МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе
для студентов направления 24.05.02
«Проектирование авиационных и ракетных двигателей»

Воронеж 2021

УДК 51 (07)
ББК 22.11я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук А. В. Ряжских,
канд. физ.-мат. наук Е. А. Соболева

Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия: методические указания к самостоятельной работе / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. В. Ряжских, Е. А. Соболева. - Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. - 30 с.

Приводятся основные сведения для закрепления теоретических и практических знаний основных разделов курса. Содержат краткий теоретический материал, необходимый для решения типовых задач, примеры с решениями и задания для самостоятельного выполнения.

Предназначены для студентов 1 курса направления 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей».

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ЛВА_АГ.pdf

Ил. 8. Табл. 4. Библиогр.: 2 назв.

УДК 51 (07)
ББК 22.11я7

Рецензент - Т. И. Костина, канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Цель методических указаний - научить студентов самостоятельно применять полученные знания к решению задач линейной алгебры и аналитической геометрии. Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал с помощью вопросов для контроля знаний, разобраться в решенных заданиях, а также успешно решить задания для самостоятельного решения.

Методические указания составлены по программе дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для студентов направления 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» Воронежского государственного технического университета.

В настоящих указаниях предлагается 6 одинаково организованных разделов, в каждом из которых своя нумерация формул и рисунков.

В каждом разделе приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, далее - примеры (один или несколько) и вопросы для самоконтроля. В конце каждого раздела приводится 20 вариантов заданий для самостоятельного решения

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Краткие сведения, необходимые для выполнения задания

1.1.1. Разложение определителя по алгебраическим дополнениям

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Минор будем обозначать M_{ij}.

Рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определитель матрицы

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Миноры элементов $a_{12} = b_1$ и $a_{23} = c_2$ соответственно:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, минором для определителя третьего порядка будет определитель второго порядка. Определитель второго порядка можно вычислить по формуле: $M_{12} = a_2c_3 - a_3c_2$, $M_{23} = a_1b_3 - a_3b_1$.

<u>Алгебраическим дополнением</u> некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^p$, где p — сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Алгебраическое дополнение элемента будем обозначать такой же прописной буквой, что и сам элемент. Так, алгебраическое дополнение элемента a_2, обозначается через A_2, элемента b_3 - через B_3, элемента a_{13} - через A_{13} и так далее.

Если, например, элемент a_2 находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него $p = 1 + 2 = 3$ и алгебраическим дополнением является

$$A_2 = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1c_3 - b_3c_1.$$

Алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента отличаются только знаком.

Разложение определителя любого порядка по алгебраическим дополнениям:

Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения.

$$\det(A) = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = \dots \quad . \tag{3}$$

Для определителя матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n запишем разложение в виде

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \, . \tag{4}$$

Пример 1. Вычислим определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, разлагая его по элементам первой строки.

Имеем

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + \blacksquare$$

$$+3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = 0.$$

1.1.2. Решение систем уравнений

Дана система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \end{cases} \tag{5}$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 и свободные члены h_1, h_2, h_3 считаются заданными.

Тройка чисел x, y, z называется <u>решением системы</u> (5), если в результате подстановки этих чисел вместо x, y, z все три уравнения (5) обращаются в тождества.

Введем обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Матрица A – матрица системы (5), X – вектор - столбец неизвестных, H – вектор - столбец свободных коэффициентов.

В методе Крамера:

определитель системы $\Delta = \det(A)$ и

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель $\Delta \neq 0$, то решение системы (5) дают формулы Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (7)$$

Пример 2. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x+2y+3z=6; \\ 2x-y-3z=-5; \\ 4x-5z=19. \end{cases}$$

Решение.

Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-37$. Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, определяемое формулами (7). Вычислим определители

$$\Delta_x=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \\ 19 & 0 & 5 \end{bmatrix}=-37,\ \Delta_y=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 19 & 5 \end{bmatrix}=74,\Delta_z=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 0 & 19 \end{bmatrix}=-111.$$

Получим $x=1,\quad y=-2,\quad z=3$. Непосредственной подстановкой в систему уравнений можно убедиться, что это решение исходной системы – все уравнения обращаются в тождество. ■

Пусть $\Delta=0$.

Если хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решений.

Если Δ_x, Δ_y, Δ_z равны нулю, одно из уравнений является линейной комбинацией двух других. В результате система уравнений для трех переменных содержит только два уравнения. Такая система будет иметь бесконечное множество решений.

Пример 3. Решим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2; \\ 2x - y - 3z = 4; \\ \quad 5x - 3z = 10. \end{cases}$$

Определители системы $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Система имеет бесконечное однопараметрическое множество решений:

$$z = \tfrac{1}{3}(5x - 10), \quad y = -3x + 6. \ \blacksquare$$

1.1.3. Матричный способ решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему уравнений (5). Будем полагать далее, что определитель системы не равен нулю.

Представим систему в матричном виде: $A \cdot X = H$

Если существует обратная матрица A^{-1}, то, умножая матричное уравнение слева на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1}H. \tag{8}$$

Вычисление обратной матрицы производится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} AD^T \tag{9}$$

Матрицы A и AD^T имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad AD^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти все решения системы уравнений из примера 2 матричным способом.

Решение.

Определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -37$.

Вычислим матрицу алгебраических дополнений.

$$AD_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=-5;\quad AD_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-22;$$

$$AD_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4;\quad AD_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=-10;\quad \dots$$

$$AD=\begin{pmatrix}-5 & -22 & 4\\ -10 & -7 & 8\\ -3 & 9 & -5\end{pmatrix}.$$

Для проверки рекомендуется перемножить $AD^T\cdot A$ и получить диагональную матрицу, то есть такую, у которой отличны от нуля только три элемента, стоящие на главной диагонали.

Воспользовавшись формулами (8) и (9), получим:

$$X=\frac{1}{\Delta}AD^T\cdot H=\frac{1}{-37}\begin{pmatrix}-5 & -10 & 3\\ -22 & -7 & 9\\ 4 & 8 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -5\\ 19\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-37}\begin{pmatrix}-5\cdot 6-10\cdot(-5)+3\cdot 19\\ -22\cdot 6-7\cdot(-5)+9\cdot 19\\ 4\cdot 6+8\cdot(-5)-5\cdot 19\end{pmatrix}=\frac{1}{-37}\begin{pmatrix}-37\\ 74\\ -111\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Полученное решение $x=1,\quad y=-2,\quad z=3$ совпадает с ранее найденным (см. пример 2). ■

1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Понятие минора и алгебраического дополнения.
2. Вычисление определителя третьего порядка путем разложения его по элементам 1 строки.
3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
4. Решение систем линейных уравнений матричным способом.

1.3. Варианты заданий

<u>Задание.</u> Дана коэффициенты системы (5). Найти решение двумя способами: 1) с помощью определителя, 2) средствами матричного исчисления. Сделать проверку.

Вариант	a_1	b_1	c_1	h_1	a_2	b_2	c_2	h_2	a_3	b_3	c_3	h_3
1.	2	7	13	0	3	14	12	18	5	25	16	39
2.	1	1	2	- 1	2	- 1	2	- 4	4	1	4	- 2

3.	1	1	- 1	0	3	2	1	1	1	- 1	- 1	2
4.	1	2	4	31	5	1	2	20	3	- 1	1	10
5.	1	- 1	2	- 7	1	1	1	- 2	2	3	- 1	1
6.	2	1	- 2	- 2	1	- 2	2	3	2	- 2	1	1
7.	1	1	- 1	1	8	3	- 6	2	4	1	- 3	3
8.	1	2	1	4	3	- 5	3	1	2	3	- 1	0
9.	1	1	1	6	1	2	3	10	2	3	- 4	8
10.	4	- 3	2	9	2	5	- 3	4	5	6	- 2	18
11.	1	- 2	3	6	2	3	- 4	20	3	- 2	- 5	6
12.	3	2	1	5	2	3	1	1	2	1	3	11
13.	2	2	1	3	2	- 1	- 1	4	1	1	- 1	0
14.	1	- 1	2	4	2	1	1	2	1	- 1	- 1	- 2
15.	1	1	1	0	1	- 1	1	2	3	1	1	- 2
16.	1	1	1	- 2	1	- 1	2	- 7	2	3	- 1	1
17.	1	1	1	9	- 2	2	1	9	3	- 3	- 2	- 16
18.	1	3	4	7	3	- 3	2	4	- 5	7	4	- 1
19.	3	4	2	8	2	- 4	- 3	- 1	1	5	1	0
20.	1	1	- 1	2	4	- 3	1	1	2	1	- 1	1

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Краткие сведения, необходимые для выполнения задания

Даны два вектора $\vec{A}\left(x_A; y_A; z_A\right)$ и $\vec{B}\left(x_B; y_B; z_B\right)$. Пусть φ - угол между ними. Тогда для векторов определены следующие операции векторной алгебры.

Длина вектора $\left|\vec{A}\right|$ вычисляется по формуле $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

Скалярное произведение векторов

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos(\varphi) = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B .$$

Векторное произведение двух векторов можно определить по их координатам

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_A & y_A & z_A\\ x_B & y_B & z_B\end{vmatrix},$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - единичные векторы вдоль декартовых осей координат x, y, z соответственно. Векторное произведение можно определить как вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям :

1. Вектор $\vec{C}$ перпендикулярен каждому из векторов векторного произведения.
2. Направление его таково, что из конца вектора $\vec{C}$ наикратчайший поворот от вектора $\vec{A}$ (первый вектор произведения) к вектору $\vec{B}$ (второй вектор произведения) виден происходящим против часовой стрелки.
3. Длина вектора $\vec{C}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin(\varphi)$

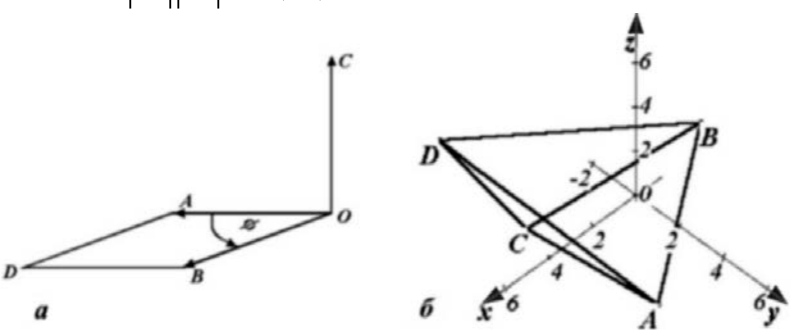

Рис. 1. К определению векторного произведения (а); чертеж пирамиды к примеру 1(б)

Модуль векторного произведения имеет величину, равную площади параллелограмма со сторонами, образованными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис.1а).

Смешанное произведение трех векторов $\vec{A}(x_A;y_A;z_A)$, $\vec{B}(x_B;y_B;z_B)$ и $\vec{C}(x_C;y_C;z_C)$ - скалярная величина , которую можно определить через проекции векторов на оси координат

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix}x_A & y_A & z_A\\ x_B & y_B & z_B\\ x_C & y_C & z_C\end{vmatrix}$$

Смешанное произведение можно определить, как величину, модуль которой равен объему параллелепипеда, ребра которого параллельны векторам, входящим в произведение.

Пользуясь приведенными выше формулами, решим пример.

Пример 1. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(3; 4; 0), *B*(– 1; 2; 4), *C*(5; 0; 2), *D*(7; – 2; 6). Средствами векторной алгебры найти: 1) длину ребра *BC*, 2) проекцию $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AD}$, 3) угол между ребрами *AB* и *AC* , 4) площадь грани *ABC*, 5) объем пирамиды, 6) длину высоты, опущенной на грань *ABC*. Сделать чертеж.

Решение.

(1) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ по формуле

$$\overrightarrow{BC} = \left(x_C - x_B ; y_C - y_B ; z_C - z_B \right),$$

$$\overrightarrow{BC} = (5 – (– 1) ; 0 – 2 ; 2 – 4) = (6 ; – 2 ; – 2).$$

Длина вектора $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$.

(2) Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}$= (– 4; – 2; 4), $\overrightarrow{AD}$ =(4; –6;6). Длина вектора $\overrightarrow{AD}$: $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{22}$.

Из определения скалярного произведения следует

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AD}}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{-4\cdot 4 + (-2)\cdot(-6) + 4\cdot 6}{2\sqrt{22}} = \frac{10}{\sqrt{22}}.$$

(3) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ и его длину:

$$\overrightarrow{AC} = (2; – 4; 2)\ ,\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\!\!\diagup\!\!\sqrt{6}\,.$$

Используя координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ получим его длину: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$. Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{19}{\sqrt{6}};\ \varphi = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{6}}\right).$$

(4) Найдем площадь грани ABC, используя координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и свойство векторного произведения - модуль векторного произведения двух векторов имеет величину, равную площади составленного из этих векторов параллелограмма. Поэтому площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Векторное

произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -2 & 4\\ 2 & -4 & 2\end{vmatrix}=12\vec{i}+16\vec{j}+20\vec{k}$.

Окончательно, вычислив модуль вектора и разделив его на 2, получим искомую площадь: $S_{ABC}=10\sqrt{2}$.

(5) Объем пирамиды найдем, используя координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и свойство смешанного произведения. Объем пирамиды на Рис. 1б: $V_{ABCD}={}^{1}\!/_{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$.

Смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 4\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & -6 & 6\end{vmatrix}=72.$$

Искомый объем $V_{ABCD}=12$.

(6) Найдем длину высоты, опущенной на грань ABC:

$$h=3\frac{V_{ABCD}}{S_{ABC}}=3\frac{12}{10\sqrt{2}}=\frac{9}{5}\sqrt{2}.\blacksquare$$

2.2. Вопросы для самоконтроля

1.Длина вектора.
2. Скалярное произведение двух векторов.
3. Угол между двумя векторами.
4. Векторное произведение двух векторов.
5. Площадь треугольника и параллелограмма
6. Смешанное произведение трех векторов.
7. Объем пирамиды и параллелепипеда.

2.3. Варианты заданий

Задание. Даны координаты вершины пирамиды *ABCD*. Средствами векторной алгебры найти: 1) длину ребра *BC*, 2) проекцию ребра *AB* на *AD*, 3) угол между ребрами *AB* и *AC*, 4) площадь грани *ABC*, 5) объем пирамиды, 6) длину высоты, опущенной на грань *ABC*. Сделать чертеж.

№	1	2	3	4	5
A	(4;2;5)	(4;4;10)	(4;6;5)	(3;5;4)	(–1;6;4)
B	(0;7;2)	(4;10;2)	(6;9;4)	(4;7;6)	(–2;8;2)
C	(0;2;7)	(2;8;4)	(2;10;10)	(5;10;14)	(6;8;9)
D	(5;1;0)	(5;3;5)	(7;6;9)	(4;7;8)	(7;10;3)
№	6	7	8	9	10
A	(4;8;2)	(6;6;5)	(7;2;2)	(4;8;4)	(7;7;0)
B	(5;4;10)	(4;9;5)	(5;7;7)	(10;5;3)	(6;3;8)
C	(11;2;8)	(4;6;4)	(5;3;1)	(5;6;8)	(3;5;8)
D	(12;4;3)	(6;9;3)	(–1;–2;3)	(8;8;7)	(8;4;1)
№	11	12	13	14	15
A	(1;2;2)	(9;3;7)	(1;–5;–1)	(8;2;3)	(0;–2;3)
B	(–1;3;2)	(3;9;7)	(–5;1;–1)	(4;6;5)	(4;2;5)
C	(7;–3;5)	(7;9;3)	(–1;1;–5)	(3;–2;1)	(6;4;2)
D	(–4;0;–2)	(2;–3;1)	(–7;–1;0)	(7;4;5)	(2;–3;5)
№	16	17	18	19	20
A	(1;4;3)	(–5;–3;7)	(2;–1;1)	(1;–1;–4)	(–2;–2;–4)
B	(6;8;5)	(3;1;8)	(4;3;5)	(1;–5;–1)	(2;–4;0)
C	(5;6;7)	(3;5;5)	(3;4;0)	(–5;1;–1)	(–4;2;0)
D	(5;5;11)	(–1;1;9)	(2;3;4)	(–1;–3;–5)	(0;2;–3)

3. ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

2.4. Краткие сведения, необходимые для выполнения задания

Пусть заданы координаты вершин треугольника *ABC*:

$A\left(x_A, y_A\right),\ B\left(x_B, y_B\right),\ C\left(x_C, y_C\right).$

Уравнение прямой *AB*, проходящей через точки *A* и *B*, имеет вид:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}. \tag{1}$$

Положение точки $E\left(x_E, y_E\right)$, делящей отрезок AB пополам, можно найти из пропорции

$$\frac{x_E - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_E - y_A}{y_B - y_A} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Длина отрезка AB: $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

Если уравнение прямой AB записать в виде общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, то для нахождения расстояния от точки B до прямой AC можно пользоваться формулой:

$$d = \frac{\left|Ax + By + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3}$$

Рассмотрим две прямые AC и BD. Пусть они заданы в виде уравнений прямых с угловыми коэффициентами:

$$y = k_{AC}x + b_1; \quad y = k_{BD}x + b_2.$$

Тогда, если $k_{AC} \cdot k_{BD} = -1$, то прямая BD перпендикулярна прямой AC, если $k_{AC} = k_{BD}$, то прямая BD параллельна прямой AC.

Пример 1. Заданы координаты вершин треугольника ABC:

$A(3;4)$, $B(-2;5)$, $C(-1;-2)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину стороны AC, 2) длину и уравнение высоты BE, 3) уравнение медианы BD. Сделать чертеж.

Решение.

Прежде всего, изобразим треугольник (рис. 1а).

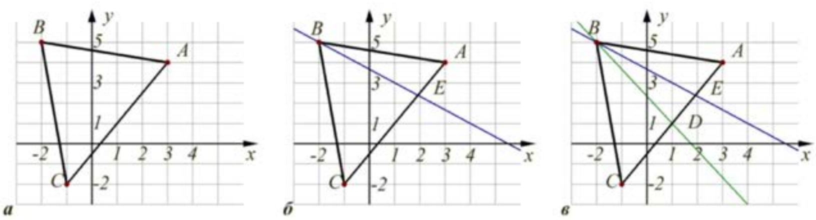

Рис. 1. Построение треугольника (а), его высоты (б) и медианы (в)

I. Найдем уравнение и длину стороны *AC*. Определим вектор $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}=(-1-3;-2-4)=(-4;-6)$. Длина вектора

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}=\sqrt{52}$. Пользуясь (1), составим уравнение прямой *AC*, проходящей через две точки: $\dfrac{x-(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{y-(-2)}{4-(-2)}$.

Отметим, что в знаменателе стоят проекции вектора *AC*, вычисленные ранее. После преобразования получим общее уравнение прямой *AC*: $3x-2y-1=0$.

II. Определим длину и уравнение высоты *BE*, опущенной из вершины *B* на сторону *AC*.

В общем случае удобно записать искомое уравнение в виде уравнения прямой $y=k_{BE}\left(x-x_B\right)$. Перепишем уравнение прямой *AC* в виде $y=k_{AE}x-{}^1\!/_2$ где $k_{AE}={}^3\!/_2$.

По определению, высота *BE* должна быть перпендикулярна стороне *AC*. Тогда угловой коэффициент в уравнении прямой *BE* должен удовлетворять соотношению $k_{BE}k_{AC}=-1$. Соответственно, $k_{BE}=-{}^2\!/_3$. Уравнение прямой *BE* (рис. 1б) примет вид $2x+3y-11=0$. Для определения длины *BE* воспользуемся стандартной формулой (3). Расстояние от точки *B* до прямой *AC*

$$d=\frac{\left|3\cdot(-2)-2\cdot 5-1\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{17}{\sqrt{13}}.$$

III. Требуется найти уравнение медианы *BD*. Для этого найдем точку *D* – середину отрезка *AC*:

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=1;\qquad y_D=\frac{y_A+y_D}{2}=1.$$

Проведем прямую через точку $D(1;1)$ и вершину треугольника *B*. Уравнение прямой найдем так же, как и в пункте I решения

$4x+3y-7=0$.

Все полученные прямые изображены на рис. 1в.■

3.1. Вопросы для самоконтроля

1.Уравнение прямой, проходящей через две точки.

2. Расстояние от точки до прямой.

3. Угол между прямыми.

2.5. Варианты заданий

<u>Задание.</u> Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Требуется найти: 1) уравнение и длину стороны *AC*, 2) длину и уравнение высоты *BE*, 3) уравнение медианы *BD*. Сделать чертеж.

№	1	2	3	4	5
A	(-3;3)	(-3;-2)	(2;-2)	(-1;2)	(2;1)
B	(5;-1)	(4;-1)	(3;-1)	(1;2)	(-3;2)
C	(4;2)	(1;3)	(1;3)	(2;-2)	(-2;-1)
№	6	7	8	9	10
A	(0;2)	(2;3)	(1;3)	(-2;-1)	(-3;1)
B	(-5;1)	(-2;1)	(1;-2)	(-1;2)	(-4;-1)
C	(-3;-2)	(3;-2)	(-2;1)	(2;-3)	(4;2)
№	11	12	13	14	15
A	(-1;3)	(2;1)	(-4;2)	(4;5)	(5;-1)
B	(-2;-3)	(-3;1)	(3;5)	(2;0)	(1;-3)
C	(2;2)	(-1;-3)	(2;-1)	(5;3)	(1;3)
№	16	17	18	19	20
A	(2;4)	(3;2)	(4;5)	(-5;-3)	(2;9)
B	(1;-5)	(2;-1)	(2;3)	(2;-1)	(6;3)
C	(-2;0)	(-1;-1)	(7;1)	(-2;3)	(-2;1)

3. ЭЛЛИПС И ГИПЕРБОЛА

3.1. Краткие сведения, необходимые для выполнения задания

Канонические уравнения линий второго порядка:

эллипс	гипербола	парабола
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;$	$x^2=2py.$

Графики эллипса и гиперболы изображены на рис.1а и 1б. Пусть координаты фокусов F_1 $(-c\ ;\ 0)$ и F_2 $(c\ ;\ 0)$ для гиперболы и эллипса. Тогда, полагая, что a - большая, а b - меньшая полуоси линии $(b < a)$, для этих линий второго порядка можно записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} c^2=a^2-b^2 & \text{– для эллипса;} \\ c^2=a^2+b^2 & \text{– для гиперболы;} \end{cases} \tag{1}$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \text{ - эксцентриситет линии.} \tag{2}$$

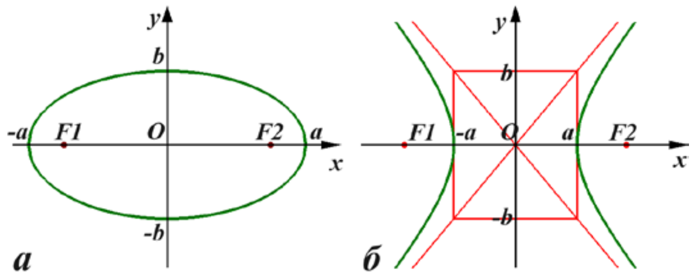

Рис. 1. Эллипс (а) и гипербола (б)

Очевидно, что для эллипса эксцентриситет меньше 1, для гиперболы - больше 1. Уравнения асимптот гиперболы (прямые линии на рис.1б) запишем в виде уравнений с угловыми коэффициентами:

$$y=\pm{}^{bx}\!/_{a}. \tag{3}$$

Пользуясь этими формулами, решим пример.

Пример 1 . Дано уравнение эллипса $25x^2+9y^2=225$. Требуется найти: 1) его полуоси, 2) координаты фокусов, 3) эксцентриситет эллипса. Сделать чертеж.

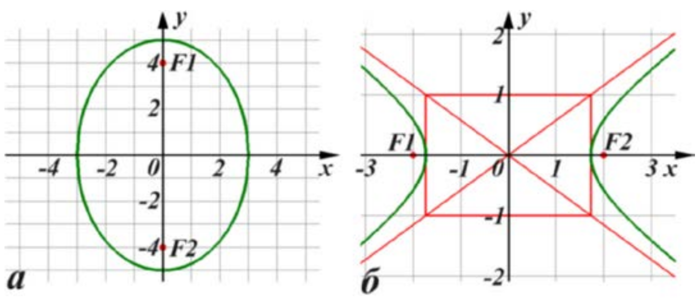

Рис.2. Графики эллипса и гиперболы: а) к примеру 1 и б) к примеру 2

Решение

Найдем полуоси эллипса. Для этого разделим уравнение на число, стоящее в правой части. Получим уравнение эллипса в каноническом виде $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$

Поскольку в полученном уравнении $a < b$, необходимо развернуть систему координат на 90°. Эллипс будет вытянут вдоль оси y - фокальной оси. В новой системе координат полуоси $a = 5$, $b = 3$. Тогда по формулам (1), (2) получим $c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, c=4, эксцентриситет $\varepsilon = 4/5$. При построении эллипса отложим вначале полуоси - точки пересечения линии с осями координат: (0 ; 5), (0 ; –5), (3; 0),(–3 ; 0). Затем фокусы $F1$ (0 ; –4), $F2$ (0 ; 4). После этого проведем кривую (рис. 2а).■

Пример 2. Дано уравнение гиперболы $x^2 - 3y^2 = 3$. Требуется найти: 1) ее полуоси, 2) координаты фокусов, 3) эксцентриситет гиперболы. Сделать чертеж.

Решение

Найдем полуоси гиперболы. Для этого разделим уравнение на множитель, стоящий справа. Получим уравнение гиперболы в каноническом виде $\frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}-\frac{y^2}{1^2}=1.$

В полученном уравнении $a=\sqrt{3}, b=1$. По формулам (1), (2) получим $c^2 = 3+1$, c = 2, $\varepsilon = 2/\sqrt{3}$ - эксцентриситет гиперболы (ε > 1). При построении гиперболы отложим вначале полуоси - точки пересечения линии с осями координат: (0 ; 1), (0 ; –1), ($\sqrt{3}$; 0), ($-\sqrt{3}$; 0). Затем фокусы - $F1$ $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$, $F2$ $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$. После этого проведем кривую (Рис. 2б).■

Пример 3. Составить каноническое уравнение эллипса , если известны: точка M(4 ; 2) и эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 1/2$. Сделать чертеж.

Решение

Найдем полуоси эллипса. Подставив координаты точки M в уравнение эллипса в каноническом виде, а также воспользовавшись соотношениями (1) и (2), получим систему уравнений на параметры эллипса a и b: $\frac{4^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-b^2$.

При решении уравнений удобно разделить второе уравнение на $1/a^2b^2$ и ввести замену переменных $\alpha=1/a^2$, $\beta=1/b^2$. Решая систему линейных уравнений, получим $\beta=1/16$, $\alpha=3/64$. Выбрав положительные значения корней, получим искомые параметры: $a=8/\sqrt{3}$, $b=4$, $c=4/\sqrt{3}$. Каноническое уравнение эллипса примет вид: $\frac{x^2}{\left(8/\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.

При построении эллипса отложим вначале полуоси - точки пересечения линии с осями координат: (0 ; 4), (0 ; – 4), (4.62 ; 0), (– 4.62 ; 0). Затем фокусы $F1$ (– 2.31 ; 0), $F2$ (2.31 ; 0). После этого проведем кривую (рис.3).■

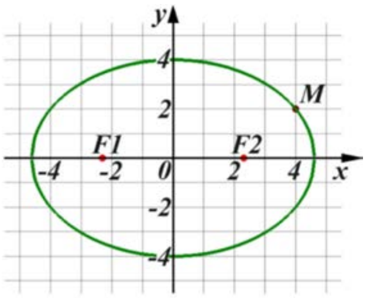

Рис. 3. График эллипса к примеру 3

Пример 4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны: положение фокусов $F2$ (4 ; 2) и $F1$(1 ; – 2) и эксцентриситет ε = 2. Сделать чертеж.

Решение

Найдем полуоси гиперболы. По известным координатам фокусов найдем фокусное расстояние гиперболы $c=5/2$. Далее воспользовавшись соотношениями (1) и (2), получим систему уравнений на параметры гиперболы a и b :

$c^2=a^2+b^2$, $c=\varepsilon\cdot a$.

Отсюда $a = 5/4$, $b = 5/(4\sqrt{3})$. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{\left(5/4\right)^2} - \frac{y^2}{\left(5/(4\sqrt{3})\right)^2} = 1$.

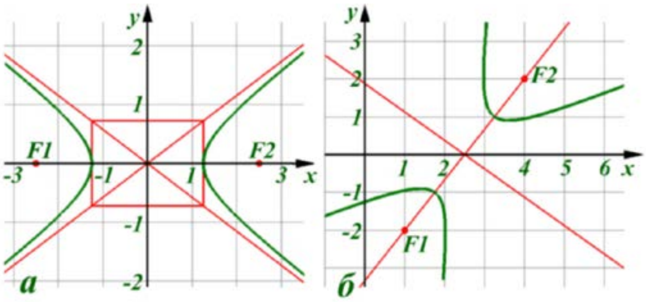

Рис. 4. Графики гиперболы к примеру 4

При построении гиперболы отложим вначале полуоси вдоль оси x - точки пересечения вершин линии с осями координат: (1.25 ; 0), (– 1.25 ; 0), затем полуоси вдоль оси y (0 ; 0.72), (0 ; –0.72) и фокусы $F1$ (– 2.5 ; 0) , $F2$ (2.5 ; 0). После этого проведем асимптоты гиперболы и саму линию (рис. 4 а).

На рис.Рис. 4б приведен также вид гиперболы в "старой" системе координат, до приведения уравнения к каноническому виду. Из рисунка видно, что новая гипербола получается в результате параллельного переноса гиперболы на Рис. а на расстояние $1/2 \cdot \sqrt{(4+1)^2 + (2-2)^2} = 2.5$ по оси x, с тем, чтобы середина расстояния между $F1$ и $F2$ совпала с новым началом координат, и поворота на угол $\varphi = \mathrm{arctg}\left(4/3\right) \approx 53{,}1^{\circ}$ ■

3.2. Вопросы для самоконтроля

1.Каноническое уравнение эллипса.
2. Координаты вершин и фокусов эллипса. Эксцентриситет.
3. Каноническое уравнение гиперболы.
4. Координаты вершин и фокусов гиперболы. Эксцентриситет, уравнения асимптот.

3.3. Варианты заданий

<u>Задание.</u> Предложены задания двух типов: (а) по заданным параметрам или точкам построить каноническое уравнение линии второго порядка; (б) по известному каноническому уравнению линии найти ее параметры. Сделать чертеж.

1. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$, если малая полуось его b = 3.
2. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку M (2 ; –2), если его большая полуось a = 4.
3. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки M_1(4 ; – $\sqrt{3}$) и $M_2\left(2/\sqrt{2};3\right)$.
4. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку M($\sqrt{15}$; –1), если расстояние между фокусами 2c = 8.
5. Дан эллипс $9x^2+5y^2=45$. Найти: 1) его полуоси, 2) координаты фокусов, 3) эксцентриситет эллипса.
6. Составить каноническое уравнение эллипса, если его фокусы $F1\left(-2;3/2\right)$, $F2\left(2;-3/2\right)$ и эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}/2$.
7. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M\left(2;-5/3\right)$, если эксцентриситет $\varepsilon=2/3$.
8. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет $\varepsilon=1/2$.
9. Составить каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{3}/5$, а малая полуось b = 2.
10. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет эллипса $x^2+9y^2=9$.
11. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения асимптот $y=\pm 4/3\cdot x$ и расстояние между фокусами 2c = 20.
12. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения асимптот $y=\pm 12/5\cdot x$ и расстояние между вершинами, равное 48. Найти эксцентриситет.
13. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найти: 1) её полуоси, 2) координаты фокусов, 3) эксцентриситет 4) уравнения асимптот.

14. Составить каноническое уравнение гиперболы, если даны: точка $M(-5\ ;\ 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$.
15. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\frac{9}{2};-1\right)$, если уравнения её асимптот $y=\pm\frac{2}{3}\cdot x$.
16. Заданы расстояние между вершинами гиперболы, равное 24 и положение фокусов $F1(-10\ ;\ 2)$, $F2(10\ ;\ 2)$. Составить уравнение гиперболы.
17. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $M_1(6;-1)$, $M_2\left(-8;2\sqrt{2}\right)$. Найти эксцентриситет.
18. Составить каноническое уравнение гиперболы, если угол между её асимптотами равен 60° и гипербола проходит через точку $M(6\ ;\ 3)$.
19. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между её вершинами равно 8, а расстояние между её фокусами равно 10. Найти уравнения её асимптот и эксцентриситет.
20. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет гиперболы $9x^2-4y^2-36=0$.

4. ПАРАБОЛА

4.1. Краткие сведения, необходимые для выполнения задания

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$2py=x^2. \tag{1}$$

Соответствующий график изображен на Рис. 11а.

Положение фокуса определяется координатами $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, а положение директрисы определяется уравнением $y=-\frac{p}{2}$.

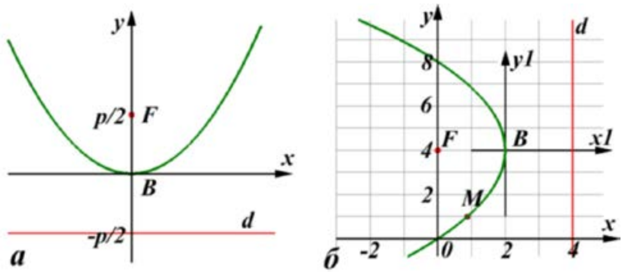

Рис. 1. Вид параболы (а). График к примеру 1 (б)

Вершина параболы (точка B) совпадает с началом координат. Эксцентриситет линии ε = 1. Если вершина параболы смещена в точку B_1 (x_1 , y_1), то уравнение параболы примет вид

$$y - y_1 = \frac{1}{2p}\left(x - x_1\right)^2. \tag{2}$$

Положение фокуса в этом случае определяется координатами $F\left(x_1; y_1 + {}^{p}\!/_{2}\right)$, а положение директрисы - уравнением $y = y_1 - {}^{p}\!/_{2}$. Пользуясь этими формулами, решим пример.

Пример 1. Привести уравнение параболы $y^2 - 8y + 8x = 0$ к каноническому виду. В новых и старых координатах определить координаты фокуса параболы, положение вершины, составить уравнение директрисы. Сделать чертеж.

Решение

Приведем уравнение параболы к каноническому виду, выделив полный квадрат относительно переменной y, поскольку именно она входит в уравнение со степенью 2. Получим $(y - 4)^2 = - 8(x - 2)$. Следовательно $p = - 4$. Поскольку в полученном уравнении координаты x и y поменялись местами по сравнению с (2)при изображении параболы необходимо развернуть систему координат на 90°. Фокальной осью параболы будет ось x. Ее вершиной будет точка B с координатами (2; 4). Переместим в эту точку начало новой системы координат для того, чтобы полученное уравнение совпало с каноническим. В "новой" ($x1$, $y1$) и "старой" (x , y) системах координат (СК) имеем:

объект	новая СК	старая СК
положение вершины B	(0;0)	(2;4)
положение фокуса F	(–2;0)	(0;4)
уравнение директрисы D	$x1 = 2$	$x = 4$

При построении параболы вначале изобразим старые и новые оси координат. Для этого проведем оси $x1$ и $y1$, проходящие через точку B. Затем в этой системе координат построим фокус F и директрису (Рис. 11б). Далее, в новой системе координат построим параболу, симметричную относительно оси $x1$ и удовлетворяющую уравнению линии в каноническом виде $- 8 \cdot x1 = (y1)^2$. Строим таблицу значений ($y1$, $x1$)

y_1	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	– 0.13	– 0.50	– 1.1	– 2.	– 3.1	– 4.5

и вычерчиваем по ней сначала верхнюю от точки *B* половину параболы, а затем, симметрично относительно оси $x1$, нижнюю часть линии. После построения необходимо проверить положение вершины *B*, фокуса *F* и директрисы в "новой" ($x1$, $y1$) и "старой" (x , y) системах координат. Проверим также координаты какой-либо из точек в разных системах. Например, возьмем точку *M* при $y = 1$. По уравнению в старой системе координат получим $x = y - y^2/8 = 1 - 1/8 = 0.875$ Строим точку по ее координатам, и убеждаемся, что она принадлежит параболе.■

4.2. Вопросы для самоконтроля

1. Каноническое уравнение параболы.
2. Координаты вершины параболы и уравнение директрисы.

4.3. Варианты заданий

Задание. Методом выделения полного квадрата привести уравнение параболы к каноническому виду. В новых и старых координатах определить координаты фокуса параболы, положение вершины, составить уравнение директрисы. Сделать чертеж.

1. $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$ 2. $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$

3. $y^2 - 6x - 4y + 29 = 0$ 4. $x^2 + 6x + 5 = 2y$

5. $x^2 - 10x = 4y - 13$ 6. $2x^2 - y - 4x - 1 = 0$

7. $3x^2 - y + 6x + 5 = 0$ 8. $3y^2 - x + 6y + 1 = 0$

9. $2y^2 - x + 8y + 10 = 0$ 10. $3y^2 - x - 6y + 2 = 0$

11. $4y^2 - x - 16y + 17 = 0$ 12. $2y^2 - x - 16y + 29 = 0$

13. $3y^2 - x + 6y - 1 = 0$ 14. $4y^2 - x - 8y + 7 = 0$

15. $2y^2 - x + 8y + 12 = 0$ 16. $x^2 - y + 4x + 5 = 0$

17. $3x^2 - y + 6y + 1 = 0$ 18. $4x^2 - y - 8x + 7 = 0$

19. $3x^2 - y + 12x + 16 = 0$ 20. $4x^2 - y + 16y + 12 = 0$

5. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Краткие сведения, необходимые для выполнения задания

Пусть заданы три точки $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ и $C(x_C;y_C;z_C)$. Уравнение прямой *AB* имеет вид:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}. \tag{1}$$

Или, иначе,

$$\frac{x-x_A}{a_x}=\frac{y-y_A}{a_y}=\frac{z-z_A}{a_z}, \tag{2}$$

где a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\vec{a}$, параллельного прямой.

Уравнение плоскости *ABC*, проходящей через точки *A*, *B* и *C*, можно записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Раскрыв определитель, получим общее уравнение плоскости

$$N_x x + N_y y + N_z z - d = 0, \tag{4}$$

где $\overrightarrow{N}=\left(N_x;N_y;N_z\right)$ - вектор, перпендикулярный плоскости.

Угол φ между прямой *AB* и плоскостью *ABC* определится соотношением

$$\sin(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{N}}{\left|\vec{a}\right|\left|\overrightarrow{N}\right|}. \tag{5}$$

Пользуясь приведенными выше формулами, решим пример.

Пример 1. Даны координаты вершины пирамиды *ABCD*: *A*(3; 4; 0), *B*(–1; 2; 4), *C*(5; 0; 2), *D*(7; –2; 6). Найти: 1) уравнение плоскости *ABC*, 2) угол между ребром *AD* и гранью *ABC*, 3) уравнение высоты, опущенной на грань *ABC* из вершины *D*, и основание этой высоты - точку *F*, 4) уравнение плоскости, проходящей через ребро *AD* и точку *F*. Сделать чертеж.

Решение.

(1) Найдем уравнение плоскости *ABC* по формуле (3):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 12x+16y+20z-100=0. \qquad (6)$$

Тогда вектор нормали к плоскости $\vec{N}(12;16;20)$.

(2) Найдем угол между ребром *AD* и гранью *ABC* по формуле (5). Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ и его длину:

$$\overrightarrow{AD} = (4;-6;6) \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = 2\sqrt{22}.$$

Используя ранее найденные координаты вектора $\vec{N}$, получим его длину $\left|\vec{N}\right| = 20\sqrt{2}$. После вычисления скалярного произведения получим $\sin(\varphi) = \dfrac{9}{10\sqrt{11}}$, $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{9}{10\sqrt{11}}\right)$.

(3) Найдем уравнение высоты, опущенной на грань *ABC* из вершины *D*. Используя координаты вектора $\vec{N}$, перпендикулярного плоскости *ABC*, запишем уравнение прямой, параллельной $\vec{N}$ и проходящей через точку D: $\dfrac{x-7}{12} = \dfrac{y+2}{16} = \dfrac{z-6}{20}$.

Основание высоты, опущенной на грань *ABC* - точка *F*, принадлежит одновременно и плоскости *ABC* и прямой *DF*. Удобно уравнение прямой *DF* представить в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 12t + 7; \\ y = 16t - 2; \\ z = 20t + 6. \end{cases} \qquad (7)$$

Тогда, подставив (7) в уравнение плоскости *ABC* (6), получим уравнение на параметр t : $800\,t + 72 = 0$, $t = -0.09$.

Подставив полученный параметр t в (7), найдем координаты точки *F* $(5.92;-3.44;4.20)$.

(4) Найдем уравнение плоскости, проходящей через ребро AD и точку F. Поскольку направляющий вектор прямой уже известен - это вектор $\overrightarrow{AD}$, уравнение плоскости можно записать используя условие компланарности 3 векторов: $\left(\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AF}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$,

где M - любая точка плоскости с координатами (x; y; z). Тогда

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ 5.92-3 & -3.44-4 & 4.20-0 \\ 4 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

или $-19.44x - 0.72y + 12.24z + 61.20 = 0$. После упрощения уравнение примет вид

$$27x + y - 17z - 85 = 0. \tag{8}$$

Для проверки правильности полученного уравнения следует подставить координаты точек A, D, F в (8). Вид пирамиды приведен на рис.1. ■

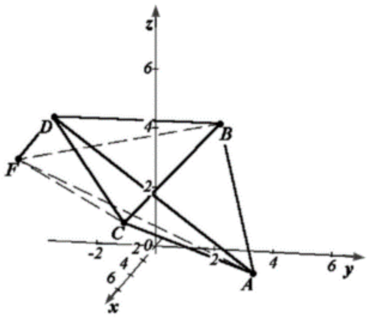

Рис. 1. Чертеж к примеру 1

5.2. Вопросы для самоконтроля

1.Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки. Направляющий вектор прямой.
2.Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Вектор нормали плоскости.
3. Угол между прямой и плоскостью.
4. Параметрическое уравнение прямой в пространстве.
5. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

5.3. Варианты заданий

<u>Задание</u>. В пирамиде *ABCD* найти: 1) уравнение плоскости *ABC*, 2) угол между ребром *AD* и гранью *ABC*, 3) уравнение высоты, опущенной на грань *ABC* из вершины *D* и основание этой высоты - точку *F*, 4) уравнение плоскости, проходящей через ребро *AD* и точку *F*. Сделать чертеж.

№	1	2	3	4	5
A	(4;2;5)	(4;4;10)	(4;6;5)	(3;5;4)	(–1;6;4)
B	(0;7;2)	(4;10;2)	(6;9;4)	(4;7;6)	(–2;8;2)
C	(0;2;7)	(2;8;4)	(2;10;10)	(5;10;14)	(6;8;9)
D	(5;1;0)	(5;3;5)	(7;6;9)	(4;7;8)	(7;10;3)
№	6	7	8	9	10
A	(4;8;2)	(6;6;5)	(7;2;2)	(4;8;4)	(7;7;0)
B	(5;4;10)	(4;9;5)	(5;7;7)	(10;5;3)	(6;3;8)
C	(11;2;8)	(4;6;4)	(5;3;1)	(5;6;8)	(3;5;8)
D	(12;4;3)	(6;9;3)	(–1;–2;3)	(8;8;7)	(8;4;1)
№	11	12	13	14	15
A	(1;2;2)	(9;3;7)	(1;–5;–1)	(8;2;3)	(0;–2;3)
B	(–1;3;2)	(3;9;7)	(–5;1;–1)	(4;6;5)	(4;2;5)
C	(7;–3;5)	(7;9;3)	(–1;1;–5)	(3;–2;1)	(6;4;2)
D	(–4;0;–2)	(2;–3;1)	(–7;–1;0)	(7;4;5)	(2;–3;5)
№	16	17	18	19	20
A	(1;4;3)	(–5;–3;7)	(2;–1;1)	(1;–1;–4)	(–2;–2;–4)
B	(6;8;5)	(3;1;8)	(4;3;5)	(1;–5;–1)	(2;–4;0)
C	(5;6;7)	(3;5;5)	(3;4;0)	(–5;1;–1)	(–4;2;0)
D	(5;5;11)	(–1;1;9)	(2;3;4)	(–1;–3;–5)	(0;2;–3)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие / под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стереотип. - М.: Профессия, 2010. - 200 с.

2. Письменный, Д. Т.. Конспект лекций по высшей математике [Текст]. Ч. 1. - 15-е изд. - Москва: Айрис пресс, 2017 (Можайск: Можайский полиграф. комбинат, 2016). - 279, [1] с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе по дисциплине
для студентов направления 24.05.02
«Проектирование авиационных и ракетных двигателей»

Составители:
Ряжских Александр Викторович,
Соболева Елена Александровна

Компьютерный набор А. В. Ряжских

Подписано к изданию 29.04.2021
Объем данных 506 Кб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14