

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Воронежский государственный архитектурно–строительный университет

В.В. Горяйнов, Т.Г. Святская, Л.В. Акчурина, В.А. Попова

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
РЯДЫ**

Учебное пособие

Под редакцией
профессора С.М. Алейникова

*Рекомендовано редакционно-издательским советом
Воронежского государственного архитектурно-строительного университета
в качестве учебного пособия для студентов заочной формы обучения
всех специальностей, кроме ЭУС*

Воронеж 2007

УДК 517.9+517.5(075)

ББК 22.193я73

Д 503

Горайнов, В.В. Дифференциальные уравнения. Ряды. [Текст]: учебное пособие / В.В. Горайнов, Т.Г. Святская, Л.В. Акчурина, В.А. Попова; под ред. проф. С.М. Алейникова; Воронеж. гос. арх.-строит. ун-т. – Воронеж, 2007. – 136 с.

ISBN 978-5-89040-185-4

Предлагаемое учебное пособие содержит теоретический материал четвертой части курса математики, изучаемого студентами на заочном отделении Воронежского государственного архитектурно-строительного университета: дифференциальные уравнения и ряды. Также в пособии приведен разбор учебных задач на данные темы.

Предназначено для студентов заочного отделения ВГАСУ всех специальностей, кроме ЭУС, для изучения курса «Дифференциальные уравнения. Ряды», кроме того, пособие может быть полезно и студентам очной формы обучения.

Ил. 16. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра математического моделирования Воронежского государственного университета;

И.Я. Новиков, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета

ISBN 978-5-89040-185-4

© Горайнов В.В.,
Святская Т.Г.,
Акчурина Л.В.,
Попова В.А., 2007
© ВГАСУ, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.....	6
1.1. Основные определения.....	6
1.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.....	7
2. Дифференциальные уравнения первого порядка.....	9
2.1. Основные определения.....	9
2.2. Уравнения с разделяющимися переменными.....	12
2.3. Однородные уравнения первого порядка.....	17
2.4. Линейные уравнения первого порядка.....	20
2.4.1 Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).....	21
2.4.2 Метод И. Бернулли.....	23
2.5. Уравнение Я. Бернулли.....	27
2.6. Уравнения в полных дифференциалах.....	30
3. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	32
3.1. Основные определения.....	32
3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка.....	33
3.2.1. Уравнения, допускающие непосредственное интегрирование.....	34
3.2.2. Уравнения, не содержащие искомую функцию.....	35
3.2.3. Уравнения, не содержащие независимую переменную...	38
3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ).....	42
3.3.1. Определения и основные свойства решений.....	42
3.3.2. ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.....	46
3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛНДУ).....	51
3.4.1. Структура общего решения ЛНДУ.....	51
3.4.2. Интегрирование ЛНДУ (метод вариации произвольных постоянных).....	53
3.4.3. Наложение решений ЛНДУ.....	56
3.4.4. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.....	57
4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.....	70
4.1. Основные определения.....	70
4.2. Интегрирование нормальных систем.....	71

5. Числовые ряды	74
5.1. Основные определения.....	74
5.2. Свойства числовых рядов.....	76
5.3. Признаки сходимости знакоположительных рядов.....	77
5.3.1. Необходимый признак сходимости.....	78
5.3.2. Признаки сравнения.....	81
5.3.3. Признак Даламбера.....	84
5.3.4. Радикальный признак Коши.....	88
5.3.5. Интегральный признак Коши.....	90
5.4. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.....	93
5.4.1. Знакопеременные ряды.....	93
5.4.2. Абсолютная и условная сходимость.....	95
5.4.3. Знакочередующиеся ряды.....	96
6. Функциональные ряды.....	102
6.1. Основные определения.....	102
6.2. Мажорируемые ряды.....	104
6.3. Степенные ряды.....	108
6.3.1. Теорема Абеля.....	108
6.3.2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.....	110
6.3.3. Свойства степенных рядов.....	115
6.4. Разложение функций в степенные ряды.....	116
6.4.1. Ряды Тейлора и Маклорена.....	116
6.4.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.....	118
6.5. Приложение степенных рядов.....	120
6.5.1. Приближенное вычисление значений функций и определенных интегралов.....	120
6.5.2. Решения дифференциальных уравнений.....	122
7. Ряды Фурье.....	124
7.1. Тригонометрические ряды.....	124
7.2. Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом 2π	125
7.3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2π	128
7.4. Ряды Фурье для функций с периодом $2l$	129
7.5. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[0, l]$	132
Заключение.....	135
Библиографический список.....	136

Введение

Предлагаемое учебное пособие «Дифференциальные уравнения. Ряды» содержит теоретический материал четвертой части курса математики, изучаемого студентами на заочном отделении Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

Данное пособие состоит из семи глав. Первая глава включает описание задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, и основные определения, справедливые для дифференциальных уравнений любого порядка.

Вторая глава посвящена таким дифференциальным уравнениям первого порядка, как уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, в полных дифференциалах и Бернулли. Большое внимание уделено нахождению особых решений дифференциальных уравнений.

В третьей главе описано решение дифференциальных уравнений второго порядка, которые допускают понижение порядка. Также приведены сведения о линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнениях второго порядка.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в четвертой главе.

Пятая глава содержит описание таких числовых рядов, как знакоположительные, знакочередующиеся и знакопеременные. Здесь рассматриваются свойства числовых рядов и их признаки сходимости: необходимый и достаточные. Особое внимание уделено исследованию знакопеременных рядов на абсолютную и условную сходимость.

Функциональные ряды рассмотрены в шестой главе. Здесь приводятся понятия мажорируемого функционального ряда. Значительное место в главе занимает описание степенных рядов: их свойств, нахождение радиуса и интервала сходимости, разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена), а также приложения степенных рядов для приближенного вычисления значений функций и определенных интегралов и решения дифференциальных уравнений.

Рядам Фурье посвящена седьмая глава. В ней приводятся разложения в ряд Фурье функций, имеющих период 2π и $2l$. Также рассматривается разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций и функций, заданных на отрезке $[0, l]$.

Особое внимание в пособии уделено доступности изложения теоретического материала, а многочисленные примеры, детальное описание решения типовых задач контрольных работ и подробный разбор примеров призваны облегчить студентам-заочникам изучение и практическое освоение дифференциальных уравнений и рядов.

Авторы выражают благодарность кандидатам физ.-мат. наук, доцентам А.А. Седаеву, А.М. Дементьевой и А.В. Гнездилову, внимательно прочитавшим рукопись. Их ценные замечания и рекомендации помогли улучшить содержание пособия.

1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

1.1. Основные определения

Функциональную зависимость между двумя переменными x и y (или просто функцию $y = y(x)$) можно задать разными способами. Раньше, при изучении разделов математического анализа, мы имели дело с явным заданием – формулой $y = f(x)$ и неявным заданием – уравнением $F(x, y) = 0$. Однако функциональная связь между x и y может быть выражена не только уравнением вида $F(x, y) = 0$. Предметом нашего рассмотрения теперь будут уравнения, в которых в описание зависимости между x и y вовлечены не только сами величины, но и их производные или дифференциалы. В отличие от уравнения $F(x, y) = 0$ такие уравнения принято называть *дифференциальными* (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.).

Определение 1.1. *Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные, т.е. уравнение вида*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, а $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – ее производные.

Отметим, что неизвестным в дифференциальном уравнении является не число y , а функция $y = y(x)$.

Далее мы будем для краткости заменять слова «дифференциальное уравнение» на ДУ.

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют **обыкновенным**; в противном случае – ДУ в частных производных.

Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Определение 1.2. *Решением ДУ называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее вместо y в исходное ДУ обращает его в тождество.*

Процесс отыскания решения ДУ называется его **интегрированием**, а график решения ДУ – **интегральной кривой**.

Простейшим примером дифференциального уравнения может служить уравнение $y' = f(x)$. В этом уравнении ищется функция, производная которой

совпадает с заданной функцией $f(x)$. Из темы интегрирование нам известен инструмент, который решает такую задачу. Это неопределенный интеграл. Таким образом, решением будет любая функция вида $y = \int f(x) dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Пример 1.1. Решениями уравнения $y'(x) = \sin x$ являются функции $y = -\cos x + C$ – первообразные для функции $y = \sin x$.

Определение 1.3. Наивысшей порядок производной, входящей в ДУ, называется **порядком ДУ**.

Например, уравнение $3y''' - y'' \arcsin x = 0$ есть обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $y' - y''\sqrt{x} = (y)^2$ – ДУ второго порядка.

1.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Дифференциальные уравнения часто возникают при решении геометрических и физических задач. Так, например, с ДУ приходится иметь дело при решении задач на движение, ибо скорость – это первая производная пути по времени, а ускорение – это вторая производная пути по времени.

Рассмотрим задачу о движении пружинного маятника массой m . В качестве точки отсчета примем положение его равновесия (рис.1.1), а в качестве

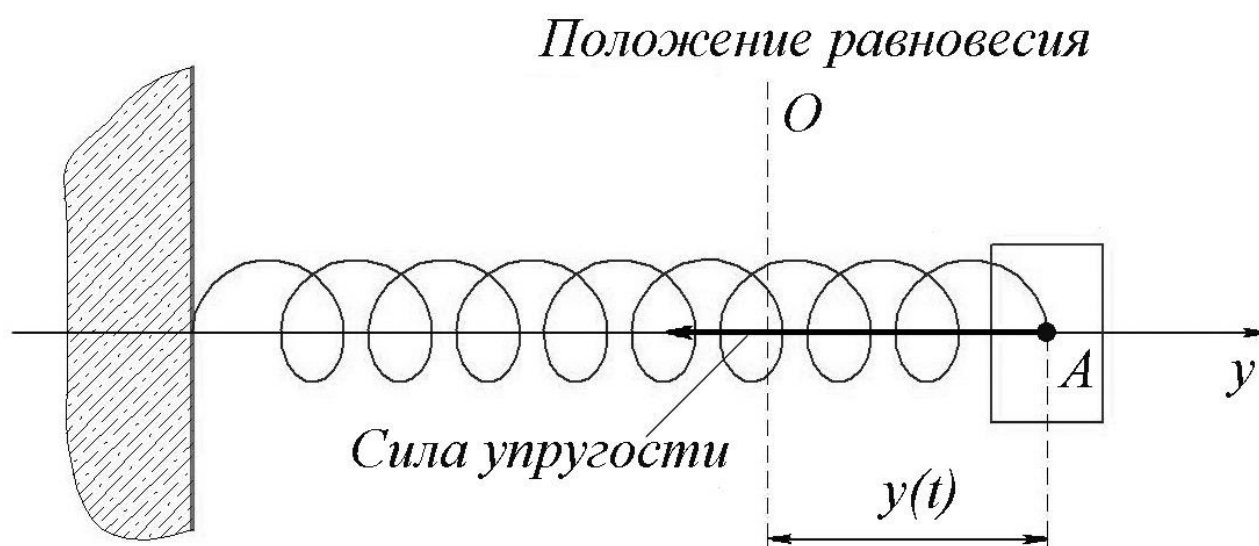


Рис. 1.1

неизвестной функции рассмотрим отклонение $y = y(t)$ в момент времени t центра A маятника от точки O . Знание такой функции полностью определяет закон движения маятника в зависимости от времени t . Согласно закону Гука сила $F(t)$ пружины, приложенная к маятнику, прямо пропорциональна отклонению $y(t)$ маятника от положения равновесия, т.е.

$$F(t) = -ky(t),$$

где $k > 0$ - коэффициент упругости пружины. Знак минус выбран потому, что сила и отклонение имеют противоположные направления.

Согласно второму закону Ньютона

$$F(t) = ma(t),$$

где $a(t)$ - ускорение маятника в момент времени t .

Так как скорость $v(t) = y'(t)$, а ускорение $a(t) = v'(t) = y''(t)$, мы получаем тождество

$$my''(t) = F(t) = -ky(t),$$

т.е. искомая функция $y(t)$ является одним из решений дифференциального уравнения

$$my'' + ky = 0, \tag{1.2}$$

которое называется уравнением свободных колебаний пружинного маятника.

Легко проверить, что функция

$$y = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

где C_1 и C_2 - любые постоянные числа, является решением ДУ (1.2). Мы видим, что это дифференциальное уравнение, как и уравнение из *примера 1.1* имеет не одно, а бесчисленное множество решений. В данном случае это произошло потому, что мы ничего не сказали о начальном положении и начальной скорости маятника, от которых, очевидно, зависит дальнейшее его движение. Чтобы выделить то единственное решение $y(t)$, которое описывает истинное движение *конкретного* маятника, надо дополнить ДУ (1.2) начальными условиями: задать начальное положение $y(0) = y_0$ и начальную скорость $y'(0) = v_0$ маятника. Можно доказать, что существует только одна функция $y = \varphi(t)$, удовлетворяющая ДУ (1.2) и начальным условиям, которая и описывает закон движения маятника при заданных начальных условиях.

Знакомство с теорией дифференциальных уравнений мы начнем с простейшего случая - с ДУ первого порядка.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Основные определения

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) связывает независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' . Если из уравнения (2.1) можно выразить y' через x и y , то ДУ принимает вид

$$y' = f(x, y) \quad (2.2)$$

и называется ДУ *первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Также ДУ может быть записано через *дифференциалы* в следующем виде:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (2.3)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - известные функции.

Отметим, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому. Так, разделив обе части ДУ (2.3) на dx и заменив $\frac{dy}{dx}$ на y' , мы снова приходим к ДУ первого порядка вида (2.1) или (2.2):

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y).$$

Пример 1.1 показывает, что ДУ первого порядка обычно имеет не одно, а *бесчисленное множество* решений, зависящих от параметра – произвольной постоянной C .

Чтобы выделить одно решение, ДУ дополняют начальным условием.

Начальное условие для ДУ первого порядка задается следующим образом:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y|_{x=x_0} = y_0. \quad (2.4)$$

Условие (2.4) означает, что при $x = x_0$ искомая функция y должна быть равна заданному числу y_0 .

Определение 2.1. *Задача отыскания решения ДУ первого порядка (2.2), удовлетворяющего заданному начальному условию (2.4), называется задачей Коши.*

Иными словами, *задача Коши* имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

При этом точка (x_0, y_0) должна принадлежать области D определения функции $f(x, y)$, так как в противном случае задача Коши становится противоречивой.

Определение 2.2. *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:*

1) функция $\varphi(x, C)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении C ;

2) каково бы ни было начальное условие (2.4), можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию (2.4).

Иногда выполнение условия 2) не требуется.

Определение 2.3. *Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.*

Найти решение ДУ в виде $y = \varphi(x, C)$ (явно) удастся не всегда. Иногда при нахождении $y = y(x)$ удастся перейти от дифференциального уравнения к эквивалентному недифференциальному уравнению $\Phi(x, y, C) = 0$, т.е. задать y неявно. В этом случае считается, что ДУ решено и решение найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$ и уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется **общим интегралом** ДУ, а уравнение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется **частным интегралом** дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения формула $y = \varphi(x, C)$ общего решения ДУ определяет **семейство интегральных кривых** на плоскости Oxy . Частное решение ДУ $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющее начальному условию (2.4), задает (определяет) ту кривую из этого семейства, которая проходит через точку (x_0, y_0) .

Чтобы придать геометрический смысл самому ДУ первого порядка (2.2), рассмотрим плоскость Oxy . В каждой точке $M(x, y)$ плоскости Oxy проведем маленький отрезок с угловым коэффициентом $k(x, y) = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y) = y'(x)$ (рис. 2.1). Полученная картина называется **полем направлений** на плоскости, заданным ДУ $y' = f(x, y)$. Если $y = y(x)$ – решение ДУ (2.2), то

$y'(x) \equiv f(x, y(x)) = k(x, y(x))$. Отсюда ясно, что *график решения (интегральная кривая $y = y(x)$) в каждой своей точке имеет касательную, угловой коэффициент которой совпадает с полем направлений в этой точке.*

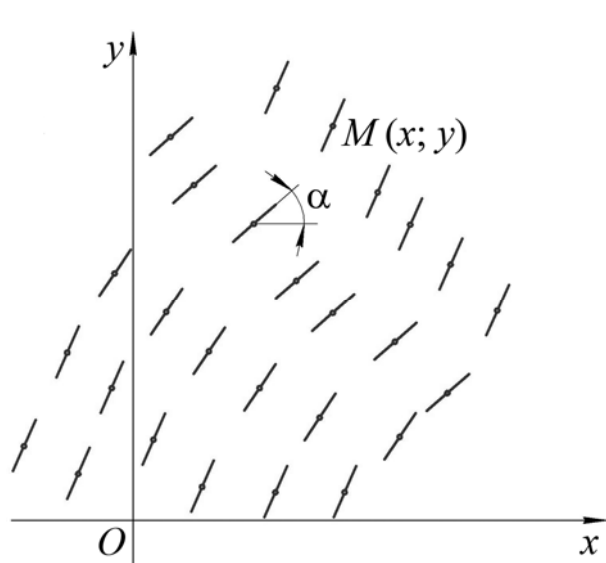


Рис. 2.1

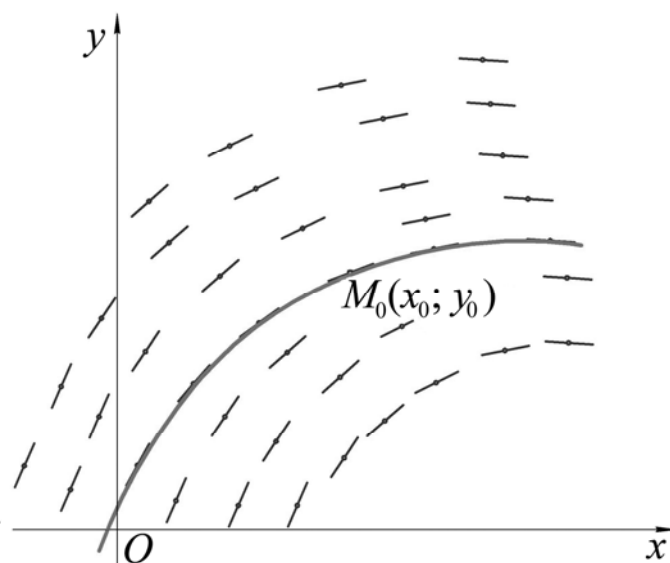


Рис. 2.2

Итак, с геометрической точки зрения уравнение $y' = f(x, y)$ определяет на плоскости Oxy *поле направлений*, а любая интегральная кривая *касается поля направлений в каждой своей точке* (рис. 2.2).

Приведенное выше геометрическое описание ДУ первого порядка хорошо иллюстрируется на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют *поле направлений*, а интегральными линиями этого поля служат так называемые магнитные силовые линии.

Одной из главных теорем в теории дифференциальных уравнений является **теорема о существовании и единственности решения задачи Коши**, которую приведем здесь без доказательства.

Теорема 2.1 (теорема Коши). Если в уравнении (2.2) функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой открытой области D на плоскости Oxy , содержащей точку (x_0, y_0) , то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (2.4).

Геометрически теорема утверждает, что *через каждую внутреннюю точку $M_0(x_0, y_0)$ области D проходит единственная интегральная кривая* (рис. 2.2).

Существует несколько типов уравнений первого порядка, общее решение которых можно получить с помощью интегрирования. Это уравнения *с разделяющимися переменными, с однородной правой частью (или просто однородные), линейные и некоторые другие*. Каждое из них решается своим способом. Поэтому, прежде чем применять к конкретному дифференциальному уравнению некоторый метод решения, **надо сначала правильно определить тип дифференциального уравнения.**

Для этого ДУ рекомендуется привести к виду $y' = f(x, y)$, т.е. разрешить относительно производной. **Это важный начальный этап решения любого ДУ первого порядка, с которого и следует начинать его решение.** Из этого вида ясно, что ДУ полностью определяется функцией $f(x, y)$ двух переменных. В зависимости от особенностей этой функции получается тот или иной тип дифференциального уравнения.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 2.4. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его правую часть можно разложить на множители так, чтобы каждый множитель зависел только от одной переменной, т.е.

$$y' = f(x)\varphi(y). \quad (2.5)$$

Для решения ДУ с разделяющимися переменными надо выполнить следующие действия:

1. Заменить в формуле (2.5) y' на $\frac{dy}{dx}$. В результате получаем

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y).$$

2. Разделить переменные (собрать все, что содержит y , в левой части, а то, что содержит x , в правой). Для этого надо сначала умножить обе части на dx :

$$dy = f(x)\varphi(y)dx,$$

а затем разделить обе части уравнения на $\varphi(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

3. Проинтегрировать каждую часть последнего уравнения по своей переменной:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx.$$

Пусть первообразная в левой части равна $\Phi(y)$, а в правой части – $F(x)$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\Phi(y) = F(x) + C. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6), связывающее x и y , является *общим интегралом* исходного дифференциального уравнения. Считается, что дифференциальное уравнение уже решено.

Если из (2.6) удастся выразить y через x : $y = \varphi(x, C)$, то получится формула общего решения исходного дифференциального уравнения $y' = f(x)\varphi(y)$.

4. Если функция $\varphi(y) = 0$ при $y = a_1, y = a_2, \dots, y = a_n$ ($a_1, a_2, \dots, a_n$ – константы), то функции

$$y \equiv a_1, y \equiv a_2, \dots, y \equiv a_n,$$

очевидно, являются решением данного ДУ (2.5). Эти решения были потеряны при разделении переменных, и если они не получаются из общего решения $y = \varphi(x, C)$ ни при каком C , то они называются *особыми решениями* и их следует добавить к общему решению $y = \varphi(x, C)$.

Следующая теорема является обоснованием изложенного метода решения.

Теорема 2.2. Каждое решение $y = y(x)$ уравнения (2.5) такое, что $y(x) \neq a_1, a_2, \dots, a_n$ является решением уравнения (2.6), и обратно, каждое решение уравнения (2.6) является решением уравнения (2.5).

Доказательство. Пусть $y = y(x)$ является некоторым решением уравнения (2.5), таким, что $\varphi(y(x))$ не равно 0 тождественно. Тогда согласно определению 1.2 выполняется тождество

$$y'(x) \equiv f(x)\varphi(y(x)).$$

Разделим обе части на $\varphi(y(x))$:

$$\frac{y'(x)}{\varphi(y(x))} \equiv f(x).$$

Если две функции равны, то первообразные, взятые от них, могут отличаться лишь на константу. Поэтому если первообразная от функции $\frac{y'}{\varphi(y)}$ рав-

на $\Phi(y)$, то первообразная от $\frac{y'(x)}{\varphi(y(x))}$ равна $\Phi(y(x))$ и будет отличаться от

первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ только на константу:

$$\Phi(y(x)) \equiv F(x) + C. \quad (2.7)$$

Таким образом, каждое решение уравнения (2.5) является решением уравнения (2.6).

Наоборот, если для некоторой функции $y = y(x)$ выполняется тождество (2.7), то, дифференцируя каждую из частей этого тождества по x и выполняя очевидные преобразования, мы придем обратным ходом к тождеству $y'(x) \equiv f(x)\varphi(y(x))$. То есть каждое решение уравнения (2.6) обязательно является решением уравнения (2.5).

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если ДУ изначально было записано в дифференциальной форме (2.3) и имело вид

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0, \quad (2.8)$$

то оно также является ДУ с разделяющимися переменными.

Особенность уравнения (2.8) состоит в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , другая - только от y .

Решение ДУ вида (2.8) начинается с разделения переменных, которое можно осуществить, выполнив почленное деление на $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$. Проинтегрировав получившееся после этого выражение, получаем общий интеграл уравнения (2.8) в виде

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C.$$

Обратим внимание, что при решении ДУ (2.8) могут быть потеряны решения – константы $y = a_1, a_2, \dots, a_n$ (при $Q_1(a_i) = 0, i = \overline{1, n}$) и $x = b_1, b_2, \dots, b_k$ (при $P_2(b_j) = 0, j = \overline{1, k}$).

Рассмотрим примеры решения ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 2.1. Требуется найти все решения дифференциального уравнения $y' = \frac{1+y^2}{1-x^2}$.

Решение. Определяем тип ДУ. Уравнение уже записано в виде (2.2) (разрешено относительно производной). Кроме того, видно, что оно с разделяющимися переменными, так как правая часть есть произведение функций $(1+y^2)$ и $\frac{1}{1-x^2}$, каждая из которых зависит только от одной переменной.

1. Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1-x^2}$.

2. **Разделяем переменные:** для этого обе части умножим на dx и разделим на $1+y^2 \neq 0$. Получаем $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1-x^2}$ уравнение с разделенными переменными. Так как функция $(1+y^2)$ никогда не обращается в нуль, то *особых решений* данное ДУ не имеет, а его общее решение содержит все возможные решения.

3. Интегрируем каждую часть *по своей* переменной: $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1-x^2}$.

После интегрирования имеем $\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$. Это так называемый *общий интеграл*, и если из него выразить y через x , то получим формулу *общего решения*.

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид $y = \operatorname{tg} \left(\ln \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|} + C \right)$.

Пример 2.2. Требуется найти все решения дифференциального уравнения $ydx + (x + xy)dy = 0$.

Решение. Определяем тип ДУ. Уравнение записано в дифференциальной форме. Приведем его к виду (2.8). Для этого во втором слагаемом вынесем за скобки x . Получим $ydx + x(1+y)dy = 0$. Теперь видно, что данное ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, почленно поделив ДУ на $xy \neq 0$. В результате имеем $\frac{dx}{x} + \frac{(1+y)dy}{y} = 0$.

Далее интегрируем каждую часть полученного выражения *по своей* переменной $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1+y)dy}{y} = C$ и получаем общий интеграл $\ln|x| + \ln|y| + y = C$.

При делении на (xy) предполагалось $xy \neq 0$, т.е. $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Однако $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями уравнения $xy = 0$, и при подстановке их в исходное ДУ они обращают его в тождество. Следовательно, $x = 0$ и $y = 0$ тоже решения данного ДУ. Но $x = 0$ и $y = 0$ из общего интеграла $\ln|x| + \ln|y| + y = C$ не получаются ни при каких значениях произвольной постоянной C (так как $\ln 0$ не существует). Значит, $x = 0$ и $y = 0$ являются *особыми решениями* и их нужно добавить к общему интегралу: совокупность функций

$$\begin{cases} \ln|x| + \ln|y| + y = C \\ x \equiv 0, y \equiv 0 \end{cases} \quad \text{— есть все решения данного ДУ.}$$

Пример 2.3. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} (1+x^2)dy + ydx = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Решение. При решении задачи Коши сначала ищут общее решение, а затем подбирают C так, чтобы выполнялось начальное условие.

Уравнение записано в дифференциальной форме и имеет вид (2.6). Значит, данное ДУ с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, почленно поделив ДУ на $(1+x^2)y$, считая, что $y \neq 0$. При делении на y мы потеряли решение $y \equiv 0$, но оно не является искомым решением задачи Коши.

В результате имеем
$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1+x^2} = 0.$$

Далее интегрируем каждую часть полученного выражения по своей переменной $\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{1+x^2} = C$ и получаем общий интеграл $\ln|y| + \operatorname{arctg} x = C$.

Воспользуемся начальным условием $y(1) = 1$ для определения значения произвольной постоянной C . Подставим в общий интеграл $x = 1$ и $y = 1$. Получим $\ln 1 + \operatorname{arctg} 1 = C$. После вычислений имеем $0 + \frac{\pi}{4} = C$ или $C = \frac{\pi}{4}$. Найденное значение постоянной C выделяет из общего интеграла частный: $\ln|y| + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$, удовлетворяющий начальному условию $y(1) = 1$. Выразив из

частного интеграла y , получим частное решение: $\ln|y| = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x$ или

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x} \Rightarrow |y| = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x} \Rightarrow y = \pm e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}.$$

Т.е. при отыскании y мы получили две функции: $y = +e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$ и $y = -e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$, но функция $y = -e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$ отрицательна, что не соответствует начальному условию. Таким образом, оконча-

тельно имеем $y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$.

В дальнейшем преобразования, проводимые с произвольной постоянной C , не будем оговаривать столь подробно.

2.3. Однородные уравнения первого порядка

Однородные ДУ первого порядка приводятся к уравнению с разделяющимися переменными.

Прежде чем дать определение однородного ДУ первого порядка, выясним, какие функции называются однородными.

Определение 2.5. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n -го порядка (измерения) относительно переменных x и y , если при замене x и y на λx и λy , где λ – произвольный множитель, вся функция умножится на λ^n , т. е. справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y). \quad (2.9)$$

Пример 2.4. Показать, что функция $f(x, y) = 5x^2y - 2xy^2$ есть однородная функция третьего порядка.

Решение.

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 5(\lambda x)^2(\lambda y) - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 = 5\lambda^2x^2\lambda y - 2\lambda x\lambda^2y^2 = \\ &= \lambda^3(5x^2y - 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y). \end{aligned}$$

Пример 2.5. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ есть однородная функция нулевого порядка.

Решение.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{\lambda^2x^2 + \lambda^2y^2}{2\lambda^2xy} = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{2\lambda^2xy} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \lambda^0 f(x, y).$$

Определение 2.6. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка (измерения) относительно x и y .

Покажем, что однородное ДУ $y' = f(x, y)$ можно записать в виде

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.10)$$

Так как $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка, то по определе-

нию $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Положим в этом равенстве $\lambda = \frac{1}{x}$. Получим

$$f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что однородная функция нулевого порядка зависит только от отношения аргументов.

В связи с этим однородное ДУ следует решать с помощью замены

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т.е. } y = ux \Rightarrow y' = xu' + u, \quad (2.12)$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Сделаем подстановку (2.12) в ДУ (2.10). Получим ДУ $xu' + u = g(u)$ с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $u = u(x)$.

Действительно $xu' = g(u) - u$, $u' = \frac{g(u) - u}{x}$, $\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$. Проинтегрировав

последнее равенство, имеем

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C \text{ или } G(u) = \ln|x| + C,$$

где $G(u)$ – первообразная $\frac{1}{g(u) - u}$, а C – любое неравное нулю число.

Заменяя “ u ” на $\frac{y}{x}$, находим общий интеграл

$$G\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$$

исходного ДУ.

Замечание 2.2. Так как отношение двух однородных функций одного и того же порядка есть однородная функция нулевого порядка, то уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ будет однородным в том случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – **однородные функции одного и того же измерения (порядка)**.

Рассмотрим примеры решения однородных ДУ.

Пример 2.6. Найти все решения ДУ $x + 2y + y y' = 0$.

Решение. Определим тип ДУ. Для этого приведем его к виду, разрешенному относительно производной.

$y y' = -(x + 2y)$, $y' = -\frac{x + 2y}{y}$. Очевидно, уравнение не является ДУ с раз-

деляющимися переменными. Выясним, однородное оно или нет. Для этого проверим, что для функции $f(x, y) = -\frac{x+2y}{y}$ выполнено тождество $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Действительно,

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda x + 2\lambda y}{\lambda y} = -\frac{\lambda(x+2y)}{\lambda y} = -\frac{x+2y}{y} = f(x, y).$$

Таким образом, наше ДУ есть однородное уравнение первого порядка и для его решения делаем замену $y = ux$, $y' = xu' + u$. В результате получаем дифференциальное уравнение $xu' + u = -\frac{x+2ux}{ux}$, из которого будем искать u .

Сначала приведем уравнение к виду, разрешенному относительно производной

$$xu' + u = -\frac{x(1+2u)}{ux}, \quad xu' + u = -\frac{1+2u}{u}, \quad u' = \frac{\left(-\frac{1+2u}{u} - u\right)}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{-1-2u-u^2}{ux} \quad \text{и,}$$

наконец, $\frac{du}{dx} = \frac{-(1+u)^2}{ux}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Если

$u \neq -1$, т.е. $\frac{-(1+u)^2}{u} \neq 0$, то, разделяя переменные, имеем $\frac{u du}{(1+u)^2} = -\frac{dx}{x}$. После

интегрирования $\int \frac{(u+1)-1 du}{(1+u)^2} = -\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{du}{1+u} - \int \frac{du}{(1+u)^2} = -\int \frac{dx}{x}$ получим

$$\ln|1+u| + \frac{1}{1+u} = -\ln|x| + C \quad \text{или} \quad \ln|(1+u)x| + \frac{1}{1+u} = C. \quad \text{Теперь заменим } u \text{ на } \frac{y}{x}$$

$\ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)x\right| + \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = C$ и найдем общий интеграл $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$. При

$u = -1$ получаем еще одно решение $y = -x$, которое не может быть получено ни при каком значении C из общего интеграла. Следовательно, все решения ис-

ходного ДУ запишутся в виде
$$\begin{cases} \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C, \\ y = -x. \end{cases}$$

Пример 2.7. Решить задачу Коши:
$$\begin{cases} xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Решение. Найдем сначала общее решение ДУ. Преобразуем данное дифференциальное уравнение к виду $y' = f(x, y)$. Для этого разделим обе его части

на dx :

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ или } y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}. \text{ Очевидно, уравнение не явля-}$$

ется ДУ с разделяющимися переменными. Подставляя λx вместо x и λy вместо y в правую часть полученного уравнения, мы убеждаемся в том, что оно является однородным:

$$f(\lambda x; \lambda y) = \frac{\lambda y + \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}}{\lambda x} = \frac{\lambda \cdot (y + \sqrt{x^2 + y^2})}{\lambda x} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x; y).$$

Произведем замену переменной $y = ux$, $y' = xu' + u$. При этом наше дифференциальное уравнение примет вид:

$$u'x + u = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2 x^2}}{x}. \text{ Откуда } u'x + u = \frac{x \cdot (u + \sqrt{1 + u^2})}{x}, \text{ или } u'x = \sqrt{1 + u^2}.$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его общее решение:

$$\frac{du}{dx} x = \sqrt{1 + u^2}, \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Откуда $u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$. Производя обратную замену $u = \frac{y}{x}$, мы получаем общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx, \text{ или } y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2. \text{ Найдём такое значение констан-}$$

ты C , при котором соответствующее решение дифференциального уравнения удовлетворяет начальному условию $y(1) = 0$. Для этого подставим $x = 1$, $y = 0$ в общее решение: $0 + \sqrt{1 + 0} = C \cdot 1$. Откуда $C = 1$.

Подставляя найденную константу C в общее решение, мы получим искомое решение исходной задачи Коши: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$.

2.4. Линейные уравнения первого порядка

Определение 2.7. Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ линейна по y , т.е. имеет вид $P(x)y + Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - заданные функции, зависящие только от x , или просто константы, то такое уравнение называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**.

Перенесем все члены ДУ, содержащие y , в левую часть. Тогда уравнение

примет вид

$$y' - P(x)y = Q(x). \quad (2.13)$$

Если в ДУ (2.13) $Q(x) \equiv 0$, то такое уравнение называется **линейным однородным ДУ первого порядка**, а если $Q(x) \neq 0$ – **линейным неоднородным ДУ первого порядка**.

Разберем два метода интегрирования ДУ (2.13) – метод Лагранжа и метод И. Бернулли.

2.4.1. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.13). Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y' - P(x)y = 0. \quad (2.14)$$

Общее решение линейного однородного ДУ первого порядка получается разделением переменных.

$$\text{Действительно, } \frac{dy}{dx} - P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = P(x)y, \quad \frac{dy}{y} = P(x)dx.$$

$$\text{Интегрируем } \int \frac{dy}{y} = \int P(x)dx \quad \text{и получаем общий интеграл} \\ \ln|y| = \int P(x)dx + C_1.$$

Найдем общее решение: $|y| = e^{\int P(x)dx + C_1}$, или $|y| = e^{C_1} e^{\int P(x)dx}$, или $y = \pm e^{C_1} e^{\int P(x)dx}$. Введя обозначение $C = \pm e^{C_1}$, окончательно получим

$$y = C e^{\int P(x)dx}. \quad (2.15)$$

При разделении переменных в уравнении (2.14) было потеряно решение $y \equiv 0$, которое можно описать формулой (2.15), если дополнить значение C числом $C = 0$.

Общее решение ДУ (2.13) можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения (2.14) методом Лагранжа, варьируя произвольной постоянной C . Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную C в полученном решении (2.15) заменяем функцией $C(x)$, т.е. полагаем $C = C(x)$. Таким образом, общее решение ДУ (2.13) ищем в виде

$$y = C(x) e^{\int P(x)dx}. \quad (2.16)$$

Подберем функцию $C(x)$ так, чтобы функция (2.16) удовлетворяла ДУ (2.13). Для этого продифференцируем (2.16) по x :

$$y' = C'(x)e^{\int P(x)dx} + C(x)\left(e^{\int P(x)dx}\right)' = C'(x)e^{\int P(x)dx} + C(x)e^{\int P(x)dx}\left(\int P(x)dx\right)'. \\ y' = C'(x)e^{\int P(x)dx} + C(x)e^{\int P(x)dx} \cdot P(x). \quad (2.17)$$

Для нахождения функции $C(x)$ подставим y из (2.16) и y' из (2.17) в уравнение (2.13):

$$C'(x)e^{\int P(x)dx} + C(x)e^{\int P(x)dx} \cdot P(x) - P(x)C(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x).$$

В полученном выражении второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение принимает вид

$$C'(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x).$$

Таким образом, $C'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}$, $dC(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$.

Интегрируя, находим:

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C, \quad (2.18)$$

где C – произвольная постоянная.

Подставляя выражение $C(x)$ из (2.18) в равенство (2.16), получим иско-
мое общее решение неоднородного уравнения (2.13):

$$y = \left[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C \right] e^{\int P(x)dx}. \quad (2.19)$$

Обычно на практике формулой (2.19) не пользуются, а при решении ДУ повторяют все выше описанные действия.

Пример 2.8. Решить задачу Коши $\begin{cases} y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Определим тип ДУ. Выразим y' через все остальное. Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка $y' = -\frac{y}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$.

Запишем соответствующее однородное уравнение $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его: $\frac{dy}{y} = -\frac{y}{\cos^2 x}$,

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$, $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\ln|y| = -\operatorname{tg} x + \ln|C_1|$, $y = Ce^{-\operatorname{tg} x}$. Заменяя C на $C(x)$, ищем общее решение исходного ДУ в виде $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$, где $C(x)$ – неизвестная функция.

Найдем производную $y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} + C(x)e^{-\operatorname{tg} x}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ и подставим

y и y' в ДУ. Получим $C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} + C(x)e^{-\operatorname{tg} x}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{C(x)e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$.

После сокращений имеем $C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ или $C'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x}$. Интегрируя, находим:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int t e^t dt = \left| \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = e^t dt; \quad v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right| = \\ &= t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C = \operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, общим решением является функция $y = (\operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C) e^{-\operatorname{tg} x}$ или $y = \operatorname{tg} x - 1 + C e^{-\operatorname{tg} x}$.

Теперь найдем частное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$. Подставим в общее решение ноль вместо y и x . Получим $0 = \operatorname{tg} 0 - 1 + C e^{-\operatorname{tg} 0}$ или $0 = 0 - 1 + C \cdot 1$. Следовательно, $C = 1$, а искомым частным решением ДУ является функция $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

2.4.2. Метод И. Бернулли

Будем искать решение дифференциального уравнения (2.13) в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки:

$$y = u \cdot v, \quad (2.20)$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции от x , причем одну из них можно взять произвольной, но не равной нулю (так как $y = 0$ не является решением ДУ (2.13)), а другая в таком случае определится на основании уравнения (2.13).

Дифференцируя (2.20) находим

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (2.21)$$

Подставляя выражения для y из (2.20) и y' из (2.21) в ДУ (2.13), получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - P(x) u v = Q(x).$$

Сгруппировав второе и третье слагаемые, вынесем за скобку общий множитель. В результате получится уравнение

$$u' v + u [v' - P(x) v] = Q(x). \quad (2.22)$$

Подберем функцию $v = v(x) \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. $v(x)$ – это **какое-нибудь ненулевое решение дифференци-**

ального уравнения

$$v' - P(x)v = 0, \quad (2.23)$$

которое, очевидно, является уравнением с разделяющимися переменными.

Итак, $\frac{dv}{dx} - P(x)v = 0$, $\frac{dv}{v} = P(x)dx$. Интегрируя, получаем:

$$\ln|v| = \int P(x)dx + \ln|C_1| \text{ или } v = C_1 e^{\int P(x)dx}.$$

Возьмем в качестве $v(x)$, например,

$$v = e^{\int P(x)dx}, \quad (2.24)$$

где $\int P(x)dx$ – какая-нибудь первообразная.

Очевидно, $v(x) \neq 0$. Подставляя найденное значение $v(x)$ из (2.24) в (2.22) и учитывая, что $v' - P(x)v = 0$, получим ДУ с разделяющимися переменными:

$$u' e^{\int P(x)dx} = Q(x).$$

Решаем его: $\frac{du}{dx} e^{\int P(x)dx} = Q(x)$, $du = Q(x) e^{-\int P(x)dx} dx$,

$$u = \int Q(x) e^{-\int P(x)dx} dx + C. \quad (2.25)$$

Возвращаясь к искомой функции y , подставляем найденные функции u из (2.25) и v из (2.24) в формулу (2.20) и записываем общее решение исходного линейного ДУ первого порядка:

$$y = \left(\int Q(x) e^{-\int P(x)dx} dx + C \right) e^{\int P(x)dx}. \quad (2.26)$$

Та же формула была получена методом Лагранжа (см. формулу (2.19)).

Пример 2.9. Найти общее решение уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

Решение. Это уравнение вида $y' - P(x)y = Q(x)$, то есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решать заменой $y = u \cdot v$. Подставим $y = u \cdot v$ и $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ в исходное ДУ: $u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \cos^2 x$. Найдем функцию v , приравняв нулю выражение в скобках: $v' + v \operatorname{tg} x = 0$. Относительно функции v это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

1. Запишем в нем v' в виде $\frac{dv}{dx}$. Имеем $\frac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = 0$.

2. Разделяем переменные: $\frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x$, $\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx$ ($v \neq 0$).

3. Интегрируем: $\int \frac{dv}{v} = - \int \operatorname{tg} x dx$, $\ln|v| = \ln|\cos x| + \ln|C_1|$.

Примем $C_1 = 1$ и окончательно получим $\ln|v| = \ln|\cos x| \Rightarrow |v| = |\cos x|$. Возьмем одну из них, например, $v = \cos x$.

Далее подставляем найденное значение $v = \cos x$ в исходное ДУ и, учитывая, что $v' + v \operatorname{tg} x = 0$, получим ДУ с *разделяющимися переменными* $u' \cos x = \cos^2 x$ или $\frac{du}{dx} = \cos x$. Откуда $du = \cos x dx$, $\int du = \int \cos x dx$ или $u = \sin x + C$.

Так как $y = u \cdot v$, то окончательно получаем $y = (\sin x + C) \cos x$. Это и есть общее решение уравнения.

Пример 2.10. Решить задачу Коши:
$$\begin{cases} y' + 2xy - xe^{-x^2} = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения. Перенесем слагаемое, не содержащее y , в правую часть ДУ и получим ДУ вида $y' + P(x)y = Q(x)$, которое является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, методом Бернулли ищем $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, имеем $u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$ или $u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$.

Подберем теперь такую функцию $v(x) \neq 0$, чтобы $v' + 2xv = 0$. То есть $v(x)$ – ненулевое решение дифференциального уравнения с *разделяющимися переменными*: $\frac{dv}{dx} = -2xv$, $\frac{dv}{v} = -2x dx$, $\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$, $\ln|v| = -2 \cdot \frac{x^2}{2} + \ln|C_1|$. Потенцируем это равенство: $|v| = |C_1|e^{-x^2}$ или $v = C_1 e^{-x^2}$. При $C_1 = 1$ получим $v = e^{-x^2}$.

При таком выборе функции $v(x)$ исходное дифференциальное уравнение примет вид: $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ или $u' = x$. Следовательно, $u = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$. Таким образом, общее решение ДУ имеет вид

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \cdot e^{-x^2}.$$

Для решения задачи Коши воспользуемся начальным условием $y(0) = 2$.

Тогда $2 = \left(\frac{0^2}{2} + C \right) \cdot e^{-0^2}$, $2 = (0 + C) \cdot 1$ или $C = 2$. Следовательно, решение исходной задачи Коши – это функция $y = \left(\frac{x^2}{2} + 2 \right) \cdot e^{-x^2}$.

Замечание 2.3. Уравнение вида

$$[x \cdot P(y) + Q(y)] \cdot y' = N(y), \quad (2.27)$$

где $P(y)$, $Q(y)$, $N(y) \neq 0$ – заданные функции, можно свести к линейному, если в качестве неизвестной функции считать не функцию $y = y(x)$, а обратную к ней $x = x(y)$.

Тогда, пользуясь равенством $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, получаем $\frac{x \cdot P(y) + Q(y)}{x'} = N(y)$, или $\frac{x \cdot P(y)}{N(y)} + \frac{Q(y)}{N(y)} = x'$, и окончательно имеем $x' - \frac{P(y)}{N(y)} \cdot x = \frac{Q(y)}{N(y)}$ – линейное ДУ относительно $x = x(y)$. Его решение ищем в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ – две неизвестные функции.

Пример 2.11. Найти все решения уравнения $y' = \frac{2y}{6x - y^2}$.

Решение. Исходное дифференциальное уравнение записано в виде $y' = f(x, y)$. Определим его тип. Предложенное уравнение не является ДУ с разделяющимися переменными, т.к. $f(x, y) = \frac{2y}{6x - y^2} \neq f(x) \cdot \varphi(y)$, не является однородным, т.к. $f(\lambda x, \lambda y) \neq f(x, y)$, и не является линейным относительно y , т.к. оно не может быть представлено в виде $y' + P(x)y = Q(x)$.

Заметим, что функция $y \equiv 0$ является решением исходного ДУ.

Для случая, когда $y = y(x) \neq 0$, представим производную y' как $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Тогда $\frac{1}{x'} = \frac{2y}{6x - y^2}$, или $6x - y^2 = 2yx'$, или $x' - \frac{6x}{2y} = -\frac{y^2}{2y}$, или $x' - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$.

Значит исходное ДУ является линейным относительно x .

Применим замену $x = u \cdot v$. Следовательно, $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя x

и x' в ДУ $x' - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$, получим $u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{3}{y}u \cdot v = -\frac{y}{2}$, или $u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = -\frac{y}{2}$.

Далее находим функцию v : $v' - \frac{3}{y}v = 0$, $\frac{dv}{dy} = \frac{3}{y}v$, $\frac{dv}{v} = \frac{3}{y}dy$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{y}dy$, $\ln|v| = 3\ln|y|$, $\ln|v| = \ln|y|^3$, $v = y^3$.

Находим функцию u : $u'y^3 = -\frac{y}{2}$, $\frac{du}{dy} = -\frac{1}{2y^2}$, $du = -\frac{dy}{2y^2}$, $\int du = -\int \frac{dy}{2y^2}$, $u = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y}\right) + C = \frac{1}{2y} + C$.

Итак, все решения исходного ДУ описываются функциями $\begin{cases} x = u \cdot v = \left(\frac{1}{2y} + C\right)y^3 = \frac{y^2}{2} + Cy^3, \\ y \neq 0. \end{cases}$

2.5. Уравнение Я. Бернулли

Определение 2.8. Дифференциальным уравнением Я. Бернулли называют уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (2.28)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от x (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

Уравнение Я. Бернулли является **не линейным** (при $n = 0$ ДУ (2.28) становится линейным, а при $n = 1$ – с разделяющимися переменными).

Покажем, что **уравнение Я. Бернулли можно привести к линейному**. Разделим все члены ДУ (2.28) на $y^n \neq 0$ и получим

$$y^{-n} \cdot y' + P(x) \cdot y^{-n+1} = Q(x). \quad (2.29)$$

Обозначим $z = y^{-n+1}$. Тогда $z' = \frac{dz}{dx} = (-n+1) \cdot y^{-n} \cdot y'$, т.е. $y^{-n}y' = \frac{z'}{(-n+1)}$.

При подстановке выражений $y^{-n}y'$ и y^{-n+1} в уравнение (2.29), оно принимает

вид $\frac{1}{(-n+1)} \cdot z' + P(x) \cdot z = Q(x)$ или

$$z' + (-n+1) \cdot P(x) \cdot z = (-n+1) \cdot Q(x). \quad (2.30)$$

Полученное ДУ (2.30) является *линейным ДУ относительно z* . Как решается такое ДУ, описано выше. Найдя его общее решение и подставив вместо z выражение y^{-n+1} , получим общее решение уравнения Я. Бернулли. **Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение Я. Бернулли к линейному дифференциальному уравнению.**

Замечание 2.4. Если в уравнении (2.28) показатель степени функции y^n $n > 0$ ($n \neq 1$), то при решении ДУ (2.28) будет потеряно решение $y \equiv 0$.

Пример 2.12. Найти общее решение уравнения $y' + xy = x^3 y^3$.

Решение. Это ДУ Я. Бернулли, так как оно имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)y^n$.

Здесь $n = 3 > 0$. Следовательно, $y \equiv 0$ – решение исходного ДУ.

Разделив обе части уравнения на y^3 , имеем

$$y^{-3} y' + xy^{-2} = x^3. \quad (2.31)$$

Введем новую функцию $z = y^{-2}$. Тогда $z' = -2y^{-3} \cdot y'$, или $y^{-3} y' = -\frac{1}{2} z'$.

Подставив эти значения в уравнение (2.31), получим

$$-\frac{1}{2} z' + xz = x^3 \text{ или } z' - 2xz = -2x^3.$$

Последнее ДУ является линейным относительно z . Найдем его общее решение. Сделаем замену: $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Выполняя данную замену в ДУ $z' - 2xz = -2x^3$, получаем $u' \cdot v + u \cdot v' - 2xu \cdot v = -2x^3$, или $u' \cdot v + u \cdot (v' - 2x \cdot v) = -2x^3$.

Находим функцию $v(x)$: $v' - 2x \cdot v = 0$, $\frac{dv}{dx} = 2x \cdot v$, $\frac{dv}{v} = 2x dx$,

$$\int \frac{dv}{v} = 2 \int x dx, \ln|v| = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1. \text{ Примем } C_1 = 0. \text{ Следовательно, } v = e^{x^2}.$$

Находим функцию $u(x)$: $u' \cdot e^{x^2} = -2x^3$, $\frac{du}{dx} \cdot e^{x^2} = -2x^3$, $du = \frac{-2x^3 dx}{e^{x^2}}$,

$$\int du = -2 \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}
u &= \int (-2)x^3 e^{-x^2} dx = \int 2x(-x^2) e^{-x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{matrix} \right| = -\int t e^t dt = \\
&= \left| \begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = e^t dt, & v = \int e^t dt = e^t \end{matrix} \right| = -(te^t - \int e^t dt) = \\
&= -te^t + e^t + C = -te^t + e^t + C = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Общим решением ДУ $z' - 2xz = -2x^3$ является функция $z = u \cdot v$:

$$z = (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C) e^{x^2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}.$$

Подставив y^{-2} вместо z , получим:

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}, \text{ или } \frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}, \text{ или } \frac{1}{x^2 + 1 + C e^{x^2}} = y^2, \text{ и, након-}$$

нец, $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{x^2}}}$. Общим решением исходного ДУ Я. Бернулли служат

$$\text{функции } \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{x^2}}}, \\ y \equiv 0. \end{cases}$$

Замечание 2.5. Решение ДУ Я. Бернулли (2.28) можно искать и методом И. Бернулли в виде произведения двух функций $y = u(x) \cdot v(x)$ (**не сводя его к линейному**).

Пример 2.13. Найти общее решение уравнения $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2 e^x}{x-1}$.

Решение. Предложенное уравнение является ДУ Я. Бернулли. Здесь $n = 2 > 0$. Следовательно, $y \equiv 0$ – решение исходного ДУ.

Теперь ДУ Я. Бернулли будем решать методом И. Бернулли. Обозначим $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставив полученные выражения в исходное ДУ,

$$\text{получим } u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{u \cdot v}{x-1} = \frac{(u \cdot v)^2 e^x}{x-1}, \text{ или } u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{v}{x-1} \right) = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot e^x}{x-1}.$$

Находим функцию $v(x)$, приравнявая скобку к нулю (как и раньше):

$v' - \frac{v}{x-1} = 0$, $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x-1}$, $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x-1}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x-1}$, $\ln|v| = \ln|x-1| + \ln|C_1|$. Примем $C_1 = 1$ и возьмем $v = x-1$.

Находим функцию $u(x)$: $u' \cdot (x-1) = \frac{u^2 \cdot (x-1)^2 e^x}{x-1}$, $\frac{du}{dx} = \frac{u^2 \cdot (x-1)^2 e^x}{(x-1)^2}$,

$$\frac{du}{u^2} = e^x dx, \int \frac{du}{u^2} = \int e^x dx, -\frac{1}{u} = e^x + C, u = -\frac{1}{e^x + C}.$$

Общее решение исходного ДУ Я. Бернулли получается перемножением найденных функций $u(x)$ и $v(x)$ (в данном случае еще необходимо добавить решение $y \equiv 0$):

$$\begin{cases} y = u \cdot v = -\frac{1}{e^x + C}(x-1), \\ y \equiv 0. \end{cases}$$

2.6. Уравнения в полных дифференциалах

Определение 2.9. Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.32)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные, дифференцируемые функции в односвязной области D плоскости xOy , для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (2.33)$$

причем частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в области D .

Так как для уравнения (2.32) выполняется соотношение (2.33), то левая часть такого уравнения есть *полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$* :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y).$$

В этом случае ДУ (2.32) можно записать в виде

$$du(x, y) = 0,$$

а его общим интегралом будет равенство

$$u(x, y) = C. \quad (2.34)$$

Следовательно, чтобы решить ДУ в полных дифференциалах (2.32), нуж-

но найти функцию $u(x, y)$. В теории криволинейных интегралов доказано, что функция $u(x, y)$ может быть определена по формуле

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C_1, \quad (2.35)$$

где нижние пределы интегралов $(x_0$ и $y_0)$ такие, что точка $(x_0; y_0) \in D$. Обычно в качестве точки $(x_0; y_0)$ берут точку $(0; 0)$ – начало координат.

При вычислении интеграла от функции $P(x, y)$ считаем $y = \text{const}$.

Пример 2.14. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$$

Решение. Исходное уравнение имеет вид (2.32). Проверим, является ли оно ДУ в полных дифференциалах, т. е. выполняется ли соотношение (2.33).

Здесь $P(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, а $Q(x, y) = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$. Найдем

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}.$$

Так как соотношение (2.33) выполняется, т. е. $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, то исходное уравнение есть ДУ в полных дифференциалах.

Определим функцию $u(x, y)$, используя формулу (2.35):

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x_0}{y^2}\right) dy + C_1.$$

Здесь в качестве точки $(x_0; y_0)$ нельзя взять начало координат, так как при $x = 0$ и $y = 0$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не определены. Поэтому в качестве точки $(x_0; y_0)$ возьмем, например, $(1; 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}\right) dy + C_1 = \left(\ln|x| + \frac{1}{y}x\right)\Big|_1^x + \left(2\ln|y| + \frac{1}{y}\right)\Big|_1^y + C_1 = \\ &= \ln|x| + \frac{x}{y} - \ln|1| - \frac{1}{y} + 2\ln|y| + \frac{1}{y} - 2\ln|1| - \frac{1}{1} + C_1 = \ln|x| + \frac{x}{y} + 2\ln|y| - 1 + C_1, \end{aligned}$$

т.е. общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$\ln|x| + \frac{x}{y} + 2\ln|y| - 1 = C.$$

3. Дифференциальные уравнения высших порядков

3.1. Основные определения

Определение 3.1. Дифференциальными уравнениями высших порядков называются ДУ порядка выше первого.

Как отмечалось ранее (см. п. 1.1), ДУ n – го порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.1)$$

или, если его можно разрешить относительно старшей производной,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3.2)$$

Мы будем в основном рассматривать ДУ высших порядков вида (3.2): от него всегда можно перейти к виду (3.1).

Начальные условия для ДУ n – го порядка записывается в виде

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3.3)$$

где $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Задача Коши для ДУ n – го порядка ставится следующим образом: найти решение ДУ (3.2), удовлетворяющее заданным начальным условиям (3.3).

Определение 3.2. Общим решением дифференциального уравнения n – го порядка (3.2) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (3.4)$$

зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ и такая, что:

- она удовлетворяет уравнению (3.2) при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$;
- при заданных начальных условиях (3.3) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ является решением ДУ (3.2) и удовлетворяет начальным условиям (3.3).

Определение 3.3. Всякая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$, получающаяся из общего решения (3.4) при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, называется **частным решением**.

Соотношения вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ или $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = 0$, неявно определяющие общее или частное решение, соответственно называются **общим или частным интегралом** ДУ n – го порядка.

Проинтегрировать (решить) ДУ n – го порядка – значит:

- найти его общее решение (если начальные условия не заданы) или
- найти частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

Задача нахождения решения ДУ n – го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков, в основном сконцентрировав внимание на ДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ или

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (3.5)$$

Исходя из сформулированных основных определений для ДУ n – го порядка, можно записать аналогичные понятия и определения и для ДУ второго порядка. Например: *общим решением* ДУ второго порядка (3.5) является функция, зависящая от **двух** произвольных постоянных C_1 и C_2 ; *начальное условие* для ДУ второго порядка (3.5) включает **два** равенства – $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ и т.д.

Для ДУ n – го порядка так же, как и ДУ первого порядка, справедлива **теорема существования и единственности решения задачи Коши**. Например, для ДУ второго порядка она формулируется следующим образом:

Теорема 3.1. Если в уравнении (3.5) функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по аргументам y и y' непрерывны в некоторой области D изменения переменных x , y и y' , то для всякой точки $(x_0; y_0; y'_0) \in D$ существует и притом единственное решение $y = y(x)$ уравнения (3.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) исходное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

3.2.1. Уравнения, допускающие непосредственное интегрирование

Рассмотрим ДУ второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, вида

$$y'' = f(x). \quad (3.6)$$

Порядок уравнения (3.6) **понижается** непосредственно путем последовательного **двукратного интегрирования**.

Так как $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$, то уравнение (3.6) можно записать в виде ДУ первого порядка $-\frac{dy'}{dx} = f(x)$. Разделив переменные, получим $-dy' = f(x)dx$.

Тогда, интегрируя уравнение $dy' = f(x)dx$, имеем: $\int dy' = \int f(x)dx$, $y' = \int f(x)dx + C_1$, или

$$y' = \varphi_1(x) + C_1, \quad (3.7)$$

где $\varphi_1(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Далее представляем $y' = \frac{dy}{dx}$ и ДУ (3.7) принимает вид $\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + C_1$.

Разделяя переменные в последнем уравнении $-dy = (\varphi_1(x) + C_1)dx$ и интегрируя полученное равенство $-\int dy = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx$, находим общее решение исходного уравнения (3.6):

$$y = \varphi_2(x) + C_1x + C_2,$$

где $\varphi_2(x)$ – первообразная функции $\varphi_1(x)$.

Общим случаем ДУ (3.6) является уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x), \quad (3.8)$$

которое решается аналогично ДУ (3.6) при помощи последовательного **n – кратного** интегрирования.

Пример 3.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(4)} = \sin x$.

Решение. Данное уравнение имеет вид (3.8). Следовательно, для отыскания общего решения его необходимо четырежды проинтегрировать по переменной x :

$$y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1,$$

$$y'' = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1x + C_2,$$

$$y' = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) dx = \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int \left(\cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right) dx = \sin x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения *четвертого* порядка $y = \sin x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$ зависит от *четырёх* произвольных постоянных.

3.2.2. Уравнения, не содержащие искомую функцию

Пусть дано уравнение второго порядка вида

$$y'' = f(x, y'), \quad (3.9)$$

не содержащее искомую функцию $y(x)$ явно.

Найдем сначала из уравнения (3.9) производную $y'(x)$ неизвестной функции, обозначив $y'(x)$ через $P(x)$. Тогда $y''(x) = P'(x)$. Таким образом, **понижить порядок** ДУ (3.9) можно с помощью замены

$$y' = P, \quad y'' = P', \quad (3.10)$$

В результате замены (3.10) получаем ДУ *первого порядка*

$$P' = f(x, P), \quad (3.11)$$

из которого следует искать $P = P(x)$.

Если уравнение (3.11) известного нам типа (с разделяющимися переменными, однородное, линейное, Бернулли или др.) *и мы сможем найти* его общее решение – функцию $P = \varphi(x, C_1)$, где C_1 произвольная постоянная, то, вспоминая формулу замены $y' = P$, снова приходим к дифференциальному уравнению первого порядка $y' = \varphi(x, C_1)$, *в котором переменные всегда будут разделяться.*

После разделения переменных $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$, $dy = \varphi(x, C_1) dx$ и интегрирования $\int dy = \int \varphi(x, C_1) dx$ получаем общее решение исходного ДУ (3.9):

$$y = \Phi(x, C_1, C_2).$$

Пример 3.2. Найти все решения дифференциального уравнения $y'' x^2 = (y')^2$.

Решение. Определяем тип исходного ДУ. Данное уравнение второго порядка и не содержит явно искомую функцию $y(x)$. Значит, оно допускает понижение порядка. Приведем его к виду (3.9): $y'' = \frac{(y')^2}{x^2}$ и сделаем замену

$y' = P(x)$, $y'' = P'(x)$. Тогда ДУ примет вид $P' = \frac{P^2}{x^2}$. Определим тип полученного ДУ первого порядка: оно разрешено относительно производной и функция в правой части ДУ $f(P, x)$ имеет вид произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Значит, $P' = \frac{P^2}{x^2}$ – ДУ с разделяющимися переменными. Заменяя P' на $\frac{dP}{dx}$, имеем $\frac{dP}{dx} = \frac{P^2}{x^2}$. Разделяем переменные (считая, что $P^2 \neq 0$) $\frac{dP}{P^2} = \frac{dx}{x^2}$, интегрируем $\int \frac{dP}{P^2} = \int \frac{dx}{x^2}$ и находим

общий интеграл $-\frac{1}{P} = -\frac{1}{x} - C_1$ или $\frac{1}{P} = \frac{1}{x} + C_1$. Теперь выразим из общего интеграла функцию $P(x)$: $\frac{1}{P} = \frac{1 + xC_1}{x}$ и $P = \frac{x}{1 + xC_1}$. При разделении переменных было потеряно решение $P = 0$.

Вспоминая, что $y' = P(x)$, возвращаемся к исходной функции

$$\begin{cases} y' = P = \frac{x}{1 + xC_1}, \\ y' = P = 0 \Rightarrow y = C. \end{cases}$$

Как говорилось выше, в уравнении $y' = \frac{x}{1 + xC_1}$ переменные разделяются:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 + xC_1}$ и $dy = \frac{x}{1 + xC_1} dx$. Интегрируем $\int dy = \int \frac{x}{1 + xC_1} dx$ и получаем решение исходного ДУ

$$\begin{cases} \text{при } C_1 \neq 0: y = \frac{1}{C_1} \int \frac{(xC_1 + 1) - 1}{1 + xC_1} dx = \frac{1}{C_1} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1 + xC_1} \right) = \frac{1}{C_1} x - \frac{1}{C_1^2} \ln|1 + xC_1| + C_2; \\ \text{при } C_1 = 0: y = \int \frac{x}{1 + xC_1} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_3; \\ y = C. \end{cases}$$

Пример 3.3. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} xy'' + x(y')^2 - y' = 0, \\ y(2) = 2, \quad y'(2) = 1. \end{cases}$$

Особенностью решения задачи Коши для ДУ второго порядка, допускающих понижение порядка, является то, что произвольные постоянные C_1 и C_2 можно находить по очереди: сначала C_1 , а потом C_2 .

Решение. Определяем тип исходного ДУ: оно второго порядка и не содержит явно искомую функцию $y(x)$, т.е. допускает понижение порядка. Сделаем замену $y' = P(x)$, $y'' = P'(x)$. Уравнение примет вид $xP' + xP^2 - P = 0$. Определим тип полученного ДУ первого порядка. Для этого разделим все уравнение на x (получим $P' + P^2 - \frac{P}{x} = 0$) и перенесем P^2 в правую часть. В результате ДУ примет вид $P' - \frac{P}{x} = -P^2$. Это уравнение Я. Бернулли. Так как у функции " $-P^2$ " показатель степени $n = 2 > 0$, то $P = 0$ будет решением полученного ДУ, но оно не удовлетворяет начальным условиям. Поэтому $P = 0$ мы учитывать не будем. Найдем ненулевые решения уравнения $P' - \frac{P}{x} = -P^2$ методом И. Бернулли. Сделаем замену $P = uv$, $P' = u'v + uv'$ и, подставив ее в последнее ДУ, получим $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -(uv)^2$ или $u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -(uv)^2$.

Далее найдем функцию $v(x)$ из уравнения $v' - \frac{v}{x} = 0$. Заменяем v' на $\frac{dv}{dx}$ (имеем $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$), разделяем переменные, интегрируем $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$ и находим общий интеграл $\ln|v| = \ln|x| + \ln|\tilde{C}|$. Полагая $\tilde{C} = 1$, имеем $v = x$.

Далее подставляем функцию $v = x$ в уравнение $u'v = -(uv)^2$ и получаем ДУ $u'x = -(ux)^2$, из которого найдем функцию $u(x)$. После сокращений имеем $u' = -xu^2$. Заменяем u' на $\frac{du}{dx}$ ($\frac{du}{dx} = -xu^2$), разделяем переменные $\frac{du}{u^2} = -x dx$, интегрируем $\int \frac{du}{u^2} = -\int x dx$ и получаем общий интеграл $-\frac{1}{u} = -\frac{x^2}{2} - C_1$ или

$\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} + C_1$. Выразим функцию $u(x)$: $u = \frac{1}{\frac{x^2}{2} + C_1}$ и, вспомнив, что $P = uv$,

окончательно имеем $P = x \frac{1}{\frac{x^2}{2} + C_1}$. Но $P(x) = y'$. Значит $y' = x \frac{1}{\frac{x^2}{2} + C_1}$.

Теперь из условия $y'(2) = 1$ найдем произвольную постоянную C_1 .
 $1 = 2 \frac{1}{\frac{2^2}{2} + C_1}$ или $2 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 0$. Следовательно, $y' = x \frac{1}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$.

В этом уравнении переменные разделяются: $dy = 2 \frac{dx}{x}$. Интегрируем

$\int dy = 2 \int \frac{dx}{x}$ и получаем общее решение $y = 2 \ln|x| + C_2$.

Константу C_2 определим из условия $y(2) = 2$. Итак, $2 = 2 \ln|2| + C_2$ и $C_2 = 2 - 2 \ln|2| = 2 - \ln 4$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = 2 \ln|x| + 2 - \ln 4 \text{ или } y = \ln \left| \frac{x^2}{4} \right| + 2.$$

3.2.3. Уравнения, не содержащие независимую переменную

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(y, y'), \quad (3.12)$$

которое не содержит явно независимую переменную x .

Так как ДУ (3.12) не содержит x , но содержит y , то решить его так же, как ДУ (3.9), нам не удастся. Действительно, если обозначить $y' = P(x)$ и подста-

вить в ДУ (3.12), то получим $\frac{dP}{dx} = f(y, P)$ – уравнение, содержащее три пере-

менные x , y и P . Поэтому будем искать производную y' неизвестной функции как функцию, зависящую от y . Обозначим $y' = P(y)$ и продифференцируем это равенство по x , учитывая, что $P = P(y(x))$:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dP(y)}{dx} = \frac{dP(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP(y)}{dy} \cdot P.$$

Итак, в ДУ вида (3.12) можно понизить порядок с помощью замены

$$y' = P, \quad y'' = P' \cdot P. \quad (3.13)$$

После подстановки (3.13) из уравнения (3.12) получим ДУ *первого порядка*:

$$P' \cdot P = f(y, P), \quad (3.14)$$

из которого будем искать функцию $P = P(y)$ (если сумеем).

Пусть $P = \varphi(y, C_1)$ является общим решением ДУ (3.14). Заменяя функцию $P(y)$ на y' , снова получаем дифференциальное уравнение *первого порядка* $y' = \varphi(y, C_1)$ – с *разделяющимися переменными*. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (3.12):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx \text{ или } \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Частным случаем ДУ (3.12) является уравнение

$$y'' = f(y). \quad (3.15)$$

Такое уравнение также решается при помощи подстановки (3.13), т.е. $y' = P(y)$, $y'' = P'(y) \cdot P(y)$. После замены получаем ДУ $P'P = f(y)$, которое всегда будет с *разделяющимися переменными*.

Замечание 3.1. *Частным случаем* ДУ (3.5) является уравнение

$$y'' = f(y'), \quad (3.16)$$

не содержащее явно как независимую переменную x , так и искомую функцию y . Понизить порядок в (3.16) можно любой из замен: (3.10) или (3.13). Так, после подстановки (3.10) или (3.13) в ДУ (3.16) *соответственно* получим $P' = f(P)$ или $P'P = f(P)$, являющимися ДУ с *разделяющимися переменными*.

Пример 3.4. Найти все решения дифференциального уравнения $yy'' = y^2 y' + (y')^2$.

Решение. Определяем тип исходного ДУ. Данное уравнение второго порядка и не содержит явно независимую переменную x . Значит, оно допускает понижение порядка. Произведем замену переменной: $y' = P$, $y'' = P' \cdot P$, где $P = P(y)$ – новая неизвестная функция от y . В итоге имеем *дифференциальное уравнение первого порядка* относительно переменной y :

$$y \cdot P' \cdot P = y^2 P + P^2. \quad (3.17)$$

Одно решение $P = 0$ видно сразу. Следовательно, $y' = P = 0 \Rightarrow y = C$. Для нахождения ненулевых решений разделим ДУ (3.17) на P и выразим P' .

Увидим, что полученное ДУ

$$P' = y + \frac{P}{y} \quad (3.18)$$

является линейным относительно функции $P = P(y)$. Его решение найдем методом И. Бернулли. Перенесем все слагаемые, содержащие функцию $P = P(y)$, в левую часть уравнения (3.18) и получим $P' - \frac{P}{y} = y$. Подставляя в последнее ДУ замену $P = u \cdot v$, $P' = u'v + v'u$, где $u = u(y)$ и $v = v(y)$, имеем $u'v + v'u - \frac{u \cdot v}{y} = y$ или $u'v + u \left(v' - \frac{v}{y} \right) = y$.

Функцию v найдем из условия $v' - \frac{v}{y} = 0$ (как любое частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными):

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln|v| = \ln|y|, \quad v = y.$$

Подставляя $v = y$ в уравнение $u'v + u \left(v' - \frac{v}{y} \right) = y$, получим:

$$u'y = y, \quad u'(y) = 1, \quad \int du = \int dy, \quad u = y + C_1.$$

Таким образом, общим решением дифференциального уравнения (3.18) является $P(y) = u \cdot v = y \cdot (y + C_1)$, или $P(y) = y^2 + C_1 y$. Вспоминая о том, что $P(y) = y'(x)$, мы приходим к дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными $y'(x) = y^2 + C_1 y$, из которого найдем $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 y, \quad \int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \int dx.$$

Интегрируя последнее равенство (считая $C_1 \neq 0$), получим:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \int \frac{dy}{y^2 + 2 \frac{C_1}{2} y + \frac{C_1^2}{4} - \frac{C_1^2}{4}} = \int \frac{d\left(y + \frac{C_1}{2}\right)}{\left(y + \frac{C_1}{2}\right)^2 - \frac{C_1^2}{4}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \frac{C_1}{2}} \ln \left| \frac{y + \frac{C_1}{2} - \frac{C_1}{2}}{y + \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2}} \right| + C_2 \quad \text{и, следовательно,} \quad x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2. \end{aligned}$$

Таким образом, все решения исходного ДУ запишем в виде

$$\left[\begin{array}{l} \text{при } C_1 \neq 0: x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y+C_1} \right| + C_2; \\ \text{при } C_1 = 0: x = \int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C_3; \\ y = C. \end{array} \right.$$

Пример 3.5. Решить задачу Коши $\begin{cases} 2yy'' - (y')^2 = 1, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Это уравнение не содержит явно независимую переменную x . Произведя замену $y' = P(y)$, $y'' = P'(y) \cdot P$, получим уравнение $2yP'P - P^2 = 1$. Определим тип полученного ДУ первого порядка. Для этого выразим из него P' :

$$P' = \frac{1+P^2}{P} \cdot \frac{1}{2y}. \quad (3.19)$$

Видим, что ДУ (3.19) является уравнением с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{P} \cdot \frac{1}{2y}, \quad \frac{PdP}{1+P^2} = \frac{dy}{2y}, \quad \int \frac{PdP}{1+P^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, найдем общее решение:

$$\frac{1}{2} \ln |P^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln |y| + \frac{1}{2} \ln |C_1| \quad \text{или} \quad \ln |P^2 + 1| = \ln |y| + \ln |C_1|.$$

Выразим $P(y)$:

$$\ln |P^2 + 1| = \ln |yC_1|, \quad P^2 + 1 = yC_1, \quad P = \pm \sqrt{yC_1 - 1}.$$

Так как $P(y) = y'(x)$, то

$$y' = \pm \sqrt{yC_1 - 1}. \quad (3.20)$$

Найдем константу C_1 . Из начальных условий $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ видно, что $y' = 0$, когда $y = 1$. Подставив эти значения в (3.20), получим

$$0 = \pm \sqrt{1 \cdot C_1 - 1}, \quad 0 = 1 \cdot C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Следовательно, $y' = \pm \sqrt{y-1}$. В этом уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y-1} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \pm dx. \quad \text{Интегрируя} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \pm \int dx, \quad \text{получаем}$$

$2\sqrt{y-1} = \pm x + C_2$. Теперь определим константу C_2 из условия $y(0) = 1$:

$2\sqrt{1-1} = \pm 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$ и найдем частный интеграл исходного уравнения

$$2\sqrt{y-1} = \pm x,$$

а выразив из него y , получим частное решение – $y-1 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{x^2 + 4}{4}$.

3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ)

3.3.1. Определения и основные свойства решений

Многие задачи математики, механики, физики и различных технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Определение 3.4. Дифференциальное уравнение n – го порядка (3.1) называется **линейным**, если его левая часть линейна относительно функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y + g(x) = 0, \quad (3.21)$$

где $b_0(x) \neq 0, b_1(x), \dots, b_{n-1}(x), b_n(x), g(x)$ – заданные функции (от x) или константы.

Функции $b_0(x) \neq 0, b_1(x), \dots, b_{n-1}(x), b_n(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (3.21), а функция $g(x)$ – его *свободным членом*.

Если свободный член $g(x) \equiv 0$, то ДУ (3.21) называется **линейным однородным** уравнением; если $g(x) \neq 0$, то ДУ (3.21) называется **неоднородным**.

Разделив уравнение (3.21) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x), \dots, \frac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)} = a_{n-1}(x), \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x), \frac{-g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

запишем уравнение (3.21) в виде

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (3.22)$$

Далее будем рассматривать линейные ДУ вида (3.22) и считать, что коэффициенты и свободный член уравнения (3.22) являются непрерывными функциями (на некотором интервале $(a; b)$). При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения ДУ (3.22).

Установим некоторые основные свойства линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ), ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (3.23)$$

Теорема 3.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (3.23), то также решением этого уравнения является функция

$$y = y_1(x) + y_2(x). \quad (3.24)$$

Доказательство. Так как решением ДУ является функция, которая при подстановке в исходное ДУ вместо y обращает его в тождество, то для доказательства теоремы нужно проверить, обращает ли в тождество функция (3.24) уравнение (3.23). Для этого подставим функцию $y = y_1(x) + y_2(x)$ в ЛОДУ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} & (y_1(x) + y_2(x))'' + a_1(x)(y_1(x) + y_2(x))' + a_2(x)(y_1(x) + y_2(x)) = \\ & = y_1''(x) + y_2''(x) + a_1(x)(y_1'(x) + y_2'(x)) + a_2(x)(y_1(x) + y_2(x)) = \\ & = [y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)] + [y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)] = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

так как функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения уравнения (3.23), то выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю.

Таким образом, функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. Если функция $y_1 = y_1(x)$ является решением уравнения (3.23), а C – произвольная постоянная, то также решением этого уравнения является функция

$$y = C y_1(x). \quad (3.25)$$

Доказательство. Ход доказательства этой теоремы аналогичен доказательству теоремы 3.2. Подставим функцию $y = C y_1(x)$ в ЛОДУ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ и получим:

$$\begin{aligned} & (C y_1(x))'' + a_1(x)(C y_1(x))' + a_2(x)(C y_1(x)) = \\ & = C y_1''(x) + a_1(x)C y_1'(x) + a_2(x)C y_1(x) = \\ & = C [y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)] = C \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $y = C y_1(x)$ является решением ЛОДУ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Тем самым теорема доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что решением ДУ (3.23) также будет функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Выше, в п. 3.1, говорилось, что общее решение ДУ вто-

рого порядка содержит две произвольные постоянные. Теперь предстоит ответить на вопрос: может ли функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ являться общим решением уравнения (3.23)?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Определение 3.5. Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются **линейно независимыми** на интервале $(a; b)$, если их отношение на этом интервале не является постоянным, т.е. если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}.$$

В противном случае функции называются **линейно зависимыми**.

Другими словами, две функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются **линейно зависимыми** на интервале $(a; b)$, если существует такое постоянное число λ , что $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ или $y_1 = \lambda y_2$ (или $y_2 = \lambda y_1$).

Пример 3.6.

Функции $y_1 = 5e^x$ и $y_2 = 2e^x$ линейно зависимы: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{5e^x}{2e^x} = \frac{5}{2} = \text{const}$;

функции y_1 и $y_3 = 3e^{4x}$ – линейно независимы: $\frac{y_1}{y_3} = \frac{5e^x}{3e^{4x}} = \frac{5}{3}e^{-3x} \neq \text{const}$;

функции $y_4 = \cos 2x$ и $y_5 = \sin 2x$ являются линейно независимыми:
 $\frac{y_4}{y_5} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \text{ctg} 2x \neq \text{const}.$

Средством изучения линейной зависимости системы функций является **определитель Вронского**, или **вронскиан**.

Определение 3.6. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ дифференцируемые функции, то определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется **определителем Вронского**, или **вронскианом** данных функций.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.4. Если дифференцируемые функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейно зависимы на $(a; b)$, то определитель Вронского на этом интервале тождественно равен нулю.

Доказательство. Так как функции y_1 и y_2 линейно зависимы, то $y_1 = \lambda y_2$, где $\lambda = \text{const}$. Значит, $y_1' = \lambda y_2'$. Составляем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5. Если определитель Вронского $W(x)$, составленный для решений $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ (3.23), не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на интервале $(a; b)$, где коэффициенты уравнения непрерывны, то он не обращается в нуль ни при каком значении x на этом интервале.

Теорема 3.6. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ *линейно независимые* решения уравнения (3.23) на интервале $(a; b)$, то определитель Вронского W , составленный для этих решений, *не обращается в нуль* ни в одной точке указанного интервала.

Теперь можно сказать, при каких условиях функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ будет общим решением уравнения (3.23).

Теорема 3.7 (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ЛОДУ (3.23) являются линейно независимыми функциями, то общим решением этого уравнения является функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3.26)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Согласно теоремам 3.2. и 3.3., функция (3.26) является решением уравнения (3.23) при любых значениях C_1 и C_2 . Остается доказать, что это решение общее, т. е. что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad (3.27)$$

где $x_0 \in (a; b)$.

Подставив начальные условия (3.27) в решение (3.26), предварительно продифференцировав его, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0). \end{cases} \quad (3.28)$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$.

Неизвестными в системе (3.28) являются C_1 и C_2 . Решим систему (3.28), например, методом Крамера.

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

равен значению вронскиана $W(x)$ при $x = x_0$.

Так как решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются линейно независимыми функциями на $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$, то, согласно теореме 3.6, $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система уравнений имеет единственное решение:

$$C_1 = C_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}, \quad C_2 = C_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}.$$

Решение $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ является частным решением (единственным, в силу *теоремы 3.1.*) уравнения (3.23), удовлетворяющим начальным условиям (3.27). Теорема доказана.

3.3.2. ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются *ЛОДУ с постоянными коэффициентами*.

Определение 3.7. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$y'' + py' + qu = 0, \quad (3.29)$$

где p и q – действительные числа.

Для нахождения общего решения уравнения (3.29) достаточно найти два линейно независимых частных решения (см. теорему 3.7).

Будем искать частные решения уравнения (3.29) в виде

$$y = e^{kx}, \quad (3.30)$$

где $k = \text{const}$ (предложено Л. Эйлером).

Подберем k так, чтобы функция (3.30) удовлетворяла уравнению (3.29). Для этого подставим $y = e^{kx}$ в левую часть ДУ (3.29) и тождественно приравняем нулю полученное выражение:

$$(e^{kx})'' + p(e^{kx})' + qe^{kx} \equiv 0, \quad k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} \equiv 0 \quad \text{или} \quad e^{kx}(k^2 + pk + q) \equiv 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) называется **характеристическим уравнением** ЛОДУ (3.29). Если k будет являться решением уравнения (3.31), то e^{kx} будет решением ЛОДУ (3.29). Следовательно, чтобы проинтегрировать ЛОДУ (3.29), необходимо решить его **характеристическое уравнение**, которое является квадратным уравнением. Как известно, квадратное уравнение всегда имеет два корня: обозначим их k_1 и k_2 . Тогда

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении (3.29) формально заменить y'' , y' и y соответственно на k^2 , k и 1.

При решении характеристического уравнения (3.31) возможны три случая. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения
 $k^2 + pk + q = 0$ – **различные действительные числа**

В этом случае $k_1 \neq k_2 \left(\frac{p^2}{4} - q > 0 \right)$.

Так как решение ЛОДУ (3.29) мы ищем в виде (3.30), то частными решениями являются функции

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Они линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}, \quad \text{так как} \quad k_2 - k_1 \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.29), согласно формуле (3.26), имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (3.32)$$

Пример 3.7. Найти общее решение ЛОДУ $2y'' + 5y' + 2y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$2k^2 + 5k + 2 = 0.$$

Решаем его:

$$k_1 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - \sqrt{9}}{4} = -2.$$

Корни характеристического уравнения являются *различными действительными числами*. Поэтому записываем общее решение данного уравнения, пользуясь формулой (3.32):

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-2x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения

$k^2 + pk + q = 0$ – *равные действительные числа*

В этом случае $k_1 = k_2 \left(\frac{p^2}{4} - q = 0, \quad k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \right)$ и мы имеем лишь одно

частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$, которое получается на основании предыдущих рассуждений. Функция $y_2 = e^{k_1 x}$ является линейно зависимой функцией по отношению к $y_1 = e^{k_1 x}$ и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения.

Нужно найти второе частное решение, линейно независимое по отношению к первому.

Покажем, что решением уравнения (3.29) будет функция $y_2 = x e^{k_1 x}$. Действительно, подставим функцию y_2 в уравнение (3.29). Имеем:

$$\begin{aligned} y_2'' + p y_2' + q y_2 &= (x e^{k_1 x})'' + p (x e^{k_1 x})' + q (x e^{k_1 x}) = \\ &= (2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x}) + p (e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}) + q (x e^{k_1 x}) = \\ &= e^{k_1 x} (2k_1 + x k_1^2 + p + p x k_1 + q x) = e^{k_1 x} (x (k_1^2 + p k_1 + q) + (p + 2k_1)). \end{aligned}$$

Выражение $k_1^2 + p k_1 + q = 0$, так как k_1 есть корень характеристического уравнения (3.31), а $p + 2k_1 = 0$, так как по условию $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Поэтому

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = e^{k_1 x} \cdot 0 = 0,$$

т. е. функция $y_2 = x e^{k_1 x}$ является решением уравнения (3.29).

Частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$ являются линейно независимыми, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x e^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = x \neq \text{const}.$$

Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ (3.29) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + x C_2). \quad (3.33)$$

Пример 3.8. Найти общее решение ЛОДУ $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 8k + 16 = 0.$$

Перепишем его в виде:

$$(k - 4)^2 = 0.$$

Решив уравнение, получаем

$$k_1 = k_2 = 4.$$

Так как корни характеристического уравнения получились *равными действительными числами*, то, используя формулу (3.33), запишем общее решение исходного ЛОДУ в виде

$$y = e^{4x} (C_1 + x C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0 \text{ – комплексные числа}$$

В этом случае $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$

$$\left(\frac{p^2}{4} - q < 0, \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0 \right).$$

Вспоминая формулу (3.30), частные решения ЛОДУ (3.29) формально будут записаны в виде

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}. \quad (3.34)$$

Функции (3.34) являются комплексными, а нам нужны действительные функции. Поэтому по формулам Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

преобразуем функции (3.34) следующим образом:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Найдем два действительных частных решения уравнения (3.29). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2 :

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x = \tilde{y}_1,$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x - e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x = \tilde{y}_2.$$

Функции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ являются решениями уравнения (3.29), что следует из свойств решений ЛОДУ второго порядка (см. теоремы 3.2 и 3.3). Также функции $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ – линейно независимые:

$$\frac{\tilde{y}_2}{\tilde{y}_1} = \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{e^{\alpha x} \cos \beta x} = \operatorname{tg} \beta x \neq \operatorname{const}.$$

Следовательно, общее решение ЛОДУ (3.29) в случае комплексных корней характеристического уравнения запишется в виде

$$y = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (3.35)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3.9. Найти общее решение ЛОДУ $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Решение. Записываем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Решаем его:

$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-1} \cdot 4}{2} = \frac{2 + \sqrt{4} \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i.$$

Как известно, если квадратный трехчлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $k_1 = \alpha + i\beta$, то он имеет и сопряженный корень $k_2 = \alpha - i\beta$. Поэтому второй корень характеристического уравнения можно не вычислять, а написать сразу

$$k_2 = 1 - i.$$

Корни характеристического уравнения получились комплексные. Значит, по формуле (3.35) получаем общее решение данного ЛОДУ:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (3.29) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (3.31) и использованию формул (3.32), (3.33), (3.35) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка (ЛНДУ)

3.4.1. Структура общего решения ЛНДУ

Определение 3.8. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка (ЛНДУ) называется уравнение вида*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (3.36)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ – заданные, непрерывные на интервале $(a; b)$ функции.

Определение 3.9. *Уравнение*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (3.37)$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (3.36), называется **соответствующим ему однородным уравнением**.

Структура общего решения ЛНДУ (3.36) определяется следующей теоремой:

Теорема 3.8. Общим решением $y_{он}$ уравнения (3.36) является сумма его некоторого частного решения $y_{чн}$ и общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения (3.37), т. е.

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}. \quad (3.38)$$

Доказательство. Сначала докажем, что функция (3.38) есть решение уравнения (3.36). Для этого подставим сумму $y_{оо} + y_{чн}$ в уравнение (3.36) вместо y . Получим

$$(y_{оо} + y_{чн})'' + a_1(x)(y_{оо} + y_{чн})' + a_2(x)(y_{оо} + y_{чн}) = f(x).$$

Группируя слагаемые относительно функций $y_{оо}$ и $y_{чн}$, имеем

$$(y_{оо}'' + a_1(x)y_{оо}' + a_2(x)y_{оо}) + (y_{чн}'' + a_1(x)y_{чн}' + a_2(x)y_{чн}) = f(x). \quad (3.39)$$

Так как $y_{оо}$ есть решение однородного уравнения (3.37), то выражение, стоящее в первых скобках равенства (3.39), тождественно равно нулю:

$$y_{оо}'' + a_1(x)y_{оо}' + a_2(x)y_{оо} \equiv 0.$$

Так как $y_{чн}$ – решение неоднородного уравнения (3.36), то выражение, стоящее во вторых скобках равенства (3.39), равно $f(x)$:

$$y_{чн}'' + a_1(x)y_{чн}' + a_2(x)y_{чн} = f(x).$$

Имеем $0 + f(x) = f(x)$. Следовательно, равенство (3.39) является тождеством. Это означает, что функция $y_{оо} + y_{чн}$ является решением уравнения (3.36).

Докажем теперь, что функция (3.38) является общим решением уравнения (3.36). Для этого надо доказать, что из решения (3.38) можно выделить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (3.40)$$

где x_0 принадлежит области, в которой функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ непрерывны.

Вспомним, что на основании теоремы 3.7 общее решение однородного уравнения y_{oo} можно представить в форме

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые решения ЛОДУ (3.37), а C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения $y_{он}$ запишем в виде

$$y_{он} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{чн}. \quad (3.38^*)$$

Продифференцировав функцию (3.38^{*})

$$y'_{он} = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + y'_{чн} \quad (3.41)$$

и подставив начальные условия (3.40) в функцию (3.38^{*}) и ее производную (3.41), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_{чн}(x_0), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + y'_{чн}(x_0). \end{cases} \quad (3.42)$$

где $y_0 = y(x_0)$, а $y'_0 = y'(x_0)$.

Неизвестными в системе (3.42) являются C_1 и C_2 . Перепишем систему (3.42) в виде

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y_{чн}(x_0), \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0 - y'_{чн}(x_0). \end{cases} \quad (3.43)$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x = x_0$. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Таким образом $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение: $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$.

Решение $y = C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + y_{чн}$ является частным решением уравнения (3.36), удовлетворяющим заданным начальным условиям (3.40).

Теорема доказана.

3.4.2. Интегрирование ЛНДУ (метод вариации произвольных постоянных)

Рассмотрим ЛНДУ (3.36). Его общим решением является функция (3.38), т. е.

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

Если известно общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения (3.37), то задача по определению общего решения $y_{он}$ ЛНДУ (3.36) сводится к нахождению какого-нибудь его частного решения $y_{чн}$, которое можно найти **методом вариации произвольных постоянных** (методом Лагранжа). Данный способ является универсальным и состоит в следующем. Пусть

$$y_{оо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (3.26)$$

– общее решение уравнения (3.37).

Будем искать частное решение $y_{чн}$ ЛНДУ (3.36) в виде (3.26), рассматривая C_1 и C_2 как некоторые *пока неизвестные функции* от x , которые и нужно будет найти впоследствии.

Заменим в общем решении (3.26) постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y_{чн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad (3.44)$$

была решением уравнения (3.36).

Как известно, функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, при подстановке в ДУ обращает его в тождество. Найдем производные функции (3.44) и подставим их в исходное уравнение (3.36).

Продифференцируем уравнение (3.44):

$$y'_{чн} = C'_1(x) y_1(x) + C_1(x) y'_1(x) + C'_2(x) y_2(x) + C_2(x) y'_2(x).$$

Подберем искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$C'_1(x) y_1(x) + C'_2(x) y_2(x) = 0. \quad (3.45)$$

Тогда с учетом условия (3.45) первая производная $y'_{чн}$ примет вид

$$y'_{чн} = C_1(x) y'_1(x) + C_2(x) y'_2(x). \quad (3.46)$$

Дифференцируя выражение (3.46), найдем вторую производную $y''_{чн}$:

$$y''_{чн} = C'_1(x) y'_1(x) + C_1(x) y''_1(x) + C'_2(x) y'_2(x) + C_2(x) y''_2(x).$$

Подставляя выражение для $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в уравнение (3.36), получим

$$C'_1(x) y'_1(x) + C_1(x) y''_1(x) + C'_2(x) y'_2(x) + C_2(x) y''_2(x) + a_1(x) [C_1(x) y'_1(x) + C_2(x) y'_2(x)] + a_2(x) [C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)] = f(x),$$

или, группируя слагаемые относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$, имеем

$$C_1(x)[y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)] + \\ + C_2(x)[y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)] + \\ + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ (3.37), то выражения в квадратных скобках равны нулю. Следовательно, последнее равенство примет вид

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (3.47)$$

Итак, для нахождения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ мы получили уравнение (3.47), включающее две неизвестные: $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Для их определения необходимы два уравнения. Поэтому добавляем к выражению (3.52) равенство (3.45). Таким образом, функция (3.44) будет частным решением $y_{\text{чн}}$ ЛНДУ (3.36), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (3.45), (3.47):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.48)$$

Определитель системы (3.48)

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как это определитель Вронского для линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ (3.37). Поэтому система (3.48) имеет единственное решение:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x) \quad (3.49)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые функции от x .

Интегрируя равенства (3.49), находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + \tilde{C}_2. \quad (3.50)$$

Далее, полагая, например, $\tilde{C}_1 = 0$ и $\tilde{C}_2 = 0$, подставляем выражения (3.50) в формулу (3.44). Тем самым мы составили частное решение уравнения (3.36).

Пример 3.10. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$.

Решение. Уравнение имеет вид (3.36). Значит, это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общим решением является функция $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

Сначала найдем общее решение $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Перепишав его в виде, получим

$$(k - 2)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$k_1 = k_2 = 2.$$

Корни характеристического уравнения получились *равными действительными числами*. Следовательно, используя формулу (3.33), запишем общее решение y_{oo} соответствующего однородного уравнения в виде

$$y_{oo} = e^{2x} (C_1 + C_2 x), \quad (3.51)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Теперь приступим к нахождению частного решения y_{ch} неоднородного уравнения. Для этого используем метод вариации произвольной постоянной. Заменим в общем решении (3.51) постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Получим

$$y_{ch} = e^{2x} (C_1(x) + C_2(x) \cdot x) \quad \text{или} \quad y_{ch} = e^{2x} C_1(x) + x e^{2x} C_2(x), \quad (3.52)$$

где $y_1 = e^{2x}$, а $y_2 = x e^{2x}$.

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему уравнений вида (3.48):

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} + C_2'(x) \cdot x e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) 2e^{2x} + C_2'(x) \cdot (e^{2x} + 2x e^{2x}) = \frac{e^{2x}}{x}. \end{cases}$$

Так как $e^{2x} \neq 0$, то на e^{2x} все уравнения системы можно сократить:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0, \\ 2C_1'(x) + C_2'(x) \cdot (1 + 2x) = \frac{1}{x}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Неизвестными в системе (3.53) являются $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Решаем полученную систему, например, методом Крамера:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 + 2x \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 + 2x) - 2 \cdot x = 1 \neq 0.$$

$$\Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 1 + 2x \end{vmatrix} = 0 \cdot (1 + 2x) - x \cdot \frac{1}{x} = -1.$$

$$\Delta_{C'_2(x)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{x} - 0 \cdot 2 = \frac{1}{x}.$$

По формулам Крамера имеем:

$$C'_1(x) = \frac{\Delta_{C'_1(x)}}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{и} \quad C'_2(x) = \frac{\Delta_{C'_2(x)}}{\Delta} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x}. \quad (3.54)$$

Далее интегрируем равенства (3.54):

$$C_1(x) = \int (-1) dx = -x + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \tilde{C}_2.$$

Полагая $\tilde{C}_1 = 0$ и $\tilde{C}_2 = 0$, получим $C_1(x) = -x$ и $C_2(x) = \ln|x|$. Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенство (3.52), запишем частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения:

$$y_{\text{чн}} = e^{2x}(-x + x \ln|x|) \quad (3.55)$$

Складывая выражения (3.51) и (3.55), имеем общее решение $y_{\text{он}}$ неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = e^{2x}(C_1 + C_2x) + e^{2x}(-x + x \ln|x|) \quad \text{или} \quad y_{\text{он}} = e^{2x}(C_1 + C_2x) + xe^{2x}(\ln|x| - 1).$$

3.4.3. Наложение решений ЛНДУ

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезна теорема *о наложении решений*.

Теорема 3.9. Если правая часть уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (3.36)$$

представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_{\text{чн1}}$ и $y_{\text{чн2}}$ частные решения уравнений

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x) \quad (3.56)$$

соответственно, то функция

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{чн1}} + y_{\text{чн2}} \quad (3.57)$$

является решением данного уравнения.

Доказательство. Если функция (3.57) действительно является решением ЛНДУ (3.36), то при подстановке ее в уравнение должно получиться тождество. Проверим:

$$\begin{aligned}(y_{\text{чн1}} + y_{\text{чн2}})'' + a_1(x)(y_{\text{чн1}} + y_{\text{чн2}})' + a_2(x)(y_{\text{чн1}} + y_{\text{чн2}}) &= f(x), \\ y_{\text{чн1}}'' + y_{\text{чн2}}'' + a_1(x)y_{\text{чн1}}' + a_1(x)y_{\text{чн2}}' + a_2(x)y_{\text{чн1}} + a_2(x)y_{\text{чн2}} &= f(x), \\ (y_{\text{чн1}}'' + a_1(x)y_{\text{чн1}}' + a_2(x)y_{\text{чн1}}) + (y_{\text{чн2}}'' + a_1(x)y_{\text{чн2}}' + a_2(x)y_{\text{чн2}}) &= f(x).\end{aligned}$$

Учитывая равенства (3.56), имеем

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x), \quad f(x) \equiv f(x).$$

Теорема доказана.

Применение этой теоремы разберем на примерах в следующем параграфе.

3.4.4. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Определение 3.10. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (3.58)$$

где p и q – некоторые числа.

Согласно *теореме 3.8*, общее решение $y_{\text{он}}$ уравнения (3.58) представляет собой сумму общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения. Частное решение $y_{\text{чн}}$ уравнения (3.58) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (см. п. 3.4.2). Однако если в правой части уравнения (3.58) стоит функция «специального вида», то частное решение $y_{\text{чн}}$ может быть найдено **методом неопределенных коэффициентов**, не использующим интегрирования.

Суть **метода неопределенных коэффициентов** состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (3.58) записывают *предполагаемый* вид частного решения $y_{\text{чн}}$ с *неопределенными коэффициентами*, затем подставляют его в уравнение (3.58) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов применим только к ЛНДУ с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда правая часть $f(x)$ уравнения (3.58) имеет так называемый «специальный вид».

В общем случае правая часть «специального вида» выглядит следующим образом:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (3.59)$$

где α и β – действительные числа, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены n – ой и m – ой степени соответственно.

В этом случае частное решение $y_{\text{чн}}$ уравнения (3.58) следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x), \quad (3.60)$$

где α и β – такие же числа, как и в правой части $f(x)$ уравнения (3.58); r – количество совпадений числа $d = \alpha + i\beta$ с корнями k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$:

- если $d \neq k_1$ и $d \neq k_2$, то $r = 0$ – совпадений нет;
- если $d = k_1$ и $d \neq k_2$, то $r = 1$ – одно совпадение;
- если $d = k_1 = k_2$, то $r = 2$ – два совпадения (больше двух совпадений

быть не может, так как у характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ два корня);

$P_s(x)$ и $Q_s(x)$ – полные многочлены степени s (*т. е. многочлены, содержащие все степени x от нуля до s*) с неопределенными коэффициентами при одних и тех же степенях x в обоих многочленах:

$$P_s(x) = A_0 + A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_{s-1} x^{s-1} + A_s x^s,$$

$$Q_s(x) = B_0 + B_1 x^1 + B_2 x^2 + \dots + B_{s-1} x^{s-1} + B_s x^s,$$

причем s – наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. $s = \max\{n, m\}$.

Из выше сказанного следует, что *отыскание частного решения $y_{\text{чн}}$ сводится к нахождению неопределенных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_s$ и $B_0, B_1, B_2, \dots, B_s$* . Для их определения сначала находим производные от функции $y_{\text{чн}}$ (первую и вторую) и подставляем выражения $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное ЛНДУ (3.58). Добиваемся тождественного равенства, приравнявая коэффициенты у *подобных членов* в правой и левой частях записанного равенства. Получаем *систему линейных алгебраических уравнений*, относительно неизвестных $A_0, A_1, A_2, \dots, A_s$ и $B_0, B_1, B_2, \dots, B_s$. Решая ее, находим значения коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_s$ и $B_0, B_1, B_2, \dots, B_s$.

Замечание 3.2. При различных значениях чисел α и β в функции (3.59) возможны частные случаи «специального вида» правой части.

1. Если в (3.59) $\alpha = 0$, то

$$f(x) = e^{0 \cdot x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x) = 1 \cdot (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x) \quad \text{или}$$

$$f(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x. \quad (3.61)$$

Вид частного решения $y_{\text{чн}}$ для правой части вида (3.61) следующий:

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{0 \cdot x} (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x) = x^r \cdot 1 \cdot (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x) \quad \text{или}$$

$$y_{\text{чн}} = x^r (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x). \quad (3.62)$$

Здесь число $d = \alpha + i\beta = 0 + i\beta = i\beta$. Значит, в этом случае мы будем искать совпадение корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = i\beta$.

2. Если же в (3.59) $\beta = 0$, то

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos 0 \cdot x + Q_m(x) \sin 0 \cdot x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cdot 1 + Q_m(x) \cdot 0) \quad \text{или} \\ f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}. \quad (3.63)$$

Частное решение $y_{\text{чн}}$ для правой части вида (3.63) имеет вид:

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cos 0 \cdot x + Q_s(x) \sin 0 \cdot x) = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cdot 1 + Q_s(x) \cdot 0) \quad \text{или} \\ y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} P_s(x). \quad (3.64)$$

Здесь число $d = \alpha + i\beta = \alpha + i \cdot 0 = \alpha$. Значит, теперь мы будем искать совпадение корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = \alpha$.

3. Если в (3.59) и $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то

$$f(x) = e^{0 \cdot x} (P_n(x) \cos 0 \cdot x + Q_m(x) \sin 0 \cdot x) = 1 \cdot (P_n(x) \cdot 1 + Q_m(x) \cdot 0) \quad \text{или} \\ f(x) = P_n(x). \quad (3.65)$$

Вид частного решения $y_{\text{чн}}$ для правой части вида (3.65) в данном случае следующий:

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{0 \cdot x} (P_s(x) \cos 0 \cdot x + Q_s(x) \sin 0 \cdot x) = x^r \cdot 1 \cdot (P_s(x) \cdot 1 + Q_s(x) \cdot 0) \quad \text{или} \\ y_{\text{чн}} = x^r P_s(x). \quad (3.66)$$

Здесь число $d = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0$. Следовательно, в этом случае мы будем искать совпадение корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = 0$.

Замечание 3.3. Если в выражение функции $f(x)$ входит *хотя бы одна* из тригонометрических функций $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, то в частное решение $y_{\text{чн}}$ надо **всегда** вводить **обе** функции.

Замечание 3.4. После подстановки функций (3.59) или (3.61) в уравнение (3.58) систему линейных алгебраических уравнений получают тождественным приравниванием многочленов, стоящих перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях тождества.

Если же в уравнение (3.58) подставляем функции (3.63) или (3.65), то систему линейных алгебраических уравнений получаем приравниванием коэффициентов, стоящих перед одинаковыми степенями переменной x в левой и правой частях тождества.

Замечание 3.5. Если форма частного решения выбрана правильно, то **система** линейных алгебраических уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов **имеет единственное решение**. Если же система не имеет решения, то форма частного решения выбрана не верно.

Пример 3.11. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 4\sin 3x$.

Решение. Уравнение имеет вид (3.58). Значит, это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение ищем в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Сначала найдем общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 9y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 9 = 0.$$

Решаем его:

$$k^2 = -9, \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i.$$

Корни характеристического уравнения – комплексные числа. Следовательно, используя формулу (3.35)

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

запишем общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения в виде

$$y_{оо} = e^{0 \cdot x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \quad \text{или} \quad y_{оо} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \quad (3.67)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Теперь приступим к нахождению частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения. Так как правая часть представляет собой функцию «специального вида» – $f(x) = 4\sin 3x$, то найдем частное решение $y_{чн}$ методом неопределенных коэффициентов.

Сравнивая $f(x) = 4\sin 3x$ с общим видом правой части «специального вида»

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (3.59)$$

определяем:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad P_n(x) \equiv 0, \quad Q_m(x) = 4, \quad n = 0, \quad m = 0. \quad (3.68)$$

Используя (3.68), найдем число $d = \alpha + i\beta$, а следовательно – количество совпадений r корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом d , а также запишем вид многочленов $P_s(x)$ и $Q_s(x)$.

Итак, $d = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 3 = 3i$, а $k_1 = 3i$ и $k_2 = -3i \Rightarrow r = 1$ (совпал один корень).

$$s = \max \{m, n\} = \max \{0, 0\} = 0.$$

Так как $s = 0$, значит $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ – многочлены нулевого порядка:

$$P_s(x) = A, \quad Q_s(x) = B.$$

Подставив значения для r , α , β , $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ в формулу

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x), \quad (3.60)$$

получим вид частного решения

$$y_{\text{чн}} = x^1 e^{0 \cdot x} (A \cos 3x + B \sin 3x) \text{ или } y_{\text{чн}} = x(A \cos 3x + B \sin 3x). \quad (3.69)$$

Для определения коэффициентов A и B найдем вторую производную от $y_{\text{чн}}$

$$\begin{aligned} y'_{\text{чн}} &= x'(A \cos 3x + B \sin 3x) + x(A \cos 3x + B \sin 3x)' = \\ &= A \cos 3x + B \sin 3x + x(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{\text{чн}} &= (A \cos 3x)' + (B \sin 3x)' + x'(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + x(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)' = \\ &= -3A \sin 3x + 3B \cos 3x + 3B \cos 3x - 3A \sin 3x + x(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x) = \\ &= 6B \cos 3x - 6A \sin 3x - 9xA \cos 3x - 9xB \sin 3x, \end{aligned}$$

и подставим выражения $y_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение $y'' + 9y = 4 \sin 3x$

$$6B \cos 3x - 6A \sin 3x - 9xA \cos 3x - 9xB \sin 3x + 9x(A \cos 3x + B \sin 3x) = 4 \sin 3x.$$

$$6B \cos 3x - 6A \sin 3x - \cancel{9xA \cos 3x} - \cancel{9xB \sin 3x} + \cancel{9xA \cos 3x} + \cancel{9xB \sin 3x} = 4 \sin 3x.$$

$$6B \cos 3x - 6A \sin 3x \equiv 4 \sin 3x. \quad (3.70)$$

Так как после всех сокращений перед тригонометрическими функциями стоят многочлены одного порядка, то это означает, что мы правильно выбрали вид частного решения.

Теперь, приравнявая коэффициенты, стоящие перед $\cos 3x$ и $\sin 3x$ в левой и правой частях тождества (3.70), получаем систему линейных алгебраических уравнений.

$$\left. \begin{array}{l} \cos 3x \\ \sin 3x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6B = 0 \\ -6A = 4 \end{array}. \quad (3.71)$$

Из системы (3.71) находим: $B = 0$ и $A = -\frac{2}{3}$. Далее, подставляя A и B в выражение (3.69), имеем

$$y_{\text{чн}} = x \left(-\frac{2}{3} \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x \right) \text{ или } y_{\text{чн}} = -\frac{2}{3} x \cos 3x. \quad (3.72)$$

Складывая функции (3.67) и (3.72), получим общее решение исходного ЛНДУ:

$$y_{\text{он}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{2}{3} x \cos 3x.$$

Пример 3.12. Решить задачу Коши:
$$\begin{cases} y'' - 10y' = x^2 - 2; \\ y(0) = \frac{99}{50}; \quad y'(0) = -\frac{1}{500}. \end{cases}$$

Решение. Уравнение $y'' - 10y' = x^2 - 2$ есть ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, так как оно имеет вид (3.58). Его общее решение будем искать в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Найдем общее решение $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 10y' = 0.$$

Записываем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 10k = 0.$$

Решаем его:

$$k(k - 10) = 0, \quad k_1 = 0, \quad \text{а } k_2 = 10.$$

Корни характеристического уравнения различные действительные числа. Значит используем формулу (3.37)

$$y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Таким образом,

$$y_{оо} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{10x} \quad \text{или} \quad y_{оо} = C_1 + C_2 e^{10x}, \quad (3.73)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Далее находим частное решение $y_{чн}$ неоднородного уравнения. Так как правая часть представляет собой частный случай функции «специального вида» – многочлен $x^2 - 2$, то мы можем применить метод неопределенных коэффициентов.

Сравнивая $f(x) = x^2 - 2$ с общим видом правой части «специального вида»

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (3.59)$$

определяем:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad P_n(x) = x^2 - 2, \quad Q_m(x) = 0, \quad n = 2, \quad m = 0. \quad (3.74)$$

Так как $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то общий вид частного решения

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x),$$

запишем в форме

$$y_{чн} = x^r e^{0 \cdot x} (P_s(x) \cos 0 \cdot x + Q_s(x) \sin 0 \cdot x) \quad \text{или} \quad y_{чн} = x^r P_s(x) \quad (3.75)$$

Используя (3.74), найдем количество совпадений r корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = \alpha + i\beta$, а также запишем вид многочлена $P_s(x)$.

Итак, $d = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0$, а $k_1 = 0$ и $k_2 = 10 \Rightarrow r = 1$ (совпал один корень).

Так как $P_n(x) = x^2 - 2 \Rightarrow n = 2$, а $Q_m(x)$ умножается на ноль, то $Q_m(x)$ можно считать любым, например, равным нулю. Это значит $s = \max\{n, m\} = \max\{2, 0\} = 2$. Следовательно,

$$P_s(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя значения r и $P_s(x)$ в формулу (3.75), имеем искомый вид частного решения

$$y_{\text{чн}} = x^1(Ax^2 + Bx + C) \text{ или } y_{\text{чн}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx. \quad (3.76)$$

Для определения коэффициентов A , B и C найдем первую и вторую производную от $y_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{\text{чн}} = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B,$$

и подставим выражения $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение $y'' - 10y' = x^2 - 2$:

$$6Ax + 2B - 10(3Ax^2 + 2Bx + C) \equiv x^2 - 2.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$x^2(-30A) + x^1(6A - 20B) + x^0(2B - 10C) \equiv x^2 - 2. \quad (3.77)$$

Так как в левой и правой частях тождества (3.77) стоят многочлены одного порядка (второго), то это означает, что мы правильно выбрали вид частного решения.

Приравнивая коэффициенты, стоящие перед одинаковыми степенями переменной x в левой и правой частях тождества (3.77), получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -30A = 1 \\ 6A - 20B = 0 \\ 2B - 10C = -2 \end{array} \quad (3.78)$$

Из системы (3.78) находим: $A = -\frac{1}{30}$, $B = \frac{6}{20}A = \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{30}\right) = -\frac{1}{100}$ и $C = \frac{1}{10} \cdot 2(B + 1) = \frac{1}{10} \cdot 2\left(-\frac{1}{100} + 1\right) = \frac{99}{500}$. Далее, подставляя A , B и C в выражение (3.76), имеем

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + \frac{99}{500}x. \quad (3.79)$$

Складывая функции (3.73) и (3.79), получим общее решение исходного ЛНДУ:

$$y_{он} = C_1 + C_2 e^{10x} - \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + \frac{99}{500}x. \quad (3.80)$$

Выделим из общего решения (3.80) ЛНДУ его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = \frac{99}{50}, \quad y'(0) = -\frac{1}{500}.$$

Для этого продифференцируем общее решение (3.80)

$$y'_{он} = \left(C_1 + C_2 e^{10x} - \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + \frac{99}{500}x \right)' = 10C_2 e^{10x} - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{50}x + \frac{99}{500},$$

и получим

$$\begin{cases} y_{он}(x) = C_1 + C_2 e^{10x} - \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + \frac{99}{500}x, \\ y'_{он}(x) = 10C_2 e^{10x} - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{50}x + \frac{99}{500}. \end{cases} \quad (3.81)$$

Подставляя в (3.81) $x = 0$, $y_{он}(0) = \frac{99}{50}$ и $y'_{он}(0) = -\frac{1}{500}$, имеем

$$\begin{cases} \frac{99}{50} = C_1 + C_2, \\ -\frac{1}{500} = 10C_2 + \frac{99}{500}. \end{cases}$$

Из полученной системы найдем значения произвольных постоянных C_1 и C_2 :

$$10C_2 = -\frac{1}{500} - \frac{99}{500} = -\frac{100}{500} = -\frac{1}{5} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = -\frac{1}{50},$$

$$\frac{99}{50} = C_1 - \frac{1}{50} \Rightarrow C_1 = \frac{99}{50} + \frac{1}{50} = 2.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение (3.80), составим частное решение исходного ЛНДУ

$$y_{частное} = 2 - \frac{1}{50}e^{10x} - \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + \frac{99}{500}x.$$

Замечание 3.6. Если правая часть $f(x)$ ЛНДУ с постоянными коэффициентами состоит из нескольких слагаемых, **каждое** из которых есть функция «специального вида», то для отыскания частного решения $y_{чн}$ такого уравнения нужно использовать *теорему о наложении решений* (теорема 3.9), т. е. надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и будет являться частным решением исходного ЛНДУ.

Пример 3.13. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 1 - 3e^{-x} + 5\sin x - 2\cos x.$$

Решение. Данное уравнение является ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, так как оно имеет вид (3.58). Его общее решение будем искать в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Приступим к нахождению общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Записываем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \text{ или } (k + 1)^2 = 0.$$

Решив его, получаем:

$$k_1 = k_2 = -1.$$

Корни характеристического уравнения равные действительные числа. Значит, используем формулу (3.33)

$$y_{оо} = e^{k_1 x} (C_1 + xC_2).$$

Таким образом,

$$y_{оо} = e^{-x} (C_1 + xC_2), \quad (3.82)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Теперь приступаем к нахождению частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения. Правая часть ЛНДУ имеет вид $f(x) = 1 - 3e^{-x} + 5\sin x - 2\cos x$. Это не «специальный вид» правой части, так как структура данной функции $f(x)$ не совпадает со структурой равенства (3.59):

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$

Но если представить функцию $f(x)$ как сумму

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

то видно, что каждое слагаемое в отдельности представляет собой «специальный вид» правой части: $f_1(x) = 1$ – многочлен; $f_2(x) = -3e^{-x}$ – показательная функция; $f_3(x) = 5\sin x - 2\cos x$ – линейная комбинация тригонометрических функций вида $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$. Следовательно, для отыскания частного решения $y_{чн}$ исходного ЛНДУ нужно использовать *теорему о наложении решений (теорема 3.9)*. Таким образом,

$$y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2} + y_{чн3},$$

где $y_{чн1}$ – частное решение ЛНДУ

$$y'' + 2y' + y = 1; \quad (3.83)$$

$y_{чн2}$ – частное решение ЛНДУ

$$y'' + 2y' + y = -3e^{-x}; \quad (3.84)$$

$y_{\text{чн3}}$ – частное решение ЛНДУ

$$y'' + 2y' + y = 5\sin x - 2\cos x. \quad (3.85)$$

Так как правые части уравнений (3.83), (3.84) и (3.85) имеют «специальный вид», то для нахождения $y_{\text{чн1}}$, $y_{\text{чн2}}$ и $y_{\text{чн3}}$ применим метод неопределенных коэффициентов.

1. Сравнивая $f_1(x) = 1$ с общим видом правой части «специального вида»

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (3.59)$$

определяем:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad (3.86)$$

и формула частного решения

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x)$$

примет вид

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{0 \cdot x} (P_s(x) \cos 0 \cdot x + Q_s(x) \sin 0 \cdot x) \quad \text{или} \quad y_{\text{чн}} = x^r P_s(x).$$

Используя (3.86), найдем количество совпадений r корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = \alpha + i\beta$, а также запишем вид многочлена $P_s(x)$.

Итак, $d = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0$, а $k_1 = -1$ и $k_2 = -1 \Rightarrow r = 0$ (ни одного совпадения).

Так как $P_n(x) = 1$ и в $y_{\text{чн}} = x^r P_s(x)$ входит только один многочлен $P_s(x)$, то это значит $s = n = 0$, т. е. $P_s(x)$ – многочлен нулевого порядка. Следовательно,

$$P_s(x) = A.$$

Подставляя значения r и $P_s(x)$ в формулу $y_{\text{чн}} = x^r P_s(x)$, имеем искомый вид частного решения

$$y_{\text{чн1}} = x^0 A \quad \text{или} \quad y_{\text{чн1}} = A. \quad (3.87)$$

Для определения коэффициента A найдем первую и вторую производную от $y_{\text{чн1}}$:

$$y'_{\text{чн1}} = (A)' = 0, \quad y''_{\text{чн1}} = (0)' = 0$$

и подставим выражения $y_{\text{чн1}}$, $y'_{\text{чн1}}$ и $y''_{\text{чн1}}$ в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = 1$:

$$0 + 2 \cdot 0 + A \equiv 1. \quad (3.88)$$

Так как в левой и правой частях тождества (3.88) стоят многочлены одного порядка (нулевого), то это означает, что мы правильно выбрали вид частного решения.

Из тождества (3.88) ясно, что $A = 1$. Подставляя A в выражение (3.87), имеем

$$y_{\text{чн1}} = 1. \quad (3.89)$$

2. Сравнивая $f_2(x) = -3e^{-x}$ с общим видом правой части «специального вида»

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

определяем:

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad P_n(x) = -3, \quad n = 0, \quad m = 0. \quad (3.90)$$

Так как $\alpha = -1, \quad \beta = 0$, то общий вид частного решения

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x),$$

запишем в форме

$$y_{\text{чн2}} = x^r e^{-1 \cdot x} (P_s(x) \cos 0 \cdot x + Q_s(x) \sin 0 \cdot x) \quad \text{или} \quad y_{\text{чн2}} = x^r e^{-x} P_s(x) \quad (3.91)$$

Используя (3.90), найдем количество совпадений r корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом $d = \alpha + i\beta$, а также запишем вид многочлена $P_s(x)$.

Итак, $d = \alpha + i\beta = -1 + i \cdot 0 = -1$, а $k_1 = -1$ и $k_2 = -1 \Rightarrow r = 2$ (совпали два корня).

Так как $P_n(x) = -3$ и в (3.91) входит только один многочлен $P_s(x)$, то это значит $s = n = 0$, т. е. $P_s(x)$ – многочлен нулевого порядка. Следовательно,

$$P_s(x) = A.$$

Подставляя значения r и $P_s(x)$ в формулу (3.91), имеем искомый вид частного решения

$$y_{\text{чн2}} = x^2 e^{-x} A. \quad (3.92)$$

Для определения коэффициента A найдем первую и вторую производную от $y_{\text{чн2}}$:

$$y'_{\text{чн2}} = (x^2 e^{-x} A)' = A \left((x^2)' e^{-x} + (e^{-x})' x^2 \right) = A (2x e^{-x} - e^{-x} x^2),$$

$$y''_{\text{чн2}} = A (2x e^{-x} - e^{-x} x^2)' = A \left((2x e^{-x})' - (e^{-x} x^2)' \right) =$$

$$= A \left((2x)' e^{-x} + (e^{-x})' 2x - \left((e^{-x})' x^2 + (x^2)' e^{-x} \right) \right) =$$

$$= A (2e^{-x} - e^{-x} 2x - (-e^{-x} x^2 + 2x e^{-x})) = A (2e^{-x} + e^{-x} x^2 - 4x e^{-x})$$

и подставим выражения $y_{\text{чн2}}$, $y'_{\text{чн2}}$ и $y''_{\text{чн2}}$ в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = -3e^{-x}$:

$$A (2e^{-x} + e^{-x} x^2 - 4x e^{-x}) + 2A (2x e^{-x} - e^{-x} x^2) + x^2 e^{-x} A = -3e^{-x},$$

$$2Ae^{-x} + \cancel{Ae^{-x}x^2} - \cancel{4Axe^{-x}} + \cancel{4Axe^{-x}} - \cancel{2Ae^{-x}x^2} + \cancel{x^2e^{-x}A} = -3e^{-x},$$

$$2Ae^{-x} \equiv -3e^{-x},$$

или, сокращая на $e^{-x} \neq 0$, получим

$$2A \equiv -3. \quad (3.93)$$

В левой и правой частях тождества (3.93) стоят многочлены одного порядка (нулевого). Это означает, что мы правильно выбрали вид частного решения.

Из тождества (3.93) видно, что $A = -\frac{3}{2}$. Подставляя A в выражение (3.92), имеем

$$y_{\text{чн2}} = -\frac{3}{2}x^2e^{-x}. \quad (3.94)$$

3. Сравнивая $f_3(x) = 5\sin x - 2\cos x$ с общим видом правой части «специального вида»

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x),$$

определяем:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad P_n(x) = -2, \quad Q_m(x) = 5, \quad n = 0, \quad m = 0. \quad (3.95)$$

Используя (3.95), найдем число $d = \alpha + i\beta$, а следовательно – количество совпадений r корней k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ с числом d , а также запишем вид многочленов $P_s(x)$ и $Q_s(x)$.

Итак, $d = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i$, а $k_1 = -1$ и $k_2 = -1 \Rightarrow r = 0$ (ни одного совпадения).

$$s = \max\{m, n\} = \max\{0, 0\} = 0.$$

Так как $s = 0$, значит $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ – многочлены нулевого порядка:

$$P_s(x) = A, \quad Q_s(x) = B.$$

Подставив значения для r , α , β , $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ в формулу

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (P_s(x)\cos \beta x + Q_s(x)\sin \beta x),$$

получим вид частного решения

$$y_{\text{чн3}} = x^0 e^{0 \cdot x} (A\cos x + B\sin x) \text{ или } y_{\text{чн3}} = A\cos x + B\sin x. \quad (3.96)$$

Для определения коэффициентов A и B найдем первую и вторую производную от $y_{\text{чн3}}$:

$$y'_{\text{чн3}} = (A\cos x + B\sin x)' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y''_{\text{чн3}} = (-A\sin x + B\cos x)' = -A\cos x - B\sin x,$$

и подставим выражения $y_{\text{чн3}}$, $y'_{\text{чн3}}$ и $y''_{\text{чн3}}$ в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = 5\sin x - 2\cos x$:

$$\begin{aligned}
& -A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + A \cos x + B \sin x = 5 \sin x - 2 \cos x \\
& \cancel{-A \cos x} - \cancel{B \sin x} - 2A \sin x + 2B \cos x + \cancel{A \cos x} + \cancel{B \sin x} = 5 \sin x - 2 \cos x. \\
& -2A \sin x + 2B \cos x \equiv 5 \sin x - 2 \cos x.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Так как после всех сокращений перед тригонометрическими функциями стоят многочлены одного порядка, то это означает, что мы правильно выбрали вид частного решения.

Теперь, приравнявая коэффициенты, стоящие перед $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях тождества (3.97), получаем систему линейных алгебраических уравнений.

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array} \right| \begin{array}{l} 2B = -2 \\ -2A = 5 \end{array} \tag{3.98}$$

Из системы (3.98) находим: $B = -1$ и $A = -\frac{5}{2}$. Далее, подставляя A и B в выражение (3.96), имеем

$$y_{\text{чнз}} = -\frac{5}{2} \cos x - \sin x. \tag{3.99}$$

Складывая формулы (3.89), (3.94) и (3.99), получим частное решение исходного ЛНДУ $y'' + 2y' + y = 1 - 3e^{-x} + 5 \sin x - 2 \cos x$:

$$y_{\text{чн}} = 1 - \frac{3}{2} x^2 e^{-x} - \frac{5}{2} \cos x - \sin x. \tag{3.100}$$

Сумма равенств (3.82) и (3.100) даст нам искомое общее решение:

$$y_{\text{он}} = e^{-x} (C_1 + x C_2) + 1 - \frac{3}{2} x^2 e^{-x} - \frac{5}{2} \cos x - \sin x.$$

Начальные условия для системы (4.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0. \quad (4.2)$$

Задача Коши для системы (4.1) ставится следующим образом: найти решение системы (4.1), удовлетворяющее начальным условиям (4.2).

Для системы ДУ так же, как и для одного дифференциального уравнения, справедлива **теорема существования и единственности решения задачи Коши**.

Определение 4.4. Совокупность n функций, каждая из которых зависит от n произвольных постоянных

$$y_1 = \varphi_1(x; C_1; C_2; \dots; C_n), \quad y_2 = \varphi_2(x; C_1; C_2; \dots; C_n), \dots, \quad y_n = \varphi_n(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$$

называется **общим решением** системы ДУ (4.1), если

- при любых значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ эта совокупность функций является решением системы (4.1);
- по заданным начальным условиям (4.2) можно однозначно определить постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ из системы уравнений

[illegible]

Определение 4.5. Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется **частным решением** системы ДУ.

4.2. Интегрирование нормальных систем

Существуют несколько методов интегрирования нормальной системы ДУ. Одним из основных методов является **метод исключения неизвестных**. В результате интегрирования **нормальную систему ДУ** удастся свести к одному **уравнению n – го порядка, содержащему одну неизвестную функцию**.

Продemonстрируем этот метод на примере нормальной системы, состоящей из двух ДУ.

Пример 4.1. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3. \end{cases}$$

Решение. Выразим функцию z из первого ДУ:

$$z = y' - 2y, \quad (4.3)$$

и подставим ее во второе уравнение $z' = y + 2z$:

$(y' - 2y)' = y + 2(y' - 2y)$ или $y'' - 2y' = y + 2y' - 4y$, и окончательно получим

$$y'' - 4y' + 3y = 0. \quad (4.4)$$

Решим уравнение (4.4). Оно является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

Находим его корни: $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$.

Корни характеристического уравнения различные действительные числа. Значит, по формуле

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

определяем функцию y :

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x. \quad (4.5)$$

Теперь продифференцируем по x равенство (4.5):

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x, \quad (4.6)$$

и подставим выражения (4.5) и (4.6) в уравнение (4.3):

$$z = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2(C_1 e^{3x} + C_2 e^x).$$

Таким образом, функция z равна

$$z = C_1 e^{3x} - C_2 e^x. \quad (4.7)$$

Следовательно, общим решением исходной системы ДУ служат функции

$$\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x, \\ z = C_1 e^{3x} - C_2 e^x. \end{cases} \quad (4.8)$$

Теперь выделим из общего решения системы то частное, которое удовлетворяет заданным начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = 3$. Сначала составим систему уравнений для нахождения произвольных постоянных C_1 и C_2 , подставив $x = 0$, $y = 1$ и $z = 3$ в (4.8):

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \\ 3 = C_1 e^0 - C_2 e^0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 - C_2. \end{cases} \quad (4.9)$$

Определим из (4.9) значения C_1 и C_2 :

$$C_2 = 1 - C_1 \Rightarrow 3 = C_1 - (1 - C_1) = 2C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 2, \quad C_2 = 1 - 2 = -1.$$

Подставляя $C_1 = 2$ и $C_2 = -1$ в общее решение (4.8), мы получим искомое частное решение исходной системы

$$\begin{cases} y = 2e^{3x} - e^x, \\ z = 2e^{3x} + e^x. \end{cases}$$

5. Числовые ряды

5.1. Основные определения

Определение 5.1. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.1)$$

называется **числовым рядом**, при этом $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называют **членами** ряда.

С помощью знака $\sum$ ряд (5.1) можно записать коротко: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ или

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Если задана формула $u_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$, то $f(n)$ называется **общим членом** ряда. Общим членом называют также сам u_n при неопределенном, произвольном n .

Определение 5.2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется его **n -й частичной суммой** и обозначается s_n :

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Рассмотрим частичные суммы:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n. \end{aligned}$$

Определение 5.3. Если существует предел последовательности n -ых частичных сумм s_n

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad (5.2)$$

то его называют **суммой ряда** (5.1).

Если предел (5.2) конечен, то ряд называется **сходящимся**.

Если предел (5.2) равен ∞ (например $s_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) или не существует, то говорят, что ряд **расходится**. В последнем случае сумма ряда не существует.

Пример 5.1. Рассмотрим ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (5.3)$$

Этот ряд построен с помощью геометрической прогрессии с первым членом a ($a \neq 0$) и знаменателем q . Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна (при $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}, \text{ или } s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}.$$

Значит, в случае $|q| < 1$ ряд (5.3) сходится и его сумма равна

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

2. Если $|q| > 1$, то $|q^n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и тогда $\frac{a - aq^n}{1 - q} \rightarrow \pm\infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ не существует или равен бесконечности. Таким образом, в случае $|q| > 1$ ряд (5.3) расходится.

3. Если $q = 1$, то ряд (5.3) имеет вид $a + a + a + \dots + a + \dots$. В этом случае

$$s_n = na, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

т.е. ряд расходится.

4. Если $q = -1$, то ряд (5.3) имеет вид $a - a + a - a + \dots$. В этом случае

$$s = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ a & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, s_n предела не имеет – ряд расходится.

Таким образом, ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию (с первым членом отличным от нуля) сходится только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине меньше единицы.

Пример 5.2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Составим последовательность частичных сумм s_n этого ряда. Заметим, что общий член ряда можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3},$$

$$s_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}.$$

Подобным образом найдем, что

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм этого ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

5.2. Свойства числовых рядов

Теорема 5.1. Если сходится ряд, получившийся из данного ряда (5.1) отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд получившийся из данного отбрасыванием нескольких членов.

Иными словами, *на сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов.*

Доказательство. Пусть s_n — сумма n первых членов ряда (5.1), c_k — сумма k отброшенных членов (заметим, что при достаточно большом n все отброшенные члены содержатся в сумме s_n), σ_{n-k} — сумма членов ряда, входящих в сумму s_n и не входящих в сумму c_k . Тогда имеем:

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

где c_k — постоянное число, не зависящее от n .

Из последнего соотношения следует, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$; если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$, а это и доказывает справедливость теоремы.

Теорема 5.2. Если ряд

$$u_1 + u_2 + \dots \tag{5.4}$$

сходится и его сумма равна s , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \dots, \quad (5.5)$$

где $c \neq 0$ – какое-либо фиксированное число, также сходится и его сумма равна cs .

Доказательство. Обозначим n -ю частичную сумму ряда (5.4) через s_n , а ряда (5.5) – через σ_n . Тогда

$$\sigma_n = cu_1 + \dots + cu_n = c(u_1 + \dots + u_n) = cs_n.$$

Отсюда ясно, что предел n -й частичной суммы ряда (5.5) существует, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (cs_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = cs.$$

Итак, ряд (5.5) сходится и его сумма равна cs .

Теорема 5.3. Если ряды

$$u_1 + u_2 + \dots \quad (5.6)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots \quad (5.7)$$

сходятся и их суммы соответственно равны $\bar{s}$ и $\bar{s}$, то ряды

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots \quad (5.8)$$

и

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots \quad (5.9)$$

также сходятся и их суммы соответственно равны $\bar{s} + \bar{s}$ и $\bar{s} - \bar{s}$.

Доказательство. Докажем сходимости ряда (5.8). Обозначим его n -ю частичную сумму через σ_n , а n -е частичные суммы рядов (5.6) и (5.7) соответственно через $\bar{s}_n$ и $\bar{s}_n$, получим

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) = (u_1 + \dots + u_n) + (v_1 + \dots + v_n) = \bar{s}_n + \bar{s}_n.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{s}_n + \bar{s}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \bar{s} + \bar{s}.$$

Таким образом, ряд (5.8) сходится и его сумма равна $\bar{s} + \bar{s}$.

Аналогично доказывается, что ряд (5.9) также сходится и его сумма равна $\bar{s} - \bar{s}$.

Про ряды (5.8) и (5.9) говорят, что они получены в результате почленного сложения или соответственно почленного вычитания рядов (5.6) и (5.7).

5.3. Признаки сходимости знакоположительных рядов

При исследовании рядов одним из основных вопросов является вопрос о том, сходится или расходится данный ряд. Далее мы сформулируем и докажем

основные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов, определим сферу их применимости и разберем соответствующие примеры.

5.3.1. Необходимый признак сходимости

Теорема 5.4. Если ряд (5.1) сходится, то общий член ряда стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд (5.1) сходится, т.е. имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, где s – сумма ряда (т.е. конечное фиксированное число). Тогда имеет место также равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$, т.к. при $n \rightarrow \infty$ и $n-1 \rightarrow \infty$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$. Но $s_n - s_{n-1} = u_n$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 5.1 (достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n , то ряд обязательно расходится.

Доказательство. Действительно, если бы ряд сходил, то по теореме 5.4 его общий член обязан был бы стремиться к нулю, что противоречит условию.

Пример 5.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

Решение. Общим членом является $u_n = \frac{n}{n+1}$. Применим необходимый признак сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0$, то ряд расходится.

Замечание 5.1. Необходимый признак не является достаточным и используется только для доказательства расходимости ряда, т.е. из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, вовсе не следует, что ряд сходится, – ряд может и расходиться.

Пример 5.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако, легко показать, что этот ряд расходится. Для этого рассмотрим частичную сумму ряда

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, ..., то, очевидно, что

$s_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, или $s_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, т.е. $s_n > \sqrt{n}$. Отсюда непосредственно следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, и следовательно, ряд расходится.

Пример 5.5. Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Решение. Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Однако, как и в предыдущем примере, этот ряд расходится. Чтобы показать это, напомним подробнее гармонический ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \frac{1}{17} + \dots \quad (5.10)$$

Напишем далее вспомогательный ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}_{16 \text{ слагаемых}} + \dots \quad (5.11)$$

Обозначим через $s_n^{(1)}$ сумму n первых членов гармонического ряда (5.10) и через $s_n^{(2)}$ сумму n первых членов вспомогательного ряда (5.11). Так как каждый член ряда (5.10) больше соответствующего члена ряда (5.11) или равен ему, то для $n > 2$ $s_n^{(1)} > s_n^{(2)}$.

Подсчитаем частичные суммы ряда (5.11) для значений n , равных $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ слагаемых}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ слагаемых}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ слагаемых}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Точно так же подсчитывается, что $s_{2^6} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$, $s_{2^7} = 1 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ и, вообще,

$$s_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

Таким образом, частичные суммы ряда (5.11) при достаточно большом k могут быть сделаны больше любого положительного числа, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(2)} = \infty$,

но тогда из соотношения $s_n^{(1)} > s_n^{(2)}$ следует, что и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(1)} = \infty$, т.е. гармонический ряд (5.10) расходится.

Замечание 5.2. Необходимый признак сходимости применяется в том случае, когда под знаком суммы стоит дробь, в которой числитель и знаменатель содержат многочлены, причем степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя.

Пример 5.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n+1}$.

Решение. Применим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-5}{2n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Необходимый признак не выполнен, следовательно, ряд расходится.

Рассмотрим теперь достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов.

5.3.2. Признаки сравнения

Пусть имеем два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (5.12)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (5.13)$$

Для них справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.5. Если члены ряда (5.12) не больше соответствующих членов ряда (5.13), т.е.

$$u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.14)$$

и ряд (5.13) сходится, то сходится и ряд (5.12).

Доказательство. Обозначим через s_n и σ_n соответственно частичную сумму первого и второго рядов:

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i.$$

Из условия (5.14) следует, что

$$s_n \leq \sigma_n. \quad (5.15)$$

Так как ряд (5.13) сходится, то существует предел его частичной суммы $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. Из того, что члены рядов (5.12) и (5.13) положительны, следует, что $\sigma_n \leq \sigma$. Тогда в силу неравенства (5.15) $s_n \leq \sigma$.

Итак, мы доказали, что частичные суммы s_n ограничены. Заметим, что при увеличении n частичная сумма s_n возрастает, а из того, что последовательность частичных сумм возрастает и ограничена, следует, что она имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, причем очевидно, что $s \leq \sigma$. Следовательно, ряд (5.12) также сходится. Теорема доказана.

Теорема 5.6. Если члены ряда (5.12) не меньше соответствующих членов ряда (5.13), т.е.

$$u_n \geq v_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.16)$$

и ряд (5.13) расходится, то и ряд (5.12) расходится.

Доказательство. Из условия (5.16) следует, что

$$s_n \geq \sigma_n. \quad (5.17)$$

Так как члены ряда (5.13) положительны, то его частичная сумма σ_n возрастает при возрастании n , а так как он расходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Но тогда в силу неравенства (5.16) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, т.е. ряд (5.12) расходится. Теорема доказана.

Пример 5.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится (см. пример 5.4). Так как каждый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ больше соответствующего члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\ln n < n$, $\sqrt{\ln n} < \sqrt{n}$, $\frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, то по теореме 5.6 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ также расходится.

Замечание 5.3. Перефразируя теоремы 5.5 и 5.6 можно сказать, что из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, а из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего.

Замечание 5.4. Оба из доказанных признаков (теоремы 5.5 и 5.6) справедливы только для рядов с положительными членами. Они остаются в силе и для того случая, если некоторые члены 1-го или 2-го ряда – нули. Однако эти признаки перестают быть верными, если среди членов ряда имеются отрицательные числа.

Замечание 5.5. Теоремы 5.5 и 5.6 справедливы и в случае, если неравенства (5.14) или (5.16) начинают выполняться лишь для $n \geq N$, а не для всех ($n = 1, 2, \dots$).

Для сравнения с данным рядом можно пользоваться любыми уже изученными знакоположительными рядами. Например, часто используют геометрическую прогрессию или гармонический ряд.

Замечание 5.6. Для признаков сравнения часто используют ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (5.18)$$

которые сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \leq 1$ (это будет доказано ниже). При этом ряд (5.18) называется **обобщенным гармоническим рядом**. В случае, когда $p = 1$ ряд (5.18) превращается в уже рассмотренный гармонический ряд.

Пример 5.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + n^2 - 3n + 1}$.

Решение. Члены ряда при больших n мало чем отличаются от $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ (т.е. и в числителе и в знаменателе оставили n в наивысших степенях, а остальные слагаемые отбросили, т.к. они мало влияют на величину слагаемых при достаточно больших n). Таким образом, получили ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится, так как $p = 2 > 1$. Далее воспользуемся признаком сравнения (теоремой 5.5). Для этого проверим, действительно ли $\frac{n+1}{n^3 + n^2 - 3n + 1} < \frac{1}{n^2}$. Имеем $n^3 + n^2 < n^3 + n^2 - 3n + 1$ или $3n < 1$ — неравенство не выполняется при натуральных n . Увеличим табличный ряд в два раза и проверим, что $\frac{n+1}{n^3 + n^2 - 3n + 1} < \frac{2}{n^2}$, $n^3 + n^2 < 2n^3 + 2n^2 - 6n + 2$, $-n^2 + 6n - 2 < n^3$. Последнее неравенство справедливо при $n \geq 2$. Так как члены исходного ряда меньше членов сходящегося табличного ряда (начиная со второго номера), то по теореме 5.5 данный ряд сходится.

Замечание 5.7. Кроме метода решения, приведенного в примере 5.8, часто используется другой метод, основанный на следующей теореме.

Теорема 5.7. Пусть даны ряды с положительными членами (5.12) и (5.13). Если для них

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad (5.19)$$

где $k \neq 0$, $k \neq \infty$, то рассматриваемые ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 5.9. Исследуем на сходимость тот же ряд что и в примере 5.8, но уже используя условие (5.19). В предыдущем примере был найден ряд, с которым будем сравнивать исследуемый. Это был сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Вы-

числим предел отношения n -ых членов исходного и табличного рядов. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^2}{n^3 + n^2 - 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n^3 + n^2 - 3n + 1} = 1 \neq 0$. Таким образом, условие (5.19)

выполнено и по теореме 5.7 так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится, то и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + n^2 - 3n + 1}$ тоже сходится.

Пример 5.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n+1}{n^2}$.

Решение. Так как при больших n члены ряда $\sin \frac{n+1}{n^2} \approx \sin \frac{n}{n^2} = \sin \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$, то воспользуемся признаком сравнения, взяв табличный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Этот ряд расходится ($p = 1$). Используя теперь теорему 5.7, на основании первого замечательного предела имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n+1}{n^2} \cdot \frac{n+1}{n^2}}{\frac{n+1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n+1}{n^2}}{\frac{n+1}{n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \\ &= 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (5.19) теоремы 5.7 выполнено и, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то и данный ряд тоже расходится.

Замечание 5.8. Признаки сравнения *обычно применяются* в том случае, когда под знаком суммы стоит дробь, в которой числитель и знаменатель содержат многочлены, причем степень многочлена числителя *строго меньше* степени многочлена знаменателя.

Применение признаков сравнения при исследовании рядов часто бывает затруднительно из-за необходимости составлять вспомогательный ряд. Поэтому при исследовании рядов часто применяются и другие достаточные признаки сходимости (признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

5.3.3. Признак Даламбера

Теорема 5.8. Если в числовом ряде с положительными членами существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \quad (5.20)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Доказательство.

1. Пусть $q < 1$. Покажем, что ряд сходится. Действительно, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то на основании определения предела для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N , зависящее от ε , что для всех членов ряда, номер которых $n \geq N$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$- \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - q < +\varepsilon, \text{ или } q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon.$$

Полагая $q + \varepsilon = p$, будем иметь $\frac{u_{n+1}}{u_n} < p$. Так как q по предположению меньше единицы, а ε произвольно мало, то ε можно выбрать настолько малым, что $p = q + \varepsilon < 1$. Таким образом, для $n \geq N$ будем иметь:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < p, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < p, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < p, \dots$$

или

$$u_{N+1} < u_N p, \quad u_{N+2} < u_{N+1} p < u_N p^2, \quad u_{N+3} < u_{N+2} p < u_N p^3, \dots$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots, \quad (5.21)$$

$$u_N + u_N p + u_N p^2 + u_N p^3 + \dots \quad (5.22)$$

Ряд (5.22) сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $|p| < 1$. Так как члены ряда (5.21) не превосходят соответствующих членов ряда (5.22), то на основании признака сравнения (теорема 5.5) ряд (5.21) также сходится. Но ряд (5.21) получается из данного ряда (5.12) путем отбрасывания конечного числа членов $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{N-1}$; следовательно, по теореме 5.1 ряд (5.12) также сходится.

2. Пусть теперь $q > 1$. Покажем, что ряд расходится. Действительно, в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1.$$

Отсюда следует, что, начиная с достаточно больших значений $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \quad \text{или} \quad u_{n+1} > u_n.$$

Таким образом, члены ряда возрастают с увеличением номера. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, т.е. не выполнен необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится. Теорема доказана.

Замечание 5.9. Если $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то ряд также расходится, т.к. и в этом случае для достаточно больших n $u_{n+1} > u_n$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Замечание 5.10. При $q = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает и нужно применять другие методы исследования рядов.

Рассмотрим примеры исследования рядов на сходимость с помощью признака Даламбера.

Пример 5.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Так как

$$u_n = \frac{2n-1}{3^n}, u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} = \frac{2n+1}{3^n \cdot 3},$$

то

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot (2n-1)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $q = 1/3 < 1$ и, следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 5.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$.

Решение. Так как $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)^4}$, то

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4} = 2.$$

Так как $q = 2 > 1$, то по признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пример 5.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$.

Решение. Имеем $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!(n+1+1)!} = \frac{1}{(n+1)!(n+2)!}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0. \end{aligned}$$

Так как $q = 0 < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 5.14. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Данный ряд является обобщенным гармоническим рядом, так как $p = \frac{1}{2} < 1$, то из замечания 5.6 следует, что ряд расходится. Проверим, по-

лучим ли мы этот результат, применив признак Даламбера. Итак, $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Следовательно,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Таким образом, сделать заключение о сходимости или расходимости данного ряда с помощью признака Даламбера невозможно.

Пример 5.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Этот ряд уже был исследован в примере 5.2 (напомним, ряд получился сходящимся). Также к предложенному ряду можно применить признак сравнения (сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). Посмотрим, получим ли мы этот ре-

зультат, применив признак Даламбера. Так как $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, то

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Снова сделать заключение о сходимости или расходимости данного ряда с помощью признака Даламбера невозможно.

Эти два примера показывают, что при $q = 1$ действительно ничего определенного о сходимости ряда сказать нельзя.

Замечание 5.11. Признак Даламбера применяем в том случае, когда под знаком суммы стоит выражение, содержащее факториал или (и) показательную функцию.

5.3.4. Радикальный признак Коши

Теорема 5.9. Если для числового ряда с положительными членами существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \quad (5.23)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. При $q = 1$ требуется дополнительное исследование.

Доказательство.

1. Пусть $q < 1$. Покажем, что ряд сходится. Рассмотрим число p , удовлетворяющее соотношению $q < p < 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место соотношение

$$\left| \sqrt[n]{u_n} - q \right| < p - q.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{u_n} < p, \text{ или } u_n < p^n$$

для всех $n \geq N$.

Рассмотрим два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots, \quad (5.24)$$

$$p^N + p^{N+1} + p^{N+2} + \dots \quad (5.25)$$

Ряд (5.25) сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Так как члены ряда (5.24) не превосходят соответствующих членов ряда (5.25), то на основании признака сравнения (*теорема 5.5*) ряд (5.24) также сходится.

2. Пусть теперь $q > 1$. Покажем, что ряд расходится. Действительно, в этом случае, начиная с некоторого номера $n = N$

$$\sqrt[n]{u_n} > 1, \text{ или } u_n > 1.$$

Но если все члены рассматриваемого ряда, начиная с u_N , больше 1, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Теорема доказана.

Пример 5.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

Следовательно, по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Пример 5.17. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применим радикальный признак Коши и воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Замечание 5.12. Как и в признаке Даламбера, случай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q = 1$$

требует дополнительного исследования. Среди рядов, удовлетворяющих этому условию, могут встретиться как сходящиеся, так и расходящиеся ряды. Так, для гармонического ряда (который, как известно, расходится)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Для того чтобы в этом убедиться, докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$.

Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Здесь числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$ и, следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$.

Для обобщенного гармонического ряда, например $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 1 \Rightarrow$ данный ряд сходится),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Если воспользоваться радикальным признаком Коши для определения сходимости данного ряда, то получим

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} - 1\right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1-n^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{1-n^2}} \right]^{\frac{1-n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1-n^2}{n^3}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Т.е. данный признак не дает никаких сведений о сходимости или расходимости ряда.

Замечание 5.13. Радикальный признак Коши применяется в том случае, когда члены ряда представляют собой выражение в степени, зависящей от n .

5.3.5. Интегральный признак Коши

Теорема 5.10. Пусть члены ряда (5.1) положительны и не возрастают, т.е.

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots, \quad (5.26)$$

и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \dots, \quad f(n) = u_n. \quad (5.27)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится (т.е. равен конечному числу), то сходится и ряд (5.1);

2) если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд (5.1).

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$ с основанием от $x = 1$ до $x = n$. Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников, основаниями которых служат сегменты $[1, 2], [2, 3], [3, 4], \dots$. Высотами первой из них служат значения функции $f(2), f(3), f(4), \dots, f(n)$, а высотами второй – $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n-1)$ (см. рис. 5.1).

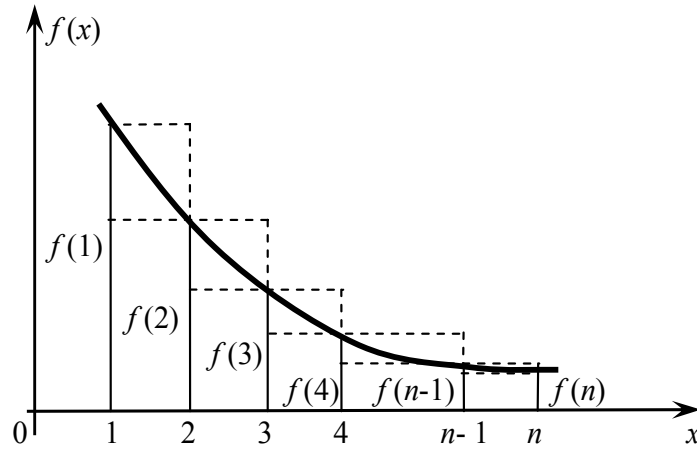


Рис. 5.1

Как видно из рис. 5.1, площадь криволинейной трапеции, выражаемая интегралом $\int_1^n f(x) dx$, заключается между площадями вписанной и описанной ступенчатых фигур.

Так как площадь вписанной фигуры выражается суммой

$$f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n,$$

а описанной – суммой

$$f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1},$$

то получаем неравенства

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n < \int_1^n f(x) dx < u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1},$$

или короче

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x) dx < S_n - u_n.$$

Отсюда получаем

$$S_n < u_1 + \int_1^n f(x) dx, \quad (5.28)$$

$$S_n > u_n + \int_1^n f(x) dx. \quad (5.29)$$

Рассмотрим теперь следующие случаи.

1. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится (конечен). Это значит,

что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = I$. Так как $f(x) > 0$, то с возрастанием n

$\int_1^n f(x) dx$ возрастает и не превосходит своего предела:

$$\int_1^n f(x) dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = I.$$

Из неравенства (5.28) следует, что $S_n < u_1 + I$. Таким образом, в этом случае последовательность частичных сумм ограничена и возрастает, следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится (не существует). В этом

случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$. Из неравенства (5.29) следует, что последовательность частичных сумм S_n неограниченна и, следовательно, ряд расходится.

Пример 5.18. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши, положив $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Эта функция удовлетворяет всем условиям признака. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^N = \frac{1}{1-p} (N^{1-p} - 1) & \text{при } p \neq 1, \\ \ln x \Big|_1^N = \ln N & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Устремляя N к бесконечности, выясним, когда данный несобственный интеграл сходится, а когда расходится. На основе этого можно будет судить о сходимости или расходимости ряда при различных значениях p .

В случае, когда $p > 1$, $p - 1 > 0$ и поэтому $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{1-p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{p-1}} = 0$ и,

следовательно, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$. Таким образом, интеграл конечен и, следовательно, ряд сходится.

В случае, когда $p < 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$, т.е. интеграл бесконечен и ряд расходится.

В случае, когда $p = 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$, т.е. интеграл бесконечен и ряд расходится.

Заметим, что ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши, рассмотренные ранее, не решают вопроса о сходимости этого ряда, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^p = 1^p = 1.$$

Пример 5.19. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{d \ln x}{(\ln x)^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \Big|_2^n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \neq \infty.$$

Следовательно, интеграл сходится, значит, сходится и данный ряд.

Замечание 5.14. Интегральный признак Коши применяют в том случае, когда знакоположительный ряд не соответствует рекомендациям, указанным в замечаниях 5.2, 5.8, 5.11, 5.13.

5.4. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

5.4.1. Знакопеременные ряды

Определение 5.4. Ряд называется **знакопеременным**, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные, расположенные в произвольном порядке.

Теорема 5.11. Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.30)$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (5.31)$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд тоже сходится.

Доказательство. Пусть s_n и σ_n — суммы n первых членов рядов (5.30) и (5.31).

Пусть далее s'_n — сумма всех положительных, а s''_n — сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного ряда; тогда

$$s_n = s'_n - s''_n, \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

По условию σ_n имеет предел σ ; s'_n и s''_n — положительные возрастающие величины, меньшие σ . Следовательно, они имеют пределы s' и s'' . Из соотношения $s_n = s'_n - s''_n$ следует, что и s_n имеет предел и этот предел равен $s' - s''$, т.е. знакопеременный ряд (5.30) сходится.

Данная теорема дает возможность судить о сходимости некоторых знакопеременных рядов. Исследование вопроса о сходимости знакопеременного ряда сводится в этом случае к исследованию ряда с положительными членами.

Пример 5.20. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots, \quad (5.32)$$

где α — любое число.

Решение. Наряду с данным рядом рассмотрим знакоположительные ряды

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots \quad (5.33)$$

и

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (5.34)$$

Ряд (5.34) сходится, т.к. это обобщенный гармонический ряд ($p = 2 > 1$). Члены ряда (5.33) не больше соответствующих членов ряда (5.34); следовательно, ряд (5.33) тоже сходится (см. *признаки сравнения*). Но тогда в силу доказанной теоремы данный знакопеременный ряд (5.32) тоже сходится.

Пример 5.21. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{\cos(\pi/4)}{3} + \frac{\cos(3\pi/4)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi/4)}{3^3} + \dots + \frac{\cos((2n-1)\pi/4)}{3^n} + \dots \quad (5.35)$$

Решение. Наряду с данным рядом рассмотрим ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \quad (5.36)$$

Этот ряд сходится, так как он является убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $1/3$. Но тогда сходится и заданный ряд (5.35), так как абсолютные величины его членов меньше соответствующих членов ряда (5.36).

Пример 5.22. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$. Следовательно, на основании *теоремы 5.11* сходится и данный ряд.

5.4.2. Абсолютная и условная сходимость

Определение 5.5. Знакопеременный ряд (5.30) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд (5.31), составленный из абсолютных величин его членов. Если же ряд (5.30) сходится, а ряд (5.31) расходится, то данный знакопеременный ряд (5.30) называется **условно сходящимся**.

Например, знакопеременный ряд из примера 5.22 является абсолютно сходящимся, т.к. сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

С помощью понятия абсолютной сходимости теорему 5.11 часто формулируют следующим образом: **всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся**.

Отметим без доказательства следующие свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов.

Теорема 5.12. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

Это свойство не сохраняется для условно сходящихся рядов.

Теорема 5.13. Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число A , можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A . Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы ряд, полученный после перестановки, оказался расходящимся.

Рассмотрим теперь *частный случай* знакопеременных рядов – знакочередующиеся ряды.

5.4.3. Знакопеременные ряды

Определение 5.6. Ряд называется *знакопеременным*, если его члены имеют чередующиеся знаки. Такой ряд имеет следующий вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \quad (5.37)$$

где $u_1, u_2, u_3, \dots$ положительны.

Для исследования знакопеременного ряда (5.37) на сходимость применяют *признак Лейбница*.

Теорема 5.14 (признак Лейбница). Если в знакопеременном ряду (5.37) члены таковы, что выполнены следующие условия:

$$1). \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

$$2). u_1 > u_2 > u_3 > \dots,$$

то ряд (5.37) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Доказательство. Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (5.37):

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из второго условия *теоремы 5.14* следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма s_{2m} положительна, $s_{2m} > 0$, и возрастает с возрастанием m . Запишем теперь эту же сумму так:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

В силу второго условия *теоремы 5.14* каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 мы получим число, меньшее u_1 , т.е. $s_{2m} < u_1$. Таким образом, мы установили, что s_{2m} при возрастании m возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что s_{2m} имеет предел s : $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s$,

причем $0 < s < u_1$. Однако сходимость ряда еще не доказана; мы доказали только, что последовательность «четных» частичных сумм имеет пределом число s . Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу s .

Рассмотрим для этого сумму $n = 2m+1$ первых членов ряда (5.37):

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Так как по первому условию *теоремы 5.14* $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$, то, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s.$$

Тем самым мы доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ как при четном n , так и при нечетном n . Следовательно, ряд (5.37) сходится.

Замечание 5.15. Признак Лейбница справедлив, если второе условие выполняется, начиная с некоторого N .

Замечание 5.16. Признак Лейбница иллюстрируется геометрически следующим образом. Будем на числовой прямой откладывать частичные суммы $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2$, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_4 = s_3 - u_4$, $s_5 = s_4 + u_5$ и т. д. (см. рис. 5.2).

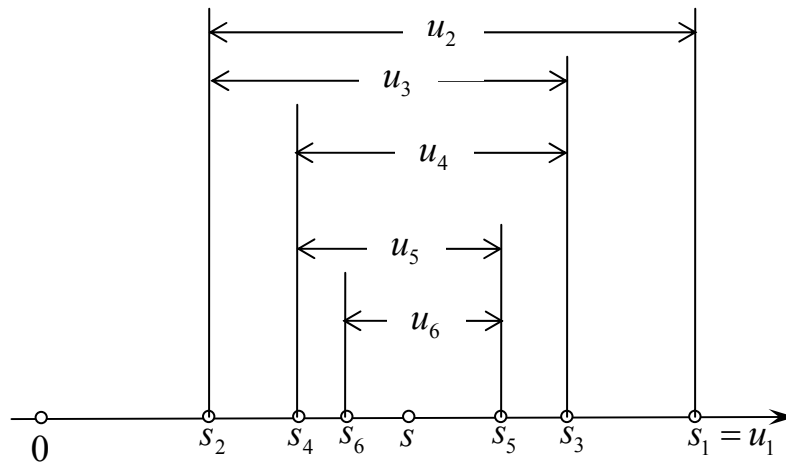


Рис. 5.2

Точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к некоторой точке s , которая изображает сумму ряда. При этом точки, соответствующие четным частичным суммам, располагаются слева от s , а точки соответствующие нечетным частичным суммам, — справа от s .

Замечание 5.17. Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию теоремы 5.14, то нетрудно оценить погрешность, которая получится, если заменить его сумму s частичной суммой s_n . При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1} . Но эти числа сами образуют знакочередующийся ряд, сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (т.е. меньше u_{n+1}). Значит, погрешность, получающаяся при замене s на s_n , не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Пример 5.23. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}.$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмот-

рим ряд из положительных членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Этот ряд расходится ($p = 1$). Найдем предел отношения двух рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0.$$

Таким образом, по признаку сравнения оба ряда расходятся одновременно. Следовательно, данный знакочередующийся ряд будет сходиться условно, в случае выполнения признака Лейбница, и расходиться, если признак Лейбница будет не выполнен.

Проверим выполнение условий признака Лейбница (теорема 5.14):

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 0. \quad \Rightarrow \quad \text{первое условие признака}$$

Лейбница выполнено;

$$2. \quad \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}, \quad (n^2+1)(n+1) < n(n^2+2n+2),$$

$n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$, $n^2 + n - 1 > 0$. Это неравенство выполняется при всех значениях $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, и второе условие теоремы 5.14 выполнено. Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится условно.

Замечание 5.18. Второе условие признака Лейбница об убывании членов ряда можно обосновать методами анализа, вспомнив, что функция убывает, если ее производная меньше нуля.

Таким образом, в предыдущем примере можно не проверять неравенство, а взять производную и посмотреть ее знак:

$$\left(\frac{n}{n^2+1} \right)' = \frac{n^2+1 - n \cdot 2n}{(n^2+1)^2} = \frac{1-n^2}{(n^2+1)^2} < 0 \quad \text{при значениях } n = 2, 3, \dots$$

Пример 5.24. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^3+1}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмот-

рим ряд из положительных членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3 + 1}$. Применим к этому ряду необходимый признак сходимости.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1 \neq 0.$$

Так как признак не выполнен, то данный знакоположительный ряд расходится, и тогда данный знакочередующийся ряд будет сходиться условно, в случае выполнения признака Лейбница и расходиться, если признак Лейбница будет не выполнен. Но первое условие признака Лейбница как раз и требует выполнения необходимого признака сходимости. Следовательно, признак Лейбница для данного знакочередующегося ряда не выполнен и ряд расходится.

Пример 5.25. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Рассмотрим ряд из положительных членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Как известно, это гармонический ряд и он расходится. Тогда данный знакочередующийся ряд будет сходиться условно, в случае выполнения признака Лейбница и расходиться, если признак Лейбница будет не выполнен.

Проверим выполнение признака Лейбница:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Первое условие выполнено.
- 2) $\left(\frac{1}{n} \right)' = -\frac{1}{n^2} < 0$ при любом $n > 1$. Следовательно, функция убывает и второе условие выполнено. Таким образом, по признаку Лейбница знакочередующийся ряд сходится. Следовательно, по *определению 5.5* данный знакочередующийся ряд сходится условно.

Пример 5.26. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(5n+2)!}$.

Решение. Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(5n+2)!}$. Исследуем его на сходимость с помощью признака Даламбера.

$$u_n = \frac{3^n}{(5n+2)!},$$

$$u_{n+1} = \frac{3^{(n+1)}}{(5(n+1)+2)!} = \frac{3^n \cdot 3}{(5n+7)!} = \frac{3^n \cdot 3}{(5n+2)!(5n+3)(5n+4)(5n+5)(5n+6)(5n+7)}.$$

$$\begin{aligned} q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot (5n+2)!}{(5n+2)!(5n+3)(5n+4)(5n+5)(5n+6)(5n+7) \cdot 3^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(5n+3)(5n+4)(5n+5)(5n+6)(5n+7)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный знакоположительный ряд сходится. Таким образом, по *определению 5.5*, данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 5.27. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}.$

Решение. Начнем с исследования знакоположительного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$

Данный ряд исследовался в примере (5.19). Этот ряд сходится. Следовательно, по *теореме 5.11* и *определению 5.5* данный знакочередующийся ряд абсолютно сходится.

Пример 5.28. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

Решение. Исследуем сначала на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$ Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$ Данный знакоположительный ряд расходится. Найдем предел отношения n -ых членов двух последних рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, оба ряда ведут себя одинаково. Таким образом, ряд из положительных членов расходится. Теперь проверяем условия признака Лейбница. Итак,

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ (так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\ln 1 = 0$). Следовательно, первое условие выполнено;

$$2) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \left(-\frac{1}{n^2} \right) = -\frac{n}{(1+n)n^2} = -\frac{1}{(1+n)n} < 0$$

при любом $n = 1, 2, \dots$

Следовательно, функция убывает и второе условие признака Лейбница выполнено.

Таким образом, все условия признака Лейбница выполнены. Следовательно, по этому признаку знакочередующийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ сходится.

А так как знакоположительный ряд расходится, то данный знакочередующийся ряд сходится условно.

6. Функциональные ряды

6.1. Основные определения

Перейдем теперь к изучению таких рядов, членами которых являются не числа, а функции, определенные в некоторой области изменения аргумента x :

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (6.1)$$

Например,

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots$$

Определение 6.1. Ряд (6.1) называется **функциональным**, если его члены являются функциями от x .

Придавая x какое-либо значение x_0 из области определения функций $u_n(x)$, $n=1, 2, \dots$ получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (6.2)$$

Этот ряд может сходиться или расходиться. Если он сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости функционального ряда** (6.1). Если при $x = x_0$ ряд (6.2) расходится, то точка x_0 называется **точкой расходимости функционального ряда**. Для одних точек, взятых из области определения функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \dots$, ряд может сходиться, а для других – расходиться.

Определение 6.2. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется **областью его сходимости**.

Очевидно, что в области сходимости ряда его сумма зависит от x и, следовательно, является некоторой функцией от x . Поэтому сумму функционального ряда обозначают через $s(x)$.

Обозначим через $s_n(x)$ сумму n первых членов ряда (6.1). Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел частичной суммы $s_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости, частичная сумма $s_n(x)$ равна ∞ или не имеет предела. Остаток $r_n(x)$ есть сумма ряда, полученного из ряда (6.1) отбрасыванием его первых n членов:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots + u_{n+p}(x) + \dots$$

Если этот ряд сходится и его сумма равна $s(x)$, то имеет место равенство:

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Ясно, что необходимым условием сходимости ряда в точке x является стремление к нулю его остатка, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s(x) - s_n(x)) = 0$. Т.е. остаток

$r_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Пример 6.1. Рассмотрим функциональный ряд

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем x . Она сходится при всех значениях x в интервале $(-1, 1)$, т.е. при всех x , удовлетворяющих условию $|x| < 1$. Для каждого значения x в интервале $(-1, 1)$ сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$ (сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x). Таким образом, в интервале $(-1, 1)$ данный ряд определяет функцию

$$s(x) = \frac{1}{1-x},$$

которая является суммой ряда, т.е. при $-1 < x < 1$ справедлива формула

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Заметим, что при $|x| > 1$ левая часть формулы имеет смысл, а правая часть нет.

Пример 6.2. Определить область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}.$$

Решение. Члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{x^2}$. Как мы знаем, геометрическая прогрессия сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$. Поэтому данный ряд сходится для тех значений x , для которых $\frac{1}{x^2} < 1$, или $x^2 > 1$. Таким образом, наш ряд сходится для всех точек x , для которых $|x| > 1$. Область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$.

Пример 6.3. Определить область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}.$$

Решение. Так как функции $e^{nx} > 0$, то можно применить радикальный признак Коши:

$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^x = e^x$. По признаку Коши, чтобы ряд сходился, надо, чтобы $q(x) < 1$. В силу свойств функции e^x $q(x) < 1$ при $x < 0$. Т.е. данный ряд сходится при $x < 0$. Кроме того, на границе области сходимости при $x = 0$ исходный ряд превращается в числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{0n} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$ (необходимый признак сходимости не выполнен) и в этой точке ряд расходится. Следовательно, область сходимости данного ряда есть интервал $(-\infty, 0)$.

6.2. Мажорируемые ряды

Определение 6.3. Функциональный ряд (6.1) называется *мажорируемым* в некоторой области изменения x , если существует такой сходящийся числовой ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots \quad (6.3)$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)| \leq \alpha_1, \quad |u_2(x)| \leq \alpha_2, \quad \dots, \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \dots \quad (6.4)$$

Иначе говоря, ряд называется *мажорируемым*, если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Например, ряд

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$$

есть ряд, мажорируемый на всей оси Ox . Действительно, для всех значений x выполняется соотношение

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

как известно, сходится.

Непосредственно из *определения 6.3* следует, что ряд, мажорируемый в некоторой области, абсолютно сходится во всех точках этой области (см. п.п. 5.4.1 и 5.4.2). Кроме того, мажорируемый ряд обладает следующим важным свойством.

Теорема 6.1. Пусть функциональный ряд (6.1) мажорируем на отрезке $[a, b]$ и $s(x)$ – сумма n первых членов этого ряда. Тогда для каждого сколь угодно

но малого числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число N такое, что при всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

каково бы ни было x из отрезка $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим через σ сумму ряда (6.3):

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots,$$

тогда

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,$$

где σ_n – сумма n первых членов ряда (6.3), а ε_n – сумма всех остальных членов этого ряда, т.е.

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots$$

Так как этот ряд сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Представим теперь сумму функционального ряда (6.1) в виде

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

где $s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$, $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots$

Из условия (6.4) следует, что

$$|u_{n+1}(x)| \leq \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leq \alpha_{n+2}, \quad \dots$$

и поэтому $|r_n(x)| \leq \varepsilon_n$ для всех x из рассматриваемой области.

Таким образом, $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$ для всех x из отрезка $[a, b]$, причем $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 6.1. Полученный результат можно геометрически иллюстрировать следующим образом.

Рассмотрим график функции $y = s(x)$. Построим около этой кривой полосу шириной $2\varepsilon_n$, т.е. построим кривые $y = s(x) + \varepsilon_n$ и $y = s(x) - \varepsilon_n$ (см. рис. 6.1)

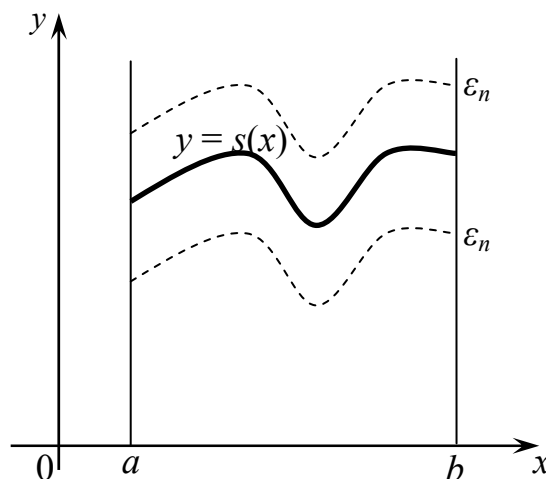


Рис. 6.1

Тогда при любом $n \geq N$ график функции $s_n(x)$ будет лежать целиком в рассматриваемой полосе. В этой же полосе будут лежать графики всех последующих частичных сумм.

Замечание 6.2. Не всякий функциональный ряд, сходящийся на отрезке $[a, b]$, обладает свойством, указанным в *теореме 6.1*. Но существуют и **немажорируемые** ряды, которые обладают указанным свойством. Всякий ряд, обладающий указанным свойством, называется **равномерно сходящимся рядом** на отрезке $[a, b]$.

Определение 6.4. Функциональный ряд (6.1) называется **равномерно сходящимся** на отрезке $[a, b]$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что при всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

для любого x из отрезка $[a, b]$.

Из *теоремы 6.1* следует, что мажорируемый ряд является рядом, равномерно сходящимся.

Сформулируем теперь в качестве теорем без доказательства некоторые свойства мажорируемых рядов.

Теорема 6.2. Сумма мажорируемого на отрезке $[a, b]$ ряда, составленного из непрерывных функций, есть функция, непрерывная на этом отрезке.

Замечание 6.3. Из этой теоремы следует, что если сумма ряда из непрерывных функций на каком-либо отрезке $[a, b]$ разрывна, то ряд не мажорируем на этом отрезке.

Теорема 6.3. Пусть ряд (6.1) мажорируем на отрезке $[a, b]$, и пусть $s(x)$ есть сумма этого ряда. Тогда интеграл от $s(x)$ в пределах от a до x , принадлежащих отрезку $[a, b]$, равняется сумме таких же интегралов от членов данного ряда, т.е.

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \dots$$

Замечание 6.4. Если ряд не мажорируем, то почленное интегрирование

ряда не всегда возможно. Это надо понимать в том смысле, что $\int_{\alpha}^x s(t) dt$ от суммы ряда (6.1) не всегда равен сумме интегралов от его членов.

Теорема 6.4. Если ряд (6.1), составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, сходится на этом отрезке к сумме $s(x)$ и ряд

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots, \quad (6.5)$$

составленный из производных его членов, мажорируем на том же отрезке, то сумма ряда производных равна производной от суммы первоначального ряда, т.е.

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots \quad (6.6)$$

Замечание 6.5. Требование мажорируемости ряда производных является весьма существенным, и его невыполнение может привести к невозможности почленного дифференцирования ряда. В подтверждение этого приведем пример мажорируемого ряда, не допускающего почленного дифференцирования.

Пример 6.4. Рассмотрим ряд

$$\frac{\sin 1^4 x}{1^2} + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \dots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \dots$$

Этот ряд сходится к непрерывной функции, так как он мажорируем. Действительно, при любом x его члены по абсолютной величине меньше членов числового сходящегося ряда с положительными членами

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Напишем ряд, составленный из производных членов исходного ряда:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \dots + n^2 \cos n^4 x + \dots$$

Этот ряд расходится. Действительно, для всех значений x справедливо неравенство $|n^2 \cos n^4 x| \leq n^2$. Это означает, что ряд с общим членом n^2 мажорирует данный функциональный ряд. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ расходится, то данный функциональный ряд расходится.

Так, например, при $x = 0$ он превращается в ряд

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$$

(можно показать, что он расходится не только при $x = 0$). Таким образом, равенство (6.6) в данном случае не выполняется и данный ряд нельзя почленно дифференцировать.

6.3. Степенные ряды

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играют ряды, в которых рассматривается сумма **степенных функций** аргумента x .

Определение 6.5. Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (6.7)$$

где x — переменная величина, называется **степенным рядом**. Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Степенной ряд всегда сходится, по крайней мере, в одной точке. Для ряда (6.7) такой точкой является $x = 0$. Область сходимости степенного ряда можно определить исходя из теоремы Абеля.

6.3.1. Теорема Абеля

Теорема 6.5.

1. Если степенной ряд (6.7) сходится при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то он сходится абсолютно при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.
2. Если степенной ряд (6.7) расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Доказательство.

1. Зафиксируем x , $|x| < |x_0|$. Представим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ в виде

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 \left(x_0 \frac{x}{x_0} \right)^2 + a_3 \left(x_0 \frac{x}{x_0} \right)^3 + \dots a_n \left(x_0 \frac{x}{x_0} \right)^n + \dots = \\ & = a_0 + a_1x_0 \frac{x}{x_0} + a_2x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + a_3x_0^3 \left(\frac{x}{x_0} \right)^3 + \dots a_nx_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

$$|a_0| + |a_1x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + |a_3x_0^3| \left| \frac{x}{x_0} \right|^3 + \dots + |a_nx_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (6.8)$$

Ряд (6.7) при $x = x_0$ сходится по условию и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, что следует из необходимого признака сходимости числового ряда.

Докажем, что последовательность $\{a_n x_0^n\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, то для любого малого, положительного числа ε , в процессе изменения n непременно наступает такой момент n^* , начиная с которого $|a_n x_0^n - 0| < \varepsilon$, т.е. $|a_n x_0^n| < \varepsilon$, при всех $n > n^*$.

Поскольку, начиная с n^* , выполняется неравенство $|a_n x_0^n| < \varepsilon$, то для всех $k \geq 0$: $|a_k x_0^k| < M = \max\{|a_1 x_0|, |a_2 x_0^2|, |a_3 x_0^3|, \dots, |a_{n^*-1} x_0^{n^*-1}|, \varepsilon\}$, что и доказывает оценку: $|a_n x_0^n| < M$, $n \geq 0$.

Заменяя каждое слагаемое в формуле (6.8) на большее, получаем ряд

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^3 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

или, что то же самое,

$$M \left(1 + \left| \frac{x}{x_0} \right| + \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \left| \frac{x}{x_0} \right|^3 + \dots + \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \right) \quad (6.9)$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (6.9) представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = |x/x_0| < 1$ и, следовательно, сходится. Поскольку каждый элемент ряда (6.8) меньше соответствующего элемента ряда (6.9), а ряд (6.9) сходящийся, то по признаку сравнения ряд (6.8) также является сходящимся. Т.к. ряд (6.8) составлен из абсолютных величин исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, то он абсолютно сходится.

2. Пусть теперь известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$ расходится.

Предположим противное, т.е. допустим, что существует такое число x_2 , при котором ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_2^n$ сходится, но $|x_2| > |x_1|$. Тогда по первому утверждению теоремы, если степенной ряд сходится при $x = x_2$, он абсолютно сходится и для x_1 , поскольку $|x_1| < |x_2|$. Полученное противоречие доказывает утверждение 2 и теорему 6.5.

6.3.2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Теорема 6.6. Для любого ряда (6.7) существует число R , такое что, ряд сходится абсолютно при всех $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$. Это число называется радиусом сходимости степенного ряда.

Доказательство. Обозначим через X множество всех значений x , при которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

Если $X = \{0\}$, то $R = 0$ - областью сходимости является одна точка.

Если $X = (-\infty; +\infty)$, то $R = \infty$ - областью сходимости является множество всех действительных чисел.

Пусть теперь $X \neq \{0\}$ и $X \neq (-\infty; +\infty)$, тогда существует такое значение x_2 , при котором ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ расходится, тогда, по *теореме 6.5*, для всех $x \in X : |x| < |x_2|$, т.е. множество X является ограниченным. Точную верхнюю границу множества X обозначим через R : $R = \sup_{x \in X} |x|$. Тогда существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, 3, \dots$ такая, что $|x_n| \rightarrow R$. По *теореме 6.5 (пункт 1)* множеству X принадлежат все числа x такие, что $|x| < |x_n|$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Но правая часть неравенства как угодно близка к R . Следовательно, X целиком содержит интервал $(-R; R)$. Таким образом, для всех $|x| < R$ ряд сходится абсолютно.

Если теперь $|x| > R$, тогда $x \notin X$. Следовательно, степенной ряд (6.7) для любого $|x| > R$ расходится. Теорема доказана.

Число R , $0 \leq R \leq \infty$, существование которого доказано в *теореме 6.6*, называется радиусом сходимости степенного ряда (6.7).

Промежуток $(-R; R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

Теорема 6.7. Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$ существует, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|.$$

Доказательство. Зафиксируем x и рассмотрим ряд из абсолютных величин исходного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{R}.$$

Если $\frac{|x|}{R} < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, а значит, и исходный ряд сходится.

Если $\frac{|x|}{R} > 1$, то члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ не стремятся к нулю, а значит, и исходный ряд расходится.

Таким образом, для всех $|x| < R$ ряд (6.7) сходится, а для всех $|x| > R$ он расходится. Это значит, что R есть радиус сходимости ряда (6.7).

Теорема доказана.

Кроме указанного в *теореме 6.7* способа определения радиуса сходимости степенного ряда, его также можно определить, если воспользоваться радикальным признаком Коши: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Поскольку по признаку Коши для

сходимости ряда необходимо, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, следовательно, ряд сходится только в том случае, если $x < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Правая часть последнего равенства и есть радиус сходимости.

Заметим, что все предыдущие результаты ничего не говорят о сходимости степенного ряда (6.7) в точках $x = R$ и $x = -R$. Сходимость в них надо проверять отдельно.

При подстановке $x = R$ или $x = -R$ получаем числовые ряды, для выяснения сходимости которых можно применять все известные признаки сходимости знакопостоянных рядов. При этом если получается знакочередующийся ряд, то следует применять теорему Лейбница.

Для знакопостоянного ряда известны следующие признаки сходимости: необходимый, признак Даламбера, интегральный признак Коши, радикальный

признак Коши и признаки сравнения. Из перечисленных признаков признак Даламбера и радикальный признак Коши не работают, так как соответствующее q будет равно 1. Поэтому для случая знакопостоянного ряда надо применять все признаки кроме признака Даламбера и радикального признака Коши.

Пример 6.5. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Решение.

1. Определим радиус сходимости ряда.

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n+1}}$, где $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{(n+1)+1}} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$,

тогда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^n}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \sqrt{n+2}}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$$

2. Определим интервал сходимости.

По теореме 6.7, интервал $|x| < R = \frac{1}{3}$, т.е. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ является интервалом сходимости.

3. Определим сходимость на границе при $x = -R = -\frac{1}{3}$ и при $x = R = \frac{1}{3}$.

При $x = \frac{1}{3}$ получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ряд

является знакопостоянным, применим к нему один из признаков сходимости знакопостоянных рядов – либо интегральный признак Коши, либо признак сравнения, либо необходимый признак сходимости. Выберем интегральный признак сходимости:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{x+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=A} = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} (\sqrt{A+1} - \sqrt{0+1}) = \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ расходится. Точка $x = \frac{1}{3}$ не принадлежит области сходимости.

При $x = -\frac{1}{3}$ получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Ряд является знакоперевающимся. Ряд из абсолютных величин ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ имеет вид

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, и его сходимость уже рассматривалась, он расходящийся. Следова-

тельно, точка $x = -\frac{1}{3}$ не является точкой абсолютной сходимости ряда. Если бы было получено, что ряд на левой границе абсолютно сходится, то эта бы точка принадлежала бы области сходимости, а поскольку этого не произошло, то применим более слабое условие сходимости знакопередающихся рядов – теореме Лейбница.

Итак, определим сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ по теореме Лейбница:

а) проверим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. В нашем случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, т.е. первое условие

теоремы выполнено;

б) проверим, что $u_n > u_{n+1}$. В нашем случае необходимо либо доказать неравенство $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}}$, либо проверить, что функция $f(n) = u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ убывает.

Проверим $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Так как знаменатель у правой дроби больше, то сама дробь меньше по отношению к левой дроби, что доказывает справедливость неравенства. Второе условие теоремы Лейбница выполнено. Следовательно, данный ряд сходится и точка $x = -\frac{1}{3}$ принадлежит области сходимости.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Замечание 6.6. Степенной ряд может быть записан в виде

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad (6.10)$$

или

$$a_0 + a_1(x-a)^p + a_2(x-a)^{2p} + \dots + a_n(x-a)^{np} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^{np}, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (6.11)$$

Ряды (6.10) и (6.11) легко могут быть сведены к ряду вида (6.7) после замены переменных $(x-a) = y$ и $(x-a)^p = y$ соответственно. Если R радиус сходимости полученного после замены переменных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, т.е. ряд сходится при $|y| < R$, то границы области сходимости рядов (6.10) и (6.11) будут определяться соответственно неравенствами

$$|x-a| < R \Rightarrow -R+a < x < R+a,$$

$$|x-a| < \sqrt[p]{R} \Rightarrow -\sqrt[p]{R}+a < x < \sqrt[p]{R}+a.$$

Проверка сходимости на границе проводится аналогично приведенному выше примеру.

Пример 6.6. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{64^n}$.

Решение.

1. Определим радиус сходимости ряда.

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{64^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x-2)^3)^n}{64^n}$. Введем замену переменных

$(x-2)^3 = y$ и определим область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{64^n}$, где $a_n = \frac{1}{64^n}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{64^{n+1}}, \text{ тогда } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{64^{n+1}}{64^n} \right| = 64.$$

2. Определим интервал сходимости.

По теореме 6.7, интервал сходимости $|y| < 64$, т.е. $|(x-2)^3| = |(x-2)|^3 < 64$, тогда интервалом сходимости является множество $|(x-2)| < \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow -4 < x-2 < 4$. Окончательно получаем $-2 < x < 6$.

3. Определим сходимость на границе при $x = -2$ и при $x = 6$.

При $x = 6$ получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2)^{3n}}{64^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$. Ряд является знакопостоянным. Проверим необходимый признак сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$. Следовательно, точка $x = 6$ не принадлежит области сходимости.

При $x = -2$ получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2-2)^{3n}}{64^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-64)^n}{64^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Ряд является знакочередующимся и не сходящимся абсолютно, так как ряд составленный из модулей $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ – расходящийся ряд. Тогда применим к нему теорему Лейбница:

а) проверим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. В нашем случае $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$, т.е. первое условие теоремы не выполнено;
б) проверять, что $u_n > u_{n+1}$, уже не нужно.

Точка $x = -2$ по признаку Лейбница не принадлежит области сходимости.

Ответ: $x \in (-2; 6)$.

6.3.3. Свойства степенных рядов

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (6.12)$$

интервал сходимости которого $(-R; R)$. В данном случае говорят, что функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд по степеням x . Имеют место две важные теоремы о свойствах степенных рядов, которые приведем без доказательства.

Теорема 6.8. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R; R)$ раскладывается в степенной ряд (6.12), то она дифференцируема на этом интервале и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда (6.12), т.е.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

Аналогичным образом могут быть вычислены производные любого порядка функции $f(x)$. При этом соответствующие ряды имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (6.12).

Теорема 6.9. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R; R)$ раскладывается в степенной ряд (6.12), то она интегрируема на этом интервале и интеграл от нее

может быть вычислен почленным интегрированием ряда (6.12), т.е. если $x_1, x_2 \in (-R; R)$, то

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} a_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1 x dx + \int_{x_1}^{x_2} a_2 x^2 dx + \dots + \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx + \dots \end{aligned}$$

Если $|x| < R$, то при интегрировании опять получаем степенной ряд, который имеет тот же интервал сходимости

$$\int_0^x f(x) dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

6.4. Разложение функций в степенные ряды

6.4.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Ряды Тейлора и Маклорена являются часто используемым инструментом в приближенных вычислениях определенных и «неберущихся» неопределенных интегралов, значений функции с любой степенью точности и решении дифференциальных уравнений.

Формула Тейлора

Всякая функция $f(x)$, имеющая внутри некоторого промежутка (содержащего точку $x = a$) непрерывные производные до $(n+1)$ -го порядка включительно, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + (x-a)^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots + \\ &+ (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x) \end{aligned} \quad (6.13)$$

где в правой части формулы (6.13) присутствует многочлен Тейлора $T_n(x)$ и остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$, который может быть представлен в виде формулы Лагранжа:

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (6.14)$$

где $a < \xi < x$, некоторое число, зависящее от x .

Рядом Тейлора функции $y = f(x)$, имеющей производные любого порядка в окрестности точки a , назовем **степенной ряд**

$$f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots \quad (6.15)$$

Установим, при каких условиях ряд Тейлора совпадает с функцией $f(x)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.10. Для того чтобы ряд Тейлора сходиллся на $(-R+a; R+a)$ к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $(-R+a; R+a)$ остаточный член $R_n(x)$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R+a; R+a)$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ – сумма ряда Тейлора, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$, тогда поскольку $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R+a; R+a)$.

Достаточность. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R+a; R+a)$, тогда поскольку $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, то, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - T_n(x)) = 0$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$. Это и означает, что ряд (6.15) сходится для любого $x \in (-R+a; R+a)$ и его сумма равна $f(x)$.

Теорема доказана.

Если $a = 0$, то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**. Условия, при которых функция $y = f(x)$ раскладывается в ряд Маклорена, аналогичные. Остаточный член формулы Маклорена $R_n(x)$ представлен в виде:

$$R_n(x) = x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (6.16)$$

где точка ξ находится на интервале между 0 и x . При оценке погрешности $R_n(x)$ сверху точка ξ выбирается таким образом, чтобы $R_n(x)$ принимала наибольшее значение.

6.4.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

Рассмотрим следующие элементарные функции: $y(x) = e^x$, $y(x) = \sin x$, $y(x) = \cos x$, $y(x) = \ln(1+x)$, $y(x) = \operatorname{arctg} x$, $y(x) = (1+x)^\alpha$.

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых из перечисленных функций. Для остальных укажем соответствующие ряды.

1. Пусть $y(x) = e^x$.

$$f(0) = e^0 = 1; f'(0) = \left(e^x\right)' \Big|_{x=0} = e^0 = 1; f''(0) = \left(e^x\right)'' \Big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

$$f'''(0) = \left(e^x\right)''' \Big|_{x=0} = e^0 = 1, \dots, f^{(n)}(0) = \left(e^x\right)^{(n)} \Big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

Тогда ряд Маклорена для функции $y(x) = e^x$ имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.17)$$

Докажем, что формула (6.17) справедлива везде, т.е. то, что остаточный член формулы Тейлора действительно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^{n+1} \frac{\left(e^x\right)^{(n+1)} \Big|_{x=\xi}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^{n+1} \frac{e^\xi}{(n+1)!} \right|,$$

поскольку $0 < |\xi| < |x|$, то $1 = e^0 < e^{|\xi|} < e^{|x|}$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$, поскольку x фиксированное число.

Итак, формула (6.17) справедлива. Удобно использовать эту формулу, например, для вычисления числа $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$. Количество слагаемых в данной сумме зависит от требуемой точности числа e .

2. Пусть $y(x) = \sin x$.

$$f(0) = \sin 0 = 0;$$

$$f'(0) = (\sin x)' \Big|_{x=0} = \cos x \Big|_{x=0} = 1;$$

$$f''(0) = (\sin x)'' \Big|_{x=0} = -\sin x \Big|_{x=0} = 0;$$

$$f'''(0) = (\sin x)''' \Big|_{x=0} = -\cos x \Big|_{x=0} = -1, \dots;$$

$$f^{(n)}(0) = (\sin x)^{(n)} \Big|_{x=0} = \sin\left(\frac{\pi}{2}n + x\right) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ (-1)^m, & n = 2m + 1; \end{cases}$$

тогда ряд Маклорена для функции $y(x) = \sin x$ имеет вид

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (6.18)$$

Докажем, что формула (6.18) справедлива, т.е. то, что остаточный член формулы Тейлора действительно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^{n+1}| \frac{\left| (\sin x)^{(n+1)} \Big|_{x=\xi} \right|}{(n+1)!},$$

поскольку $(\sin x)^{(n)} \Big|_{x=\xi} = \begin{cases} \sin \xi, & n = 2m \\ (-1)^m \sin \xi, & n = 2m + 1 \end{cases}$, то $\left| (\sin x)^{(n)} \Big|_{x=\xi} \right| = |\sin \xi| \leq 1$, то-

гда $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x^{n+1}| \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку x фиксированное число.

Итак, формула (6.18) справедлива.

Известно, что при $|x| < 1$ справедливы формулы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad (6.19)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (6.20)$$

Можно аналогичным образом проверить:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty, \quad (6.21)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad |x| < 1, \quad (6.22)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad |x| < 1, \quad (6.23)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots((\alpha-n+1))}{n!}x^n + \dots, \quad |x| < 1. \quad (6.24)$$

6.5. Приложение степенных рядов

6.5.1. Приближенное вычисление значений функций и определенных интегралов

Степенные ряды имеют разнообразные приложения. С их помощью с любой заданной точностью вычисляются значения функций, находятся приближенные значения определенных интегралов, результаты которых не выражаются через элементарные функции или являются сложными для вычислений.

Например, первообразная функции $\frac{\cos x}{x^2}$ не является элементарной, однако вычислить определенный интеграл от неинтегрируемой функции возможно, если представить подынтегральное выражение в виде степенного ряда

$$\frac{\cos x}{x^2} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx &= \int_1^a \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(-\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!3} - \frac{x^5}{6!5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)} + \dots \right) \Bigg|_{x=1}^{x=a} = \\ &= -\left(\frac{1-a}{a} \right) - \left(\frac{a-1}{2!} \right) + \left(\frac{a^3-1}{4!3} \right) - \left(\frac{a^5-1}{6!5} \right) + \dots + (-1)^n \left(\frac{a^{2n-1}-1}{(2n)!(2n-1)} \right) + \dots \end{aligned}$$

Разложение функции в ряд применяется при вычислении значения функции или вычисления иррациональных выражений.

Пример 6.7. Вычислить $\sqrt[3]{70}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Для вычислений используем формулу (6.24). Заметим, что функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ раскладывается в ряд Маклорена, если $|x| < 1$. Представим подкоренное выражение следующим образом:

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64+6} = \sqrt[3]{64(1+\frac{6}{64})} = \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{(1+\frac{6}{64})} = 4 \sqrt[3]{(1+\frac{3}{32})}.$$

Итак, вычислим значение функции $f(x) = 4(1+x)^{\frac{1}{3}}$ в точке $x = \frac{3}{32}$, т.к. $f(\frac{3}{32}) = \sqrt[3]{70}$. Очевидно, выполняется условие $|x| < 1$, таким образом, использование формулы (6.24) является правомерным.

$$f(\frac{3}{32}) = 4(1+\frac{3}{32})^{\frac{1}{3}} \approx \left(4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1!} \cdot \frac{3}{32} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^2 + \right. \\ \left. + 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^3 + \dots + 4 \cdot \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)\dots((\frac{1}{3}-n+1))}{n!} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^n + \dots \right) \quad (6.25)$$

Далее вычисляем значения слагаемых правой части выражения (6.25):

$$4 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1!} \cdot \frac{3}{32} = \frac{4}{32} = 0,125,$$

поскольку $0,125 > \varepsilon = 0,001$, вычисления продолжаем.

$$4 \cdot \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^2 = -4 \left(\frac{1}{32}\right)^2 = -0,003906,$$

поскольку $|-0,003906| > \varepsilon = 0,001$, вычисления продолжаем.

$$4 \cdot \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^3 = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{32}\right)^3 = 0,000203,$$

поскольку $0,000203 < \varepsilon = 0,001$, то четвертое слагаемое в правой части равенства (6.25) можно не учитывать.

Итак, для вычисления $\sqrt[3]{70}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$ достаточно оставить в сумме (6.25) первые три элемента ряда:

$$\sqrt[3]{70} \approx 4 + 0,125 - 0,003906 = 4,121094.$$

6.5.2. Решения дифференциальных уравнений

Степенные ряды применяются к решению дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях (то есть при решении задачи Коши).

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка: $y'x = \sin x$, которое, очевидно, является уравнением с разделяющимися переменными. Определить решение необходимо при начальном условии $y(\pi) = 1$. При разделении переменных в правой части имеем “неберущийся” интеграл

$$\int dy = \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Таким образом, решение данного уравнения обычным способом не представляется возможным.

Пусть искомое решение $y(x)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(a) + (x-a) \frac{y'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{y''(a)}{2!} + (x-a)^3 \frac{y'''(a)}{3!} + \dots + \\ + \dots + (x-a)^n \frac{y^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x), \quad (6.26)$$

В уравнении (6.26) неизвестными являются коэффициенты $y'(a)$, $y''(a)$, ..., $y^{(n)}(a)$, они могут быть определены по начальным условиям и дифференциальному уравнению.

Определим, например, первые три отличных от нуля слагаемых ряда Тейлора решения $y(x)$. Имеем тождество $y'(x) = \frac{\sin x}{x}$, тогда $y(\pi) = 1$ в силу начального условия.

$$y'(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0.$$

Продифференцируем правую и левую часть исходного равенства

$$y'(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ по } x: y''(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Следовательно,

$$y''(\pi) = \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0 \end{array} \right] = \frac{\pi \cos \pi - \sin \pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}.$$

Для определения третьего, отличного от нуля слагаемого в ряде Тейлора продифференцируем равенство $y''(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ еще раз:

$$y'''(x) = \frac{-x^3 \sin x - 2x(x \cos x - \sin x)}{x^4},$$

тогда при $x = \pi$

$$y'''(\pi) = \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0 \\ y''(\pi) = -1/\pi \end{array} \right] = \frac{-\pi^3 \sin \pi - 2\pi(\pi \cos \pi - \sin \pi)}{\pi^4} = \frac{2}{\pi^2}.$$

Вычислены $y(\pi)$, $y'(\pi)$, $y''(\pi)$, $y'''(\pi)$, тогда решение исходного дифференциального уравнения $y(x)$ раскладывается в ряд Тейлора следующим образом:

$$\begin{aligned} y(x) &\approx 1 + (x - \pi) \frac{0}{1!} + (x - \pi)^2 \frac{-\frac{1}{\pi}}{2!} + (x - \pi)^3 \frac{\frac{2}{\pi^2}}{3!} + \dots = \\ &= 1 - (x - \pi)^2 \frac{1}{2!\pi} + (x - \pi)^3 \frac{2}{3!\pi^2} + \dots \end{aligned}$$

В заключение добавим, что задача значительно упрощается, если начальное условие задано в точке $x = 0$, т.к. в этом случае используется ряд Маклорена.

7. Ряды Фурье

7.1. Тригонометрические ряды

При изучении разнообразных *периодических процессов*, т.е. процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются (движение различных деталей машин, акустические и электромагнитные колебания и т.д.), целесообразнее разлагать функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в *тригонометрический ряд*.

Определение 7.1. Ряд вида

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + \\ + b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (7.1)$$

называется **тригонометрическим рядом**, а числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ — коэффициентами тригонометрического ряда.

Функции $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ ряда (7.1) являются периодическими с периодом 2π , так как равенства $\cos n(x + 2\pi) = \cos(nx + 2\pi n) = \cos nx$, $\sin n(x + 2\pi) = \sin(nx + 2\pi n) = \sin nx$ справедливо для любого целого n .

Важным свойством множества функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad (7.2)$$

образующих тригонометрический ряд (7.1), является их *ортogonalность на отрезке* $[-\pi; \pi]$. Напомним, какие функции называются ортогональными.

Определение 7.2. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются **ортogonalными** на отрезке $[a; b]$, если интеграл произведения $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, взятый в пределах от a до b , равен нулю.

Следовательно, для множества функций (7.2) справедливы следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0 \quad (n \neq 0), \quad (7.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx = 0, \quad (7.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0 \quad (n \neq m), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (7.5)$$

Замечание 7.1. Если вместо двух различных функций множества (7.2) взять две одинаковые, то интеграл в пределах от $-\pi$ до π равен π для всех функций (7.2), кроме первой, для которой он вдвое больше:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin nx dx = \pi. \quad (7.6)$$

7.2. Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом 2π

Рассмотрим следующую задачу. Требуется подобрать, если это возможно, неизвестные постоянные $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ так, чтобы ряд (7.1) был сходящимся и чтобы его сумма равнялась наперед заданной периодической функции $f(x)$ периода 2π .

Предположим, что некоторая функция $f(x)$ является суммой ряда (7.1) на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7.7)$$

и предполагая, что ряд (7.7) на этом отрезке допускает почленное интегрирование, проинтегрируем обе части равенства (7.7) в пределах от $-\pi$ до π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

Учитывая формулы (7.3) – (7.6), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (7.8)$$

Для определения остальных коэффициентов a_n умножим обе части равенства (7.7) на $\cos mx$ и проинтегрируем обе части равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right),$$

тогда при $m \neq n$ в силу (7.3) – (7.6) все коэффициенты в правой части последнего равенства обращаются в ноль, только при $m = n$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.9)$$

Совершенно так же, умножив обе части равенства (7.7) на $\sin mx$ и проинтегрировав обе части полученного равенства, имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.10)$$

Коэффициенты, определяемые равенствами (7.8) – (7.10), называются коэффициентами Фурье функции $y = f(x)$, а ряд (7.7), полученный после подстановки коэффициентов Фурье, называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$.

При определении коэффициентов Фурье были сделаны некоторые допущения, например, мы с самого начала предположили, что функция раскладывается в тригонометрический ряд, и интегрировали почленно ряд, состоящий из бесконечного числа слагаемых. Введем следующие ограничения на функцию.

Указанные ниже условия называют **условиями Дирихле**:

1. Функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ является непрерывной или имеет конечное число точек разрыва, причем только первого рода;
2. Отрезок $[-\pi; \pi]$ можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых $f(x)$ меняется монотонно. Такая функция называется кусочно – монотонной на данном отрезке.

Теорема 7.1 (Дирихле). Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле, тогда ряд Фурье (7.7) функции $f(x)$ сходится равномерно на этом отрезке к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности функции, а ряд Фурье во всех точках разрыва $\bar{x}$ принимает значение

$$\frac{f(\bar{x} + 0) + f(\bar{x} - 0)}{2},$$

а на концах отрезка при $x = \pm\pi$ ряд Фурье равен

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Пример 7.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнением $f(x) = 2x$.

Решение. График функции $f(x) = 2x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет вид, изображенный на рис 7.1. Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. имеет не более чем конечное число точек разрыва (в данном случае их нет) и

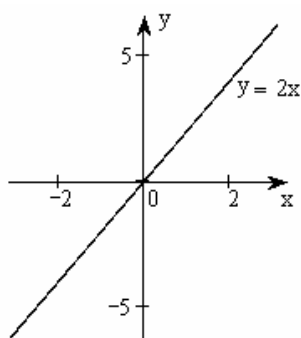


Рис. 7.1

кусочно-монотонна, а значит, что данную функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = 2x \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Определим коэффициенты a_n и b_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin n\pi - \frac{\pi}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right) = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - \cos n\pi) = 0.$$

При вычислениях использовались формулы

$$\sin \pi n = 0, \quad \cos \pi n = (-1)^n.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos \pi n - \frac{\pi}{n} \cos \pi n + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right) = \\ &= -\frac{4}{n} \cos \pi n = \frac{4}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0.$$

Итак, ряд Фурье сходится к функции $f(x) = 2x$ во всех точках ее непрерывности (см. рис 7.1), т.е. на интервале $(-\pi; \pi)$, и имеет вид:

$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 0 \cdot \cos \frac{\pi nx}{\pi} + \frac{4}{n} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi nx}{\pi} \right\} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad (7.11)$$

Значение суммы ряда (7.11) на концах интервала равно

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi+0} (2x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} (2x)}{2} = 0.$$

Продлим график функции на всю действительную ось (см. рис 7.2) и изобразим сумму ряда (7.11) на рис. 7.3.

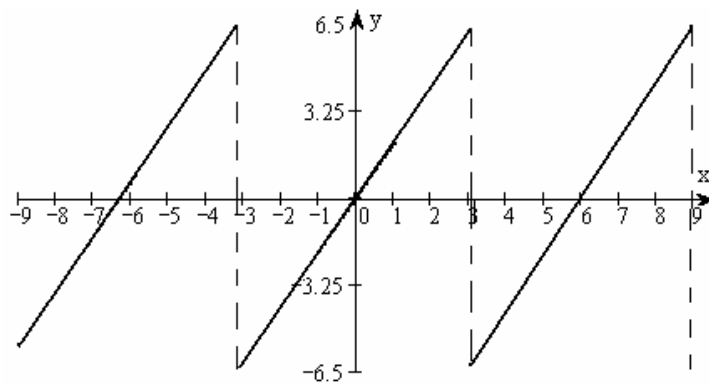


Рис.7.2

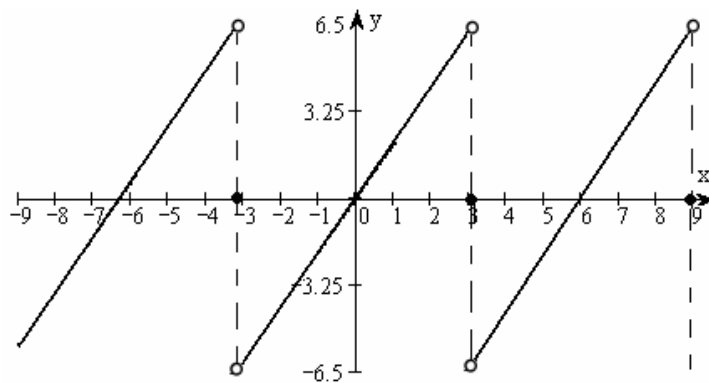


Рис.7.3

7.3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2π

Пусть разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ с периодом 2π является **четной**, т.е. $f(-x) = f(x)$. Рассмотрим коэффициенты ряда Фурье.

Поскольку $f(x)$ и $\cos nx$ – четные функции, то и их произведение $f(x)\cos nx$ также функция четная, тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.12)$$

Поскольку $f(x)$ – четная функция, а $\sin nx$ – функция нечетная, то и их произведение $f(x)\sin nx$ функция нечетная, тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (7.13)$$

где коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) определяются формулой (7.12).

Пусть разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ с периодом 2π является **нечетной**, т.е. $f(-x) = -f(x)$, рассмотрим коэффициенты ряда Фурье.

Поскольку $f(x)$ – нечетная функция, а $\cos nx$ – четные, то и их произведение $f(x)\cos nx$ – функция нечетная, тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.14)$$

Поскольку $f(x)$ и $\sin nx$ – функции нечетные, то и их произведение $f(x)\sin nx$ – функция четная, тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.15)$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (7.16)$$

где коэффициенты b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) определяются формулой (7.15).

Заметим, что в приведенном выше примере 7.1 значение коэффициентов a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) можно было вообще не вычислять в силу нечетности функции $y(x) = 2x$ на рассматриваемом отрезке.

7.4. Ряды Фурье для функций с периодом $2l$

Часто бывает нужно разложить в тригонометрический ряд функцию, определенную на отрезке $[-l; l]$, где l – произвольное число. Эта задача приводится к случаю $[-\pi; \pi]$ при помощи изменения масштаба, т.е. введения вместо переменной x вспомогательной переменной t :

$$x = lt / \pi. \quad (7.17)$$

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $x \in [-l; l]$, то новая переменная t определена на отрезке $[-\pi; \pi]$. По функции $f(x)$ определим новую

функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Тогда для определения ряда Фурье функции $\varphi(t)$, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$, используем равенство (7.7):

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Вернемся к функции $f(x)$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt = \left[t = \frac{x\pi}{l} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(n \frac{x\pi}{l} \right) d\left(\frac{x\pi}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.18)$$

Аналогично получим

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \left[t = \frac{x\pi}{l} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{x\pi n}{l} + b_n \sin \frac{x\pi n}{l} \right) = f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, теорема Дирихле остается в силе и для отрезка $[-l; l]$, где ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right)$$

функции $f(x)$ сходится равномерно на отрезке $[-l; l]$ к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности функции, коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) и b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) определяются формулами (7.18) и (7.19).

Пример 7.2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 4, заданную на отрезке $[-2; 2]$ уравнением $f(x) = x + 1$.

Решение. График функции $f(x) = x + 1$ на отрезке $[-2; 2]$ имеет вид, изображенный на рис 7.4. Функция удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. имеет не более чем конечное число точек разрыва (в данном случае их нет) и кусочно-монотонна, а значит, что данную функцию можно разложить в ряд Фурье:

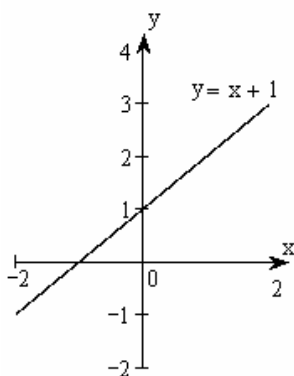


Рис. 7.4

$$f(x) = x + 1 \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

Определим коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) и b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Поскольку функция не является ни четной, ни нечетной, то находим все коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^2 (x+1) \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^2 x \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_{-2}^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{x=-2}^{x=2} - \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{x=-2}^{x=2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{\pi n} \right)^2 \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{x=-2}^{x=2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi n} \right)^2 (\cos \pi n - \cos(-\pi n)) = 0. \end{aligned}$$

При вычислениях использовались формулы

$$\sin \pi n = 0, \quad \cos \pi n = (-1)^n.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^2 (x+1) \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^2 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_{-2}^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2x}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{x=-2}^{x=2} + \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx - \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{x=-2}^{x=2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\pi n} \cos \pi n - \frac{4}{\pi n} \cos(-\pi n) + \left(\frac{2}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{x=-2}^{x=2} - \frac{2}{\pi n} \cos \pi n + \frac{2}{\pi n} \cos \pi n \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-8}{\pi n} \cos \pi n \right) = -\frac{4}{\pi n} (-1)^n = \frac{4}{\pi n} (-1)^{n+1}. \\ a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^2 (x+1) dx \right) = 2. \end{aligned}$$

Итак, ряд Фурье сходится к функции $f(x) = x + 1$ во всех точках ее непрерывности (см. рис 7.4), т.е. на интервале $(-2; 2)$, и имеет вид:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 0 \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} + \frac{3}{\pi n} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi n x}{2} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi n x}{2} \quad (7.20)$$

Значение суммы ряда (7.20) на концах отрезка $[-2; 2]$ равно

$$S(\pm 2) = \frac{f(-2+0) + f(2-0)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2+0} (x+1) + \lim_{x \rightarrow 2-0} (x+1)}{2} = 1.$$

Продлим график функции на всю действительную ось (см. рис 7.5) и изобразим сумму ряда (7.20) на рис. 7.6.

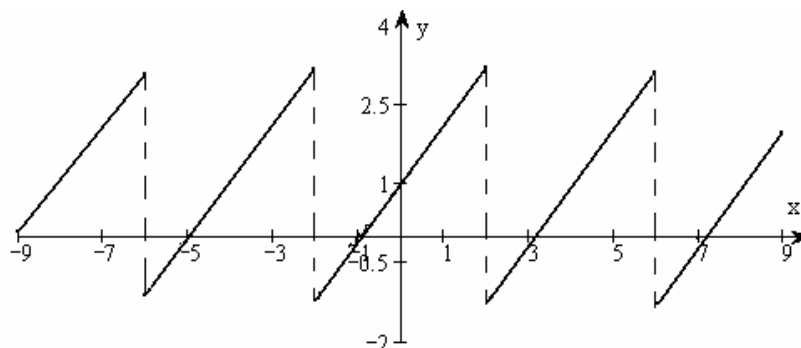


Рис. 7.5

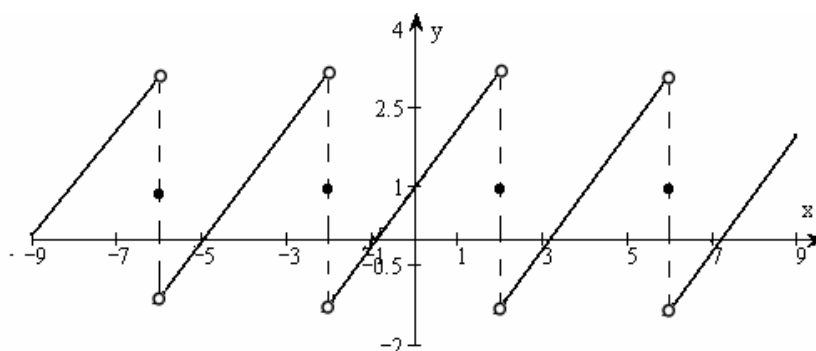


Рис. 7.6

7.5. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на отрезке $[0, l]$

Пусть нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0, l]$. Для разложения такой функции в ряд Фурье достаточно доопределить ее на отрезке $[-l; 0]$ *произвольным способом* (сохраняя кусочно монотонность), а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на отрезке $[-l; l]$. Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках отрезка $[-l; 0]$ находились из условия $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$. В первом случае функция $f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ будет четной и ее ряд Фурье будет содержать только косинусы, а во втором случае – нечетной и ее ряд Фурье будет содержать только синусы (при этом коэффициенты a_n и b_n разложения такой функ-

ции можно определить по формулам для коэффициентов четных и нечетных функций). Оба эти ряда в точках непрерывности функции внутри промежутка $(0, l)$ будут иметь суммой функцию $f(x)$, но *вне этого промежутка будут представлять совершенно разные функции*: ряд по косинусам даст функцию, получающуюся четным продолжением $f(x)$ на соседний отрезок $[-l; 0]$, а затем по периодичности с периодом $2l$. Ряд по синусам дает функцию, получающуюся нечетным продолжением на соседний отрезок $[-l; 0]$, а затем также по периодичности с периодом $2l$ вне отрезка $[-l; l]$.

Пример 7.3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на полупериоде $[0, 3]$ уравнением $f(x) = 2x + 1$.

Решение.

Доопределим функцию на отрезке $[-3; 0]$ чётным образом

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 0, \\ -2x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

(график этой функции изображен на рис. 7.7). Следовательно, ее ряд Фурье будет содержать только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{3} \left(\int_0^3 (2x + 1) dx \right) = 8,$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 (2x + 1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{4}{3} \int_0^3 x \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{3x}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} - \frac{3}{\pi n} \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right) + \frac{2}{3} \frac{3}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} = \\ &= \frac{4}{3} \left(\left(\frac{3}{\pi n} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} \right) = \frac{4}{3} \left(\left(\frac{3}{\pi n} \right)^2 (\cos(\pi n) - 1) \right) = 12 \left(\frac{1}{\pi n} \right)^2 ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$, доопределенной четным образом, имеет вид

$$f(x) = 4 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n} \right)^2 ((-1)^n - 1) \cos \frac{n\pi x}{3}. \quad (7.21)$$

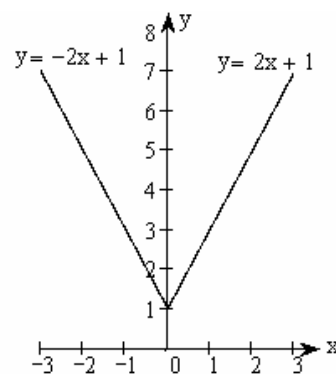


Рис. 7.7

Продолжение периодической функции на всю числовую ось имеет вид, представленный на рис. 7.8.

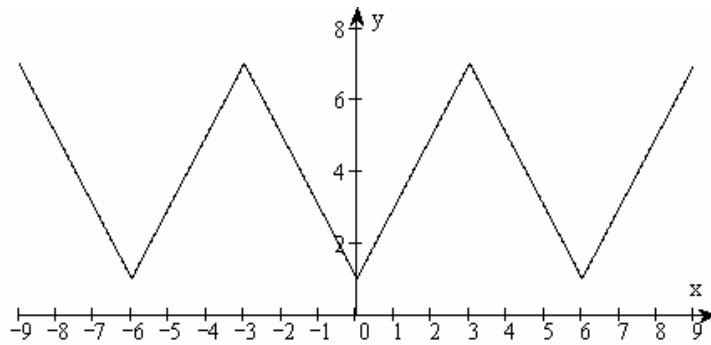


Рис.7.8

С другой стороны, данную функцию можно доопределить на отрезке $[-3; 0]$ нечетным образом,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 0, \\ 2x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

(график этой функции представлен на рис. 7.9). В этом случае ряд Фурье, сходящийся к функции $f(x) = 2x + 1$, будет содержать только синусы:

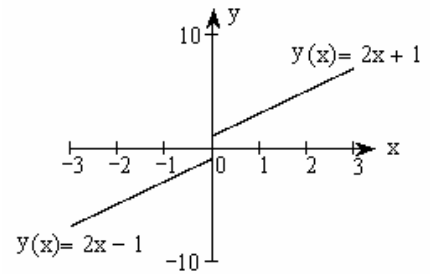


Рис. 7.9

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\begin{aligned} \text{где } b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 (2x + 1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{2}{3} \left(2 \int_0^3 x \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(2 \left(-\frac{3x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=3} + \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx - \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{18}{n\pi} \cos n\pi + \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} - \frac{3}{n\pi} \cos n\pi + \frac{3}{n\pi} \right) = \frac{2}{n\pi} \left(-7(-1)^n + 1 \right). \end{aligned}$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$, доопределенной нечетным образом, имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7(-1)^n + 1)}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}. \quad (7.22)$$

Продолжение периодической функции на всю числовую ось имеет вид, представленный на рис. 7.10.

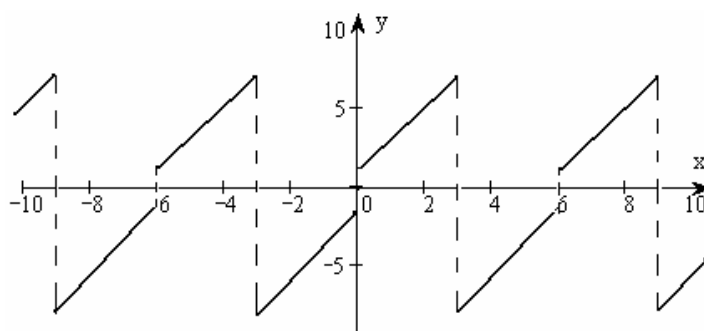


Рис.7.10

В заключение укажем, как раскладывается функция $f(x) = 2x + 1$ в ряд Фурье, определяемым равенством (7.22), перечислив несколько первых членов ряда:

$$2x + 1 = \frac{2}{\pi} \left(8 \sin \frac{\pi x}{3} - 3 \sin \frac{2\pi x}{3} + \frac{8}{3} \sin \pi x - \frac{3}{2} \sin \frac{4\pi x}{3} + \frac{8}{5} \sin \frac{5\pi x}{3} - \sin 2\pi x + \dots \right).$$

Заключение

Пособие в первую очередь предназначено для студентов заочной формы обучения всех специальностей ВГАСУ, хотя может быть использовано и студентами очной формы обучения.

Пособие позволит студентам – заочникам выполнить контрольные работы и подготовиться к сдаче экзамена, так как включает и необходимые теоретические сведения по курсу «Дифференциальные уравнения. Ряды» и многочисленные примеры решений всех типов задач, входящих в контрольные работы студентов – заочников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / *Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков.* – М.: Высшая школа, 1999. – 695 с.

Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / *Ю.Н. Бибииков.* – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / *Я. С. Бугров, С. М. Никольский.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 464 с.

Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / *М. Я. Выгодский.* – М.: Наука, 1973. – 870 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / *П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожеевникова.* – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 Век»: Мир и Образование, 2003. – 720 с.

Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / *А.И. Егоров.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.

Карташев В.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / *В.П. Карташев, Б.Л. Рождественский.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 288 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / *А.Д. Мышкис.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 640 с.

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / *Н. С. Пискунов.* – М.: ИНТЕГРАЛ–ПРЕСС, 2002. – 1032 с.

Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / *П.Ф. Фильчаков.* – Киев. Наукова думка, 1972. – 744 с.

Шипачев В. С. Высшая математика / *В. С. Шипачев.* – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.

Учебное издание

**ВИТАЛИЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ ГОРЯЙНОВ
ТАТЬЯНА ГЕОРГИЕВНА СВЯТСКАЯ
ЛЮДМИЛА ВАСИЛЬЕВНА АКЧУРИНА
ВИКТОРИЯ АНАТОЛЬЕВНА ПОПОВА**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
РЯДЫ**

Учебное пособие

для студентов заочной формы обучения всех специальностей, кроме ЭУС

Компьютерная верстка Горяйнов В.В.

Подписано в печать 04.12.2007. Формат 60 х 84 1/16. Уч.–изд. л. 8,5.

Усл. печ. л. 8,6. Бумага писчая. Тираж 560 экз. Заказ № _____.

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии Воронежского
государственного архитектурно–строительного университета
394006 Воронеж, ул. 20–летия Октября, 84