных процентов в экономических расчетах.
3. Матричная алгебра в экономике.
4. Финансовая математика.

5. Средние значения и их применение в статистике.
6. Математика - основа бухгалтерского учёта.
7. Сложные проценты в реальной жизни.
8. Бухгалтерский учет как функция управления
9. Профессия бухгалтер (Разработка теста)
10. Я в профессии бухгалтер (Составление эссе)
11. История развития бухгалтерского учета
12. Становление и развитие учета в России
13. Современное представление о бухгалтерском учете
14. Трудовые функции и трудовые действия бухгалтера в соответствии с Профессиональными стандартами бухгалтера
15. Современное и будущее состояние профессии бухгалтера
16. Документы в бухгалтерском учете
17. Оформление и обработка бухгалтерских документов
18. Счета бухгалтерского учета. Двойная запись на счетах
19. Составление бухгалтерского баланса малого предприятия (бизнес-план)
20. Организация предпринимательской деятельности. Проблемы ее реализации на современном этапе развития.
21. Роль малого бизнеса в развитии экономики РФ (региона, муниципального образования).
22. Исправление ошибок в бухгалтерском учете
23. Организация бухгалтерского учета на предприятии
24. Особенности бухгалтерского учета в зарубежных странах
25. Кредиты и проценты в жизни современного человека.
26. Проценты и банковские расчеты.
27. Проценты и кредит
28. Деньги любят счет, или элементы финансовой математики (проценты, кредиты, вклады).
29. Разработка личной финансовой стратегии
30. Сравнительный анализ технологий Интернет-торговли.
31. Тема, предложенная студентом.

Структура индивидуального проекта и требования к его содержанию

Структура	Требования к содержанию
Титульный лист	<i>Содержит:</i> – наименование учебного заведения, где выполнена работа; – специальность; – тему проектной работы; – учебную группу; – фамилию, имя и отчество обучающегося; – фамилию, имя и отчество руководителя проекта; – город и год.
Оглавление	<i>Включает:</i> – наименование всех глав, разделов с указанием номеров страниц, на которых размещается материал.
Введение (вступление)	<i>Содержит:</i> – мотивируется выбор темы;

(рекомендуемый объем от одной до двух страниц)	– определяется ее актуальность (теоретическое и практическое значение); – формулируются цель и задачи; – определяется объект и предмет исследования; – возможно, выдвигается гипотеза; – определяются методы; – обосновывается практическая значимость и новизна
Основная часть (не более 10-15 страниц)	Состоит из глав (разделов), в которых содержится материал по конкретно исследуемой теме. Проект должен содержать ссылки на авторов и используемые источники литературы. <i>В основной части:</i> – излагается история вопроса, темы; – дается обзор изученной литературы по избранной теме; – представляется исследовательский материал, если планируется исследование; – дается краткое технологии создания, описание продукта; – при необходимости приводится экономическое обоснование
Заключение (объем 1-2 страницы)	<i>Содержит:</i> – обобщенное (суммарное) изложение идей, выявленных в результате осуществленного исследования, отмечается их новизна, выделяется то новое, что обнаружено; – приводятся основные выводы по результатам выполненной работы, которые должны состоять из нескольких пунктов, подводящих итог выполненного проекта.
Список используемых источников (не менее 5-8 источников)	Перечень используемых источников должен располагаться в алфавитном порядке и содержать не менее 4 книг, учебных пособия для студентов.
Приложения	Содержит иллюстрации, фото, схемы

Требования к написанию и оформлению индивидуального проекта

1. Текст работы должен быть структурирован и оформлен в соответствии с существующими требованиями:

- формат листа - А4;
- межстрочный интервал – 1,5;
- размер шрифта - 14 (Times New Roman);
- поля: левое – 3,0 см.; правое – 1,0 см.; нижнее, верхнее – 2 см;
- ориентация страницы – книжная;
- выравнивание – по ширине, авто-перенос, абзацный отступ – 1,25 см;
- нумерация страниц по центру внизу (колонтитулы).

2. В работе должна быть соблюдена логическая последовательность изложения материала, обеспечена орфографическая, синтаксическая, стилистическая грамотность, прослеживаться научность и литературность языка. Текст теоретической части должен быть написан в неопределенном наклонении («рассматривается», «определяется» и т.п.). Проект должен содержать наглядный материал (рисунки, таблицы, диаграммы и т.п.).

3. Порядок оформления библиографического описания источника: фамилия автора и его инициалы - название статьи или монографии - если статья, то название сборника - место издания - издательство - год издания работы - если

статья или реферат, то начальная и последняя страницы публикации, если монография, то количество страниц.

Примеры:

Книга: Налимов В.В. В поисках иных смыслов. - М.: Прогресс, 1993. - 280 с.

Статья в журнале: Урысон Е.В. Фундаментальные способности человека и наивная «анатомия» // Вопр. языкозн. 1995. № 3. - С. 3-16.

Статья из сборника: Лакофф Дж. Когнитивная семантика // Язык и интеллект: Сб./ Пер. с англ. и нем. - М.: Прогресс, 1995. - С. 143-184.

Порядок расположения источников:

- книги и статьи по алфавиту, учебники, монографии;
- газетные и журнальные публикации;
- Интернет-сайты. (Название статьи [сайт]. – Режим доступа: адрес)

Общим требованием ко всем работам является необходимость соблюдения норм и правил цитирования, ссылок на различные источники.

Подготовка презентации к защите индивидуального проекта

Презентация индивидуального проекта представляет собой документ, отображающий графическую информацию, содержащуюся в проекте, достигнутые автором работы результаты и предложения по совершенствованию исследуемого предмета. Презентация индивидуального проекта содержит основные положения для защиты, графические материалы: диаграммы, рисунки, таблицы, карты, чертежи, схемы, алгоритмы и т.п., которые иллюстрируют предмет защиты проекта.

Для того чтобы лучше и полнее донести свои идеи до тех, кто будет рассматривать результаты исследовательской работы, надо подготовить текст выступления. Он должен быть кратким, и его лучше всего составить по такой схеме:

- 1) почему избрана эта тема;
- 2) какой была цель исследования;
- 3) какие ставились задачи;
- 4) какие гипотезы проверялись;
- 5) какие использовались методы и средства исследования;
- 6) каким был план исследования;
- 7) какие результаты были получены;
- 8) какие выводы сделаны по итогам исследования;
- 9) что можно исследовать в дальнейшем в этом направлении.

Презентация (электронная) для защиты индивидуального проекта служит для убедительности и наглядности материала, выносимого на защиту.

Основное содержание презентации:

1 слайд - титульный

Титульная страница необходима, чтобы представить аудитории автора и тему его работы. На данном слайде указывается следующая информация:

- полное название колледжа;
- тема индивидуального проекта;
- ФИО обучающегося;
- номер группы обучающегося;
- ФИО руководителя индивидуального проекта;

- год выполнения работы;

2-3 слайды - ВВЕДЕНИЕ

Должно содержать обязательные элементы индивидуального проекта:

- Актуальность;
- Проблема;
- Цели и задачи проекта;
- Объект проекта;
- Предмет проекта;
- Гипотеза (при необходимости);
- Методы исследования;
- Новизна;
- Теоретическая и практическая значимость.

4-8 слайды (основная часть) - непосредственно раскрывается тема работы на основе собранного материала, дается краткий обзор объекта исследования, характеристика основных вопросов индивидуального проекта (таблицы, графики, рисунки, диаграммы).

9-10 слайды (ВЫВОДЫ)

- итоги проделанной работы
- основные результаты в виде нескольких пунктов
- обобщение результатов, формулировка предложений по их устранению или совершенствованию.

Количество слайдов может быть изменено по согласованию с руководителем.

Для выступления основных положений индивидуального проекта, обоснования выводов и предложений отводится не более 15 минут. После выступления обучающийся отвечает на заданные вопросы по теме.

Критерии оценки оценочного средства 1.15 для проведения текущего контроля по результатам выполнения индивидуального проекта

Критерии оценки индивидуального проекта:

Защита реализованного проекта происходит на последнем занятии по Математике в конце второго семестра до начала промежуточной аттестации.

После просмотра и одобрения индивидуального проекта руководитель его подписывает и составляет отзыв. В отзыве руководитель характеризует проделанную работу по всем разделам.

Подготовив индивидуальный проект к защите, обучающийся готовит выступление, наглядную информацию (схемы, таблицы, графики и другой иллюстративный материал) для использования во время защиты.

Процедура защиты индивидуальных проектов определяется руководителем проекта.

При оценивании индивидуального проекта используется оценочный лист, приведенный ниже.

Каждый критерий оценивается как 0, 1, 2 баллов:

0 баллов – признак отсутствует или выражен крайне слабо;

1 балл – признак присутствует в средней степени;

2 балла – признак присутствует в значительной степени, выражен ярко.

Максимальный балл: 20 баллов.

Результаты защиты определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии перевода зафиксированных баллов в оценочном листе в 5-балльную шкалу следующие:

Баллы	Оценка
16-20	5 (отлично)
11-15	4 (хорошо)
7-10	3 (удовлетворительно)
0-6	2 (неудовлетворительно)

Оценочный лист

ЗАЩИТА РЕАЛИЗОВАННОГО ИНДИВИДУАЛЬНОГО ПРОЕКТА

Дата _____ группа _____

№ п/п	ФИО	Тема проекта	Личностные	Регулятивные УУД		Предметные результаты и познавательные УУД				Коммуни- кативны е УУД		ККТ- компетентность	ИТОГО БАЛЛОВ
			Актуальность темы	Формулировка цели и задач проекта в соответствии с темой проекта	Выбор средств и методов, адекватных поставленным целям	Раскрытие темы и идеи проекта через содержание	Соответствие вывода проекта поставленной цели	Качество проектного продукта	Соответствие текста проекта нормам русского литературного языка	Умение ясно изложить суть	Умение аргументировано ответить на вопросы	Качество материала (презентация)	
1.													
2.													
3.													
4.													

3. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ

3.1 Примерные задания для подготовки к экзамену:

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГТУ», ВГТУ)

УТВЕРЖДАЮ

Директор строительного-политехнического
колледжа

_____/_____
«__» _____ 202__ г.

ОБРАЗЕЦ №1
ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА
по учебному предмету УП.04 Математика
(1 семестр)

Часть А (Обязательная часть)

№	ЗАДАНИЕ	БАЛЛЫ
1	Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[40]{2} \cdot \sqrt[24]{2}}{\sqrt[15]{2}}$.	1
2	Решите неравенство $\sqrt{6-5x} > -0,5$	1
3	Решите уравнение $6^{2x+4} = 36$.	1
4	Найдите значение выражения $\frac{\log_2 12,8 - \log_2 0,8}{5^{\log_{25} 16}}$.	1
5	Решите неравенство $\log_5(4x+1) < 2$.	1
6	Упростить: $\frac{1}{1+ctg^2\alpha} + \frac{1}{1+tg^2\alpha}$	1
7	Вычислите $ctg \frac{19\pi}{6}$	1
8	Найти $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	1
9	Решить уравнение: $ctg\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.	1
10	В правильной треугольной призме сторона основания равна 3см. Диагональ боковой грани равна 5см. Найти длину бокового ребра.	1

Часть Б (Дополнительная часть)

№	ЗАДАНИЕ	БАЛЛЫ
11	Найдите корни уравнения $\log_3 x + 4\log_9 x + 6\log_{27} x = 10$.	2
12	В прямой треугольной призме стороны основания относятся как 17:10:9, а боковое ребро равно 16см. Найти площадь полной поверхности призмы, если ее боковая поверхность равна 1152см ² .	3

Критерии оценки Оценка «5» -14 баллов Оценка «4» -11 баллов Оценка «3» - 7 баллов

Преподаватель _____
(подпись)

(Ф.И.О.)

Председатель предметной (цикловой) комиссии _____
(подпись)

(Ф.И.О.)

Рассмотрено на заседании методического совета СПК протокол №__ от «__» ____ 202__ г.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГТУ», ВГТУ)

УТВЕРЖДАЮ

Директор строительного-политехнического
колледжа

_____/_____
«__» _____ 202__ г.

ОБРАЗЕЦ №2
ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА
по учебному предмету **УП.04 Математика**
(1 семестр)

Часть А (Обязательная часть)

№	ЗАДАНИЕ	БАЛЛЫ
1	Найдите значение выражения $\frac{(11^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})^{15}}{22^9}$.	1
2	Решите уравнение $\sqrt{53 - 2x} = 5$.	1
3	Решите неравенство $250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$.	1
4	Найдите значение выражения: $\lg 200 - \lg 2$.	1
5	Решите уравнение $\log_{\frac{1}{4}}(3x - 2) = 0$.	1
6	Упростить: $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$	1
7	Вычислите $\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$	1
8	Найти $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	1
9	Решить уравнение: $2 \cos 2x = \sqrt{2}$.	1
10	В прямоугольном параллелепипеде высота равна 8дм, а стороны основания равны 7 и 24дм. Определить площадь диагонального сечения.	1

Часть Б (Дополнительная часть)

№	ЗАДАНИЕ	БАЛЛЫ
11	Решите уравнение $\sqrt{2x + 6} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{6x + 9}$.	2
12	Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 12дм и 16дм. Из вершины прямого угла C восстановлен к плоскости треугольника перпендикуляр CM = 28дм. Найти расстояние от точки M до середины гипотенузы.	3

Критерии оценки

Оценка «5» -14 баллов

Оценка «4» -11 баллов

Оценка «3» - 7 баллов

Преподаватель _____
(подпись, расшифровка подписи)

(Ф.И.О.)

Председатель предметной (цикловой) комиссии _____
(подпись)

(Ф.И.О.)

Рассмотрено на заседании методического совета СПК протокол №__ от «__» ____ 202__ г.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГТУ», ВГТУ)

УТВЕРЖДАЮ

Директор строительного-политехнического
колледжа

_____ / _____

«__» _____ 202__ г.

ОБРАЗЕЦ №3
ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА
по учебному предмету УП.04 Математика
(2 семестр)

Часть А (Обязательная часть)

№	ЗАДАНИЕ	БАЛЛЫ
1	Найти производную функции: $y = 4\cos x + 5x^4 - 9$.	1
2	Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=3x^2-4x+6$ в точке с абсциссой $x_0=2$.	1
3	Исследовать функцию на монотонность $y=-3x^2+2x-6$	1
4	Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 2x^3 dx$	1
5	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=2x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$	1
6	Скорость движения материальной точки меняется по закону $v=3t^2+2t-5$. Найти закон движения.	1
7	Найти объем цилиндра, радиус основания которого равен 15 дм, а высота равна 8 дм.	1
8	Вычислить координаты вектора $2\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (4; -2; 6)$, $\vec{b} = (2; 1; 0)$	1
9	Вычислить $\frac{7!-5!}{5!}$	1
10	Студент при подготовке к экзамену выучил 50 вопросов из 80. Какова вероятность того, что ему достанется вопрос, который он знает.	1

Часть Б (Дополнительная часть)

№	ЗАДАНИЕ	БАЛЛЫ
11	Найти $\int \frac{2x dx}{3-4x^2}$.	2
12	В правильной треугольной пирамиде ребро в основании равно 10 см, а апофема 16 см. Вычислить объем пирамиды.	3

Критерии оценки

Оценка «5» -14 баллов

Оценка «4» -11 баллов

Оценка «3» - 7 баллов

Преподаватель _____
(подпись)

(Ф.И.О.)

Председатель предметной (цикловой) комиссии _____
(подпись)

(Ф.И.О.)

Рассмотрено на заседании методического совета СПК протокол №__ от «__» ____ 202__ г.

3.2 Процедура проведения экзамена:

На выполнение письменной экзаменационной работы по математике дается 2 академических часа (90 мин).

Экзаменационный билет состоит из двух частей: обязательной и дополнительной.

Обязательная часть содержит задания минимального обязательного уровня, дополнительная часть – более сложные задания.

При выполнении заданий обязательной части требуется представить ход решения и указать полученный ответ. За правильное выполнение любого задания из обязательной части обучающийся получает один балл. При выполнении задания из дополнительной части необходимо подробно описать ход решения и дать ответ. Правильное выполнение заданий дополнительной части оценивается 2, 3 баллами или 1, 2 баллами за частичное решение.

Баллы, полученные за все выполненные задания, суммируются.

3.3 Критерии оценки по результатам освоения учебного предмета УП.04 Математика

Шкала перевода баллов в отметки по пятибалльной системе

Отметка	Число баллов, необходимое для получения отметки
«3» (удовл)	7-10
«4» (хорошо)	11-13 (не менее одного задания из дополнительной части)
«5» (отлично)	более 14

Оценка письменных работ

Ответ оценивается **отметкой «5»**, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущено более одной ошибки или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Общая классификация ошибок

Грубыми считаются ошибки:

- незнание определения основных понятий, законов, правил, основных положений теории, незнание формул, общепринятых символов обозначений величин, единиц их измерения;
- незнание наименований единиц измерения;
- неумение выделить в ответе главное;
- неумение применять знания, алгоритмы для решения задач;
- неумение делать выводы и обобщения;
- неумение читать и строить графики;
- потеря корня или сохранение постороннего корня;
- отбрасывание без объяснений одного из них;
- равнозначные им ошибки;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской;
- логические ошибки.

К негрубым ошибкам следует отнести:

- неточность формулировок, определений, понятий, теорий, вызванная неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия или заменой одного - двух из этих признаков второстепенными;
- неточность графика;
- нерациональный метод решения задачи или недостаточно продуманный план ответа (нарушение логики, подмена отдельных основных вопросов второстепенными);
- нерациональные методы работы со справочной и другой литературой;
- неумение решать задачи, выполнять задания в общем виде.

Недочетами являются:

- нерациональные приемы вычислений и преобразований;
- небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков.

4. ОСОБЕННОСТИ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В ходе текущего контроля осуществляется индивидуальное общение преподавателя с обучающимся. При наличии трудностей и (или) ошибок у обучающегося преподаватель в ходе текущего контроля дублирует объяснение нового материала с учетом особенностей восприятия обучающимся содержания материала практики.

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации обеспечивается соблюдение следующих требований:

- для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья текущий контроль и промежуточная аттестация проводится с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (далее - индивидуальные особенности).

- проведение мероприятий по текущему контролю и промежуточной аттестации для лиц с ограниченными возможностями здоровья в одной аудитории совместно с обучающимися, не имеющими ограниченных возможностей здоровья, допускается, если это не создает трудностей для обучающихся;

- присутствие в аудитории ассистента, оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь с учетом их индивидуальных особенностей (занять рабочее место, понять и оформить задание, общаться с преподавателем); предоставление обучающимся при необходимости услуги с использованием русского жестового языка, включая обеспечение допуска на объект сурдопереводчика, тифлопереводчика (в организации должен быть такой специалист в штате (если это востребованная услуга) или договор с организациями системы социальной защиты по предоставлению таких услуг в случае необходимости);

- предоставление обучающимся права выбора последовательности выполнения задания и увеличение времени выполнения задания (по согласованию с преподавателем); по желанию обучающегося устный ответ при контроле знаний может проводиться в письменной форме или наоборот, письменный ответ заменен устным.

Разработчики:

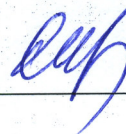
ФГБОУ ВО «ВГТУ», преподаватель высшей
категории



И.В. Позднякова

Руководитель образовательной программы

ФГБОУ ВО «ВГТУ», старший преподаватель
кафедры экономической безопасности



Ю.А. Савич