

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»**

Л.В. Стенюхин М.Е. Семенов Н.Н. Некрасова

**ПРАКТИКУМ ПО УРАВНЕНИЯМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 53:517(075)

ББК 22.311я7

С 793

Рецензенты:

*кафедра математического моделирования
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор В.А. Костин);
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой теоретической и
прикладной механики ВГТУ В.А. Козлов*

Стенюхин, Л.В.

Практикум по уравнениям математической физики:
С793 учеб. пособие / Л.В. Стенюхин, М.Е. Семенов, Н.Н.
Некрасова. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический университет», 2018. – 80 с.

ISBN

Предлагаемое учебное пособие содержит избранные главы курса «Уравнения математической физики», который необходим магистрантам всех направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математическое моделирование». В пособии приведены варианты расчетно-графических работ с примерами решения типовых задач.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по дисциплине «Математическое моделирование» и предназначено для магистров и научных работников строительных специальностей ВГТУ.

Ил. 9. Библиогр.: 16 назв.

УДК 53:517(075)

ББК 22.311я7

ISBN

© Стенюхин Л.В., Семенов М.Е.,
Некрасова Н.Н., 2018

© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2018

ВВЕДЕНИЕ

Современному инженеру-специалисту для решения различных задач теоретического и прикладного характера необходимо знать и применять на практике основные понятия и методы математической физики. Уравнения математической физики – довольно сложный, с очень высокой степенью обобщенности и абстракции раздел математики, для изучения которого требуются знания многих других разделов, таких как обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы, теория поля и т.д. Например, задачи о распространении волн в средах, распространении тепла в стержне возникают в строительстве, производстве строительных материалов и изделий, теплотехнике и многих других отраслях инженерии.

Учебное пособие предназначено для магистров всех направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математическое моделирование».

Содержание пособия представлено в виде шести глав. Первая глава имеет общий характер и посвящена дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка, которые чаще всего встречаются в различных приложениях. Приведены классификация уравнений и преобразование их к каноническому виду. В других главах настоящего учебного пособия содержатся основные понятия и методика решения одномерного волнового уравнения, двумерного волнового уравнения, двумерного уравнения Лапласа на прямоугольнике, одномерного уравнения теплопроводности. Подробно описаны методы Фурье и д'Аламбера. Приводятся теоретический материал и примеры решения задач. В заключение предлагаются варианты заданий для расчётно-графических работ.

Предназначено для студентов, аспирантов, магистрантов и научных работников строительных специальностей ВГТУ.

Все приведенные в пособии иллюстрации – авторские.

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными

На более ранних стадиях изучения курса математики обычно рассматриваются так называемые обыкновенные дифференциальные уравнения – уравнения, содержащие неизвестную функцию *одной* независимой переменной, её производные различных порядков по этой переменной и саму независимую переменную. Решениями этих уравнений являются конкретные функции также одной переменной, обращающие данные уравнения в тождество. Так, например, уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $y(x)$ имеет вид $F(x, y, y', y'') = 0$, общий интеграл, которого запишется в виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Однако, как известно, множество всех функций не исчерпывается только функциями одной переменной. Помимо них существуют еще и функции нескольких независимых переменных. Для функций нескольких независимых переменных также в математике существуют дифференциальные уравнения. Это уравнения, содержащие неизвестную функцию *нескольких* переменных, её *частные* производные различных порядков по различным переменным (включая смешанные) и сами независимые переменные. Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями в частных производных*. К ним сводятся многие задачи математики, физики, аэро- и гидродинамики и задачи других наук.

Определение. Уравнение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, её аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$ и её частные производные по этим аргументам, называется *дифференциальным уравнением в частных производных* (ДУЧП).

В общем случае ДУЧП имеет вид:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \quad (1.1)$$

где F – заданная функция своих аргументов.

Определение. Решением дифференциального уравнения в частных производных называется всякая функция, которая, будучи подставлена вместо $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в уравнение (1.1), обращает его в тождество по независимым переменным.

Определение. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1.1), называется порядком дифференциального уравнения в частных производных.

Определение. Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным, если неизвестная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и все её частные производные всех порядков входят в уравнение в первой степени, и если оно не содержит членов с произведениями упомянутых выше величин.

Например, для случая двух независимых переменных x_1 и x_2 в общем случае линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка имеет вид:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + c u = g(x_1, x_2), \quad (1.2)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ – известные коэффициенты (в общем случае зависящие от x_1 и x_2); $g(x_1, x_2)$ – заданная функция, называемая правой частью уравнения, зависящая от x_1 и x_2 .

Задача интегрирования уравнения с частными производными состоит в том, чтобы найти все решения данного уравнения.

Если $g(x_1, x_2) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Пример 1.1. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial x} - 5xy = 0$ относительно неизвестной функции $u(x, y)$.

Решение. Перенесем второе слагаемое в правую часть и

проинтегрируем уравнение по переменной x , считая y константой. В результате получим:

$$u(x, y) = \frac{5}{2} x^2 y + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y .

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что найденная функция удовлетворяет уравнению, то есть является его решением.

Пример 1.2. Найдите общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$

и проинтегрируем по переменной x . Поскольку y при этом считается постоянной величиной, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y . Его общее решение будет иметь вид:

$$u(x, y) = \int \varphi(y) dy + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ – произвольная функция переменной x . Так как $\varphi(y)$ – произвольная функция, то интеграл от нее является произвольной функцией переменной y . Следовательно, решение уравнения определяется двумя произвольными функциями, одна из которых зависит от x , а другая – от y .

Таким образом, решение дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, а решение уравнения с частными производными – произвольные функции.

Напомним, что через произвольные постоянные общего решения обыкновенного дифференциального уравнения находят его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решение задачи Коши). Наличие произвольных функций в решении уравнения с частными производными также используется для нахождения частного решения этого уравнения, удовлетворяющего некоторым

условиям, которые называются краевыми условиями. К ним относятся начальные условия, описывающие состояние системы в начальный момент времени, и граничные условия, которым должна удовлетворять искомая функция. Краевые условия определяются всегда исходя из физических условий задачи.

Далее рассматриваются лишь некоторые основные вопросы, которые касаются решения отдельных видов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, наиболее часто встречающиеся на практике.

Нами не ставится задача изучения вообще способов решения дифференциальных уравнений в частных производных. Мы рассмотрим только некоторые из уравнений, которые являются важными для физики, механики и техники и поэтому называются *уравнениями математической физики*. Все рассматриваемые нами уравнения математической физики будут линейными и однородными и будут иметь второй порядок.

Замечание. Так как физические процессы рассматриваются в пространстве и во времени, то обычно в уравнениях математической физики переменная, соответствующая времени, обозначается буквой t , а пространственные переменные – x, y, z вместо $x_1, x_2, \dots$ и т. д. При записи уравнений математической физики для сокращения и удобства записи в дальнейшем будем использовать обозначения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = u_{x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} = u_{y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt} = u_{t^2} = \ddot{u}.$$

Аналогичные обозначения используются для обозначения частных производных первого порядка.

1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Если все коэффициенты уравнения (1.2) постоянны, то уравнение называется линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (1.3)$$

допускающего обратное преобразование, можно получить новое уравнение, эквивалентное уравнению (1.2). Преобразование будет иметь смысл, если в результате его уравнение примет более простую форму.

Используя правило дифференцирования сложной функции двух переменных, выразим производные уравнения (1.2) через новые переменные, получим:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, & u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y; \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}; \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}; \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в уравнение (1.2), будем иметь:

$$\overline{a_{11}} u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}} u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}} u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{a_{11}} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2, \\ \overline{a_{12}} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + a_{22} \xi_y \eta_y, \\ \overline{a_{22}} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\overline{F}$ не зависит от вторых производных.

Поставим задачу: выбрать ξ и η так, чтобы в уравнении (1.4) коэффициенты $\overline{a_{11}}$ и $\overline{a_{22}}$ обратились в нуль. Для этого, как следует из выражений для этих коэффициентов, требуется найти решение уравнения с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \quad (1.5)$$

Вопрос о решении уравнения (1.5) решает следующая теорема.

Теорема. Функция $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (1.5) тогда и только тогда, когда соотношение $\varphi(x, y) = c$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.6)$$

Докажем прямое утверждение. Пусть функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5).

Подставляя в уравнение (1.6) эту функцию, перепишем его в виде

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0. \quad (1.7)$$

Пусть функция y определена неявным соотношением $\varphi(x, y) = c$. Используя правило дифференцирования неявных функций одной переменной, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_x}{\varphi_y}$. Тогда уравнение (1.7) примет вид:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

Из чего, очевидно, следует, что функция y удовлетворяет уравнению (1.6), а значит, $\varphi(x, y) = c$ – общий интеграл этого уравнения. Что и требовалось доказать.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Уравнение (1.6) называется *характеристическим* для уравнения (1.2), а его интегралы – *характеристическими*.

Решая уравнение (1.6) как квадратное относительно $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.8)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1.2):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ – гиперболический тип;

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ – эллиптический тип;

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ – параболический тип.

Если в некоторой области выражение $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ меняет знак, то уравнение (1.2) называется уравнением смешанного типа в этой области.

Пример 1.3. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u'_y = 0.$$

Решение. Здесь $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = y$ и $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$, т.е. если $y < 0$, то уравнение гиперболического типа, если $y > 0$ – эллиптического типа.

Приведем наиболее типичные для каждого типа **основные однородные уравнения математической физики**

1. Гиперболический тип: *волновое уравнение*, описывающее малые поперечные колебания струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{– одномерное;}$$

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{– двумерное;}$$

$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ – трёхмерное, где $a^2 = \text{const}$ (скорость звука).

2. Эллиптический тип: *уравнение Пуассона*:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3. Если $f(x, y) \equiv 0$, то уравнение называется *уравнением Лапласа* и определяет гармоническую функцию $u(x, y)$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - \text{двумерное};$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad - \text{трёхмерное}.$$

4. Параболический тип: *уравнение теплопроводности*:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (a > 0) \quad - \text{одномерное};$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad - \text{двумерное};$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad - \text{трёхмерное}, \quad \text{где } a^2 = \text{const}.$$

Каждое из приведенных выше уравнений имеет бесчисленное множество решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех решений уравнения, соответствующего рассматриваемому физическому процессу, выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из физического смысла задачи.

1.3. Постановка задач для уравнений математической физики. Начальные и краевые условия

Каждое из уравнений с частными производными имеет, как мы уже убедились, бесчисленное множество решений. При решении конкретной физической задачи (или технической, или любой другой

задачи, для которой математическое моделирование приводит к исследованию уравнения с частными производными) необходимо из множества решений выделить то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Эти условия обеспечивают однозначность интересующего нас явления, процесса и т.д. и вытекают из физического смысла задачи. Поэтому при постановке задачи вместе с уравнением, которому удовлетворяет искомая функция, необходимо указать дополнительные условия, обеспечивающие существование и единственность решения. В разных задачах эти дополнительные условия могут быть различными, но в большинстве случаев они имеют вид *начальных* и *граничных (краевых)* условий.

Начальные условия – это дополнительные условия, которые должны удовлетворяться в фиксированный (начальный) момент времени. Эти условия описывают начальное состояние изучаемого явления, процесса.

Граничные условия – это дополнительные требования к решению, которые должны выполняться на границе среды в течение всего времени протекания процесса. Граничные условия описывают тип и характер взаимодействия изучаемого объекта с внешней средой.

Например, для одномерного однородного волнового уравнения

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, описывающего малые поперечные колебания закрепленной на концах струны, нужно указать отклонение u и скорость движения $\frac{\partial u}{\partial t}$ в начальный момент времени $t_0 = 0$, то есть

$$u(x,t)|_{t=0} = u(x,0) = f(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $f(x)$, $\varphi(x)$ – заданные функции. Так как струна закреплена на концах, то в любой момент времени отклонения в сечениях струны с абсциссами $x = 0$ и $x = l$ отсутствуют. Таким образом, граничные условия в этом случае имеют вид

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

Начальные и граничные условия на практике являются результатом измерений, поэтому неизбежны погрешности в их определении. Эти погрешности влияют на погрешность решений. Может оказаться, что малые ошибки при задании начальных или граничных условий приводят к большим ошибкам в решении. Возникает вопрос, каков физический смысл решения?

Поэтому для однозначной физической интерпретации решение должно непрерывно зависеть от исходных данных. Это значит, что «малые» изменения в исходных данных задачи должны приводить к «малым» изменениям в решении. Другими словами, решение должно быть устойчиво по отношению к малым изменениям в исходных данных.

Таким образом, при постановке задачи математической физики необходимо:

- 1) составить уравнение в частных производных;
- 2) указать начальные и граничные условия. Если решение задачи существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных, то задача математической физики называется **корректно** поставленной. В противном случае задача называется **некорректно** поставленной.

Основные типы задач математической физики

В соответствии с типом дополнительных условий задачи математической физики обычно делят на три основных типа:

1. *Задача Коши (задача начальных условий)*. В ней требуется отыскать решение данного ДУЧП, удовлетворяющее начальным условиям, задающим значения функции (и её производной по времени, если требуется) в начальный момент, т.е. при $t = 0$.

2. *Граничная задача*. В ней требуется в некоторой области отыскать решение данного ДУЧП, удовлетворяющее заданным условиям на границе этой области.

3. *Краевая или смешанная задача*. В ней требуется в некоторой области отыскать решение данного ДУЧП, удовлетворяющее некоторым начальным и некоторым граничным условиям.

Замечание. Также часто граничную задачу называют краевой. В этом случае краевую задачу обязательно называют смешанной или начально-краевой.

ГЛАВА 2. ОДНОМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим пример составления одного из классических уравнений математической физики – волнового уравнения. Пользуясь основными законами сохранения, рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны.

Допустим, что начальное положение струны длины l совпадает с осью OX , левый конец ее помещен в начало координат и колебания проходят в вертикальной плоскости Oxy . Пусть в силу тех или иных причин струна выведена из положения равновесия (рис. 2.1, а). Струна при этом изменит свою форму: каждая ее точка испытывает некоторое смещение. Затем струна начнет колебаться. Для определения положения струны в момент времени $t > 0$ нужно в этот момент указать величину смещения $u(x, t)$ каждой ее точки $x \in [0, l]$ (рис. 2.1, б). Итак, весь процесс колебания струны полностью описывается вещественной функцией двух переменных $u = u(t, x)$.

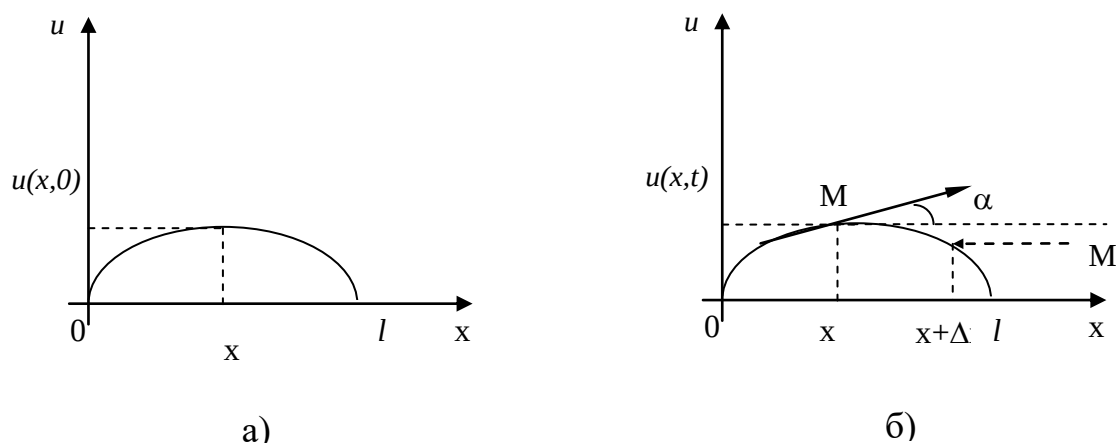


Рис. 2.1. Поперечные колебания струны

Будем представлять струну как гибкую упругую нить, на которую не действуют внешние силы. С математической точки зрения гибкость заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю (рис. 2.1, б). Кроме того, станем рассматривать малые

колебания струны и пренебрегать квадратом величины $\frac{\partial u}{\partial x}$. В этом случае, как известно из механики, величина натяжения T в каждой точке M струны одинакова и не зависит от времени, причем проекция T_x и T_u натяжения $\bar{T}$ на оси OX и Ou равны соответственно:

$$T_x = T \cos \alpha \approx T, \quad T_u = T \sin \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha = T \frac{\partial u}{\partial x},$$

где α – угол касательной к мгновенному профилю струны в точке M (рис. 2.1, б).

Для вывода уравнения поперечных колебаний струны воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка $\overset{\cup}{MM'}$ по оси Ou в момент времени t равна

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) \cdot \rho(\xi) d\xi,$$

а изменение количества движения за промежуток времени Δt есть

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t + \Delta t) - \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) \right] d\xi.$$

Приравниваем изменение количества движения за промежуток времени Δt к импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

в точках $x + \Delta x$ и x . В результате получим уравнение поперечных колебаний струны в интегральной форме:

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t + \Delta t) - \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) \right] d\xi = \int_t^{t+\Delta t} T \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \right] d\tau. \quad (2.1)$$

Станем рассматривать только такие значения u поставленной задачи, которые представляют собой функции, непрерывные вместе со своими частными производными на полосе $[0, l] \times [0, \infty)$ и имеющие внутри этой полосы вторые частные производные. Тогда после применения теоремы о среднем формула (2.1) примет вид:

$$\rho(x_1) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t + \Delta t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) \right] \Delta x = T \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right] \Delta t,$$

где $x_1 \in [x, x + \Delta x]$, $t_1 \in [t, t + \Delta t]$, а после применения теоремы Лагранжа:

$$\rho(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t_2) \Delta t \Delta x = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_2, t_2) \Delta x \Delta t, \quad (2.2)$$

где $x_2 \in [x, x + \Delta x]$, $t_2 \in [t, t + \Delta t]$. Сократив обе части равенства (2.2) на $\Delta t \Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

то есть искомая функция u должна быть решением однородного линейного уравнения с частными производными 2-го порядка:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.3)$$

В случае постоянной плотности ρ этому уравнению обычно придают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если на струну действует сила, плотность которой, рассчитанная на единицу массы, равна f , то процесс колебаний описывается неоднородным линейным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (2.4)$$

Полученные уравнения (2.3) и (2.4) называются *простейшими уравнениями колебаний струны*. Они, очевидно, принадлежат гиперболическому типу в каждой точке множества $]0, l[\times]0, \infty[$.

К уравнениям этого типа приводят еще две аналогичные задачи теории колебаний. Процесс колебаний *плоской мембраны* описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (2.5)$$

а процесс распространения *звуковых волн* – уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t). \quad (2.6)$$

Уравнение колебаний струны (2.3) получено при условии выполнения ряда допущений механического и геометрического характера. Подобное положение имеет место и при выводе других уравнений математической физики. Подчеркнем, что дифференциальные уравнения в частных производных, получающиеся в результате подобной и неизбежной во многих случаях идеализации реального процесса, хорошо описывают этот процесс лишь при определенных и достаточно жестких условиях. Отказываясь от выполнения этих условий, мы приходим к сложным нелинейным уравнениям в частных производных, для которых отсутствуют общие методы решения.

2.1. Решение задачи Коши для однородного одномерного волнового уравнения методом д’Аламбера

Рассмотрим задачу о малых поперечных свободных колебаниях так называемой бесконечной струны. Конечно, в природе бесконечных струн не существует, но в случае очень длинных струн можно допустить такую идеализацию. Струну будем считать однородной.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний струны имеет вид однородного одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0). \quad (2.7)$$

Если струна достаточно длинная, смещение изучается далеко от концов и времени прошло немного, то граничные условия не влияют на колебания, и ими можно пренебречь. В этом случае в качестве дополнительных условий могут служить начальные условия

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x), \quad (2.8)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ – заданные при всех значениях x функции.

Математически эта задача формулируется так: найти решение уравнения (2.7), удовлетворяющее начальным условиям (2.8). Это типичная задача начальных условий, или задача Коши.

Чтобы найти решение поставленной задачи, введем новые так называемые характеристические переменные ξ и η с помощью формул:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (2.9)$$

Преобразуем (2.7) к новым переменным ξ и η . По правилу дифференцирования сложных функций, считая, что

$$u(x, t) = u(\xi(x, t), \eta(x, t)),$$

Найдём:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \cdot (x - at)_x + u_\eta \cdot (x + at)_x = u_\xi + u_\eta;$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi \cdot (x - at)_t + u_\eta \cdot (x + at)_t = a \cdot (u_\eta - u_\xi);$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_\xi + u_\eta)_x = (u_\xi)_x + (u_\eta)_x =$$

$$= (u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\xi)_\eta \eta_x + (u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\eta)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

$$u_{tt} = (u_t)_t = a \cdot (u_\eta - u_\xi)_t = a \cdot (u_\eta)_t - a \cdot (u_\xi)_t =$$

$$= a \cdot (u_\eta)_\eta \eta_t + a \cdot (u_\eta)_\xi \xi_t - a \cdot (u_\xi)_\xi \xi_t - a \cdot (u_\xi)_\eta \eta_t =$$

$$= a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

Подставив найденные вторые производные, легко убедиться, что

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = -4a^2 u_{\xi\eta},$$

и тогда уравнение (2.7) сводится к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$. Переписав

его в виде $(u_\eta)_\xi = 0$, мы заключаем, что u_η не зависит от ξ и, значит, является функцией только от η :

$$u_\eta = H(\eta). \quad (2.10)$$

Далее, интегрируя (2.10), получаем

$$u = \int H(\eta) d\eta + H_1(\xi) = H_1(\xi) + H_2(\eta), \quad (2.11)$$

где $H_2(\eta) = \int H(\eta) d\eta$, а $H_1(\xi)$ – произвольная функция от ξ , играющая при этом интегрировании роль произвольной постоянной.

Переходя в (2.11) к старым переменным x и t , получим:

$$u(x, t) = H_1(x - at) + H_2(x + at), \quad (2.12)$$

где H_1 и H_2 – произвольные функции своих аргументов.

Полученное решение уравнения свободных колебаний струны содержит две произвольные функции. Его называют *общим решением* уравнения (2.7).

Для решения поставленной задачи Коши для уравнения (2.7) в найденном общем решении (2.12) определим функции H_1 и H_2 так, чтобы это решение удовлетворяло начальным условиям (2.8).

Продифференцировав (2.12) по переменной t , получим:

$$u_t(x, t) = -a (H_1(x - at))'_{x-at} + a (H_2(x + at))'_{x+at}. \quad (2.13)$$

Удовлетворение начальным условиям приводит к равенствам

$$u(x, 0) = H_1(x) + H_2(x) = f(x), \quad (2.14)$$

$$u_t(x, 0) = -a H_1'(x) + a H_2'(x) = F(x). \quad (2.15)$$

Проинтегрируем (2.15) по отрезку $[0, x]$:

$$-H_1(x) + H_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(z) dz + C. \quad (2.16)$$

Решая уравнения (2.14), (2.16), находим:

$$\begin{cases} H_1(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(z) dz - \frac{C}{2}, \\ H_2(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(z) dz + \frac{C}{2}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Заменяя в (2.17) везде в функции H_1 аргумент на $x - at$, а в H_2 – на $x + at$, получаем:

$$\begin{cases} H_1(x - at) = \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(z) dz - \frac{C}{2}, \\ H_2(x + at) = \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(z) dz + \frac{C}{2}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Подставив (2.18) в (2.12), получим окончательную формулу:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz. \quad (2.19)$$

Формула (2.19) называется *формулой д'Аламбера*. Эта формула дает решение задачи о колебаниях бесконечной струны, описываемых одномерным волновым уравнением (2.7) при заданных начальных условиях (2.8).

2.2. Решение краевой задачи для однородного одномерного волнового уравнения методом Фурье

Рассмотрим несколько иную задачу: о смещениях точек закрепленной с обоих концов струны конечной длины l (то есть $0 \leq x \leq l$), совершающей свободные колебания с заданными начальными условиями. Другими словами найдем нетривиальное (ненулевое) решение уравнения (2.7), также как и ранее удовлетворяющее начальным условиям (2.8) и еще дополнительно граничным условиям (условиям закрепления струны на концах):

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (2.20)$$

По методу разделения переменных решение уравнения (2.7) будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в (2.7), получим:

$$X(x) \cdot \ddot{T}(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t).$$

Разделим это равенство на $a^2 X(x) \cdot T(t)$:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.22)$$

Функция, стоящая в равенстве (2.12) слева, зависит только от времени t , а функция, стоящая справа, зависит только от координаты x . Такое равенство при независимых переменных x и t возможно тогда и только тогда, когда обе эти функции равны одной и той же постоянной, которую обозначим через λ . Тогда из (2.22) следует, что

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \lambda, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

т. е. (2.22) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T}(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (2.23)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (2.24)$$

Граничные условия (2.20) дают:

$$X(0) \cdot T(t) = 0, \quad X(l) \cdot T(t) = 0,$$

а так как мы должны считать, что $T(t)$ не может тождественно равняться нулю (иначе решение было бы тривиальным), то отсюда получаем

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (2.25)$$

Предположим сначала, что в уравнениях (2.23) и (2.24) постоянная $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения (2.24) будет иметь вид:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Удовлетворение граничным условиям (2.25) приводит к системе:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Это означает, что в данном случае будет $X(x) \equiv 0$, а поэтому и $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \equiv 0$, что нам не подходит, так как стоит задача поиска нетривиальных решений.

По этим же причинам нельзя положить $\lambda = 0$.

Таким образом, в уравнениях (2.23) и (2.24) постоянная λ должна быть взята отрицательной. В этом случае обозначим $\lambda = -k^2$. Тогда эти уравнения переписутся в виде:

$$\ddot{T}(t) + c^2 k^2 T(t) = 0, \quad (2.26)$$

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0. \quad (2.27)$$

Далее найдем нетривиальные решения $X(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения (2.27), удовлетворяющие граничным условиям (2.25).

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (2.27) имеет вид

$$X(x) = C \cos kx + D \sin kx, \quad (2.28)$$

где C и D есть произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (2.25), находим:

$$X(0) = C = 0, \quad X(l) = D \sin kl = 0.$$

Во втором равенстве $D \neq 0$, так как в противном случае решение (2.28) будет тривиальным, а требуется найти нетривиальные решения задачи (2.27), (2.25). Но тогда должно выполняться равенство

$$\sin kl = 0. \quad (2.29)$$

Решая данное уравнение, получим, что $kl = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}$. Откуда

$$k = k_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.30)$$

Полученным значениям $k = k_n$ соответствуют решению

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.31)$$

где D_n – произвольная постоянная.

Каждому значению k_n соответствует единственная (с точностью до множителя D_n) функция $X_n(x)$.

При $k = k_n = \frac{\pi n}{l}$ общее решение уравнения (2.26) имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{c\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{c\pi n}{l} t,$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные. Тогда решение уравнения колебания струны, соответствующее k_n , имеет вид:

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{c\pi n}{l} t + b_n \sin \frac{c\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где введены новые произвольные постоянные: $a_n = A_n D_n$, $b_n = B_n D_n$.

Это решение удовлетворяет уравнению (2.7) и граничным условиям (2.20) при любых a_n и b_n .

В силу линейности и однородности уравнения (2.7) всякая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{c\pi n}{l} t + b_n \sin \frac{c\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.32)$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t .

Поскольку каждое слагаемое в ряде (2.32) удовлетворяет граничным условиям (2.20), то этим условиям будет удовлетворять и сумма ряда $u(x, t)$, потому что если при $x = 0$ и $x = l$ каждое слагаемое обращается в нуль, то и сумма обратится в нуль.

Подберем a_n и b_n так, чтобы получилось решение, удовлетворяющее и начальным условиям (2.8). Для этого продифференцируем ряд (2.32) по t :

$$u_t(x, t) = \frac{a\pi n}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + b_n \cos \frac{a\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.33)$$

В силу начальных условий (2.8), полагая $t = 0$ в (2.32) и (2.33), получим:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n b_n}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.34)$$

Формулы (2.34) можно рассматривать как разложение заданных функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты этих разложений определяются по известным формулам:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx, \quad \frac{a\pi n b_n}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

И тогда окончательно получим, что решение поставленной задачи (2.7), (2.8), (2.20) задается рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{c\pi n}{l} t + b_n \sin \frac{c\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.35)$$

в котором коэффициенты a_n и b_n определяются формулами:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx, \quad b_n = \frac{2}{\hat{o}\pi n} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx. \quad (2.36)$$

2.3. Примеры решения типовых задач

Пример 2.1. Найдите решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 9 u_{xx}(x, t) & (-\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = \cos x, \\ u_t(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой д'Аламбера (2.19). В поставленной задаче

$$a = 3, \quad f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) \, dz = \\ &= \frac{\cos(x - 3t) + \cos(x + 3t)}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} \sin z \, dz = \\ &= \cos x \cdot \cos 3t - \frac{\cos z}{6} \Big|_{x-3t}^{x+3t} = \cos x \cdot \cos 3t - \frac{\cos(x + 3t) - \cos(x - 3t)}{6} = \end{aligned}$$

$$= \cos x \cdot \cos 3t + \frac{1}{3} \sin x \cdot \sin 3t.$$

Итак, окончательно имеем, что решением поставленной задачи Коши является функция $u(x, t) = \cos x \cdot \cos 3t + \frac{1}{3} \sin x \cdot \sin 3t$.

Полученная функция имеет следующий график (рис. 2.2):

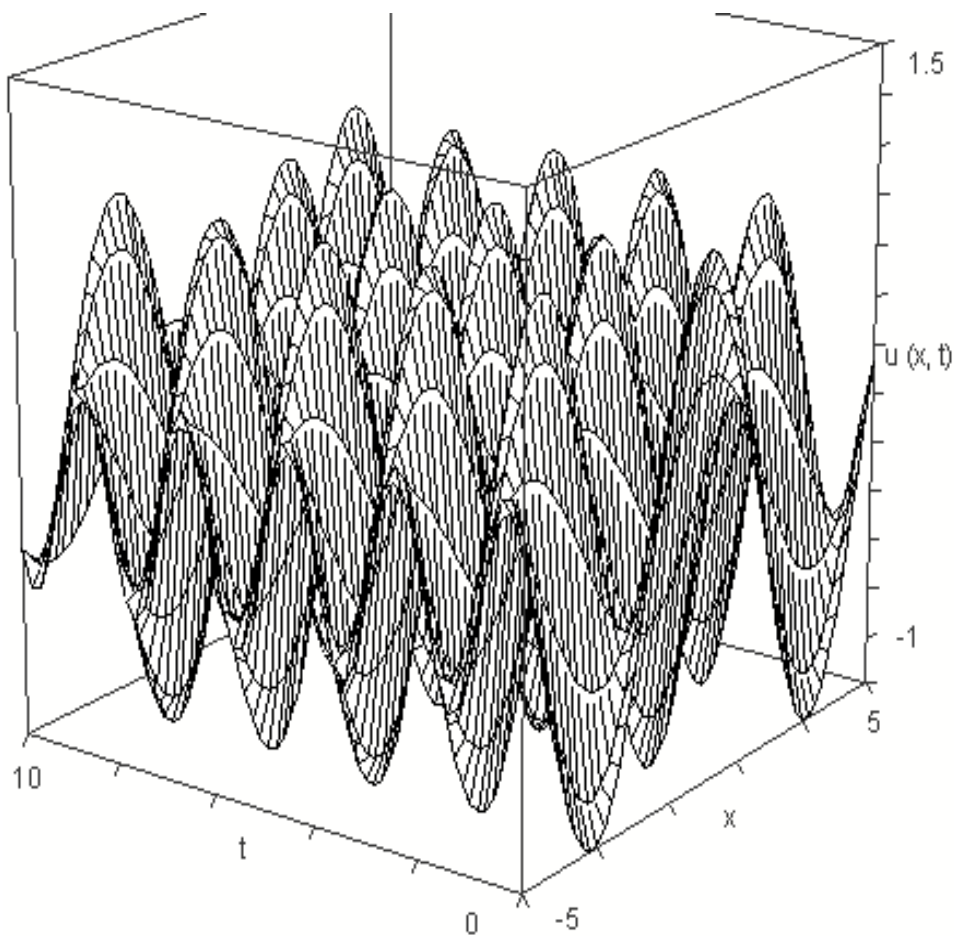


Рис. 2.2. График решения задачи 2.1

Пример 2.2. Найдите решение краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 16 u_{xx}(x, t) & (0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = x \cdot (2 - x), & u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, \\ u(0, t) = 0, & u(2, t) = 0. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (2.35) и (2.36). В поставленной задаче

$$\delta = 4, \quad l = 2, \quad f(x) = x \cdot (2 - x), \quad F(x) = \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Тогда по формуле (2.35)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (2.36), найдём a_n и b_n , используя метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx = \int_0^2 x \cdot (2 - x) \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx = \\ &= \int_0^2 (2x - x^2) \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^2 (2x - x^2) \, d \cos \frac{\pi n}{2} x = \\ &= -\frac{4x - 2x^2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \cos \frac{\pi n}{2} x \, d(2x - x^2) = \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^2 (2 - 2x) \cdot \cos \frac{\pi n}{2} x \, dx = \frac{8}{\pi^2 n^2} \int_0^2 (1 - x) \, d \sin \frac{\pi n}{2} x = \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{\pi^2 n^2} (1-x) \sin \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 - \frac{8}{\pi^2 n^2} \int_0^2 \sin \frac{\pi n}{2} x \, d(1-x) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 n^2} \int_0^2 \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx = -\frac{16}{\pi^3 n^3} \cos \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 =$$

$$\frac{16(1 - \cos \pi n)}{\pi^3 n^3} = \frac{16(1 - (-1)^n)}{\pi^3 n^3}.$$

Учитывая, что $(-1)^n = 1$, если n – четное ($n = 2m$) и $(-1)^n = -1$, если n – нечетное, то есть $n = 2m - 1$, окончательно получим:

$$a_n = \begin{cases} \frac{32}{\pi^3 (2m-1)^3}, & n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^2 F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx = \frac{1}{2\pi n} \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx.$$

Рассмотрим два случая: $n = 1$ и $n \neq 1$.

Пусть $n = 1$, тогда

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} x \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \frac{1 - \cos \pi x}{2} \, dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^2 (1 - \cos \pi x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n \neq 1$, то есть $n = 2, 3, 4, \dots$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx = \\
&= \frac{1}{4\pi n} \int_0^2 \left(\cos \frac{\pi(n-1)}{2} x - \cos \frac{\pi(n+1)}{2} x \right) dx = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi^2 n(n-1)} \sin \frac{\pi(n-1)}{2} x - \frac{1}{2\pi^2 n(n+1)} \sin \frac{\pi(n+1)}{2} x \right) \Bigg|_0^2 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Подставим в ряд $u(x, t)$ найденные значения a_n и b_n :

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n t \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n t \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x = \\
&= b_1 \sin 2\pi t \cdot \sin \frac{\pi}{2} x + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1} \cos 2\pi(2m-1)t \cdot \sin \frac{\pi(2m-1)}{2} x = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \cdot \sin \frac{\pi}{2} x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{32}{\pi^3(2m-1)^3} \cos 2\pi(2m-1)t \cdot \sin \frac{\pi(2m-1)}{2} x.
\end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем, что решение поставленной краевой задачи задается следующим тригонометрическим рядом:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \cdot \sin \frac{\pi}{2} x +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{32}{\pi^3 (2m-1)^3} \cos 2\pi(2m-1)t \cdot \sin \frac{\pi(2m-1)}{2} x.$$

Выглядит решение данной задачи следующим образом (рис. 2.3):

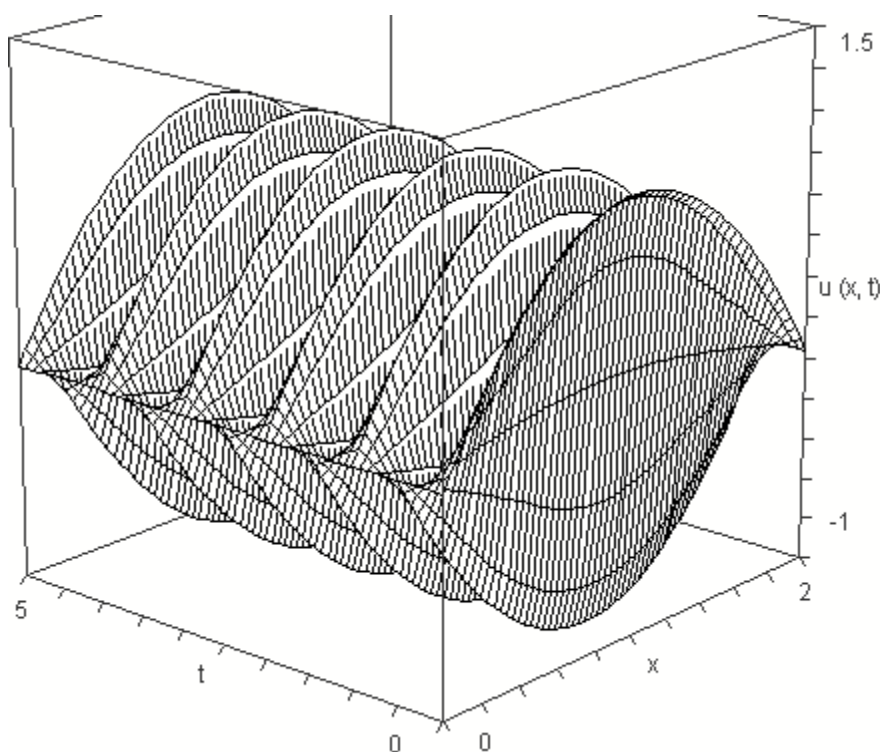


Рис. 2.3. График решения задачи 2.2

Пример 2.3. Струна длины 2, закрепленная неподвижно своими концами в точках $x = 0$ и $x = 2$ оси Ox , была оттянута посередине вверх на 1 так, что в результате этого она приняла форму параболы. Далее струну отпустили, и она стала колебаться по закону, описываемому уравнением

$$u_{tt}(x, t) = 16 u_{xx}(x, t),$$

где $u(x, t)$ есть функция отклонения по вертикали от оси Ox точки x в момент времени t . Найдите функцию $u(x, t)$.

Решение. Для того чтобы решить поставленную задачу, необходимо найти решение данного уравнения, для которого выполнялись бы дополнительные условия, следующие из содержания задачи.

Во-первых, неподвижное закрепление рассматриваемой струны на концах отрезка $[0, 2]$ оси Ox приводит к граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0,$$

которые налагаются на функцию $u(x, t)$.

Во-вторых, из условий задачи следует, что в начальный момент времени струна имела форму параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$.

Найдем a , b и c . Из условий имеем

$$y(0) = c = 0, \quad y(1) = a + b + c = 1, \quad y(2) = 4a + 2b + c = 0.$$

Решим систему

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0, \\ a + b + c = 1, \\ c = 0. \end{cases}$$

Получим $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$, то есть в начальный момент времени струна имела вид параболы $y = -x^2 + 2x = x \cdot (2 - x)$. В результате это приведет к ещё одному условию $u(x, 0) = x \cdot (2 - x)$, налагаемому на искомую функцию $u(x, t)$.

И, наконец, в-третьих, из условий задачи следует, что в начальный момент времени струна во всех точках была неподвижна, то есть $v(x, 0) = 0$ при всех $x \in [0, 2]$. Учитывая, что $v(x, t) = u_t(x, t)$, получаем третье условие, налагаемое на функцию $u(x, t)$: $u_t(x, 0) = 0$.

Таким образом, получается, что для нахождения требуемой функции $u(x, t)$ необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 16 u_{xx}(x, t) & (0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = x \cdot (2 - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0. \end{cases}$$

Для решения данной задачи воспользуемся, как и в случае решения примера 2.2, формулами (2.35) и (2.36). Получим

$$a = 4, \quad l = 2, \quad f(x) = x \cdot (2 - x), \quad F(x) = 0.$$

Тогда из формулы (2.35) имеем

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x.$$

Воспользовавшись формулами (2.36), найдём a_n и b_n . Используя результат примера 2.2 и условия данной задачи, имеем:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx = \int_0^2 x \cdot (2 - x) \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{32}{\pi^3 (2m - 1)^3}, & n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^2 F(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx = \frac{1}{2\pi n} \int_0^2 0 \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x \, dx = 0.$$

В итоге, воспользовавшись формулой (2.35), окончательно получим искомую функцию $u(x, t)$ в виде тригонометрического ряда:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{32}{\pi^3 (2m - 1)^3} \cos 2\pi(2m - 1)t \cdot \sin \frac{\pi(2m - 1)}{2} x.$$

График полученного ряда (рис. 2.4) имеет вид, схожий с графиком решение предыдущего примера 2.2:

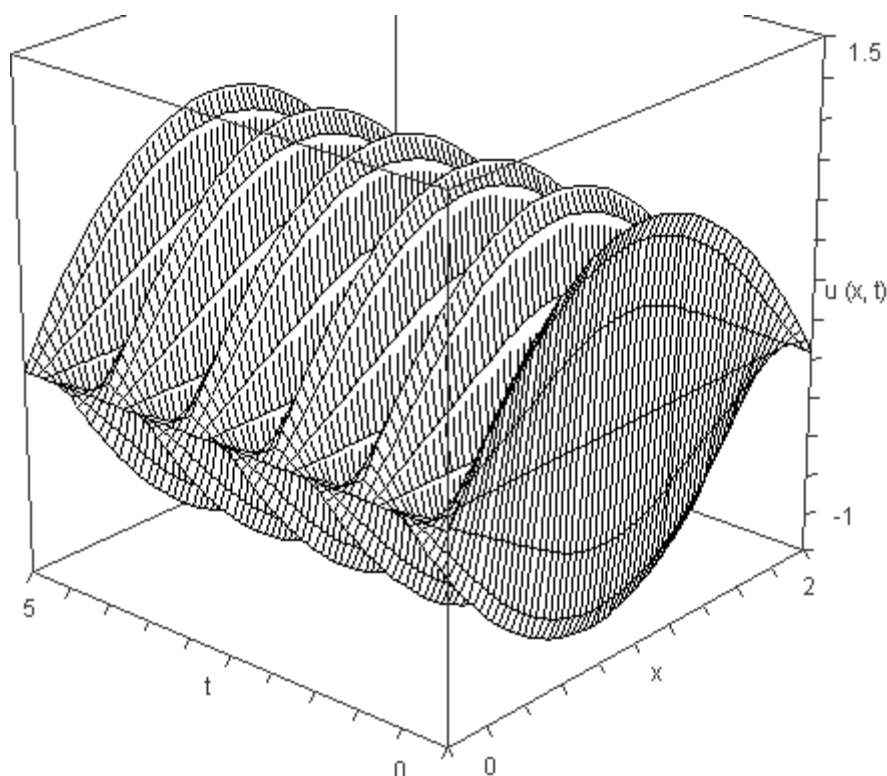


Рис. 2.4. График решения задачи 2.3

ГЛАВА 3. ДВУМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

3.1. Решение краевой задачи для двумерного волнового уравнения на прямоугольнике методом Фурье

Колебания плоской мембраны, аналогично колебаниям струны, описываются волновым уравнением, только не одномерным, а двумерным. Поставим задачу об определении в каждый момент времени формы колеблющейся однородной прямоугольной мембраны. Если считать, что данная мембрана неподвижно закреплена по краю и известны в начальный момент времени её форма и скорость в каждой точке, то мы приходим к краевой задаче на прямоугольнике для двумерного волнового уравнения:

$$u_{tt}(x, y, t) = c^2 \cdot \left(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \right),$$

$$x \in [0, l_1], y \in [0, l_2], t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = F(x, y), \quad (3.3)$$

где $u(x, y, t)$ есть функция отклонения по вертикали от плоскости Oxy в момент времени t точки с координатами $(x; y)$.

Частные решения уравнения (3.1) будем искать в виде

$$u(x, y, t) = T(t) \cdot V(x, y). \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в уравнение (3.1), аналогично одномерному случаю получим уравнение

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y)}{V(x, y)}.$$

Очевидно, что это равенство, как и для одномерного случая, также будет выполняться только тогда, когда обе его части равны одной и той же постоянной величине λ , которая по тем же причинам должна быть меньше нуля. Обозначим эту постоянную через $-k^2$. Разделяя переменные, получим:

$$\ddot{T}(t) + c^2 k^2 T(t) = 0, \quad V_{xx} + V_{yy} + k^2 V = 0. \quad (3.5)$$

Второе из полученных уравнений (3.5)

$$V_{xx} + V_{yy} + k^2 V = 0 \quad (3.6)$$

носит название *двумерного уравнения Гельмгольца*.

Решим уравнение (3.6) с учетом граничных условий

$$V(0, y) = V(x, l_1) = V(x, 0) = V(x, l_2) = 0, \quad (3.7)$$

которые наследуются из граничных условий (3.2), налагаемых на искомую функцию $u(x, y, t)$. Решение будем опять искать методом Фурье, опять разделяя переменные x и y . Для этого положим

$$V(x, y) = X(x) Y(y). \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в уравнение (3.6) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{Y_{yy}(y)}{V(y)} + k^2 = -\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}.$$

Это равенство также может иметь место только в том случае, если обе его части равны одной и той же большей нуля постоянной величине. Обозначив эту постоянную величину через k_1^2 , а $X_{xx}(x)$ через $X''(x)$, $Y_{yy}(y)$ — через $Y''(y)$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0, \quad (3.9)$$

где

$$k_2^2 = k^2 - k_1^2 \quad \text{или} \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (3.10)$$

Общие решения уравнений (3.9), как известно, имеют следующий вид:

$$X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x,$$

$$Y(y) = C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y. \quad (3.11)$$

Из граничных условий (3.7) получим

$$X(0) = 0, X(l_1) = 0, \quad Y(0) = 0, Y(l_2) = 0, \quad (3.12)$$

откуда ясно, что $C_1 = C_3 = 0$, а

$$X(x) = C_2 \sin k_1 x, \quad Y(y) = C_4 \sin k_2 y. \quad (3.13)$$

Тогда уравнения (3.9) и данные равенства (3.13) приводят к уравнениям:

$$\sin k_1 l_1 = 0, \quad \sin k_2 l_2 = 0. \quad (3.14)$$

Из уравнений (3.14) вытекает, что k_1 и k_2 имеют бесчисленное

множество значений:

$$k_1 = k_{1m} = \frac{m\pi}{l_1}, \quad k_2 = k_{2n} = \frac{n\pi}{l_2} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда

$$X_m(x) = C_{2m} \sin \frac{m\pi}{l_1} x, \quad Y_n(y) = C_{4n} \sin \frac{n\pi}{l_2} y.$$

Но тогда из равенства (3.8) имеем

$$V_{mn}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y, \quad (3.15)$$

где $C_{mn} = C_{2m} \cdot C_{4n}$.

Далее, из равенства (3.10) имеем:

$$k^2 = k_{mn}^2 = k_{1m}^2 + k_{2n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right). \quad (3.16)$$

Тогда, обращаясь теперь к первому из уравнений (3.5), получим его общее решение, соответствующее $k = k_{mn}$:

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos \varsigma k_{mn} t + B_{mn} \sin \varsigma k_{mn} t, \quad (3.17)$$

где A_{mn} и B_{mn} – произвольные постоянные.

Таким образом, в силу (3.4), (3.15) и (3.17), частные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие граничным условиям (3.2), имеют вид:

$$u_{mn}(x, y, t) = (a_{mn} \cos \varsigma k_{mn} t + b_{mn} \sin \varsigma k_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y, \quad (3.18)$$

где введены обозначения: $a_{mn} = A_{mn} C_{mn}$, $b_{mn} = B_{mn} C_{mn}$.

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.3), составим двойной ряд:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \varsigma k_{mn} t + b_{mn} \sin \varsigma k_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y. \quad (3.19)$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x , y и t , то сумма и его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (3.1) и граничным условиям (3.2).

Для выполнения начальных условий (3.3) необходимо, чтобы

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y, \quad (3.20)$$

$$u_t(x, y, 0) = F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c k_{mn} b_{mn} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y. \quad (3.21)$$

Формулы (3.20) и (3.21) представляют собой разложения функций двух переменных в *двойные ряды Фурье*. Коэффициенты a_{mn} и $c k_{mn} b_{mn}$ есть коэффициенты разложения функций соответственно $f(x, y)$ и $F(x, y)$ в двойные ряды Фурье по синусам на прямоугольнике $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$. Формулы для нахождения имеют схожий с одномерным случаем вид:

$$a_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(x, y) \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y \, dx \, dy, \quad (3.22)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{c k_{mn}} \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} F(x, y) \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y \, dx \, dy. \quad (3.23)$$

Таким образом, окончательно решение поставленной задачи (3.1) – (3.3) задается двойным рядом Фурье:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos c\pi \sqrt{\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}} t + \right. \\ \left. + b_{mn} \sin c\pi \sqrt{\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}} t \right) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

коэффициенты a_{mn} и b_{mn} которого определяются формулами (3.22) и (3.23).

3.2. Пример решения типовой задачи

Пример 3.1. Найдите решение краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = 16(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)) & (0 < x < 2, 0 < y < 1, t \geq 0), \\ u(x, y, 0) = x \cdot y \cdot (2 - x) \cdot (1 - y), & u_t(x, y, 0) = 0, \\ u(0, y, t) = 0, & u(2, y, t) = 0, & u(x, 0, t) = 0, & u(x, 1, t) = 0. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся приведенными выше формулами. В поставленной задаче

$$a = 4, \quad l_1 = 2, \quad l_2 = 1, \quad f(x, y) = x \cdot y \cdot (2 - x) \cdot (1 - y), \quad F(x, y) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} & \left(a_{mn} \cos 4\pi t \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2} + \right. \\ & \left. + b_{mn} \sin 4\pi t \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2} \right) \sin \frac{m\pi}{2} x \sin n\pi y. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (3.22) и (3.23), найдём a_{mn} и b_{mn} :

$$\begin{aligned} a_{mn} &= 2 \int_0^2 \int_0^1 x \cdot y \cdot (2 - x) \cdot (1 - y) \cdot \sin \frac{m\pi}{2} x \cdot \sin n\pi y \, dx \, dy = \\ &= 2 \int_0^2 x \cdot (2 - x) \cdot \sin \frac{m\pi}{2} x \, dx \cdot \int_0^1 y \cdot (1 - y) \cdot \sin n\pi y \, dy. \end{aligned}$$

Вычислим по отдельности каждый из определенных интегралов:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2x - x^2) \sin \frac{m\pi}{2} x \, dx &= -\frac{2}{m\pi} \int_0^2 (2x - x^2) \, d \cos \frac{m\pi}{2} x = \\
&= -\frac{4x - 2x^2}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} x \Big|_0^2 + \frac{2}{m\pi} \int_0^2 \cos \frac{m\pi}{2} x \, d(2x - x^2) = \\
&= \frac{2}{m\pi} \int_0^2 (2 - 2x) \cdot \cos \frac{m\pi}{2} x \, dx = \frac{8}{m^2 \pi^2} \int_0^2 (1 - x) \, d \sin \frac{m\pi}{2} x = \\
&= \frac{8}{m^2 \pi^2} (1 - x) \sin \frac{m\pi}{2} x \Big|_0^2 - \frac{8}{m^2 \pi^2} \int_0^2 \sin \frac{m\pi}{2} x \, d(1 - x) = \\
&= \frac{8}{m^2 \pi^2} \int_0^2 \sin \frac{m\pi}{2} x \, dx = -\frac{16}{m^3 \pi^3} \cos \frac{m\pi}{2} x \Big|_0^2 = \\
&\quad \frac{16(1 - \cos m\pi)}{m^3 \pi^3} = \frac{16(1 - (-1)^m)}{m^3 \pi^3}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $(-1)^m = 1$, если m – четное ($m = 2p$) и $(-1)^m = -1$, если m – нечетное, то есть $m = 2p - 1$, получим

$$\int_0^2 (2x - x^2) \sin \frac{m\pi}{2} x \, dx = \begin{cases} \frac{32}{(2p-1)^3 \pi^3}, & m = 2p - 1, \quad p \in \mathbb{N}, \\ 0, & m = 2p, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y \cdot (1 - y) \cdot \sin n\pi y \, dy &= -\frac{2}{n^3 \pi^3} \cos n\pi y \Big|_0^1 = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^3 \pi^3} = \\
\frac{2(1 - (-1)^n)}{n^3 \pi^3} &= \begin{cases} \frac{4}{(2q-1)^3 \pi^3}, & n = 2q - 1, \quad q \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2q, \quad q \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{256}{(2p-1)^3(2q-1)^3\pi^6}, & m = 2p-1, n = 2q-1, \quad p, q \in \mathbb{N}, \\ 0, & m \neq 2p-1, n \neq 2q-1, \quad p, q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Далее, так как $F(x, y) = 0$, имеем

$$b_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2}} \int_0^2 \int_0^1 0 \cdot \sin \frac{m\pi}{2} x \sin n\pi y \, dx \, dy = 0,$$

и в итоге получаем искомое решение $u(x, y, t)$ задачи в виде двойного тригонометрического ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{256 \cos 4\pi t \sqrt{\frac{(2p-1)^2}{4} + (2q-1)^2}}{(2p-1)^3(2q-1)^3\pi^6} \times \\ \times \sin \frac{(2p-1)\pi x}{2} \sin (2q-1)\pi y.$$

Замечание. Так как полученное решение зависит от трех переменных x, y и t , то его график, естественно, построить не является возможным.

ГЛАВА 4. ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Уравнением Лапласа называется уравнение, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

Это уравнение часто встречается в приложениях.

Для определенности будем считать, что функция $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющая (4.1), представляет собой стационарное

распределение температуры в теле ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ в уравнении теплопроводности). Функция $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа (4.1) в некоторой области, называется *гармонической* в этой области.

Уравнение Лапласа имеет бесчисленное множество решений. Для выделения конкретного решения необходимо задать некоторые дополнительные условия на границе.

Основные краевые задачи, называемые задачей Дирихле и задачей Неймана, ставятся следующим образом.

Задача Дирихле. Требуется найти функцию $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (4.1) внутри объема V и принимающую в каждой точке M поверхности σ , ограничивающей этот объем, заданные значения:

$$u|_{\sigma} = \phi(M). \quad (4.2)$$

Задача Неймана. Требуется найти гармоническую в области V функцию $u = u(x, y, z)$, для которой на границе σ области V выполнено условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\sigma} = \psi(M). \quad (4.3)$$

Здесь $\bar{n}$ – нормаль к σ в точке M этой поверхности (если u – температура, то величина $\frac{\partial u}{\partial n}$ пропорциональна тепловому потоку в каждой точке поверхности).

Смешанная задача. На одной части поверхности σ задано условие типа (4.2), а на другой – условие типа (4.3).

Часто при решении конкретных задач удобнее использовать другие независимые переменные. Выведем уравнение Лапласа в цилиндрических (r, φ, z) координатах, связанных с декартовыми (x, y, z) соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (4.4)$$

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (4.5)$$

Заменяя независимые переменные (x, y, z) на (r, φ, z) , придем к новой функции $u(r, \varphi, z)$.

Запишем для нее уравнение Лапласа. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi \frac{\sin \varphi}{r} - \\ &- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) - \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos^2 \varphi + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} - \\ &- 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi.\end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi.\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для вторых частных производных в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.6)$$

Это и есть уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

4.1 Решение задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа на прямоугольнике

Задачей Дирихле для двумерного уравнения Лапласа на прямоугольнике называется задача о нахождении решения уравнения (4.7):

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2), \quad (4.7)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u(0, y) = f(y), \quad u(l_1, y) = F(y), \quad (4.8)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(x, l_2) = G(x), \quad (4.9)$$

где $g(x)$ и $G(x)$ есть заданные функции от x , непрерывные на отрезке $[0, l_1]$, а $f(y)$ и $F(y)$ – заданные функции от y , непрерывные на отрезке $[0, l_2]$.

Задача Дирихле является классической граничной задачей. Рассмотрим сначала решение уравнения (4.7) при граничных условиях:

$$u(0, y) = 0, \quad u(l_1, y) = 0, \quad (4.10)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(x, l_2) = G(x). \quad (4.11)$$

Согласно методу Фурье, решение задачи будем искать в виде

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \quad (4.12)$$

Подставив данное выражение в уравнение (4.7) и граничные условия (4.10), получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2, \quad (4.13)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l_1) = 0, \quad (4.8)$$

где $k = \text{const}$.

Решая граничную задачу

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (4.14)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l_1) = 0, \quad (4.15)$$

найдем, как и ранее,

$$k_n = \frac{n \pi}{l_1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

и

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{n \pi x}{l_1}.$$

При $k = k_n = \frac{n \pi}{l_1}$ из выражения (4.13) получим уравнение для определения $Y(y)$:

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n \pi}{l_1} \right)^2 Y_n(y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Y_n(y) = C_{1n} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l_1} + C_{2n} \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l_1},$$

где C_{1n}, C_{2n} – произвольные постоянные.

В силу равенства (4.12) функция будет иметь вид

$$u_n(x, y) = \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l_1} + b_n \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l_1} \right) \sin \frac{n \pi x}{l_1},$$

где $a_n = C_{1n} \cdot D_n$, $b_n = C_{2n} \cdot D_n$, является решением уравнения (4.7), удовлетворяющим граничным условиям (4.10).

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма этих решений будет также решением уравнения (4.7), удовлетворяющим условиям (4.10):

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l_1} + b_n \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l_1} \right) \sin \frac{n \pi x}{l_1}. \quad (4.17)$$

Подберем теперь коэффициенты a_n и b_n так, чтобы выполнялись граничные условия (4.11). Полагая в (4.17) сначала $y = 0$, затем $y = l_2$, получим:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n \pi x}{l_1},$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_2}{l_1} + b_n \operatorname{sh} \frac{n \pi l_2}{l_1} \right) \sin \frac{n \pi x}{l_1}.$$

Отсюда видно, что a_n и $\left(a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_2}{l_1} + b_n \operatorname{sh} \frac{n \pi l_2}{l_1} \right)$ есть коэффициенты разложения функций $g(x)$ и $G(x)$ в ряды Фурье по синусам на промежутке $(0, l_1)$, и, следовательно, они должны определяться по формулам:

$$a_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} g(x) \sin \frac{n \pi x}{l_1} dx,$$

$$\left(a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_2}{l_1} + b_n \operatorname{sh} \frac{n \pi l_2}{l_1} \right) = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} G(x) \sin \frac{n \pi x}{l_1} dx,$$

или

$$a_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} g(x) \sin \frac{n \pi x}{l_1} dx, \quad (4.18)$$

$$b_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n \pi l_2}{l_1}} \left(\frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} G(x) \sin \frac{n \pi x}{l_1} dx - a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_2}{l_1} \right). \quad (4.19)$$

Таким образом, ряд (4.17) с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.18), (4.19), будет решением поставленной задачи.

Замечание. Решение уравнения Лапласа (4.7), удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, l_2) = 0, \quad (4.20)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u(l_1, y) = F(y), \quad (4.21)$$

можно записать сразу, поменяв в предыдущей задаче местами x и y :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n \pi x}{l_2} + B_n \operatorname{sh} \frac{n \pi x}{l_2} \right) \sin \frac{n \pi y}{l_2}, \quad (4.22)$$

где

$$A_n = \frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} f(y) \sin \frac{n \pi y}{l_2} dy, \quad (4.23)$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n \pi l_1}{l_2}} \left(\frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} F(y) \sin \frac{n \pi y}{l_2} dy - A_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_1}{l_2} \right). \quad (4.24)$$

Из вышесказанного следует, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на прямоугольнике:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2),$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u(l_1, y) = F(y),$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(x, l_2) = G(x),$$

следует искать в виде суммы двух функций:

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y);$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l_1} + b_n \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l_1} \right) \sin \frac{n \pi x}{l_1},$$

$$a_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} g(x) \sin \frac{n \pi x}{l_1} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n \pi l_2}{l_1}} \left(\frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} G(x) \sin \frac{n \pi x}{l_1} dx - a_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_2}{l_1} \right);$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n \pi x}{l_2} + B_n \operatorname{sh} \frac{n \pi x}{l_2} \right) \sin \frac{n \pi y}{l_2},$$

$$A_n = \frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} f(y) \sin \frac{n \pi y}{l_2} dy,$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n \pi l_1}{l_2}} \left(\frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} F(y) \sin \frac{n \pi y}{l_2} dy - A_n \operatorname{ch} \frac{n \pi l_1}{l_2} \right).$$

4.2. Пример решения типовой задачи

Пример 4.1. Найдите решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 & (0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1), \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0,5x^2 + 0,5x, \\ u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2y^2 + y. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся приведенными выше формулами. В поставленной задаче

$$l_1 = 2, \quad l_2 = 1;$$

$$f(y)=0, \quad F(y)=2y^2+y, \quad g(x)=0, \quad G(x)=0,5x^2+0,5x.$$

Тогда

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{2}+b_n\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Воспользовавшись приведенными выше формулами, найдём значения a_n и b_n :

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^20\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\left(\int_0^2(0,5x^2+0,5x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x-0\cdot\operatorname{ch}\frac{n\pi}{2}\right)= \\ &= -\frac{1}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\int_0^2(x^2+x)\mathrm{d}\cos\frac{n\pi x}{2}=-\frac{1}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}(x^2+x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+ \\ &\quad +\frac{1}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}(x^2+x)=-\frac{6}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\cdot\cos n\pi+ \\ &\quad +\frac{1}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\int_0^2(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{6}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\cdot\cos n\pi+ \\ &\quad +\frac{2}{n^2\pi^2\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\int_0^2(2x+1)\mathrm{d}\sin\frac{n\pi x}{2}= \\ &= \frac{6\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}+\frac{2}{n^2\pi^2\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2- \\ &\quad -\frac{2}{n^2\pi^2\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}(2x+1)=\frac{6\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} + \frac{8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \\
& = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} + \frac{8 \cdot (-1)^n}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} - \frac{8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} = \frac{(-1)^n (8 - 6n^2 \pi^2) - 8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Тогда получим

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (8 - 6n^2 \pi^2) - 8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Далее,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} n\pi x + B_n \operatorname{sh} n\pi x) \sin n\pi y,$$

и аналогично воспользовавшись полученными формулами, найдём A_n и B_n , используя метод интегрирования по частям:

$$A_n = 2 \int_0^1 0 \cdot \sin n\pi y dy = 0;$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{\operatorname{sh} 2n\pi} \left(2 \int_0^1 (2y^2 + y) \sin n\pi y dy - 0 \cdot \operatorname{ch} 2n\pi \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} \int_0^1 (2y^2 + y) d \cos n\pi y = -\frac{2}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} (2y^2 + y) \cos n\pi y \Big|_0^1 + \\
&+ \frac{2}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} \int_0^1 \cos n\pi y d(2y^2 + y) = -\frac{6}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} \cdot \cos n\pi + \\
&+ \frac{2}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} \int_0^1 (4y + 1) \cos n\pi y dy = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} 2n\pi} \int_0^1 (4y+1) d \sin n\pi y = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} + \\
& + \frac{2}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} 2n\pi} (4y+1) \sin n\pi y \Big|_0^1 - \frac{2}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} 2n\pi} \int_0^1 \sin n\pi y d(4y+1) = \\
& = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} - \frac{8}{n^2 \pi^2 \operatorname{sh} 2n\pi} \int_0^1 \sin n\pi y dy = \\
& = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} + \frac{8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} 2n\pi} \cos n\pi y \Big|_0^1 = \\
& = \frac{6 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{sh} 2n\pi} + \frac{8 \cdot (-1)^n}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} 2n\pi} - \frac{8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} 2n\pi} = \frac{(-1)^n (8 - 6n^2 \pi^2) - 8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} 2n\pi}.
\end{aligned}$$

Получим

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (8 - 6n^2 \pi^2) - 8}{n^3 \pi^3 \operatorname{sh} 2n\pi} \operatorname{sh} n\pi x \sin n\pi y.$$

И тогда окончательно:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= v(x, y) + w(x, y) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} + \right. \\
&\quad \left. + (A_n \operatorname{ch} n\pi x + B_n \operatorname{sh} n\pi x) \sin n\pi y \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (8 - 6n^2 \pi^2) - 8}{n^3 \pi^3} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi x}{2} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sh} 2n\pi} \operatorname{sh} n\pi x \sin n\pi y \Bigg).$$

Замечание. Уравнение Лапласа хотя и является двумерным, но так как в него входят только пространственные переменные (отсутствует время), то также представляется возможным построить график его решения. Так график полученной при решении задачи 4.1 функции имеет следующий вид (рис. 4.1):

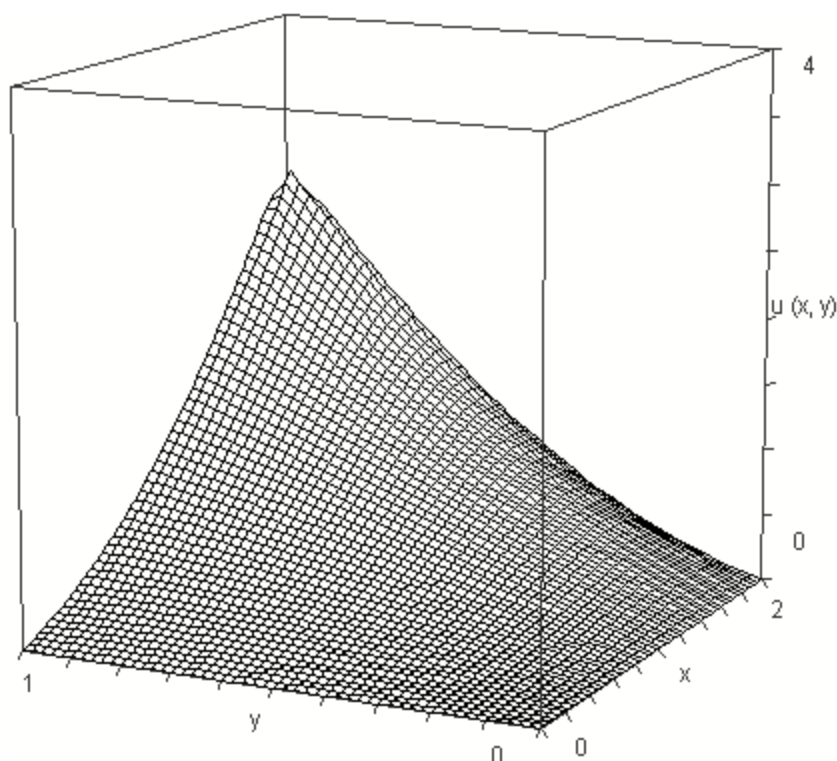


Рис. 4.1. График решения задачи Дирихле 4.1

ГЛАВА 5. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Одним из основных уравнений математической физики является уравнение теплопроводности.

Рассмотрим тонкий однородный стержень длины l (рис. 5.1). Будем полагать, что боковая поверхность стержня теплоизолирована, а температура u во всех точках поперечного сечения стержня в каждый момент времени одинакова.

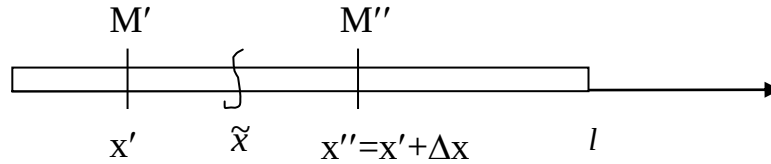


Рис. 5.1. Тонкий однородный стержень

Известно, что в неравномерно нагретом теле происходит движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В теории теплопроводности принято, что количество тепла ΔQ , прошедшего за время Δt через площадку S поперечного сечения стержня, вычисляется по формуле (закон Фурье):

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \Delta t, \quad (5.1)$$

где k – коэффициент теплопроводности, $u = u(x, t)$ – температура в момент t в сечении с абсциссой x . Если ΔQ_1 , ΔQ_2 – количество тепла, прошедшего за время Δt через сечения $M'(x')$, $M''(x'')$ стержня соответственно, то приток тепла в элемент $M'M''$ стержня за время Δt будет

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = kS \Delta t \left\{ \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x'} - \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x''} \right\}.$$

Применяя теорему Лагранжа, получим

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = kS \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=\tilde{x}} \Delta x.$$

Это тепло пойдет на повышение температуры $\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$. Если ρ

– плотность, c – теплоемкость (т.е. количество тепла, которое надо потратить, чтобы нагреть единицу массы на один градус), то

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

или

$$kS \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=\tilde{x}} \Delta x = c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Так как это соотношение должно быть выполнено для любых $\Delta x, \Delta t$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{k}{c \rho}. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) будем называть *одномерным уравнением теплопроводности*.

Согласно принятой нами классификации, уравнение (5.2) является уравнением параболического типа, так как для него

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a^2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

5.1. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом интегрального преобразования Фурье

Рассмотрим задачу о распространении тепла в неограниченном однородном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, если в начальный момент задана температура в различных сечениях неограниченного стержня. Требуется определить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени. К задаче распространения тепла в неограниченном стержне сводятся реальные физические задачи в том случае, когда длина стержня многократно больше толщины и стержень столь длинный, что температура во внутренних точках стержня в рассматриваемые моменты времени мало зависит от условий на концах стержня.

Всегда можно считать, что стержень совпадает с осью Ox . Тогда математически задача будет сформулирована следующим образом: *найти решение однородного одномерного уравнения теплопроводности*

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) \quad (-\infty < x < +\infty, t \geq 0), \quad (5.3)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x). \quad (5.4)$$

Данная задача называется *задачей Коши для однородного уравнения теплопроводности*.

Применим для нахождения решения *метод разделения переменных*, т.е. будем искать частное решение уравнения $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$ в виде произведения двух функций:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (5.5)$$

Подставляя в уравнение, будем иметь

$$X(x) \cdot \dot{T}(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t),$$

или

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (5.6)$$

При независимых переменных x и t равенство (5.6) возможно лишь тогда, когда левая и правая его части сохраняют постоянное значение. Обозначим эту постоянную через λ . Тогда исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \lambda, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

или

$$\dot{T}(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (5.7)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (5.8)$$

Решая уравнение (5.7), найдем его общее решение

$$T(t) = C_1 e^{\lambda a^2 t}. \quad (5.9)$$

Поскольку ни в одном сечении стержня (т.е. ни при каком фиксированном x) температура $u = X(x) \cdot T(t)$ не может неограниченно возрастать по абсолютной величине при $t \rightarrow \infty$, то λ должно быть отрицательно. Положим поэтому $\lambda = -\omega^2$. Тогда из (5.9) имеем

$$T(t) = C_1 e^{-a^2 \omega^2 t}. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.8) в этом случае примет вид:

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$$

и будет иметь общее решение

$$X(x) = C_2 \cos \omega x + C_3 \sin \omega x. \quad (5.11)$$

Тогда из (5.5), (5.10) и (5.11) получим общее решение уравнения (5.1):

$$u(x, t) = (A \cos \omega x + B \sin \omega x) e^{-a^2 \omega^2 t}, \quad (5.12)$$

где $A = C_1 \cdot C_2$, $B = C_1 \cdot C_3$. Здесь C_1 , C_2 , C_3 , а следовательно, A и B есть произвольные постоянные; ω также обозначает произвольное число.

Полученная функция является при любом фиксированном ω решением рассматриваемого уравнения, и мы можем, конечно, для каждого значения ω выбирать произвольные постоянные A и B . Это означает, что A и B можно считать произвольными функциями от ω : $A = A(\omega)$, $B = B(\omega)$. Таким образом, в итоге мы имеем однопараметрическое семейство частных решений

$$u_\omega(x, t) = (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) \cdot e^{-a^2 \omega^2 t}, \quad (5.13)$$

зависящее от параметра ω , принимающего любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Полученная функция (5.13), вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию. Ранее, при решении методом Фурье волнового

уравнения, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям, мы суммировали все решения, придавая все допустимые значения параметру λ , суммируя по всем $n \in \mathbb{N}$, соответствующим допустимым λ . Естественно и теперь поступить аналогично. Но теперь допустимые значения λ – вся положительная полуось, а допустимые значения ω – вся числовая ось. Тогда логично вместо суммирования по дискретному параметру n использовать, как это делалось ранее, интегрирование по непрерывному параметру ω . Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\omega}(x, t) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \right) \cdot e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega. \quad (5.14)$$

Очевидно, что если выбором $A(\omega)$ и $B(\omega)$ будет обеспечена законность дифференцирования под знаком интеграла (один раз по t и два раза по x), то функция (5.14) будет удовлетворять дифференциальному уравнению (5.3).

Для того чтобы функция $u(x, t)$, определяемая равенством (5.14), удовлетворяла и начальному условию (5.4), должно выполняться равенство

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \right) d\omega = f(x). \quad (5.15)$$

Предположим, что заданная функция $f(x)$ представима в виде интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos(\tau - x) d\tau. \quad (5.16)$$

Так как $\cos \omega(\tau - x) = \cos \omega \tau \cdot \cos \omega x + \sin \omega \tau \cdot \sin \omega x$, то (5.16) можно переписать в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \right) \cos \omega x + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau \right) \sin \omega x \right) d\omega.$$

Сравнивая это разложение с (5.15), можно сделать вывод, что

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (5.17)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau. \quad (5.18)$$

Подставляя (5.17) и (5.18) в (5.14), получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos \omega \tau \cos \omega x + \sin \omega \tau \sin \omega x) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega(\tau - x) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega.$$

Из последнего выражения видно, что подынтегральная функция является четной по ω , поэтому можно записать:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(\tau - x) d\omega. \quad (5.17)$$

Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(\tau - x) d\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}}, \quad (5.18)$$

и подставляя (5.20) в (5.19), окончательно получим, что решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) \quad (-\infty < x < +\infty, t \geq 0),$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

определяется по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}} d\tau. \quad (5.21)$$

Замечание. Интеграл, стоящий в формуле (5.21), часто бывает неберущимся, но при этом решение выражается через элементарные функции и специальную функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu, \quad (5.22)$$

или нормированную функцию Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu, \quad (5.23)$$

при этом $\Phi(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$.

5.2. Решение краевой задачи для однородного одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье

В случае, если рассмотренный ранее стержень имеет конечную длину l , а на его не теплоизолированных концах поддерживается постоянная температура (пусть это будет нуль), возникает *краевая задача* для одномерного однородного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0), \quad (5.24)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (5.25)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (5.26)$$

Здесь стержень считается совпадающим с отрезком $[0, l]$ оси Ox .

Решим её методом Фурье разделения переменных. Положим, как и ранее,

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (5.27)$$

Подставляя (5.27) в уравнение (5.24), получим

$$\dot{T} \cdot X = a^2 T \cdot X'' \Leftrightarrow \frac{\dot{T}}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -k^2.$$

Откуда

$$X'' + k^2 X = 0, \quad \dot{T} + k^2 a^2 T = 0.$$

Решим граничную задачу

$$X'' + k^2 X = 0, \quad (5.28)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (5.29)$$

аналогично тому, как решали такую же задачу для однородного одномерного волнового уравнения:

$$X(x) = C \cos kx + D \sin kx.$$

Подставляя первое из граничных условий (5.26), получим

$$X(0) = C \cos 0 + D \sin 0 = C = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = D \sin kx.$$

Подставляя второе граничное условие из (5.26), получим

$$X(l) = D \sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad k = k_n = \frac{\pi n}{l}, n \in \mathbb{N}.$$

В результате получим совокупность решений:

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющих требуемым граничным условиям.

Далее решим уравнение

$$\dot{T} + k_n^2 a^2 T = 0.$$

Получим

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 k_n^2 t} = A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}.$$

Тогда

$$u_n(x, t) = T_n(t) \cdot X_n(x) = a_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad a_n = A_n \cdot D_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Общее решение получим, как и ранее, суммированием всех u_n по n . Каждое из полученных решений удовлетворяет нулевым граничным условиям (5.24), поэтому и полученный ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (5.30)$$

также удовлетворяет условиям (5.26).

Подставляя начальное условие (5.25), получим

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 \cdot 0}{l^2}} \sin \frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Но тогда a_n есть коэффициенты представления функции $f(x)$ на интервале $(0, l)$ в виде ряда Фурье по синусам. Откуда

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n \pi x}{l} dx.$$

Таким образом, окончательно имеем, что решение краевой задачи (5.24) – (5.26) находится в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

5.3. Примеры решения типовых задач

Пример 5.1. Найдите решение следующей задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t \geq 0), \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{const}, & x \in [l_1, l_2], \\ 0, & x \notin [l_1, l_2]. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой (5.19). Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{l_1}^{l_2} U_0 e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}} d\tau = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{l_1}^{l_2} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{2(a\sqrt{2t})^2}} d\tau.$$

Перепишем решение, используя (5.20) и (5.21). Для этого сделаем замену $\frac{x-\tau}{a\sqrt{2t}} = \mu$. Тогда $\tau = x - \mu a\sqrt{2t}$, $d\tau = -a\sqrt{2t} d\mu$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{l_1}^{l_2} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{2(a\sqrt{2t})^2}} d\tau &= -\frac{U_0 a\sqrt{2t}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x-l_2}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x-l_1}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \frac{U_0 a\sqrt{2t}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x-l_2}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x-l_1}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \\ &= U_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-l_2}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x-l_1}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = U_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-l_1}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-l_2}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu \right) = \end{aligned}$$

$$= U_0 \cdot \left(\Phi \left(\frac{x - l_1}{a\sqrt{2t}} \right) - \Phi \left(\frac{x - l_2}{a\sqrt{2t}} \right) \right) = U_0 \cdot \left(\Phi_0 \left(\frac{x - l_1}{a\sqrt{2t}} \right) - \Phi_0 \left(\frac{x - l_2}{a\sqrt{2t}} \right) \right).$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$u(x, t) = U_0 \cdot \left(\Phi_0 \left(\frac{x - l_1}{a\sqrt{2t}} \right) - \Phi_0 \left(\frac{x - l_2}{a\sqrt{2t}} \right) \right).$$

График данной функции изображен на рис. 5.2.

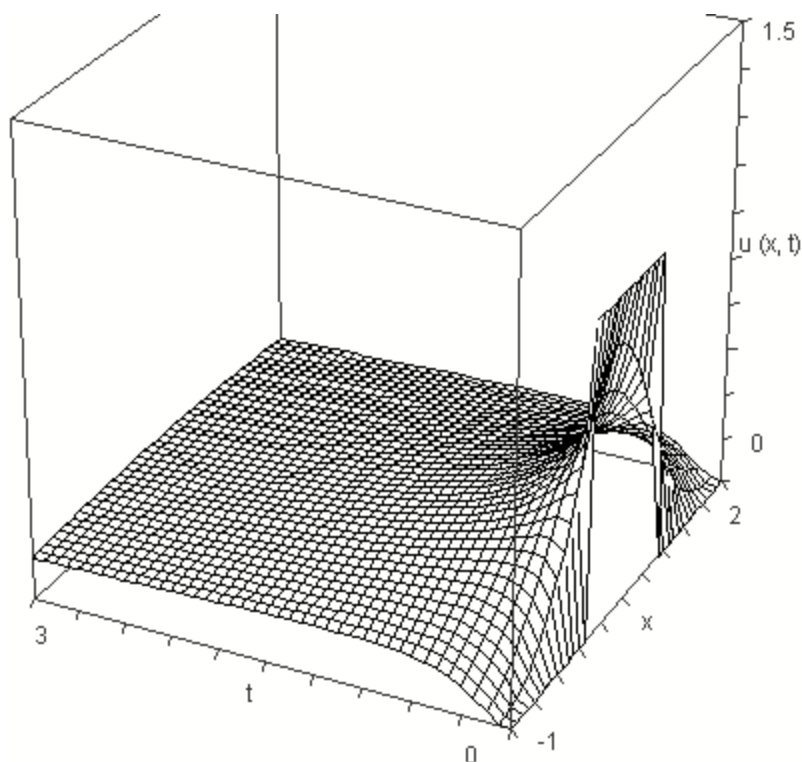


Рис. 5.2. График решения задачи 5.1 при $l_1 = 0$, $U_0 = a = l_2 = 1$

Пример 5.2. Найдите решение следующей задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t \geq 0), \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи, как и ранее, воспользуемся формулой (5.19), где $a = 2$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}} d\tau = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 (1 - \tau^2) \cdot e^{-\frac{(x-\tau)^2}{2(2\sqrt{2t})^2}} d\tau.$$

Сделаем замену $\frac{x - \tau}{2\sqrt{2t}} = \mu$. Тогда $\tau = x - 2\mu\sqrt{2t}$, $d\tau = -2\sqrt{2t} d\mu$,

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 (1 - \tau^2) \cdot e^{-\frac{(x-\tau)^2}{2(2\sqrt{2t})^2}} d\tau &= -\frac{2\sqrt{2t}}{4\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \left(1 - (x - 2\mu\sqrt{2t})^2\right) \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \left(1 - x^2 + 4\mu x\sqrt{2t} - 8\mu^2 t\right) \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \frac{1 - x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu + \\ &+ \frac{4x\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mu \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu - \frac{8t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mu^2 \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \frac{1 - x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu + \\ &+ \frac{4x\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\left(\frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{8t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mu^2 \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \frac{1 - x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4x\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} d\mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} + \frac{8t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mu d\mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu - \\
& - \frac{4x\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} \Bigg|_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} + \frac{8t}{\sqrt{2\pi}} \mu \mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} \Bigg|_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} - \frac{8t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \\
& = \frac{4\sqrt{t}(\mu\sqrt{2t} - x)}{\sqrt{\pi}} \mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} \Bigg|_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} + \frac{1-8t-x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}} \mathbf{e}^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \\
& = 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(\left(\frac{1-x}{2} \right) \mathbf{e}^{-\left(\frac{x+1}{4\sqrt{t}}\right)^2} + \left(\frac{x+1}{2} \right) \mathbf{e}^{-\left(\frac{x-1}{4\sqrt{t}}\right)^2} \right) + \\
& + (1-8t-x^2) \left(\Phi_0\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}\right) \right) = \\
& = (1-8t-x^2) \left(\Phi_0\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}\right) \right) + \\
& + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left((x+1) \mathbf{e}^{-\frac{(x-1)^2}{16t}} - (x-1) \mathbf{e}^{-\frac{(x+1)^2}{16t}} \right) = \\
& = (1-8t-x^2) \left(\Phi_0\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2t}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2t}}\right) \right) + \\
& + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left((x+1) \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{16t} + \frac{x}{8t} - \frac{1}{16t}} - (x-1) \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{16t} - \frac{x}{8t} - \frac{1}{16t}} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-8t-x^2) \left(\Phi_0 \left(\frac{x+1}{2\sqrt{2t}} \right) - \Phi_0 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{2t}} \right) \right) + \\
&+ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2+1}{16t}} \left((x+1) e^{\frac{x}{8t}} - (x-1) e^{-\frac{x}{8t}} \right) = \\
&= 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2+1}{16t}} \left(x \frac{e^{\frac{x}{8t}} - e^{-\frac{x}{8t}}}{2} + \frac{e^{\frac{x}{8t}} + e^{-\frac{x}{8t}}}{2} \right) - \\
&- (x^2+8t-1) \left(\Phi_0 \left(\frac{x+1}{2\sqrt{2t}} \right) - \Phi_0 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{2t}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Используя тот факт, что

$$\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \operatorname{sh} \alpha, \quad \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \operatorname{ch} \alpha,$$

окончательно получим решение:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2+1}{16t}} \left(x \operatorname{sh} \left(\frac{x}{8t} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{x}{8t} \right) \right) - \\
&- (x^2+8t-1) \left(\Phi_0 \left(\frac{x+1}{2\sqrt{2t}} \right) - \Phi_0 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{2t}} \right) \right).
\end{aligned}$$

График данной функции имеет следующий вид (рис. 5.3):

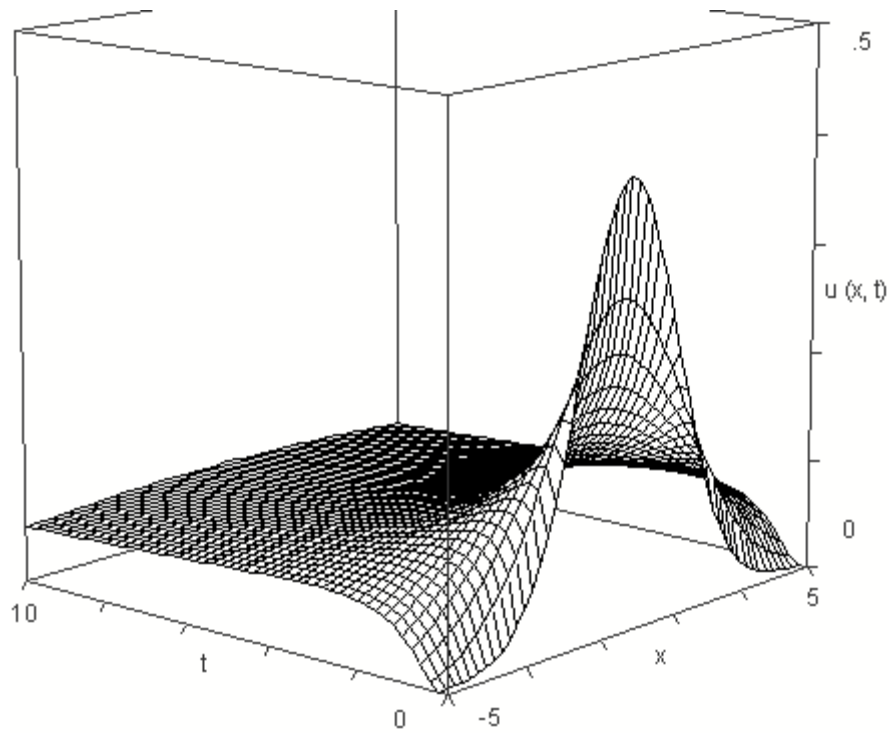


Рис. 5.3. График решения задачи 5.2

Пример 5.3. Решите следующую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & (0 \leq x \leq 1, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Решение. $a = 2$, $l = 1$, $f(x) = \sin \pi x$. Тогда

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 \sin \pi x \cdot \sin n\pi x \, dx = \int_0^1 (\cos \pi(n-1)x - \cos \pi(n+1)x) \, dx = \\ &= \int_0^1 \cos \pi(n-1)x \, dx - \int_0^1 \cos \pi(n+1)x \, dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \cos \pi(n-1)x \, dx - \left. \frac{\sin \pi(n+1)x}{\pi(n+1)} \right|_0^1 = \\
&= \int_0^1 \cos \pi(n-1)x \, dx = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

В результате по формуле (5.30) имеем $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x$.
График данной функции имеет следующий вид (рис. 5.4):

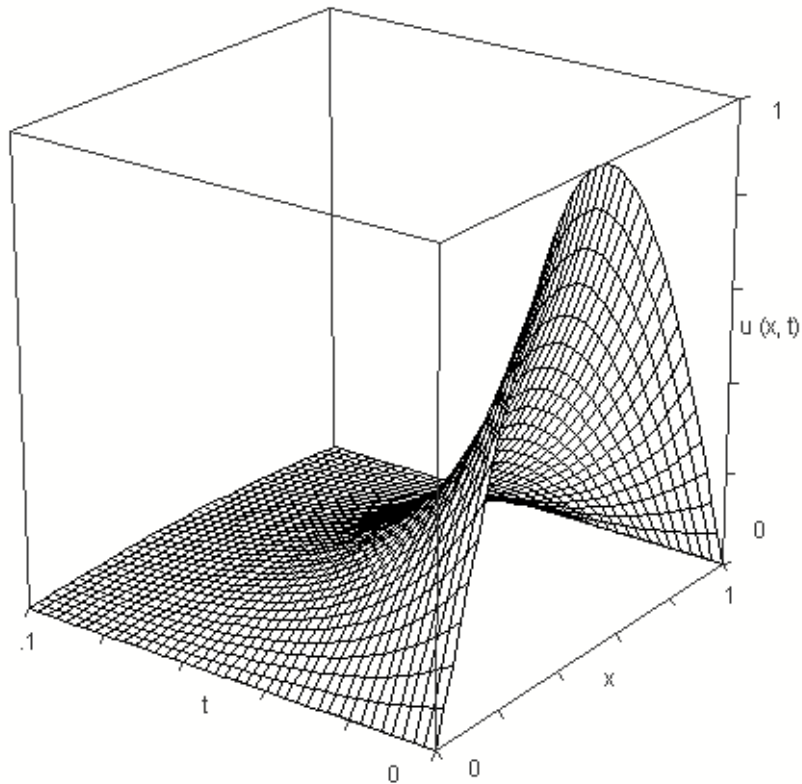


Рис. 5.4. График решения краевой задачи 5.3

ГЛАВА 6. РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найдите решение задачи Коши для однородного одномерного волнового уравнения (во всех задачах $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$).

$$1. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 8u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \sin 2x, \\ u_t(x, 0) = \cos 3x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 14u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \\ u_t(x, 0) = \frac{2}{1+x^2}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \frac{5x}{1+x^2}, \\ u_t(x, 0) = 3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 5u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = e^{-3x^2}, \\ u_t(x, 0) = \frac{2x-1}{3+x^2}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 7u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 2x^2, \\ u_t(x, 0) = \cos 7x. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 6u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \cos 7x, \\ u_t(x, 0) = \sin 5x. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 2u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 9x^2, \\ u_t(x, 0) = 11x. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 6u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \cos 3x, \\ u_t(x, 0) = \cos 7x. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \sin 2x, \\ u_t(x, 0) = \sin 4x. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 13u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = e^{3x}, \\ u_t(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 11u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 3x^2, \\ u_t(x, 0) = e^{-2x}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 10u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \cos 9x, \\ u_t(x, 0) = 2x. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0,5u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \sin \pi x, \\ u_t(x, 0) = \cos \pi x. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0,3u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \cos 2\pi x, \\ u_t(x, 0) = \sin 3\pi x. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0,2u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = x^3, \\ u_t(x, 0) = 3x. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0,1u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = e^{2x}, \\ u_t(x, 0) = \cos 3x. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \cos 3x, \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \sin 2x, \\ u_t(x, 0) = 2. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 13u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 3e^{2x}, \\ u_t(x, 0) = 4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 2u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 1 + \sin 2x, \\ u_t(x, 0) = 1 - \cos 3x. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 1 + \cos 4x, \\ u_t(x, 0) = 1 + \sin 3x. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 7u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 1 - e^{2x}, \\ u_t(x, 0) = 1 + e^{3x}. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = \sqrt{2} u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 2 - \sin x, \\ u_t(x, 0) = 3 \cos 2x. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = \sqrt{3} u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 4 + \cos 3x, \\ u_t(x, 0) = 3. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0, 1u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = 1 + x^2, \\ u_t(x, 0) = x + \sin x. \end{cases}$$

Задание 2. Найдите решение краевой задачи для однородного одномерного волнового уравнения.

$$1. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 8u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq \pi/2, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin 2x, \quad u_t(x, 0) = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \\ u(0, t) = 0, \quad \left(u \frac{\pi}{2}, t \right) = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 14u_{xx}(x, t), \quad (0 \leq x \leq 3, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = x(3 - x), \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{3}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 14u_{xx}(x, t), \quad (0 \leq x \leq 3, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = x(3 - x), \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{3}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 5u_{xx}(x, t), \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin 4x, \quad u_t(x, 0) = x \left(\frac{\pi}{4} - x \right), \\ u(0, t) = 0, \quad u \left(\frac{\pi}{4}, t \right) = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 7u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 2, t \geq 0), \\ u(x, 0) = x^2 - 2x, \\ u_t(x, 0) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right), \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 2u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 3, t \geq 0), \\ u(x, 0) = 9x^2 - 27x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{3}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 6u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 2, t \geq 0), \\ u(x, 0) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right), \\ u_t(x, 0) = x^2 - 2x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 6u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 3, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{3}, \quad u_t(x, 0) = x^2 - 3x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 11u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq 1/5, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin 5\pi x, \quad u_t(x, 0) = 5x^2 - x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1/5, t) = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 10u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 7, t \geq 0), \\ u(x, 0) = x^2 - 7x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{7}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(7, t) = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0, 5u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq 7, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{7}, \quad u_t(x, 0) = 7x - x^2, \\ u(0, t) = 0, \quad u(7, t) = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0, 3u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq 0, 2; t \geq 0), \\ u(x, 0) = x(x - 0, 2), \quad u_t(x, 0) = \sin 5\pi x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(0, 2; t) = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0, 2u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq 1; t \geq 0), \\ u(x, 0) = 2x(x - 1), \quad u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (0 \leq x < 2\pi, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t(x, 0) = 2x \left(\frac{x}{2} - \pi \right), \\ u(0, t) = 0, \quad u(2\pi, t) = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), \quad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0), \\ u(x, 0) = x(1 - x), \quad u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), \quad (0 \leq x \leq 2, t \geq 0), \\ u(x, 0) = x(x - 2), \quad u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 13u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq \pi, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin x, & u_t(x, 0) = x(x - \pi), \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 7u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 4, t \geq 0), \\ u(x, 0) = 2x(x - 4), & u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, & u(4, t) = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = \sqrt{2} u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 6, t \geq 0), \\ u(x, 0) = x^2 - 6x, & u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, & u(6, t) = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = \sqrt{3} u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 1, t \geq 0), \\ u(x, 0) = x^2 - x, & u_t(x, 0) = \sin 2\pi x, \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 2u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin 2x, & u_t(x, 0) = x \left(\frac{3\pi}{2} - x \right), \\ u(0, t) = 0, & u\left(\frac{3\pi}{2}, t\right) = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0,1u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq 3, t \geq 0), \\ u(x, 0) = 3x - x^2, & u_t(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = 0, & u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq \frac{1}{3}, t \geq 0), \\ u(x, 0) = \sin 3\pi x, & u_t(x, 0) = 3x^2 - x, \\ u(0, t) = 0, & u(\frac{1}{3}, t) = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 13u_{xx}(x, t), & (0 \leq x \leq \frac{1}{5}, t \geq 0), \\ u(x, 0) = -5x^2 + x, & u_t(x, 0) = \sin 5\pi x, \\ u(0, t) = 0, & u(\frac{1}{5}, t) = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0,1u_{xx}(x, t), \\ (0 \leq x \leq \pi; t \geq 0), \\ u(x, 0) = x(x - \pi), & u_t(x, 0) = \sin x, \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Струна длины l , закрепленная неподвижно своими концами в точках $x = 0$ и $x = l$ оси Ox , была оттянута посередине вверх на h так, что в результате этого она приняла форму параболы. Далее струну отпустили, и она стала колебаться по закону, описываемому уравнением

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

где $u(x, t)$ есть функция отклонения по вертикали от оси Ox точки x в момент времени t . Найдите функцию $u(x, t)$.

$$1. \quad l = 1; \quad h = 0,3; \quad c = 3. \qquad 2. \quad l = 3; \quad h = 0,5; \quad c = \sqrt{5}.$$

$$3. \quad l = 4; \quad h = 0,4; \quad c = 2. \qquad 4. \quad l = 5; \quad h = 0,2; \quad c = 5.$$

$$5. \quad l = 8; \quad h = 0,6; \quad c = \sqrt{2}. \qquad 6. \quad l = 3; \quad h = 0,7; \quad c = \sqrt{3}.$$

$$7. \quad l = 7; \quad h = 0,9; \quad c = \sqrt{6}. \qquad 8. \quad l = 7; \quad h = 0,8; \quad c = \sqrt{7}.$$

$$9. \quad l = 1; \quad h = 0,1; \quad c = 6. \qquad 10. \quad l = 5; \quad h = 0,2; \quad c = 7.$$

- | | |
|---|---|
| 11. $l = 6; \quad h = 1,2; \quad c = 9.$ | 12. $l = 2; \quad h = 0,3; \quad c = \sqrt{8}.$ |
| 13. $l = 10; \quad h = 2,2; \quad c = 8.$ | 14. $l = 9; \quad h = 3,2; \quad c = 4.$ |
| 15. $l = 3; \quad h = 0,6; \quad c = 6.$ | 16. $l = 1; \quad h = 0,2; \quad c = 1.$ |
| 17. $l = 8; \quad h = 1,2; \quad c = 2.$ | 18. $l = 9; \quad h = 2,1; \quad c = 5.$ |
| 19. $l = 11; \quad h = 2,2; \quad c = 3.$ | 20. $l = 4; \quad h = 0,3; \quad c = 7.$ |
| 21. $l = 3; \quad h = 0,1; \quad c = 2.$ | 22. $l = 1; \quad h = 0,125; \quad c = 3.$ |
| 23. $l = 6; \quad h = 1,4; \quad c = 1.$ | 24. $l = 7; \quad h = 0,5; \quad c = 7.$ |
| 25. $l = 9; \quad h = 1,1; \quad c = 6.$ | |

Задание 4. Найдите решение следующей краевой задачи для однородного двумерного волнового уравнения на прямоугольнике:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = c^2 (u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)), & (0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, t \geq 0), \\ u(x, y, 0) = 0, 01 \, xy(l_1 - x)(l_2 - y), & u_t(x, y, 0) = 0, \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(l_1, y, t) = 0, \quad \dots u(x, 0, t) = 0, & u(x, l_2, t) = 0. \end{cases}$$

- | | |
|--|--|
| 1. $l_1 = 1; \quad l_2 = 2; \quad c = \sqrt{8}.$ | 2. $l_1 = 2; \quad l_2 = 3; \quad c = \sqrt{14}.$ |
| 3. $l_1 = 3; \quad l_2 = 1; \quad c = \sqrt{3}.$ | 4. $l_1 = 4; \quad l_2 = 3; \quad c = \sqrt{5}.$ |
| 5. $l_1 = 1; \quad l_2 = 3; \quad c = \sqrt{7}.$ | 6. $l_1 = 3; \quad l_2 = 4; \quad c = \sqrt{6}.$ |
| 7. $l_1 = 4; \quad l_2 = 5; \quad c = \sqrt{2}.$ | 8. $l_1 = 6; \quad l_2 = 7; \quad c = \sqrt{6}.$ |
| 9. $l_1 = 7; \quad l_2 = 6; \quad c = \sqrt{3}.$ | 10. $l_1 = 5; \quad l_2 = 4; \quad c = \sqrt{13}.$ |
| 11. $l_1 = 2; \quad l_2 = 2; \quad c = \sqrt{11}.$ | 12. $l_1 = 3; \quad l_2 = 2; \quad c = \sqrt{10}.$ |

$$13. \quad l_1 = 7; \quad l_2 = 7; \quad c = \sqrt{0,5}.$$

$$14. \quad l_1 = 4; \quad l_2 = 4; \quad c = \sqrt{0,3}.$$

$$15. \quad l_1 = 4; \quad l_2 = 2; \quad c = \sqrt{0,2}.$$

$$16. \quad l_1 = 2; \quad l_2 = 4; \quad c = \sqrt{0,1}.$$

$$17. \quad l_1 = 6; \quad l_2 = 6; \quad c = 1.$$

$$18. \quad l_1 = 5; \quad l_2 = 1; \quad c = \sqrt{3}.$$

$$19. \quad l_1 = 1; \quad l_2 = 5; \quad c = \sqrt{13}.$$

$$20. \quad l_1 = 3; \quad l_2 = 8; \quad c = \sqrt{2}.$$

$$21. \quad l_1 = 5; \quad l_2 = 7; \quad c = \sqrt{3}.$$

$$22. \quad l_1 = 6; \quad l_2 = 5; \quad c = \sqrt{7}.$$

$$23. \quad l_1 = 8; \quad l_2 = 9; \quad c = \sqrt{2}.$$

$$24. \quad l_1 = 4; \quad l_2 = 8; \quad c = \sqrt{3}.$$

$$25. \quad l_1 = 1; \quad l_2 = 9; \quad c = \sqrt{0,1}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Широкое применение дифференциальных уравнений достаточно актуально в современном научном мире. Описание и моделирование многих статических и динамических процессов приводит к уравнениям в частных производных, которые надо уметь решать.

Уравнения математической физики – один из немногих разделов математики, где рассматриваются задачи, которые позволяют пройти все основные стадии ее решения – от физической модели до компьютерной. Этот факт имеет большое значение, так как устанавливает очевидную связь физических явлений с математическим аппаратом, который эти явления описывает, и программными средствами, которые на основе математической модели позволяют построить компьютерную модель реального физического явления. Поэтому целесообразно изучать уравнения математической физики, параллельно или после изучения какой-либо математической программы, например, MathCAD.

В целом, пособие ориентировано на разнообразные инженерные приложения дифференциальных уравнений в частных производных в математическом моделировании.

Предлагаемое учебное пособие может быть использовано для формирования фундаментальных основ теории моделирования и применения математического аппарата формализации процессов в сложных системах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука. – 2003. – 416 с.
2. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: ООО «Изд-во Астрель»: «Изд-во АСТ», 2003. – 499 с.
3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1999. – Ч. 2 – 416 с.
5. Математическая физика. Энциклопедия / гл. ред. Л. Д. Фадеев. –

М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. – 691 с.

6. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

7. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С Пискунов. – М.: Наука, 2003. – 309 с.

9. Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин. – Изд. 4-е, стер. – М.: УРСС, 2007. – 206 с.

10. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.

11. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 2008. – 176 с.

12. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

13. Егоров, А.И. Дифференциальные уравнения для инженерных направлений / А.И. Егоров, Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева. – Казань: Изд-во КГУ, 2013. – 52 с.

14. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения. Введение в математическое моделирование в 2-х ч / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – М.: Изд-во Университетская книга, Логос, 2007. – Ч. 2. – 352 с.

15. Мышенков, В.И. Численные методы: ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособ. для студ. спец. 073000 / В.И. Мышенков, Е.В. Мышенков. – М.: МГУЛ, 2005. – 109 с.

16. Горелов, Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутты): учеб. пособие / Ю.Н. Горелов. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 48 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.....	4
1.1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными.....	4
1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.....	7
1.3. Постановка задач для уравнений математической физики. Начальные и краевые условия.....	11
Глава 2. Одномерное волновое уравнение.....	14
2.1. Решение задачи Коши для однородного одномерного волнового уравнения методом д'Аламбера.....	17
2.2. Решение краевой задачи для однородного одномерного волнового уравнения методом Фурье.....	20
2.3. Примеры решения типовых задач.....	25
Глава 3. Двумерное волновое уравнение	33
3.1. Решение краевой задачи для двумерного волнового уравнения на прямоугольнике методом Фурье	33
3.2. Пример решения типовой задачи.....	38
Глава 4. Двумерное уравнение Лапласа.....	40
4.1. Решение задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа на прямоугольнике.....	43
4.2. Пример решения типовой задачи.....	47
Глава 5. Одномерное уравнение теплопроводности	51
5.1. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности методом интегрального преобразования Фурье.....	53
5.2. Решение краевой задачи для однородного одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье.....	58
5.3. Примеры решения типовых задач	61
Глава 6. Расчетно-графические задания.....	68
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	77
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	77

Учебное издание

**Стенюхин Леонид Витальевич
Семенов Михаил Евгеньевич
Некрасова Наталия Николаевна**

**ПРАКТИКУМ ПО УРАВНЕНИЯМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Подписано в печать _____ 2018.
Формат 60x84 1/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. _____. Тираж _____ экз. Заказ № _____.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет» 394026 Воронеж, Московский проспект, 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский проспект, 14