.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет »

А.А. Катрахова В.С. Купцов Е.В. Купцова

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2015

УДК 517.53

Катрахова А.А. Курс лекций по дисциплине «Математика» : учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые, граф. данные (6,17 Мб) / А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Е.В. Купцова. – Воронеж : ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ ; Windows XP ; MS Word 2007 или более поздняя версия ; 1024x768 ; CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

В пособии рассмотрены лекции по дисциплине «Математика» для студентов первого и второго курсов.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия» (все профили), дисциплина «Математика».

Табл. 3. Ил. 101. Библиогр.: 26 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин);
д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Д. Вервейко

© Катрахова А.А., Купцов В.С., Купцова Е.В., 2015
© Оформление. ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых практических задач по разделам: “Математика”. Содержание учебного пособия соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей втузов, рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Пособие состоит из следующих разделов: элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитичкской геометрии, линейные операторы и квадратичные формы, кривые и поверхности второго порядка, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной и исследование функции с помощью производных, неопределенный и определенный интегралы, функции нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье, кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, функции комплексного переменного и операционное исчисление.

Пособие отвечает требованиям учебных планов и рабочих программ для данных специальностей.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определители, их свойства и вычисление

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n, так называемую, таблицу чисел, состоящую из n строк и n столбцов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\ \ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

С каждой такой матрицей связана вполне определенная числовая характеристика, называемая определителем n-го порядка

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Числа a_{ij} называются элементами определителя, где $i = 1,2,...,n$ – номер строки, $j = 1,2,...,n$ – номер столбца.

При n=2 имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем 2-го порядка, соответствующим такой матрице, называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

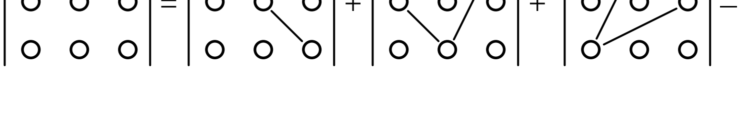
Определителем 3-го порядка (n=3), соответствующим матрице

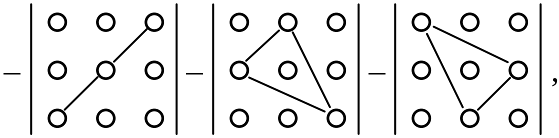
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число, вычисляемое по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} .$$

Эту формулу удобно изобразить следующей схемой





где линией показано произведение соответствующих элементов со знаком плюс или минус (см. схему).

<u>Пример1.</u> Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot3 + 2\cdot5\cdot(-2) + (-3)\cdot(-1)\cdot0 -$$

$$-2\cdot4\cdot0 - 1\cdot(-1)\cdot(-2) - \cdot3\cdot5\cdot(-3) = 35.$$

Определителем n-го порядка называется число, полученное из элементов матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$, $i, j=\overline{1,n}$ по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}.$$

Это выражение представляет собой алгебраическую сумму всевозможных произведений n элементов $a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$, взятых со знаком $(-1)^k$.

Определитель равен сумме произведений всех элементов Любой из его строк (столбцов) на их алгебраические дополнения (для любого номера i-ой строки (столбца) i-1,2,..n.

Пример 2. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{21} в определителе $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Согласно определению, алгебраическое дополнение элемента a_{21} равно

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

Пример 3. Вычислить определитель 3-его порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам второй строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(15-16) + 2(10-12) - (8-9) = 1 - 4 + 1 = -2.$$

Пример 4. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение. Разлагая определитель по элементам первой строки, приведем его к сумме определителей 3-го порядка, причем таких определителей будет только два, поскольку два элемента первой строки являются нулями и их алгебраические дополнения вычислять не нужно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-24-4+8)+3(-4-9-6+12) = -43.$$

Свойства определителей n-го порядка

1. Определитель не изменится, если строки его заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками.

2. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

3. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) может быть вынесен за знак определителя.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

5. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Пример 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, преобразуя его к треугольному виду, т.е. чтобы элементы по одну сторону главной диагонали стали равны нулю. Тогда определитель будет равен произведению элементов главной диагонали.

Решение. На основании свойства 5 первую строку умножим на (-1) и сложим со второй строкой, затем – с четвертой. Далее, умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой. Величина определителя при этом не изменится. Этот способ называется «делать нули».

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} =(-2)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Вторую строку умножаем на (-7) и складываем с третьей. Далее, третью строку – на (-1/3) и складываем с четвертой.

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \end{vmatrix} = -6\cdot 3\cdot(4/3) = -24.$$

Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Системы двух и трех линейных уравнений

Система двух линейных неоднородных уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

С помощью определителей 2-го порядка значения неизвестных x и y можно найти по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad (*)$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_1 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Решение системы следующее:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (**)$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера для систем (1) и (2):

1. Если основной определитель $\Delta \neq 0$, то система ***совместна*** **и имеет** ***единственное решение*** (см. формулы (*) и (**).

2. Если определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$), и хотя бы один из определителей, которые являются числителями в формулах (*) и (**) для неизвестных, отличен от нуля, то система ***несовместна*** и ***не имеет решения***.

3. Если все определители равны нулю одновременно в формулах (*) и (**), то система ***совместна*** и ***имеет бесконечное множество решений*** **.**

Системы двух и трех линейных однородных уравнений

Линейное уравнение называется однородным, если свободный член этого уравнения равен нулю.

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}.$$

1. Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно из неизвестных выражается через два других, значения которых остаются произвольными.

2. Если условие $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ не выполнено, то решение системы находится по формулам

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t, \qquad (***)$$

где t может принимать любые значения. Эти решения можно записать также в виде

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t.$$

При этой форме записи решений следует помнить, что если один из знаменателей обращается в нуль, то следует приравнять нулю и соответствующий числитель.

Пример 6. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Решение. Напишем матрицу коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. По формуле (***) находим

$$x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=-22t, \quad y=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=14t, \quad z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=2t,$$

где t можно придавать любые значения, т.е. $\forall t \in R$.

Рассмотрим систему трех линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

где $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов.

Если ее определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Если же $\Delta = 0$, то система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному уравнению (остальные два являются его следствиями). Первый случай имеет место тогда, когда среди миноров определителя Δ есть хотя бы один отличный от нуля; второй случай – тогда, когда все миноры этого определителя равны нулю. В обоих случаях эта однородная система имеет бесконечное множество решений.

Матрицы и действия над ними

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad n, m, \in N.$$

Числа m и n называются *порядком* матрицы. Если $m = n$, то матрица называется квадратной. Обозначают матрицу (для краткости) так иногда

$$A = \left(a_{ij}\right) \text{ или } A = \left\| a_{ij} \right\|,$$

где i – номер строки, j – номер столбца.

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы A. Если элементы квадратной матрицы A удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется *симметрической*. Если в квадратной матрице поменять строки со столбцами соответственно с одними и теми же номерами, получается *транспонированная матрица*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой вне главной диагонали элементы равны нулю, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной*:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначают её также буквой I.

Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одинаковой размерности считаются *равными* $\left(A=B\right)$, если все их соответствующие элементы совпадают.

Суммой двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$, $i=1,2,\ldots,m,$

$j=1,2,\ldots,n$, называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ той же размерности с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Произведением числа k на матрицу A называется матрица, определяемая равенством

$$k\cdot A=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \ldots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \ldots & k\cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \ldots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведением двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ таких, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, называется матрица $C=\left(c_{ik}\right)_{m\times p}$, элементы которой определяются равенствами

$$c_{ik}=\sum_{i-1}^{m}a_{ij}\cdot b_{jk}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}=\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$$

$$\left(i=1,2,\ldots,m,\quad k=1,2,\ldots,p\right)$$

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения $A \cdot B = C$ определяются так: элемент I – ой строки и k – ого столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i– ой строки матрицы A на соответствующие элементы k – го столбца матрицы B.

Из определения вытекает, матрицу А можно умножать не на всякую матрицу В: необходимо, чтобы число столбцов матрицы А равнялось числу строк матрицы В

<u>Пример7.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Находим: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Видим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Две матрицы, для которых имеет место $A \cdot B = B \cdot A$, называются *коммутирующими* (перестановочными).

Очевидно, что для всякой квадратной матрицы А порядка n справедливо равенство: $A \cdot D = D \cdot A$, где

$D = \begin{pmatrix} d & 0 & ... & 0 \\ 0 & d & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d \end{pmatrix}$ – диагональная матрица n-го порядка и $A{\cdot}E = E{\cdot}A{=}A$, $\mathrm{A}{\cdot}0 = 0$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица.

Каждой квадратной матрице A n-го порядка ставится в соответствие число, называемое определителем ($\det A$) этой матрицы.

Если $\det A \neq 0$, то матрица А называется *невырожденной* (неособенной); в противном случае А – *вырожденная* (особенная) матрица.

Имеет место **теорема:** Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц, т.е. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Пример 8. Найти произведение матриц АВ и ВА, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В; следовательно, умножение А на В возможно:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot4+1\cdot5 & 2\cdot2+3\cdot0+1\cdot4 & 2\cdot3+3\cdot2+1\cdot6 \\ 3\cdot1+1\cdot4+0\cdot5 & 3\cdot2+1\cdot0+0\cdot4 & 3\cdot3+1\cdot2+0\cdot6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 8 & 18 \\ 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Произведение B·A не существует, т.к. количество столбцов матрицы B не равно количеству строк матрицы A.

Обратная матрица и ее вычисление

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A, если их произведение равно единичной матрице:

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Любая невырожденная матрица A порядка n, у которой det $A\neq 0$ имеет обратную A^{-1} того же порядка. У вырожденной матрицы не существует обратной.

Обратную матрицу можно вычислять по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & .. & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в ее определителе, или $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{\vee}$, где $A^{\vee}$ – *присоединенная матрица* определяется как *транспонированная к матрице A*, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} соответствующих элементов матрицы A. По этой формуле для матриц высокого порядка процесс вычисления обратной матрицы трудоемок. Трудность связана с вычислением алгебраических дополнений A_{ij} к каждому элементу.

Находить обратную матрицу можно с помощью *элементарных преобразований:*

1) перестановки двух любых строк (столбцов);

2) умножения строки (столбца) на число $c \neq 0$;

3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

С помощью элементарных преобразований получаем *матрицы, эквивалентные* исходной. Любую невырожденную матрицу A путем *элементарных преобразований* только строк (или столбцов) можно привести к единичной E.

Этот метод нахождения A^{-1} состоит в следующем:

Для данной матрицы A порядка n строим прямоугольную матрицу $\Gamma_A = (A\,|\,E)$ размера $\mathrm{n} \times 2\mathrm{n}$, приписывая к A справа единичную E. Далее, используя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу Γ_A к виду $=(E\,|\,B)$, что всегда возможно, если $\det A \neq 0$.

Тогда $B = A^{-1}$.

<u>Пример 9</u>. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы A двумя способами:

1) по формуле;

2) методом эквивалентных преобразований,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Матрица A – невырожденная, т.к. $\det A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 11 \neq 0$. Следовательно, существует A^{-1}.

Сначала находим присоединенную матрицу $A^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, где $A_{11} = 4$; $A_{22} = 2$; $A_{12} = -1$; $A_{21} = 3$;

Затем подставляем в формулу $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Отметим свойства обратной матрицы.

1. $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}, \quad k - \text{const};$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$ 3. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

Матричный метод решения линейных систем

Линейной системой называется система, в которую входят только линейные уравнения.

Рассмотрим линейную неоднородную систему из n уравнений с n неизвестными в координатной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{1.1}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица столбец (или вектор) свободных членов;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – искомая матрица-столбец (или n-мерный вектор) неизвестных, которые требуется найти. Тогда систему (1.1) можно записать в так называемой *векторной форме*:

$$AX=B \qquad (1.1')$$

где A, B – заданные матрицы, X – неизвестный вектор.

Если А – невырожденная матрица, то существует обратная A^{-1} и система (1.1) (или (1.1')) имеет *единственное решение*, которое находится по формуле

$$X= A^{-1} \cdot B \qquad (1.2)$$

Пример 10. Решить систему уравнений матричным методом (если у нее существует единственное решение).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

Решение. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда данная система уравнений запишется равенством (1.1'). Вычислим определитель $\det A$ и обратную матрицу A^{-1}, если

$$\det A \neq 0:\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Подставим матрицу A^{-1} в формулу (1.2): $X = A^{-1} \cdot B$.
Получим решение данной системы уравнений в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 & 1 \cdot 3 & -1 \cdot 5 \\ -\frac{1}{2} \cdot 6 & 0 \cdot 3 & \frac{1}{2} \cdot 5 \\ \frac{1}{2} \cdot 6 & -1 \cdot 3 & \frac{3}{2} \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = -2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_3 = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

Заметим, что с вычислением A^{-1} тесно связано решение матричных уравнений вида $AX=B$ или $УA=B$, где A, B – данные матрицы, X, $У$ – искомые матрицы. Если А – невырожденная матрица, решения даются формулами $X = A^{-1} \cdot B$; $У = \cdot B\ A^{-1}$.

Если А – прямоугольная или вырожденная квадратная матрица, то решение этих уравнений сводится к решению систем линейных уравнений. Для получения этих уравнений надо приравнять элементы матриц в обеих частях равенства.

Пример 11. Найти матрицу X второго порядка, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – невырожденная, $\det A = 1 \neq 0$.

Находим $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

По формуле $X = A^{-1} \cdot B$ вычисляем матрицу X, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\cdot \; X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы

Дана прямоугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные миноры матрицы A, отличные от нуля.

Рангом матрицы A называется *наивысший порядок* отличных от нуля *миноров* этой матрицы. Обозначают ранг матрицы A через $r(A)$ или Rang A.

Если $r(A) = r(B)$, то матрицы A и B называются *эквивалентными*: пишут $A : B$.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называют *базисным минором.*

Ранг матрицы $A(m \times n)$ можно находить двумя способами.

Первый способ: *метод окаймляющих миноров*. Пусть найден минор M k-го порядка, не равный нулю. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$- го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M : если все они равны нулю, то

Rang $(A) = k$; в противном случае среди окаймляющих миноров найдется минор $(k+1)$- го порядка, отличный от нуля. И вся процедура повторяется.

Второй способ: *метод элементарных преобразований* основан на том, что элементарные преобразования не меняют ранг матрицы. В этом случае матрица приводится к ступенчатой, ранг которой равен числу её ненулевых строк.

Пример 12. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Путём перебора находим миноры 2-го порядка, отличные от нуля. Например, $M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Вычисляем окаймляющие миноры 3-го порядка: $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Далее вычисляем миноры 4-го порядка, окаймляющие минор $M_3 \neq 0$. Их будет два:

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{42} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Rang}\, A = 3$.

Исследование системы m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_{1n}\ x_4 = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_{2n}\ x_4 = b_2 \\ \ ...\quad ...\quad ...\quad ...\quad ... \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + ... + a_{m4}\ x_4 = b_n \end{cases} \qquad (1.3)$$

Решением этой системы называется совокупность n чисел $\left(\overline{x}_1;\overline{x}_2;...;\overline{x}_n\right)$, которые будучи подставлены вместо неизвестных $x_1;x_2;...;x_n$ в уравнения системы (1.3), обращают эти уравнения в тождества. Система (1.3) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение $\left(\overline{x}_1;\overline{x}_2;...;\overline{x}_n\right)$. Если же система (1.3) не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Прежде чем решать систему (1.3), необходимо её исследовать. Для этого составляются матрица A системы и расширенная матрица $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix};\ \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капелли (основная теорема о совместности системы линейных уравнений): Для совместности системы (1.3) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу её расширенной матрицы: $\text{Rang}\ A = \text{Rang}\,\overline{A} = r$.

Rang r матрицы *совместной системы* не может превосходить числа неизвестных n. В силу этого могут представиться два случая:

1) $r = n$, система имеет единственное решение,

2) $r<n$, система имеет бесконечное множество решений.

Итак, предположим, что система (1.3) совместна, причем $r<n/$

Рассмотрим какой-нибудь базисный минор матрицы A. Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (1.3). Эти r неизвестных назовем *базисными неизвестными* рассматриваемой системы уравнений. Остальные $n-r$ неизвестных системы (1.3) *назовем свободными неизвестными.*

Выделим из системы (1.3) систему r уравнений, среди коэффициентов которых содержатся элементы базисного минора. Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащие свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные неизвестные (например, по формулам Крамера). Таким образом, придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных. Следовательно (об этом уже сказано выше), система (1.3) имеет бесчисленное множество решений.

Пример 13. Решить систему уравнений, предварительно исследовав ее на совместность

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1. \end{cases}$$

Решение. Здесь $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$ – расширенная матрица.

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A_1:\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0\end{array}\right).$$

Разделим элементы 3-й строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю; затем вычеркнем 3-ю строку:

$$\bar{A}:\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right);\quad \bar{A}:\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что $r(A)=r(\bar{A})=2$. Следовательно, система совместна. Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1,\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0.\end{cases}$$

За базисные неизвестные примем x_1 и x_2. Это можно сделать, так как определитель $\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля. Свободными неизвестными служат x_3 и x_4. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1+5x_2=1-4x_3-3x_4,\\ 2x_1-x_2=-2x_3+x_4,\end{cases}$$

выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4 по правилу Крамера:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1-4x_3-3x_4 & 5\\ -2x_3+x_4 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=-\frac{14}{11}x_3+\frac{2}{11}x_4+\frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3 & -3x_4 \\ 2 & -2x_3 & +x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Полагая свободные переменные $x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$,
где c_1, c_2 – любые произвольные постоянные, получим *общее решение* системы в векторной форме. , или в координатах

$$x_1 = -\frac{14}{11}c_1 + \frac{2}{11}c_2 + \frac{1}{11};\ x_2 = -\frac{6}{11}c_1 - \frac{7}{11}c_2 + \frac{2}{11};\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2.$$

Данная система имеет бесконечно много решений, так как $r < n$, где число неизвестных $n = 4$. Придавая c_1 и c_2 различные числовые значения, будем получать различные *частные решения* данной системы уравнений.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса (метод исключения неизвестных)

Сущность метода состоит в том, что посредством элементарных преобразований система (1) превращается в эквивалентную систему треугольного или трапецеидального вида.

Решение методом Гаусса системы (1) можно упростить, если вместо преобразований над самой системой производить элементарные преобразования над соответствующей матрицей из коэффициентов при неизвестных свободных членов:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ \ a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ \ a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots \\ a_{m1}\ \ a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Полученной матрице будет соответствовать система линейных уравнений треугольного или трапецеидального вида.

Из преобразованной системы треугольного вида все неизвестные определяются последовательно без труда. Если система уравнений имеет бесконечное множество решений (в случае, когда $r < n$, т.е. когда число неизвестных n больше числа линейно независимых уравнений), то треугольной системы не получается, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного, получаем систему трапецеидального вида.

Если же эта система уравнений несовместна, то в преобразованной системе будет содержаться хотя бы одно уравнение вида 0 = 1, т.е. уравнение, в котором правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

Заметим, что методом Гаусса гораздо выгоднее пользоваться в случае, когда система содержит большое число уравнений, ибо этот метод заключается в последовательном исключении неизвестных.

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + \ \ z = 5, \\ \ \ x + \ \ y - \ \ z = 0, \\ 4x - \ \ y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем матрицу в эквивалентную:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

(для упрощения вычислений мы поменяли местами первое и второе уравнения).

Вычитаем из остальных двух строк 1-ю строку, умноженную на 3 и на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \bigm| & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \bigm| & 5 \\ 0 & -5 & 9 & \bigm| & 3 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку, умножив на (–5), прибавляем к 3-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & +1 & 2 \end{array}\right).$$

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 4z = -5. \\ z = 2 \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем $z = 2$; подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y = 3$ и из первого уравнения находим $x = -1$.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Определение линейного пространства

Любая упорядоченная система $x_1, x_2, ..., x_n$ из n действительных чисел представляет собой n *– мерный вектор.* X, который можно записывать как в виде вектора-строки $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, так и в виде вектора-столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами вектора X, а число n (количество координат) – его размерностью. Два n – мерных вектора $X = (x_1, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, ... y_n)$ равны: $X = Y$, если их одноименные координаты равны: $x_i = y_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Векторы одинаковой размерности можно складывать и вычитать по правилу: $X \pm Y = (x_1 \pm y_1;\ x_2 \pm y_2; ...;\ x_n \pm y_n)$, умножать вектор X на число α:

$$\alpha \cdot X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Эти операции над векторами обладают следующими свойствами:

а) коммутативным (переместительным)

$$X + Y = Y + X,\ \alpha X = X\alpha;$$

б) ассоциативным (сочетательным)

$$X + Y + Z = (X + Y) + Z = X + (Y + Z);$$

$$\alpha_1\alpha_2 X = \alpha_1(\alpha_2 X) = (\alpha_1\alpha_2) X;$$

в) дистрибутивным (распределительным)

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y;\ (\alpha_1 + \alpha_2) X = \alpha_1 X + \alpha_2 X.$$

Эти свойства позволяют производить над векторами различные преобразования (раскрытие скобок, группировка членов и т.п.).

Разложение векторов по базису

Известно, что множество всех векторов образует линейное пространство (для векторов, элементов этого пространства определены операции: сложение и умножение на число. Количество координат вектора определяет размерность пространства. Доказано, что всякий вектор $\overline{x} = (\xi_1, \xi_{2..}, \xi_n)$ n-мерного линейного пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов, образующих базис, $\overline{x} = \xi_1\overline{e_1} + \xi_2\overline{e_2} + \xi_3\overline{e_3}$, где $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ –

базис (в некоторых задачах иногда не будет ставится знак вектора над базисными векторами, но понимать надо, что они всегда являются векторами).

Базис – это совокупность *n* линейно независимых векторов *n*-мерного пространства R^n.

Заметим, что в *n*-мерном линейном пространстве существует бесконечно много различных базисов из *n* векторов. В следующих двух заданиях при решении задач надо уметь устанавливать линейную независимость или линейную зависимость векторов, и убедиться, что векторы, по которым требуется разложить данный вектор, образуют базис.

Пример . Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

Дано: $\overline{x}$=(-9,5,5), $\overline{p}$ =*(4,1,1)*, $\overline{q}$ =*(2,0,-3)*, $\overline{q}$ =*(-1,2,1)*.

Требуется найти коэффициенты в разложении

$$\overline{x} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + \gamma\overline{r}$$

Решение: Убедимся, что векторы $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ образуют базис в пространстве R^3. Если они линейно независимы, тогда $\overline{x} \in R^3$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов.

а) Рассмотрим $\lambda_1\overline{p} + \lambda_2\overline{q} + \lambda_3\overline{r} = \overline{0}$ в координатной форме:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.\ \text{Получим}\ \begin{cases}4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases},$$

т.к. определитель этой линейной однородной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 29 \neq 0 .$$

Однородная система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Следовательно, $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ – линейно независимы и образуют базис в R^3.

б) Запишем разложение вектора $\overline{x}$ по этому базису

$\overline{x} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + \gamma\overline{r}$ имеем: $\alpha\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta - \gamma = -9 \\ \alpha + 0\beta + 2\gamma = 5 \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

Эта линейная неоднородная система (ЛНС) уравнений, у которой $\Delta = 29 \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по правилу Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} \;, \; \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Вычисляем дополнительные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) \cdot (-1) -$$

$$-5 \cdot 0 \cdot (-1) - (-9) \cdot (-3) \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 20 + 15 - 54 - 10 = -29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -9 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 29, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 87.$$

Следовательно, $\alpha = \dfrac{-29}{29} = -1$, $\beta = \dfrac{-29}{29} = -1$, $\gamma = \dfrac{87}{29} = 3$.

Ответ: В базисе $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ имеем разложение $\overline{x} = -\overline{p} - \overline{q} + 3\overline{r}$.

Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

Эту ЛНС уравнений можно записать в векторной форме $AX=B$, где заданы матрицы коэффициентов A, B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B \text{ матрица-столбец } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(вектор свободных членов); $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, X- искомый n-мерный вектор неизвестных , которые требуется найти.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной. Имеет место следующая теорема Кронекера - Капели: Для совместности системы (*) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу её расширенной матрицы: $Rang\, A = Rang\, \overline{A} = r$, где

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ -расширенная матрица.

Если $r=n$,то ЛНС(*) имеет единственное решение. Если $r<n$, то ЛНС(*) имеет бесконечное множество решений. Назовём r неизвестных, базисный минор из коэффициентов при которых отличен от нуля, базисными переменными остальные $(n-r)$ неизвестных системы назовем свободными переменными. Придавая свободным переменным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных переменных. В результате получим общее решение системы, включающее в себя все частные решения.

Пример. Найти общее решение данной неоднородной системы с исследованием её на совместимость.

Дано: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

Решение. Здесь число уравнений $m=3$, число неизвестных $n=4$, $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$ - расширенная матрица, $\overline{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ - вектор свободных членов, $\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ -искомый вектор.

Вычислим $Rang\ A$ и $Rang\ \overline{A}$ методом окаймляющих миноров:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,\ M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow Rang\ \overline{A} = 3$. Т.к. ранги матриц A и $\overline{A}$ равны, то система совместна и имеет бесконечно много решений, ибо ранг $r=3$ меньше числа неизвестных $n=4$. Неизвестные x_1, x_2, x_4 соответствуют базисным столбцам минора $M_3 \neq 0$. Примем их за базисные переменные, неизвестная x_3 будет свободной.

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 4 - x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_4 = 7 - 4x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 3 - 3x_3 \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3; \ \Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 4 - x_3 & -3 & 2 \\ 7 - 4x_3 & -5 & 3 \\ 3 - 3x_3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 147x_3 + 3;$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 - x_3 & 2 \\ 2 & 7 - 4x_3 & 3 \\ 1 & 3 - 3x_3 & 4 \end{vmatrix} = -6x_3 + 13; \ \Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 - x_3 \\ 2 & -5 & 7 - 4x_3 \\ 1 & -2 & 3 - 3x_3 \end{vmatrix} = 62x_3 \cdot$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{147x_3 + 3}{3} = 49x_3 + 1; \ x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{-6x_3 + 13}{3}; \ x_4 = \frac{\Delta_{x4}}{\Delta} = \frac{62x_3}{3}.$$

Обозначим $x_3 = C$, где C- произвольная постоянная , $C \in R$

Запишем общее решение в векторной форме

$$X_{общее} = \begin{pmatrix} 49C + 1 \\ -2C + 13/3 \\ C \\ 62C/3 \end{pmatrix}.$$

Получая, например, $C=3$, найдем частные ЛНС: $X_1=148$; $X_2=-5/3$; $X_3=3$; $X_4=62$.

Ответ: $X_{общее}=(49C+1,-2C+13/3,C,62C/3)$,

$X_{частное}=(148,-5/3,3,62)$.

3. ПОДПРОСТРАНСТВА, ОБРАЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ (ЛОС) УРАВНЕНИЙ. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛОС

Рассмотрим линейную однородную систему m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Здесь

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица размерности $m \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - неизвестный вектор, подлежащий определению. Совокупность линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ ЛОС уравнений называется фундаментальной системой решений (ФСР) , если любое решение этой системы может быть представлено в виде линейной комбинации этих векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$: $X = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k$, где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – любые константы. Последнее равенство является общим решением ЛОС уравнений в векторной форме ,т.к. в нём содержатся всевозможные частные решения при конкретных значениях произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы A меньше числа n неизвестных, то ЛОС уравнений имеет ненулевое решение. Число n-мерных векторов , определяющих ФСР , находятся по формуле $k=n-r$, где $r=Rang\ A$. Таким образом, если рассматривается линейное пространство R^n ,элементами которого являются n-

мерные векторы , то множество всех решений ЛОС является подпространством пространства R^n . Размерность этого подпространства равна k.

Пример. Найти общее решение данной системы и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений ЛОС, указать размерность пространства).

Дано:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. В данной ЛОС имеем $m=3$- число уравнений, $n=5$- число неизвестных. Запишем матрицу коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определим её ранг с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 23 & -8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 23 & -8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1/3&1/3\\0&0&-8&-8/3&4/3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1/3&1/3\\0&0&1&1/3&-1/6\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1/3&1/6\\0&1&0&1/3&1/3\\0&0&1&1/3&-1/6\end{pmatrix}.$$

Т.к. число линейно независимых столбцов преобразований матрицы равно *r=3*, то *RangA=r=3. RangA=3<n=5*. Следовательно, ЛОС имеет ненулевые решения. ФСР состоит двух (*k=n-r=2)*линейно независимых решений. Неизвестные x_1,x_2,x_3 соответствуют базисным столбцам и являются базисными переменными; неизвестные x_4,x_5 – свободными переменными. Запишем преобразованную систему уравнений, перенеся свободные переменные x_4,x_5 в правую часть системы уравнений:

$$\begin{cases}x_1=(1/3)x_4-(1/6)x_5\\x_2=(-1/3)x_4-(1/3)x_5.\\x_3=-(1/3)x_4+(1/6)x_5\end{cases}$$

Для первого набора φ_1 свободных переменных $x_4=1,\ x_5=0$ и второго набора φ_2 свободных переменных $x_4=0,\ x_5=1$ имеем решения:

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix},\qquad\qquad \varphi_2=\begin{pmatrix}-1/6\\-1/3\\1/6\\0\\1\end{pmatrix}$$

Решения φ_1 и φ_2 образуют ФСР. Общее решение системы в векторной форме:

$$X=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2=c_1\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1/6\\-1/3\\1/6\\0\\1\end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные Если положить $c_1=3\cdot\alpha$, $c_2=6\cdot\beta$, где любые числа $\alpha,\beta\in(-\infty,\infty)$, то общее решение данной ЛОС в координатной форме можно записать так:

$x_1=\alpha-\beta,\ x_2=-\alpha-2\beta,\ x_3=-\alpha+\beta,\ x_4=3\cdot\alpha,\ x_5=6\cdot\beta,\ \alpha,\beta\in(-\infty,\infty)$

Исходная система имеет бесконечное множество решений; размерность пространства решений $k=2$.

Ответ: $X=(\alpha-\beta,\ \alpha-2\beta,\ -\alpha+\beta,\ 3\cdot\alpha,\ 6\cdot\beta)$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Говорят, в линейном векторном пространстве R задано преобразование A, если каждому элементу (вектору) $\overline{x}\in R$ по некоторому закону (или правилу) ставится в соответствие вектор $A\overline{x}\in R$. Преобразование A называют линейным, если для любых векторов $\overline{x},\overline{y}\in R$ и любого действительного числа λ выполняется равенства $A(\overline{x}+\overline{y})=A\overline{x}+A\overline{y}$ и $A(\lambda\overline{x})=\lambda A\overline{x}$.

Для простоты возьмём линейное пространство R^3 $(n=3)$. Пусть в этом пространстве R^3 имеются два базиса: $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ (старый) и $\overline{e_1^{/}},\overline{e_2^{/}},\overline{e_3^{/}}$ (новый), связанные равенствами

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2 + a_{13}\overline{e}_3 \\ \overline{e_2'} = a_{21}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + a_{23}\overline{e}_3 \\ \overline{e_3'} = a_{31}\overline{e}_1 + a_{32}\overline{e}_2 + a_{33}\overline{e}_3 \end{cases} \qquad (**)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица перехода от старого базиса к новому, столбцы, которой являются координатами в формулах перехода (**). Если вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задан в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, то его координаты $\overline{x'} = (x_1', x_2', x_3')$ в новом базисе можно найти по формуле $\overline{x'} = A^{-1}\overline{x}$, где матрица линейного преобразования A^{-1} является обратной для матрицы *A*; т.к. *de-tA* $\neq 0$,то - невырожденная матрица. Заметим, что в конечномерном пространстве *R* линейное преобразование (оператор) называется невырожденным , если определитель матрицы этого линейного преобразования отличен от нуля. Матрицу B' линейного оператора (преобразования) при переходе от одного ортонормированного базиса к другому находится по формуле $B' = A^{-1}BA$, где *A*-матрица перехода от старого базиса к новому , *B* матрица оператора в старом базисе

<u>Пример.</u> Найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе ($\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$), если он задан в базисе ($\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$).

Дано: $\overline{x} = (2,6,-3)$, $\overline{e_1'} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3, \overline{e_2'} = (2/3)\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{e_3'} = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$

<u>Решение</u>. Имеем по условию разложение вектора $\overline{x} = 2\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2 - 3\overline{e}_3$ старом базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$. Требуется разложить вектор $\overline{x}$ в новом базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$, т.е. надо найти новые координаты $x_1^{/}, x_2^{/}, x_3^{/}$ вектора $\overline{x} = x_1^{/}\overline{e_1^{/}} + x_2^{/}\overline{e_2^{/}} + x_3^{/}\overline{e_3^{/}}$. Учитывая условие задачи, запишем

$$\overline{x} = x_1^{/}(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3) + x_2^{/}((2/3)\overline{e}_1 - \overline{e}_2) + x_3^{/}(-\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)$$

или в координатной форме

$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = x_1^{/}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2^{/}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3^{/}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям $\begin{cases} x_1^{/} + (2/3)x_2^{/} - x_3^{/} = 2 \\ x_1^{/} - x_2^{/} + x_3^{/} = 6 \\ -2x_1^{/} + 0 \cdot x_2^{/} + x_3^{/} = -3 \end{cases}$

Это линейная неоднородная система(ЛНС), у которой det A=*-1*. Решаем ЛНС уравнений по правилу Крамера:

$$x_1^{/} = \frac{\Delta_1}{\det A},\ x_2^{/} = \frac{\Delta_2}{\det A},\ x_3^{/} = \frac{\Delta_3}{\det A}$$

Находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2/3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -7$. Таким образом, $\overline{x^{/}}$ =(5,6,7).

5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕНЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Пусть R^n - заданное n-мерное линейное пространство.

Ненулевой вектор $\overline{h} \in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора (преобразования) ,заданного матрицей A , если найдется такое число λ , что выполняется равенство $A\overline{h} = \lambda \overline{h} \cdot$ Само число λ называют собственным (или характеристическим) числом оператора A, соответствующим собственному вектору $\overline{h}$. Собственные (значения) матрицы A являются корнями характеристического уравнения *det* (A- λ E)=0, являющегося алгебраическим уравнением *n*-ой степени. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$ то характеристическое уравнение в координатной форме имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (***)$$

Для нахождения ненулевого собственного вектора

$$\overline{h}_m = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \neq 0,$$ отвечающему собственному числу λ_m,

m=1,2,…n надо решить линейную однородную систему (ЛОС) уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0 \end{cases}$$

Эта ЛОС уравнений имеет бесконечно много решений. Поэтому, собственному значению λ_m соответствует семейство собственных векторов. Выбирают любой из них.

Если характеристическое уравнение (***) имеет n различных корней, то соответствующие им собственные векторы $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_n$ - линейно независимые и образуют базис. Если среди корней характеристического уравнения (*) имеются кратные, т.е. равные корни, например, λ_1 - корень кратности $к$, то хорошо найти $к$ линейно независимых собственных векторов $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_k$, отвечающих собственному значению, кратности $к$; их число $m=n-r$, где n-порядок матрицы (A- λ_1 E), $r=Rang\ (A-\lambda_1 E); m \le k$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A. Дано: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2(2-\lambda)-4+\lambda=0$$

$(2-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2(2-\lambda)-4+\lambda=0$ или $(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9)=0$, $\lambda_1=2, \lambda_{2,3}=3$.

Откуда $\lambda_1=2, \lambda_{2,3}=3$-собственные значения матрицы A.

Для простого корня $\lambda_1=2$ находим собственный вектор $\bar{h} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \neq 0$, решая ЛОС уравнений $\begin{cases} 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + 0\cdot\xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + 0\cdot\xi_3 = 0 \end{cases}$

коэффициенты этой системы равны элементам определителя

det (A- λ E)=0, при $\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$.

Решим методом Гаусса: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получим $\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = 0 \\ \xi_2 - \xi_3 = 0 \end{cases}$ или $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$, где ξ_3 -свободная переменная , полагая $\xi_3 = c_1$, получаем, $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ - семейство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 2$. Например, $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для кратного корня $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. Подставляя $\lambda = 3$ в левую часть характеристического уравнения, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Ее порядок *n=3*, ранг *r=1* (наивысший порядок миноров, не равных нулю). Число линейно независимых собственных векторов равно *m=n-r=2* совпадает с кратностью корня *к=2*. Найдем их.

Имеем $\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0$ или $\xi_1 = \xi_2 + \xi_3$.Полагая $\xi_2 = c_2, \xi = c_3$, где c_2, c_3-любые константы, одновременно не обращающееся в ноль, получим $\bar{h} = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$- семейство собственных векторов для $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Пусть $c_2 = 1, c_3 = 0$. Тогда $\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть $c_2 = 0, c_3 = 1$. Тогда $\bar{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Два линейно независимых собственных вектора $\bar{h}_2$ и $\bar{h}_3$, соответствующих собственному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Ответ: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$– собственные значения матрицы A, $\bar{h}_1 = (1,1,1)$, $\bar{h}_2 = (1,1,0)$,

6. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени. Если число переменных $n=2$. то квадратичная форма:$K(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. Если $n=3$, то $K(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3$.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Рассмотрим квадратичную форму трех переменных $K(x_1, x_2, x_3)$. Симметрическая матрица

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$ у которой $a_{ij} = a_{ji}$, (i,j $=1,2,3$ при $i \neq j$) называется матрицей квадратичной формы $K(x_1, x_2, x_3)$. Так как S - симметричная матрица, то корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

являются действительными числами и будут собственными значениями матрицы S. Известно, что собственные векторы симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Следовательно, если матрица симметрическая, то можно говорить об ортогональном базисе векторов, составленном из собственных векторов этой матрицы. Если среди корней характеристического уравнения есть корень кратности $к$, то можно указать $к$ линейно независимых векторов, отвечающих этому собственному значению, согласно следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов матрицы оператора A, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному значению соответствовало столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность. Число линейно независимых векторов равно $m=n-r$, где n -размерность матрицы, $r=Rang\ S$.

И так, каждому оператору в разных базисах соответствуют различные матрицы. Наша цель: найти такой базис, в котором матрица оператора имела бы простейший вид, а именно диагональный. В ортонормированном базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$,где на главной диагонали стоят

собственные значения матрицы S , ибо характеристический многочлен линейного оператора (преобразования) не зависит от базиса. Известно, что квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ можно представить в виде скалярного произведения

$K(x_1, x_2, x_3) = (S\overline{x}, \overline{x})$, где

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ S\overline{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Переходя к новому ортонормированному базису, где матрица перехода $B=T^{-1}ST$, старые и новые переменные (координаты) связаны преобразованием $\overline{x} = T\overline{x^{/}}$, где $\overline{x^{/}} = \begin{pmatrix} x_1^{/} \\ x_2^{/} \\ x_3^{/} \end{pmatrix}$ -вектор $\overline{x}$ в новой системе координат, получим квадратичную форму в новой системе координат, определенной базис из собственных нормированных векторов, в виде

$$K(x_1^{/}, x_2^{/}, x_3^{/}) = (B\overline{x^{/}}, \overline{x^{/}}) = \lambda_1(\overline{x_1^{/}})^2 + \lambda_2(\overline{x_2^{/}})^2 + \lambda_3(\overline{x_3^{/}})^2 ,$$

не содержащем членов с произведением переменных, $x_1^{/}x_2^{1}, x_2^{/}x_3^{/}, x_1^{/}x_3^{/}$, который называется каноническим видом.

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' \\ x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' \\ x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' \end{cases},$$ где нормированные собственные векторы матрицы S: $\overline{u^0} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \overline{v^0} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \overline{w^0} = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$ принято говорить, что квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$ приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Вывод. Чтобы привести каноническую форму к каноническому виду надо:

1) По коэффициентам квадратичной формы составить симметрическую матрицу S;

2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы S, причем собственные векторы пронормировать;

3) Записать квадратичную форму в каноническом виде

$$K(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(\overline{x_1})^2 + \lambda_2(\overline{x_2})^2 + \lambda_3(\overline{x_3})^2 .$$

7. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Вектор – это направленный отрезок, т.е. имеющий длину и направление. Длина вектора называется модулем и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ - коллинеарны ($\overline{a} \parallel \overline{b}$), если параллельны одной и той же прямой или лежат на одной прямой.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – компланарны, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в одной и той же плоскости.

Направление вектора определяется углами α, β, γ, образованными вектором с положительным направлением координатных осей OX, OY, OZ соответственно.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам: $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$, где

$|\bar{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$, если известны его координаты $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Заметим, что направляющие косинусы являются координатами любого единичного вектора, т.е. $\overline{a^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, если $|\overline{a^0}| = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

<u>Основные действия над векторами.</u>

Пусть даны $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Тогда:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2. $\overline{\lambda a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, где λ -действительное число.
3. <u>Скалярное произведение</u> $\bar{a}\cdot\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть число, по определению равное $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$,где φ - угол между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле: $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$.
4. <u>Векторное произведение</u> $\bar{a}\times\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - есть вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий трем условиям:
   1) вектор $\bar{c}$ направлен так, что векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку;
   2) вектор $\bar{c}$ ортогонален вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$.
   3) модуль $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ - угол между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Геометрически модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на

этих векторах, т.е. $S_{параллеграмма} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$.

Тогда $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

5. <u>Смешанное произведение</u> трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ есть число равное по определению: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Геометрически модуль смешанного произведения равен объему параллепипеда, построенного на этих векторах, т.е. $V_{параллепипеда} = |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}|$. Заметим, что объем тетраэдра, построенного на трех векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ равен $V_{тетраэдра} = (1/3) S_{осн.} h$, где $S_{осн.}$ – площадь основания тетраэдра, h –высота тетраэдра, т.к. основание тетраэдра есть треугольник, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то $S_{осн} = (1/2)\, S_{параллелограмма}$, следовательно,

$$V_{тетраэдра} = (1/6) S_{параллелограмма} h = (1/6) V_{параллепипеда}.$$

Если заданы векторы в координатах $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ смешанное произведение.

1) Условие перпендикулярности векторов ($\bar{a} \perp \bar{b}$): $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ или $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$.

2) Условие коллинеарности векторов ($\bar{a} \,//\, \bar{b}$):

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0 \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

3) Условие компланарности векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} : \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$ или

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Пример. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках *A_1, A_2, A_3, A_4* и его высоту, опущенную из вершины *A_4* на грань *$A_1 A_2 A_3$*(рис.2).

Дано: *$A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$; $A_4(3;4;5)$.*

Требуется найти объем тетраэдра.

Решение. а) Объем тетраэдра равен 1/6 части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Объем соответствующего параллелепипеда вычисляется через смешанное произведение векторов, совпадающих с ребрами тетраэдра, сходящимися в вершине *A_1*(рис.7.1):

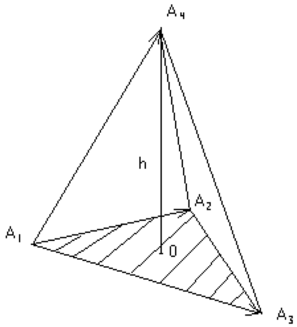


Рис. 7.1

$$V_{тетраэдра} = (1/6)\left| \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \right|$$

Найдем координаты векторов и их смешанное произведение: $\overline{A_1A_2} = (5,-3,3)$, $\overline{A_1A_3} = (3,-1,1)$, $\overline{A_1A_4} = (4,2,8)$

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}=\begin{vmatrix}5 & -3 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 8\end{vmatrix}=30$$

Откуда $V_{тетраэдра}=(1/6)\cdot 30=5$ (куб. ед.)

б) Искомую высоту h найдем из формулы:

$V_{тетраэдра}=(1/3)S_{основания}\ h$, где $S_{основания}$ равна площади треугольника $A_1\,A_2\,A_3$.

Площадь треугольника $A_1\,A_2\,A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$

Поэтому находим векторное произведение

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 5 & -3 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\cdot i+4j+4k$$

Следовательно, $S_{основания}=S_\Delta=(1/2)\left|\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\right|=$

$=(1/2)\sqrt{0^2+4^2+4^2}=2\sqrt{2}$ (кв.ед.)

Таким образом

$h=3V_{тетраэдра}/S_{основания}=3\cdot 5/(2\sqrt{2})=15\sqrt{2}/4$

Ответ: $V_{тетраэдра}=5$ *(куб. ед.)*, $h=15\sqrt{2}/4$ *(ед. длины)*

8. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве.

1) Уравнение плоскости – это уравнение первой степени вида: $Ax+By+Cz+D=0$, если $A^2+B^2+C^2\neq 0$, которое называется общим уравнением. Коэффициенты A, B, C можно рассматривать, как координаты вектора нормали $\overline{N}=(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, (условие $\overline{N} \perp \overline{MM}_0$, где $\overline{MM}_0=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ лежит в плоскости).

3) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

-условие компланарности векторов

$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, где $\overline{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, где $M(x,y,z)$- текущая точка данной плоскости.

4) Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a,b,c – отрезки, отсекаемые плоскостью, на координатных осях соответственно, - абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями OX, OY, и OZ.

5) Нормальное уравнение плоскости:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - вектор- нормаль к плоскости единичной длины, проведены из начала координат, p – расстояние от начала координат до плоскости $(p>0)$.

Приведем общее уравнение плоскости к нормальному уравнению плоскости. Для этого умножим обе части общего уравнения плоскости на нормирующей множитель:

$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - полученное уравнение и будет нормальным уравнением плоскости. (Знак μ берется противоположным знаку *D)*

Расстояние от данной точки $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ до плоскости находится по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

где A,B,C-коэффициенты в общем уравнении плоскости,
Угол между двумя плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где под углом между двумя плоскостями понимается угол между их нормалями $\overline{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N}_2(A_2,B_2,C_2)$.

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (если $\overline{N}_1\perp\overline{N}_2$).

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$ (если $\overline{N}_1 // \overline{N}_2$).

Прямая в пространстве

Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$, где $\overline{S}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, точка $M(x_0,{}_0y.z_0)$ лежит на прямой, т.е. прямая проходит через точку M_0 параллельно вектору $\overline{S}$.

Уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases}x=mt+x_0\\ y=nt+y_0\\ z=pt+z_0\end{cases}$$

Прямая может быть задана как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Угол между двумя прямыми вычисляются по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},$$

где угол φ между двумя прямыми- угол между их направляющими векторами данных прямых.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ (если $\overline{S}_1\perp\overline{S}_2$).

Условие параллельности двух прямых:

$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$ (если $\overline{S}_1//\overline{S_2}$).

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть заданы прямая α и плоскость β:

β: $Ax+By+Cz+D=0$,

α: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

Угол между прямой и плоскостью определяются по формуле

$$\cos\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

где φ-угол между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$ (если $\overline{S}//\overline{N}$). Условие параллельности двух прямых: $Am+Bn+Cp=0$ (если $\overline{S}\perp\overline{N}$). Напомним, что $\overline{S}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, $\overline{N}=(A,B,C)$ – нормаль к плоскости.

Пример. Найти расстояние d от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3.

Дано: $M_1(1;0;2); M_2(1;2;-1); M_3\ (2;-2;1); M_0\ (-5;-9;1)$.

Требуется найти: d (см. рис.8.1)

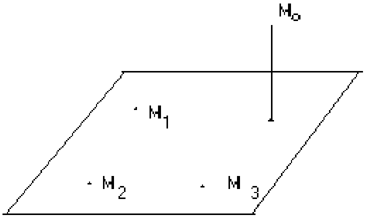


Рис.8.1

Решение. Находим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3, по формуле

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1-1 & 2-0 & -1-2 \\ 2-1 & -2-0 & 1-2 \end{vmatrix} = 0$$

Разложив определитель по первой строке и, приводя подобные члены, имеем уравнение плоскости: $8x+3y+2z-12=0$

Расстояние d от данной точки $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|8x_0 + 3y_0 + 2z_0 - 12|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|8(-5) + 3(-9) + 2\cdot 1 - 12|}{\sqrt{(-8)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{77} \text{ (ед. длины).}$$

9. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

1. Окружность – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если R – радиус окружности, точки M_0 (x_0, y_0) - ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

2. Эллипс – это множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта постоянная больше расстояния между фокусами (рис.9.1).

Пусть $M(x,y)$ – любая точка эллипса, $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ – фокусы. Тогда по определению имеем $|MF_1|+|MF_2|=2a$, где $MF_1=r_1$ и $MF_2=r_2$ называются фокальными радиусами, и, следовательно, $r_1+r_2=2a$.

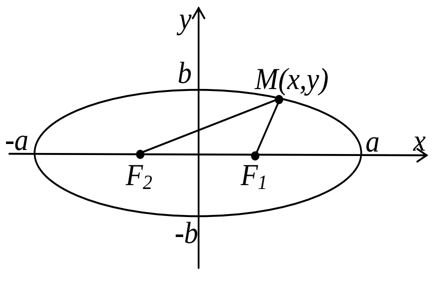


Рис. 9.1

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его эксцентриситетом $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, (так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$ для эллипса). Каноническое уравнение эллипса : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, причем $a^2=b^2+c^2$. Здесь a – большая, b – малая полуоси эллипса. Если $a=b$ (с = 0, $\varepsilon = 0$, фокусы сливаются в одной точке – центре), то эллипс превращается в окружность

$x^2 + y^2 = a^2$. Фокальные радиусы эллипса: $r_1 = a - \varepsilon x$ (правый фокальный радиус) и $r_2 = a + \varepsilon x$ (левый фокальный радиус).

3. Гипербола – это множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами (рис.9.2). Пусть $M(x, y)$ – любая точка гиперболы, $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$ – фокусы. Тогда по определению имеем

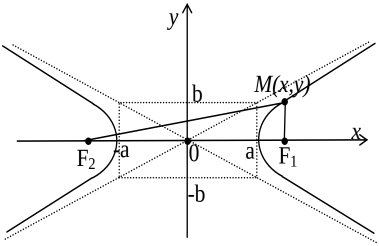


Рис. 9.2

$\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a,\ a > 0,$ где $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ называются фокальными радиусами, причем для правой ветви гиперболы, $r_1 = \varepsilon x - a$ – правый фокальный радиус; $r_2 = \varepsilon x + a$ – левый фокальный радиус, где число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a^2 + в^2 = c^2$. Здесь a – действительная полуось, b – мнимая полуось гиперболы; из уравнения видно, что гипербола не пересекает ось OY, т.е. $x \neq 0$. Для построения гиперболы строят прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, с центром в начале координат. Проводят диагонали в прямоугольнике, которые являются асимптотами $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. Вершины гиперболы находятся в точках $(a; 0)$ и $(-a; 0)$.

Замечание. Если уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, то вершины гиперболы находятся на оси OY в точках $(b;0)$ и $(-b;0)$. Гиперболы называются сопряженными (у них действительная ось одной гиперболы служит мнимой осью другой, и наоборот; они имеют общие асимптоты). Если $a=b$, то уравнение принимает вид $x^2-y^2=a^2$. Такая гипербола называется равнобочной. Ее асимптоты перпендикулярны друг к другу. Поэтому, если за координатные оси принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид: $x\cdot y=m$, $\left(m=\pm\frac{1}{2}a^2\right)$ (рис. 9.3,а и рис. 9.3,б), или $y=\frac{m}{x}$.

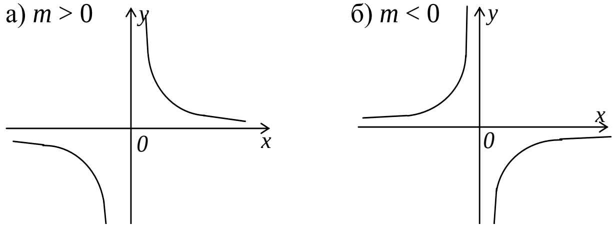


Рис. 9.3

4. Парабола – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой (рис.9.4). Пусть прямая *l:* $x=-p/2$ является директрисой параболы, точка $F(p/2,0)$ – фокус. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2=2px$, где p – фокальный параметр.

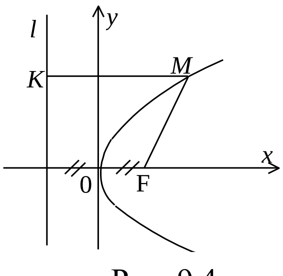


Рис. 9.4

Эта парабола расположена симметрично относительно оси OX ($p>0$), $FM=r$ – фокальный радиус параболы, который определяется по формуле $r=x+\frac{p}{2}$, так как $|FM|=|KM|$. Уравнение $x^2=2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат $OУ$. При $p>0$ ветви параболы направлены в положительную сторону соответствующей координатной оси, а при $p<0$ – в отрицательную сторону.

10. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Если общее уравнение кривой второго порядка вида: $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$, т.е. не содержит члены с произведением xy ($a_{12}=0$), то следует выделить полные квадраты по x и по y :

$$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11})+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22})+a_0=0,$$

$$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11})+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22})+a_0=0,$$

$$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11}+(a_1/a_{11})^2)+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22}+(a_2/a_{22})^2)-$$
$$-(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2+a_0=0$$

или

$$a_{11}(x+a_1/a_{11})^2+a_{22}(y+a_2/a_{22})^2=(a_2/a_{22})^2)+(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2-a_0,$$

и сделать замену переменных (параллельный перенос)

$x'=x+\frac{a_1}{a_{11}}, y'=y+\frac{a_2}{a_{22}}$. Получим $a_{11}(x')^2+a_{22}(y')^2=k$,

где $k=(a_2/a_{22})^2)+(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2-a_0$ или

$$\frac{(x^{/})^2}{k/a_{11}}+\frac{(y^{/})^2}{k/a_{22}}=1$$ – канонический вид кривой второго порядка.

11. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Уравнения кривых второго порядка

Пусть общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

приведем к каноническому виду: $\frac{(x^{/})^2}{k/\lambda_1}+\frac{(y^{/})^2}{k/\lambda_2}=1$, где λ_1,λ_2 - собственные значения матрицы S . Вычисляем $\lambda_1\cdot\lambda_2$

1. если $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$, то кривая эллиптического типа;
2. если $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$, то кривая гиперболического типа;
3. если $\lambda_1\cdot\lambda_2=0$, то кривая параболического типа.

Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

Пример . Дано: $K(x,y)=2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.

Решение. Имеем $a_{11}=2, a_{22}=2, a_{12}=a_{21}=-1$; $a_1=-1, a_2=-1, a_0=1$.

Тогда матрица старших членов $S=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$, или $\lambda^2-4\lambda+3=0\cdot$ Корни $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$ – собственные значения матрицы S. Так как $\lambda_1=1$, и $\lambda_2=3$ то данная кривая эллиптического типа.

Находим соответствующие им собственные векторы $\bar{h}_1=(\xi_1,\xi_{2)}$ и $\bar{h}_2=(\eta_1,\eta_{2)}$.

Для $\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, или $\begin{cases} \zeta_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$,

$\xi_1 = \xi_2 = c_1, c_1 - \forall const$.

Пусть $c_1=1$. Тогда $\overline{h}_1 = (1,1)$. Нормируем $\overline{h}_1$, $\overline{h_1^0} = \overline{h}_1 / |\overline{h}_1|$, где $|\overline{h}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2$; получаем $\overline{h_1^0} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Для $\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} -\eta_1 - \eta_2 = 0 \\ -\eta_1 - \eta_2 = 0 \end{cases}$,

$\eta_1 = -\eta_2 = c_2, c_2 - \forall const$.

Пусть $c_2=1$. Тогда $\overline{h}_2 = (1,-1)$. Нормируем $\overline{h}_2$, $\overline{h_2^0} = \overline{h}_2 / |\overline{h}_2|$, где $|\overline{h}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2$; получаем $\overline{h_2^0} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, причем $\overline{h_1^0} \perp \overline{h_2^0}$. Орты собственных векторов $\overline{h_1^0}$ и $\overline{h_2^0}$ образуют базис в новой системе координат x', y'. Имеем матрицу T линейного преобразования координат $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Отсюда получаем формулы преобразования координат

$x = (1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{2})y'$, $y = (1/\sqrt{2})x' - (1/\sqrt{2})y'$, или

$x = 1/\sqrt{2}(x' + y')$, $y = 1/\sqrt{2}(x' - y')$.

Подставляем в уравнения кривой найденные выражения для x и y: После раскрытия скобок и приведения подобных получаем $(x')^2+3(y')^2-2\sqrt{2}x'+1=0$, или $(x')^2-2\sqrt{2}x'+3(y')^2+1=0$. Выделив, полный квадрат имеем: $(x'-\sqrt{2})^2+3y'+1=0$.

Пусть $x''=x'-\sqrt{2}$, $y''=y'$- параллельный перенос координатных осей. Тогда $(x'')^2+3(y'')^2=1$,или $(x'')^2+(y'')^2/3=1$- каноническое уравнение эллипса в координатах x'', y'', где a

$=1$– большая, $b=1/\sqrt{3}=$ 0,577 – малая полуоси эллипса (рис.11.1) .

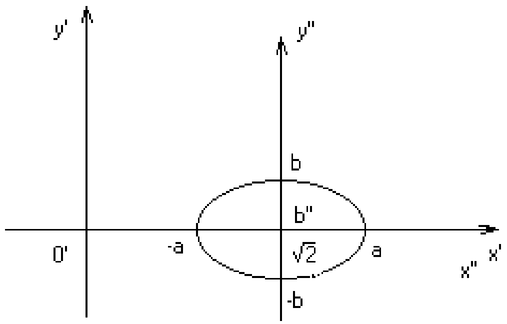


Рис. 11.1

Поверхности второго порядка. Канонические формы уравнений. Исследование поверхностей второго порядка методом сечений

Определение. Поверхностью S второго порядка будем называть геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых, удовлетворяют уравнению вида

$$\begin{gathered}a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\end{gathered}, \qquad (*)$$

в котором, один из коэффициентов

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$$

отличен от нуля. Уравнение (*) называется *общим уравнением поверхности 2-го порядка.*

Очевидно, что поверхность второго порядка как геометрический объект не меняется, если от данной декартовой системы координат перейти к другой декартовой системе координат.

С помощью линейного ортогонального преобразования координат (или параллельного переноса и поворота осей) уравнение вида (*) можно привести к виду

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}y_1^2 + a'_{33}z_1^2 + a_{44} = 0.$$

Поверхность S второго порядка называется центральной, если уравнение центра поверхности имеет единственное решение

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases}$$

точка O_1 (x_0, y_0, z_0) называется центром поверхности 2-го порядка. Для упрощения будем рассматривать уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0, \qquad (**)$$

где $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$.

Классификация центральных поверхностей второго порядка

1°. Если коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} одного знака, а коэффициент $a_{44} \neq 0$, то в этом случае поверхность S называется ***эллипсоидом.*** Если знак коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} противоположен знаку коэффициента a_{44}, то поверхность называется ***вещественным эллипсоидом,*** в противном случае - ***мнимым эллипсоидом.***

В дальнейшем термином эллипсоид мы будем называть лишь вещественный эллипсоид.

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Из уравнения следует, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат - центром симметрии. Числа *a, b, c* называются *полуосями* эллипсоида и представляют собой длины отрезков от начала до точек пересечения эллипсоида с осями координат. Эллипсоид представляет собой ограниченную поверхность.

Рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, параллельными координатной плоскости *Oxy*. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $z = h$, а линия, которая

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \\ z=h\end{cases}.$$

Отсюда следует, что при $h < c$ плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}};\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Аналогичнаякартина имеет место при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям *Oxz* и *Oyz*. Сама плоскость *Oxz* $(y=0)$ пересекает эллипсоид по эллипсу $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0\end{cases}$

а плоскость *Oyz* $(x = 0)$ по эллипсу $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0\end{cases}$

В случае $a=b=c$, эллипсоид является сферой.

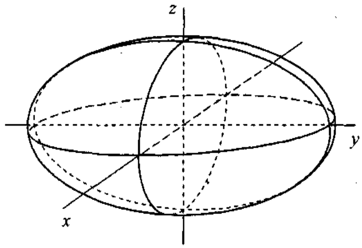


Рис. 11.2

2°. Если из четырех коэффициентов a_{11}, a_{22}, $о_{33}$, $а_{44}$ два одного знака, а два других - противоположного, поверхность S называют ***однополостным гиперболоидом.***

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Из уравнения вытекает, что координаты плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат - центром симметрии однополостного гиперболоида.

Рассмотрим его сечение координатной плоскостью Oxz

Это сечение представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно координатных осей Ox и Oz и пересекает ось Oz в точках $(a,$ 0, 0), (- $a,0,$ 0).

$$\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}.$$

Сечение плоскостью Oyz есть гипербола симметричная относительно осей Oy, Oz с точками на оси Оу (0, b, 0), (0, - b, 0).

$$\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

Рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости *Oxy:*

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_1 = a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}} \\ b_1 = b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}} \end{matrix}.$$

Отсюда видно, что любая плоскость $z = h$ пересекает

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^{\,2}} + \dfrac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1 \\ z = h \end{cases}.$$

гиперболоид по эллипсу Самых малых размеров эллипс получается в сечении плоскостью $z=0$ (Oxy) он называется горловым эллипсом.

Однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, расширяющейся в обе стороны от горлового клапана.

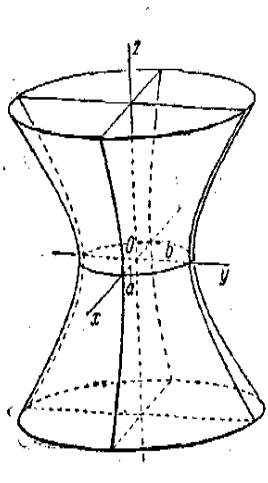


Рис. 11.3

Величины a, b, c называют **полуосями однополостного** гиперболоида. В случае $a = b$ уравнение (2') определяет окружность с центром на оси Ox. В этом случае однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из осей.

3°. Знак одного из первых трех коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ противоположен знаку остальных коэффициентов. В этом случае поверхность S называется ***двухполостным гиперболоидом.***

Пусть для определенности $a_{11}>0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$, $a_{44} >0$. Каноническое уравнение двухполостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 .$$

Его сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases}.$$

Это гипербола, симметричная относительно осей Ox и Oz и пересекающая ось Oz в точках (0,0,c)и(0,0,-c).

Сечение плоскостью Oyz $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0\end{cases}$ представляет собой гиперболу, симметричную относительно Oy и Oz и пересекающую Oz в точках (0,0,c) и (0,0, - c).

Сечения данного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \end{cases}$$

при условии, что $|h| > c$ представляет эллипс с полуосями:

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \qquad a_2 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Двухполостный гиперболоид -это поверхность, состоящая из двух отдельных «полостей». Каждая из них имеет вид бесконечной выпуклой чаши.

Величины a, b, c называются полуосями двухполостного гиперболоида.

При $a=b$ двухполостный гиперболоид модно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из осей .

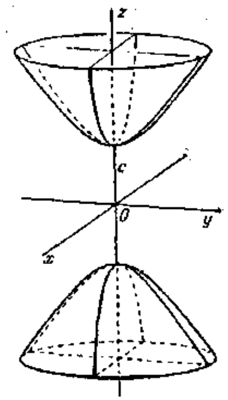


Рис. 11.4

4°. Коэффициент $a_{44} = 0$. В этом случае поверхность S называется конусом второго порядка. Если коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} одного знака, то левая часть обращается в нуль лишь для $x = y = z = 0$, то есть уравнению поверхности удовлетворяет одна точка.

В этом случае поверхность называется *мнимым конусом*.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

Если коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \ \ a_{33}$ имеют разные знаки, то поверхность S называется вещественным конусом второго порядка. Каноническое уравнение его имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$

Геометрической особенностью этой поверхности является то, что, если некоторая точка M (отличная от начала координат) лежит на этой поверхности, то все точки прямой, которая проходит через начало координат и точку $M,$ также лежат на этой поверхности.

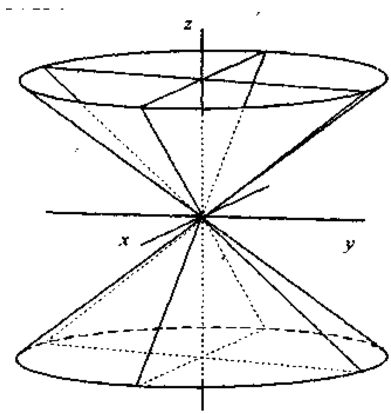


Рис. 11.5

Эта геометрическая особенность вытекает из того, что уравнение однородно, т.е. все его члены имеют одну и туже степень, равную 2. Иначе говоря, поверхность, определяемая однородным уравнением, состоит из прямых проходящих через начало координат. Такая поверхность называется ***конической или просто конусом.*** Прямые, из которых составлен конус, называются образующими. Точка, через которую они все проходят, называется вершиной конуса.

Рассмотрим сечение плоскостью $\begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$.

Плоскости $z = h$ в сечении тоже дают эллипс. Это эллипс с полуосями a и b расположенный симметрично относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz.

Если $a = b$, то эллипс превращается в окружность и конус называется *круглым.*

Нецентральные поверхности второго порядка

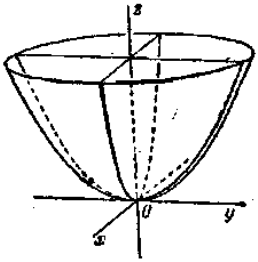
1°. *Эллиптический параболоид***.** Каноническое уравнение

имеет вид: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

Плоскости Oxz и Oyz являются для него плоскостями симметрии. Ось Oz называется осью эллиптического параболоида. Из уравнения следует, что эллиптический параболоид расположен в полупространстве $z \geq 0$. Линии пересечения представляют собой эллипсы

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad a_1 = a\sqrt{h}, \quad b_1 = b\sqrt{h}.$$

При увеличении h эллипсы бесконечно увеличиваются, так что эллиптический параболоид представляет собой бесконечную чашу. Плоскость $x = h$ пересекает эллиптический параболоид по параболе $z-\frac{h^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$; $x=h$, которая получается таким параллельным переносом параболы $z=\frac{y^2}{b^2}$, $x=0$, при котором ее вершина O(0,0,0) переходит в точку (h,0,z=h^2/a^2).



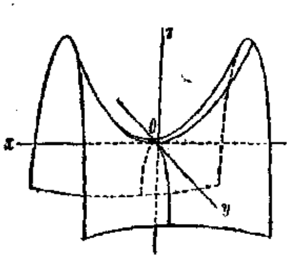


Рис. 11.6 Рис. 11.7

2°. *Гиперболический параболоид.* Каноническое уравнение имеет вид: $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^3}$. Плоскости *Oxz* и *Oyz* являются плоскостями симметрии. Ось *Oz* называется осью гиперболического параболоида. Он имеет форму седла. Точка *O* называется вершиной гиперболического параболоида.

Линии пересечения гиперболического параболоида с плоскостями z = *h* при *h* > O представляют собой гиперболы:

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1,\quad a_1=a\sqrt{h},\quad b_1=b\sqrt{h}.$$

При *h* < O - линии пересечения сопряженных гипербол. Плоскость z = 0 пересекает гиперболический параболоид по

$$z+\frac{h^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2},$$

двум прямым (асимптотам гипербол) $y=\pm\frac{b}{a}x$, плоскость y= *h* пересекает гиперболический параболоид по параболе, которая получается параллельным переносом параболы.

$$z = \frac{x^2}{a^2}, y = 0.$$

Цилиндры второго порядка

Рассмотрим цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси *Oz*.

В зависимости от характера сечения рассматриваемого цилиндра с плоскостью *Оку* различают цилиндры следующих типов:

1. Эллиптический цилиндр-каноническое уравнение: Направляющей является эллипс (рис.11.8).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad -$$

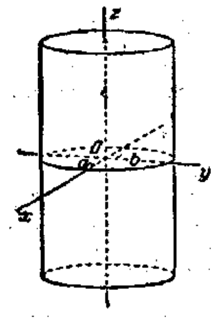


Рис. 11.8

Если $a = b$, то цилиндр называется круговым.

2.*Параболический цилиндр* (рис.11.9). Направяющей является парабола.

$$y^2 = 2px$$

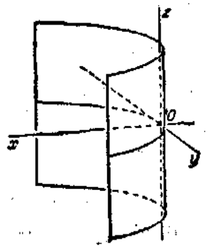


Рис. 11.9

3.*Гиперболический цилиндр* (рис.11.10). Направляющей является гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

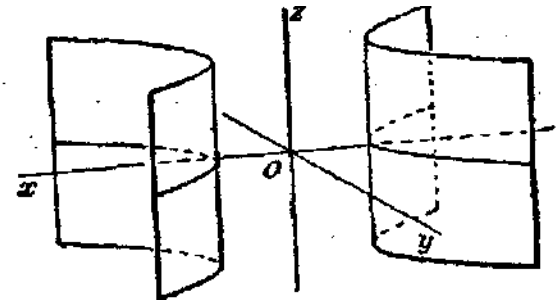


Рис. 11.10

<u>Пример.</u> Методом сечений исследовать форму и построить <u>поверхность, заданную уравнением</u> $x^2 + 2yz = 1$.

Решение.

1) В сечении поверхности плоскостью $z=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

2) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0>0$ имеем семейство парабол $y=\frac{1}{2z_0}-\frac{x^2}{2z_0}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении z_0.

3) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0<0$ имеем семейство парабол $y=-\frac{1}{2|z_0|}+\frac{x^2}{2|z_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении $|z_0|$.

4) В сечении поверхности плоскостью $y=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$

5) В сечении поверхности плоскостями $y=y_0>0$ имеем семейство парабол $z=\frac{1}{2y_0}-\frac{x^2}{2y_0}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении y_0.

6) В сечении поверхности плоскостями $y=y_0<0$ имеем семейство парабол $z=-\frac{1}{2|y_0|}+\frac{x^2}{2|y_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении $|y_0|$.

7) В сечении поверхности плоскостями $x=x_0$ имеем семейство гипербол $z=\frac{1-x_0^2}{2y}$ при $|x_0|<1$ и $z=-\frac{x_0^2-1}{2y}$ при $|x_0|>1$ (сопряженные гиперболы). В случае $|x_0|=1$ получается $z=0$. Замечаем симметричность сечений поверхности относи-

тельно прямой $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$. Поэтому дальнейшее исследование проводим с учетом этого обстоятельства.

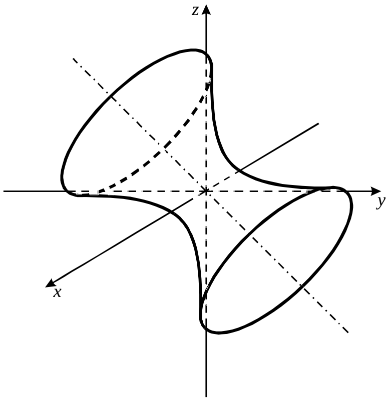


Рис. 11.11

8) В сечении поверхности плоскостями $z = -y + z_0$ имеем семейство гипербол $x^2 - 2\left(y - \frac{z_0}{2}\right)^2 = 1 - \frac{z_0^2}{2} > 0$ при $|z_0| < \sqrt{2}$ и $2\left(y - \frac{z_0}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{z_0^2}{2} - 1 > 0$ при $|z_0| > \sqrt{2}$ (сопряженные гиперболы). В случае $|z_0| = \sqrt{2}$ получаем две пересекающиеся прямые $x = \pm\sqrt{2}\left(y - \frac{z_0}{2}\right)$.

9) Сечения поверхности плоскостями $z = y + z_0$ имеют проекции на плоскость xOy, описываемые уравнениями $x^2 + 2\left(y + \frac{z_0}{2}\right)^2 = 1 + \frac{z_0^2}{2}$, т.е. эллипсы, у которых полуоси увеличиваются с увеличением $|z_0|$. Отношение полуосей этих эллипсов равно $\sqrt{2}$, а плоскости $z = y + z_0$ составляют угол 45° с

плоскостью xOy, поэтому сами сечения имеют форму окружностей.

Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 11.11). Этой поверхностью является однополостный гиперболоид, ось которого – прямая $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$.

12. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ТЕОРЕМА БЕЗУ. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ.

Комплексные числа и действия с ними

Алгебраическая форма $z=a+b\cdot i$, b €R, $i^2 = -1$, где $a = Re\ z$ – действительная часть числа (вещественная), $b = i\ m$ – мнимачасть числа z. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то z - мнимое число ($z = 97-7 \cdot i$).
Если $a = 0$, $b \neq 0$, то z - чисто мнимое число ($z=55 \cdot i$).
Если $a \neq 0$, $b=0$, то z - действительное число ($z=-4$).
Для *i выполнено*: $i^1 = i \Rightarrow i^{4n+1} = i$, $i^2 = -1 \Rightarrow i^{4n+2} = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i \Rightarrow i^{4n+3} = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = 1 \Rightarrow i^{4n} = 1$. Числа $z=a+b\cdot i$ *и* $z=a-b\cdot i$ – сопряженные; сумма и произведение двух сопряженных чисел являются действительными числами ($z+\bar{z} = 2a$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$); $z=a+b\cdot i$ *и* $-z=-a-b\cdot i$ - противоположные. Сумма двух противоположных чисел равна 0($z+(-z)=0$).

Для комплексных чисел, записанными в алгебраической форме справедливы все арифметические операции, как над обычными двучленами, учитывая лишь, что $i^2=-1$

Условие равенства комплексных чисел $z_1=a_1+b_1\cdot i$ *и* $z_2=a_2+b_2\cdot i$, $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сумма комплексных чисел $z_1=a_1+b_1\cdot i$ и $z_2=a_2+b_2\cdot i$ равна: $z_1 + z_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i$.

Разность комплексных чисел: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$

Произведение комплексных чисел равно: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)$.

Частное комплексных чисел равно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} = \frac{(a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Понятие о комплексной плоскости.

Комплексная плоскость C – плоскость с прямоугольной декартовой системой координат *x, y,* каждая точка которой (*x; y)* отождествлена с комплексным числом *z=x+yi.* Поэтому на комплексной плоскости говорят о точках *z* или о векторах *z*, подразумевается вектор, приложенный в начале координат с концом в точке *z*. Ось абсцисс OX на комплексной плоскости называется действительной осью, а ось ординат OY – мнимой осью.

Геометрическая форма комплексного числа.

Комплексное число c=a+b·i изображается на плоскости с декартовыми прямоугольными координатами точкой, имеющей координаты (a; b). Эта точка обозначается той же буквой z. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто – мнимые –точками оси ординат.

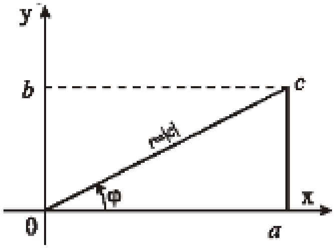


Рис. 12.1

Тригонометрическая форма комплексного числа.

$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r\cdot\cos\varphi = Re\, z$; $r\cdot\sin\varphi = Im\, z$;

$$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$\varphi = Argz$ – главный аргумент комплексного числа z, $-\pi < \varphi \le \pi$.

Для комплексных чисел $z_1=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$ справедливы равенства:

$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Для n-ой степени числа z справедливо равенство:

$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))$, $n\in N$.

При r=1 эта формула называется формулой Муавра:

$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi)$.

Корень *n*-ой степени:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}\right),\ \text{где } \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Показательная форма комплексного числа.

$z=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$. $e^{\pm i\cdot\varphi}=\cos\varphi\pm i\cdot\sin\varphi$ – формула Эйлера.

Для комплексных чисел $z_1=r_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1}$, $z_2=r_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2}$ справедливы равенства:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)};\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{(\varphi_1-\varphi_2)},\ \text{где } r_2>0.$$

Для n-ой степени числа z справедливо равенство: $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$.

Корень n–ой степени из числа равен:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}},\ \kappa=0,1,2,\ldots,n-1$$

Пример . Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$

Решение: Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right)$$

$\varphi = \arg(z)$; k=0, 1 ,…, n-1; $z \neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня $\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}}$:

$\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2i$, $\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}} = 2 + i2\sqrt{3}$

$\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} + 2i$, $\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}} = -2 - i2\sqrt{3}$

Ответ:

$$\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}} = \left\{2\sqrt{3} - 2i; 2 + i2\sqrt{3}; -2\sqrt{3} + 2i; -2 - i2\sqrt{3}\right\}$$

Теорема Безу.

Теорема Безу. Основная теорема алгебры.

Многочленом n-й степени в комплексной области называется функция вида

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

где a_k,, $k = 0,1,2,\ldots,n$ - коэффициенты многочлена (действительные или комплексные числа); z - комплексная переменная $z = x + i\,y$, $x,y \in$R.

Если a_k - действительные числа, многочлен называется многочленом в комплексной области с действительными коэффициентами. Область определения многочлена все комплексные числа, т.е. множество C. Любому числу $z_0 \in C$ соответствует число $P_n(z_0)$. Если $P_n(z_0)=0$, то z_0 называется корнем или нулем многочлена $P_n(z)$. Два многочлена называются равными $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ и $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$, если выполняется равенство $a_k = b_k$, $\kappa = 1,2,3,\ldots,n$.

Теорема 1 (Безу). Для того, чтобы многочлен $P_n(z)$ имел комплексный корень z_0, необходимо и достаточно, чтобы он делился на двучлен $z-z_0$, т.е. чтобы справедливым было представление $P_n(z) = (z-z_0) P_n (z)$, где $P_{n-1}(z)$ - многочлен степени $n-1$.

Необходимость. Пусть z_0 корень многочлена $P_n(z)$, тогда $P_n(z_0)=0$. По формуле Тейлора для многочлена

$$P_n(z) = (z-z_0) P_n (z)$$

Достаточность Если для многочлена справедливо представление в виде: $P_n(z) = (z-z_0) P_n (z)$, то при $z = z_0$ многочлен $P_n(z_0)=0$, а это означает, что z_0 -корень уравнения.

Из теоремы Безу не следует существование корней. Вопрос о существовании корней многочлена решает следующая теорема .

Теорема 2 (основная теорема алгебры). Любой многочлен $P_n(z)$, $n\in N$, имеет по крайней мере один комплексный корень. Число z_0 называется простым корнем многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен делится на $(z -z_0)$ и не делится на $(z - z_0)^2$. Число z_0 называется k- *кратным корнем многочлена* $P_n(z)$, если $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)^k$ и не делится $(z-z_0)^{k+1}$,т.е. $P_n(z)$ представим в виде: $P_n(z) = (z-z_0)^k P_{n-k} (z)$, где $P_{n-k} (z)$ не делится на $(z-z_0)$.

Пример1. Показать, что $z_1 =0$, $z_2 = -1$ являются корнями многочлена $P_3(z) - z^3 + 2z^2 +z$, и определить их кратность. При $z_1=0$ многочлен $P_3 (z_1) = 0$. Разделим $P_3 (z)$ на z, получим $P_2(z) = z^2 +2z + l$, причем $P_2 (z_1)\neq 0$. Следовательно $z_1 = 0$ является простым (однократным) корнем многочлена $P_3(z) = z^3+2z^2+z$. При $z_2 = -1$ $P_3(z_2) = -1 + 2 -1 = 0$. Представим $P_3 (z) = z(z^2 + 2z +1) = z(z$

$+1)^2$. Отсюда делаем вывод, что $z_2 = -1$ является корнем кратности два для многочлена $P_3(z) = z^3+2z^2+z$.

Следствие. Многочлен $P_n(z)$ имеет n комплексных корней с учетом их кратности, т.е.

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_s)^{n_s},$$

где $z_1, z_2, z_3, \dots, z_s$ - различные корни $P_n(z)$, а $n_1, n_2, \dots, n_s$ - их кратности, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$.

Многочлен с действительными коэффициентами. Разложение его на линейные и квадратные множители.

Рассмотрим многочлен n – й степени

$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, где $a_k \in R$, $k = 0,1,2,\dots,n$; $z \in C$.

Для такого многочлена справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3. Если многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами, то

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)},$$

т.е. если $P_n(z) = A + iB$, $A,B \in R$, то $P_n(\vec{z}) = A - iB$.

Для комплексных чисел справедливы следующие равенства

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}, \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2};$$

(доказываются непосредственной проверкой). Для действительных чисел $\overline{a_k} = a_k$. Следовательно,

$$P_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P_n(z)}$$

$P_n(z) = A + iB$, $A,B \in R$, то $P_n(\bar{z}) = A - iB$.

Теорема 4. Если многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z_0 = a + i\,b$, то он имеет и сопряженный корень $\overline{z_0} = a - ib$. Пусть $z_0 = a + i\,b$ - корень многочлена $P_n(z)$. Тогда $P_n(z_0) = A + i\,B = 0$; $A, B \in R$. Комплексное число равно нулю, если равны нулю его действительная и мнимые части, $A = 0$, $B = 0$.

Вычислим

$$P_n(\bar{z}_0), \bar{z}_0 = a - ib. \quad P_n(\bar{z}_0) = A - iB$$

Имеем , учитывая, что $A = 0$, $B = 0$, $P_n(\overline{z_0}) = 0$, $\overline{z_0}$ корень многочлена $P_n(z)$. Из теоремы 4 следует, что если многочлен с действительными коэффициентами $P_n(z)$ имеет комплексные корни, то они входят в его разложение попарно сопряженными.

Рассмотрим произведение линейных множителей для попарно сопряженных

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0), \text{ где } z_0 = a + ib$$

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - ib)(z - a + ib) = ((z - a) - ib)((z - a) + ib) =$$

$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2.$$

Обозначим $a^2 + b^2 = q$, $-2a = p$, тогда $(z - a - ib)(z - a + ib) = z^2 + pz + q$, т.е. получили квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Если число $z_0 = a + i\,b$ является корнем кратности k многочлена $P_n[z]$ с действительными коэффициентами, то $\overline{z_0} = a - ib$ является многочленом той же кратности. Из всего сказанного следует, что многочлен с действительными коэффициентами $P_n(z)$ разложим на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности :

$$P_n(z) = a_n(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2}\dots(z-a_s)^{k_s}(z^2+p_1z+q_1)\dots(z^2+p_lz+q_l),$$

$$k_1+k_2+\dots+k_s+2m_1+\dots2m_l = n$$

Пример2. Разложить на множители следующие многочлены:

1) $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Найдем подбором один корень среди делителей 6. Это $x=1$. Остальные два можно найти, решая квадратное уравнение $x^2 +5x + 6=0$, левая часть которого получается после деления многочлена $P_3(x) = x^3-6x^2 +11x- 6$ на x - l. Таким образом получаем еще два корня $x_2=2$, $x_3=3$. Тогда получим воспользовавшись формулами сокращенного умножения

$$P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

2) $P_4(x) = x^4 - 1.$

$$P_4(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Числовая последовательность и ее предел.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить тождественные преобразования данного выражения, как говорят, раскрывать неопределенность.

Неопределенности бывают нескольких видов: $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{\infty-\infty\}, \{0\cdot\infty\}, \{1^\infty\}, \{0^0\}, \{\infty^0\}, \{0^\infty\}$. В последующих заданиях рассмотрим основные приемы, которыми обычно пользуются при таких преобразованиях для вычисления заданного предела. Функция $f(x)$ называется функцией натурального аргумента, если множество значений x, для которых она определена, является множеством всех натуральных чисел: 1,2,3,..n. Например, $f(n)=1+2+\ldots+n=(n+1)n/2$ - сумма n первых членов арифметической прогрессии.

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, по которому общий член a_n последовательности задается как функция натурального аргумента, т.е. $f(n)= a_n$ (индекс n обозначает номер переменной величины a_n , т.е. n –го члена последовательности). Число A называется пределом последовательности a_n **,** если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , зависящий от ε , что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. ,или $a_n \to A$ при $n \to \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N$: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Числовая последовательность не может иметь более одного предела. Последовательность $\{a_n\}$, имеющая предел, называется сходящейся**.** В противном случае $\{a_n\}$ будет расходящейся.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}$.

Решение. Выносим за скобки n в набольшей степени, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{1/n-1/n^2}-\sqrt{1+1/n^2}}{n\sqrt[3]{3+3/n^3}+(n^{1,25})\sqrt[4]{1+1/n^5}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{0-0}-\sqrt{1+0}}{n^{0,25}(0\cdot\sqrt[3]{3+0}+\sqrt[4]{1+0}}==\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^{0,25}}=0$$

Число е и его применение.

Числом e называют предел

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e \text{ или } \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e, \text{ где } =2,718.$$

Число e бывает полезным при раскрытии неопределенности вида 1^{∞}. Приведенную выше форму называют вторым замечательным пределом. Заметим, что при существовании $\lim_{n\to\infty} f(n)$ имеет место формула $\lim_{n\to\infty} e^{f(n)}=e^{\lim_{n\to\infty} f(n)}$.

Пример 2. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

Решение. Здесь основание степени $\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)\to\infty$ при $n\to\infty$, а показатель степени $(2n-n)^3\to\infty$. Таким образом, имеет место неопределенность вида $\{1^{-\infty}\}$.

Разделив числитель и знаменатель на n^3, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n^3)^{2n}(1+1/n^3)^{-n^3}}{(1-1/n^3)^{2n}(1-1/n^3)^{-n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n^3)^{\frac{2n^3}{n^2}}(1+1/n^3)^{-n^3}}{(1-1/n^3)^{\frac{-n^3}{-n^2}}(1-1/n^3)^{-n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty}2/n^2}\,e^{-1}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-2/n^2)}\,e^{1}} = e^{-2}$$

ибо $(1+1/n^3)^{-n^3} \to e^{-1}, (1-1/n^3)^{-n^3} \to e$.

Ответ: e^{-2}.

13. ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Основные понятия

Действительными числами называются рациональные и иррациональные числа. Множество всех действительных чисел обозначается буквой R. Действительное число обозначается точкой на числовой прямой.

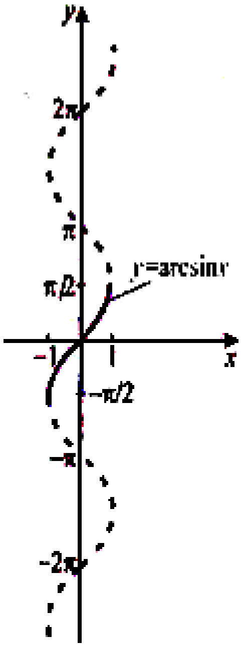


Рис. 13.1

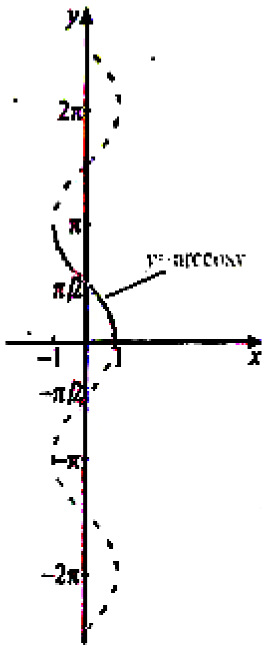


Рис. 13.2

Пусть даны два непустых множества *X и Y*. Если каждому элементу *x* из множества *X* по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент *y* из *Y*, то говорят, что на множестве *X* задана *функция* (или *отображение)* со множеством значений *Y*. Это можно записать так: $x \in X$, $X \xrightarrow{f} Y$ или $f\colon X \to Y$, где множество *X* называется *областью определения* функции, а множество *Y*, состоящее из всех чисел вида $y = f(x)$ -множеством значений функции. Если *y* является функцией от x, то пишут так же $y = f(x)$. Буква *f* характеризует то правило, по которому получается значение ***y***, соответствующее заданному аргументу x. Область определения функции *f* обозначается через *D(f)*, а множество значений - через *E(f)*. Область определения функции в простейших случаях представляет собой: *интервал* (*a, b*), т.е. совокупность значений *X*, удовлетворяющих условию a<x<b; отрезок [a, b], т.е. совокупность значений *X*, удовлетворяющих условию a<x<b, полуинтервал (a, b] (т.е. a<x<b*)* или [a, b) (т.е. a<x<b); бесконечный интервал (a,+∞) или (-∞, b*)* или (-∞, +∞); совокупность нескольких интервалов или отрезков.

Основными элементарными функции:

1) *степенная* $y = x^a (a \in R)$;

2) *показательная* $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

3) *логарифмическая* $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

4) *тригонометрические* $y=\sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y= ctgx$;

5) *обратные тригонометрические функции:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$. *Они являются обратными для основных тригонометрических функций, то их графики симметричны относительно прямой* $y=x$ Х *графикам функций* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$. *Обратные тригонометрические функции являются многозначными и обозначаются* $Arcsinx$, $Arccosx$, $Arctgx$, $Arcctgx$.

Однозначная функция $y = \arcsin x$ (рис. 13.1) определена на отрезке $x \in [-1,1]$ и имеет область значений $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Функция монотонно возрастает и является нечетной. Однозначная функция $y = \arccos x$ (рис. 13.2) определена на отрезке $x \in [-1,1]$ и имеет область значений $y \in [0, \pi]$. Функция монотонно убывает.

Однозначная функция $y = arctgx$ (рис. 13.3) определена на всей числовой оси и имеет область значений $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Функция монотонно возрастает и является нечетной. Однозначная функция $y = arcctgx$ определена на всей числовой оси и имеет область значений $y \in (0, \pi)$. Функция монотонно убывает. Графики соответствующих многозначных функций изображены на рисунках штриховыми линиями. Функции, которые можно получить при помощи конечного числа арифметических операций над основными элементарными функциями, а также их суперпозицией, называются *элементарными.* В множестве элементарных функций выделяются следующие классы.

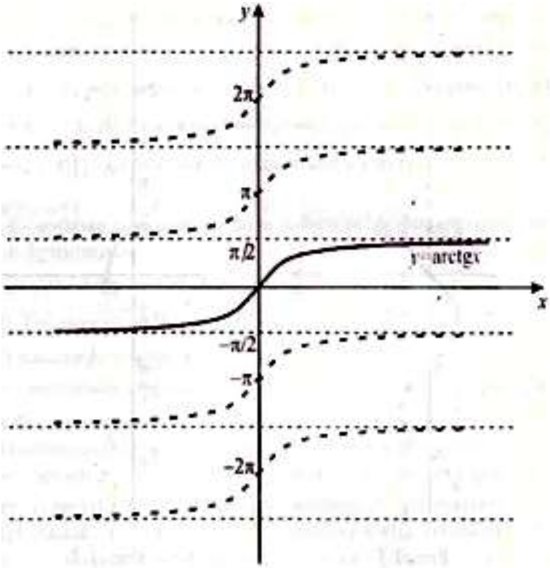


Рис. 13.3

1. *Многочлены (полиномы)* - функции вида
$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. Если $a_n \neq 0$, то целое неотрицательное число n называется *степенью многочлена* P(x). Функция, тождественно равная нулю, является в силу данного определения многочленом, ей не приписывается никакой степени. Многочлены определены на всей числовой оси.

2. *Рациональные функции* - функции, представимые в виде $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и $Q(x)$ - многочлены ($Q(x)$ - ненулевой многочлен). Функция f(x) определена во всех точках чис-

ловой оси, кроме тех точек, где знаменатель *Q(x)*обращается в ноль.

3. *Иррациональные функции*. т.е. такие функции, не являющиеся рациональными, которые могут быть заданы композицией конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Например, функция $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x-3}}$– иррациональная.

4. *Трансцендентные функции* - элементарные функции, не являющиеся рациональными или иррациональными. Например, функция f (x) =x sinx - $\log_2(2x+3)$ - трансцендентная.

Графиком функции y = f(x) называется множество точек плоскости xOy с координатами (x; f(x)), где x e D(f). Функция f(x), область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной (нечетной),* если для любого значения x∈D(f) выполняется f(-x) = f(x) (f(-x) = - f(x)). График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции - относительно начала координат.

Функция f(x) называется *периодической,* если существует постоянное положительное число T такое, что при x∈D(f) и(x + T)∈D(f)выполняется равенствоf(x + T) = f(x). *Основным периодом* функции называетсянаименьшее положительное число τ , обладающее указанным свойством.

Для построения графика функции без предварительного исследования необходимо знать общий вид и расположение графиков основных элементарных функций и уметь выполнять с этими графиками простейшие геометрические преобразования. Если известен график функции y = f(x), то с егопомощью можно легко получить графики следующих функций:

1) график функции $y = f(ax)(a > 0)$ получается *сжатием графика* $f(x)$ *вдоль оси* x в a раз (при $a > 1$) или *растяжением* в $\frac{1}{a}$ раз (при $a < 1$);

2) график функции $y = f(-x)$ - *зеркальным отображением относительно оси* y;

3) график функции $y = f(x + b)$ - *переносом параллельно оси* x на $|b|$ единиц вправо, если $b < 0$, и влево, если $b > 0$;

4) график функции $y = kf(x)$ (a:>0) - *растяжением вдоль оси* y *в* k раз (при $k > 1$) или *сжатием* в $\frac{1}{k}$ раз (при $k < 1$);

5) график функции $y = -f(x)$ - *зеркальным отображением относительно оси* x;

6) график функции $y = f(x) + l$ - *переносом параллельно оси* y на l единиц вверх, если $l > 0$, и вниз, если $l < 0$;

7) график функции $y = |f(x)|$ - *зеркальным отображением относительно оси* x участков графика $y = f(x)$, на которых ординаты отрицательны;

8) график функции $y = f|x-b|$ - *зеркальным отображением относительно прямой* $x = b$ участка графика функции y - $f\{x - b)$ при $x > b$.

Пример 1. *Найти область определения функции*

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}.$$

Решение. Первое слагаемое принимает действительныезначения при $1 - 2x \geq 0$, а второе –при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. Такимобразом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств: $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ (3x-1)/2 \geq -1 \\ (3x-1)/2 \leq 1. \end{cases}$ В результате получаем систему неравенств $\begin{cases} x \leq 1/2 \\ x \geq -1/3 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Область определения функции $x \epsilon \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Пример 2. Построить графики следующих функций:

а) $y = \log_2(x-3)$; б) $y = \log_2(4x-12)$;

в) $y = 2\log_2(x-3)$; г) $y = |\log_2(x-3)|$;

д) $y = \log_2|x-3|$.

Решение.

а) График функции $y = \log_2(x-3)$ получается из графика $y = \log_2 x$ сдвигом на три единицы вправо (рис. 13.4, *а).*

б)График функции $\log_2(4x-12) = \log_2(4(x-3)) = 2+\log_2(x-3)$ получается из предыдущего сжатием вдоль оси Ox в 4 раза относительно вертикальной прямой x = 3 или сдвигом на две единицы вверх (рис. 13.4, *б).*

в) График функции $y = 2\log_2(x-3)$ получается из графика $y = \log_2(x-3)$ растяжением вдоль оси *Oy* в два раза (рис. 13.4, *в).*

г)При построении графика функции $y=|\log_2(x-3)|$участок кривой $y=\log_2(x-3)$, расположенный ниже оси Ox,отображается симметрично относительно этой оси (рис.13,4 *г*).

д) График функции j> = $\log_2|x-3|$ составляют две кривые: j = $\log_2(x-3)$ и симметричная ей относительно прямой x = 3 кривая j = $\log_2(3-x)$ (рис. 13.4, *д).*

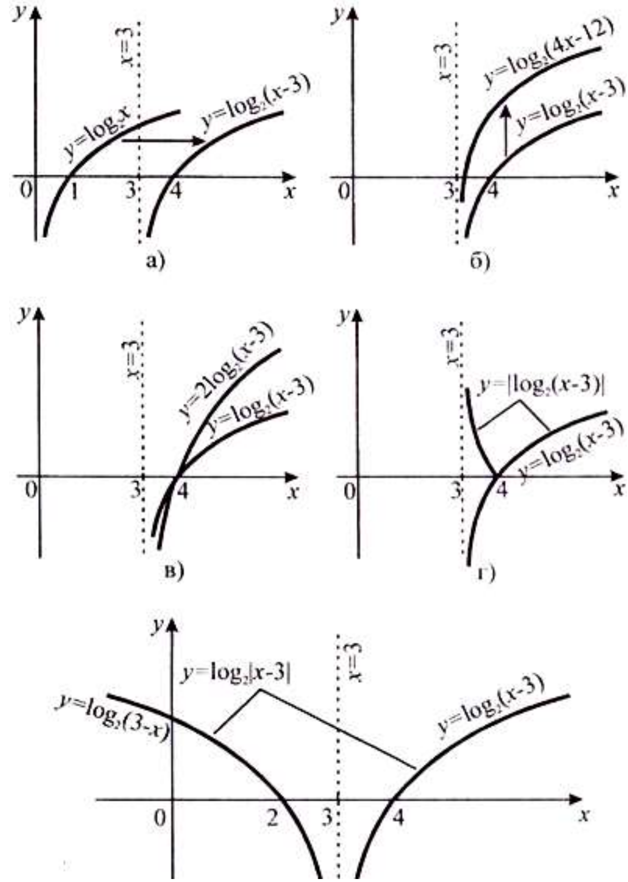


Рис.13.4

Полярная система координат.
Полярные уравнения кривых второго порядка

<u>*Полярная система координат.*</u>

Возьмем на плоскости любую точку O (полюс) и луч (полярную ось OX), исходящий из точки O. Тогда положение точки M на плоскости в полярной системе координат (рис. 24) определяется ее расстоянием $|OM| = \rho$ от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью OX. Полярный угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против хода часовой стрелки. Итак, числа ρ и φ – полярные координаты точки $M(\rho, \varphi)$. Очевидно, что $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ для всех точек плоскости, и этой точке M отвечает бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho; \varphi + 2k\pi)$ и $(-\rho; \varphi + (2k+1)\pi)$, где $k \in z$.

Связь полярных и прямоугольных координат на плоскости. Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось OX направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и φ связаны следующими формулами:

$$\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix}; \qquad \begin{matrix} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{matrix}$$

Например, полярные координаты точки $M(2; -2)$, где $x = 2$, $y = -2$, будут равны $\rho = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{2} = -1$. Значит, либо $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, либо $\varphi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in z.$ Так как точка M лежит в четвертой четверти, то лишь первое значение угла φ правильно; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ – главное значение угла. Итак, $M\left(2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Полярные уравнения кривых второго порядка.

Уравнение *окружности* в полярных координатах, если центр ее лежит на полярной оси OX, а сама окружность проходит через полюс, имеет вид $\rho = 2R\cos\varphi$, где R – радиус окружности.

<u>Пример 1.</u> Определить, какую кривую представляет уравнение $\rho = 2a\sin\varphi$.

<u>Решение.</u> Переходя к прямоугольной системе, находим:

$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, т. е. $x^2+y^2-2ay=0$ или $x^2+\left(y-a\right)^2=a^2$. Полученное уравнение представляет окружность радиуса a, проходящую через полюс O и касающейся полярной оси OX. Центр ее в точке O и касающейся полярной оси OX. Центр ее в точке $O\left(o;a\right)$.

Уравнение *эллипса, гиперболы* и *параболы* в полярных координатах, если полюс помещен в фокусе F соответствующей кривой, а полярная ось перпендикулярна директрисе и направлена от нее, имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \qquad (*)$$

где p – фокальный параметр, ε – эксцентриситет кривой.

<u>Пример 2.</u> Определить вид кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$\rho = \frac{5}{3-3\cos\varphi}.$$

<u>Решение.</u> Записав данное уравнение в виде

$$\rho = \frac{5/3}{1-\cos\varphi},$$

получим $\rho = \dfrac{5}{3}$, $\varepsilon = 1$. Значит, данная кривая – парабола. Ее каноническое уравнение $y^2 = 2px$ имеет вид $y^2 = \dfrac{10}{3}x$.

Замечание. Если рассматривать только положительные значения ρ, то в случае гиперболы $(\varepsilon > 1)$ полярное уравнение представляет лишь одну ветвь –ту, внутри которой лежит фокус. При этом для φ должно выполняться неравенство $1-\varepsilon\cos\varphi > 0$. Если же рассматривать и отрицательные значения ρ, то φ может иметь любое значение, и при $1-\varepsilon\cos\varphi < 0$ получаем вторую ветвь гиперболы.

3. *Связь между фокальным параметром* p *и параметрами кривой в канонических уравнениях* декартовой прямоугольной системе координат:

а) у *параболы*, заданной уравнением $y^2 = 2px$ и полярным уравнением ($*$), параметр p один и тот же;

б) у *эллипса*, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, и у *гиперболы*, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, и их полярным уравнением ($*$) значение параметра $p=\frac{b^2}{a}$.

Пример 3. Уравнение $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ записать в полярных координатах.

Решение. Имеем $a=4,\ b=3$. Следовательно, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$. Тогда по формуле $p=\frac{b^2}{a}$ находим $p=\frac{9}{4}$; далее по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$ находим $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Значит

$$\rho=\frac{9/4}{1-\frac{\sqrt{7}}{4}\cos\varphi} \text{ или } \rho=\frac{9}{4-\sqrt{7}\cos\varphi}.$$

Уравнение линии.

1. Уравнение $F(x, y) = 0$ или в частном случае $y = f(x)$ называется *уравнением линии*, расположенной на координатной плоскости XOY, если этому уравнению удовлетворяют координаты x, y любой точки данной линии.

2. Уравнение линии в *полярных координатах* задается уравнением $F(\rho, \varphi) = 0$ или $\rho = f(\varphi)$.

Чтобы построить кривую, заданной полярным уравнением, надо построить таблицу соответствующих значений φ, ρ.

3. Уравнение линии может быть задано *параметрически* т.е. в виде системы параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ где } t - \text{параметр.}$$

Исключение параметра t из системы (если оно возможно) приводит к обычному уравнению линии вида $F(x, y) = 0$. Например, а) уравнения $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ задают окружность в параметрическом виде. Исключив параметр t из этих уравнений, получим уравнение окружности в прямоугольных координатах

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

б) уравнение кривой, называемой лемнискатой, заданной в прямоугольных координатах $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, удобно рассматривать в полярных координатах, т.е. в виде $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

<u>*Предел функции*</u>

<u>*Определение.*</u> Число A называется пределом функции *f(x)* при $x \to a$ (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon > 0$ (хотя бы как угодно малого) существует положительное число $\delta > 0$, вообще го-

воря, зависящее от ε , т.е. $\delta(\varepsilon)$, такое, что при всех значениях $x \neq a$ и удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $\forall x \in D(f): 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$. Аналогично число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число *M>0*, зависящее от ε, такое, что при $|x| > M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Правила предельного перехода. Основные теоремы.

Если функции *f(x)* и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то

а) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$

б) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$

в) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot /(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$,при $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$.

г) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n$, где n целое число, $n>0$;

д) $\lim\limits_{x \to a} (c\, f(x)) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$,где *c=const* , причем $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

е) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} (f(x))^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

Предел дробно-рациональной функции.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 3} \right)$

Решение. Здесь отыскивается предел отношения двух многочленов дробно-рациональной функции**.** Подстановка в данную функцию неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Следовательно, прежде чем преобразовать, а именно, числитель и знаменатель дроби разделить на *(x-3)*, которые, согласно теореме Безу, делятся без остатка нацело (т.к. обращаются в ноль при *x=3*), т.е. можно представить: $x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)$ и $x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x+9)$

Имеем:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x^2-x-6}{(x-3)(x^2-2x-3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\right)=1{,}25$$

Полученные после деления многочлены при $x\to 3$ будут бесконечно малыми. Поэтому снова каждый из них делим на бином *(x-3)* или раскладываем на множители квадратные трехчлены, найдя их корни.

Ответ: 5/4

Таким образом, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и знаменателе выделить множитель, равный нулю при предельном значении, и сократить на него.

При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ надо числитель и знаменатель разделить на старшую входящую в них степень, а затем перейти к пределу.

<u>Предел иррационального выражения</u>.

<u>Пример 2.</u> Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

<u>Решение.</u> Имеем также неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}. = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{8\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{x-3}}\cdot =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{8\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{x-3}}\cdot = \frac{1}{8\cdot\sqrt[3]{6}}\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{\cdot\sqrt[3]{x-3}}\cdot = 0.$$

Ответ: 0.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, в выражении, в котором числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом попытаться избавиться от иррациональности.

14. ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции, при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов ∞, -∞.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x)=A,\ A\neq 0$. Если же число $A=0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$. Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/(\beta(x))^p=A$ и $A\neq 0$, то бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными**,** если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x)=1$. В этом случае пишут: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

<u>Теорема</u> (о замене бесконечно малых функций им эквивалентными). Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменяется, если каждую из них или какую-либо одну заменить им эквивалентными функциями.

Если при некотором предельном переходе функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то $Sin(\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $\mathrm{tg}(\alpha(x))\sim\alpha(x)$; $arcsin(\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $arc\mathrm{tg}(\alpha(x))\sim\alpha(x)$; $ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $ln(1+k\,\alpha(x))\sim k\,\alpha(x)$, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$, $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\,ln\,a$

<u>Первый замечательный предел</u>

Во многих случаях используется первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)/x=1$ (x- длина дуг или угол, выраженный в радианах) и предполагается известным, что $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin a$. Иногда при отыскании предела полезно сделать замену переменной с тем, чтобы упростить вычисление предела и использовать известные пределы. Если пол знаком предела делается замена переменной, то все величины, находящиеся под знаком, должны быть выражены через эту новую переменную. Из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, надо определить предельное значение новой переменной. Например, при нахождении предела $\lim\limits_{x\to 0} tg(kx)/x$ обозначаем $t=kx$, где при $x\to 0$ новая переменная $t\to 0$, $x=t/k$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} tg(kx)/x = \left(\frac{0}{0}\right) = k\lim_{t\to 0} tg(t)/t = k\lim_{t\to 0}\sin(t)/(t\cos(t)) = k$$

(т.к.cos *(0)=1)*. Полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin(kx)/x = \left(\frac{0}{0}\right) = k$

, где k -постоянная величина. Например, при $x\to 0$ функция *sin(x)* и *tg(x)* эквивалентные бесконечно малые, т.е. *sin(x)~tg(x)*; т.к. $\lim\limits_{x\to 0} tg(x)/\sin(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1/\cos(x) = 1$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2}$

Решение. Применим сначала формулу тригонометрии $1-\cos(t)=2\sin^2(t/2)$. У нас $1-\cos(kx)=2\sin^2(kx/2)$, при $x\to 0$; $\sin^2(mx/2)\sim(mx/2)^2$. По теореме "замены эквивалентной" получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(kx/2)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2(kx/2)^2}{x^2} = \frac{k^2}{2}$. Заметим, что можно было воспользоваться первым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(kx/2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(k/2)^2\sin^2(kx/2)}{x^2(k/2)^2} = 2k^2/4 = k^2/2.$$ Ответ: $k^2/2$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$

Решение. По формуле тригонометрии *sin(5(x+π))=sin(5x+5π)=- sin(5x).*

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(5x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x}{3x}=-\frac{5}{3}.$$

Поскольку при $x\to 0$, $\sin(5x)\sim 5x$, $e^{3x}-1\sim 3x$

Ответ:-5/3.

Вычисление предела показательно-степенной функции

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=C$

Следует иметь ввиду, что:

1) если существуют конечные пределы

$\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$, то $C=A^B$, т.е.

имеет место формула $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=(\lim\limits_{x\to a}u(x))^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$

Заметим, что предельное значение a может обозначать и число, и один из символов $\infty,+\infty,-\infty$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$ затруднений обычно не вызывает. В том случае полезны иногда формулы:

$$\lim_{x\to+\infty}x^k=\begin{cases}0,\cdot если\cdot 0<k<1\\ +\infty,\cdot если\cdot k>1\end{cases};\ \lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}\infty,\cdot если\cdot 0<k<1\\ 0,\cdot если\cdot k>1\end{cases}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a} u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\{1^\infty\}$, то полагают $u(x)=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ и, следовательно,

$$C=\lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\right\}^{\alpha(x)\cdot v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot v(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}$$

Проиллюстрируем общий прием вычисления пределов на следующем примере (раскрытие неопределенности вида $\{1^\infty\}$).

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{5x}$

Решение. Здесь основание степени $u(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\to 1$ при $x\to\infty$, а показатель степени $5x\to\infty$, т.е. имеется неопределенность вида 1^∞.

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right))^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)})^{5x\left(\frac{-2}{x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x}{x+1}}=e^{10}$$

(Получили в качестве $\alpha(x)=\dfrac{-2}{x+1}\to 0$ при $x\to\infty$)

Замечание 1. При вычислении пределов выражений вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$, где $u(x)\to 1, v(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, удобно иногда пользоваться формулой

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\cdot\ln(u(x))}.$$

<u>*Замечание 2*</u>**.** При вычислении пределов полезно знать, что

а) если существует и положителен $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, то

$\lim\limits_{x\to c}(\log_a f(x)) = \log_a(\lim\limits_{x\to c} f(x))$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x)/x = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1)/x = \ln a$.

15. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Если x и x_1 – значения аргумента x, а $y=f(x)$ и $y=f(x_1)$ - соответственно значения функции $y=f(x)$, $\Delta x = x_1 - x$ то называется приращением аргумента x на отрезке $[x; x_1]$, а $\Delta y = y_1 - y$ (или $\Delta y = y_1 - y = f(x+\Delta x) - f(x)$) называется приращением функции на том же отрезке $[x; x_1]$, (см. рис. 15.1), где $\Delta x = MA, \Delta y = AN, dy = TA$).

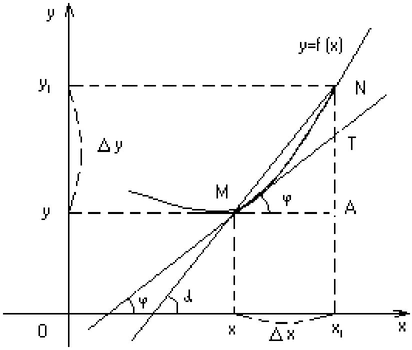


Рис.15.1

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$ называется средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ на отрезке $[x, x+\Delta x]$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, если этот предел существует.

Геометрический смысл производной: $y'=tg\varphi$ - угловой коэффициент касательной MT к графику функции $y=f(x)$ в точке x (рис. 15.1).

Физический смысл производной $y'=f'(x_0)$ - мгновенная скорость, т.е. скорость изменения функции в данный момент x_0. Таким образом, быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается с помощью производной. Функция, имеющая конечную производную, называется дифференцируемой. Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Основные правила дифференцирования.

Если $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ - функции, имеющие производные, c- постоянная величина, то:

1) $(c)'=0$ (c=const); 2) $(x)'=1$; 3) $(cu)'=c(u)'$;

4) $(u\pm v)'=(u)'\pm(v)'$; 5) $(u\cdot v)'=(u)'v+(v)'u$;

6) $(u\cdot v)'=(u)'v+(v)'u$; 7) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{(u)'\cdot v-(v)'\cdot u}{v^2}$.

Производная сложной функции.
Таблица производных

Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то производная *сложной функции* $y=f[\varphi(x)]$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x: $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, или $y'_x=f'_u\cdot\varphi'_x$, или

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$. Это правило распространяется на из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Таблица производных основных элементарных функций.

Пусть $y = f[\varphi(u)]$, где $u = u(x)$. Тогда:

1) $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ (n - любое число);

2) $(\sqrt{x})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; 3) $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'\,(a>0, a\neq 1)$;

4) $(e^u)' = e^u\cdot u'$; 5) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u\cdot\ln a}$;

6) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; 7) $(\sin u)' = (\cos u)\cdot u'$;

8) $(\cos u)' = -(\sin u)\cdot u'$; 9) $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2(u)}$;

10) $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2(u)}$; 11) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,($|u|<1$);

12) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, ($|u|<1$); 13) $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

14) $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$; 15) $(shu)' = chu\cdot u'$;

16) $(chu)' = shu\cdot u'$; 17) $(thu)' = \frac{u'}{ch^2(u)}$; 18) $(cthu)' = \frac{u'}{sh^2(u)}$.

Замечание. Гиперболические функции определены так:

1) $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус

2) $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ -гиперболический косинус

3) $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ -гиперболический тангенс

4) $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ -гиперболический котангенс

Для гиперболический функций имеют место формулы, аналогичные фомулам для тригонометрических функций.

Основные формулы:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1; ch^2 x + sh^2 x = ch(2x);$$

$$sh(2x) = 2 \cdot shx \cdot chx; thx = \frac{shx}{chx}, \ cthx = \frac{chx}{shx}; \text{ и т.д.}$$

Пример 1. Найти y', если $y' = sin^3(x/4)$.

Решение. Это сложная функция промежуточным первым аргументом $u= sin(x/4)$ и $t=x/4$. Данную функцию можно представить в виде: $y=u^3$, где $u=sin(t)$; $t=x/4$.

Дифференцируя, получаем:

$$y'_x = (u^3)'_u \cdot u'_t \cdot t'_x = 3u^2 \cdot u'_t \cdot t'_x = 3u^2 \cdot u'_t \cdot t'_x =$$

$$3(\sin^2(x/4) \cdot (\sin t)'_t \cdot (x/4)'_x = 3 \cdot \sin^2(x/4) \cdot \cos(x/4) \cdot (1/4).$$

Уравнение касательной и нормали к плоской кривой

Пусть $y = f(x)$- уравнение плоской кривой, $M_0(x_0, y_0)$- точка, лежащая на этой кривой, так что $y_0 = f(x_0)$.

Уравнение касательной к данной кривой $y = f(x)$, проходящей через точку касания M_0 кривой, имеет вид:

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к данной кривой, проходящей через точку M_0. Иначе говоря, где $f'(x_0) = tg\varphi$, φ - угол между касательной к кривой , проведенный через точку M_0, и промежуточным направлением оси абсцисс .

Нормалью к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания. Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид: $y = y_0 - (1/f'(x_0)) \cdot (x - x_0)$.

Пример 2 . Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Найдем производную данной функции и ее значение при $x_0=1, y'=3x^2+2, y'(x_0)=y'(1)=3+2=5$. Угловой коэффициент касательной $k_1 = f'(x_0) = 5$. Вычислим значение функции при $x_0=1$: $y_0 = f(x_0) = 1 + 2 = 3$. Следовательно, $M_0(1{,}3)$-точка касания и уравнение касательной будет $y=3+5(x-1)$, или $5x-y-2=0$; а уравнение нормали $y=3-(1/5)(x--1)$, или $x+5y-16=0$, где угловой коэффициент нормали $k_2=-1/k_1$, так как условием перпендикулярности двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2\,x+b_2$ является соотношение:$k_1\;k_2=-1$ Ответ: $5x-y-2=0, x+5y-16=0$.

16. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Дифференциалом (первого порядка) функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x. Дифференциал функции равен произведению ее производной y' на дифференциал независимой переменной $dy = y' \cdot dx$. Отсюда $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то дифференциал dy функции $y = f(x)$ и приращение Δy функции приближенно равны между собой $\Delta y \approx dy$, ибо по определению $\Delta y = y' \cdot dx + \varepsilon \Delta x$ или $\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Иными словами, разность между приращением Δy и дифференциалом dy функции есть бесконечно малая высшего порядка. Поэтому при $f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta н}{dy} = 1$, т.е. приращение функции и ее дифференциал – эквивалентные бесконечно малые. Следовательно, $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$, откуда имеем $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$. Последняя формула часто используется в приближенных вычислениях, т.к. позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенно значение функции в точке $x + \Delta x$.

Пример 1 . Вычислить приближенно arctg1,02, заменяя приращение функции дифференциалом.

Решение. Формула $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ применительно к данной функции *f(x)=arctg x* перепишем в виде: $arctg(x+\Delta x) \approx arctg x + \frac{1}{1+x^2} \cdot \Delta x$, где $f'(x) = 1/(1+x^2)$. У нас $x + \Delta x = 1{,}02$;$x=1$; $\Delta x = 0{,}02$. Подставляя эти значения, получим $arctg 1{,}02 \approx arctg 1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0{,}02 = \pi/4 + 0{,}01 \approx 0{,}795$.

Пример2. Найти дифференциал dy. $y = x\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

Решение. Имеем $dy = y'(x_0) \cdot dx = \left(x\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)' dx.$

Находим $y' = \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$

Следовательно, $dy = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx.$ Ответ: $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ·

Логарифмическая производная

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)' = y'/y = f'(x)/f(x)$. Применение предварительного логарифмирования по основанию e функции иногда упрощает процесс нахождения ее производной. Сначала надо прологарифмировать данную функцию: $\ln y = \ln x$, затем взять производные от обеих частей равенства: $(\ln y)' = (\ln x)'$ и найти y' из полученного уравнения. Пусть требуется найти производную от степенно-показательной функции $y = u^v$, где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ - функции аргумента x. Логарифмируя обе части исходного равенства, получим $\ln y = v \ln u$ (по свойству логарифма: $\ln(x^m) = m \ln x$.). Дифференцируя последнее равенство по x, имеем $y'/y = v' \cdot \ln u + v \cdot u'/u$. Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, окончательно получаем $y' = y(v' \cdot \ln u + v \cdot u'/u)$, или после очевидных преобразований: $y' = u^v v' \cdot \ln u + v \cdot u' u^{v-1}$

Пример 3. Найти y'. если $y = x^{\cos x}$.

Решение. Логарифмируя, получим: $\ln y = \cos x \ln x$. Дифференцируем обе части получим равенства по x: $(\ln y)' = (\cos x \ln x)'$, или $y'/y = -\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x$. Отсюда $y' = y \cdot (-\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x)$ или $y' = x^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x)$.

Замечание. Во многих случаях оказывается выгодным, прежде чем дифференцировать заданную функцию, взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную от заданной функции. Это так называемый прием *логарифмического дифференцирования.* К этому приему удобно прибегать при дифференцировании: а) Произведения нескольких функций; б) дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения; в) выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда при дифференцировании функции вида $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$, т.е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции от x .

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y аргумента x задана при помощи параметрических уравнений: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t параметр, причем каждому значению соответствует только по одному значению x и y . В механике эти уравнения называются уравнениями движения точки, т.е. линия которую описывает на плоскости движущаяся точка. Например, функция, заданная параметрически: $\begin{cases} x = 2t - 4t^2 \\ y = t - 2t^2 \end{cases}$. Представляет собой на плоскости прямую, ибо исключив параметр t из этих уравнений, получим $y=x/2$. Однако, практически исключение параметра t из уравнений часто задача трудная, порой просто неразрешимая. Если функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$- дифференцируемые и $\psi(t) \neq 0$, то производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле: $y_x^/ = \dfrac{y_t^/}{x_t^/}$. Или в других обозначениях $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\psi_{t(t)}^/}{\varphi_t^/(t)} = g(t)$.

Вторую производную от y по x находим, дифференцируя последнее соотношение

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(g(t))}{\varphi'_t(t)}=\frac{d(g(t))}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'_t}{x'_t}$$

Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически.

<u>Пример 4 .</u> $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y=\sqrt{1+t^2}-\ln(1+\sqrt{1+t^2})+\ln t \end{cases}$

<u>Решение.</u> Находим y'_t и x'_t и полученные выражения подставляем в формулу:

$$x'_t=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$y'_t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{(1+\sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

Получаем $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{t}$ Ответ**:** *1/t*.

<u>Пример 5 .</u> Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке при $t=0$, если $\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$

<u>Решение.</u> Последовательно находим: $x_0=2e^0=2$; $y_0=e^{-0}=1$,

$$x'_t=2e^t,\ y'_t=-e^{-t},\ y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-e^{-t}}{2e^t}=-0{,}5e^{-2t},$$

$$x'_t(0)=2e^0=2,\ y'_t(0)=-e^0=-1,\ y'_x(t=0)=-0{,}5,\ M_0(2,1).$$

Как известно, если кривая задана в явном виде $y=f(x)$, то уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0,y_0)$. имеют соответственно вид: $y=y_0+y'(x_0)\cdot(x-x_0)$, $y=y_0-(1/y'(x_0))\cdot(x-x_0)$.

где $y_0=f(x_0)$, $(y_0)^{/}=(f(x_0))^{/}$. Поэтому, напишем уравнения касательной и нормали к исходной кривой в точке касания $M_0(2,1)$ при $t=0$ соответственно: $y=1-0{,}5(x-2)$, или $y=-0{,}5x+2$, или $x+2y-4=0$ - уравнения касательной; $y=1+(1/0{,}5)(x-2)$, или $y=2x-3$, или $2x-y-3=0$ - уравнения нормали.

Производные высших порядков. Формула Лейбница

Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y^{//}_{xx}=(y^{/}_{x})^{/}_{x}$ или $y^{//}_{xx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной**:** если $f'(x)$ истолковывается как скорость некоторого процесса, то $f''(x)$ характеризует ускорение того же самого процесса.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и других порядков:

$$y^{(3)}_{x^3}=f^{///}(x)=(y^{//}_{xx})^{/}_{x}=\frac{d^3y}{dx^3},\ y^{(4)}_{x^4}=f^{(4)}(x)=(y^{(3)}_{x^3})^{/}_{x}=\frac{d^4y}{dx^4},\ldots$$

Вообще, производной n-го порядка**,** или n-ой производной от функции называется производная от ее $(n-1)$-го порядка.

$y^{(n)}_{x^n}=f^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})^{/}_{x}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$. На практике, иногда удается найти закон, для n-ой производной. При нахождении производной n-го порядка от произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$ можно применять формулу Лейбница:

$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)}+\ldots+uv^{(n)}$.где биномиальные коэффициенты $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$, $C_n^0=C_n^n=1$, причем $C_n^1=C_n^{n-1}=n$; $C_n^2=C_n^{n-2}=\dfrac{n(n-1)}{2!}$ и т.д.

Пример 6. Найти $y^{(5)}$ для функции $y=x^6e^{3x}$.

Решение. Применяем формулу Лейбница, полагая $u=x^6$, $v=e^{3x}$, для случая $n=5$:

$$(uv)^{(5)}=u^{(5)}v+nu^{(4)}v'+\frac{5\cdot 4}{2!}u^{(3)}v^{(2)}+\ldots+uv^{(5)}$$

Находим пять производных от каждого из сомножителей :

$u'=6x^5$, $u''=30x^4$, $u^{(3)}=120x^3$, $u^{(4)}=360x^2$, $u^{(5)}=720x$,
$v'=3e^{3x}$, $v''=9e^{3x}$, $v^{(3)}=3^3e^{3x}$, $v^{(4)}=3^4e^{3x}$ $v^{(5)}=3^5e^{3x}$.

Подставляя эти производные в формулу Лейбница, получаем

$$y^{(5)}=(x^6e^{3x})^{(5)}=720xe^{3x}+5\cdot 360x^2\cdot 3e^{3x}+10\cdot 120x^3\cdot 9e^{3x}+$$
$$+10\cdot 30\cdot 27\cdot e^{3x}+5\cdot 6\cdot x^5\cdot 81e^{3x}+3^5x^6e^{3x}.$$

Правило Лопиталя

При раскрытие неопределенностей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ можно применять правило Лопиталя. Используя теоремы о дифференцируемых функциях (теорему Коши) можно пределы вычислять так: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, производные вычисляются до тех пор, пока не исчезнет неопределенность.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

\Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение. Это – неопределенность вида (∞^0). Положим $y=(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$ и прологарифмируем: $\ln y=\frac{2\ln \mathrm{tg}x}{1/\cos x}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \mathrm{tg}x}{\sec x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\mathrm{tg}^2 x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Таким образом $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}x)^{2\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$

Замечание. Теоремы о дифференцируемых функциях Ролля, Лагранжа, Коши студентам надо разобрать самостоятнльно.

Возрастание и убывание, локальный экстремум функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором интервале (рис.16.1), если для любых значений x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется неубывающей на этом интервале.

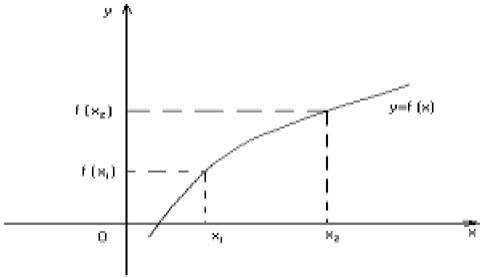


Рис. 16.1

Функция называется убывающей (рис.16.2) на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала и неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция называется невозрастающей на этом интервале.

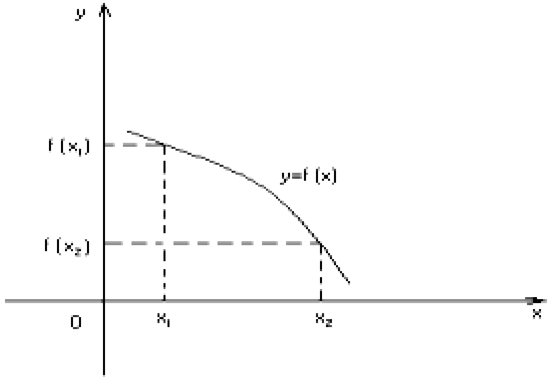


Рис. 16.2

Все выше названные функции называются <u>монотонными.</u>

<u>Достаточное условие возрастания (убывания) функции:</u>

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и ее производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то функция $y = f(x)$ <u>возрастает</u> <u>(убывает)</u> на этом отрезке $[a,b]$. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_1 <u>максимум</u> (рис.16.3), если значение функции $y_1 = f(x_1)$ в этой точке больше всех других ее значений во всех точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т.е. $y_{\max} = \max f(x) = f(x_1)$, если $f(x_{1)} > f(x)$ для всякой точки $x \neq x_1$ из некоторой окрестности точки x_1. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_2 <u>минимум</u> (рис.16.3), если значение функции $y_2 = f(x_2)$ в этой точке меньше всех других ее значений во всех точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т.е. $y_{\min} = \min f(x) = f(x_2)$, если $f(x_{1)} > f(x)$ для всякой точки $x \neq x_2$ из некоторой окрестности точки x_2.

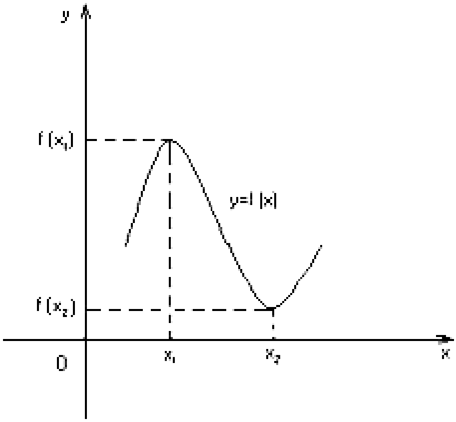


Рис. 16.3

Максимум или минимум функции называется экстремумом функции. Точки в которых достигается экстремум, называются точками экстремума (максимума или минимума).

Необходимое условие существования экстремума:

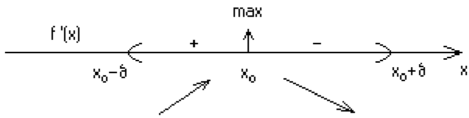
$f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует для $x \in D(f)$, т.е.

функция может иметь экстремум только в тех точках области определения, где выполняются эти условия. Такие точки называются критическими точками 1-го рода, т.е. точки, только подозрительные на экстремум.

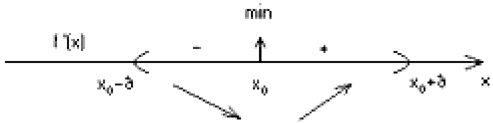
Достаточные условия существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $y = f(x)$:

***Первое правило*.** Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку x_0 , то точка x_0 является точкой экстремума, причем:

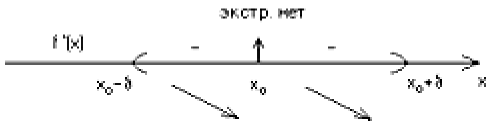
а) Функция имеет максимум в точке x_0 ,если для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, имеет место



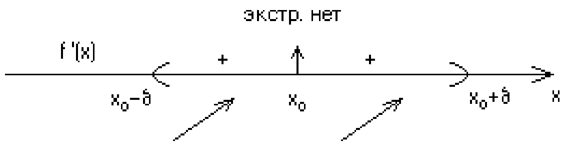
б) Функция имеет <u>минимум</u> в точке x_0 ,если для $\forall x$ из δ-окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место



Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то экстремум нет в этой точке:



или



<u>Второе правило</u>. Если в критической точке x_0 первая производная $f'(x_0) = 0$, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 будет точкой экстремума, причем:

а) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума;

б) если $f''(x_0) > 0$, то x_0- точка минимума.

Замечание. В более общем случае, когда первая из не равных нулю в точке x_0 производных функции $y = f(x)$ имеет порядок k: Если $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то если k -четное, то точка x_0 является точкой максимума при $f^{(k)}(x_0) < 0$ и точкой минимума при $f^{(k)}(x_0) > 0$; если же k -нечетное, то точка x_0 является точкой экстремума.

Пример 7.

Построить графики функций с помощью производной первого порядка. $y = 3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$

Решение.

1) $D(y) = (-\infty, \infty)$, т.е. $\forall x \in R$.

2) Функция общего вида, т. к.

$$y(-x) = 3\cdot\sqrt[3]{(-x+4)^2} - 2(-x) - 8 \neq \pm y(x).$$

3) Находим точки пересечения графика функции к осям координат: а) с осью OY, $x=0$: $y = 3\cdot\sqrt[3]{(0+4)^2} - 2\cdot 0 - 8 = 3\cdot\sqrt[3]{16} - 8$. точка $A(0{,}3\cdot\sqrt[3]{16} - 8)$, т.е. $y(0) \approx -0{,}5$. б) с осью OX, $y=0$: $0 = 3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$, $27\cdot(x+4)^2 = (2x+8)^3$, или $27\cdot(x+4)^2 - 2^3\cdot(x+4)^3 = 0$, откуда $(x+4)^2(8\cdot(x+4) - 27) = 0$, $x_1 = -4$ или $x_2 = -5/8$. Итак имеем точки $B_1(-4,0)$; $B_2(-5/8;0)$.

4) Находим интервалы знакопостоянства функции.

$y>0$,если $3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8 > 0$; решаем это неравенство:

$(x+4)^2(8\cdot(x+4) - 27) > 0$. Знак y:

Откуда $\begin{cases} -8x-5>0, x<-5/8. \\ x+4\neq 0 \end{cases}$. Значит, функция $y>0$ при $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-5/8)$ и $y<0$ при $x\in(-5/8,\infty)$.

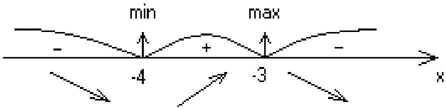
5) Находим критические точки, интервала возрастания и убывания функции, экстремум функции $y'=2\cdot\sqrt[3]{(x+4)^{-1}}-2=\dfrac{2(1-\sqrt[3]{x+4})}{\sqrt[3]{x+4}}$;

а) $y'(x)=0$, если $1-\sqrt[3]{x+4}=0$, т.е. $x=-3$.

б) y' не существует при $x=-4$.

Получим $x=-3$, $x=-4$ - критические точки 1-го рода.

Знак y':



Имеем $y_{\max}(-3)=1$; $y_{\min}(-4)=0$. Составим таблицу.

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-3)$	3	$(-3,\infty)$
y'	-	*не сущ.*	+		-
y	*убывает*	*0*	*возрастает*		*убывает*
		min		*max*	

График данной функции представлен на рис.16.4). Так как при $x=-4$, $y'(0)=\infty$, то минимум имеет характер точки заострения.

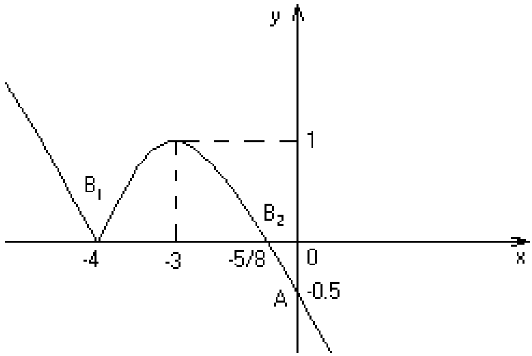


Рис. 16.4

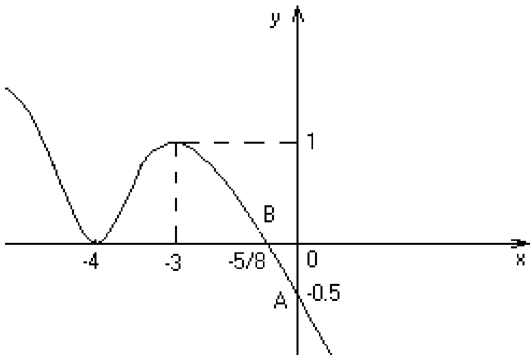
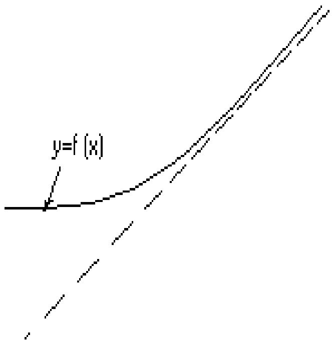


Рис. 16.5

На основании проведенного по первой производной исследования, можно было представить график рассматриваемой функции и таким, как на (рис. 16.5). Уточнение графика функции по второй производной позволит точнее изобразить участки убывания и возрастания функции, установить, что график не имеет точек перегиба и всюду обращен выпуклостью вверх.

Асимптоты

Если кривая $y = f(x)$ какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта бесконечная ветвь кривой может иметь асимптоту. Асимптотой кривой называется прямая, к которой кривая неограниченно приближается или с одной стороны (рис.16.6) или все время пересекая ее (рис.16.7)



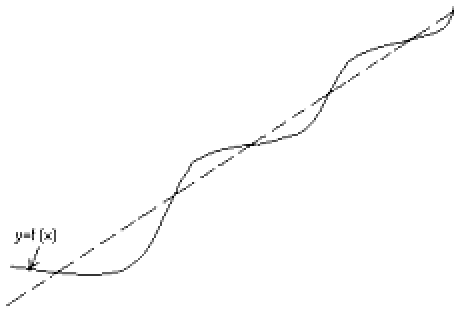


Рис. 16.6 Рис. 16.7

При неограниченном удалении точки *(x,y)* кривой от точки *O(0,0).* Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1. Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$,

то прямая $x=a$ является <u>вертикальной асимптотой</u>**.** Вертикальные асимптоты находят как точки разрыва 2-го рода функции.

2.Если существует конечный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является <u>горизонтальной (</u>правой или левой) <u>асимптотой.</u>

3.Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=b_1 \text{ или}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=b_2\text{, то прямая}$$

$y=k_1x+b_1$ есть <u>правая наклонная</u> асимптота кривой, а прямая $y=k_2x+b_2$ есть <u>левая наклонная</u> асимптоты. Заметим, что частным случаем наклонной асимптоты при $k_{1,2}=0$ и $b_{1,2}\neq\infty$ является горизонтальная асимптота. График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты (наклонной или горизонтальной).

Направление выпуклости кривой. Точки перегиба

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вверх (вогнутостью вниз**)** на интервале (a,b), если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной**,** проведенной в любой точке *M(x,f(x))* этой дуги (рис.16.9)

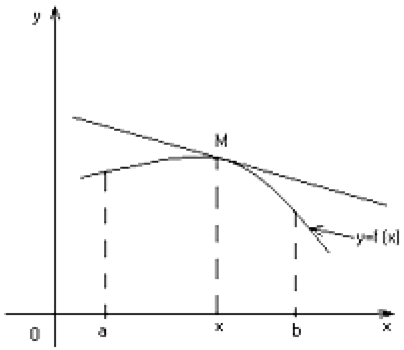


Рис. 16.9

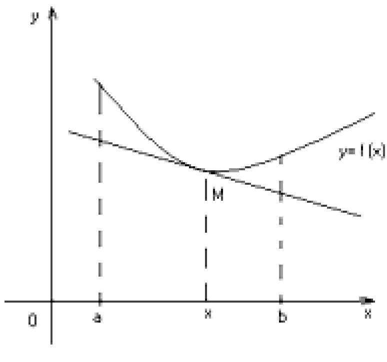


Рис. 16.10

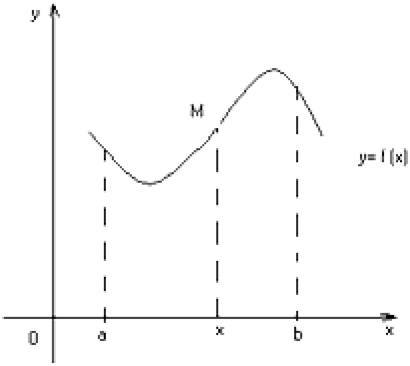


Рис. 16.11

Говорят, что кривая графика функции обращена выпуклостью вниз (вогнутостью вверх) на интервале (a,b), чем соответствующая дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке $M(x,f(x))$ этой дуги (рис.16,10).

Достаточное условие направления выпуклости кривой $y=f(x)$:

а) если $f''(x)<0$ внутри интервала (a,b), то дуга кривой выпукла вверх (обозначают $\cap$) на этом интервале.

б) если $f''(x)>0$ при $x\in(a,b)$, то дуга кривой выпукла вниз (обозначают $\cup$)на этом интервале.

Таким образом, для нахождения интервалов выпуклости вверх (вниз) дуги кривой, надо найти $f''(x)$ и решить неравенство: $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$).

Точкой перегиба непрерывной кривой $y=f(x)$ называется точка $M_0(x_0,f(x_0))$, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости (рис.16,11).

Для абсциссы x_0 точки перегиба графика $y=f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.

Точки, которых $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует, и при этом сама функция в точке $x=x_0$ определена, называются критическими точками 2-го рода.

Правило: Если вторая производная $f''(x)$ функции при переходе через критическую точку 2-го рода меняет знак, то точка $M_0(x_0,f(x_0))$, есть точка перегиба кривой графика функции. Это есть достаточное условие существования точки перегиба кривой.

Пример 8 . Найти интервалы выпуклости и точки перегиба кривой $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2+12}$.

Решение. $D(y)\in R$, т.е $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, ибо $x^2+12>0$.

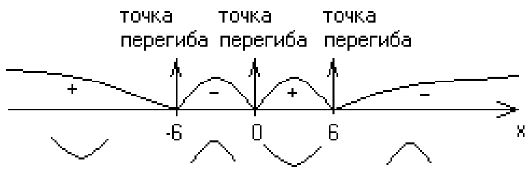
Находим $y'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+12)-x^3(2x+0)}{(x^2+12)^2}=\dfrac{x^4+36x^2}{(x^2+12)^2}$;

$$y''(x)=\frac{(4x^3+72)(x^2+12)^2-4x(x^4+36x^2)(x^2+12)}{(x^2+12)^4}=$$

$$=\frac{4x(216-6x^2)}{(x^2+12)^3};$$

Находим критические точки 2-го рода $y''(x)=0$, если $x=0$ или $x=\pm 6$.

Других критических точек 2-го рода нет, т.к. $y''(x)$ существует всюду в $D(y)$. Знак $y''(x)$:



Таким образом, на интервале $(-\infty,6)$ и $(0,6)$ кривая выпукла вниз, на интервалах *(-6,0)* и $(6,\infty)$ кривая выпукла вниз, на интервалах (-6;0) и $(6,\infty)$ - выпукла вверх; точки перегиба $M_1(0;0)$, $M_2(-6;-9/2)$, $M_3(6,9/2)$.

Заметим, что $y' = \dfrac{x^4 + 36x^2}{(x^2 + 12)^2} > 0$ при $\forall x \in R$, $x \neq 0$; следовательно, функция возрастающая всюду на $(-\infty, \infty)$. Кривая графика симметрична относительно начала координат в силу нечетности функции (рис. 16.12).

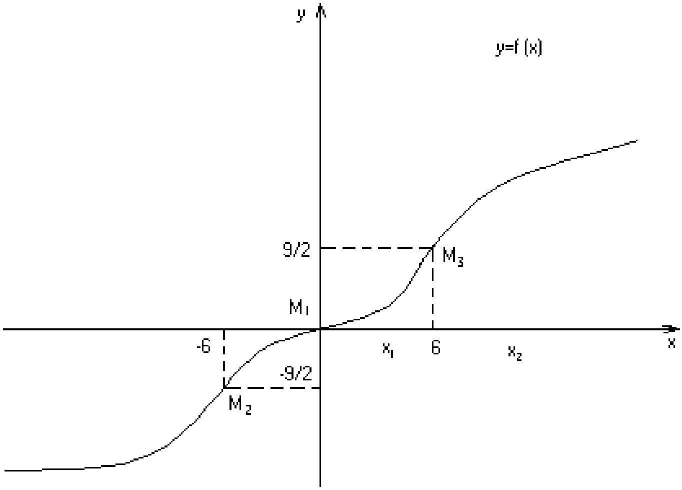


Рис. 16.12

Общая схема полного исследованфункции и построение графика функции

При построении графика функции исследование свойств функции можно проводить по следующей схеме:

1. Нахождение области определения функции; нахождение точек разрыва функции и установление их характера.
2. Установление наличия периодичности и симметрии относительно оси *OY* или относительно начала координат по четности или нечетности функции.
3. Нахождение точек пересечения кривой с координатными осями: с осью *OY,* вычисляя *f(0)*, и с осью *OX,* решая урав-

нение *f(x)=0* и вычислив тем самым, нули функции.
4. Определение интервалов знакопостоянства функции.
5. Определение асимптот графика функции и «поведение функции в бесконечности».
6. Определение интервалов возрастания и убывания функции, точек экстремума(максимума и минимума). Вычисление значения экстремумов.
7. Нахождение точек перегиба, устанавливая интервалы направления выпуклости (вверх и вниз) кривой. Если исследуемая функция четная или нечетная, достаточно исследовать и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Затем воспользоваться симметрией. Полезно получаемые данные сразу наносить на чертеж. Заметим, что порядок исследования можно менять, выбирая по целесообразности, исходя из конкретных особенностей функции.

Пример 9. Провести полное исследование функций и построить их графики. $y(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2}$

Решение .

1) Функция имеет смысл, если $x\neq 0$; следовательно, $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Точка $x=0$- точка разрыва второго рода.

2) Функция не является четной и нечетной, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^3-4}{(-x)^2}=\frac{-(x^3+4)}{x^2}\neq\pm y(x)\ \text{при}\ \forall x\in D(y).$$

3) Точек пересечения с осью ординат нет, так как $x=0\notin D(y)$.

Найдем нули функции: $y=0$ при $\dfrac{x^3-4}{x^2}=0$, x^3-$4=0$. Значит, $(\sqrt[3]{4},0)$ - точка пересечения с осью *OX*.

4) Приравнивая знаменатель нулю, получаем вертикальную асимптоту, ибо $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4}{x^2} = \left(\dfrac{-4}{0}\right) = -\infty$. Ищем наклонные асимптоты. При $x \to \infty$ полуем:$k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = 1,\quad b_1 = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2} - x\right) = 0.$$

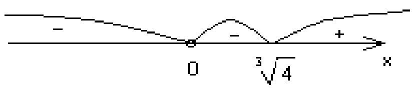
Следовательно, правой асимптотой является прямая $y=x$. Аналогично, при $x \to -\infty$ имеем:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2} - x\right) = 0,$$

т.е. $y=x$ является также левой наклонной асимптотой.

5) Определим интервалы знакопостоянства функции. Функция $y>0$, если $\dfrac{x^3-4}{x^2} > 0$, или $x > \sqrt[3]{4}$, где $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$. Знак y:



Следовательно, график функции расположен выше оси OX при $x \in (\sqrt[3]{4}; +\infty)$ и ниже оси OX при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \sqrt[3]{4})$.

6) Находим критические точки первого и второго рода , т.е. точки, в которых обращаются в нуль или не существуют производные $y^{/}$ и $y^{//}$ данной функции. Имеем:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 - 4)2x}{x^4} = \frac{x^3+8}{x^3}, \; y^{/}=0 \text{ при } x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Следовательно, x=-2 - критическая точка первого рода ,т.е. точка , подозрительная на экстремум; $y_{\max} = y(-2) = -3$

$$y'' = \left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)' = \frac{3x^5 - (x^3+8)\cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y).$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4},\infty)$
y	-	*-3*	-	$-\infty$	-	0	+
$y^{/}$	+	*0*	-	∞	+	+	+
$y^{//}$	-	*-1,5*	+	$-\infty$	-	-	-
Вы-вод	*y возр.*	*y max*	*y убыв.*	*y не сущ.*	*y возр.*	*0*	*y возр.*
	$\cap$			$\cap$	$\cap$		$\cap$

Критических точек второго рода ,т.е. точек, подозрительных на перегиб, нет, производные $y^{/}$ и $y^{//}$ не существуют еще только при $x=0$, где не существует и сама функция y. $y'' = -\frac{24}{x^4} < 0$ при $\forall x \in D(y)$. Следовательно, кривая графика выпукла вверх всюду.

Где символ "$\cap$" обозначает выпуклость вверх кривой график. По результатам исследования строим график функции (рис.16.13).

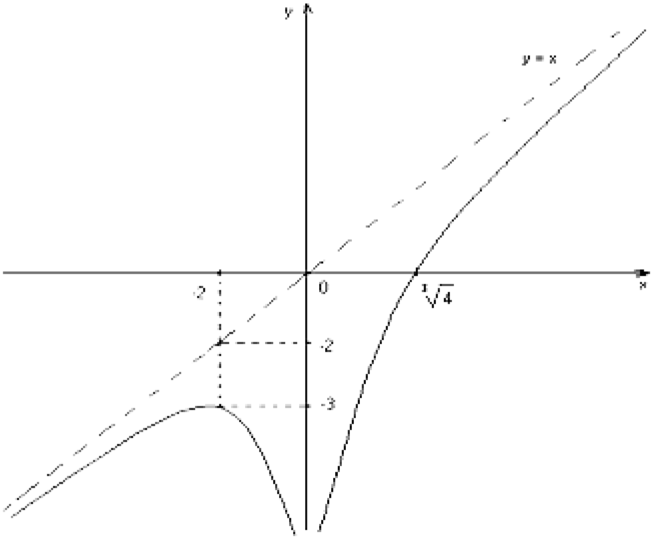


Рис. 16.13

17. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие неопределенного интеграла.

Пусть *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на промежутке *x*, то есть $F'(x)=f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Определение. Совокупность всех первообразных для функции *f(x)* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* на промежутке *x* и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где *C*- произвольная постоянная.

Основные правила интегрирования.

а) $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

б) $\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$, где $a -$ постоянная;

г) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

д) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u =$ (x), то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Основные правила интегрирования.

а) $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

б) $\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$, где $a -$ постоянная;

г) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

д) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$,

то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших неопределенных интегралов.

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $(a \neq -1)$,

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C_1$ $(a \neq 0)$,

4) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $(a \neq 0)$,

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ $(a \neq 0)$,

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ $(a \neq 0)$,

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$, $(a > 0)$,

7) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0)$, $\int e^x dx = e^x + C$,

8) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

10 $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = - ctg\, x, \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg\, x,$

11) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C,$

12) $\int chxdx = sh\, x + C,$

13) $\int shxdx = ch\, x + C,$

14) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$

15) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = - cthx + C.$

Замечание. Правило д) значительно расширяет таблицу простейших интегралов. В силу этого правила таблица интегралов оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией

Метод подстановки. Замена переменой в неопределенном интеграле.

Интегрирование путем введения новой переменной t основано на формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt,$ где $x = \varphi(t),$

где $x = \varphi(t)$ монотонная непрерывно-дифференцируемая функция переменной *t*. Функцию φ выбирают таким образом , чтобы правая часть формулы приобрела более удобный вид. Иногда применяется подстановка вида $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Допустим, что подынтегральное выражение удалось преобразовать к виду $f(x)\, dx = g(u)\, du$, где $u = \psi(u)$ тогда , если известен $\int g(u)du = F(u) + C$, то

$$\int f(x)dx = F[\psi(x)] + C.$$

Тригонометрические подстановки.

а) если интеграл содержит радикал вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, то полагают $x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$), откуда получается

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t \quad (\text{или } \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \sin t\,)$$

б) если интеграл содержит радикал вида $\sqrt{x^2 - a^2}$,

то полагают $x = \dfrac{a}{\sin t}$ (или $x = \dfrac{a}{\cos t}$),

откуда $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot tgt$ (и $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot ctgt$).

в) если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a \cdot tgt$ (или $x = a \cdot ctgt$), откуда

$\sqrt{x^2 + a^2} = \dfrac{a}{\cos t}$ (или $x = \dfrac{a}{\sin t}$).

Замечание. Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться гиперболическими подстановками: $x = a \cdot tht$, $x = a \cdot ctht$, $x = a \cdot sht$.

Метод интегрирования по частям.

Если $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x, то

$\int udv = u \cdot v - \int vdu$.

Замечание. Иногда, чтобы свести исходный интеграл к табличному, приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз. В некоторых случаях получают уравнение, из которого определяется начальный интеграл.

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложений на простейшие.

Рассмотрим рациональную функцию (или рациональную дробь) $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно относительно переменной x.

Если $n \geq m$, то есть дробь неправильная, то ее можно представить в виде

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$, (где $k < m$), то есть выделить из нее целую часть $P_{n-m}(x)$. Пусть знаменатель $Q_m(x) = (x-a)^r \ldots (x^2+px+q^2)^s \ldots$ разлагается на линейные квадратичные множители. Тогда правильная рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ разлагаются на суммы простейших дробей с вещественными коэффициентами следующего вида:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^r}$, где $r \geq 1 -$ целое число;

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}$ - q < 0, то есть квадратный трехчлен, и x^2+px+q не имеет действительных корней;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, где $s \geq 1$ целое число, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочленов $P_{n-m}(x)$ степени *(n-m)* и от простейших дробей, каждая из которых интегрируется в элементарных функциях:

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$,

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)\cdot(x-a)^{r-1}} + C$,

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx =$

$$= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$$

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s} dx =$

$$= \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s}.$$

Первый интеграл в правой части легко находится с помощью Подстановки $x^2 + px + q = z$, а второй преобразуем так $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$, где $x + \frac{p}{2} = t$; $q - \frac{p^2}{4} = a^2$.

Для интеграла

$I_s = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$ (s – целое положительное число).

Имеет место следующая рекуррентная формула

$I_s = \frac{1}{2a^2(S-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{S-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2S-3}{2S-2} \cdot I_{s-1}$.

Эта формула после (s-1) – кратного применения позволяет свести данный интеграл I_s к табличному интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

<u>Интегрирование некоторых иррациональных функций.</u>

а) ***Интегралы вида*** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам 5 и 6

б) ***интегралы вида*** $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ путем выделения в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня разлагается на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} dx +$$

$$+ (B - \frac{Ab}{2a}) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$$

Первый из полученных интегралов путем замены $ax^2 + bx + c$ сводится к табличному виду 1 , а второй рассмотрен в п. 1.

в) интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подстановки $\frac{1}{mx+n} = t$ приводятся к виду, рассмотренному в п. 2.

г) интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$

где R- рациональная функция; $m_1, \dots, m_k$, $n_1, \dots, n_k$ - целые числа. С помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$,

где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1, \dots, n_k$.

д) интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

где m,n,p – рациональные числа выражаются через конечную комбинацию элементарных функций лишь в следующих трех случаях:

1) если p – целое число, подстановкой $x = t^s$, s – знаменатель дроби p;

2) если $\frac{m+1}{n}$ - целое, подстановкой $\frac{a+bx^n}{n} = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

3) $\frac{m+1}{n}$ + p – целое, подстановкой

$\frac{a+bx^n}{n} = t^s$, s – знаменатель p.

Интегрирование тригонометрических функций.

а) интегралы вида

$\int \sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx$, $\int \sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta x)dx$, $\int \cos(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx$

находятся с использованием тригонометрических формул

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(m\alpha+\beta)).$$

б) интегралы вида

$$I_{m,n}=\int\sin^n x\cdot\cos^m x dx,$$

где n и m – четные числа, находятся с помощью формул

$\sin^2 x=(1-\cos(2x))/2;$ $\cos^2 x=(1+\cos(2x))/2,$ $\sin(x)\cos(x)=0{,}5\sin(2x).$
Если хотя бы одно из чисел m или n – четное, то интеграл находится, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную. В частности, если $m=2k+1$, то

$$I_{n,m}=\int\sin^n(x)\cdot\cos^{2k+1}xdx=\int\sin^n(x)\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos xdx=$$

$$=\int\sin^n(x)\cdot(1-\sin^2 x)^k d(\sin x)$$

Полагая $t=\sin x$, получим интеграл вида $\int t^k\,(1-t^2)^k dt.$

в) интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ приводятся к интегралу от рациональной функции новой переменной с помощью, так называемой универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$ при этом $\sin x=\frac{2t}{1+t^2};$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$ $dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$

Если $R(\sin x,\cos x)=R(\sin x,\cos x),$ то целесообразно применить подстановку $tg\,x=t$, при этом

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x=arctg\,t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

18. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенный как предел интегральной суммы.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ называется предел ее интегральной суммы, когда число n элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них ($max\ \Delta x_i$) стремится к 0, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x, \text{ где } \Delta(x_i) = x_{i+1} - x_i,\ x_i \le \xi_i \le x_{i+1}.$$

Если $f(x)$ непрерывна, то она интегрируема на $[a, b]$ и предел этот не зависит от способа разбиения промежутка $[a, b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_i на этих промежутках.

Вычисление определенного интеграла.
Формула Ньютона – Лейбница.

Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Если 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Формула интегрирования по частям.

Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$, то

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$, 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

3) если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируем на $[a, b]$, C_1 и C_2 - любые вещественные числа, то функция $C_1 f_1(x)+C_2f_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dx = C_1 \int_a^b f_1(x)dx + C_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

4) если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, d]$, то она интегрируема также и на $[a, b]$, причём

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

При этом точка c может быть произвольно расположена относительно a и b.

5) если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx (a < b)$.

6) если $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ $(a \geq b)$

7) если $f(x) \geq g(x)$ для каждого $x \epsilon (a, b)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ $(a < b)$.

8) если M – наибольшее значение функции $f(x)$ на

отрезке $[a, b]$, а m – наименьшее и a≤b, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

*9) е*сли $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, то существует $\xi \epsilon [a, b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$.

Число $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

19. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода).

Пусть $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < +\infty$. Тогда по определению полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx; \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

В последнем равенстве слева несобственный интеграл сходится тогда, когда сходится каждый из несобственных интегралов в правой части.

<u>Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.</u>

Теорема. Пусть для всех $x \ge a$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, тогда:

1) если $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ также сходится, причём $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$;

2) если $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ - расходится, то расходится и

$$\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx = .\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\cdot x^m\right\} = A \ne \infty, A \ne 0$$

Следствие. Если $f(x) \geq 0$ и, то есть $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$

при $x \to \infty$, то

а) при m>1 $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

б) при $m \leq 1$- расходится.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода).

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна при $a \leq x < b$, а при $x = b$ либо неопределенна, либо терпит разрыв. Тогда по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы; если функция имеет разрыв при $x = a$, либо при $x = c$, где $c \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx; \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$$

Признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема. Пусть при $x \in [a,b]$ выполнены неравенства $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и функции *f(x)* и $\varphi(x)$ либо не определены, либо имеют разрыв при $x = b$. Тогда:

1) если $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$; 2) если $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Следствие. Если $f(x) \geq 0$ и

$\lim\limits_{x\to b}\left\{f(x)\cdot|x-b|^m\right\} = A \neq \infty, A \neq 0$, то есть

$f(x) \sim \dfrac{A}{|b-x|^m}$ при $x \to b$; то

1) при m<1 интеграл (1) сходится; 2) при $m \geq 1$ - расходится.

20. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Площади плоских фигур.

1) площадь в прямоугольных координатах.

Если площадь S ограничена двумя непрерывными Кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$,

то $S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$.

2) площадь, ограниченная кривой, заданной в параметрическом виде.

Если кривая в параметрическом виде $x=x(t), y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими $x=a$, $x=b$ и отрезком оси OX, выражается интегралом

$S = \int\limits_a^b y(t)\cdot x'(t)dt$, где t_1, t_2

определяются из уравнений $a = x(t_1), b = x(t_2)$

($y(t) \geq 0$ на $[t_1, t_2]$).

3) площадь в полярных координатах.

Площадь, ограниченная непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$. Равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

Длина дуги кривой.

1) длина дуги в прямоугольных координатах

Длина дуги гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой *y=f(x)*, содержащейся между точками с абсциссой *x=a* и *x=b*, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

2) длина дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме *x=x(t), y=y(t),* где *x(t)* и *y(t)* непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

,где t_1, t_2 - значения параметра, соответствующие концам дуги;

3) длина дуги в полярных координатах

Если $r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

Объёмы тела.

1) объём тела вращения

Объёмы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x),* осью *OX* и двумя вертикалями *x=a* и *x=b*, вокруг осей *OX* и *OY,* выражаются соответственно формулами

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx; V_y = 2\pi \int_a^b xydx .$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной $x=g(y)$, осью OY и двумя параллелями $y=c$ и $y=d$ определяется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то в приведённых формулах нужно сделать замену переменной интегрирования. Объём тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r = r(\varphi)$ и полярными радиусами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ вокруг полярной оси ρ равен $V_\rho = \frac{2}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi$

2) Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям

Если $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX в точке абсциссой x, то объём этого тела равен $V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx$, где x_1, x_2 – абсциссы крайних точек сечения тела.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\lambda^{2x}}}$.

Решение. Так как $\frac{dx}{\sqrt{1+\lambda^{2x}}} = \frac{dx}{\lambda^x \sqrt{\lambda^{-2x}+1}} = \frac{\lambda^{-x}dx}{\sqrt{1+(\lambda^{-x})^2}}$

$$-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C=$$

$=-\ln(\lambda^{-x}+\sqrt{1+\lambda^{-2x}})+C$. Здесь замена переменной $t=\lambda^{-x}$ приводит к табличному интегралу.

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция является функцией от *sin x* и *cos x*. Применим подстановку

$tg\frac{x}{2}=t$. При этом $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Тогда

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Преобразование, произведённое в знаменателе, называется выделением полного квадрата:

$$t^2+t+2=t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}.$$

Пример 3. Найти $\int x^2\arccos x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям $\int UdV=UV-\int VdU$, где $U=\arccos x, dV=x^2dx$.

Находим

$$V=\int x^2dx=\frac{x^3}{3},dU=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Получим $\int x^2\arccos x dx=\frac{x^3}{3}\arccos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$$\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{3}\int x^2d(\sqrt{1-x^2})=$$

$$=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^3}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{3}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2)=$$

$$=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}+C,|\,x\,|\le 1.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$$

, откуда следует, что это интеграл от дифференциального бинома при *m=0, n=4, p=-1/4.* Так как $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$, то имеем третий случай интегрируемости. Подстановка $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$, где s - знаменатель p в данном случае примет вид $x^{-4}+1=t^4$, откуда

$$x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt,\sqrt[4]{1+x^4}=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\int\frac{t^2dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}.$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим её на простейшие дроби

$$-\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1},\text{ откуда}$$

$$A(t-1)(t^2+1)+B(t+1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)=-t^2.$$

Полагая последовательно *t=1 и t=-1,* получим

B(1+1)(1+1)=-1, 4B=-1, B=-1/4;

A(-1-1)((-1)(-1)+1)=-(-1)(-1), -4A=-1, A=1/4.

Неопределённые коэффициенты C и D можно найти, приравнивая коэффициенты при t^1, t^0 в тождестве слева и справа, получим
A+B-C=0, C=0, -A+B-D=0, D=-1/2.
Следовательно

$$-\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| - \frac{1}{2}arctg\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

Пример 5. Найти $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку $x=a\ sht,\ dx=a\ cht\ dt$,
получим $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+sh^2t)} = a\ cht$.

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = a^2\int ch^2tdt = \frac{a^2}{2}\int(ch2t+1)dt =$$

$= \dfrac{a^2\cdot sh2t}{4} + \dfrac{a^2\cdot t}{2} + C.$ Можно получить

$$sh2t = 2sht\sqrt{1+sh^2t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}.$$

Из равенства $sht = \dfrac{\lambda^t - \lambda^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ находим,

что $\lambda^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$.

Поскольку $\lambda^t > 0 \Rightarrow t = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| - \ln a$.
Поэтому окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C_1,$$

где $C_1 = C - \frac{a}{2}\ln^2 a$ - новая произвольная постоянная.

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=a\cos t, y=b\sin t$ (рис.20.1).

Решение. Эллипс задан в параметрическом виде.

В силу симметрии эллипса достаточно найти площадь S_1 одной его четверти ($x \geq 0, y \geq 0$). Если x изменяется в пределах от 0 до a, то параметр t изменяется в пределах от $\pi/2$ до 0, которые находятся из уравнений $a\cos t=0$, $t_1 = \pi/2$; $a\cos t=a, \cos t=1$, $t_2=0$. По формуле для вычисления площади кривой, получим:

$$S = 4S_1 = 4\int_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt = \pi ab$$

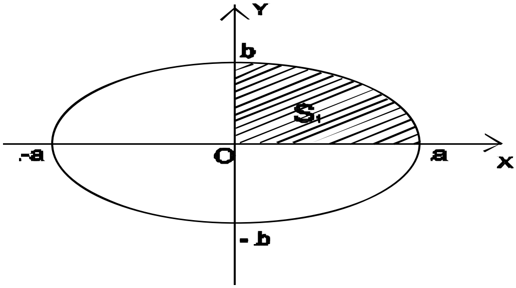


Рис.20.1

Пример 7. Найти длину дуги кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$.

Решение. Кривая (рис.20.2) задана в полярных координатах. В силу её симметрии относительно полярной оси достаточно вычислить длину L, её половины, при этом полярный угол φ изменяется от π до 0. По формуле для вычисления дуги кривой в полярных координатах имеем

$$L = 2L_1 = 2\int_{\pi}^{0}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1-\cos\varphi)^2\, d\varphi} = |_{\pi}^{0} = 8a.$$

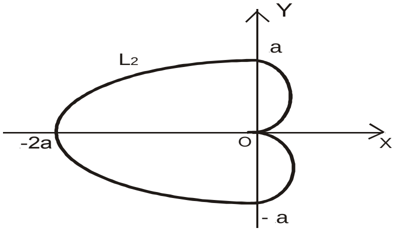


Рис. 20.2

Пример 8. Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \pm b$ и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси *OY* (см. рис. 20.3).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления объёма тела вращения. $V = \int\limits_{-b}^{b} x^2 dy = \pi\ a^2 \int\limits_{-b}^{b} (1 + \dfrac{y^2}{b^2}) dy = \dfrac{8}{3} \pi\ a^2 b.$

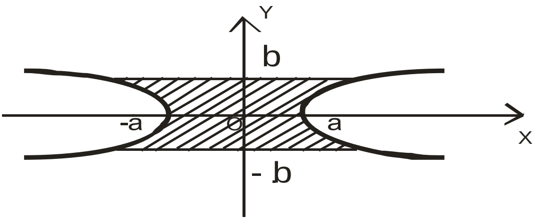


Рис. 20.3

Пример 9. Найти объём эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (рис.20.4)

Решение. В общем случае, когда $a \neq b \neq c$ эллипсоид нельзя считать телом вращения. Поэтому его объём надо вычислять с помощью формулы объёма тела по известным площадям поперечных сечений. Поперечные сечения эллипсоида плоскостями, параллельными оси ОХ, являются эллипсами, уравнения которых имеют вид $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$ или $\dfrac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\dfrac{z^2}{\left[\sqrt{1-\dfrac{x}{a^2}}\right]^2}=1$,

поэтому полуоси эллипса, находящегося в сечении плоскостью $x=x$, равны соответственно

$b(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}, c(x)=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Известно, что площадь эллипса с полуосями b и c вычисляется по формуле $S=\pi bc$. Следовательно, площадь поперечного сечения $S(x)=\pi b(x)c(x)$. Теперь получим

$$V=\pi\int_{-\alpha}^{\alpha} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\bullet c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\pi bc\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности при $a=b=c=R$ получаем формулу $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

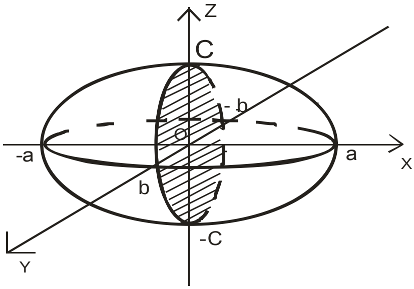


Рис. 20.4

<u>Пример 10.</u> Вычислить $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

<u>Решение.</u> Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Так как подынтегральная дробь разлагается на простейшие дроби вида: $\dfrac{1}{x^2+x+2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$, то

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_2^{b}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Bigg|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}|\ln\frac{b-1}{b+2}-\ln\frac{1}{4}|=\frac{2}{3}\ln 2.$$

Пример 11. .Исследовать сходимость интеграла $\int_2^{\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости для несобственных интегралов 1-го рода в виде неравенства. Очевидно, что $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\dfrac{1}{x}$ при $x>2$. Вычислим

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_2^{\infty}=\infty$$ - расходится.

Пример 12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. При $x\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}:\ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Так как $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, то сходится и исходный интеграл по следствию из признака сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Пример 13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2}\dfrac{dx}{(x-1)^2}$

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$.Это несобственный интеграл от неограниченной функции (2-го рода). По определению

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\varepsilon}-1) + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\delta}-1) = \infty.$ Значит данный интеграл расходится.

Пример 14. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв при *x=1*. воспользуемся признаком сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для сравнения возьмем функцию $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Очевидно, что $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$,

при $x \in [0,1]$.

Найдем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 .$$

Так как $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.;

21. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Область определения

Переменные x,y,z, …,t называются независимыми между собой, если каждая из них принимает любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные. Переменная величина u называется однозначной функцией независимых переменных (аргументов) x,y,z,…,t, если каждой совокупности их значений (x,y,z …,t) из области D соответствует единственное определенное значение $u \in U$. Функциональная зависимость обозначается так: u=f(x,y,z, …,t), или f: D→U, где U – множество значений функции f.

Областью определения (существования) D функции u=f (x,y,z,…,t) называется совокупность значений x,y,z,…,t, при которых функция определена, то есть принимает определенные действительные значения. Так, для функции двух переменных z=f (x, y) областью определения является совокупность точек (x,y) координатной плоскости XOY, в которых функция определена (существует). Эта область определения представляет собой конечную или бесконечную часть плоскости XOY, ограниченную одной или несколькими кривыми (границей области D). Аналогично, для функции трех переменных u=f(x,y,z) областью определения служит некоторое тело в пространстве OXYZ.

Рассмотрим примеры нахождения областей определения функций.

Пример 1. $z = \arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{x \cdot y}$

Решение. Первое слагаемое функции определено при $-1 \le \frac{x}{3} \le 1$, или $-3 \le x \le 3$. Второе слагаемое имеет действительные значения, если $x \cdot y \ge 0$, то есть при $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$. Значит, область определения всей функции есть множество точек (x,y) двух полос плоскости XOY: При $y \ge 0$ между прямыми x = 0, x = 3, y = 0 и при $y \le 0$ между прямыми x = -3, x = 0, y = 0, включая сами эти прямые (рис. 21.1).

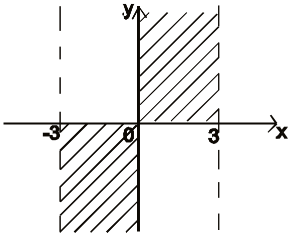


Рис. 21.1

Пример 2 . $z = \ln(y + x^2)$,

Решение. Так как логарифм не существует при нуле и отрицательных значениях, то должно выполняться неравенство $y + x^2 > 0$, то есть $y > -x^2$. Значит, область определения функции есть часть плоскости, расположенной над параболой $y > -x^2$, не включая саму границу, то есть точки кривой $y = -x^2$ (рис. 21.2).

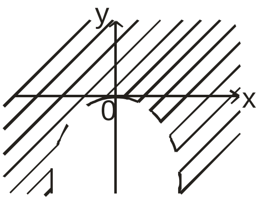


Рис. 21.2

Предел. Непрерывность.

Число А называется пределом функции $z = f(x,y)$ при стремлении точки M(x,y) к точке M_0(a,b), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ> 0, $\delta(\varepsilon)$,что при

$0 < \rho < \delta$, где $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – расстояние между точками M и M_0, имеет место неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{M \to M_0} f(x,y) = A$, или $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = A$. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(a,b)$, если предел функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(a,b)$ равен значению функции $f(a,b)$ в точке Мо, то есть:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Нарушение условий непрерывности для функции $f(x,y)$ может быть как в отдельных точках (изолированная точка разрыва), так и в точках, образующих одну или несколько линий (линии разрыва).

Пример 3 . Найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy\cdot x}{y\cdot x} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot \lim\limits_{x\to 2} x = 1\cdot 2 = 2$,

где $\alpha = xy$. Здесь выполняется первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$. Рассмотрим изменение переменных x и y вдоль прямых $y = kx] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+k)x}{x} = 1+k$. Так как данное выражение $1+k$ может принимать различные значения в зависимости от числа k, то предела не существует.

Линии и поверхности уровня функции.

Линией уровня функции двух аргументов $z = f(x,y)$ называется такая линия $f(x,y) = C$ на плоскости XOY, в точках которой функция принимает одно и то же значение $z = C$, где C – const.

Поверхностью уровня функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = C$.

Пример 4. Выяснить характер поверхностей, изображаемых следующими функциями и построить их линии уровня:

а) $z = x + y$; б) $z = x^2 + y^2$; в) $z = x^2 - y^2$.

Решение: а) плоскость; линии уровня – семейство прямых $x + y = C$, параллельных прямой $y = -x$, (при $\forall C \in R$).

б) параболоид вращения; линии уровня $x^2 + y^2 = C$ – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат ($\forall C > 0$).

в) гиперболический параболоид; линии уровня $x^2 - y^2 = C$ - семейство равносторонних гипербол $(\forall C \in R)$.

Дополнительные сведения.

Часть пространства, в котором происходит физическое явление, называется физическим полем. Существуют скалярное и векторное поля.

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей только от координат точек пространства, в котором это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функцией $f(x_1; y_1; z_1)$ трех независимых переменных. Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x, y, z)$ пространства R^3, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x,y,z)$, вычисленное в точке $P(x_1;y_1;z_1)$.

Примерами скалярного поля являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере и т.п. В скалярном поле поверхность уровня называется эквипотенциальной поверхностью, во все точках которой однозначная функция $f(x,y,z)$ сохраняет одно и то же значение. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково. Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1,y_1,z_1)$, имеет вид $f(x;y;z)=f(x_1;y_1;z_1)$.

22. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Частные производные первого порядка

Если $u=f(x,y,z)$ и одна из переменных, например x, получила приращение Δx (при постоянных других переменных y и z), то разность $\Delta_x u=f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)$ называется частным приращением по x функции $f(x,y,z)$. Соответственно, имеем частные приращения функции по y и по z

$\Delta_y u=f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)$, $\Delta_x u=f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)$

Частной производной от функции $u=f(x,y,z)$ по независимой переменной x называется производная

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$, или в более подробной записи

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}=f_x{}'(x,y,z),$$

вычисленная при постоянных y,z. Обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, f'_x. Аналогично, предел отношения $\frac{\Delta_y \mathrm{u}}{\Delta y}$ при стремлении Δy к нулю называется частной производной функции по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}=f'_y(x,y,z).$$

Частная производная по z есть производная u'_z, равная пределу $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z}$, то есть $\frac{\partial u}{\partial z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}=f'_z(x,y,z)$.

Очевидно, что для нахождения частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования; только следует иметь в виду, что при нахождении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой берется частная производная.

Пример 1 . Найти частные производные функции

$$u=x^2y^3z-4xy+3yz+z-5x+1.$$

Решение. Рассматривая переменные y, z как постоянные величины, получим $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3z-4y-5$. Считая x, z постоянными, дифференцируем функцию по y:

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2z-4x+3z$. Аналогично, дифференцируем функцию по z, считая x,y постоянными: $\frac{\partial u}{\partial z}=x^2y^3+3y+1$.

Полный дифференциал функции.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных в точке M(x,y) называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если в этой точке полное приращение Δz можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$, где слагаемое $o(\rho)$ есть бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть ее полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy , то есть

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y .$$

Дифференциалы dx, dy независимых переменных x и y совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – это числа, равные между собой. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{, где } A = \frac{\partial z}{dx} \text{ , } B = \frac{\partial z}{dy}$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Заметим, что в выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки можно опустить, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ. Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Значит, если функция имеет полный дифференциал, то она дифференцируема.

Применения полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Имеем связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением: $\Delta z = dz + o(\rho)$.

Вычисление Δz (приращения функции) представляет собой задачу, более трудоемкую, чем вычисление ее дифференциала dz, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях аргументов заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала. При достаточно малых $|\Delta x|, |\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство

$\Delta z \approx dz$ или $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Итак, получим $f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx df$

или $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Это приближенное равенство тем точно, чем меньше величины Δx, Δy.

Пример 2 . Вычислить приближенно величину $(1{,}02)^{3{,}01}$

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Воспользуемся формулой. Имеем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y_0 = 3$, $\Delta y = 0{,}01$ Значение функции z в точке (x_0, y_0): $z(1{,}3) = 1^3 = 1$. Вычисляем $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$, где $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$; откуда $dz|_{(1,3)} = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$. Значит, $(1{,}02)^{3{,}01}{,}01 \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

Дифференцирование сложной функции

***1) Случай одной независимой переменной*.**

Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция двух аргументов x и y в некоторой области D плоскости XOY, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t, то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то сложная функция $z = f(\varphi(t), \psi(t)) = \Phi(t)$ - есть функция одной переменной t и имеет место равенство $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. В частности, если t совпадает с одним из аргументов с x , то справедлива формула $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной функции z по x.

Пример 3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, где $x = \cos 2t$, $y = arctgt \cdot$

Решение. Воспользуемся формулой. Предварительно находим $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + (2x - 3y^2) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

Пример 4 . Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$. Находим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2ye^x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}$$

Случай нескольких независимых переменных.

Если z есть сложная функция нескольких переменных, например $z=f(x,y)$, где аргументы x, y, так называемые промежуточные переменные, являются функциями независимых переменных u, v: $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, то сложная функция $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))=\Phi(u,v)$ фактически является функцией двух «конечных» переменных u, v. Если функции f,φ,ψ — дифференцируемые функции, то частные производные по u,v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \text{ или } z'_u=z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}, \text{ или } z'_v=z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v$$

Структура формул та же и при большем числе переменных.

Пример 5 . Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=3^{x^2}\cdot arctgy$, $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$

Решение: Находим $\frac{\partial z}{\partial x}=3^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 3\cdot arctgy$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3^{x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}$;

$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}$; $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$; $\frac{\partial y}{\partial u}=v$; $\frac{\partial y}{\partial v}=u$;

Подставляя полученные выражения в формулы, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'_u+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'_u=3^{x^2}\cdot\frac{1}{v}\left(2x\ln 3\cdot arctgy\right)+3^{x^2}\frac{v}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'_v+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'_v=-3^{x^2}\cdot\frac{u}{v^2}\left(2x\ln 3\cdot arctgy\right)+3^{x^2}\frac{u}{1+y^2}.$$

Ответ можно оставить в такой форме или выразить через u и v. В результате получим: $\frac{\partial z}{\partial u}=3^{\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(\frac{2u\ln 3arctg(uv)}{v^2}+\frac{v}{1+u^2v^2}\right)$,

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3^{\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(-\frac{2u^2\ln 3arctg(uv)}{v^2}+\frac{u}{1+u^2v^2}\right).$$

Инвариантность формы полного дифференциала.

Отметим важное свойство инвариантности формы полного дифференциала. Во всех рассматриваемых выше случаях справедлива формула:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (*)$$

Действительно, дифференциал сложной функции $z=f(x,y)$, где переменные $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ есть функции от новых независимых переменных u и v, можно получить, если в формуле (*) дифференциалы dx и dy заменить (по определению):

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv;\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv получим:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

где $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$,

полученная формула $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$ показывает, что форма первого дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется <u>инвариантностью</u> (неизменяемостью) <u>формы</u> первого дифференциала.

Производная по направлению. Градиент функции и его свойство

1. <u>Производной от функции</u> $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ <u>по данному направлению</u> вектора $\bar{l} = \overline{MM_1}$ называется $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{M_1 M \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{M_1 M} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $f(M)$ и $f(M_1)$- значения функции в точках M и M_1.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема, то производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ (по направлению $\bar{l}$) вычисляется по формуле: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$, где α- угол, образованный вектором $\bar{l}$ с осью OX. В случае функции трёх переменных $U = f(x, y, z)$ производная по направлению $\bar{l}$ определяется аналогично и вычисляется по формуле $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$,

где $\alpha = \angle(\bar{l}, x)$, $\beta = \angle(\overline{l, y})$, $\gamma = \angle(\overline{l, z})$, т.е. α,β, γ -углы между направлением $\bar{l}$ и соответствующими координатными осями, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\bar{l}$, причём $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. <u>Производная от функции в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении</u>. Производная $\frac{\partial U}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня .

Производная $\frac{\partial U}{\partial l}$ достигает своего наибольшего значения по направлению нормали к поверхности уровня.

Пример 6. Найти производную $z=2x^2-3y^2$ в точке М(1;0) по направлению, составляющему с ОХ угол в 120^0.

Решение. Найдём частные производные и их значения в данной точке М: $\frac{\partial z}{\partial x}=4x;\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=4;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-6y;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=0$.

Далее определяем $\cos\alpha=\cos(90^0+30^0)=-0{,}5$, $\sin\alpha=\sin 120^0=\sin(90^0+30^0)=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получим искомую производную $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2$. Знак минус показывает, что функция в данной точке по данному направлению убывает. Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_Z\bar{\kappa}=\{a_x,a_y,a_Z\}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar{a}|};\cos\beta=\frac{a_y}{|\bar{a}|};\cos\gamma=\frac{a_z}{|\bar{a}|},\ \text{где}\quad |\bar{a}|=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_Z)^2}$$

2. Градиентом функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор, выходящий из точки M и имеющей своими координатами частные производные функции, т.е. $gradz=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$. На основании этого определения проекции вектора $gradz$ на координатной оси записывается так:

$Пр_{OX}(gradz)=\frac{\partial z}{\partial x}$, $Пр_{OY}(gradz)=\frac{\partial z}{\partial y}$. Предполагается при этом, что функция $z=f(x,y)$-однозначная непрерывная, имеющая непрерывные частные производные, т.е. дифференцируемая. Значит, производная данной функции в направлении $\bar{l}$ связана с градиентом функции следующей формулой: $\frac{\partial z}{\partial l}=Пр_l(gradz)$, т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования. Градиент функции двух переменных в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Значит направление вектора $gradz$ в каждой точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\bar{l}=gradz$ производная $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)$ наибольшая $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{Наиб.}=|gradz|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ при $\bar{l}=gradz$. В этом состоит основное свойство градиента: градиент указывает направление наибольшего роста функции в данной точке. Аналогично определяется градиент функции трёх переменных . Он равен $gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Градиент функции трёх переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

23. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные высших порядков.

Частными производными второго порядка функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и выше третьего порядков; например: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y)$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y)$ и т.п.

Символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ обозначает частную производную третьего порядка функции $z=f(x,y)$, вычисленную три раза по x; символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ обозначает, что от функции *z* взята частная производная третьего порядка, причём она вычисляется два раза по x и от полученной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вычислена один раз производная по y. Имеет место такая важная теорема: <u>если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.</u> Таким образом, так называемые <u>смешанные производные</u>, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования , равны между собой, если они непрерывные функции, например: $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

<u>Пример 1 .</u> Найти частные производные второго порядка от следующих функций: а) $z=2xy$; б) $z=\ln(x^2+y^2)$; в) $z=arcctg\,\frac{x}{y}$ /

<u>Решение.</u> Находим сначала частные производные первого порядка. Затем их дифференцируем вторично:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = (2y)'_x = 0$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y = (2y)'_y = 2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = (2x)'_y = 0.$$

б) Находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$; далее

находим $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)' = \dfrac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot 2x}{x^2 + y^2} = \dfrac{2\left(y^2 - x^2\right)}{x^2 + y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{-2x \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

в) Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arcctg\, \frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arcctg\, \frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

Теперь находим: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_y\right)'_x = \frac{\left(y^2 - x^2\right)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от её полного дифференциала (первого порядка), т.е. $d^2 z = d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго , например: $d^3z = d(d^2z)$, т.е. дифференциалом третьего порядка от функции z есть дифференциал от её дифференциала второго порядка. Вообще, $d^nz = d(d^{n-1}z)$, $\forall n \in N$. Если $z = f(x,y)$, где аргументы x и y –независимые переменные и функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 .$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула для дифференциала порядка n : $d^nz = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$, которая формально раскрывается по биноминальному закону. Если $z = f(x,y)$, где аргументы x и y являются функциями одного или нескольких независимых переменных, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$$

Если x и y – независимые переменные, то dx и dy - величины постоянные, поэтому $d^2x = d(dx) = 0$, $d^2y = d(dy) = 0$. Заметим, что следующая запись означает $dx^2 = (dx)^2 = dx \cdot dx$, выражение $\frac{\partial^3}{\partial x^2}dx^2 \frac{\partial}{\partial y}dy \cdot z$ следует понимать, как выражение $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy$ и т.д. Кроме способа вычисления дифференциалов функции по формулам, есть другой способ нахождения дифференциалов высших порядков, который даёт возможность определить их, минуя вычисление частных производных; далее по известному выражению дифференциала мы сможем находить и частные производные. Этот способ состоит в последовательном дифференцировании. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y$ поэтому $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (4x-3y)dx - (3x+2y)dy$. Далее находим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x-3y)'_x = 4$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x-3y)'_y = -3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -(3x+2y)'_y = -2$. Имеем: $d^2 z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$.

Дифференцирование неявных функций.

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $y = y(x)$-неявная функция, т.е. она определяется из уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешённого относительно y. Это значит, что при каждом значении x_0, при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0, y_0) = 0$. Если $F(x, y)$ - дифференцируемая функция переменных x и y, то производная неявной функции $y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, может быть найдена по формуле $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, при условии, что $F'_y(x, y) \neq 0$. Формула позволяет находить *n-ую* производную от y по x, зная y'_x (вычисляя от y'_x следующие производные).

<u>Пример 3</u>. Найти y'_x, если функция $y(x)$ задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a -величина постоянная.

<u>Решение</u>. Обозначим левую часть данного уравнения $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$. Найдём её частные производные

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay,\ F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax.$$

Применив формулу y'_x, получаем $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$.

<u>2) Случай нескольких независимых переменных.</u>

Если функция z от двух независимых переменных x и y задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, не разрешённым относительно z, то говорят, что z(x,y) есть неявная функция переменных x и y. Если $F(x, y, z)$ -дифференцируемая функция переменных x , y и z и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

<u>Существует ещё другой способ нахождения производных от неявно заданной функции</u> z, без использования формулы . Для этого нужно продифференцировать уравнение: $dF(x, y, z) = 0$; считая переменные равноправными $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$. Из этого уравнения найти dz: $dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy$, а следовательно, будем знать $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Чтобы найти вторую производную, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, надо продифференцировать по независимой переменной x найденную первую производную, учитывая при этом, что z есть функция, зависящая от x.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке М(точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к различным кривым, проведённым на поверхности через эту точку М.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания М.

А. Если уравнение поверхности в декартовой системе координат задано в явной форме $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$-дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости в точке $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $z - z_0 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M \cdot (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M \cdot (y - y_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M = f_x'(x_0, y_0)$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M = f_y'(x_0, y_0)$, а x, y, z -текущие координаты касательной плоскости, x_0, y_0, z_0 – координаты точки касания M_0.

Уравнения нормали к поверхности имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Б. В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявной форме $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ плоскости имеет вид: $F_x'(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$,

Уравнение нормали к поверхности записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_M},$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ -значения частных производных функции $F(x,y,\mathrm{z})$ в точке М(x_0, y_0, z_0) ,x,y,z-текущие координаты касательной плоскости.

Пример 4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой x=1,y=1.

Решение. Прежде всего найдём аппликату точки касания $z_0 = z(x_0, y_0) = z(1{,}1) = 4$. Итак, точка касания есть М(1,1,4). Находим частные производные данной поверхности, заданной в явной форме: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 6y$ и вычислим их значения в точке М с координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 1$,$z_0 = 4$:$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 6$.

Будем иметь $z - 4 = 2(x-1) + 6(y-1)$ или $2x + 6y - z - 4 = 0$-уравнение касательной плоскости, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$-уравнение нормали.

24. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными всех порядков до (n+1)-го порядка включительно в окрестности точки (a,b). Тогда в рассматриваемой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x,y)= f(a,b)+\frac{1}{1!}[f'_x(a,b)\cdot(x-a)+ f'_y(a,b)\cdot(y-b)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+$$
$$+f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)+f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2]+...$$
$$...+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\cdot f(a,b)+R_n(x,y),$$

где $R_n(x,y)$-остаточный член. Формулу Тейлора можно представить в других обозначениях, если обозначить приращение функции в виде $\Delta f(x,y)= f(x+h,y+k)- f(x,y)$, где h и k- соответствующие приращения аргументов x и y. Тогда

$$\Delta f(x,y)=df(x,y)+\frac{1}{2!}d^2 f(x,y)+\frac{1}{3!}d^3 f(x,y)+...+\frac{1}{n!}d^n f(x,y)+R_n,$$

где $R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k)$, $0<\theta<1$. Частный случай формулы Тейлора при a=b=0 называется формулой Маклорена.

25. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения.

Говорят, что функция $u=f(x,y,z,...,t)$ при некоторой системе значений $x_0,y_0,z_0,...,t_0$ независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции

$$\Delta u= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z,...,t_0+\Delta t)- f(x_0,y_0,z_0,...,t_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значениях приращений аргументов

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta t$. Максимум или минимум функции называется экстремумом. Экстремум здесь понимается в локальном смысле. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума. Для функции двух переменных $f(x, y)$ удобно определение локального экстремума следующее:

Определение. Функция $f(x, y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x, y)$ в достаточно малой окрестности точки M_0, то есть, $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (или соответственно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$) для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию $|M_0 M| < \sigma$, где σ – достаточно малое положительное число. Аналогично определение экстремума функции трех и большего числа переменных, используя понятие многомерного пространства.

Необходимые условия экстремума.

Если дифференцируемая функция $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$, то или ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial z} = 0; \quad \ldots \quad ; \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial t} = 0$$

или частные производные при этих значениях не существуют.

Система равенств эквивалентна одному уравнению:

$$df(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0) = 0,$$

Итак, в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений в системе равно числу независимых переменных. Точки, в которых вычисляются равенства, называются стационарными (или критическими) точками. Эти точки являются только подозрительными на экстремум, так как не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Поэтому, равенства выражают необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

Достаточные условия экстремума.

Для того, чтобы решить вопрос, какие стационарные точки, получаемые из решения системы уравнений:

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $\frac{\partial u}{\partial z}=0$;…; $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0,...,t_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y, z,...,t)$,. Тогда если дифференциал второго порядка сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по модулю приращениях аргументов, то функция в точке M_0 имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда $d^2 f(M_0)<0$, а минимум – когда $d^2 f(M_0)>0$. Если дифференциал второго порядка $d^2 f(M_0)$ не сохраняет постоянного знака, то функция в точке M_0 не имеет ни максимума, ни минимума. Если же $d^2 f(M_0)$ обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследования дифференциалов порядка выше, чем второй.

Правило определения экстремума функции двух независимых переменных.

Чтобы исследовать на экстремумы функцию $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x, y, следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция может достигать экстремума.

2) Для этого надо решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необходимые условия экстремума)

2) Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке. Достаточные условия экстремума выражаются с помощью определителя второго порядка. Например, пусть $M_0(x_0, y_0)$ - найденная стационарная точка данной функции. Принято обозначать числа следующими буквами

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

3) Составить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ для каждой стационарной точки. При этом,

а) если $\Delta = AC - B^2 > 0$ то экстремум в стационарной точке есть: при A>0 (или C>0) будет минимум, а при A<0 (или C<0) будет максимум;

б) если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции в стационарной точке остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции с привлечением частных производных порядка выше второго, или, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки).

Пример 1 . Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$$

Решение: 1) Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$$

Воспользуемся необходимым условием экстремума:

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; составляем систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$.

После сокращения на 6 имеем $\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$. Решаем систему.

Из первого уравнения находим $y = \dfrac{x^2}{6}$, подставляя его во второе уравнение, получим $x^4 - 216x = 0$, или $x\left(x^3 - 6^3\right) = 0$, или $x(x-6)\left(x^2 + 6x + 36\right) = 0$. Откуда имеем $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ (остальные два корня уравнения $x^2 + 6x + 36$ будут комплексными, нас они не интересуют); далее из уравнения $y = \dfrac{x^2}{6}$ находим $y_1 = 0$ при $x_1 = 0$ и $y_2 = 6$ при $x_2 = 6$.

Итак, получим две стационарные точки $M_1(0,0)$, $M_2(6,6)$

2) Для исследования достаточных условий экстремума нашли частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y$ и составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

для каждой стационарной точки а) $M_1(0{,}0)$: $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=0$;

$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=-36$; $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1}=0$

Получим число $\Delta=AC-B^2=-(-36)^2=-36<0$. Следовательно, в точке $M_1(0{,}0)$ нет экстремума (ни максимума, ни минимума);

б) $M_2(6{,}6)$: $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_2=6\\y_2=6}}=72>0$; $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x_2=6\\y_2=6}}=-36$;

$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_2=6\\y_2=6}}=72$. $\Delta=AC-B^{2}>0$

Следовательно, экстремум есть в точке $M_2(6{,}6)$, причем минимум, так как A>0. Минимум этот равен значению функции при x=6, y=6: $z_{\min}=z(6{,}6)=-2$.

Приведем <u>достаточные условия</u> экстремума для функции трех независимых переменных, которые выражаются с помощью определителя третьего порядка.

<u>*Достаточные условия экстремума для функции трех независимых переменных .*</u>

Эти условия выражаются с помощью определителя уже третьего порядка. Пусть дважды дифференцируемая функция $u=f(x,y,z)$ трех переменных имеет стационарную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, найденную из системы уравнений:

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $\frac{\partial u}{\partial z}=0$; (необходимое условие экстремума)

Составляем определитель третьего порядка

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

и вычисляем его для каждой стационарной точки. Имеем следующее правило: Для того, чтобы функция $u = f(x, y, z)$ имела экстремум в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, достаточно, чтобы четный минор был <u>положителен,</u> а знаки нечетных миноров совпадали со знаком $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то есть минор второго порядка $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$ в точке M_0, причем: Если $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0} > 0$ и $J(M_0) > 0$ то имеем минимум функции в точке M_0, если $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0} < 0$ и $J(M_0) < 0$ то имеем максимум функции в точке M_0. <u>Замечание</u>: достаточно определить знак главного минора второго порядка.

<u>Пример2</u>. Найти экстремум функции $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

<u>Решение</u>. а) <u>необходимое условие</u> экстремума. Находим $\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y \\ u'_y = 2y + 12x \\ u'_z = 2z + 2 \end{cases}$ и решаем систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 4y = 0 \\ y + 6x = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$.

Получим две стационарные точки $M_1(0,0,1)$ и $M_2(24,-144,-1)$.

б) <u>достаточные условия экстремума</u>

Находим $u''_{xx} = 6x$, $u''_{xy} = 12$, $u''_{xz} = 0$, $u''_{yy} = 2$, $u''_{yz} = 0$, $u''_{zz} = 2$ и составляем определитель

$$J = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Исследуем на экстремум точку $M_1(0,0,1)$: четный минор $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = -144 < 0$. Значит, в точке M_1 экстремума нет.

Исследуем точку $M_2(24,-144,-1)$ на экстремум. Ее четный минор $\Delta = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, а знаки нечетных миноров

$$J_{M_2} = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$$ и $u''_{xx}(M_2) = 144 > 0$, т.е. совпадают.

Следовательно, в точке M_2 есть экстремум, причем минимум $u_{\min} = u(24,-144,-1) = -6913$.

26. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Условный экстремум.

Во многих задачах на отыскание экстремума функции ее переменные оказываются не независимыми переменными, а связанными друг с другом некоторыми добавочными условиями (так называемыми уравнениями связи). Здесь мы имеем дело с задачами на условный экстремум.

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ двух переменных называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что аргументы x, y связаны уравнением $\varphi(x,y)=0$ (уравнение связи). Для отыскания условного экстремума функции $f(x,y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x,y)=0$ применяют метод Лагранжа:

Составляют функцию Лагранжа. Обозначается Ф или L.
$L(x,y,\alpha)=f(x,y)+\alpha\cdot\varphi(x,y)$ где α - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции $L(x,y,\alpha)$.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\alpha\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\alpha\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial\alpha}=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные x, y и α. Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}dxdy,$$ для найденных значений x, y и α, полученных из системы уравнений, при условии, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0 \quad \left(dx^2+dy^2\neq 0\right).$$

А именно, функция $f(x,y)$ имеет условный максимум, если $d^2L<0$ и условный минимум, если $d^2L>0$.

В частности, если дискриминант $\Delta>0$ для функции Лагранжа в стационарной точке, то в этой точке имеется условный экстремум данной функции $f(x,y)$, причем условный максимум $f(x,y)$, если A<0 (или C<0), и условный минимум $f(x,y)$, если A>0 (C >0), где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Аналогично находится условный экстремум функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределённых множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 1 . Определить условный экстремум функции

$$z = 6 - 4x - 3y \text{ при условии } x^2 + y^2 = 1.$$

Решение. Геометрически данная задача сводиться к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z = 6 - 4x - 3y$ для точек пересечения её с прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа $L(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, где λ-неопределённый множитель; $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - уравнение связи.Находим $\frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$.Необходимые условия экстремума для функции L получаем из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Решая эту систем, получаем два решения $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ и $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{3}{5}$. Далее, находим $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$. Значит, $d^2 L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

При $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ имеем $d^2 L > 0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный минимум: $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$.

При $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{3}{5}$ имеем $d^2 L < 0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум: $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней своего наибольшего и наименьшего значений или во внутренних точках этой области, являющимися стационарными точками или в точках, лежащих на границе области. Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, надо:

1) Найти стационарные точки, расположенные внутри данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание 1. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти лишь стационарные точки и значения функции в них.

Замечание 2. Для функции $z = f(x, y)$ линии границы области являются функцией одной переменной: либо $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, либо $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$,

поэтому на соответствующих участках границы данная функция является функцией одной переменной.

Несколько уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходиться вводить в функцию Лагранжа столько неопределённых множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 2 . Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ внутри замкнутого треугольника $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$ (рис.26.1).

Решение.1) Находим стационарные точки внутри ΔAOB. Имеем : частные производные $z'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y)$;

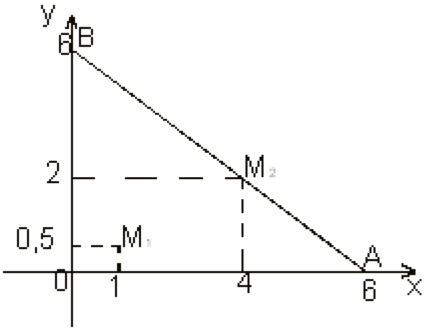


Рис. 26.1

Приравнивая эти производные к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy(4-3x-2y)=0 \\ x^2(2-x-2y)=0 \end{cases}$$

Так как $x>0,\ y>0$ для нахождения стационарных точек внутри ΔAOB, имеем систему $\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases}$, откуда $x_1=1;\ \ y_1=0{,}5$, из которой находим единственную стационарную точку $M_1(1;0{,}5)$, где значение функции $z(1;0{,}5)=\frac{1}{4}$.

2) Переходим к исследованию функции $z(x;y)$ на границах области, которая состоит из отрезков ОА оси ОХ, ОВ оси ОУ и отрезка АВ прямой.

а) На оси ОХ отрезок ОА: $y=0$, и заданная функция $z\big|_{y=0}=z(x{,}0)=0$, $0\le x\le 6$; аналогично, на оси ОУ отрезок ОВ: $y=0$, где также заданная функция $z\big|_{x=0}=z(0,y)=0$, $0\le y\le 6$.

б) Исследуем функцию на отрезке АВ: где прямая АВ задана уравнением $x+y=6$, $0\le x\le 6$. Поэтому функция на этой прямой будет зависеть от одной переменной х, где $y=6-x$:

$$z\big|_{AB}=z(x)=x^2(6-x)\cdot(2-x-(6-x))=-4x^2(6-x),$$
$0\le x\le 6$.

На концах отрезка [0,6]: $z(0)=z(6)=0$.

Находим критические точки функции $z(x)=-24x^2+4x^3$.

Имеем $z'_x=-48x+12x^2$. Решая уравнение $12x(x-4)=0$, получаем $x_2=4$; соответственно, $y_2=6-4=2$. Итак $M_2(4;2)$-критическая точка на отрезке АВ; значение функции $z\big|_{M_2}=z(4{,}2)=-128$. Следовательно, $z=\frac{1}{4}$

внутри ΔAOB в точке $M_1(1;0,5)$; $z=0$ на сторонах OB и OA и в вершинах ΔAOB; $z=-128$ на стороне AB. Итак, наибольшего значения функция достигла $z_{наиб} = z(1;0,5) = \frac{1}{4}$ в точке $M_1(1;0,5)$, а наименьшего значения $z_{наим.} = z(4;2) = -128$ на границе области в точке $M_2(4;2)$.

27. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные понятия

Дифференциальным уравнением называют уравнение типа

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (27.1)$$

где x - независимая переменная, $y = f(x)$ -искомая функция, $y', y'', ..., y^{(n)}$-ее производные. Решением дифференциального уравнения (27.1) называется такая функция $y = f(x)$, которая при подстановке ее и ее производных обращает равенство в (27.1) в тождество. Порядком дифференциального уравнения (27.1) называется наибольший порядок n входящей в него производной. Интегрированием дифференциального уравнение называется процесс нахождения его решения. Общим решением дифференциального уравнения (27.1) порядка n называется такое решение $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые являются функцией от независимой переменной x и от n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Частным решением называется решение, полученное из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Привести дифференциальное уравнение к квадратурам означает преобразовать это уравнение до вычисления интегралов (уравнение вычисляется в квадратурах).

Дифференциальное уравнение первого порядка

Разрешением относительно производной называется дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ которое можно записать в виде

$$y' = f(x, y). \qquad (27.2)$$

Уравнение с разделяющимися переменными.

Решение уравнений вида (27.2) сводится к нахождению неопределенных интегралов, если функция двух переменных $f(x, y)$ представима в виде произведения двух функций одной переменной $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$.

Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$, из (27.2) получаем

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad (27.3)$$

Уравнением с разделяющимися переменными называются уравнения вида (27.3). По-другому такие уравнения можно записать в виде

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (27.4)$$

или

$$M(x)dx = -N(y)dy.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства, получаем

$$\int M(x)dx = -\int N(y)dy.$$

Общим интегралом дифференциального уравнения называется его решение, которое находится в виде $F(x, y) = C$ или $F(x, y, C) = 0$.

Однородные уравнения и уравнения, приводящие к однородным

Однородной функцией порядка α называется функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию

$f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y),\alpha\geq 0$. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $y'=f(x,y)$, где $f(x,y)$-однородная функция нулевого порядка. Заменой

$$y=xu(x),y'=u(x)+xu'(x) \tag{27.5}$$

Оно становится к уравнению с разделяющимися переменными. К однородным сводятся уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{27.6}$$

С помощью замены

$$x=t+\alpha,y=s+\beta,y'=\frac{dy}{dx}+\frac{ds}{dt}\,. \tag{27.7}$$

<u>Пример 1.</u> Найти общий интеграл

$$y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9},$$

<u>Решение.</u>

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+8y-9}{10x-y-9},\quad \begin{matrix} y=ux \\ dy=udx+xdu \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}=-1-80=-81,\ \begin{cases} x+8y-9=0 \\ 10x-y-9=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x=9-8y \\ 90-80y-y-9=0 \end{cases}.$$

$$81-81y=0,\ y=1,\ x=9-8\cdot 1=1,\ \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=u+1 \\ y=v+1 \end{cases}.\ dx=du\,.$$

$$dy = dv,\; v' = \frac{u+1+8v+8-9}{10u+10-v-1-9},\; v' = \frac{u+8v}{10u-v},\; v' = \frac{1+8\frac{v}{u}}{10-\frac{v}{u}}.$$

Делаем замену $\frac{v}{u} = z$, $v = uz$, $v' = z + z'u$, $z + z'u = \frac{1+8z}{10-z}$,

$$z'u = \frac{1+8z+z^2-10z}{10-z} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{du}u = \frac{z^2+8z-10z+1}{10-z},$$

$$\frac{u}{du} = \frac{z^2-2z+1}{(10-z)dz},$$

$$\frac{du}{u} = \frac{(10-z)dz}{z^2-2z+1},\quad \frac{du}{u} = \frac{(10-z)dz}{(z-1)^2} \quad \text{и} \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{(10-z)dz}{(z-1)^2}$$

т.е.

$$\ln|c| + \ln|u| = \frac{9}{1-z} - \ln|z-1|,\; \frac{9}{1-z} - \ln|z-1| - \ln u = c,$$

$\frac{9u}{u-v} - \ln|v-u| = c$. Ответ: $\frac{9(x-1)}{x-y} - \ln|y-x| = c$

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)x^{\alpha}y^{\alpha}. \tag{27.8}$$

Для интегрирования этого уравнения сделаем замену

$$y = u(x)v(x) = uv, y' = u'v + uv'. \tag{27.9}$$

Таким образом вместо одной независимой функции вводятся две. При этом появляется возможность выбрать одну из функций $u = u(x)$ или $v = v(x)$ исходя из соображений удобства. Подставим y и y’ в дифференциальное уравнение. Получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)y^{\alpha}$, или

$$u'v + u(v+' + p(x)v) = q(x)y^{\alpha} = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}.$$

Положим $v' + p(x)v = 0$, тогда получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$.

Проинтегрировав это уравнение, найдем функцию $v=v(x)$. Подставив ее в уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно функции $u=u(x)$, после интегрирования которого найдем искомую функцию $y=u(x)v(x)$.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$y^2dx+\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right)dy=0\ , \qquad y|_{x=e}=2$$

Решение.

$$y^2dx=-\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right)dy,\ \ y^2\frac{dx}{dy}=-\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right),$$

$$y^2\cdot xy'=-\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right),\ \ xy'=\frac{-\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right)}{y^2}$$

$$xy'+\frac{x}{y^2}=-\frac{e^{\frac{2}{y}}}{y^2}$$

$$x=uv \Rightarrow x=u'v+uv',\ \ u'v+uv'+\frac{uv}{y^2}=-\frac{e^{\frac{2}{y}}}{y^2}$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{y^2}\right)=-\frac{e^{\frac{2}{y}}}{y^2}$$

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{y^2}=0 \\ u'v=\dfrac{e^{\frac{2}{y}}}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dy}{y^2} \\ u'v=\dfrac{e^{\frac{2}{y}}}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=e^{\frac{1}{y}} \\ u'=-\dfrac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v = e^{\frac{1}{y}} \\ u = e^{\frac{1}{y}} + c \end{cases} \Rightarrow x = uv = e^{\frac{2}{y}} + c \cdot e^{\frac{1}{y}}, \quad y\big|_{x=e} = 2, \quad c = 0, x = e^{\frac{2}{y}}$$

Ответ: $x = e^{\frac{2}{y}}$

Уравнение в полных дифференциалах.

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (27.10)$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = u(x,y)$, т. е.

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy,$$

или

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx, \; Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy.$$

Из первого из этих уравнений находим

$$u = u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y).$$

Можно доказать, что если выполнено условие

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \qquad (27.11)$$

то Pdx+Qdy=0 уравнение в полных дифференциалах.

Пример 3. Найти общий интеграл:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

Решение.

$$N(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$M(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}=x\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial M}{\partial x}=y\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{y^2}$$

$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}$, => данное уравнение в полных дифференциалах

$$u=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y)=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{y}+\varphi(y)=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|x|+\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=M=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2},$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y},\ \varphi(y)=\int\frac{dy}{y}+c_2=\ln y+c_2,$$

$$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=c$$

Ответ: $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=c$

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x). \tag{27.12}$$

Уравнение (27.12) называется однородным, если q(x)=0. Решение уравнения (27.12) ищутся в виде произведения двух неизвестных функций $y = u(x) \cdot v(x)$. Так как

$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, то из (12) следует, что

$u'v + uv' + puv = q$ или

$$u'v + u(v' + pv) = q \qquad (27.\ 13)$$

Выберем функцию $v = v(x)$

такой, чтобы выполнялось равенство

$$v' + pv = 0\ . \qquad (27.14)$$

Это возможно сделать, решая уравнение (27.14) с разделяющимися переменными. После выбора функции $v = v(x)$ уравнение (27.13) примет вид $u'v = q$. Это уравнения является также решением уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим функцию $u = u(x)$.

Тогда функция $y = v(x)v(x)$ будет решением уравнения (27.12). Таким образом, интегрирование линейного дифференциального уравнения первого порядка сводится к интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

<u>Дифференциальные уравнения высших порядков</u>

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, n > 1$.

Разрешенным относительно старшей производной называется уравнение $y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Условиями Коши или начальными условиями для уравнения n-го порядка называются соотношения

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (27.15)$$

где x_0, y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$-заданные числа. Задача нахождение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условием, называется задачей Коши. Некоторые уравнения высших порядков допускают понижение порядка. Для примера рассмотрим дифференциальные уравнения второго порядка:

а) $F(x, y', y'') = 0$

б) $F(y, y', y'') = 0$.

В случае а замена $z = y'$, $z' = y''$ приводит к уравнению первого порядка $F(x, z, z') = 0$; в случае б) замена

$$y' = \frac{dy}{dx} = p = p(y),\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Также имеем уравнение первого порядка $F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$.

<u>Пример 4.</u> Найти решение задачи Коши.

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

<u>Решение.</u>

$k^2 + 9 = 0$, $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$.

$$y_{общ} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

$$c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x).$$

$$\begin{matrix} y_1 = \cos 3x & y_1' = -3\sin 3x \\ y_2 = \sin 3x & y_2' = 3\cos 3x \end{matrix}$$. Пусть $f(x) = \frac{9}{\sin 3x}$.

$$\begin{cases} c_1' \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 = 0 \\ c_2' \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' = f(x) \end{cases}, \begin{cases} c_1' \cdot \cos 3x + c_2' \sin 3x = 0 \\ c_1'(-3\sin 3x) + c_2' \cdot 3\cos 3x = \frac{9}{\sin 3x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = \cos 3x \cdot 3\cos 3x -$$

$$-\sin 3x(-3\sin 3x) = 3$$

$$c_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{W} = -\frac{-\sin 3x \cdot \dfrac{9}{\sin 3x}}{3},\ c_1' = -3,\ c_1 = -3x + c_3.$$

$$c_2' = \frac{-y_1 \cdot f}{W} = -\frac{\cos 3x \cdot \dfrac{9}{\sin 3x}}{3} = 3ctg\,3x,$$

$$c_2' = \frac{-y_1 \cdot f}{W} = -\frac{\cos 3x \cdot \dfrac{9}{\sin 3x}}{3} = 3ctg\,3x,$$

$$c_2 = \ln \sin 3x + c_4$$

$$y = (-3x + c_3)\cos 3x + (\ln|\sin 3x| + c_4)\sin 3x.$$

$$y' = (-3)\cos 3x + (-3x + c_3)(-\sin 3x)3 +$$

$$+\left(\frac{1}{\sin 3x}\cos 3x \cdot 3\right)\sin 3x + (\ln|\sin 3x| + c_4)\cos 3x \cdot 3$$

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases},\ \begin{cases} (\ln + c_4)\cdot 1 = 4 \\ \left(-\dfrac{\pi}{2} + c_3\right)(-1)\cdot 3 = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases},\ \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = 4 \end{cases}.$$

Ответ: $y = -3x\cos 3x + (\ln|\sin 3x| + 4)\sin 3x$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентам называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = r(x), \qquad (27.16)$$

где p, q- некоторые числа; r(x)-функция от x.

Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение (27.16), в котором правая часть r(x) равна нулю:

$$y''+py'+qy=0\ . \tag{27.17}$$

Общее решение уравнения (27.16) равно сумме какого либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (27.17). Опишем сначала способ нахождения общего решения однородного уравнения (27.17).

Характеристическим уравнением для однородного Уравнения (27.17) называется квадратное уравнение

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{27.18}$$

Относительно неизвестной λ . В соответствии со знаком дискриминанта $D=p^2-4q$ возможны три случая:

1) $D>0$: характеристическое уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2 ;

2) $D=0$: характеристическое уравнение имеет один корень λ_0 ;

3) $D<0$: действительных корней характеристическое Уравнение не имеет. В этом случае находятся числа

$$\alpha=-p/2,\ \beta=\sqrt{q-p^2/4}\ .$$

Найдем решение уравнения (27.17) для всех этих случает.

1. Если характеристическое уравнение (27.18) имеет два различных корня $\lambda_1\neq\lambda_2$, то общее решение уравнения (27.17) имеет вид

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}\ , \tag{27.19}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Если характеристическое уравнение (27.18) имеет единственный корень λ_0 , то общее решение уравнения (27.17) имеет вид

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_0 x} \tag{27.20}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. характеристическое уравнение (27.18) не имеет корней,

то общее решение уравнения (27.17) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \;, \tag{27.21}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

$\alpha = -p/2,\ \beta = \sqrt{q - p^2/4}$. Способы нахождения частных решений неоднородного уравнения (27.16) зависят от вида правой части и в явном виде находятся только для функций f(x) специального вида. Пусть f(x) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(Q(x)\sin \beta x + P(x)\cos \beta x)\,, \tag{27.22}$$

где α, β - некоторые числа, причем β не равно нулю, Q(x), P(x)-многочлены от x. В этом случае частное решение уравнения (27.16) ищется в виде

$$y = x^z e^{\alpha x}\left(U(x)\cos \beta x + V(x)\sin \beta x\right), \tag{27.23}$$

где U(x),V(x)-многочлены, степени которых равны наибольшей из степеней многочленов P(x) и Q(x). При этом показатель s выбирается по следующему правилу:

1) z=0, если

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha p + q)^2 + (2\alpha + p)^2 \neq 0\,; \tag{27.24}$$

2) z=1

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + \alpha p + q = 0, \\ 2\alpha + p = 0 \end{cases} \tag{27.25}$$

Многочлены U(x) и V(x) указанной степени в формуле (27.23) записываются в общем виде с произвольными коэффициентами. Затем находится производные y’ и y’’ функции (27.23). После подстановки y, y’ и y’’ в уравнение (27.16) получается линейная система уравнений для определения коэффициентов многочленов U(x) и V(x). Пусть правая часть уравнения (27.16) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P(x)\,, \tag{27.26}$$

где α-некоторое число, P(x)- многочлен от x (этот случай получается из (27.22) при β=0).Частное решение уравнения (27.16) ищется в виде

$$y = x^z e^{\alpha x} U(x)\,, \tag{27.27}$$

где U(x)-многочлен с неопределенными коэффициентами, степень которого равна степени многочлена P(x). При этом показатель z выбирается по следующему правилу:

1) Z=0, если

$$\alpha^2 + \alpha p + q \neq 0, \tag{27.28}$$

2) Z=1

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha p + q = 0, \\ p^2 - 4q \neq 0 \end{cases} \tag{27.29}$$

3) Z=2

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha p + q = 0, \\ p^2 - 4q = 0 \end{cases} \tag{27.30}$$

Пример 5 . Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$$

Решение.

Найдем общее решение однородного уравнения
$y'' + 2y' + 5y = 0$
Составим и решим характеристическое уравнение
$k^2 + 2k + 5 = 0; (k+1)^2 = -1;$
$k_1 = -1 - 2i; k_2 = -1 + 2i; a = -1; b = 2; r = 0$
$y = \overline{y} + y = y_{о.о} + y_{ч.н.}$

$$\bar{y} = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$

$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 5A\cos 2x + 5B\sin 2x = -\sin 2x$$

$$(A + 4B)\cos 2x + (B - 4A)\sin 2x = -\sin 2x$$

$$\begin{cases} A + 4B = 0, \\ B - 4A = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -4B, \\ B + 16 = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{4}{17}, \\ B = -\dfrac{1}{17}. \end{cases}$$

$$y = \frac{4}{17}\cos 2x - \frac{1}{17}\sin 2x$$

Общее решение данного уравнения

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{17}(4\cos 2x - \sin 2x)$$

Ответ: $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{17}(4\cos 2x - \sin 2x)$

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами решаются также, как и уравнения 2-го, но с учетом порядка уравнения (см. пример 6)

Пример 6 . Найти общее решение уравнения:

$$y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x$$

Решение.

$y = \bar{y} + Y$, $k^3 - 4k^2 + 4k = 0$ - характеристическое ур-е,

$k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2$, $\bar{y} = c_1 + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 x \cdot e^{2x}$ - общее решение однородного уравнения

$$У = x^r e^{2x}\left(Pe(x)\cos\beta x + Qe(x)\sin\beta x\right)$$

$$\alpha = 1\ ,\ \beta = 0,\ \alpha + \beta_i = 0,\ r = 2, l = 1$$

$$У = e^x\left(Ax + B\right),\ У' = e^x\left(Ax + B + A\right)$$

$$У^{//} = e^x\left(Ax + B + 2A\right), У^{///} = e^x\left(Ax + B + 3A\right)$$

$$e^x\left(Ax + B + 3A\right) - 4e^x\left(Ax + B + 2A\right) + 4e^x\left(Ax + B + A\right) = (x-1)e^x,$$

$$Ax + B - A = (x-1)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - A = -1 \end{cases}$$

$$A = 1, B = 0, У = x \cdot e^x,\ y = c_1 + (c_2 + c_3 x) \cdot e^{2x} + xe^x$$

Ответ: $y = c_1 + (c_2 + c_3 x) \cdot e^{2x} + xe^x$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (27.31)$$

Представляет собой общий вид дифференциального уравнения второго порядка с правой частью f(x). Здесь $a_1(x), a_2(x), f(x)$ -некоторые непрерывные функции.

Уравнение (27.31) называется однородным, если f(x)=0. Задачей Коши называется задача решения уравнения (27.31) при заданных начальных условиях $y({}_0x) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. Линейными независимыми решениями однородного уравнения называется решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, для которого определитель Вронского (вронскиан)

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x, \qquad (27.32)$$

И линейно зависимыми, если $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$ для некоторых x. Известно, что всякое линейное уравнение однородное уравнение

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = 0 , \tag{27.33}$$

где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ - непрерывные функции, имеет два линейно независимых решения. Фундаментальной системой решений называется система двух линейно независимых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, являющихся решениями однородного уравнения (27.33). Для решений уравнений вида (27.31) применяется метод вариации произвольных постоянных, который заключатся в том, что общее решения уравнения (27.31) ищется в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) , \tag{27.34}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ -функции, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) . \end{cases} \tag{27.35}$$

Из системы (27.35) находится

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} , \quad C_1'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} \tag{27.36}$$

Тогда

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx + C_1 \tag{27.37}$$

$$C_1(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} + C_2$$

28. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + f_2(x), \end{cases} \qquad (28.1)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$-непрерывные функции. Система (28.1) называется однородной, если $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $\forall x$. Решением системы (28.1) называется вектор-функция

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad (28.2)$$

координатные функции которой для всех x удовлетворяют каждому из равенств (28.1).

Задача Коши для системы (28.1) формируется следующим образом: найти решение $y=y(x)$ системы, которые при $x=x_0$ удовлетворяют условиям $y_1(x_0)=y_1^0$, $y_2(x_0)=y_2^0$, где y_1^0 и y_2^0-заданные числа.

Если ввести векторы ***y***, $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и матрицу

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, то систему можно записать в матричном виде

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ay + f(x). \qquad (28.3)$$

Вектор-функция $y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix}$ и $y_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix}$ называются линейно независимыми, если существуют числа α_1 и α_2, такие что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \qquad (28.4)$$

и линейно независимыми, если тождество (28.4) выполняется в единственном случае, когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Фундаментальной системой решений однородной системы $y' = Ay$ называется два ее линейно независимых решения $y_1(x)$, $y_2(x)$. Общим решением системы $y' = Ay$ называется решение

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \,, \qquad (28.5)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, y_1, y_2 – фундаментальная система решений. Частным решением y_0 системы (28.1) называется любое решение, удовлетворяющее ей. Общим решением неоднородной системы является вектор-функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x) \,, \qquad (28.6)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - фундаментальная система, $y_0(x)$ - некоторое частное решение. Рассмотрим метод исключения

Пример . Методом исключения решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + 3y + 4z = 0, \\ z' + 2y + 5z = 0, \end{cases}$$

где $y = y(x), z = z(x),\ y(0) = 1,\ z(0) = 4$.

Решение: Продифференцируем первое уравнение системы: $y'' + 3y' + 4z' = 0$ и подставим в него $z' = -2y - 5z$ из второго уравнения. Тогда получим $y'' + 3y' - 8y - 20z = 0$. В это уравнение подставим $z = -\frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}y$ из первого уравнения, получим $y'' + 8y' + 7y = 0$. Решив характеристическое уравнение $\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0$, найдем $\lambda_1 + -1, \lambda_2 = -7$ и общее решение $y = C_1 e^x + C^2 e^{-7x}$. Тогда

$$z = -\frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}y = -\frac{1}{4}(-C_1 e^x - 7C_2 e^{-7x}) - \frac{3}{4}(C_1 e^x + C_2 e^{-7x}) =$$

$$= -\frac{1}{2}C_1 e^x + C_2 e^{-7x}.$$

Используя начальные условия, получим

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ z(0) = -\dfrac{1}{2}C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 3, \end{cases}$$

т.е. решением задачи Коши являются функции

$$y = -2e^{-x} + 3e^{-7x},\ z = e^{-x} + 3e^{-7x}.$$

29. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Основные понятия и определения числовых рядов

Числовым рядом называется сумма бесконечного множества слагаемых

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \qquad (29.1)$$

являющихся членами бесконечной числовой последовательности $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, ... Член $a_n = f(n)$ называется общим членом ряда (29.1). Сумма первых n членов ряда $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется n-ой частичной суммой S_n.

Ряд (29.1) называется сходящимся, если предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$ при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда величина S называется суммой ряда, а величина $R = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$ – остаток ряда (29.1).

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (29.1) называется расходящимся.

Расходящийся ряд суммы не имеет. Сходимость или расходимость ряда не нарушается, если прибавить или отбросить конечное число его членов. Например, ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ расходящийся, так как последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет предела:

$S_1 = 1;\ S_2 = 1 - 1 = 0;\ S_3 = 1 - 1 + 1 = 1;\ ...$.

Если ряд (29.1) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ - <u>необходимый признак сходимости любого ряда</u>. Обратное утверждение неверно. Значит, если

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (29.1) расходится.

<u>*Нахождение суммы знакоположительного ряда*</u>

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{M}{n^2 + pn + q}$, где M, p, q — целые числа. Если корни знаменателя в общем члене $\dfrac{M}{n^2 + pn + q}$ различаются на целое число, то члены последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм такого ряда нетрудно найти, ибо в выражении $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ многие слагаемые взаимно уничтожаются. Поэтому, найдя корни квадратного трехчлена $n^2 + np + q$, разлагаем на множители знаменатель дроби, затем разлагаем общий член a_n ряда на элементарные дроби и выписываем несколько членов ряда, чтобы увидеть закономерность, какие слагаемые сократятся при вычислении n-ой частичной суммы. Составляем S_n и вычисляем сумму ряда по формуле $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

<u>Пример 1.</u> Найти сумму следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$$

<u>Решение</u>.

а) Находим корни уравнения $36n^2+12n-35=0$.

Дискриминант $D=144\times 36>0$; корни $n_1=5/6, n_2=-7/6$, различаются на целое число 2. Тогда $36n^2+12n-35=36(n-5/6)(n+7/6)$.

б) Общий член ряда разлагаем на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n = \frac{12}{36n^2 + 12n - 35} = \frac{12}{36(n-5/6)(n+7/6)} =$$

$= \dfrac{A}{6n-5} + \dfrac{B}{6n+7}$, где A, B — коэффициенты, подлежащие определению. Умножив на знаменатель левой части, получаем тождество $12=A(6n+7)+B(6n-5)$. Полагая последовательно $n_2=-7/6$ и $n_1=5/6$, находим: при $n_2=-7/6$: $12=-12B$; $B=-1$;

при $n_1=5/6$: $12=12A$; $A=1$. Значит, $a_n = \dfrac{1}{6n-5} - \dfrac{1}{6n+7}$.

в) Выписываем, начиная с $n=2$, несколько членов ряда, чтобы увидеть, какие слагаемые сокращаются при вычислении

S_n: $a_2 = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{19}$, $a_3 = \dfrac{1}{13} - \dfrac{1}{25}$, $a_4 = \dfrac{1}{19} - \dfrac{1}{31}$,

$a_5 = \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{37}$, $a_6 = \dfrac{1}{31} - \dfrac{1}{43}$,…, $a_{n-2} = \dfrac{1}{6n-17} - \dfrac{1}{6n-5}$,

$a_{n-1} = \dfrac{1}{6n-11} - \dfrac{1}{6n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{6n-5} - \dfrac{1}{6n+7}$.

г) Составляем n-ую частичную сумму ряда и сокращаем все слагаемые, какие возможно:

$$S_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{19} + \frac{1}{13} - \frac{1}{25} + \frac{1}{19} - \frac{1}{31} + \frac{1}{25} - \frac{1}{37} + \frac{1}{31} - \frac{1}{43} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{6n-17} - \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-11} - \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n+7} =$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n+7}..$$

д) Вычисляем сумму ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{20}{91} - \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+7}\right) = \frac{20}{91}$$

Исследование сходимости знакоположительных рядов

Рассмотрим ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \qquad , \qquad (29.2)$$

где $a_n \geq 0$, при $\forall n \in N$.

Так как все члены ряда (29.2) положительны, то частичная сумма S_n возрастает с возрастанием n. Поэтому знакоположительный ряд (29.2) либо сходится, когда $\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$, либо его сумма бесконечная: $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \infty$ и ряд расходится.

Перечислим основные <u>достаточные признаки сходимости и расходимости знакоположительных рядов.</u>

I. <u>Первый признак сравнения.</u> Если $0 \leq a_n \leq b_n$, начиная с некоторого номера $n=n_0$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \qquad (29.3)$$

сходится, то ряд (29.2) также сходится. Если ряд (29.2) расходится, то расходится и ряд (29.3).

II. <u>Второй (предельный) признак сравнения.</u> Если существует <u>конечный</u> и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \neq 0$ (в частности, если $a_n \sim b_n$), то ряды (29.2) и (29.3) сходятся или расходятся одновременно.

В качестве рядов для сравнения удобно использовать один из следующих рядов:

1. Геометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} cq^n = c + cq + cq^2 + \ldots + cq^n + \ldots$$

(c=const), который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

2. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots$, являющийся расходящимся рядом.

3. Обобщенный гармонический ряд (Дирихле)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\ldots$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Замечание. Для оценки общего члена ряда удобно использовать неравенства $-1\leq \sin\ n\leq 1$, $-1\leq \cos\ n\leq 1$,

$\pi/4\leq arctg\ n<\pi/2$, $0\leq \ln\ n<n^p$ $(\forall p>0)$, *и т. п.*

Пример 2. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^n}+\ldots$$

сходится по первому признаку сравнения, так как

$a_n=\frac{1}{n3^n}<\frac{1}{3^n}=b_n$ Для сравнения взяли сходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{\cdot 3^2}+\ldots$, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$\left\{\frac{1}{3^n}\right\}=\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\ldots$, знаменатель которой $q=1/3$ меньше 1, а сумма всех ее членов равна $S=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

III. Признак Даламбера. Пусть $a_n>0$(начиная с некоторого номера $n=n_0$). Если для ряда (29.2) существует предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд (29.2) сходится, а при $q>1$ ряд (29.2) расходится.

IV. Признак Коши. Пусть $a_n\geq 0$ (начиная с некоторого номера $n=n_0$). Если для ряда (29.2) существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд (29.2) сходится, а при $q>1$ ряд (29.2) расходится.

Замечание 1. Признаки Даламбера и Коши при $q=1$ ответа не дают. Тогда следует применить другой признак сходимости.

Замечание 2. При вычислении пределов полезно иметь в виду, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln\ n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)}=1$, где $P(n)$ — многочлен относительно n. Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3-2n+5}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3(1-2/n^2+5/n^3)}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^3=1.$$

V. Интегральный признак Коши. Если $a_n=f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x\in[c,\infty)$, где $c\geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_c^{\infty}f(x)dx$. Устанавливают сходимость несобственного интеграла обычно по определению: $\int\limits_c^{\infty}f(x)dx=\lim\limits_{M\to\infty}(F(x)\Big|_c^M)=\lim\limits_{M\to\infty}(F(M)-F(c)$, когда первообразная функции $F(x)$ легко вычисляется.

.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ расходящийся по интегральному признаку. Действительно, $a_n=f(n)=\frac{\ln n}{n}>0$ при $n>2$ функция $f(x)=\frac{\ln x}{x}$-положительная, непрерывная и монотонно убывающая при $x \in [3,\infty)$,ибо $f^{/}(x) = (\frac{\ln x}{x})^{/} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$,т.к. $\ln x > 1$ при $x \geq 3$, $\ln 3 \approx 1{,}099$ и интеграл $\int\limits_3^\infty \frac{\ln x}{x} dx = \lim\limits_{M\to\infty} \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_3^M = \lim\limits_{M\to\infty}(\frac{\ln^2 M}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}) = \infty$, то есть расходится. Здесь $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x)$

Знакопеременные ряды. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов

Рассмотрим ряд, члены которого имеют разные знаки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \Lambda \qquad (29.4)$$

Ряды с произвольным чередованием знаков всех членов называются знакопеременными рядами. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \Lambda \;, \qquad (29.5)$$

где величины $b_n \geq 0 \text{для} \forall n \geq 1$, называется знакочередующимся. Это такой ряд, в котором два любых соседних члена имеют противоположные знаки.

Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \Lambda \;, \qquad (29.6)$$

составленный из модулей (абсолютных величин) членов ряда (29.4) сходится, то ряд (29.4) так же сходится и называется абсолютно сходящимся. Для исследования на абсолютную сходимость ряда (29.4) можно исследовать для ряда (29.6) известные признаки сходимости для знакоположительных рядов. В частности:

а) Ряд (29.4) сходится абсолютно, если абсолютные величины членов ряда (29.4) не превосходят членов сходящегося знакоположительного ряда: $|u_n| \le a_n$, где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящийся.

б) Ряд (29.4) сходится абсолютно, если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1$.

в) Если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, то расходится не только ряд (29.6), составленный из модулей, но и исходный ряд

(29.4). В общем случае из расходимости ряда из модулей (29.6) не следует расходимость ряда (29.4). Ряд (29.4) называется условно (не абсолютно) сходящимся, если он сходится, а соответствующий ему ряд (29.6) из модулей расходится.

Пример 4 .

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\cdot\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\left(\frac{5}{9}\right)^5-\Lambda\ .$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n(n-1)/2}\cdot\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n\right| = 1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\Lambda+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\Lambda$$

Так как $q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}<1$, то исследуемый ряд сходится абсолютно.

Признак Лейбница. Если для *знакочередующегося* ряда (29.5) выполнены два условия: 1) его члены убывают по абсолютной величине $|b_1| \ge |b_2| \ge \Lambda$ и 2) его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, то ряд (29.5) сходится (по крайней мере, условно). Для остатка ряда $R_n = S\text{-}S_n$, в этом случае имеет место оценка $\left|R_n\right| \le b_{n+1}$, то есть остаток ряда R_n не превосходящей первого из отброшенных его членов.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5\text{n}-1}},$$

Решение. 1) Данный знакочередующийся ряд

$$\frac{-tg\,\dfrac{\pi}{4}}{\sqrt{4}} + \frac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}}{\sqrt{9}} - \frac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}}{\sqrt{14}} + \frac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{4}}}{\sqrt{19}} - \Lambda$$ сходится по признаку Лейбница, так как выполнены два условия: монотонное убывание модулей членов ряда $\dfrac{tg\,\dfrac{\pi}{4}}{\sqrt{4}} > \dfrac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}}{\sqrt{9}} > \dfrac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}}{\sqrt{14}} > \Lambda$;

$$2)\ \lim_{\text{n}\to\infty} b_n = \lim_{\text{n}\to\infty} \frac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5\text{n}-1}} =. \lim_{\text{n}\to\infty} \frac{\pi}{4\sqrt{n}\sqrt{5\text{n}-1}} = 0$$

Сходимость данного ряда условная, так как ряд из модулей его членов $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{\text{n}}}}{\sqrt{5\text{n}-1}}$– расходится вместе с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4\text{n}\sqrt{5-1/\text{n}}}$, который получили при упрощении общего члена, воспользовавшись тем, что $tg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}} \sim \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

Ответ: Исследуемый ряд условно сходится.

Отметим следующие свойства сходящихся знакопеременных рядов

Свойство 1. Если ряд (29.4) абсолютно сходится, то ряд, полученный после любой перестановки бесконечного множества его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Свойство 2. Если ряд (29.4) условно сходится, то от перемены мест его членов сумма ряда изменяется и больше того имеет место теорема (Римана): Сумма ряда, сходящегося условно зависит от порядка, в котором расположены его члены. Изменяя этот порядок, можно заставить ряд иметь своей суммой любое число или сделать его даже расходящимся.

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \Lambda$, *где* $b_n > 0$. (29.7)

Требуется с заданной точностью ε вычислить его сумму (в случае сходимости ряда). Если выполнены два условия признака Лейбница:

1) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \Lambda$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то для остатка R_n ряда (29.7) справедливо неравенство $|R_n| \leq b_{n+1}$, где b_{n+1} - первый из отброшенных членов ряда. Если $b_{n+1} < \varepsilon$, то и подавно $|R_n| < \varepsilon$. Поэтому, решая неравенство $b_{n+1} < \varepsilon$ при конкретных значениях n, находим число n - количество членов ряда, которое необходимо взять для вычисления суммы S. Затем непосредственно вычисляем n-ую частичную сумму S_n . Так как $|S - S_n| = |R_n| < \varepsilon$, то приближенно за сумму S ряда принимаем n-ую частичную суммы S_n:

$$S \approx S_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \Lambda + (-1)^{n+1} b_n .$$

Пример 6 . Вычислить сумму ряда с точностью ἑ .

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n}{(1+n^3)^2}, \ \varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001.$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся и сходящийся абсолютно, так как $b_n = \frac{n}{\left(1+n^3\right)^2} = \frac{n}{n^6\left(\frac{1}{n^3}+1\right)^2} \sim \frac{1}{n^5}$

и ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ сходится ($p=5>1$).

Члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

$$\frac{1}{4} > \frac{2}{\left(1+2^3\right)^2} > \frac{3}{\left(1+3^3\right)^2} > \frac{4}{\left(1+4^3\right)^2} > \Lambda$$

Следовательно, справедливо неравенство

$\left|R_n\right| \le b_{n+1} = \frac{n+1}{\left(1+(n+1)^3\right)^2}$. По условию ε =0.001.

Если $b_{n+1} < 0{,}001$, то и $\left|R_n\right| \le b_{n+1} < 0{,}001$. Поэтому, решая неравенство $\frac{n+1}{\left(1+(n+1)^3\right)^2} < 0{,}001$, находим при

$n=1$: $b_1=2/81 \approx 0{,}0247>0{,}001$

$n = 2 : b_3 = \frac{3}{28^2} = \frac{3}{784} = 0{,}0038... > 0.001;$

$n=3$: $b_3=4/65^2 \approx 0{,}00094<0{,}001$.

Итак, $n \ge 3$. Получили, что четвертый член удовлетворяет заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Значит, для вычисления суммы ряда с точностью 0.001 достаточно взять первые три члена ряда. Вычисляем частичную сумму $S_3 = -\frac{1}{4}+\frac{2}{81}-\frac{3}{784} \approx -0{,}229$. Таким образом, сумма, вычисленная с заданной точностью, данного ряда $S \approx S_3 \approx -0{,}229 \mu 0{,}001$.

Ответ: $S \approx -0{,}229 \mu 0{,}001$.

30. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Основные теоретические сведения

Ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (30.1)$$

члены которого – функции от x, называется функциональным. Множество значений аргумента x, при которых функции $f_i(x), i=1,2,\ldots$ определены и функциональный ряд (30.1) сходится, называется областью сходимости этого ряда. При действительном значении аргумента областью сходимости является какой-либо промежуток оси OX. При конкретном значении $x=x_0$ ряд (30.1) становится числовым. Функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ - сумма первых n членов ряда (30.1), а x принадлежит области сходимости, называется суммой ряда. Разность между суммой S(x) сходящегося ряда и его частичной суммой $S_n(x)$ называется остатком ряда (30.1):

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+m}(x)+\ldots,$$

причем в области сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Сходящийся функциональный ряд (30.1) называется равномерно сходящимся в некоторой области X, если для любого сколь угодно малого числа ε >0 найдется такое целое число N >0, начиная с которого, т.е. при $n\geq N$, выполняется неравенство $|R_n(x)|\langle\varepsilon$ одновременно сразу для всех x из области X. Достаточным признаком равномерной сходимости рядов является следующий признак Вейерштрасса. Ряд (30.1 равномерно сходится в данной области X, если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, что для всех значений x$\in X$ имеет место неравенство $|f_n(x)| \leq C_n$. При этом сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ $(C_n \rangle 0)$ называется мажорантой для ряда (30.1).

Пример 1. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ являются равномерно сходящимися в любой области, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, т.к. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|, |a_n \sin nx| \leq |a_n|$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов:

1. Если члены равномерно сходящегося ряда (30.1) непрерывны на некотором отрезке, то его сумма также непрерывна на этом отрезке.

2. Равномерно сходящийся ряд (30.1) можно почленно интегрировать в данной области X, если его члены непрерывны в области X, причем сумма интегралов от членов ряда равна интегралу от суммы данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx \text{, где } [\alpha, \beta] \subset X$$

3. Если ряд (30.1) сходится к сумме S(x) на отрезке X, причем его члены имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ при x$\in X$ и ряд, составленный из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$, равномерно сходящийся на том же отрезке, то $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, т.е. ряд (30.1) можно почленно дифференцировать.

Нахождение области сходимости
функциональных рядов

Для определения области сходимости функционального ряда (30.1) достаточно применить к этому ряду известные признаки сходимости, считая аргумент x фиксированным. Например, при использовании признаков Даламбера или Коши поступают так:

1) Находят q(x) по одной из формул (если пределы существуют)

$$q(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{или} \quad q(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} \qquad (30.2)$$

2) Решают неравенство q(x)<1 (т.к. по признакам Даламбера и Коши ряд сходится при q<1 и расходится при q>1). В результате находим интервал сходимости.

3) Исследуется поведение ряда в концевых точках интервала сходимости.

Пример2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$

Решение. Рассмотрим три случая

a) Если $|x|\langle 1$, то $x^{2n}\to 0$ при $n\to\infty$ и

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1$. Необходимый признак сходимости ряда не выполнен. Следовательно, ряд расходится при -1<x<1.

b) Если $|x|=1$, то также получаем расходящийся ряд

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$

c) Если $|x|\rangle 1$, то применим первый признак сравнения

$f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}\langle\dfrac{1}{x^{2n}}=\varphi_n(x)$, где сходящийся

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\dfrac{1}{x^2}\langle 1$, т.е. $|x|\rangle 1$. Итак, исследуемый ряд сходится при $|x|\rangle 1$; его область сходимости $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

<u>Интервал и радиус сходимости степенного ряда</u>

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$C_0+C_1(x-a)+\ldots+C_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x-a)^n, \qquad (30.3)$$

где коэффициенты $C_i(i=0,1,2,\ldots)$- действительные числа.

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что если ряд (30.3) сходится при $x=x_0$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x-a|<|x_0-a|$ (теорема Абеля). Следствием теоремы Абеля является существование для всякого степенного ряда (30.3) интервала сходимости $|x-a|<R$ с центром в точке *x=a,* внутри которого ряд (30.3) сходится абсолютно ; при $|x-a|>R$ ряд (30.3) расходится. <u>Радиус сходимости R</u> (т.е. половина длины интервала сходимости) может быть в частных случаях равен также 0 и ∞. В конечных точках $x=a\pm R$ интервала сходимости возможна как сходимость, так и расходимость ряда (30.3). Интервал сходимости определяют обычно с помощью признаков Даламбера или Коши, применяя их к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда. Но если

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| \text{ или } L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}\ , \qquad (30.4)$$

где C_n и C_{n+1} - коэффициенты соответственно n-го и (n+1)-го членов ряда (30.3), то радиус сходимости ряда (30.3) определяется по формуле $R=\dfrac{1}{L}$. Однако пользоваться формулами (30.4) следует весьма осторожно. Если L=0, то R=∞ и ряд (30.3) сходится при $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. Если L=∞, то R=0 и ряд (30.3) расходится при любом x, кроме x=0.

Пример 3 . Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

Решение. Имеем коэффициенты ряда $C_n=\dfrac{1}{n\cdot 5^n}, C_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}$. Найдем число L (см.формулы 30.4). $L=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$. Следовательно, радиус сходимости R=5. Интервал сходимости ряда $|x-3|<5$ с центром в точке $x_0=3$ или $-5<x-3<5$ есть $-2<x<8$. Исследуем поведение ряда в концевых точках интервала:

При x=8: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - расходящийся гармонический ряд

При x=-2: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ - условно сходящийся (по Лейбницу).

Ответ: R=5; $-2\le x\le 8$.

Нахождение суммы функционального ряда

Рассмотрим некоторые приемы нахождения суммы функционального ряда и области его сходимости к этой сумме.

Нахождение суммы ряда почленным интегрированием.

I. Пусть дан ряд вида $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\varphi(x))^n}{n}$. По признаку Коши или признаку Даламбера <u>область сходимости определяется</u> неравенством $|\varphi(x)|<1$. Если $\varphi(x)=1$, то ряд $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходящийся.

Если $\varphi(x)=-1$, то ряд $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно (по признаку Лейбница). Следовательно, область сходимости находится из неравенства $-1\le\varphi(x)<1$. Затем <u>делаем замену</u> $t=\varphi(x)$ в исходном ряде; получаем степенной ряд $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ с областью сходимости $-1\le t<1$. Используем формулу для вычисления суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|t|<1$

$$\sum_{n=k}^{\infty}p^n=p^k+p^{k+1}+p^{k+2}+\ldots=\frac{p^k}{1-p},-1<p<1 \qquad (30.5)$$

и очевидное равенство

$$\frac{t^n}{n}=\int_0^t p^{n-1}dp \qquad (30.6)$$

Учитывая, что степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку $[0;t]$, целиком принадлежащему интервалу сходимости, и используя формулу (30.6), получаем

$$S(t)=\sum_{n-k}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=k}^{\infty}\left(\int_0^t p^{n-1}dp\right)=\int_0^t\left(\sum_{n=k}^{\infty}p^{n-1}\right)dp=\int_0^t\frac{p^{k-1}}{1-p}dp,|t|<1$$

Заметим, что так как ряд (30.5) сходится в граничной точке t=-1, то сумма ряда непрерывна в этой точке (справа) и $S(-1)=\lim\limits_{t\to -1+0} S(t)$. Далее вычисляем интеграл (с переменным верхним пределом), заменяем t на $\varphi(x)$ и получаем ответ.

II. Если дан ряд вида $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{(\varphi(x))^n}{(n+a)(n+b)}$, то следует либо применить теорему о почленном интегрировании степенного ряда дважды, либо разложить дробь на элементарные $\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{(b-a)}\cdot\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}\right)$ и вычислить сумму каждого ряда почленным интегрированием.

Пример 4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\cdot x^n}{n}$ и указать область его сходимости к этой сумме.

Решение. Данный ряд степенной. Находим его интервал сходимости. По признаку Коши имеем

$q(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{6^n\cdot x^n}{n}\right|}=|6x|<1$. Из неравенства находим $-\frac{1}{6}<x<\frac{1}{6}$. Исследуем поведение ряда в граничных точках.

При $x=\frac{1}{6}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}\cdot\frac{1}{6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходящийся гармонический ряд.

При $x=-\frac{1}{6}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - условно сходящийся ряд по признаку Лейбница. Следовательно, данный ряд сходится при $x\in[-\frac{1}{6};+\frac{1}{6})$. Для нахождения суммы ряда сделаем замену $t=6x$. Получим геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\ldots$, сходящийся при $t \in [-1,1)$. Используя равенство (30.6) и почленное интегрирование степенного ряда, получаем:

$$S = \sum_{n-k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\int_0^t p^{n-1} dp \right) = \int_0^t \left(\sum_{n=k}^{\infty} p^{n-1} \right) dp =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{1-p} dp = -\ln|1-t| = -\ln|1-6x|$$

Ответ: $S(x) = -\ln|1-6x|$ для $x \in [-\frac{1}{6};+\frac{1}{6})$.

Замечание. Степенной ряд (30.3) сходится абсолютно и равномерно на всяком отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости; ряд (30.3) можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри его интервала сходимости $|x-a| < R$, т.е. если $\sum_{n=p}^{\infty} C_n (x-a)^n = S(x)$, то для $\forall x \in (a-R, a+R)$ имеем $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{x_0}^{x} (x-a)^n dx = \int_{x_0}^{x} S(x) dx$ и $\sum_{n=0}^{\infty} nC_n (x-a)^{n-1} = S'(x)$

Нахождение суммы ряда почленным дифференцированием.

I. Пусть дан ряд вида $\sum_{n=k}^{\infty} (n+b) \cdot (\varphi(x))^n$.

Сначала определяем область сходимости ряда, например, по признаку Коши. Получаем неравенство $|\varphi(x)| < 1$. Если $\varphi(x) = \pm 1$, то ряд расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$. Следовательно, область сходимости определяется неравенством $-1 < \varphi(x) < 1$. Затем делаем замену $t = \varphi(x)$ и записываем ряд в виде суммы двух рядов $\sum_{n=k}^{\infty} nt^n + b\cdot\sum_{n=1}^{\infty} t^n$. Для нахождения сумм этих рядов используем формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и очевидное равенство

$$\sum_{n=k}^{\infty} nt^n = t\cdot\sum_{n=k}^{\infty} nt^{n-1} = t\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(t^n\right).$$

Учитывая, что степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости, и используя равенство

$\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \dfrac{t^k}{1-t}, |t|<1$, получаем

$$S_1(x) = \sum_{n=k}^{\infty} nt^n = t\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\left(t^n\right)' = t\cdot\left[\sum_{n=k}^{\infty} t^n\right]'_t = t\cdot\left(\frac{t^k}{1-t}\right)'_t$$

Далее вычисляем производную, делаем замену $t=\varphi(x)$ и записываем ответ.

II. Если дан ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+bn+c\right)\cdot(\varphi(x))^n$, то вычисляем сумму трех рядов $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\varphi(x))^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} bn(\varphi(x))^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c(\varphi(x))^n$, при вычислении суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\varphi(x))^n$ применяем теорему о почленном дифференцировании степенного ряда дважды.

Пример 5. Найти сумму ряда и указать область сходимости ряда к этой сумме. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n+4}$

Решение. а). Находим область сходимости данного ряда по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)\cdot x^{2n+6}}{(n+1)\cdot x^{2n+4}}\right|=\left|x^2\right|<1$$

Отсюда $-1<x<1$. В граничных точках $x=\pm 1$ ряд расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости. Итак, ряд сходится (и притом абсолютно) в интервале (-1;1).

б). Делаем в исходном ряде замену $t=x^2$ и записываем в виде суммы двух рядов $S(t)=\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)t^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n+2}$

Для нахождения S(t) достаточно найти суммы рядов

$$S_1(t)=\sum_{n=k}^{\infty}t^{n+2}=t^2\cdot\sum_{n=k}^{\infty}t^n=t^2\cdot\frac{1}{1-t},|t|<1 \quad \text{и}$$

$$S_2(t)=\sum_{n=k}^{\infty}nt^{n+2}=t\cdot\sum_{n=k}^{\infty}nt^n=t^3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t^3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(t^n\right).$$

Учитывая, что степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости, получаем

$$S_2(t)=t^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(t^n\right)=t^3\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)=t^3\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{t^3}{(1-t)^2},\ |t|<1.$$

и $S(t)=S_1(t)+S_2(t)=\frac{t^2}{1-t}+\frac{t^3}{(1-t)^2}=\frac{t^2}{(1-t)^2},\ t\in(-1;1)$

в) Заменяя t на x^2, получаем $S(x)=\frac{x^4}{\left(1-x^2\right)^2},x\in(-1;1).$

<u>Разложение функций в степенной ряд Тейлора</u>

Всякая функция f(x), бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<R, т.е. x_0-R<x<x_0+R$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,\ (30.7)$$

если в этом интервале выполняется условие: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ остаточный член формулы Тейлора, записанный в форме Лагранжа, $\xi = x_0 + \theta(x - x_0),$ где θ - положительное число меньше 1.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \quad (30.8)$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , все производные $f^{(n)}(x)$ ограничены некоторой константой, т.е. при любом n выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, где M – положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ функция *f(x)* будет суммой ряда (30.7), причем только для тех значений x, при которых $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ (необходимое и достаточное условие равенства (30.7) в разложении *f(x)* в ряд Тейлора).

Приведем основные разложения в ряд Маклорена:

1) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots, -\infty < x < +\infty$

2) $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, -\infty < x < +\infty$

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, -\infty < x < +\infty$

4) $shx = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, -\infty < x < +\infty$

5) $chx = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, -\infty < x < +\infty$

6) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}+...,-1<x\le 1$

7) $arctgx=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+...,-1\le x\le 1$

8) Биномиальный ряд

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-k+1)}{k!}x^k+...,-1<x<1$$

Причем это последнее разложение при $m\ge 0$ является абсолютно сходящимся рядом в граничных точках интервала, т.е. при *x=-1* и при *x=1;* при $-1<m<0$ ряд расходится при *x=-1* и условно сходится при при *x=1*; при $m\le -1$ ряд расходится на обеих границах интервала (-1;1). При разложении функции *f(x)* в ряд Тейлора по степеням *x* (когда $x_0=0$) преобразуют, если возможно, функцию f(x) к виду, допускающему использование основных разложений , а также сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число. Затем определяют область сходимости полученного ряда к функции *f(x).*

Замечание. Если требуется разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$, то сначала делают замену переменной $t=x-x_0$, находят разложение по степеням t и затем возвращаются к переменной x.

Пример 6. Разложить *ln x* в ряд по степеням (*x-1*).

Решение. Имеем $\ln(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{t^n}{n}+...,-1<t\le 1$, то

$\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ (*t=x-1*), где

область сходимости есть полуинтервал $0<x\le 2$.

Приближенное вычисление определенных интегралов

Многие интегралы не могут быть выражены в конечном виде через элементарные функции. Одним из способов приближенного вычисления таких интегралов является разложение подынтегральной функции в степенной ряд и его почленное интегрирование. Известно, что функция, бесконечно дифференцируемая в интервале сходимости (-R,R), разлагается в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

если в этом интервале сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, где-

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ остаточный член формулы Тейлора,

записанный в форме Лагранжа, $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, где θ - положительное число меньше 1. Практически степенные ряды для многих функций можно найти формально, используя основные разложения функций или формулу для суммы членов геометрической прогрессии. Итак, чтобы вычислить интеграл $\int\limits_0^b f(x)dx$ с точностью ε, где функция *f(x)* разложена в степенной ряд, имеющий радиус сходимости R>b, надо:

1) Разложить функцию в степенной ряд по степеням *x:* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ и определить его интервал сходимости. Так как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри их интервала сходимости, то на таком отрезке можно интегрировать почленно полученный ряд, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_0^b f(x)dx = \int\limits_0^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\int\limits_0^b x^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

2) Вычислить сумму полученного числового ряда с заданной точностью (оценивая остаток ряда). При интегрировании степенного ряда его интервал сходимости не изменяется.

Пример 7. Вычислить интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ $\int_0^1 \sin\left(x^2\right)dx$

Решение. Разлагаем функцию $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ в ряд Тейлора по степеням x ($\sin\alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots, -\infty < \alpha < +\infty$, $\alpha = x^2$).

Получаем ряд: $\sin\left(x^2\right) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2(2n-1)}}{(2n-1)!}$, сходящийся также на всей числовой прямой. Интегрируем ряд

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots \right)_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)(2n-1)!}$$

Оценим остаток ряда. Так как ряд знакочередующийся, члены которого убывают по абсолютной величине

$b_n = \frac{1}{(4n-1)(2n-1)!} > \frac{1}{(4(n+1)-1)(2(n-1)-1)!} = b_{n+1}$ при $\forall n \geq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то справедливо неравенство

$\left|R_n\right| \le b_{n+1} = \dfrac{1}{(4n+3)(2n-1)!}$ (остаток ряда R_n не превосходит первого из отброшенных членов). Если $b_{n+1} < \varepsilon$, то тем более $\left|R_n\right| < \varepsilon$. Поэтому, оценив неравенство $\dfrac{1}{(4n+3)(2n-1)!} < \dfrac{1}{1000}$, находим количество членов ряда, необходимых для вычисления суммы с заданной точностью ε. Практически прикидывают, сколько надо взять членов ряда для заданной точности. Здесь достаточно взять первые два члена ряда, т.к. $b_3 = \dfrac{1}{11 \cdot 5!} < 0{,}001$ и, следовательно, $\left|R_2\right| < 0{,}001$. Вычисляем:

$$S_2 = b_1 - b_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} = 0{,}3333 - 0{,}0381 = 0{,}295$$

31. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Периодические функции

Функция *f*(*x*) называется периодической, если существует постоянное число $T>0$, для которого $f(x+T)=f(x)$; каково бы ни было x из области задания этой функции (подразумевается, что в область задания вместе с x входят $x+T$ и $x-T$). Число T с таким свойством называется периодом функции $f(x)$. Наиболее известными периодическими функциями являются $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ … с периодическими функциями приходится иметь дело во многих приложениях математики к задачам физики и техники.

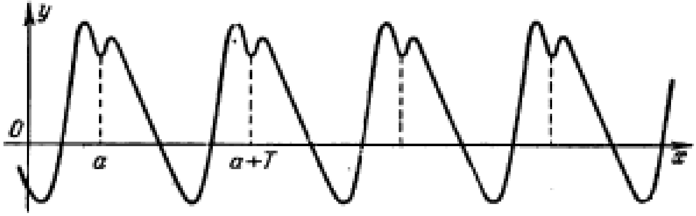


Рис. 31.1.

Сумма, разность произведение и частное функций периода T, очевидно, всегда дают функции того же периода.

Если мы построим график периодической функции $y(x)$ для какого-нибудь отрезка $[a,a+T]$ значений x, то полный график этой функции получим периодическим повторением построенного (рис. 31.1).

Если T есть период функции $f(x)$, то числа $2T$, $3T$, $4T$,…будут так же периодами, что сразу вытекает из рассмотрения графика периодической функции или из цепи равенств

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=\ldots \qquad (31.1)$$

(Наряду с этим равенством справедливы и такие : $f(x)=f(x-T)=f(x-2T)=f(x-3T)=\ldots$.) являющиеся следствием многократного пользования условием (1.1). Таким образом, если T-период, то и всякое число вида kT, где k-целое положительное число, есть также период, т. е. период, если он существует, всегда не единственен. Отметим следующее свойство любой функции $f(x)$ периода T.

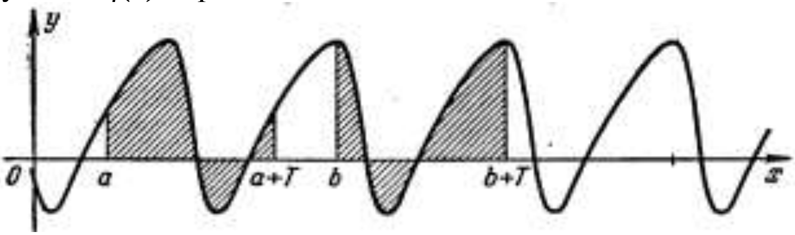


Рис. 31.2

Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке длины T, то она интегрируема на всяком другом отрезке той же длины, и величина интеграла при этом неизменна, т.е.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx \qquad (31.2)$$

при любых a и b. Это свойство легко вытекает из интерпретации интеграла как площади. Действительно, интеграл слагается из площадей, заключенных между кривой $y= f(x)$, крайними ординатами и осью Ox, причем площади, лежащие над осью Ox, со знаком «+», а лежащие под осью Ox, со знаком «-». В нашем случае в силу периодичности f(x) эти площади оказываются одинаковыми для обоих интегралов (31.2) (рис.31.2).

В дальнейшем, когда мы будем говорить, что функция периода *T интегрируема*, то будем под этим подразумевать ее интегрируемость на отрезке длины *T*, а значит, и на любом отрезке конечной длины, как это легко следует из только что установленного свойства.

Гармоники

Простейшей, и в то же время очень важной для приложений, является периодическая функция $a\cos\omega x + b\sin\omega x$, где A, a, b, ω, φ - постоянные. Эту функцию называют *гармоникой с амплитудой* $|A|$, частотой ω и начальной фазой φ. Гармоника имеет период $T= 2\pi / \omega$. Действительно, при любом x

$$A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right] = A\sin\left[(\omega x+\varphi)+2\pi\right] = A\sin(\omega x+\varphi).$$

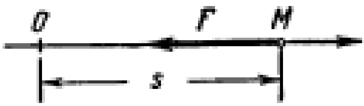


Рис. 31.3

Происхождение наименований «амплитуда», «частота», «начальная фаза» связано с задачей механики о гармонических колебаниях. Пусть материальная точка M с массой m движется по прямой под действием силы F, пропорциональной расстоянию s точки M от фиксированной точки O (рис. 31.3). Считая, s>0 справа от O и s<0 слева от O, находим F=-ks, где k-коэффициент пропорциональности, k>0. Имеем $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}+\omega s=0$, где положено $\omega^2 = k/\mathrm{m}$, откуда $\omega=\sqrt{k/m}$.

Решением полученного уравнения будет функция $s = A\sin(\omega x+\varphi)$, где A и φ - постоянные, которые вычисляются, зная положение и скорость точки M в начальный момент. Таким образом, s есть периодическая функция времени t с периодом T=$2\pi/\omega$.

Это означает, что точка M будет совершать колебательное движение. Амплитуда |A| есть максимальное отклонение точки M от O. Величина $\omega = 2\pi/\mathrm{T}$ - число колебаний за отрезок времени 2π.

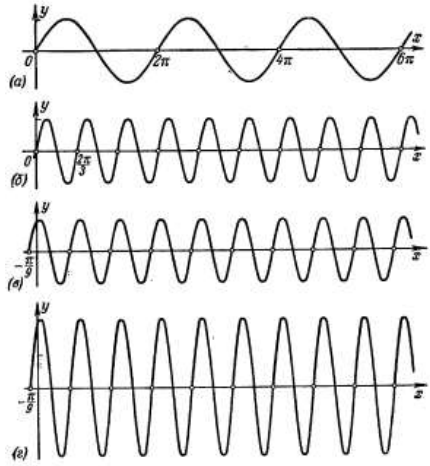


Рис. 31.4

Отсюда наименование «частота». Величина φ - начальная фаза- характеризует положение точки M в начальный момент, так как при t=0 имеем: $s_0 = \sin\varphi$. Возвратимся к гармонике $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Как выглядит её график. Будем считать $\omega>0$, так как в противном случае знак минус мы могли бы вынести из-под знака sin. В наиболее простом случае- при А=1, $\omega=1$, $\varphi=0$- мы получаем функцию y=sinx, т.е. обычную синусоиду (рис. 31.4,а). при А=1, $\omega=1$, $\varphi=\pi/2$ мы получаем косинусоиду y=cosx, график которой есть сдвинутый на $\pi/2$ влево от графика синусоиды y=sinx.

Рассмотрим гармонику y=sinωx и положим ωx=z. Получим y=sinz. Мы пришли к обычной синусоиде. Но $x=z/\omega$. Следовательно, график гармоники y=sinωx можно получить из графика обычной синусоиды с помощью деформации последнего в направлении оси абсцисс. При $\omega>1$ деформация сводится к равномерному сжатию в ω раз, а при $\omega<1$ к растяжению в $1/\omega$ раз. На рис.31.4,б изображена гармоника y=sin3x с периодом $T=2\pi/3$. Рассмотрим теперь гармонику $y = \sin(\omega x + \varphi)$ и положим $\omega x + \varphi = \omega z$. График гармоники $y = \sin\omega x$ нам уже известен. Но $x=z-\varphi/\omega$. Следовательно, график гармоники $y = \sin(\omega x + \varphi)$ получается из графика гармоники $y = \sin\omega x$ сдвигом на $-\varphi/\omega$ вдоль оси абсцисс. На рис. 31.4,в изображена гармоника $y = 2\sin(3x + \pi/3)$ с периодом Т=2$\pi/3$ и начальной фазой $\varphi=\pi/3$. Наконец, график гармоники $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ получается из графика гармоники $y = \sin(\omega x + \varphi)$ умножением всех ординат на число А. на рис.31.4,г изображена гармоника $y=2\sin(3x+\pi/3)$.

Резюмируем сказанное: *график всякой гармоники* $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ *получается из графика обычной синусоиды равномерным сжатием (или растяжением) в направлении осей координат и сдвигом вдоль оси Ох*.

Пользуясь известной формулой тригонометрии, напишем:

$$A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin\varphi\cos\omega x+A\cos\varphi\sin\omega x.$$

Положив

$$a=A\sin\varphi,\ b=A\cos\varphi \tag{31.3}$$

убедимся, что всякую гармонику можно представить в виде

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x \tag{31.4}$$

Обратно, всякая функция вида (31.4) есть гармоника. Чтобы убедится в этом, достаточно найти А и φ из уравнений (31.3). При этом получим:

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi=\frac{a}{A}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \cos\varphi=\frac{b}{A}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откуда φ легко находится. В дальнейшем для гармоник мы будем пользоваться записью виды (31.4). Эта запись для гармоники $y=2\sin(3x+\pi/3)$, изображение на рис. 31.4,г, дает:

$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x$. Нам удобно будет также в (31.4) явно ввести период Т следующим образом: Положим *T=2l.* Тогда вследствие равенства Т=$2\pi/\omega$ получим:

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l}$ и, следовательно, гармоника с периодом *T=2l* может быть записана так:

$$a\cos\frac{\pi x}{l}+b\sin\frac{\pi x}{l} \tag{31.5}$$

Тригонометрические многочлены и ряды

Зададимся числом *T=2l* и рассмотрим гармонику

$$a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots.) \tag{31.6}$$

с частотами $\omega_k=\pi k/l$ и периодом $T_k=2\pi/\omega_k=2l/k$. Поскольку $T=2l=kT_k$, постольку число *T=2l* является периодом для всех гармоник (31.6) сразу. Всякая сумма вида

$$S_n(x)=\frac{A}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где A=const, будучи суммой функций периода 2*l*, есть функция того же периода (прибавление постоянной, очевидно не нарушает периодичности; к тому же постоянную можно рассматривать как функцию, для которой любое число является периодом). Функцию $S_n(x)$ будем называть *тригонометрическим многочленом порядка n* (периода 2*l*). Тригонометрический многочлен хотя и слагается из нескольких гармоник, но представляет собой вообще функцию значительно более сложной природы, нежели простая гармоника. Располагая значениями постоянных A, a_1, b_1, a_2, b_2,…, a_n, b_n, мы можем образовать функцию $y=s_n(x)$ с графиками, совсем непохожими на плавный и симметричный график простой гармоники. На рис.31.5 изображен график тригонометрического многочлена

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 3x$$

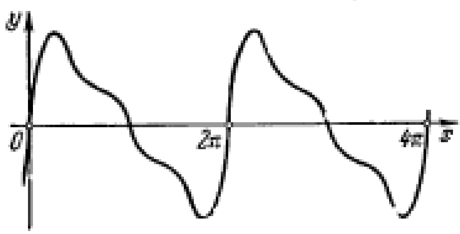


Рис. 31.5

Сумма бесконечного *тригонометрического* ряда

$$A+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)$$

(если он сходится) представляет собой также функцию периода 2*l*. Природа функций, являющихся суммами таких тригонометрических рядов, ещё более разнообразна. Поэтому естественен вопрос: нельзя ли всякую *заданную* функцию периода $T=2l$ представить в виде суммы тригонометрического ряда? Мы увидим, что такое представление действительно возможно для весьма широкого класса функций. Пусть $f(x)$ принадлежит этому классу. Это значит, что $f(x)$ может быть разложена в сумму гармоник, т.е. в сумму функций очень простой структуры. График функции $y=f(x)$ получается «наложением» графиков гармоник. Если трактовать каждую гармонику как простое гармоническое колебание, а $f(x)$ как характеристику сложного колебательного движения, то последнее оказывается разложенным на сумму отдельных гармонических колебаний. Не нужно, однако, думать, что тригонометрические ряды приложимы лишь к колебательным явлениям. Понятие тригонометрического ряда оказывается очень полезным и при изучении многих явлений совсем иной природы. Если

$$f(x)=A+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (31.7)$$

то, положив $\frac{\pi x}{l}$=t или x=$\frac{tl}{\pi}$, найдем $\varphi(t)=f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$

$$\varphi(t)=A+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right) \qquad (31.8)$$

Гармоники этого ряда имеют общий период 2π. Таким образом, если для $f(x)$ периода $2l$ имеет место разложение (31.7), то для функции $\varphi(t)=f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$ периода 2π имеет место разложение (31.8). Справедливо, очевидно, и обратное заключение. Именно, если для функции φ(t) периода 2π имеет место разложение (31.8), то для функции $f(x)=\varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ периода $2l$ имеет место разложение (31.7).Таким образом, достаточно уметь решать задачу разложения в тригонометрический ряд для функций «стандартного» периода 2π. В этом случае к тому же и ряд выглядит проще. Поэтому мы и будем строить теорию для рядов вида (31.8) и лишь окончательные результаты будем переводить на «язык» общих рядов (31.7).

Уточнение терминологии. Интегрируемость. Функциональные ряды

Уточним терминологию и напомним некоторые сведения из дифференциального и интегрального исчисления. Когда мы будем говорить, что f(x) *интегрируема* на отрезке [a,b], то будем иметь в виду существование интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \tag{31.9}$$

Таким образом, интегрируемая f(x) у нас всегда либо непрерывна, либо имеет на отрезке [a,b] конечное число точек разрыва, вблизи которых функция может быть как ограниченной, так и неограниченной. В курсах интегрального исчисления доказывается, что для функции с конечным числом разрывов из существования интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$ всегда следует существование интеграла (31.9) (обратное не всегда верно). При этом функцию *f(x)* называют *абсолютно интегрируемой.* Если *f(x)* абсолютно интегрируема, а φ(x)-ограниченная интегрируемая функция, то произведение f(x)φ(x) абсолютно интегрируемо. Имеет место также следующее *правило интегрирования по частям: Пусть f(x) и φ(x)-непрерывные на [a,b] функции, возможно лишенные производных в конечном числе точек, причем предполагается, что* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *абсолютно интегрируема. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx \tag{31.10}$$

Известно: если функции *$f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$* интегрируемы на [a,b], то интегрируема и их сумма, причем

$$\int_b^a \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx \qquad (31.11)$$

Рассмотрим теперь *бесконечный* функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \qquad (31.12)$$

Он называется сходящимся для данного значения x, если для его частных сумм $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ (n=1, 2, …) существует конечный предел $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$. Величина s(x) называется тогда суммой ряда и, очевидно, представляет собой функцию от x. Если ряд сходится для всех x из отрезка [a,b], то его сумма s(x) определена на [a,b]. Распространяется ли формула (31.11) на случай сходящегося на отрезке [a,b] функционального ряда интегрируемых функций, т.е. справедлива ли формула

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx \qquad (31.13)$$

(речь идет, таким образом, о возможности *почленного* интегрирования ряда)? Оказывается, что не всегда, и хотя бы уже потому, что ряд интегрируемых и даже просто непрерывных функций может иметь неинтегрируемую сумму. Аналогичная проблема связана с возможностью почленного дифференцирования рядов. Мы выделим важный класс функциональных рядов, к которым указанные операции приложимы. Говорят, что ряд (31.12) сходится *равномерно* на отрезке [a,b], если для всякого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n \geq N$ и для всех *x* из отрезка [a,b] выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon \qquad (31.14)$$

Если мы рассмотрим графики функций y=s(x) (сумма ряда) и $y=s_n(x)$ (частная сумма), то свойство равномерной сходимости означает, что для всех достаточно больших индексов n и для всех x графики суммы ряда и соответствующих его частных сумм отстоят друг от друга меньше чем на наперед заданную ε, т.е. эти графики *равномерно* (для всех x) близки (рис. 31.6)

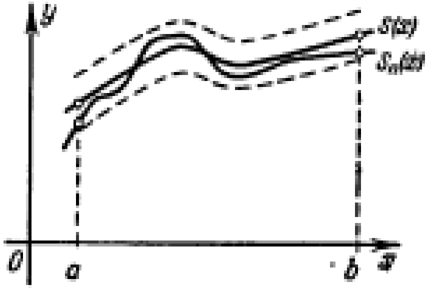


Рис. 31.6

Не всякий сходящийся на некотором отрезке ряд сходится равномерно. Имеется признак равномерной сходимости функциональных рядов (признак Вейерштрасса): *Если числовой ряд с положительными членами* $u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots$ сходится и для всех k, начиная с некоторого, $|f_k(x)| \le u_k$, каково бы ни было x из отрезка [a,b], то ряд (31.11) сходится равномерно (и к тому же абсолютно) на [a,b]. Справедливы следующие важные теоремы: *Если члены ряда (31.12) непрерывны на отрезке [a,b] и ряд сходится равномерно на этом отрезке, то*

а) сумма ряда есть функция непрерывная,

б) ряд можно интегрировать почленно, т.е. для него справедлива формула (31.13)

2. *Если ряд (31.12) сходится, его члены дифференцируемы и ряд* $f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *равномерно сходится на [a,b], то* $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = S'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$, *т.е. ряд* (31.12) *можно дифференцировать почленно.*

Основная тригонометрическая система.
Ортогональность синусов и косинусов

Основной тригонометрической системой будем называть систему функций

1, cos x, sin x, cos 2x, sin 2x,…, cos nx, sin nx, … (31.15)

Все эти функции имеют общий период 2π (хотя cos nx и sin nx имеют и меньший период $\frac{2\pi}{n}$). Установим несколько вспомогательных формул. При любом целом n≠0

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx &= \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx &= \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (31.16)$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx=\pi,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx=\pi\end{aligned}\right\} \qquad (31.17)$$

В силу известных формул тригонометрии

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

для любых целых n и m, n≠m,

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\right]dx=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x\right]dx=0\end{aligned}\right\} \qquad (31.18)$$

Наконец в силу формулы

$$\sin nx\cos mx=\frac{1}{2}\left[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\right]$$

для любых целых n и m

$$\int_{-\pi}^{\tau}\sin nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\right]dx \qquad (31.19)$$

Равенства (31.16), (31.18), (31.19) показывают, что интеграл от произведения двух любых различных функций системы (31.15), взятый по отрезку [-π,π], равен 0. Условимся говорить, что две функции φ(x) и ψ(x) *ортогональны* на отрезке [a,b], если $\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=0$. Приняв это определение, можем сказать, что функции системы (31.15) попарно ортогональны на отрезке [-π,π], или короче, система (31.15) ортогональна на [-π,π].Мы знаем, что для периодической функции интеграл по любому отрезку длины, равной периоду, имеет неизменное значение. Поэтому формулы (31.16)-(31.19) справедливы не только для отрезка [-π,π], но и для любого отрезка [a, a+2π]. Следовательно, система (31.15) ортогональна на всяком таком отрезке.

Ряд Фурье для функции периода 2π

Пусть для функции *f(x)* периода 2π имеет место разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (31.20)$$

Постоянное слагаемое здесь обозначено через $a_0/2$ для симметрии дальнейших формул. Поставим себе задачей вычислить коэффициенты a_0 ,a_k и b_k, k=1,2,…, зная функцию *f(x).* Для этого сделаем такое д о п у щ е н и е: будем предполагать, что ряд (31.20) и ряды, которые мы сейчас получим, можно интегрировать почленно, т. е. для этих рядов интеграл от суммы равен сумме интегралов (тем самым предположена и интегрируемость функции $f(x)$). Интегрируя равенство (31.20) в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right).$$

В силу (31.16) все интегралы под знаком суммы равны нулю. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\pi a_0. \qquad (31.21)$$

Умножим обе части равенства (31.20) на $\cos nx$ и результат опять интегрируем в прежних пределах. Получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right).$$

В силу (31.16) первый интеграл справа равен нулю. Так как функции системы (31.15) попарно ортогональны, то все интегралы под знаком суммы, кроме одного, оказываются также равными нулю.

Останется лишь интеграл

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi$ (см. (31.17)), являющийся коэффициент при a_n. Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\pi a_n. \qquad (31.22)$$

Аналогичным приемом найдем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\pi b_n. \qquad (31.23)$$

Из (31.21)—(31.23) вытекает

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (31.24)$$

(n=0, 1, 2, …) (n=1, 2, ….)

Итак, если $f(x)$ интегрируема и может быть разложена в тригонометрический ряд, причем почленное интегрирование этого ряда и рядов, получающихся из него умножением на $\cos nx$ и $\sin nx$ (n= 1, 2, …), возможно, то коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (31.24).

Пусть теперь задана некоторая интегрируемая функция периода 2π, и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление вообще возможно (с выполнением требования почленной интегрируемости, упомянутого выше), то в силу изложенного коэффициенты a_n и b_n необходимо получаются по формулам (31.24). Поэтому в поисках тригонометрического ряда, имеющего своей суммой заданную функцию $f(x)$, в первую очередь естественно обратить внимание на тот ряд, коэффициенты которого вычисляются по формулам (31.24), и посмотреть, не обладает ли он нужным нам свойством. Мы увидим далее, что для обширного класса функций это так и будет. Коэффициенты a_n и b_n, вычисленные по формулам (31.24), называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье.* Заметим, кстати, что в формулах (31.24) интегрируются функции периода 2я. Поэтому отрезок интегрирования $[-\pi,\pi]$ может быть заменен любым другим отрезком длины 2π, и мы наряду с формулами (31.24) получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots.) \qquad (31.25)$$

Изложенное выше делает естественным особое внимание к рядам Фурье. Составив ряд Фурье для функции *f(x)* и не предрешая вопроса о его сходимости к *f(x)*, мы пишем:

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$. Такая запись означает лишь, что функции *f(x) соответствует* ряд Фурье, написанный справа. Знак « ~ » можно заменить знаком « = » только тогда, когда нам удастся доказать сходимость ряда и равенство его суммы функции *f(x)*. Из предшествующих рассуждений легко вытекает следующая, оказывающаяся часто полезной.

Теорема 1. *Если для функции f(x) периода* 2я *имеет место разложение в некоторый равномерно сходящийся на всей оси Ох тригонометрический ряд, то этот ряд есть ряд Фурье для f(x).*

Рассмотрим равенство

$$f(x)\cos px = \frac{a_0}{2}\cos px + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx\cos px + b_k\sin kx\cos px) \qquad (31.26)$$

и покажем, что ряд справа сходится равномерно.

Положим: $s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Если ряд (31.20) сходится равномерно, то существует число N такое, что для всех m≥N $|f(x) - s_m(x)| \le \varepsilon$. Произведение *sin x cos x*, очевидно, является *m-й* частной суммой для ряда (31.26). Поэтому из соотношения

$|f(x)\cos px - s_m(x)\cos px| = |f(x) - s_m(x)|\,|\cos px| \le \varepsilon$, справедливого для всех $m \geq N$, и вытекает равномерная сходимость ряда (31.26). В таком случае этот ряд можно почленно интегрировать, а интегрирование дает равенство (31.22). Аналогично доказывается равенство (31.23). Тем самым для коэффициентов a_n и b_n доказаны формулы (31.24). Это и означает, что ряд (31.20) есть ряд Фурье для $f(x)$. Современная теория рядов Фурье позволяет доказать следующее более общее предложение, доказательство которого мы приводить не будем из-за его сложности.

Теорема 2. *Если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ периода 2π допускает разложение в некоторый тригонометрический ряд, сходящийся к ней всюду за исключением, быть может, конечного числа значений (для одного периода), то этот ряд есть ряд Фурье для $f(x)$.*

Эта теорема подтверждает высказанное выше соображение, что в поисках тригонометрического ряда, имеющего своей суммой заданную функцию, в первую очередь следует обращаться к ряду Фурье.

Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины 2π

В приложениях очень часто возникает задача о разложении в тригонометрический ряд функции f(x),заданной лишь на отрезке $[-\pi,\pi]$. Здесь, следовательно, о периодичности $f(x)$ нет и речи. Это тем не менее нисколько не мешает нам написать для нее ряд Фурье, ибо в формулах (31.24) фигурирует лишь отрезок $[-\pi,\pi]$. Вместе с тем, если периодически продолжить $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю ось Ох, то получим периодическую, совпадающую с $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ функцию, для которой ряд Фурье будет тождественным с рядом Фурье для $f(x)$. К тому же, если ряд Фурье для f(x) оказывается сходящимся к ней, то его сумма, будучи периодической функцией, даст как раз упомянутое периодическое продолжение f(x) с отрезка [—π, π] на всю ось *Ox*. Таким образом, говорить о ряде Фурье для f(x) заданной на [—π, π], —это все равно, что говорить о ряде Фурье для функции, получающейся из f(x) периодическим продолжением ее на ось *Ox*. Отсюда вытекает, что признаки сходимости рядов Фурье достаточно формулировать для периодических функций. В связи с упомянутым периодическим продолжением *f(x)* с отрезка [—π, π] на ось Ox уместно сделать следующее замечание. Если *f(-π)= f(π),* то периодическое продолжение никаких затруднений не встречает (рис.31.7, a).

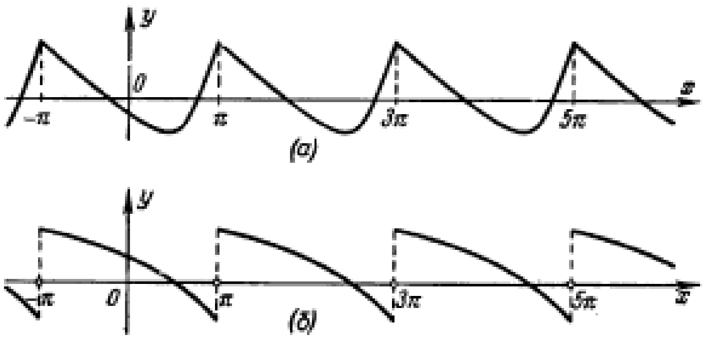


Рис.31.7

При этом, *если f(x) была непрерывной на отрезке [-π,π], то ее продолжение будет непрерывным на всей* оси Ox. Если же f(-π)≠f(π), то, не изменяя значений *f(-π)*и f(π)мы не сможем осуществить нужное продолжение, так как по смыслу периодичности f(-π)должно совпадать с f(π). Обойти это затруднение мы можем двояким образом: во-первых, исключить вовсе из рассмотрения значения f(x) при x=- π и x= π, сделав тем самым функцию неопределенной для этих значений и, следовательно, сделав неопределенным периодическое продолжение f(x) для всех значений x вида (2k+1) π (k=0, ±1, ±2…); во-вторых, изменить выгодным нам образом значения функции f(x) при x=-π и x= π ,сделав их равными. Важно отметить, что и в том и в другом случаях коэффициенты Фурье будут иметь те же значения, что и сначала. Действительно, изменение значений функции в конечном числе точек, или даже неопределенность ее в этих точках,— не может оказать влияния на величину *интеграла, в частности на* величину интегралов (31.24), определяющих коэффициенты Фурье. Таким образом, независимо от того, осуществим мы указанную модификацию функции *f(x)* или нет, ряд Фурье для нее остается неизменным. Нужно отметить, что при f(-π)≠f(π) и при непрерывности *f(x*) на отрезке [—π, π] периодическое продолжение f(x) на всю ось *Ox будет* иметь разрывы во всех точках вида x=(2k+1) π (k=0, ±1, ...), как бы мы ни изменяли значения функции при x=-π и x= π . К каким значениям следует ожидать сходимости ряда Фурье в этих точках при f(-π)≠f(π), - это вопрос особый, и мы решим его позднее. Пусть теперь f(x)задана на произвольном отрезке [a,a+2 π] длины 2 π и ее требуется разложить в тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье вычисляем по формулам (31.25). Как и выше, приходим к выводу, что говорить о ряде Фурье для *f(x)* или для функции, получающейся из нее периодическим продолжением на всю ось *Ox*, - это одно и то же. При этом непрерывная на отрезке [a,a+2π] функция f(x) при f(a)≠f(a+2 π) дает продолжение, разрывное в точках вида x=a+2kπ (k=0, ±1,...).

Правый и левый пределы функции в точке. Точки разрыва первого рода

Введем обозначения:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0-0) \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0-0)$$

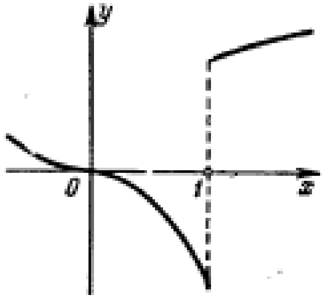


Рис. 31.8

(если эти пределы существуют и конечны). Первый из этих пределов называется *пределом* $f(x)$ в точке x_0 *слева,* второй — *пределом* $f(x)$ в точке x_0 *справа.* В точках непрерывности, по самому определению понятия непрерывности, эти пределы существуют, причем

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0). \qquad (31.27)$$

Если x_0 есть точка разрыва функции $f(x)$, то пределы справа и слева (оба или один из них) могут существовать в одних случаях и не существовать в других. Если *оба предела* существуют, то говорят, что точка x_0 есть *точка разрыва первого рода* для функции $f(x)$. Если же *хотя бы один* предел не существует, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода.* Нас будут интересовать точки разрыва первого рода. Если x_0 — такая точка, то величина

$$ð = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \qquad (31.28)$$

называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Для пояснения сказанного рассмотрим пример.

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{для } x < 1, \\ 0 & \text{для } x = 1, \\ \sqrt{x} & \text{для } x > 1 \end{cases} \qquad (31.29)$$

На рис. 31.8 изображен график этой функции. Значение функции при $x = 1$ изображено маленьким кружком. Для пределов слева и справа при $x=1$, очевидно, имеем: $f(1-0) = -1$, $f(1+0) = 1$. Следовательно, для скачка функции получаем: $\eth = f(1+0) - f(1-0) = 2$, что вполне согласуется с наглядным представлением о скачке Точки разрыва первого рода могут появиться, например, при периодическом продолжении непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ с этого отрезка на всю ось Ox в случае, когда $f(-\pi) \neq f(\pi)$. При этом все скачки оказываются равными числу $\eth = f(-\pi) - f(\pi)$.

Гладкие и кусочно-гладкие функции

Функцию $f(x)$ называют *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она на этом отрезке обладает *непрерывной* производной. На геометрическом языке это означает, что при перемещении вдоль кривой $y = f(x)$ направление касательной изменяется *непрерывно,* без скачков (рис. *9, а)*. Таким образом, график гладкой функции представляет собой плавную кривую, лишенную угловых точек. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем лишь разрывы первого рода, и притом в конечном числе. График кусочно-гладкой функции представляет собой непрерывную или разрывную кривую, которая может иметь конечное число угловых точек (в них происходит скачок производной); с приближением к такому углу или к месту разрыва (с той или иной стороны) направление касательной стремится к определенному положению На рис. 31.9,б и 31.9, в изображены графики непрерывной и разрывной кусочно-гладких функций. Гладкие функции мы будем рассматривать в дальнейшем как частный случай функций кусочно-гладких.

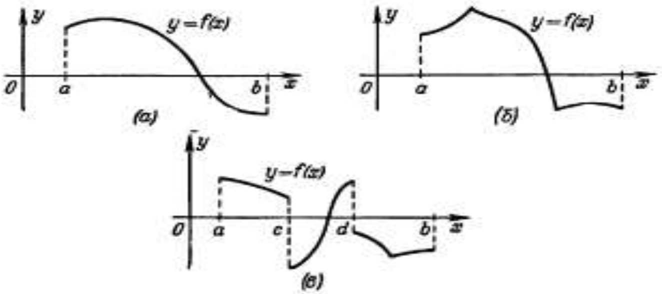


Рис.31.9

Непрерывная или разрывная функция $f(x)$, заданная на всей оси Ox, называется кусочно-гладкой, если она такова для каждого отрезка конечной длины. В частности, это относится к периодическим функциям.

Всякая кусочно-гладкая функция $f(x)$ (непрерывная или разрывная) ограничена и имеет ограниченную производную всюду, за исключением угловых точек и точек разрыва (во всех этих точках $f'(x)$ не существует).

Признак сходимости ряда Фурье

Мы сформулируем наиболее употребительный признак сходимости ряда Фурье.

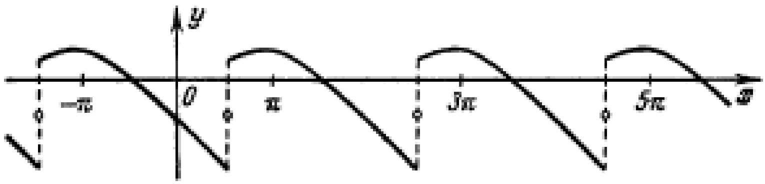


Рис. 31.10

Ряд Фурье кусочно-гладкой (непрерывной или разрывной) функции $f(x)$ периода 2π сходится для всех значений x, причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (среднее арифметическое предельных значений справа и слева) в каждой точке разрыва (рис. 31.10).

Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно и равномерно.

Пусть функция $f(x)$ задана лишь на $[-\pi, \pi]$, является кусочно-гладкой на этом отрезке и непрерывна в его концах. Ряд Фурье для $f(x)$ совпадает с рядом Фурье для функции, являющейся периодическим продолжением $f(x)$ на всю Ox. Но такое периодическое продолжение в нашем случае, очевидно, приведет к функции $f(x)$, кусочно-гладкой на всей оси Ox. Поэтому из сформулированного нами признака вытекает, что ряд Фурье будет всюду сходящимся. В частности, это будет иметь место на интересующем нас отрезке $[-\pi, \pi]$, причем для $-\pi < x < \pi$ ряд будет сходиться к $f(x)$ в точках непрерывности и к значению в точках разрыва. Что же будет происходить в концах отрезка $[-\pi, \pi]$? Возможны два случая:

1. $f(-\pi) = f(\pi)$. Здесь периодическое продолжение приводит, очевидно, к функции, непрерывной в точках $-\pi$ и π (и вообще во всех точках вида $x = (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$). В силу нашего признака и в концах отрезка ряд будет сходиться, следовательно, к $f(x)$.

2. $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Здесь периодическое продолжение приводит к функции, разрывной в точках $-\pi$ и π (а также во всех точках вида $x = (2k+l)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$), причем для продолженной $f(x)$ очевидно: $f(-\pi - 0) = f(\pi)$, $f(-\pi + 0) = f(-\pi)$, $f(\pi + 0) = f(-\pi)$, $f(\pi - 0) = f(\pi)$ (рис. 39.11). Поэтому при $x = -\pi$ и $x = \pi$ ряд будет сходиться к значениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}, \\ &\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \end{aligned}\right\} = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}. \tag{31.30}$$

Таким образом, для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывной при $x = -\pi$ и $x = \pi$, ряд Фурье ведет себя в этих точках, как и в прочих точках непрерывности функции, если $f(-\pi) = f(\pi)$. Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$ то ряд заведомо не может сходиться к $f(x)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$. Поэтому в последнем случае задачу о разложении $f(x)$ в ряд Фурье имеет смысл ставить не для $-\pi \leq x \leq \pi$, а для $-\pi < x < \pi$. Аналогичное замечание можно сделать относительно ряда Фурье для функции, заданной на отрезке вида $[a, a + 2\pi]$, где а — любое число.

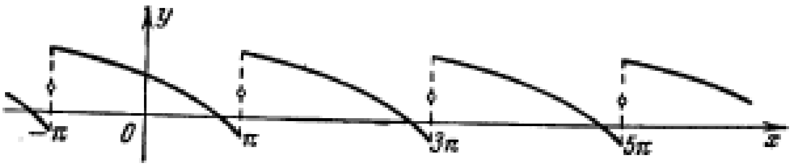


Рис. 31.11

Впрочем, при решении каждой конкретной задачи, когда читатель построит график периодически продолженной функции (а это всегда рекомендуется!) и вспомнит сформулированный выше признак, то вопрос о поведении ряда Фурье в концах отрезка сразу станет ясным.

Четные и нечетные функции

Пусть $f(x)$ задана на всей оси Ox или же на некотором отрезке, симметричном относительно начала координат.

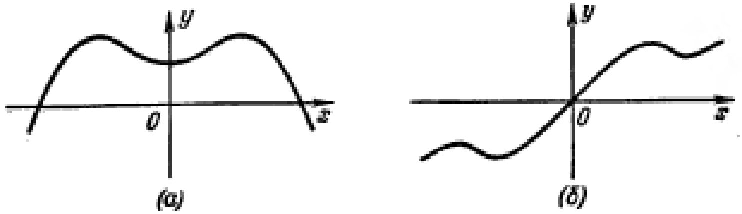


Рис. 31.12.

Скажем, что $f(x)$ есть *четная* функция, если для каждого x: $f(-x) = f(x)$. Из этого определения вытекает, что график всякой четной функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси Oy (рис. 31.12, а). При любом l (лишь бы $f(x)$ была определена и интегрируема на отрезке $[-l, l]$).

Функцию $f(x)$ назовем *нечетной,* если для каждого x: $f(-x) = -f(x)$. Для нечетной функции, в частности, $f(-0) = -f(0)$ и, следовательно, $f(0) = 0$. График всякой нечетной функции $y = f(x)$ симметричен относительно точки O (см. рис. 31.12,б). При любом l (лишь бы $f(x)$ была определена и интегрируема на отрезке $[-l,l]$). Из определения четных и нечетных функций легко вытекает:

а) Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

б) Произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

Ряды по косинусам и ряды по синусам

Пусть $f(x)$ — четная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или же четная периодическая функция).

Так как $\cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ есть функция, очевидно, четная, то по свойству а) будет четной и функция $f(x)\cos(nx)$. Функция $\sin(nx)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ нечетна. Поэтому по свойству б) нечетна и функция $f(x)\sin(nx)$.

Тогда в силу для коэффициентов Фурье четной функции $f(x)$ получаем:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \\ &\qquad (n = 1,2,\ldots), \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &\qquad (n = 0,1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (31.31)$$

Следовательно, для четной функции ряд Фурье содержит лишь косинусы, т. е.коэффициенты a_n вычисляются по формулам (31.31).

Пусть теперь $f(x)$—нечетная функция, заданная на отрезке $[-\pi,\pi]$ (или же нечетная периодическая функция), $\cos(nx)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — четная функция. По свойству б) 31.11 функция $f(x)\cos(nx)$ нечетная. Функция $\sin(nx)$ ($n = 1, 2, \ldots$) нечетна. Поэтому по свойству а) 31.11 функция $f(x)\ \sin(nx)$ оказывается четной. Тогда коэффициенты Фурье нечетной функции $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 \\ &(n = 0,1,2,\ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &(n = 1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{31.32}$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит лишь синусы, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где b_n вычисляются по формулам (31.32). Поскольку ряд Фурье для нечетной функции содержит лишь синусы, то, очевидно, он всегда сходится к нулевому значению при $x = -\pi$, $x = 0$ и $x = \pi$ (и вообще при $x = k\pi$), каково бы ни было значение $f(x)$ в этих точках.

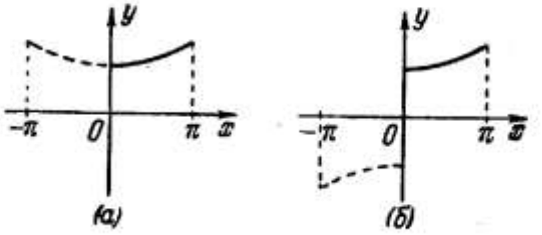


Рис. 31.13

Часто возникает задача о разложении в ряд *по* косинусам или в ряд по синусам функции $f(x)$, заданной и абсолютно интегрируемой на отрезке $[0,\pi]$.

Для разложения $f(x)$ в ряд по косинусам можно рассуждать следующим образом. Продолжим $f(x)$ *четным образом* с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ (рис. 31.13, а). Тогда для «продолженной» четной функции справедливы все предыдущие рассуждения, и следовательно, коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (31.33)$$

$$b_n = 0 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

В этих формулах фигурируют лишь *заданные* на $[0, \pi]$ значения $f(x)$. Следовательно, при практических вычислениях *фактически* можно и не осуществлять указанное четное продолжение. Если мы хотим разложить $f(x)$ в ряд по синусам, то продолжаем ее с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом (см. рис. 31.13,б). При этом по смыслу нечетности должны принять $f(0) = 0$. К «продолженной» нечетной функции опять применимы соображения, приведенные выше, и, следовательно, для коэффициентов Фурье справедливы формулы:

$$a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (31.34)$$

Поскольку здесь участвуют лишь значения $f(x)$ на $[0,\pi]$, постольку, как и в случае ряда по косинусам, *фактическое* продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ можно и не осуществлять.

Пример 1. $f(x) = x^2$ для $-\pi \le x \le \pi$. Функция $f(x)$ — четная. График $f(x)$ вместе с ее периодическим продолжением изображен на рис. 31.14. Продолженная функция — непрерывная и кусочно-гладкая. Поэтому ряд Фурье сходится к $f(x) = x^2$ всюду на $[-\pi, \pi]$ и к периодическому продолжению этой

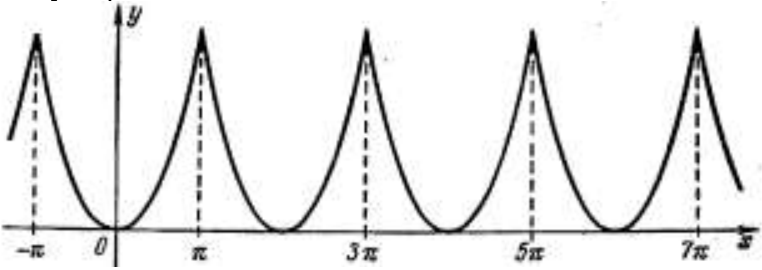


Рис. 31.14.

функции вне $[-\pi, \pi]$. Сходимость — абсолютная и равномерная. Подсчет дает: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

С помощью интегрирования по частям далее находим:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = -\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$b_n = 0$ $(n = 1, -2, \ldots)$ (так как $f(x)$ четна). Поэтому для $-\pi \le x \le \pi$ и $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$.

П р и м е р 2 . $f(x) = x$ для $-\pi < x < \pi$. Функция $f(x)$ нечетна. График $f(x)$ вместе с ее периодическим продолжением изображен на рис. 31.15. Продолженная функция является кусочно-гладкой и разрывной в точках вида $x = (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

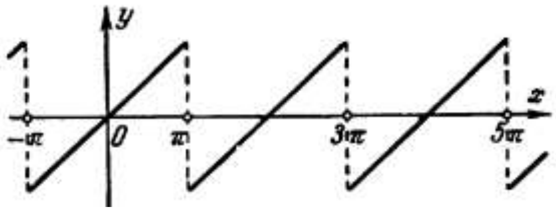


Рис. 31.15

В точках разрыва ряд Фурье сходится к нулю. В силу нечетности f(x) $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}.$$ Поэтому для $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right) \qquad (31.37)$$

П р и м е р 3 . Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ для $0 < x < 2\pi$. Задача напоминает пример 1, но график периодически продолженной функции сразу указывает на различие (рис. 31.16). В точках разрыва ряд сходится к среднему арифметическому предельных значений справа и слева, т. е. к значению $2\pi^2$. Функция общего вида, то

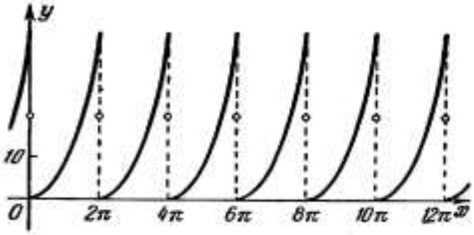


Рис. 31.16

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

Интегрируя, по частям, имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = 4/n^2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = 4\pi/n$$

Поэтому для

0<x<2π,

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\left(\cos x - \pi \sin x + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [-π, π]. Составим для нее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (31.38)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2,\ldots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,2,\ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (31.39)$$

Воспользуемся известным тождеством Эйлера, связывающим тригонометрические функции с показательной:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Из этого тождества легко вытекает, что

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Поэтому можем написать:

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} = i\,\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}$$

Подстановка в (31.38) дает:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) \qquad (31.40)$$

Если положить

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \ \ldots, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (n=1,2,\ldots), \qquad (31.41)$$

то m-я частная сумма ряда (31.40), а значит, и ряда(31.38) может быть записана так:

$$S_m(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{m}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx} \qquad (31.42)$$

Поэтому естественна запись

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (31.43)$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье для f(x).* Сходимость ряда (31.43) нужно понимать как существование предела при $m \to \infty$ *симметричных* сумм (31.42).

Коэффициенты c_n, дающиеся формулами (31.43), называются *комплексными коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Для них справедливы соотношения

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \qquad (n = 0, \pm1, \pm2,..). \qquad (31.44)$$

Действительно, в силу тождества Эйлера и формул

Для положительных индексов и для отрицательных

индексов. Полезно иметь в виду, что для *действительной*

функции $f(x)$ коэффициенты c_n и c_{-n} являются взаимно сопряженными комплексными числами.

32. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть *f(x)* —функция, заданная для всех действительных *x* и кусочно-гладкая (непрерывная или разрывная) на каждом конечном отрезке [—*l*, *l*]. Тогда на каждом таком отрезке *f(x)* может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right) \qquad (32.1)$$

(в точках разрыва вместо *f(x)* нужно писать $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$),

причем

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi nu}{l}du \qquad (n=0,1,2,\ \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{\pi n u}{l}du \qquad (n=1,2,\ \dots)$$

Если в (32.1) подставить выражения для a_n и b_n, то получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{l-}^{l} f(u)du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n}{l}(u-x)du.$$

Предположим теперь абсолютную интегрируемость *f(x)* на всей *Ox*, т. е. предположим существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \qquad (32.2)$$

Тогда при $l \to \infty$ (*x* — фиксировано) получим:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n}{l}(u-x)du. \qquad (32.3)$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью положим:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \dots,$$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма получит вид

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l} f(u)\cos\lambda_n(u-x)du. \qquad (32.4)$$

Это напоминает интегральную сумму для функции

переменного λ $\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du,$ составленную

для промежутка [0, +∞). Поэтому естественно ожидать, что при $l \to \infty$ (1.4) перейдёт в двойной несобственный интеграл, и, следовательно, естественно ожидать формулы

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du. \qquad (32.5)$$

Интеграл справа в (32.5) называется *интегралом Фурье,* а формула в целом — *интегральной формулой Фурье.* Если воспользоваться формулой для косинуса разности, то вместо (32.5) можем написать:

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda, \qquad (32.6)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda u du,\ \ b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u du. \qquad (32.7)$$

Сходство с рядом Фурье состоит в следующем: знак суммы заменился знаком интеграла, и вместо целочисленного параметра *n* фигурирует непрерывно изменяющийся параметр λ. Коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ весьма напоминают коэффициенты Фурье.

<u>*Доказательство интегральной формулы Фурье*</u>

Предположим, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей Ox. По определению понятия несобственного интеграла

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du. \qquad (32.8)$$

Таким образом, существование интеграла слева эквивалентно существованию предела справа. Но интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du$ равномерно сходится для $-\infty < \lambda < \infty$. так как $|f(u)\cos\lambda(u-x)| \le |f(u)|$, а $f(u)$ абсолютно интегрируема на всей оси. Поэтому

$$\int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^l f(u)\cos\lambda(u-x)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin lu}{u}du$$

(мы сделали замену *u*— *x* = υ, а затем вместо υ опять стали писать *u*). Имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin lu}{u}du.$$

Если теперь в точке *x* функция *f(x)* имеет правую и левую производные, то предел в правой части существует и равен числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Следовательно, существует интеграл слева и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-x)du = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (32.9)$$

В точках непрерывности полусумма предельных значений совпадает с *f{x)*. Таким образом: *Если f(x) абсолютно интегрируема на всей оси Ox, то интегральная формула Фурье имеет место в каждой точке x, в которой f(x) имеет правую и левую производные.* Отсюда:*Если кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке функция f(x) абсолютно интегрируема на всей оси Ox, то интегральная формула Фурье справедлива для всех x.*

Различные виды интегральной формулы Фурье

Предполагая *f(x)* абсолютно интегрируемой на всей оси *Ox,* рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda(u-x)du.$$

Этот интеграл равномерно сходится для $-\infty < \lambda < \infty$, так как

$$| f(u)\sin\lambda(u-x) \le | f(u) |$$

Поэтому он представляет собой непрерывную и, очевидно, нечетную функцию от λ. Но тогда

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\lambda(u-x)du=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\lambda(u-x)du=0.$$

С другой стороны, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\lambda(u-x)du$$

представляет собой *четную* функцию от λ . Поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(u)[\cos\lambda(u-x)+i\sin\lambda(u-x)du=.$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\lambda(u-x)}du. \tag{32.10}$$

Мы получили *комплексную форму* интеграла Фурье. Перепишем теперь формулу (32.10) в виде:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda x(\int f(u)\cos\lambda udu)d\lambda+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\lambda x(\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\lambda udu)d\lambda. \tag{32.11}$$

В случае *четной f(u)*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\lambda udu=2\int_{0}^{\infty}f(u)\cos\lambda udu,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\lambda udu=0$$

и равенство (32.11) дает:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda x(\int_{0}^{\infty}f(u)\cos\lambda udu)d\lambda. \tag{32.12}$$

В случае *нечетной f{u)* аналогично получим:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\lambda x(\int_{0}^{\infty}f(u)\sin\lambda udu)d\lambda. \tag{32.13}$$

Если $f\{x)$ задана лишь для $[0, \infty)$, то формула (32.12) *четным* образом распространяет $f(x)$ на всю Ox, а формула (32.4) — *нечетным* образом. Для положительных x, таким образом, приложимы обе формулы, а для отрицательных— они дадут разные значения. Заметим, что при непрерывности $f(x)$ для $x = 0$ формула (32.12) всегда справедлива в этой точке, а формула (32.13) справедлива лишь тогда, когда $f(0) = 0$ (так как при нечетном продолжении функции всегда $\frac{f(+0)+f(-0)}{2}=0$, а это значение и принимает интеграл в (32.13) при $x = 0$).

Преобразование Фурье

Пусть $f\{u)$ задана. Функцию

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\lambda u}du \tag{32.14}$$

называют *преобразованием Фурье* функции $f(u)$. Если для $f(x)$ справедлива интегральная формула Фурье, то в силу (32.10)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda. \tag{32.15}$$

Эта функция будет *обратным преобразованием* Фурье функции $F(\lambda)$. Функцию (32.14) можно рассматривать как решение *интегрального уравнения* (32.15): $f(x)$ задана, $F(\lambda)$ ищется. Отметим несколько свойств преобразований Фурье

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{ixu}du.$$

1.Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке$(-\infty.\infty)$, то функция $F(x)$ непрерывна для всех x и стремится к нулю при $|x|\to\infty$. Непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла (по x), поскольку $|e^{ixu}|=1$, $|f(u)e^{ixu}|=|f(u)|$, а интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|du$ существует.

Далее,

$$\lim_{|x|\to\infty} F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim_{|x|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos xudu+i\lim_{|x|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin xudu\right]=0$$

2.*Если функция* $x^n f(x)$ *(n-целое, положительное) абсолютно интегрируема в промежутке* (-∞,∞), *то для F(x) существует n производных, причем*

$$F^{(k)}(x)=\frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)u^k e^{ixu}du \quad \text{(k=1,2,…,n)} \qquad (32.16)$$

и все эти производные стремятся к нулю при |x|→∞.

Действительно, формулы (32.16) могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, поскольку каждый раз мы получаем интегралы, равномерно сходящиеся по *x,* что вытекает из равенств

$|f(u)u^k e^{ixu}|=|f(u)u^k|$ (k=1,2,…,n), где функции справа абсолютно интегрируемы.

3. *Если f(x) непрерывна и стремится к нулю при* |x|→∞, *f'(x) абсолютно интегрируема в промежутке* (-∞,∞), *то*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(u)e^{ixu}du=\frac{x}{i}F(x).$$

4. *Если f(x) абсолютно интегрируема в промежутке* (-∞,∞), а $\int_0^x f(u)du\to 0$ при |x|→∞, *то* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^u f(t)dt\right)e^{ixu}du=\frac{i}{x}F(x)$.

Обе последние формулы доказываются интегрированием по частям. Эти формулы позволяют сделать следующий вывод: Дифференцированию исходной функции *f(x)* отвечает умножение на *x/i* ее преобразованной функции (*x) ,* а интегрированию — деление на ту же величину. Идея такого рода сведения сложных операций математического анализа к простым алгебраическим операциям с преобразованными функциями (с последующим обратным преобразованием окончательного результата) лежит в основе *операционного исчисления,* весьма важного по своим приложениям раздела математики. Обратимся теперь к преобразованиям несколько иного вида.

Функцию

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u)\cos\lambda u du \tag{32.17}$$

условимся называть *косинус- преобразованием* Фурье для функции *f(u).* Если для *f(x)* справедлива интегральная формула Фурье, то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\lambda)\cos x\lambda d\lambda, \tag{32.18}$$

т. е. *f(x)* в свою очередь является косинус- преобразованием для *F(λ).* Иными словами, функции *f* и *F* являются взаимными косинус- преобразованиями.

Аналогично, функция

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u)\sin\lambda u du \tag{32.19}$$

называется *синус- преобразованием* Фурье для *f(u).*Можно получить:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda)\sin x\lambda d\lambda, \tag{32.20}$$

т.е., подобно случаю косинус- преобразований, *f* и Ф оказываются взаимными синус- преобразованиями. Функцию (32.17) можно рассматривать как решение *интегрального уравнения* (32.18) (*f*(*x*) задана, *F(λ)* ищется), а функцию (32.19) —как решение интегрального уравнения (32.20).В качестве упражнения применим косинус- и синус- преобразования Фурье к вычислению некоторых интегралов.

Пример 1. Пусть $f(x) = e^{-ax}$ (a > 0, $x \geq 0$). Эта функция интегрируема для $0 \leq x < \infty$ и всюду обладает производной.

С помощью интегрирования по частям найдем:

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-au}}\cos\lambda u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\lambda^2},$$

$$\Phi(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-au}\sin\lambda u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}.$$

То $e^{-ax}=\dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x\lambda d\lambda}{a^2+\lambda^2}$ *(x≥0),* $e^{-ax}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\lambda\sin x\lambda d\lambda}{a^2+\lambda^2}$ *(x>0).*

Спектральная функция

Формулу (32.10), как легко сообразить, можно переписать так:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\lambda(x-u)}du \qquad (32.21)$$

$e^{i\lambda(x-u)}=\cos\lambda(x-u)+i\sin\lambda(x-u)=\cos\lambda(u-x)-i\sin\lambda(u-x),$

а интеграл, содержащий синус, равен 0). Теперь положим:

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\lambda u}du. \qquad (32.22)$$

Эта функция (в общем случае —комплексная) играет важную роль в электротехнике и носит наименование *спектральной функции* для *f(x)*. В силу (32.21) и (32.22)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\lambda)e^{ikx}d\lambda. \qquad (32.23)$$

Формула (32.22) дает значения *комплексных коэффициентов Фурье.*

Пример 2. Найти спектральную функцию для

$$f(x)=\begin{cases}1\ при\ |x|<a,\\ 0\ при\ |x|>a.\end{cases}$$ (см. рис. 32.1).

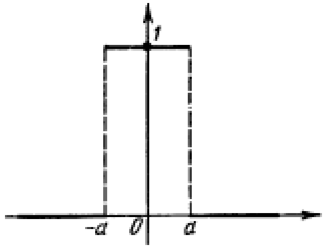


Рис. 32.1

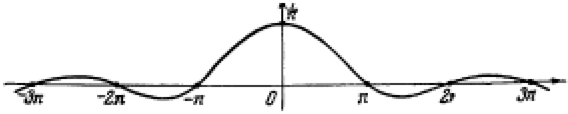


Рис. 32.2.

Формула (32.22) дает:

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{-i\lambda u}du=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\lambda u}}{-i\lambda}\right]_{u=-a}^{u=a}=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin a\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом, А (λ) оказалось здесь действительной функцией; ее график (при a = 1) изображен на рис. 32.2.

33. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим на плоскости область Φ, ограниченную замкнутой гладкой (или кусочно-гладкой) кривой Λ (рис. 33.1). В дальнейшем всякое ограниченное замкнутое множество будем называть компактным множеством (или компактом). Диаметром компактной фигуры называется точная верхняя грань расстояний между двумя любыми точками этой фигуры. Геометрический диаметр компактной фигуры представляет собой наибольшую из ее хорд.

Если диаметр компактной фигуры стремится к нулю, то фигура стягивается в точку. Для рассмотренного компакта Φ на плоскости можно указать пару многоугольников A и B с площадями $S(A)$ и $S(B)$, из которых один содержится в Φ, а другой содержит Φ, т.е. $A \subseteq \Phi \subseteq B$. Таких пар многоугольников можно подобрать бесконечное множество. Обозначим

$\underline{S} = sup\ \{S(A)\}$ - точную верхнюю границу, а $\overline{S} = inf\ \{S(A)\}$ – точную нижнюю грань этих множеств.

Определение 1. Если $\underline{S} = \overline{S} = S$, то число S называется площадью фигуры Φ, а сама фигура Φ называется квадрируемой.

Определение 2. Разбиением $\{\Phi_к\}$ квадратируемой фигуры Φ называется такая совокупность квадратируемых фигур $\Phi_к$, объединение которых составляет фигуру Φ, причем никакие две различные фигуры $\Phi_к$ и Φ_l не имеют общих внутренних точек (т.е. $\Phi_к \wedge \Phi_l = 0$, при $к \neq l$), $\{\Phi_к\}$ – сокращенная запись совокупности $\{\Phi_1, \Phi_2 \ldots, \Phi_n\}$.

Определение 3. Наибольший из диаметров фигур, составляющих разбиение, называют диаметром разбиения $\{\Phi_к\}$ и обозначают его через d.

Пусть на плоской компактной фигуре Φ задана функция $f{:}\Phi \to R$. Для определения двойного интеграла (по Риману) от функции f по фигуре Φ рассмотрим разбиение $\{\Phi_к\}$ области Φ (рис. 33.1). Это разбиение должно быть таким, чтобы все геометрические фигуры $\Phi_к$ были квадрируемыми, т.е. имели бы площади, которые обозначим через $\Delta S_к$.

В каждой геометрической фигуре Φ разбиения $\{\Phi_к\}$ выберем произвольную точку) $(\overline{x_к}, \overline{y_к}) \in \Phi_к$.

Если диаметр d разбиения фигуры Φ стремится к нулю, то число n фигур неограниченно увеличивается, т.е. $n \to \infty$. Вычислим значения функции $f(\overline{x_к}, \overline{y_к})$ и составим сумму произведений вида

$$J_n = \sum_{к=1}^{n} f(\overline{x_к}, \overline{y_к})\Delta S_к. \tag{33.1}$$

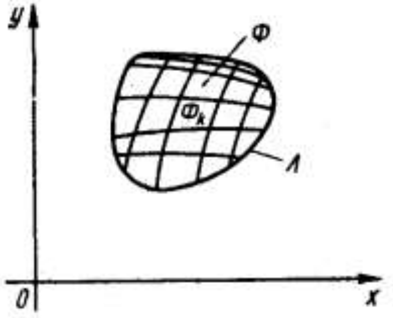


Рис.33.1

Сумма вида (33.1) называется двумерной интегральной суммой Римана функции $f(x,y)$, соответствующей разбиению $\{\Phi_к\}$ с отмеченными точками $(\overline{x_к}, \overline{y_к})$, $к = 1,2,\dots, n$.

Определение 4. Число J называется пределом последовательности интегральных сумм (33.1) при $d \to 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $d < \delta$ независимо от выбора отмеченных точек $(\overline{x_к}, \overline{y_к})$ в частичных фигурах $\Phi_к$ выполняется неравенство $/J_n - J/ < \varepsilon$.

Определение 5. Предел последовательности двумерных интегральных сумм вида (33.1) при $d \to 0$ (если он *существует*) называется двойным интегралом (по Риману) от функции $f(x, y)$ по области Φ и обозначается

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y)ds = \lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{к=1}^{n} f(\overline{x_к},\overline{y_к})\ \Delta S_к. \qquad (33.2)$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) в области Φ. Переменные x и y являются переменными интегрирования; $f(x,y)$ - подынтегральной функцией; $f(x,$

y)dS - подынтегральным выражением; *dS* - двумерным элементом площади; *Ф* - областью интегрирования.

Свойства двойного интеграла

1. Двойной интеграл $\iint\limits_{\Phi} f(x,y)ds$ по области *Ф* равен площади этой области.

2. Свойство аддитивности

Если функция *f* интегрируема в области *Ф*, а область *Ф* разбита на две связные и не имеющие общих внутренних точек области Φ_1 и Φ_2, то *f(x, y)* интегрируема в каждой из областей Φ_1 и Φ_2, причем

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y)ds = \iint\limits_{\Phi_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{\Phi_2} f(x,y)ds .$$

Эта теорема справедлива для любого числа слагаемых.

3. Свойство линейности

Если функции f_1 и f_2 интегрируемы в области *Ф*, то функция $c_1f_1 + c_2f_2$, где c_1 и c_2 – любые вещественные числа, также интегрируема в области *Ф*, то

$$\iint\limits_{\Phi} [c_1f_2(x,y)+c_2f_2(x,y)]ds=c_1\iint\limits_{\Phi} f_1(x,y)ds+c_2\iint\limits_{\Phi} f_2(x,y)ds.$$

4. Свойство монотонности

Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области *Ф* и всюду в этой области $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то

$$\iint\limits_{\Phi} f_1(x, y)\, ds \le \iint\limits_{\Phi} f_2(x, y)\, ds.$$

В частности, если $f(x, y) \ge 0$, то $\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\, ds \ge 0.$

5. Теорема об оценке абсолютной величины интеграла

Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области *Ф*, то и функция $|f(x, y)|$ тоже интегрируема в этой области, причем

$$\left| \iint\limits_{\Phi} f(x, y)\, ds \right| \leq \iint\limits_{\Phi} \left| f(x, y) \right| ds$$

т.е. абсолютная величина двойного интеграла не превосходит двойного интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции.

6. Теорема о среднем значении

Если функция f непрерывна в замкнутой ограниченной области Φ, то найдется такая точка $(\overline{x_к}, \overline{y_к}) \in \Phi$, что

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y) ds = f(x, y)\, S,$$

где S – площадь области.

Свойство 6 имеет следующую геометрическую интерпретацию: объем V цилиндроида T, ограниченного снизу связной компактной фигурой Φ, сбоку цилиндрической поверхностью, а сверху – непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, равен объему прямого цилиндра с основанием Φ и высотой $f(\overline{x_к}, \overline{y_к})$, равной значению функции $f(x, y)$ в некоторой точке $(\overline{x_к}, \overline{y_к}) \in \Phi$. Значение функции называется средним значением функции $f(x, y)$

а) Двойной интеграл по прямоугольной области

Если область D, на которую распространяется двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} f(x,y) ds = \iint\limits_{D} f(x,y) dxdy$$

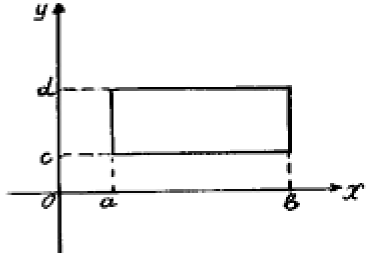


Рис.33.2

прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и определяемыми уравнениями *x = a, x = b, (a ≤ x ≤ b), y = c, y = d, (c ≤ y ≤ d),* то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \qquad (33.4)$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_c^d f(x,y)dy \qquad (33.5)$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул называются повторными или двухкратными.

В формуле (33.4) $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ называется внутренним и вычисляется в предположении, что переменная *y* сохраняет на отрезке *[a, b]* фиксированное постоянное значение. При этом подынтегральная функция *f(x, y)* является функцией только одной переменной *x*. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной *y*.

После того, как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование под переменной *y*. В результате этого вторичного интегрирования получится уже не функция, а число.

Если же для вычисления двойного интеграла применяется формула (33.4), то порядок интегрирования меняется. Первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной *y* в предположении, что переменная *a* на отрезке *[c, d]* сохраняет постоянное фиксированное значение, а повторное (внешнее) интегрирование по переменной *x*. В результате вычисления внутреннего интеграла $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ получится функция переменной *x*, а повторное интегрирование дает число.

Пример1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(6xy^2 - 12x^2y\right)dxdy$ по области D, ограниченной: $x = 0;\ x = 1;\ y = 2;\ y = 3.$

Решение. Область D представляет собой квадрат со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 33.3). Произведем вычисление этого интеграла сначала по формуле 33.3.

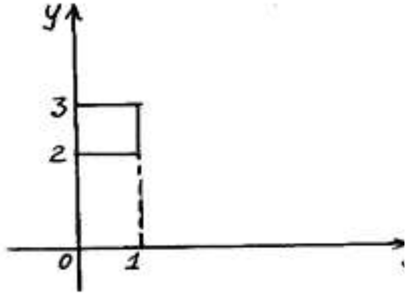


Рис. 33.3

Получим:

$$I = \iint\limits_{Д} \left(6xy^2 - 12x^2y\right)dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^1 \left(6xy^2 - 12x^2y\right)dx =$$

$$= \int\limits_2^3 dy \left[3x^2y^2 - 4x^3y\right]\Big|_0^1 = \int\limits_2^3 \left(3y^2 - 4y\right)dy = \left(y^3 - 2y^2\right)\Big|_2^3 = 9\ .$$

Изменим порядок интегрирования, т.е. и вычислим внутренний интеграл по y, а внешний по x.

Получим:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_2^3 \left(6xy^2 - 12x^2y\right)dy = \int\limits_0^1 dx \left(2xy^3 - 6x^2y^2\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(54x - 54x^2 - 16x + 24x^2\right)dx = \int\limits_0^1 \left(38x - 30x^2\right)dx = \left(19x^2 - 10x^3\right)\Big|_0^1 = 9\ .$$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна, то результаты вычислений совпали, они не зависят от порядка интегрирования.

б) Двойной интеграл по произвольной плоской фигуре

Если область интегрирования D ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси *ОУ,* пересекает не более чем в двух точках (рис. 33.4), то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy \qquad (33.6)$$

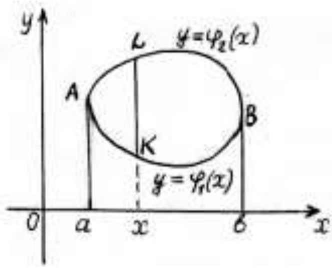


Рис. 33.4

где функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывны, обозначены и сохраняют аналитическое выражение. Интеграл в правой части этой формулы также называется повторным или двухкратным. Если область D ограничена кривой, которую любая прямая, параллельная оси OX, пересекает не более, чем в двух точках (рис. 33.4), то двойной интеграл, распространенный на эту область, может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,. \qquad (33.7)$$

Причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[c, d]$ однозначны и непрерывны .

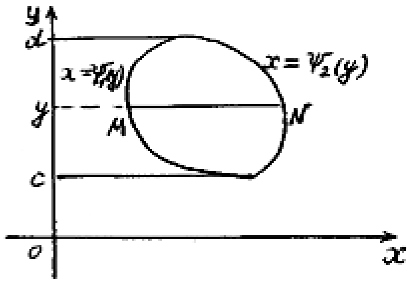


Рис. 33.5

Следует обратить внимание на то, что во внешнем интеграле в обоих случаях пределы интегрирования величины постоянные и в результате вычисления двойного интеграла получится постоянная величина. Если подынтегральная функция f(x, y) непрерывна в области D, то значение повторного интеграла, распространенного на эту область, не зависит от порядка интегрирования по различным аргументам.

Свойства определенных интегралов распространяются и на двойные интегралы. В формулах (33.6) и (33.7) для вычисления двойного интеграла предполагалось, кривая, ограничивающая область интегрирования *D*, пересекается всякой прямой, параллельной одной из координатных осей, не больше, чем в двух точках. Если это условие не выполнено, то область *D* следует разбить на части.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

В полярных координатах $dS = rdrd\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где r – полярный радиус ($0 \le r < +\infty$), φ – полярный угол ($0 \le \varphi \le 2\pi$), а двойной интеграл:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_D f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\,rdrd\varphi\,. \qquad (33.8)$$

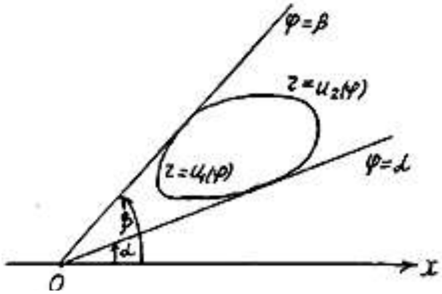


Рис. 33.6

Область D должна быть отнесена к полярной системе координат (рис. 33.6).

Если она ограничена двумя лучами с уравнениями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ и линиями, определяемыми уравнениями $r = u_1(\varphi)$ и $r = u_2(\varphi)$, где функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, однозначны и сохраняют аналитическое выражение, то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле (33.8):

$$\int\limits_D F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr . \qquad (33.9)$$

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы – повторный (иначе двукратный). Во внутреннем интеграле φ следует рассматривать как величину постоянную.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi$, где область D ограничена линиями $r = R$ и $r = 2R \sin\varphi$.

Решение. Область D ограничена окружностями радиуса R, одна из них с центром в начале координат $(r = R)$, а другая с центром в точке с координатами (O, R) на оси OY (рис. 33.7).

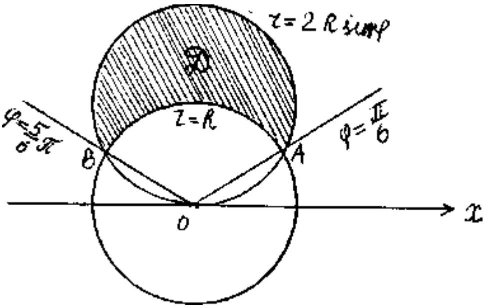


Рис. 33.7

Чтобы определить, как изменяется в области D полярный угол φ, проведем лучи из начала координат в точки A и B. Решая систему уравнений $\begin{cases} r = R \\ r = 2R\sin\varphi \end{cases}$, найдем значения угла φ, соответствующие лучам OA и OB.

Получим $2R\sin\varphi = R$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Таким образом, пределы изменения полярного угла φ в области D от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5}{6}\pi$.

Теперь найдем пределы изменения полярного радиуса в области D. Для этого под произвольным углу φ, взятым в промежутке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ проведем из полюса O луч OP. В точке C входа этого луча в область D $r = R$, а в точке P выхода из области $r = 2R\sin\varphi$, поэтому полярный радиус изменяется в области D R до $2R\sin\varphi$.

$$\text{Поэтому } \iint\limits_D r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_R^{2R\sin\varphi} r^2 dr .$$

(Мы вынесли $sin\varphi$ за знак внутреннего интеграла, так как при вычислении внутреннего интеграла переменная φ сохраняет постоянное значение).

Внутренний интеграл равен

$$\int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2 dr = \frac{r^3}{3}\Bigg|_{R}^{2R\sin\varphi} = \frac{1}{3}\left(8R^3\sin^3\varphi - R^3\right) = \frac{1}{3}R^3\left(\sin^3\varphi - 1\right)$$

Внешний интеграл равен

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{3}R^3\left(8\sin^3\varphi - 1\right)\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}R^3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(8\sin^4\varphi - \sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}R^3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin^4\varphi\, d\varphi - \frac{1}{3}R^3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{R^3}{12}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

Применение двойных интегралов для вычисления площадей и объемов

а) Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_D dS,$$

где dS – дифференциал площади.

Если фигура отнесена к прямоугольной системе координат, то предыдущая формула примет вид: $S = \iint\limits_D dxdy$.

Если фигура отнесена к полярной системе координат, то ее площадь вычисляется по формуле: $S = \iint\limits_D r \cdot drd\varphi$.

Пример 2 . *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями* $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ *и* $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

Решение.

Линии, ограничивающие область, это окружности с центрами в точках *(a, 0)* и *(0, a)* радиуса *a*.

Наличие в уравнении кривой выражения $x^2 + y^2$ указывает на целесообразность перехода к полярным координатам по формулам: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$.

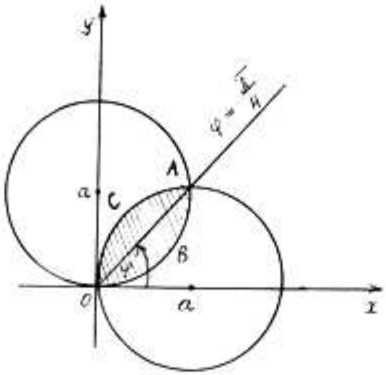


Рис. 33.8

Если раскрыть скобки, то уравнения окружностей запишутся в виде:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0. \tag{33.9}$$

В полярных координатах они примут вид:

$r = 2\,a\cos\varphi$, $r = 2\,a\sin\varphi$

Луч OA делит искомую площадь на две части D_1 и D_2 (рис. 33.8). Решая совместно уравнения (33.9) получим, что точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла. Уравнение луча OA: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Искомая площадь области $D = D_1 \cup D_2$ в силу свойства аддитивности двойного интеграла равна:

$$S = \iint\limits_{D_1} rdrd\varphi + \iint\limits_{D_2} rdrd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2a\sin\varphi} rdr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} rdr\,.$$

Вычислим отдельно внутренние интегралы:

$$\int\limits_0^{2a\sin\varphi} r\,dr = \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2a\sin\varphi} = 2a^2\sin^2\varphi;$$

$$\int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,dr = \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} = 2a^2\cos^2\varphi .$$

Поэтому искомая площадь равна:

$$S = 2a^2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\varphi\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= 2a^2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \text{ кв. ед.}$$

б) Вычисление объемов тел

Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *OZ*. Направляющей служит контур *z*, ограничивающий область интегрирования *D*, лежащую в плоскости *XOУ* и являющуюся нижним основанием этого цилиндрического тела. Сверху тело ограничено поверхностью, определяемой уравнением $z = f(x, y)$ (рис. 33.9). Таким образом, объем такого цилиндрического тела равен

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy . \qquad (33.10)$$

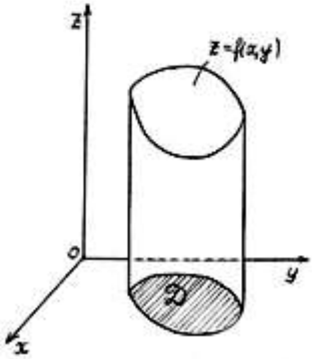


Рис. 33.9

Если вычисления ведутся в полярных координатах, то предыдущая формула примет вид:

$$V = \iint\limits_{D} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r dr d\varphi \ . \qquad (33.11)$$

Предполагается, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области D.

Пример 3 . Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Первая поверхность представляет собой эллиптический параболоид с осью симметрии OZ. Он пересекает ось OZ в точке $(0, 0, 1)$ (рис. 33.10).

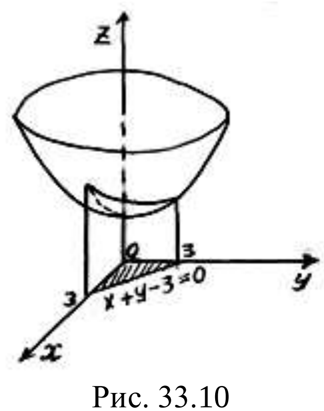


Рис. 33.10

Поверхность $x + y - 3 = 0$ – это плоскость, параллельная оси OZ, а остальные поверхности – это координатные плоскости. На плоскость XOY поверхность проектируется в треугольник D, ограниченный координатными осями и прямой $x + y - 3 = 0$. Сверху тело ограничено поверхностью $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$.

Объем тела вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_D \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right) dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^3 dy \left(\frac{4}{3}x^3 + 2x \cdot y^2 + x\right)\Bigg|_0^{3-y} = \int\limits_0^3 \left[\frac{4}{3}(3-y)^3 + 2(3-y)y^2 + (3-y)\right] dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3}y^3\right) dy = \left(39y - \frac{37}{2}y^2 + 6y^3 - \frac{10}{12}y^4\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= 39 \cdot 3 - \frac{37}{2} \cdot 9 + 6 \cdot 27 - \frac{5}{6} \cdot 81 = 45 \quad \text{куб. ед.}$$

в) Вычисление площади поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то плоскость той части поверхности, которая проектируется на плоскость XOY в область D_{XOY} вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{D_{XOY}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,. \qquad (33.12)$$

Предполагается, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области D и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Иногда выгодно проектировать поверхность, площадь которой вычисляется, не на плоскость XOY, а на плоскость YOZ, тогда уравнение поверхности следует решить относительно переменной $x = x(y, z)$.

Получим формулу:

$$S = \iint\limits_{Dyoz} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dydz\ . \qquad (33.13)$$

Если поверхность, площадь которой вычисляется, проектируется на плоскость XOZ, тогда уравнение поверхности следует решить относительно переменной $y = y(x, z)$.

Получим формулу:

$$S = \iint\limits_{Dyoz} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz\ . \qquad (33.13)$$

Пример 4. Вычислить площадь той части поверхности $y = x^2 + z^2$, которая находится в первом октанте и ограничена плоскостью $y = 2$.

Решение. Поверхность, площадь которой требуется вычислить, часть параболоида вращения (ось вращения OY) находящаяся в первом октанте, и ограничена плоскостью $y = 2,$ перпендикулярной к оси OY. Спроектируем вычисляемую поверхность на плоскость XOZ. Тогда получим четверть круга, ограниченного окружностью (рис. 33.11), уравнение которой получим, исключая y, из двух уравнений: $\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y = 2 \end{cases}$

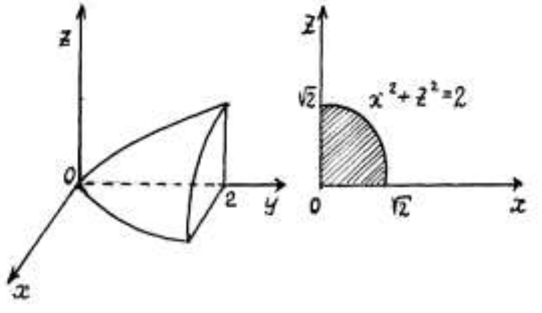


Рис. 33.11

Уравнение этой окружности: $x^2 + z^2 = 2\ ;\ y = 0.$

Так как мы проектировали поверхность на плоскость XOZ,то ее уравнение должно быть решено относительно переменной y и следует воспользоваться формулой (33.13).

Из условия задачи $y = x^2 + z^2;\ \frac{\partial y}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial y}{\partial z} = 2z$.

Получим формулу: $S = \iint\limits_{Dxoz} \sqrt{1 + 4\left(x^2 + z^2\right)}dxdz$, где область интегрирования четверть круга радиуса $\sqrt{2}$. Наличие под корнем выражения $x^2 + z^2$ указывает на то, что целесообразно ввести полярные координаты, учитывая, сто в этих координатах $x^2 + z^2 = r^2$. Полярный угол изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а полярный радиус от 0 до $\sqrt{2}$. Получим:

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{8}\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + 4r^2\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi \frac{\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{12}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1 + 8)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\varphi =$$

$$= \frac{13}{6}\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{12}\pi \quad кв.\ ед.$$

34. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение тройного интеграла

Определение тройного интеграла аналогично определениям определенного и двойного интегралов.

Пусть на пространственном компактом теле $T \subset R^3$ задана функция

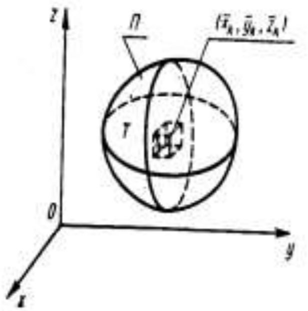


Рис. 34.1

$f\colon T \to R$. Рассмотрим разбиение $\{T_к\}$ тела T с диаметрами d_k и объемами $\Delta V_к$ $(к = 1, \ldots, n)$ (рис. 34.1). Наибольший из диаметров d_k назовем диаметром произведенного разбиения и обозначим через d.

В каждом частичном теле $T_к$ выберем произвольную точку $(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$ и составим сумму

$$J_n = \sum_{к=1}^{n} f(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})\, \Delta V_к. \qquad (34.1)$$

Суммы вида (34.1) называются трехмерными интегралами. Суммами Римана функции $f(x, y, z)$, соответствующими разбиению $\{T_к\}$ с отмеченными точками $(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$.

Определение 1. Предел трехмерных интегральных сумм вида (34.1) при $d \to 0$ (если он существует) называется тройным интегралом (по Риману) от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается $\iiint\limits_T f(x, y, z)dV$. Таким образом

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \lim_{d \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\overline{x_{к}}, \overline{y_{к}}, \overline{z_{к}})\, \Delta V_{\kappa}. \qquad (34.2)$$

В этом случае функция *f(x, y, z)* называется интегрируемой (по Риману) в области *T*, переменные *x, y, z* - переменными интегрирования; *f(x, y, z)* - подынтегральной функцией; *dV = dxdydz* - элементом объема в декартовых прямоугольных координатах, *T* – областью интегрирования.

Геометрический и физический смысл тройного интеграла

Тройной интеграл по области *T* от функции $f(x, y, z) \equiv 1$ на *T* равен объему этого тела. В декартовых прямоугольных координатах получим

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz\,. \qquad (34.3)$$

В этом состоит геометрический смысл тройного интеграла. Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения тройного интеграла.

Тройной интеграл по области *T* от плотности $\rho(x, y, z)$ материального тела *T* равен массе этого тела

$$m = \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz\,. \qquad (34.4)$$

Эта формула выражает физический смысл тройного интеграла. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству подобного утверждения в двумерном случае.

Свойства тройных интегралов

Можно доказать, что если подынтегральная функция непрерывна на компактном теле *T* с кусочно-гладкой границей, то тройной интеграл (34.2) всегда существует.

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов. Ограничимся перечислением этих свойств. Предполагаем непрерывность подынтегральных функций в рассматриваемых областях.

1. Тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ по области T равен объему этого тела.

2. Свойство аддитивности

Если пространственная область T разбита на две непересекающиеся области T_1 и T_2, то

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)dV .$$

3. Свойство линейности

Если функции f_1 и f_2 интегрируемы в области T, то и функция $c_1f_1 + c_2f_2$, где c_1 и c_2 – любые вещественные константы, также интегрируема в области T, причем

$$\iiint\limits_T (c_1 f_1(x,y,z) + c_2 f_2(x,y,z))dV = c_1 \iiint\limits_T f(x,y,z)dV +$$
$$+ c_2 \iiint\limits_T f(x,y,z)dV .$$

4. Свойство монотонности

Если всюду в области T выполняется неравенство $f_1(x, y, z) \le f_2(x, y, z)$, то

$$\iiint\limits_T f_1(x,y,z)dV \le \iiint\limits_T f_2(x,y,z)dV .$$

5. Абсолютная величина тройного интеграла не превосходит тройного интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции, т.е.

$$\left| \iiint_T f(x,y,z)dV \right| \le \iiint_T \left| f(x,y,z) \right| dV .$$

6. Теорема о среднем. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $T \subset R^3$, то в этой области найдется точка $(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к}) \in T$, что $\iiint_T f(x,y,z)dV =$

$= V f(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$, где V – объем области T.

7. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $T \subset R_3$, то $mV \le \iiint_T f(x,y,z)dV \le MV$, где m и M – наименьшее и наибольшее значение функции $f(x, y, z)$ в области V.

Вычисление тройного интеграла в декартовых прямоугольных координатах

В прямоугольных координатах элемент объема dV вычисляется по формуле: $dV = dxdydz$.

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных, в области V (рис. 34.1) имеет вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

и вычисляется по формуле:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (34.5)$$

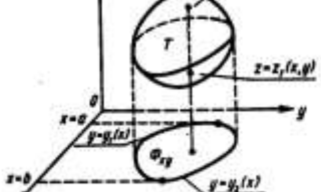


Рис. 34.2

Под областью V, на которую распространен тройной интеграл, понимается пространственная область, ограниченная снизу и сверху поверхностями, определяемыми уравнениями $z=\varphi_1(x,y)$ и $z=\varphi_2(x,y)$ $(\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y))$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными от OZ.

Переменные, X и $У$ изменяются в плоской области D_{xoy}, которая является проекцией на плоскость $XOУ$, пространственной области V.

Область D_{xoy} ограниченна непрерывными кривыми, определяемыми уравнениями $y=\Psi_1(x)$ *и* $y=\Psi_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a \angle b,\ \Psi_1(x) \le \Psi_2(x))$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к трем последовательным интегралам по формуле (34.5). При, вычислении внутреннего интеграла $\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ переменные X и $У$ следует рассматривать как постоянные. В результате получится функция двух независимых переменных X и $У$.

Таким образом, мы сведем вычисление тройного интеграла к двойному интегралу, с вычислением которого мы уже знакомы.

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен, но при этом пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда величины постоянные.

Пример 1 . Вычислить интеграл: $I = \iiint\limits_V xdxdydz$, где V – тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Тетраэдр, ограниченный снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $z = 6 - 2x - 2y$. Поэтому в области интегрирования V переменная z изменяется от $z = 0$, до $z = 6 - 2x - 2y$ (рис. 34.3).

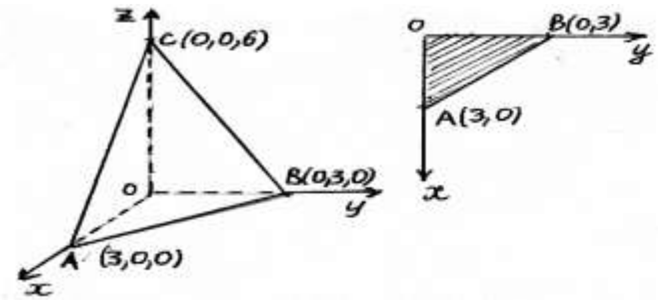


Рис. 34.3

Проекцией области V на плоскость XOY является треугольник OAB.

Уравнение прямой AB получим, решая совместно уравнения плоскостей: $\begin{cases} z = 6 - 2x - 2y \\ z = 0 \end{cases}$

Отсюда, уравнение прямой AB имеет вид: $x + y - 3 = 0$.

В области D_{xoy} переменная x изменяется в пределах $0 \le x \le 3$, а переменная y изменяется $0 \le y \le 3 - x$.

Поэтому:

$$I = \iiint\limits_V x dx dy dz = \int\limits_0^3 x dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{6-2x-2y} dz .$$

Вычислим внутренний интеграл в тройном интеграле

$$\int\limits_0^{6-2x-2y} dz = z \Bigg|_0^{6-2x-2y} = 6 - 2x - 2y .$$

Следовательно: $I = \int\limits_0^3 x dx \int\limits_0^{3-x} (6 - 2x - 2y) dy$.

Вычислим внутренний интеграл в двойном интеграле:

$$\int_0^{3-x}(6-2x-2y)dy=\left(6y-2xy-y^2\right)\Bigg|_0^{3-x}=6(3-x)-(3-x)^2=$$

$=9-6x+x^2$. Получим

$$I=\int_0^3 x\left(9-6x+x^2\right)dx=\left(\frac{9}{2}x^2-6\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{4}.$$

Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

а) Цилиндрические координаты

В цилиндрических координатах положение точки M в пространстве определяется следующим образов:

Точка M проектируется на плоскость XOY и определяются полярные координаты r и φ ее проекции.

Третьей цилиндрической координатой является расстояние точки M от плоскости XOY, т.е. ее аппликата z (рис. 34.4). Область изменения цилиндрических координат определяется неравенствами: $z > 0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$.

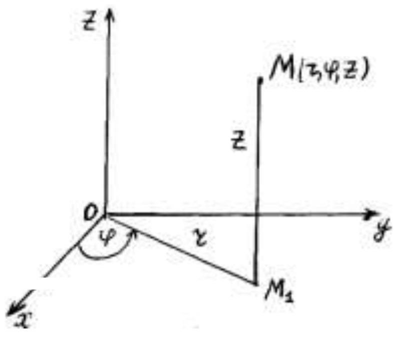


Рис. 34.4

Формулы, обязывающие прямоугольные координаты и цилиндрические координаты точки имеют вид:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z \qquad (34.6)$$

В цилиндрических координатах элемент объема:

$$dV = r\,dz\,d\varphi\,dz \qquad (34.7)$$

Для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ преобразовать к цилиндрическим координатам, надо x, y и z в подынтегральной функции заменить по формулам (34.6), а элемент объема $dxdydz$ по формуле (34.7). После этого тройной интеграл вычислить тремя последовательными интегрированиями.

б) Сферические координаты

В сферических координатах положение точки M в пространстве, определяется тремя числами ρ, φ, θ, где ρ - расстояние точки M от начала координат $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $(\rho \ge 0)$. Точка M проектируется на плоскость XOY в точку M_1. Угол φ, составленный OM_1 и осью OX является второй сферической координатой точки M. Он отсчитывается от оси OX против часовой стрелки может изменяться от 0 до 2π.

Третьей сферической координатой является угол θ между осью OZ и OM $(0 \le \theta \le \pi)$.

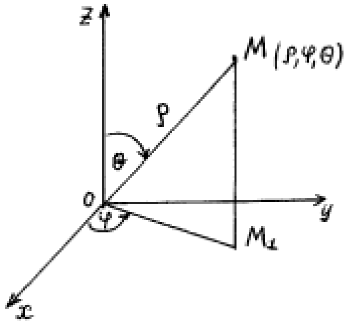


Рис. 34.5

Формулы, связывающие прямоугольные координаты точки и ее сферические координаты имеют вид:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi \qquad (34.8)$$
$$z = \rho \cos\theta$$

В сферических координатах элемент объема:

$$dV = \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi . \qquad (34.9)$$

Для того, чтобы тройной интеграл преобразовать к сферическим координатам надо x, y и z заменить в подынтегральной функции по формулам (34.8), а элемент объема $dxdydz$ по формуле (34.9). После того вычислить его тремя последовательными интегралами (порядок интегрирования безразличен). Заметим, что переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар (или часть шара) или подынтегральная функция содержит в себе выражение вида $x^2 + y^2 + z^2$, так как в сферических координатах $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Применение тройных интегралов в геометрии и механике

а) Вычисление объема тела

Объем тела, ограниченного областью *V*, в прямоугольных координатах вычисляется по формуле:

$$V = \iiint_V dxdydz . \qquad (34.10)$$

В цилиндрических координатах объем тела:

$$V = \iiint_V r dr d\varphi \, dz . \qquad (34.11)$$

В сферических координатах объем тела:

$$V = \iiint_V \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi . \qquad (34.12)$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ и $x^2 + y^2 = 2 - z$.

Решение. Первая поверхность сфера. Преобразуем уравнение сферы к виду $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Откуда видно, что центр сферы находится на оси OZ в точке $(0, 0, 1)$, а ее радиус равен 1. Вторая поверхность – параболоид вращения (рис. 34.6).

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Этой линией является окружность. Определим, на какой высоте над плоскостью XOY расположена эта линия.

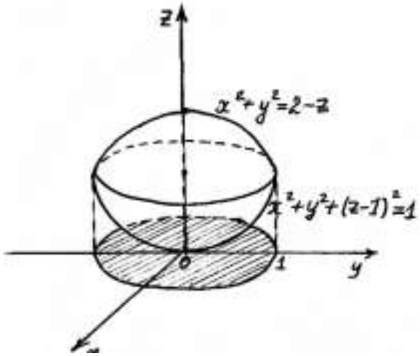


Рис. 34.6

Для этого из второго уравнения подставим значение $x^2 + y^2 = 2 - z$ в первое уравнение, получим $(2 - z)^2 + z^2 - 2z = 0$ или $z^2 - 3z + 2 = 0$. Решая его получим $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Точка, в которой $z = 2$ – это вершина параболоида, поэтому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z = 1$ над плоскостью XOY. Уравнение этой линии получим, подставляя $z = 1$ в уравнение любой из этих поверхностей.

Оно имеет вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

Это окружность, она проектируется на плоскость XOY в окружность $x^2 + y^2 = 1$, а все тело проектируется в круг D_{XOY}, ограниченный этой окружностью.

По формуле (34.6) объем тела равен $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Внутреннее интегрирование проведем по переменной z. Определим пределы изменения переменной в области интегрирования: из уравнения сферы получим на нижней полусфере $z = 1 - \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)}$, а из уравнения параболоида $z = 2 - (x^2 + y^2)$. Таким образом, в области интегрирования

$$1 - \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)} \le z \le 2 - \left(x^2 + y^2\right).$$

Поскольку под знаком интеграла имеется выражение $x^2 + y^2$, а область интегрирования круг, удобно перейти к полярным координатам, в которых $x^2 + y^2 = r^2$, а элемент площади $dxdy = rdrd\varphi$. Так как в круге D_{XOY} $0 \le z \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, то

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2 - r^2 - 1 + \sqrt{1-r^2} \right) rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 - r^2 + \sqrt{1-r^2} \right) rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r - r^3 + r\sqrt{1-2^2} \right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{7}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{7}{12} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{7}{6}\pi .$$

б) Вычисление массы тела

Если дано некоторое тело с объемной плотностью $\gamma (x, y, z)$, представляющий собой непрерывную функцию, то масса m этого тела, равна тройному интегралу от функции плотности $\gamma (x, y, z)$, распространенному на объем V, занимаемый этим телом:

$$m = \iiint_V \gamma(x,y,z)\, dxdydz \ . \qquad (34.13)$$

Пример 3 . Вычислить массу тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$, если плотность в каждой точке тела равна аппликате точки (т.е. $\gamma = z$).

Решение. В этой задаче удобно перейти к цилиндрическим координатам, так как в уравнении параболоида содержится сумма $x^2 + y^2$, а в цилиндрических координатах $x^2 + y^2 = r^2$.

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело, в цилиндрических координатах.

Уравнение сферы примет вид: $r^2 + z^2 = 4;\quad r^2 = 4 - z^2$.

Уравнение параболоида: $r^2 = 3z$.Из этих уравнений следует, что на параболоиде: $z = \dfrac{r^2}{3}$, а на сфере $z = \sqrt{4 - r^2}$.

Спроектируем это тело на плоскость XOY. Проекцией будет круг. Найдем радиус этого круга. Для этого определим, при каком значении z пересекаются поверхности, т.е. определим z из системы:

$$\begin{cases} r^2 = 4 - z^2 \\ r^2 = 3z \end{cases};$$

Получим $z^2 + 3z - 4 = 0;\ \ z_1 = 1;\ \ z_2 = -4.$

Смыслу задачи удовлетворяет только $z = 1$.

Подставим это значение в любое из уравнений системы, получим $r^2 = 3,\ r = \sqrt{3}$.

Итак, радиус круга, в который проектировалось тело равен $\sqrt{3}$; переменные r, φ, z в теле изменяются в пределах:

$$0 \le r \le \sqrt{3}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \frac{r^2}{3} \le z \le \sqrt{4 - r^2} .$$

Масса тела вычисляется по формуле (34.13), в которой элемент объема $dxdyxd = rdrd\varphi dz$.

Таким образом,

$$m = \iiint\limits_V z \cdot r \cdot drd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr \int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} zdz = \frac{13}{4}\pi .$$

35. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим задачу, которая естественным образом приводит к одному из обобщений понятия определенного интеграла - криволинейному интегралу первого рода. Эта физическая задача о вычислении массы материальной кривой.

Предположим, что на некоторой пространственной спрямляемой кривой AB масса распределена непрерывно. Будем называть средней плотностью дуги этой материальной кривой отношение ее массы к длине участка, а плотностью материальной кривой в данной точке – предел средней плотности участка кривой, содержащего эту точку, при стягивании последнего к данной точке. Найдем массу материальной кривой AB, если известна плотность кривой в каждой ее точке M, т.е. $\rho = \rho(M)$ – заданная непрерывная функция от M.

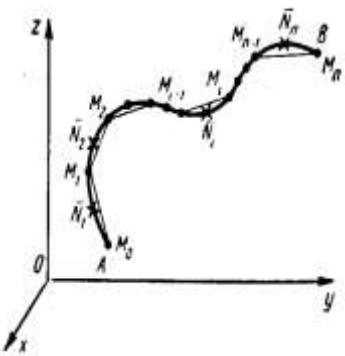


Рис. 35.1

Рассмотрим произвольное разбиение $\{M_к\}$, $(к = 0, 1, 2, ..., n)$ кривой AB с помощью n – точек, на n дуг M_0M_1, M_1M_2 , ..., $M_{n-1}M_n$ (рис. 35.1).

Наибольшую из длин дуг разбиения кривой AB обозначим через d и назовем диаметром этого разбиения. При $d \to 0$ число дуг неограниченно увеличивается. На каждой из дуг $M_{к-1}M_к$ произвольно выберем точку $\overline{N_к}\,(\overline{x_к}\,,\ \overline{y_к}\,,\ \overline{z_к}\,)$ и вычислим в ней плотность $\rho_к = \rho(\overline{N_к}\,)$ кривой. Если предположить, что плотность во всех точках каждого элементарного участка постоянна и равна ее значению в точке $\overline{N_к}$, то масса каждой элементарной дуги $\Delta m_к$ приближенно равна произведению $\rho(\overline{N_к}\,)\Delta l_к$, где $\Delta l_к$ – длина $M_{к-1}M_к$ дуги. Суммируя массы всех элементарных дуг разбиения, получим приближенное значение массы кривой AB

$$m \approx \sum_{\text{к}=1}^{\text{n}} \Delta m_k = \sum_{к=1}^{n} \rho\,(\overline{N_к}\,)\Delta l_к\ . \tag{35.1}$$

Т.к. функция $\rho(\overline{N_к}\,)$ непрерывна, то чем «меньше» разбиение кривой AB, тем точнее равенство (35.1).

За массу кривой AB принимают предел правой части этого равенства при стремлении диаметра разбиения d к нулю, т.е.

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{к=1}^{n} \rho\,(\overline{N_к}\,)\Delta l_к\ . \tag{35.2}$$

К вычислению пределов сумм указанного вида сводится большое количество математических и прикладных задач. Поэтому отвлечемся от конкретного содержания задачи и последовательно повторим все операции, выполненные при составлении правой части равенства (35.2).

Рассмотрим в трехмерном пространстве $OXYZ$ некоторую гладкую кривую AB, в каждой точке задана функция $f(x, y, z)$. Рассмотрим произвольно разбиение $\{M_к\}$ кривой AB с помощью n точек и выберем в каждой элементарной дуге разбиения точку $\overline{N_к}\,(\overline{x_к}\,,\ \overline{y_к}\,,\ \overline{z_к}\,)$. Определим значения функции f в отмеченных точках и составим сумму

$$\sum_{к=1}^{n} f\ (\overline{x_к}\,,\ \overline{y_к}\,,\ \overline{z_к}\,)\ \Delta l_к \tag{35.3}$$

Сумма вида (35.3) называется интегральной суммой первого рода для функции $f(x, y, z)$, заданной на кривой AB, соответствующей разбиению $\{M_к\}$ с отмеченными точками $\overline{N_к}$ $(к = 0, 1, 2, ..., n)$. Пусть разбиение кривой AB становится все более мелким, так что $d \to 0$, а число элементарных дуг неограниченно возрастает $(n \to \infty)$.

Определение. Если при $d \to 0$ $(n \to \infty)$ интегральная сумма (35.3) имеет конечный предел J, не зависящий от способа разбиения кривой AB на частичные дуги и выбора точек $\overline{N_к}$ в каждой из них, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода (по длине дуги) от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl.$

Таким образом:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{к=1}^{n} f(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})\Delta l_к. \tag{35.4}$$

Кривая AB называется кривой интегрирования, точка A – начальной, а B – конечной точками интегрирования.

Замечание 1. Если кривая AB лежит в плоскости XOY и функция f не зависит от z, то криволинейный интеграл первого рода имеет вид

$$J = \int\limits_{AB} f(x, y, z)dl.$$

Замечание 2. Из определения криволинейного интеграла первого рода следует, что он зависит от направления кривой AB. В самом деле, длина дуги $\Delta l_к$ не зависит от того, какая из точек $M_{к-1}$ или $M_к$ принята за начало, а какая за конец дуги. Поэтому

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \int\limits_{BA} f(x, y, z)dl. \tag{35.5}$$

Теорема. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна (или кусочно-непрерывна и ограничена) вдоль кривой AB, имеющей конечную длину, то криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(x, y, z)dl$ существует.

Свойства криволинейных интегралов первого рода

Перечислим основные свойства криволинейного интеграла первого рода, доказательство которых аналогично доказательству соответствующих свойств определенного интеграла:

1. Аддитивность. Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB и для $f(x, y, z)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB, то для $f(x, y, z)$ существуют криволинейные интегралы по AC и CB, причем

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_{AC} f(x, y, z)dl + \int_{CB} f(x, y, z)dl.$$

2. Линейность. Если для функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ существуют криволинейные интегралы по дуге AB, то для функции $c_1f_1(x, y, z) + c_2f_2(x, y, z)$ также существует криволинейный интеграл по дуге AB, причем:

$$\int_{AB}[c_1f_1(x,y,z)+c_2f_2(x,y,z)]dl=c_1\int_{AB} f_1(x,y,z)]dl+c_2\int_{AB} f_2(x,y,z)]dl$$

где c_1 и c_2 – вещественные числа.

Частными случаями формулы являются формулы

$$\int_{AB}[f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)]dl = \int_{AB} f_1(x, y, z)]dl + \int_{AB} f_2(x, y, z)]dl,$$

$$\int_{AB} c\,f(x, y, z)dl = c\int_{AB} f(x, y, z)dl.$$

3. Если в точках кривой AB всюду выполняется неравенство

$$f_1(x, y, z) \le f_2(x, y, z), \text{ то}$$

$$\int_{AB} f_1(x, y, z)]dl \le \int_{AB} f_2(x, y, z)]dl.$$

4. Оценка абсолютной величины интеграла. Если существует криволинейный интеграл по дуге *AB* от функции
f(x,y, z), то существует и криволинейный интеграл по дуге *AB* от функции $|f(x, y, z)|$, причем

$$\left|\int_{AB} f(x,y,z)dl\right| \le \int_{AB} |f(x,y,z)|dl\,.$$

5. Теорема о среднем значении. Если функция *f(x, y, z)* непрерывна вдоль дуги *AB*, то на этой дуге найдется такая точка *Q*, в которой

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = f(Q)\cdot\alpha,$$

где α – длина дуги *AB.*

6. Если функция *f(x, y, z)* непрерывна на кривой *AB*, имеющей длину α, то

$$m\cdot\alpha \le \int_{AB} f(x, y, z)dl \le M\cdot\alpha$$

где m и M – наименьшие и наибольшие значения функции
f(x, y, z) на *AB.*

Замечание. В случае, когда кривая интегрирования
Г – замкнутая кривая, т.е. когда точка *B* совпадает с точкой *A*, то интеграл по замкнутой кривой обозначают $\oint_{Г} f(x, y, z)dl.$

Для криволинейного интеграла первого рода по замкнутым кривым свойства остаются те же, что и по незамкнутым кривым.

Криволинейный интеграл первого рода, его вычисление, физический смысл и механические приложения

Пусть на плоскости *XOY* задана кривая *AB,* в каждой точке которой определена непрерывная функция *f(x, y)* двух независимых переменных *x* и *y.*

Рассмотрим криволинейный интеграл I рода (по длине дуги) от этой функции по кривой *AB*. Он обозначается $\int f(x,y)dl$, кривая *AB* называется кривой интегрирования, *A* – начальной, а *B* – конечной точками интегрирования. Из определения криволинейного интеграла первого рода следует, что он не зависит от направления кривой *AB,* т.е.:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl \ .$$

Если AB – пространственная кривая, то криволинейным интегралом первого рода, распространенным на эту кривую называется интеграл вида:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl \ ,$$

где функция $f(x, y, z)$ – функция трех независимых переменных, которая определена и непрерывна в каждой точке кривой *AB*.

Масса m материальной кривой, имеющей плотность $\gamma(x, y, z)$ равна криволинейному интегралу первого рода от функции $\gamma(x, y, z)$ по пространственной кривой *AB,* т.е.:

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y,z)dl \ . \qquad (35.6)$$

В этом состоит физический (механический) смысл криволинейного интеграла первого рода.

Если масса распределена непрерывно вдоль дуги плоской кривой *AB* с плотностью функции $\gamma = \gamma(x, y)$ в каждой точке кривой, то статические моменты M_x и M_y дуги относительно координатных осей *OX* и *OУ* соответственно определяются по формулам:

$$M_x = \int_{AB} y\gamma(x,y)dl \ ; \qquad M_y = \int_{AB} x\gamma(x,y)dl \ . \qquad (35.7)$$

Моменты инерции этой дуги относительно координатных осей *OX* и *OУ* соответственно равны:

$$J_x = \int_{AB} y^2\gamma(x,y)dl \ ; \qquad J_y = \int_{AB} x^2\gamma(x,y)dl \ . \qquad (35.8).$$

Координаты центра тяжести дуги AB вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_{AB} x \cdot \gamma(x,y)dl}{\int\limits_{AB} \gamma(x,y)dl}; \qquad (35.9)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\limits_{AB} y \cdot \gamma(x,y)dl}{\int\limits_{AB} \gamma(x,y)dl}. \qquad (35.10)$$

Если кривая однородна, то плотность функции $\gamma(x, y) = const$, поэтому формулы (35.9) и (35.10) примут вид:

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} xdl}{\int\limits_{AB} dl} \qquad y_c = \frac{\int\limits_{AB} ydl}{\int\limits_{AB} dl}, \qquad (35.11)$$

где $\int\limits_{AB} dl$ - длина дуги AB.

Если плоская гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t)$; $y = y(t)$, причем, существуют непрерывные производные x_t' и y_t', где параметр t применяется на дуги AB в пределах $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$ и криволинейный интеграл выражается через определенный по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt. \qquad (35.12)$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$; где $a \le x \le в$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} [x,y(x)]\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\,dx. \qquad (35.13)$$

Рассмотрим теперь случай пространственной гладкой кривой AB. Пусть ее параметрические уравнения имеют вид:

$x = x(t); y = y(t); z = z(t);$ причем существуют непрерывные производные x_t', y_t' и z_t'. Предположим, что параметр t изменяется в пределах $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)] \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt \quad (35.14)$$

Криволинейный интеграл от функции $f(x, y)$ по дуге, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, вычисляется с помощью формулы:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[r\cos\varphi, r\sin\varphi]\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi . \quad (35.15)$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить $\int\limits_{AB} x^2 y dl$, где AB часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в I четверти.

<u>Решение.</u> Выразим из уравнения окружности явно ординату y через абсциссу x, получим $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (в первой четверти $y \ge 0$). Найдем $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ и подставим в выражения

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx\ ; \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} .$$

По формуле получим:

$$\int\limits_{AB} x^2 y dl = \int\limits_{0}^{R} x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = R\int\limits_{0}^{R} x^2 dx = R \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{R^4}{3} .$$

<u>Определение криволинейного интеграла второго рода</u>

Рассмотрим задачу, приводящую к понятию криволинейного интеграла второго рода. Эта задача о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой.

Предположим, что при движении по кривой AB материальная точка M переходит из положения A в положение B. Во время движения на точку M действует сила $\overline{F} = \vec{F}(x, y, z)$, заданная своими проекциями P, Q, R на координатные оси OX, OY и OZ, т.е.

$$\vec{F} = P(x, y, z)\cdot i + Q(x, y, z)\cdot j + R(x, y, z)\cdot k. \qquad (35.16)$$

Найдем работу E силы $\overline{F}$ при данном перемещении точки.

Если бы перемещение точки M было прямолинейным, а действующая сила $\overline{F}$ – постоянной (по величине и направлению), то работа E этой силы, по известной формуле из физике, была бы равна скалярному произведению вектора на вектор перемещения $\overline{AB}$, т.е. $E = (\overline{F}, \overline{AB})$. Однако особенность задачи состоит в том, что перемещение точки является криволинейным, а действующая сила переменной . Разобьем кривую AB на части (элементарных дуг) точками $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n$ где M_0 совпадает с A, а M_n – с точкой B. Обозначим диаметр разбиения через d. На каждой дуге выберем производную точку $\overline{N_к}(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$ и найдем в ней значение силы $\vec{F}_к = (P_к, Q_к, R_к)$, где $P_к = P(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$, $Q_к = Q(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$, $R_к = R(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})$. Предположим, что сила сохраняется постоянной в точках дуги и под ее действие точка перемещается на каждом элементарном участке не по дуге, а по хорде, соединяющей точки $M_{к-1}, M_к (к = 1, 2, \ldots, n)$. Используя формулу для вычисления скалярного произведения через проекции силы и векторы перемещения, получим приближенное значение работы на каждом элементарном участке дуги

$$\Delta E_к \approx P(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})\Delta x_к + Q(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})\Delta y_к + R(\overline{x_к}, \overline{y_к}, \overline{z_к})\Delta z_к,$$

$\Delta x_к = x_к - x_{к-1}$, $\Delta y_к = y_к - y_{к-1}$, $\Delta z_к = z_к - z_{к-1}$, а $x_к, y_к, z_к$, координаты точки $M_к$

(к = 1, 2, ..., n).

Суммируя полученные частичные работы, найдем приближенно полную работу силы $\overline{F}$ при перемещении точки *М* вдоль кривой *АВ*

$$E \approx \lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{\kappa=1}^{n}[P(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta x_\kappa + Q(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta y_\kappa +$$

$$+ R(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta z_\kappa]. \qquad (35.17)$$

За работу *Е* силы $\overline{F}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой *АВ* примем предел суммы (35.17) при стремлении диаметра разбиения к нулю, т.е.

$$E = \lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{\kappa=1}^{n}[P(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta x_\kappa + Q(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta y_\kappa +$$

$$R(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta z_\kappa].$$

Перейдем к определению криволинейного интеграла второго рода.

Пусть в пространстве *OXYZ* задана непрерывная, гладкая кривая *АВ* и функция *P(x, y, z)* на этой кривой. С помощью точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ в направлении от *A* и *B* разобьем на *n* дуг производные длины. На каждой дуге M_0, $M_{\kappa-1}$, M_κ выберем производную точку $\overline{N_\kappa}(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})$ и найдем в ней значение функции $P(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})$. Для каждой элементарной дуги вычислим произведение $P(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta x_\kappa$, где Δx_κ – проекция дуги $M_{\kappa-1}$, M_κ на ось *OX*, т.е. $\Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$, где x_κ и $x_{\kappa-1}$ соответственно абсциссы конца и начала хорды $M_{\kappa-1}$, M_κ. Просуммируя полученные произведения, получим

$$\sum_{\kappa=1}^{n}[P(\overline{x_\kappa}, \overline{y_\kappa}, \overline{z_\kappa})\Delta x_\kappa. \qquad (35.18)$$

Суммы вида (35.18) называются интегральными суммами второго рода для функции *P(x, y, z),* соответствующими разбиению $\{M_к\}$ кривой AB (относительно координаты x) с отмеченными точками $\overline{N_к}\,(\overline{x_к}\,,\ \overline{y_к}\,,\ \overline{z_к}\,)$.

Определение. Предел интегральных сумм вида (35.18) при $d \to 0$ $(n \to\infty)$, если он существует и не зависит от способа разбиения кривой AB на частные дуги и выбора точек $\overline{N_к}$, называется криволинейным интегралом второго рода по координате x и обозначается

$$\int\limits_{AB} P\,(x, y, z)dx$$, т.е.

$$\int\limits_{AB} P\,(x, y, z)dx = \lim_{\substack{d \to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{к=1}^{n}[\,P\,(\overline{x_к}\,,\ \overline{y_к}\,,\ \overline{z_к}\,)\Delta x_к\,. \quad (35.19)$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы по координатам y и z, их обозначают

$\int\limits_{AB} Q\,(x, y, z)dy$ и $\int\limits_{AB} R\,(x, y, z)dz$, беря для функции $Q(x, y, z)$ проекции $\Delta y_к$ на ось OY, а для $R(x, y, z)$ проекции $\Delta z_к$ на ось OZ.

Определение. Сумма трех интегралов $\int\limits_{AB} P\,(x, y, z)dx$, $\int\limits_{AB} Q\,(x, y, z)dy$, $\int\limits_{AB} R\,(x, y, z)dz$ называется общим криволинейным интегралом второго рода (по координатам) и обозначается

$$\int\limits_{AB} P\,(x, y, z)dx = \int\limits_{AB} Q\,(x, y, z)dy + \int\limits_{AB} R\,(x, y, z)dz. \quad (35.20)$$

Если P, Q, R – проекции силы $\overline{F}$ на координатной оси, то из формулы (35.17) следует, что общий криволинейный интеграл второго рода выражает работу этой силы на пути AB, т.е.

$$E = \int\limits_{AB} P\,(x,y, z)dx + \int\limits_{AB} Q\,(x,y, z)dy + \int\limits_{AB} R\,(x,y, z)dz \qquad (35.21)$$

В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

Замечание 1. Если кривая AB лежит в плоскости XOY и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не зависят от z, то криволинейные интегралы второго рода имеют вид

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (35.22)$$

Замечание 2. В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода меняет свое значение на противоположное при изменении направления кривой AB, т.е.

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx = -\int_{BA} P(x, y, z)dx$$

В самом деле, если изменить направление обхода кривой, то изменятся знаки проекций $\Delta x_к$ в сумме (35.18), значит и сама сумма, и ее предел.

Замечание 3. Криволинейный интеграл второго рода обладает всеми свойствами криволинейного интеграла первого рода, за исключением одного: он меняет знак на противоположный при изменении направления обхода кривой.

Замечание 4. В случае, когда кривая AB – замкнутая (т.е. точка B совпадает с точкой A) употребляется обозначение $\oint_{Г} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz.$

В случае, когда кривая AB замкнутая, за положительное направление обхода принимается такое, при котором область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход.

Теорема: Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны, или имеют конечное число разрывов первого рода вдоль непрерывной кривой AB, имеющей конечную длину, то криволинейные интегралы

$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx,\ \int\limits_{AB} Q(x, y, z)dy,\ \int\limits_{AB} R(x, y, z)dz,$ а

следовательно и криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Qdy + Rdz \quad \text{существуют.}$$

<u>*Криволинейный интеграл второго рода и его вычисление*</u>

Пусть во всех точках дуги AB плоской кривой определены и непрерывны функции двух независимых переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, тогда можно рассмотреть криволинейные интегралы по координатам:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$$

Сумму этих двух интегралов обозначают символами

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

и называют общим криволинейным интегралом второго рода (по координатам x и y).

Если AB непрерывная гладкая кривая в пространстве, а функция $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывные функции трех независимых переменных, заданные по этой кривой, тогда сумма трех интегралов $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx$, $\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy$ и $\int\limits_{AB} R(x,y,z)dz$ называется общим криволинейным интегралом второго рода (по координатам) и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (35.23)$$

Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ – проекции силы $\overline{F}$ на координатные оси, то общий криволинейный интеграл второго рода (35.23) выражает работу этой силы при перемещении материальной точки M по кривой AB из положения A в положение B.

В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления обхода кривой *AB,* то есть

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx\ .$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если гладкая пространственная кривая *AB* задание параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ причем изменению t от α до β соответствует движение точки по кривой от A к B (не обязательно, чтобы α было меньше β).

Тогда

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + \right.$$

$$\left. + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]dt. \qquad (35.24)$$

Если кривая *AB* – расположена, например, в плоскости *ХОУ,* то формуле (35.24) примет вид:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} P\left[\left(x(t),y(t)\right)\cdot x'(t) + \right.$$

$$\left. + Q\left(x(t),y(t)\right)\cdot y'(t)\right]dt\ . \qquad (35.25)$$

Если же плоская гладкая кривая задана уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b}\left[P\left(x,y(x)\right) + \right.$$

$$+Q\big(x,y(x)\big)\cdot y'(x)\big]\,dx \qquad (35.26)$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{AB} x^2dx+\sqrt{xy}\,dy$, где AB – первая четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. Из уравнения окружности выразим y через x.

Получим $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, так как в первой четверти $y\ge 0$, то $y=\sqrt{R^2-x^2}$; $dy=-\dfrac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Учитывая, что интегрирование ведется против часовой стрелки x изменяется от R до 0.

По формуле (35.26) получим:

$$\iint\limits_{AB} x^2dx+\sqrt{x}\,ydy=\int\limits_R^0 x^2dx+\sqrt{x}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\limits_R^0\left(x^2-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_R^0=-\frac{R^3}{3}+\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{15}R^2\left(6\sqrt{R}-5R\right)$$

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязью области D, то для того, чтобы в криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (35.27)$$

Но условие (35.27) является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, являлось полным дифференциалом некоторой функции. Поэтому можно утверждать, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования AB, а зависел только от его концов и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$, было полным дифференциалом некоторой функции.

Но, если выполняются условия (35.27) и выражение $Pdx + Qdy$, является полным дифференциалом некоторой функции, то криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятый по любому замкнутому контуру L целиком лежащему в односвязной ограниченной замкнутой области D равен 0.

Если путь, по которому вычисляется криволинейный интеграл, безразличен, то употребляется обозначение:

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (35.28)$$

где (x_0, y_0) и (x_1, y_1) – координаты начала и конца пути интегрирования.

Пример 3. Выяснить, будет ли криволинейный интеграл зависеть от формы пути интегрирования:

$$I = \int\limits_{AB} \left(6xy + 4y^2 + 5y\right)dx + \left(3x^2 + 8xy + 5x\right)dy.$$

Решение. Здесь $P(x, y) = 6xy + 4y^2 + 5y$, а функция $Q(x,y) = 3x^2 + 8xy + 5x$. Интеграл не будет зависеть от пути интегрирования, если выполнено условия (35.27).

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6x+8y+5; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x+8y+5,$$

Следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, и криволинейный интеграл зависит от формы пути интегрирования.

Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла второго ряда

Криволинейный интеграл по простому замкнутому гладкому контуру *L,* ограничивающему односвязную область *D* может быть преобразован в некоторый двойной интеграл по области *D,* ограниченной этим контуром. Это преобразование выполняется по формуле Грина, которая имеет вид:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (35.29)$$

Предполагается, что функции *P(x, y)* и *Q(x, y),* а также их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области *D* и на контуре *L,* который ее ограничивает, причем, контур *L,* пробегается в положительном направлении, т.е. так, что область *D* остается слева. Если формулу Грина прочесть справа налево, то можно сказать, что она сводит вычисление двойного интеграла по области *D* к вычислению криволинейного интеграла взятого по контуру *L,* ограничивающему эту область.

Формула (35.29) справедлива не только для области *D* указанного вида, но и для более сложных областей, ограниченных несколькими простыми гладкими контурами. В случае:

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

следует рассматривать как сумму интегралов по составляющим контурам, причем, интегрирование по этим контурам должно вестись в таком направлении, чтобы область *D* оставалась слева. Многие криволинейные интегралы, взятые по замкнутому контуру, удобно вычислять, сводя их к двойному.

Пример 4 . Вычислить, применяя формулу Грина, интеграл.

$$\oint_L -x^2ydx + xy^2dy \ ,$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Решение. Здесь $P(x, y) = -x^2 y; \quad Q(x, y) = -x\, y^2;$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 ; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 .$$

Подставляя эти значения в формулу (35.29), получим:

$$I = \oint_L -x^2ydx + xy^2dy = \iint_D \left[y^2 + x^2\right]dxdy \ ,$$

где D- круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = a^2$. Вычисление полученного интеграла удобно провести в полярных координатах, при этом элемент площади $dxdy = rdrd\varphi$, а $x^2 + y^2 = r^2$.

Получим

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint_D r^3drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3dr = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2} \ ,$$

.

36. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Поверхностные интегралы первого рода

Определение поверхностного интеграла от скалярной функции.

Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности Σ с кусочно-гладкой границей C определена некоторая ограниченная функция $f(M)$. Разобьем поверхность Σ кусочно-гладкими кривыми на части Σ_1, ..., Σ_n (рис. 36.1). Площадь каждой из них обозначим Δs_i $(i=1,\dots,n)$. Пусть в каждой из этих площадей выбрана произвольная точка M_i. Составим сумму

$$T=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i. \qquad (36.1)$$

Величина T будет называться интегральной суммой отвечающей функции $f(M)$ (при данном разбиении поверхности Σ и выборе точек M). Поверхность Σ может быть, в частности, замкнутой.

Определение. Если при стремлении наибольшего из диаметров частей Σ_k, поверхности Σ к нулю интегральные суммы T стремятся к некоторому конечному пределу, то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по поверхности Σ и обозначается символом $\iint\limits_{\Sigma} f(M)\,ds$.

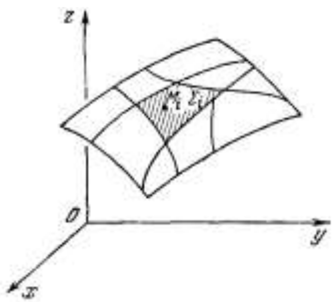


Рис.36.1

Точку M поверхности Σ можно задать декартовыми координатами x, y, z Поэтому функцию $f(M)$, определенную на Σ, мы будем обозначать также $f(x, y, z)$, а соответствующий поверхностный интеграл - $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\,ds$. Приведем поверхностный интеграл к двойному интегралу. Рассмотрим сначала простейший случай, когда поверхность задана уравнением в декартовых координатах.

Пусть Σ - гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y), (x, y)\in D$, где D—замкнутая ограниченная область, а $f(x, y, z)$-некоторая ограниченная функция, определенная на поверхности Σ. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left[z'_x\right]^2+\left[z'_y\right]^2}\,dxdy. \quad (36.2)$$

При этом поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если существует двойной интеграл, стоящий в правой части равенства.

Доказательство. Разобьем поверхность Σ кусочно - гладкими кривыми на n частей Σ_i $(i=1,\dots n)$. Проекции разбиений Σ_i на плоскость $X0У$ обозначим D_i (рис. 36.2). При этом диаметр каждого из элементов D_i**,** будет не больше,

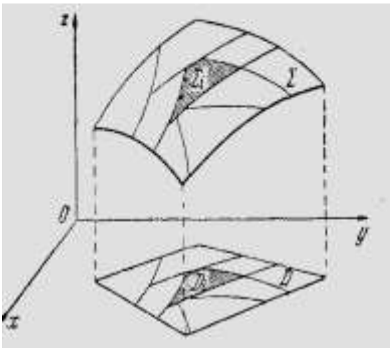


Рис. 36.2

чем диаметр соответствующего элемента Σ_i, поверхности Σ.

Рассмотрим сумму $T=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i$.

Площадь Δs_{i} элемента Σ_{i} вычисляем по формуле $\Delta s_{\text{i}} = \iint\limits_{\Sigma_i} \sqrt{1+\left[z_x^{/}\right]^2+\left[z_y^{/}\right]^2}\ dxdy,$

где $z = z(x, y)$, и по теореме о среднем для двойного интеграла от непрерывной функции имеем

$$\Delta s_i = \sqrt{1+\left[z_x^{/}(x_i^*, y_i^*)\right]^2+\left[z_y^{/}(x_i^*, y_i^*)\right]^2}\ S_i,$$

где (x_i^*, y_i^*)- некоторая точка, принадлежащая области D_i, а S_i- площадь этой области. Интегральную сумму T можно записать так

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\ \sqrt{1+\left[z_x^{/}(x_i^*, y_i^*)\right]^2+\left[z_y^{/}(x_i^*, y_i^*)\right]^2}\ S_i \quad (36.3)$$

Сравним ее с интегральной суммой вида

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\ \sqrt{1+\left[z_x^{/}(x_i, y_i)\right]^2+\left[z_y^{/}(x_i, y_i)\right]^2}\ S_i\,. \quad (36.4)$$

Выражение T^* отвечает двойному интегралу, стоящему в равенстве (36.2) справа при том разбиении области D, которое соответствует данному разбиению поверхности Σ. T, T^* отличаются друг от друга только тем, что в сумме (36.4) значения функции f и под квадратным корнем берутся в точке (x_i, y_i) (произвольно выбираемой внутри элемента D_{i}), а в (36.4) значения под квадратным корнем берутся в точке (x_i^*, y_i^*), диктуемой нам теоремой о среднем. Эти суммы равны. Предел интегральных сумм T существует и равен интегралу, стоящему в (36.2) справа.

Следствие. Если поверхность Σ гладкая, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна на ней, то интеграл $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, ds$ существует.

Действительно, в этом случае в равенстве (36.2) справа стоит интеграл от непрерывной функции. Он существует, следовательно, существует и стоящий слева поверхностный интеграл.

Замечание. Пусть поверхность Σ состоит из нескольких частей, каждая из которых может быть представлена уравнением вида $x= x(y, z)$, $y= y(z, x)$ или $z= z(x, y)$. Для сведения поверхностного интеграла, взятого по такой поверхности к двойному интегралу можно, воспользоваться тем, что поверхностный интеграл по поверхности Σ равен сумме интегралов, взятых по составляющим эту поверхность частям. Легко проверить, что эти формулы остаются в силе, когда поверхность не гладкая, а кусочно-гладкая.

Пример 1 . Вычислить поверхностный итеграл

$$J = \iint_{\Sigma} (x^2+ y^2)^{1.5} ds,\ \Sigma \ \text{– часть поверхности}\ z^2= x^2+ y^2,$$

заключенной между плоскостями $z = 0, z = 1$.

Решение. Вычислим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}},\ ds = \sqrt{1+\left[z_x^/\right]^2+\left[z_y^/\right]^2} =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$. Тогда интеграл J можно преобразовать в двойной и вычислить с помощью полярной системы координат $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le \varphi\le \pi/2)$

$$J = \iint_{D} (x^2 + y^2)^{1.5}\sqrt{2}dxdy = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^4 dr = 2\pi\sqrt{2}\ /5.$$

где – D проекция поверхности Σ на плоскость XOY (D: $x^2 + y^2 \le 1$).

Применения поверхностных интегралов механике

Поверхностные интегралы первого рода часто встречаются в физических задачах. С такими интегралами приходится иметь дело при изучении распределения масс по поверхности, например при нахождении координат центра масс, моментов инерции материальных поверхностей.

Пусть по поверхности Σ (гладкой или кусочно-гладкой) распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(x,$

y, z), представляющей собой непрерывную функцию на Σ. Такую поверхность Σ будем кратко называть материальной поверхностью. Тогда имеют место следующие формулы:

1) Масса μ материальной поверхности Σ равна

$$\mu=\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)ds.$$

2) Координаты центра масс материальной поверхности определяются формулами $x_c = (1/S)\iint_{\Sigma} x\rho(x, y, z)\,ds$,

$$y_c = (1/S)\iint_{\Sigma} y\rho(x, y, z)\,ds,\ z_c = (1/S)\iint_{\Sigma} z\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$S = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)ds. \qquad (36.5)$$

Для однородной поверхности $\rho = const$.

2) Моменты инерции поверхности Σ относительно осей координат равны

3)

$$J_z=\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,ds,\quad J_y=\iint_{\Sigma} (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$J_x=\iint_{\Sigma} (z^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,ds.$$

Пример 2. Вычислить площадь поверхности (*S)* части параболоида $y=x^2+z^2$ в первом октанте, ограниченной плоскостью $y=2$.

Решение. Введем полярную систему координат $x = r\cos\varphi$,

$z = r\sin\varphi,\ 0\le r \le\sqrt{2}$, тогда

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left[y_x^{/}\right]^2+\left[y_z^{/}\right]^2}\ dxdz=\iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+z^2)}\ dxdz=$$

$$=-\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{1}{12}\ \varphi\Big|_0^{\pi/2}\ (1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}}\ =\frac{13}{12}\pi\ .$$

Поверхностные интегралы от векторных функций.

Выше были рассмотрены поверхностные интегралы от скалярных функций. Это понятие можно перенести на векторные функции. Пусть $\overline{F}\ (M) = P\ i + Q\,j + R\,k$ - некоторая векторная функция, заданная на поверхности Σ. Определим интеграл от этой функции по поверхности Σ, положив

$$\iint\limits_{\Sigma} \overline{F}\ (M)\ ds = i \iint\limits_{\Sigma} P(M)\ ds + j \iint\limits_{\Sigma} Q(M)\ ds + k \iint\limits_{\Sigma} R(M)\ ds.$$

Существуют задачи, в которых ориентация элемента ds играет существенную роль. К ним относится задача о расчете количества жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени, а также и ряд других. Эти задачи приводит к другому понятию поверхностного интеграла, так называемому поверхностному интегралу второго рода.

Поверхностные интегралы второго рода

Для того чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, нужно ввести понятие стороны поверхности, аналогичное понятию ориентации кривой.

Пусть Σ – гладкая поверхность. Возьмем на Σ некоторую внутреннюю точку M_0, проведем через нее нормаль к поверхности Σ и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений. Это можно сделать, зафиксировав определенный единичный вектор $\overline{n}$, нормальный к поверхности Σ в точке M_0. Проведем теперь на поверхности Σ через точку M_0 какой-либо замкнутый контур C, не имеющий общих точек с границей поверхности, и будем двигать единичный вектор $\bar{n}$ из точки M_0 вдоль C так, чтобы этот вектор все время оставался нормальным к Σ и чтобы его направление менялось при этом движении непрерывно. Поскольку вектор $\bar{n}$ все время остается нормальным к Σ, то имеются две возможности: при возвращении в точку M_0 вектор $\bar{n}$ возвращается в первоначальное положение; в результате обхода по контуру C вектор $\bar{n}$ меняет свое направление на противоположное.

Гладкая поверхность Σ называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности Σ и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности. Если же на поверхности существует замкнутый контур, по которому направление нормали меняется на противоположное (при движении ее по контуру), то поверхность называется односторонней. Если поверхность Σ двусторонняя, то в каждой ее точке M можно выбрать единичный вектор нормали $\bar{n}(M)$ так, чтобы вектор $\bar{n}(M)$ зависел от точки M непрерывно ($\bar{n}(M)$ будет называться «непрерывным полем нормалей» на поверхности Σ). На односторонней поверхности нельзя построить ни одного непрерывного поля нормалей. Выбор на поверхности Σ определенного непрерывного поля нормалей будет называться выбором стороны этой поверхности.

Замечания:

1. Двустороннюю поверхность называют ориентируемой, а выбор определенной ее стороны – ориентацией поверхности. Односторонние поверхности называют не ориентируемыми.

2. Пусть Σ – ориентированная поверхность, ограниченная одним или несколькими контурами. Определим ориентацию каждого контура L, входящего в состав границы поверхности Σ, (согласованную с ориентацией поверхности Σ) по следующему правилу. Направление обхода контура L считается положительным (согласованным с ориентацией Σ), если наблюдатель, рас-

положен на поверхности так, что направление вектора нормали совпадает с направлением от ног к голове, обходит контур L, оставляя поверхность Σ все время слева от себя. Противоположное направление считается отрицательным.

3. Правило согласования ориентации поверхности Σ и ограничивающего ее контура L можно сформулировать таким образом: пусть $\overline{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности Σ в некоторой точке M, принадлежащей L, и пусть $\overline{v}$ - вектор, нормальный к L и к $\overline{n}$ и направленный в ту сторону, с которой расположена поверхность Σ. Тогда положительное направление обхода контура L указывается вектором $[\overline{v}, \overline{n}]$

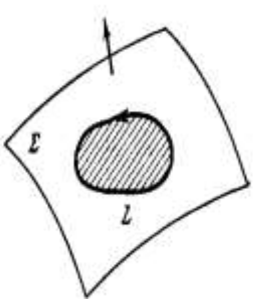


Рис. 36.3

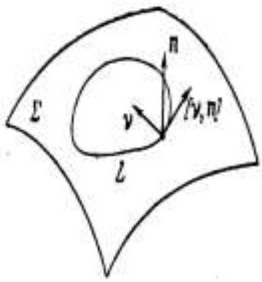


Рис. 36.4

Применение поверхностного интеграла второго рода

Пусть пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в точке (x, y, z) задается вектором $\overline{V}$ (x, y, z) с компонентами $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$.

Вычислим количество жидкости Π, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность Σ.

Рассмотрим бесконечно малый элемент $d\sigma$ поверхности Σ. Количество жидкости, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно $d\Pi = V_n$, где V_n – проекция скорости $\overline{V}$ на направление нормали $\overline{n}$ к $d\sigma$. Записав $d\Pi$ как скалярное произведение вектора V на единичный вектор нормали n к элементу $d\sigma$, имеем $d\Pi = [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y) + R\cos(\overline{n}, z)]\, d\sigma$.

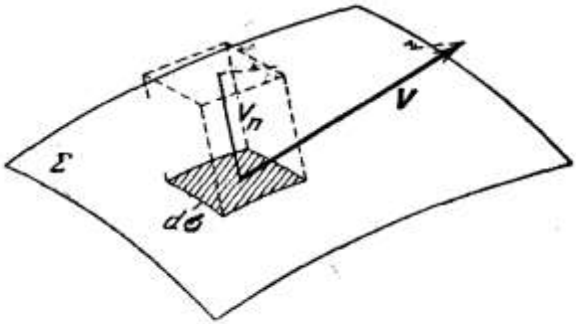


Рис. 36.5

Чтобы получить количество жидкости, протекающее через всю поверхность Σ, нужно просуммировать предыдущее выражение по всем элементам $d\sigma$, т. е. взять интеграл

$$\Pi = \iint_{\Sigma} [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y) + R\cos(\overline{n}, z)]\, d\sigma. \quad (36.6)$$

Перейдем теперь к общему определению. Пусть Σ – гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем какую-либо определенную сторону поверхности (поле нормалей $\overline{n}(M)$) и рассмотрим векторную функцию $\overline{A} = (P, Q, R)$, заданную на Σ. Обозначим A_n проекцию вектора $\overline{A}$ на направление нормали к Σ в данной точке

$$A_n = P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y) + R\cos(\overline{n}, z),$$

где $\cos(\overline{n}, x)$, $\cos(\overline{n}, y)$ и $\cos(\overline{n}, z)$ – косинусы углов между направлением нормали к поверхности и направлениями координатных осей, т. е. координаты единичного вектора нормали n. Интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} [P\cos(\bar{n}, x) + Q\cos(\bar{n}, y) + R\cos(\bar{n}, z)]\, d\sigma \qquad (36.7)$$

называется поверхностным интегралом второго рода от вектор – функции $\bar{A} = (P, Q, R)$ по поверхности Σ (по выбранной стороне поверхности Σ) и будем обозначать

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy.$$

При переходе к другой стороне поверхности координаты единичного вектора нормали, следовательно и сам интеграл, меняют свой знак на противоположный. Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится. В соответствии с этим поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\bar{A} = (P, Q, R)$ записывают в виде

$$\iint\limits_{\Sigma} (\bar{A}, \overline{d\sigma}) = \iint\limits_{\Sigma} (\bar{A}, \bar{n})d\sigma. \qquad (36.8)$$

Наряду с интегралами вида (4.5) в некоторых задачах приходится рассматривать интегралы вида

$$\iint\limits_{\Sigma} [\bar{A}, \bar{n}]d\sigma\ . \qquad (36.9)$$

Значение такого интеграла представляет собой уже не скаляр, а вектор. Его вычисление сводится к покомпонентному интегрированию вектора $[\bar{A}, \bar{n}]$. Так как здесь подынтегральное выражение зависит от нормали $\bar{n}$ к поверхности Σ, то интеграл (36.9) будет поверхностным интегралом второго рода (но только «векторный», в отличие от «скалярного» интеграла).

<u>Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу</u>

Из определения поверхностного интеграла второго рода вытекает следующий результат Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность Σ задана уравнением $z = z(x, y)$ (причем берется верхняя сторона этой поверхности) и $R(x, y, z)$ – некоторая ограниченная функция на поверхности Σ . Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\, dxdy, \qquad (36.10)$$

где D – проекция поверхности Σ на плоскость $X0У$; входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл. Таким образом, для того, чтобы поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\, d\sigma$, взятый по верхней стороне поверхности Σ (ее уравнение $z = z(x, y)$) преобразовать в двойной, следует в подынтегральную функцию вместо z подставить функцию $z(x, y)$, а интегрирование по поверхности Σ заменить интегрированием по ее проекции D на плоскость $X0У$. Если же интеграл берется по нижней стороне поверхности Σ, то

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dxdy = -\iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

Так же получены формулы:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dydz = \pm \iint\limits_{D_1} P(x(y,z), y, z)\, dydz\ ;$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)\, dzdx = \pm \iint\limits_{D_2} Q(x, y(z, x), z)\, dzdx,$$

где в первом случае под поверхностью Σ понимается поверхность, заданная уравнением $x = x(y, z)$, а во втором – поверхность, заданная уравнением $y = y(z, x)$.

Знак плюс берется в том случае, когда нормаль к поверхности образует с осью x (соответственно с осью y) острый угол, а знак минус, когда этот угол тупой. D_1 и D_2 – проекции поверхности Σ на плоскости $У0Z$ и $Z0X$ соответственно. Формулой типа (36.10) можно воспользоваться для сведения поверхностного интеграла к двойному интегралу и в том случае, когда ориентированная поверхность Σ состоит из нескольких кусков, каждый из которых определяется уравнением вида $z = z(x, y)$. В этом случае рассматриваемый интеграл следует представить как сумму интегралов, отвечающих этим кускам, и затем к каждому из этих слагаемых применить формулу (36.10).

<u>Пример 3 .</u> Вычислить поверхностный интеграл
$J = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)^3 dxdy$, где Σ – верхняя часть круга $x^2 + y^2 = 1$.

<u>Решение.</u> Поверхность, по которой берется интеграл совпадает со своей проекцией на плоскость XOY D (D: $x^2 + y^2 \leq 1$) и имеет с ней положительную ориентацию. Применяя полярную систему координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0\leq r \leq 1$, $0\leq \varphi\leq 2\pi$), имеем $J = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)^3 dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^7 dr = \pi/4$.

<u>Формула Остроградского</u>

Запишем формулу, связывающую тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом, взятым по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула называется формулой Остроградского.

Пусть, наконец, V – некоторая простая область с поверхностью Σ и пусть функции P, Q, R вместе со своими производными непрерывны в этой области всюду, включая ее границу, тогда можно записать равенство

$$\iiint\limits_{V} ((\partial P/\partial x) + (\partial Q/\partial y) + (\partial R/\partial z))\, dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} P\, dydz + Q dzdx +$$
$$+ R\, dxdy = \iint\limits_{\Sigma} [P\cos(\bar{n}, x + Q\cos(\bar{n}, y + R\cos(\bar{n}, z)]d\sigma. \tag{36.11}$$

Замечание. При выводе формулы Остроградского мы считали, что функции P, Q, R и их частные производные непрерывны (а следовательно, и ограничены) в замкнутой простой области. Можно доказать справедливость формулы Остроградского при следующих более общих условиях:

1. V – ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

2. Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны, а следовательно, и ограничены в замкнутой области V.

3. Производные $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ существуют и непрерывны внутри области V (без границы) и интеграл

$$\iiint\limits_V [(\partial P/\partial x) + (\partial Q/\partial y) + (\partial R/\partial z)]\, dxdydz \text{ существует.}$$

<u>Пример 4.</u> Вычислить интеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} x^3\, dydz + y^3\, dzdx + z^3\, dxdy$, взятый по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

<u>Решение.</u> Воспользовавшись формулой Остроградского имеем

$$J=3 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^4 \sin\theta\, dr = $$

$= 0{,}8\pi a^5$, где r, φ, θ – сферические координаты.

<u>Формула Стокса</u>

Выведем формулу Стокса, которая связывает поверхностные и криволинейные интегралы. Формула Стокса обобщает формулу Грина и переходит в нее, если поверхность сводится к плоской области $X0Y$.

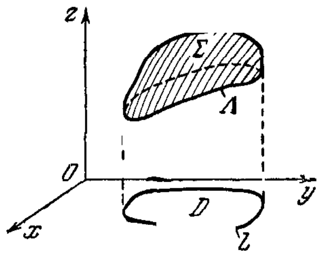


Рис. 36.6

Пусть дана гладкая ориентированная поверхность Σ, ограниченная ориентированным контуром Λ, (ориентации Σ и Λ согласованы), и пусть в некоторой трехмерной области, содержащей внутри себя поверхность Σ, определена векторная функция (P, Q, R), такая, что P, Q и R непрерывны в этой области вместе со своими частными производными первого порядка.

Формула Стокса имеет вид:

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos(\bar{n}, z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos(\bar{n}, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos(\bar{n}, y)\right] d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx. \quad (36.12)$$

Если поверхность Σ сводится к плоской области, лежащей в плоскости $X0У$, то интегралы по $dzdx$ и $dydz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Грина.

Замечание. Формула Стокса остается в силе в случае, когда граница контура Λ (поверхности Σ) состоит из нескольких отдельных контуров. Интеграл по контуру Λ понимаем как сумму интегралов, взятых по этим контурам, причем ориентация каждого из этих контуров должна быть согласована с выбором стороны поверхности Σ.

Определение. Трехмерная область V называется односвязной, если на любой замкнутый контур, лежащий в V, можно натянуть поверхность, также целиком лежащую в V (т.е. если внутри V найдется поверхность, имеющая этот контур своей границей).

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны, вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой замкнутой ограниченной поверхностно односвязной области V, то можно доказать следующие свойства:

1. Интеграл $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, взятый по любому замкнутому контуру, лежащему внутри V, равен нулю.

2. $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от выбора пути, соединяющего точки A и B.

3. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ – полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в V.

4. Выполняются равенства

$$(\partial Q/\partial x) = (\partial P/\partial y), \quad (\partial R/\partial y) = (\partial Q/\partial z),$$
$$(\partial P/\partial z) = (\partial R/\partial x). \tag{36.13}$$

Рассмотрим некоторый замкнутый контур Λ, лежащий в V, так как область V по условию односвязна, то на Λ можно натянуть поверхность Σ, целиком лежащую внутри V. Применив к криволинейному интегралу, взятому по Λ, формулу Стокса получаем равенство

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Если выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, то можно написать выражение этой функции

$$U(x, y, z) = \int\limits_{(x^*, y^*, z^*)}^{(x,y,z)} \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{36.14}$$

где интеграл взят по произвольному пути $M'M$ ($M'(x', y', x')$, $M(x, y, z)$), целиком лежащему в области V.

Если функции P, Q и R удовлетворяют условиям (36.13), но область, в которой они определены, не односвязна, то свойства интеграла $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ аналогичны свойствам криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ в плоской многосвязной области.

В частности, равенство (36.14) при выполнении (36.13) и в случае многосвязной области представляет собой функцию, полный дифференциал которой равен $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, но в многосвязной области эта функция многозначна.

37. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Изложим элементы того математического аппарата, которым приходится пользоваться при изучении физических полей. В физических задачах чаще всего встречаются величины двух типов: скаляры и векторы. В соответствии с этим мы будем рассматривать два типа полей – скалярные и векторные.

Скалярные поля

Пусть **Ω** - некоторая область в пространстве. В этой области задано скалярное поле, если каждой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $U\,(M)$.

Примерами скалярных полей служат: поле температур внутри некоторого нагретого тела (в каждой точке M этого тела задана соответствующая температура $U\,(M)$); поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света; поле плотности массы и т.д.

Пусть $U(M)$ – некоторое скалярное поле, то, введя в области, где задано поле, декартовы координаты, можно представить это поле в виде непрерывной функции $U(x, y, z)$.

Для получения наглядной картины удобно пользоваться называемыми поверхностями уровня. Поверхностью уровня скалярного поля $U\,(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет вид $U(x, y, z) = C$. Этот способ изображения поля также удобен тогда, когда поле, задано не в пространственной, а в плоской области. Такое поле описывается функцией двух переменных $U(x, y)$. Кривые вида

$U(x,\ y) = C$ определяют линию уровня плоского скалярного поля $U\ (M)$.

Частные случаи: Плоскопараллельное поле. *Если скалярное поле* U (M) *в декартовой системе координат можно описать функцией, зависящей от двух координат (*U(x, y)*), то поле называется плоскопараллельным (двумерным). Поле* U (M) *называется плоскопараллельным, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле* U (M) *переходит само в себя. Поверхности уровня такого поля – это семейство (*U(x, y) = C*) цилиндрических поверхностей.*

Осесимметрическое поле. Если для поля $U\ (M)$ можно подобрать такую цилиндрическую систему координат, в которой оно изображается функцией, зависящей только от переменных $r = (x^2+ y^2)^{1/2}$ и z (но не от угла φ), то это поле называется осесимметрическим. Поверхности уровня такого поля представляют собой поверхности вращения.

Сферическое поле. Если значения $U\ (M)$ зависят лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0,то такое поле называется сферическим. Поверхности уровня сферического поля будут являе тся семейством концентрических сфер .

Пример 1. Найти область определения функции

$z =1 /(x^2 + y^2)$ и определить линии уровня скалярного поля z.

Решение. Поле z определено во всем пространстве за исключением точек, для которых $x^2+y^2=0$, т.е. $x = 0, y = 0$.

Линии уровня определяются уравнением $1/(x^2+y^2) = C$,
$C\ (x^2 + y^2) = 1$ – уравнения семейства окружностей.

Производная по направлению

Пусть $U\ (M)$ – скалярное поле. Рассмотрим две близкие точки $M\ M^*$, причем направление отрезка MM^* совпадает с направлением фиксированного единичного вектора $\bar{\lambda}$. Если при этом отношение $(U(M^*) – U(M))/h$ (где h – длина отрезка

MM)* стремится к некоторому пределу, то этот предел называется производной скалярного поля $U\ (M)$ в точке M по направлению $\overline{\lambda}$ и обозначается $\partial U(M)/\partial\lambda$. Эта производная характеризует скорость изменения величины $U(M)$ в направлении $\overline{\lambda}$. Для ее вычисления выберем некоторую систему координат и представим $U(M)$ в виде $U(x, y, z)$.

Пусть направление $\overline{\lambda}$ образует с осями координат углы α,β,γ. Тогда $MM^* = h\,(i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma)$ и $U\,(M^*) = U\,(x + h\cos a,\ y + h\cos\beta,\ z + h\cos\gamma)$, а производная $\partial U/\partial\lambda$- совпадает с производной по h от сложной функции $U(M^*)$ при $h = 0$. Дифференцируя, получаем

$$\partial U(M)/\partial\overline{\lambda} = (\partial U(M^*)/\partial\overline{\lambda})\big|_{h=0} = (\partial U/\partial x)\cos\alpha + (\partial U/\partial y)\cos\beta + (\partial U/\partial z)\cos\gamma = (grad\ U, \overline{\lambda}).$$

где $\overline{\lambda} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)/\partial z$, вектор $gradU = (\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z)$ называется градиентом скалярного поля U. Из того, что $(\partial U/\partial\overline{\lambda}) = |grad\ U|\cos\varphi$ (где φ – угол между $grad\ U$ и единичным вектором $\overline{\lambda}$), можно заключить: в каждой точке, где значение $grad\ U$ не равно 0 существует единственное направление, по которому $\partial U/\partial\overline{\lambda}$ имеет наибольшее значение, т.е. единственное направление наибыстрейшего возрастания функции U. Это направление совпадает с направлением вектора $grad\ U$.

Назовем линией градиента скалярного поля U всякую кривую, касательная к которой в каждой ее точке направлена по $grad\ U$ в этой же точке. Линии градиента поля – это те линии, вдоль которых поле U меняется быстрее всего. В каждой точке линия градиента ортогональна той поверхности уровня, на которой эта точка лежит.

Векторные поля

Пусть в некоторой области Ω определено векторное поле, тогда каждой точке M этой области будет поставлен в соответствие определенный вектор $\overline{A}\ (M)$.

Если $\overline{A}$ *(M)* – некоторое векторное поле в пространстве, то, взяв в этом пространстве какую-либо декартову систему координат, мы можем представить $\overline{A}$ *(M)* как совокупность трех скалярных функций – компонент этого вектора. Эти компоненты мы будем обозначать $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. Далее мы будем рассматривать векторные поля, компоненты которых непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Пусть в области Ω задано векторное поле $\overline{A}$ *(M).* Кривая L лежащая в Ω, называется векторной линией, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением вектора $\overline{A}$ в этой же точке.

Рассмотрим снова некоторое скалярное поле $U(M)$. Построив в каждой точке M вектор $grad\ U$, мы получим векторное поле – поле градиента скалярной величины U. Введем следующее: Векторное поле $\overline{A}$ *(M)* называется потенциальным, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля U *(M)*: $\overline{A} = grad\ U$. Само скалярное поле U называется при этом потенциалом векторного поля $\overline{A}$.

Если векторное поле $\overline{A}$ имеет потенциал, то этот потенциал определяется полем $\overline{A}$ однозначно, с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Векторные линии потенциального поля $\overline{A}$ представляют собой, линиями градиента его потенциала U, т. е. линии наибыстрейшего изменения этого потенциала. Условия, при которых данное векторное поле A потенциально:

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x, \quad \partial Q/\partial z = \partial R/\partial y, \quad \partial P/\partial z = \partial R/\partial x, \qquad (37.1)$$

но $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$, то $P = \partial U/\partial x$, $Q = \partial U/\partial y$, $R = \partial U/\partial z$ (эти формулы можно легко получить из свойств, полученных при выводе формулы Стокса).

Для того, чтобы векторное поле $\overline{A} = (P, Q, R)$, имеющее непрерывные и непрерывно дифференцируемые компоненты, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (37.1).

Если $\overline{A}$ - потенциальное векторное поле, то нахождение его потенциала сводится к нахождению функции по ее полному дифференциалу.

Пример 2 . Найти векторные линии в векторном поле

$$\overline{A} = 4z\,j + 8yk.$$

Решение. Так как $\dfrac{dx}{P(x,y,z)} = \dfrac{dy}{Q(x,y,z)} = \dfrac{dz}{R(x,y,z)}$, то имеем $\dfrac{dx}{0} = \dfrac{dy}{4z} = \dfrac{dz}{8y}$, $\dfrac{dy}{4z} = \dfrac{dz}{8y}$, $dx = 0$. Интегрируя систему, получим $X = h$ $(h=const)$, $2y^2 = z^2 + c$ – семейство гипербол, лежащих в плоскостях параллельных плоскости YOZ.

Поток векторного поля. Дивергенция

Количество жидкости, протекающей за единицу времени через данную (ориентированную) поверхность Σ, равно интегралу $\iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma$, где A_n – нормальная составляющая вектора скорости $\overline{A} = (P, Q, R)$. Величина Π называется потоком жидкости через поверхность Σ. Пусть $\overline{A}$ произвольное векторное поле и Σ ориентированная поверхность. Поток:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma \qquad (37.2)$$

мы назовем потоком векторного поля $\overline{A}$ через поверхность.

Пусть $\overline{A}$ - некоторое векторное поле. Поставим в соответствие каждой пространственной области Ω, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью Σ, величину

$$\lim_{\Omega \to M} (1/V(\Omega)) \iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma \qquad (37.3)$$

и назовем ее потоком вектора A через внешнюю сторону поверхности Σ. Мы получим аддитивную функцию области $\Phi(\Omega)$.

Производная функции $\Phi(\Omega)$ по объему, т.е. предел (37.3) называется дивергенцией векторного поля $\overline{A}$ и обозначается $div\,\overline{A}$. Если $\overline{A} = (P, Q, R)$ – векторное поле, определенное в области Ω и такое, что функции P, Q, R непрерывны в Ω вместе со всеми своими первыми производными, то $div\,\overline{A}$ существует во всех точках этой области (в любой декартовой системе координат) и выражается формулой

$$div\,\overline{A} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z. \qquad (37.4)$$

Пользуясь этим понятием, формула Остроградского будет:

$$\iint\limits_{\Sigma} A_n\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\,\overline{A}\,dv, \qquad (37.5)$$

т.е. поток вектора $\overline{A}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен интегралу от дивергенции поля $\overline{A}$, взятому по области, ограниченной поверхностью Σ.

Соленоидальное поле

Векторное поле, дивергенция которого тождественно равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым. Для соленоидальных полей выполнен закон сохранения интенсивности векторной трубки. Пусть $\overline{A}$ соленоидальное поле. Рассмотрим некоторую векторную трубку (поверхность, состоящая из векторных линий) и возьмем ее отрезок, заключенный между двумя ее сечениями Σ_1 и Σ_2 (рис. 37.1).

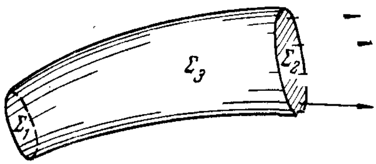


Рис. 37.1

Эти сечения вместе с боковой поверхностью Σ трубки образуют замкнутую поверхность Σ_3. Так как поле соленоидально, т.е. $div\ \overline{A} \equiv 0$, в силу формулы Остроградского

$$\iint\limits_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} A_n\, d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_3} A_n\, d\sigma = 0\,, \qquad (37.6)$$

причем в каждом из слагаемых имеется в виду внешняя сторона поверхности. Интеграл по поверхности Σ_3 равен нулю, так как по определению векторной трубки на поверхности Σ_3 направление векторного поля $\overline{A}$ перпендикулярно направлению нормали к этой поверхности. На Σ_3 величина $A_n \equiv 0$. Если теперь на сечении Σ_1 направление нормали изменим на противоположное, то равенство (37.6) можно записать в виде:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} A_n\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma\,, \qquad (37.7)$$

т.е. поток вектора $\overline{A}$ через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

Уравнение неразрывности

Выведем уравнение движения жидкости, так называемого уравнения неразрывности.

Пусть $\overline{A}$ - поле скоростей движущейся жидкости. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой области жидкость не исчезает и не возникает. Мы будем предполагать эту жидкость сжимаемой, т.е. считать плотность ρ некоторой функцией координат $x,\ y,\ z$ и времени t.

Тогда $\partial\rho/\partial t = -\,div(\rho\overline{A})$ – уравнение, связывающее между собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков. Оно называется уравнением неразрывности. Если ввести вектор $J = \rho\ \overline{A}$ плотность потока жидкости, то уравнение неразрывности будет

$$\partial\rho/\partial t + divJ = 0. \qquad (37.8)$$

Формула Остроградского на плоскости

Рассмотрим плоское векторное поле $\overline{A}$, т.е. поле, компоненты которого в некоторой декартовой системе координат имеют вид

$$P = P(x, y),\ \ Q = Q(x, y),\ \ R = 0\ . \qquad (37.9)$$

Дивергенция такого поля равна $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$. Пусть Ω - цилиндр единичной высоты, с основанием G, лежащим в плоскости $X0У$, и боковой поверхностью Σ (рис. 37.2).

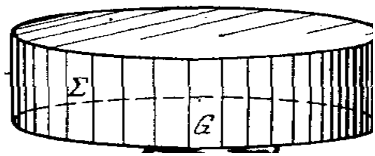


Рис. 37.2

Запишем для области Ω формулу Остроградского, предварительно заметив, что тройной интеграл от $div\ \overline{A}$ численно равен двойному интегралу от этого выражения по плоской области G, поток вектора (37.2) через поверхность Σ равен криволинейному интегралу

$$\Pi = \int_L [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y)]\, dl =$$

$$= \iint_G [\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y]\, dxdy \qquad (37.10)$$

где $\overline{n}$ - нормаль к контуру L, а поток через верхнее и нижнее основания цилиндра Ω равен нулю (последнее вытекает из того, что вектор (37.10) перпендикулярен оси z). Отбросим теперь окончательно третью координату z, будем рассматривать

(37.10) как векторное поле, заданное в плоскости *XOY*. Назовем криволинейный интеграл

$$\int_L [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y)]\,dl \qquad (37.11)$$

потоком этого векторного поля через контур *L*. Формула (37.10), так называемая формула Остроградского для плоскости, означает, что двойной интеграл от дивергенции плоского поля $\overline{A}$ по некоторой области *G* равен потоку вектора $\overline{A}$ через границу этой области. Формула (37.10) – просто эквивалент формулы Грина. Таким образом, как формула Стокса, так и формула Остроградского в плоском случае превращаются в формулу Грина.

Циркуляция векторного поля

Пусть $\overline{A} = (P, Q, R)$ – некоторое векторное поле и *L* – гладкая или кусочно-гладкая кривая. Криволинейный интеграл

$$Ц = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L A_\tau\,dl,$$

где $A\tau$ – тангенциальная составляющая поля *A* на контуре *L*, которую назовем циркуляцией векторного поля A вдоль кривой *L*. Если $\overline{A} = (P, Q, R)$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой *L* представляет работу этого силового поля вдоль пути *L*. Для полей иной природы циркуляция имеет другой физический символ.

Пример 3. Найти циркуляцию векторного поля

$\overline{A} = xi - zj + yk$ *L* пересечение поверхности $y^2 = 4 - x - z$ с координатными плоскостями (рис. 37.3).

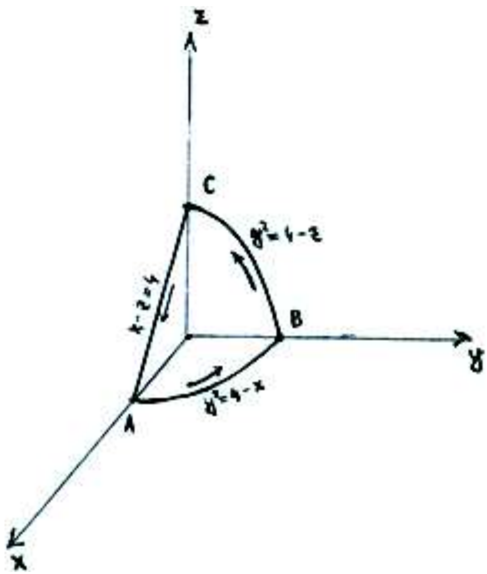


Рис. 37.3

Решение. Циркуляция вдоль кривой L вычисляется по формуле

$$Ц=\oint_L \overline{A}\,\overline{dl} = \int_{L_1} \overline{A}\,\overline{dl} + \int_{L_2} \overline{A}\,\overline{dl} + \int_{L_3} \overline{A}\,\overline{dl} = 32/3,$$

где

$$\int_{L_1} \overline{A}\,\overline{dl} = -\int_0^4 x dx = -x^2/2\Big|_0^4 = -8.$$ Так как $L_1=\overset{\cup}{AB} : z = 0,$ $dz = 0, y^2=4 - x, x \in [0,4], \quad \overline{A}\,\overline{dl} = xdx;$

$$\int_{L_2} \overline{A}\,\overline{dl} = -\int_2^0 (y^2+4)dy = y^3/3+4y\Big|_0^2 = 32/3.$$

Так как $L_2=\overset{\cup}{BC} : x = 0,$

$dx = 0,\ z = 4 - y^2,\ dz = -2ydy,\ y \in [0,2],\ \overline{A}\ \overline{dl} = -zdy + ydz;$

$\int\limits_{L_3} \overline{A}\ \overline{dl} = \int\limits_0^4 xdx = x^2/2\Big|_0^4 = 8.$ Так как $L_3 = \overset{\cup}{CA} : y = 0,$

$dy = 0,\ z + x = 4,\ x \in [0,4],\ \overline{A}\ \overline{dl} = xdx.$

Ротор векторного поля

Если L - замкнутый контур, то формула имеет тот же вид

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_\Sigma [(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dxdy + (\partial R/\partial y -$$

$$- \partial Q/\partial z)\,dydz + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)]\,dzdx, \qquad (37.12)$$

где поверхностный интеграл взят по некоторой поверхности Σ, натянутой на контур L. Правая часть равенства (37.12) представляет собой поток через поверхность Σ вектора. Назовем этот вектор ротором (или вихрем) векторного поля $\overline{A}$ и обозначим $rot\ \overline{A}$. Таким образом,

$rot\ \overline{A} = (\partial R/\partial y - \partial Q/\partial z)\ i + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)\ j + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\ k.$

Пользуясь понятием ротора, можно записать формулу Стокса в следующем компактном виде

$$\int\limits_L A_\tau\,dl = \iint\limits_\Sigma (rot\ \overline{A})_n\,d\sigma. \qquad (37.13)$$

Циркуляция векторного поля $\overline{A}$ вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

В определении ротора участвует не только само векторное поле $\overline{A}$, но и некоторая определенная система координат (x, y, z). Однако на самом деле вектор $rot\ \overline{A}$ не зависит от выбора координатной системы.

Циркуляция вектора $\overline{A}$ вдоль контура не зависит от выбора координатной системы.

Направление нормали $\overline{n}$ выбрано произвольно, поэтому проекция вектора $rot\ \overline{A}$ на любое направление, а следовательно и сам вектор $rot\ \overline{A}$, не зависят от выбора системы координат.

Ротор векторного поля $\overline{A} = (P, Q, R)$ удобно записывать в виде символического определителя,

$$det = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

где i, j, k – единичные векторы, направленные по осям координат, а под умножением символа $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования (например, $(\partial/\partial x)R$ означает $\partial R/\partial x$).

Действительно, разложив определитель по элементам первой строки, получим, что $det = rot\ \overline{A}$.

Мы назвали потенциальным векторное поле, представимое в виде градиента некоторого скалярного поля, и показали, что векторное поле $\overline{A} = (P, Q, R)$ потенциально в том и только том случае, если его компоненты удовлетворяют условиям $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$, $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$, но эти три условия означают не что иное, как равенство нулю всех трех компонент ротора поля $\overline{A}$.

Таким образом, для того чтобы векторное поле $\overline{A}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $rot\ \overline{A} \equiv 0$.

Вычисление показывает, что для любого векторного поля $\overline{A}$ $div(rot\ \overline{A}) \equiv 0$, т.е. векторное поле, представимое в виде ротора какого-либо другого векторного поля, соленоидально. Всякому полю $\overline{A}$, удовлетворяющему условию $div\ \overline{A} = 0$ можно подобрать поле $\overline{B}$ так, что $\overline{A} = rot\ \overline{B}$. Векторное поле $\overline{B}$ определяется не однозначно, а с точностью до произвольного слагаемого $grad\ U$.

Если $\overline{A} = rot\ \overline{B}$, то поле $\overline{B}$ называется вектор – потенциалом поля $\overline{A}$. Можно доказать, что всякое векторное поле $\overline{A}$ представимо в виде $\overline{A} = \overline{B} + \overline{C}$, где $\overline{B}$ потенциально, а $\overline{C}$ соленоидально.

38. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Выше было введено понятие градиента скалярного поля. Переход от скалярного поля U к $grad\ U$ можно рассматривать как некоторую операцию, которую обозначают символом V (читается «набла») и называют оператором «набла» или оператором Гамильтона. Таким образом, по определению $V = grad\ U$.

Оператор V удобно трактовать как символический вектор с компонентами: $V = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y + k\partial/\partial z$. Применение его к скалярной функции – как умножение скаляра на этот вектор. С помощью вектора V удобно записывать и остальные операции векторного анализа, а именно, если

$\overline{A} = (P, Q, R)$, то $div\ \overline{A} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z = (V, \overline{A})$, т.е. дивергенция векторного поля $\overline{A}$ есть скалярное произведение символического вектора V и вектора $\overline{A}$. Аналогично $rot\ \overline{A} = (\partial R/\partial y - \partial Q/\partial z)i + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)j + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)k = [V, \overline{A}]$, т.е. ротор векторного поля $\overline{A}$ есть векторное произведение вектора V на вектор $\overline{A}$.

<u>*Действия с вектором V*</u>

Необходимость введения символического вектора V состоит в том, что с его помощью удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа.

Рассмотрим два равенства: $rot\ grad\ U = 0$ и

$div\ rot\ \overline{A} = 0$. Переписав их с помощью вектора V, получим $[V, VU] = 0$ и $(V, V, \overline{A}) = 0$.

Аналогия между символическим вектором V и «настоящими» векторами не полная. Формулы, содержащие символический вектор V, аналогичны обычным формулам векторной алгебры в том случае, если они не содержат произведений переменных величин (скалярных или векторных), до тех пор, пока нам не приходится применять входящие в V операции дифференцирования к произведению переменных величин. Если же некоторое выражение содержит произведение двух или более переменных сомножителей, применяя к этому выражению вектор V, нельзя использовать обычные правила векторной алгебры. Пусть $U = U(x, y, z)$ – скалярное поле и $\overline{A} = \overline{A}(x, y, z)$ – векторное поле. Вычислим $div\ (U\overline{A})$, т.е. $(V, U\overline{A})$.

Применение вектора V сводится к применению входящих в него операций дифференцирования.

Дадим сводку формул, связывающих операции взятия градиента, ротора и дивергенции с основными операциями векторной алгебры:

1. $div(U\overline{A}) = (\overline{A}, grad\ U) + U\ div\ \overline{A}$;
2. $grad\ (UW) = W\ grad\ U + U\ grad\ W$;
3. $rot\ (U\overline{A}) = U\ rot\ \overline{A} + [grad\ U, \overline{A}]$;
4. $div[\overline{A}, \overline{B}] = (\overline{B}, rot\ \overline{A}) — (\overline{A}, rot\ \overline{B})$;
5. $rot[\overline{A}, \overline{B}] = (\overline{B}, V)\ \overline{A} - (\overline{A}, V)\ \overline{B} + \overline{A}\ div\ \overline{B} - \overline{B}\ div\ \overline{A}$;
6. $grad\ (\overline{A}, \overline{B}) = (\overline{B}, V)\overline{A} + (\overline{A}, V)\ \overline{B} + [\overline{B}, rot\ \overline{A}] +$ $+ [\overline{A}, rot\ \overline{B}]$.

<u>Дифференциальные операции второго порядка</u>

Рассмотрим так называемые операции второго порядка, т.е. всевозможные комбинации трех указанных выше основных операций. Комбинируя символы *grad, rot, div* попарно, мы можем составить из них девять пар.

Все имеющиеся здесь возможности изображаются следующей таблицей.

Скалярное поле U	Векторное поле $\overline{A}$	
grad	*div*	*Rot*
	grad div $\overline{A}$	
		$div\ rot\ \overline{A} \equiv 0$
$rot\ grad\ U \equiv 0$		$rot\ rot\ \overline{A}$

В таблице пустые клетки, отвечающие не имеющим смысла сочетаниям основных операций.

Выражение *div grad U* называется оператором Лапласа и обозначается ΔU. Воспользовавшись известными выражениями градиента и дивергенции, получаем

$$\Delta U = div(gradU) = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2.$$

Дивергенция и градиент не зависят от выбора координатной системы, а ΔU зависит от самого поля U. Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат вектора V, т.е. $\Delta = (V, V) = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$, и $(V,V)U = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U \partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = \Delta U$.

Оператор Δ применять не к скалярной величине, а к вектору. Если $\overline{A} = A_x i + A_y j + A_z k$, то под $\Delta \overline{A}$ понимается вектор $\Delta A_x i + \Delta A_y j + \Delta A_z k$. Это выражение зависит только от самого вектора $\overline{A}$, но не от выбора системы координат. Рассмотрим теперь операции второго порядка для векторного поля. Применительно к векторному полю имеют смысл три операции второго порядка: grad div $\overline{A}$, rot rot $\overline{A}$, div rot $\overline{A}$. С выражением вида div rot $\overline{A}$ мы уже встречались ранее при нахождении условий соленоидальности поля и выяснили, что всегда div rot $\overline{A}$ = 0. Выражения grad div $\overline{A}$ и rot rot $\overline{A}$ не обязаны обращаться в нуль. Они часто встречаются в различных вопросах механики и электродинамики. Рассмотрим выражение rot rot $\overline{A}$, которое в символической форме записывается так: [V, [V, $\overline{A}$]].

Воспользовавшись формулой для двойного векторного произведения, получим, что [*V*, [*V*, $\overline{A}$]] = *V(V*, $\overline{A}$ *)* - *(V, V)* $\overline{A}$, т.е. *rot rot* $\overline{A}$ = *grad div* $\overline{A}$ - $\Delta\overline{A}$.

39. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Комплексная плоскость. Понятие области на комплексной плоскости. Понятие предела последовательности комплексных чисел

Ранее мы определили комплексную плоскость как плоскость XOY, которая служит для изображения комплексных чисел. Расширенной комплексной плоскостью называется плоскость XOY, дополненная идеальной (воображаемой) точкой $z=\infty$, называемой бесконечно удаленной точкой. Чтобы лучше понять роль этой точки, построим в пространстве OXYZсферу с центром в точке M(0;0;1/2) радиуса $R=1/2$ (рис.39.1).

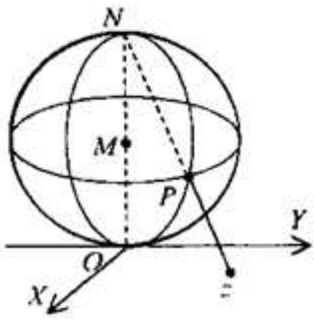


Рис.39.1.

Любую точку $z = x+iy$ соединим прямой с точкой N на сфере. Точка P пересечения этой прямой со сферой называется стереографической проекцией точки z на сферу.

Если $|z| \to\infty$, то точка P приближается к точке N. Поэтому естественно считать точку N стереографической проекцией бесконечно удаленной точки. Роль точки $z= \infty$ подобна роли точки N на сфере.

Окрестностью точки z_0 называется совокупность внутренних точек любого круга с центром в точке z_0 радиуса ρ. то есть совокупность точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\rho$.

Окрестностью бесконечно удаленной точки называется совокупность точек, лежащих вне любого круга с центром в начале координат, то есть множество, точек, удовлетворяющих неравенству $|z|> R$.

Пусть E - множество точек комплексной плоскости. Точка z называется внутренней точкой множества E, если существует окрестность этой точки, принадлежащая множеству E. Точка z называется граничной точкой множества E, если любая окрестность этой точки содержит точки, принадлежащие множеству E, и точки, не принадлежащие этому множеству. Множество Г всех граничных точек множества E называется границей множества E.

Множество E называется открытым множеством, если оно состоит из одних внутренних точек. Множество E называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек множества E. Всякое открытое связное множество D на комплексной плоскости называется областью. Область D называется односвязной, если любую замкнутую кривую в этой области можно непрерывно стянуть в точку, не пересекая границу области. В противном случае область D называется многосвязной.

На рис. 39.2 изображены односвязная область D и многосвязная область Ω.

Множество, состоящее из точек области D и ее границы Г, называется замкнутой областью и обозначается $\overline{D}$.Обход границы Г области D считается положительным, если при движении в этом направлении точки области D остаются слева.

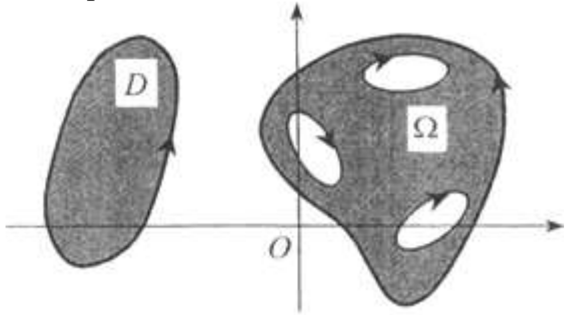


Рис.39.2.

На рис.39.2 положительное направление обхода границы Г отмечено стрелками.

Рассмотрим последовательность комплексныхчисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots .$$

Число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любой окрестности точки z_0 существует число N такое, что все числа z_n при $n > N$ принадлежат этой окрестности. В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Это определение справедливо и тогда, когда $z_0=\infty$ - бесконечно удаленная точка.

Последовательность $\{z_n\}$ называется сходящейся, если предел z_0 этой последовательности - конечное число.

Пусть $z_n = x_n+iy_n, z_0 = x_0+iy_0$. Легко доказать, что если последовательность $\{z_n\}$ имеет конечный предел z_0,то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы x_0и y_0, и наоборот, если существуют конечные пределы

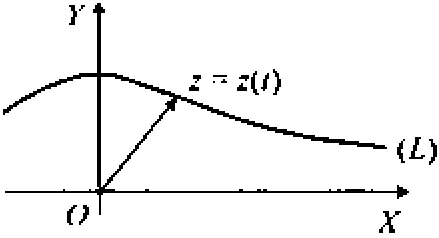
$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0$.

Комплексные функции действительного переменного

Если каждому значению действительной переменной t по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенное значение комплексной переменной $z = x+iy$, то говорят, что задана комплексная функция $z(t)$. Ясно, что действительная и мнимая части переменной z также являются функциями от t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то есть $z(t) = x(t) + iy(t)$. Задание комплексной функции $z\{t)$ равносильно заданию двух действительных функций x(t) и $y(t)$.

Пусть задана функция $z(t)$. Тогда каждому значению переменной t на комплексной плоскости соответствует точка z. При изменении t точка z опишет на комплексной плоскости некоторую кривую (L) (рис. 39.3). Уравнение $z=z(t)$ называется комплексно параметрическим уравнением этой кривой. Параметрическим уравнением кривой (L) служит система уравнений

$$x = x(t),$$
$$y=y(t).$$



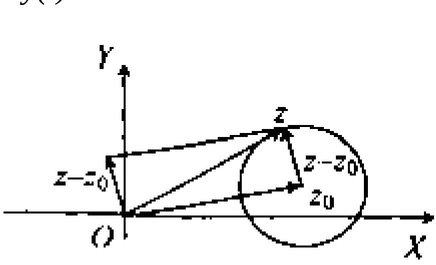


Рис. 39.3 Рис. 39.4

<u>Пример1.:</u> Составить комплексно параметрическое уравнение окружности с центром в точке $z_0 = x_0+iy_0$ радиуса R.

Окружность является геометрическим местом точек, для которых $| z-z_0 | = R$ (рис. 39.4). Таким свойством обладают только числа, для которых $z-z_0 = Re^{it}$. Следовательно, уравнение

$$z=z_0 + Re^{it}$$

является комплексно параметрическим уравнением окружности.

Для комплексных функций действительной переменной естественным образом определяются понятия предела, непрерывности, производной и другие.

Например, если $z(t) = x(t)+iy(t)$, то

$$z'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + i\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)dt + i\int_{\alpha}^{\beta} y(t)dt.$$

Комплексные функции комплексного переменного

Аналогично определяется понятие комплексной функции комплексного переменного. Если каждому значению комплексного переменного $z = x+iy$ по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенное значение комплексного переменного $w = u+iv$, то говорят, что задана комплексная функция комплексного переменного и пишут $w = f(z)$. Действительная и мнимая части функции $f(z)$ очевидно, являются функциями от $z = x + iy$, то есть от двух действительных переменных x и y: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, так что

$$f(z) = fix,y) + i\,v(x,y).$$

Таким образом, задание комплексной функции $f(z)$ от комплексной переменной z равносильно заданию двух действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ от двух действительных переменных xиy. Примерами функций от комплексной переменной являются степенные функции z, z^2, z^3, ..., многочлены $P_n(z) = c_0 + c_1z + ... + c_nz^n$, дробно-рациональные функции

$$R(z) = \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \cdots + b_n}.$$

Например, для функции $f(z) = z^3$ имеем

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

то есть

$$\mathrm{Re}f(z) = f(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Каждой действительной функции $f(x)$ действительного переменного x ставится в соответствие некоторая кривая на плоскости XOY - график этой функции. Такое наглядное представление функций от комплексного переменного невозможно. Вместо этого используется понятие отображения. Для этого рассмотрим две плоскости комплексной переменной: плоскость XOY и плоскость UOV (рис. 39.5).

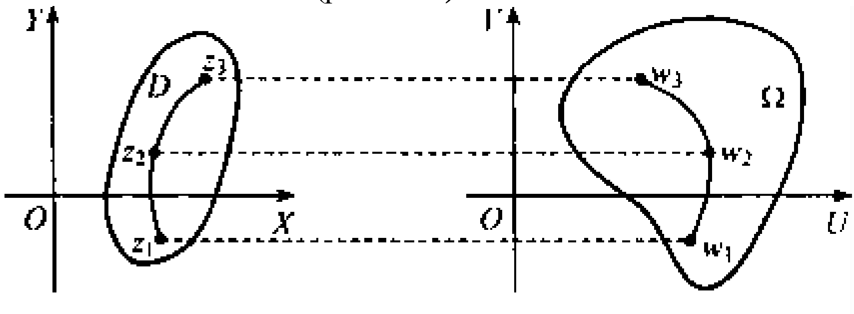


Рис. 39.5

Функция $f(z)$ каждой точке z на плоскости XOY из области определения этой функции ставит в соответствие точку w на плоскости UOV. Точка w называется образом точки г, а точка x - прообразом точки w. Если прообразы z образуют некоторую линию на плоскости XOY, то образы этих точек образуют некоторую линию на плоскости UOV, если точки z заполняют область D на плоскости XOY, то их образы образуют некоторую область Ω на плоскости UOV, при этом граничные точки области D переходят в граничные точки области Ω. Говорят, что функция$f(z)$ осуществляет отображение области D на область Ω.

Пример 2. Рассмотрим функцию w=l/z. Если $z=re^{i\varphi}$, то$w=$ (1/r)e$^{'-1\varphi}$. Это означает, что точка $w = 1/z$ лежит на том же луче, выходящем из точки $z=0$, что и точка z, на расстоянии 1/r от начала координат (рис. 39.6).

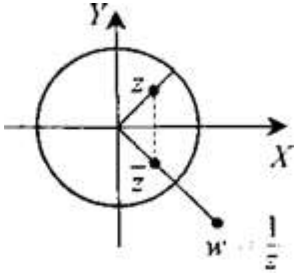


Рис. 39.6

Если $|z| = 1$, то $|w| = 1$, то есть единичная окружность на плоскости XOY переходит в единичную окружность на плоскости UOV. Круг $|z|<1$ отображается во внешность круга $|w|>1$, точка $z=0$ отображается в точку $w=\infty$, и наоборот, точка $z=\infty$ переходит в точку $w=0$.

Понятия предела, непрерывности, производной для функций комплексного переменного определяются точно так же, как и для функций действительного переменного. Например, число w_0 называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon>0$, как бы мало оно ни было, существует число $\delta = \delta(s)$ такое, что неравенство $|f(z)-w_0| < \varepsilon$ выполняется для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, кроме, быть может, точки z_0. В этом случае пишут $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$.

Если $z=x+iy$, $f(z)= f(x,y)+iv(x,y)$, $z_0 = x_0+iy_0$, $w_0=u_0+iv_0$, то справедливо утверждение: $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$тогда и только тогда,когда $\lim_{x\to z_0, x\to x_0} u(x,y) = u_0$ и $\lim_{x\to z_0, x\to x_0} v(x,y) = v_0$.

Отметим здесь одно важное обстоятельство. Для функций действительного переменного $f(x)$ справедлива теорема: $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ тогда и только тогда, когда оба односторонних предела $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют и равны между собой. Для функций комплексного переменного соответствующая теорема формулируется следующим образом.

Предел функции $f(z)$ при $z \to z_0$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы этой функции, если $z \to z_0$по любой кривой L, проходящей через точку z_0,и если все эти пределы равны между собой. Это означает, что существование предела накладывает на функции комплексного переменного более жесткие ограничения, чем на функции действительного переменного.

Далее, функция$f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 если эта функция определена в точке z_0 и если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Справедлива следующая теорема: функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0+iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0,y_0)$. Однако как мы увидим в дальнейшем, дифференцируемость функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ не достаточна для дифференцируемости функции $f(z)$. Здесь мы рассмотрели понятие однозначной функции комплексного переменного. В теории функций комплексного переменного рассматриваются также многозначные функции, когда каждому значению комплексного переменного zставится в соответствие не одно, а несколько и даже бесконечно много значений функции $f(z)$.Например, функция $\sqrt[n]{z}$ каждому$z \neq 0$ ставит в соответствие n различных значений переменной w, функция Argz при $z \neq 0$ принимает бесконечно много значений.

Элементарные функции комплексного переменного

Значения *показательной функции* комплексного переменного $z = x + iy$ вычисляются по формуле $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Показательная функция e^z обладает следующими свойствами: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1 и z_2 - любые комплексные числа; $e^{z+2\pi ki} = e^z$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, т.е. e^z является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$. *Тригонометрические функции* sinz и cosz выражаются через показательную:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Функции $\omega = \sin z$ и $\omega = \cos z$ - периодические с

Действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi (k = 0, \pm1, \pm2, K)$ соответственно.

Функции tgz и ctgz определяются равенствами

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.
Гиперболические функции shz, chz, thz, cthz определяются равенствами

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Имеют место тождества shz=-isiniz, chz=cosiz.
Логарифмическая функция Lnz, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\mathrm{Lnz} = \ln|z| + i\mathrm{Argz} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k = 0, \pm1, \pm2, K$$

Значение функции, которое получается при k=0, называется *главным значением* и обозначается $\ln z = \ln|z| + i\arg z$,
логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2, \quad Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2,$$

$$Lnz^n = nLnz + 2\pi ki, k = 0, \pm1, \pm2, K, Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Lnz.$$

Функции Arcsinz, Arccosz, Arctgz, Arcctgz определяются как *обратные* к функциям sinz, cosz, tgz, ctgz соответственно.

Так, если $z = \cos\omega$, то ω называется арккосинусом числа z и обозначается ω=Arccosz. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$Arc\sin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2} Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad Arcctgz = \frac{i}{2} Ln\frac{z - i}{z + i}.$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы (arcsinz, arccosz, arctgz, arcctgz); они называются главными значениями. Общая степенная функция $\omega = z^{\alpha}$, где α—любое комплексное числе, определяется соотношением $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz}, z \neq 0.$ Эта функция многозначная; значение $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz}$ называется главным значением. Общая показательная функция $\omega = \alpha^z$, $\alpha \neq 0$ определяется равенством $\alpha^z = e^{zLn\alpha}$. Главное значение этой функции $\alpha^z = e^{zLn\alpha}$.

Пример 3. Представить в алгебраической форме:

$$Arctg\left(\frac{3\sqrt{3} + 8i}{7}\right)$$

Решение: Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

$$\text{Arctg } z= -\frac{i}{2} Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

Подставим вместо z значение $\dfrac{3\sqrt{3} + 8i}{7}$:

$$Arctg\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+\frac{-8+i3\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{-8+i3\sqrt{3}}{7}}=$$

$$=-\frac{i}{2}Ln\frac{7-8+i3\sqrt{3}}{7+8-i3\sqrt{3}}=-\frac{i}{2}Ln\frac{-1+i3\sqrt{3}}{15-i3\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$Ln\ \ z=\ln|z|+iArgz=\ln|z|+i(\arg z+2\pi\kappa),\ \kappa=0,\pm1,\pm2,...$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\ln\left|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right|+i\left(\arg\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)+2\pi\kappa\right)\right]=$$

$$=-\frac{i}{2}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\arg\left(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)+2\pi\kappa\right)\approx$$

$$\approx\frac{i}{2}\cdot1{,}009+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa\right),\kappa=0,\pm1,\pm2,...$$

Ответ: $Arctg\left(\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)\approx$

$$\approx \frac{i}{2}\cdot 1{,}009+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa\right), \kappa=0,\pm 1,\pm 2,...$$

Кривые на комплексной плоскости

Уравнение вида $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x=x(t),\ y=y(t)$. Исключением параметра $\boldsymbol{t}$ из этих уравнений получаем уравнение кривой в виде $F(x,y)=0$.

Пример 4 . Вычертить область, заданную неравенствами:

$$|z-1|<1,\ \arg z\le\frac{\pi}{4},\ \arg(z-1)>\frac{\pi}{4}$$

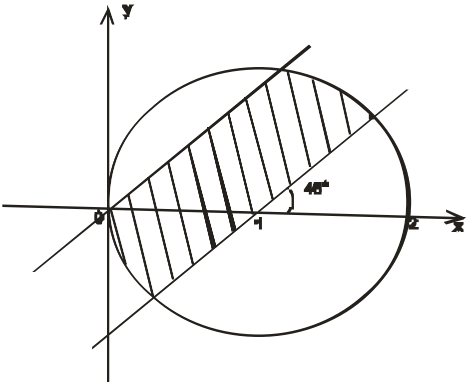


Рис. 39.7

Пример 4 . Определить вид кривой:

$$z=t^2+2t+5+i\left(t^2+2t+1\right)$$

Решение: Уравнение вида $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x=x(t), y=y(t)$. В нашем случае:

$$x(t)=t^2+2t+5; y(t)=t^2+2t=1$$

Выразим параметр t через x и y:

$$x=t^2+2t+5 \Rightarrow x-4=(t+1)^2 \Rightarrow t=\sqrt{x-4}-1$$

$$y=t^2+2t+1 \Rightarrow y=(t+1)^2 \Rightarrow t+\sqrt{y}-1$$

Получим уравнение кривой в виде $F(x,y)=0$:

$$\sqrt{x-4}-1=\sqrt{y}-1 \Rightarrow x-4=y \Rightarrow x-y-4=0.$$

40. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, УСЛОВИЯ КОШИ — РИМАНА

Пусть функция $\omega=f(z)$ определена в некоторой области G комплексного переменного z. Пусть точки z и z+Δz принадлежат области *G*. Введем обозначения

$$\Delta\omega=f(z+\Delta z)-f(z), \quad \Delta z=\Delta x+i\Delta y.$$

Функция $\omega=f(z)$, *называется дифференцируемой о точке* $z\in G$**,** *если отношение* $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$ *имеет конечный предел при* $\Delta z\to 0$. *Этот предел называется производной функции* $\omega=f(z)$ и *обозначается* $f'(z)$ $\left(\text{или}\ \dfrac{d\omega}{dz}\right)$, $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$.

Пусть $z=x+iy, \quad \omega=f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y),$, тогда в каждой точке дифференцируемости функции *f(z)* выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial\upsilon}{\partial x}, \qquad (40.1)$$

называемые *условиями Коши — Римана.* Обратно, если в некоторой точке *(x, y)* выполняются условия Коши — Римана и, кроме того, функции *u = u(x, y)* и *υ = υ (x, y)* дифференцируемы как функции двух действительных переменных, то функция

$f(z)=u+i\upsilon$ является дифференцируемой в точке $z=x+iy$ как функция комплексного переменного z. *Функция* $\omega=f(z)$ *называется аналитической в данной точке* z, *если она дифференцируема как в самой точке* z, *так и в некоторой ее окрестности. Функция* $\omega=f(z)$ *называется аналитической в области* G, *если она аналитична в каждой точке* $z\in G$.Производная аналитической функции вычисляется по формулам

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана, можно восстановить аналитическую функцию $\omega=f(z)$ **,** если известна ее действительная часть $u=u(x,y)$ или мнимая часть $\upsilon=\upsilon(x,y)$ и, кроме того, задано значение $f(z_0)$ функции в некоторой точке z_0. Пусть, например, $u=e^x\cos y$, $f(0)=1$. Определить аналитическую функцию *f(z)*. В силу условий (40.2) имеем

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \tag{40.3}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y. \tag{40.4}$$

Интегрируя уравнение (40.4) по переменной *x*, находим мнимую часть

$$\upsilon=e^x\sin y+C(y). \tag{40.5}$$

Слагаемое *C(y)* представляет собой постоянную (относительно *x)* интегрирования. Дифференцируя (40.5) по *y* и сопоставляя результат с (40.3), получаем $C'(y)=0$, откуда *C (y)C*. Таким образом, имеем $\upsilon=e^x\sin y+C\ u\ f(z)=u+i\upsilon=e^x(\cos y+i\sin y)+C$ с учетом формулы (1) - $f(z)=e^z+C$. Учтем дополнительное условие *f(0)* =1, откуда C=0; итак, $f(z)=e^z$.

Пример 1. Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(x) по известной действительной части u (x,y) и значению f (z_0):u = -2xy-2y, f (0) = i

Решение: Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле: $f'(z) = \frac{du}{dx} - i\frac{du}{dy}$. Найдём производную аналитической функции: $f'(z) = f'(x + iy) = -2y + 2ix + 2i = 2(ix - y) + 2i = 2i(x + iy) + 2i = 2iz + 2i$. Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Зная производную аналитической функции f (z), можно найти производную с точностью до константы: $f(z) = \int (2iz + 2i)dz = iz^2 + 2iz + C$. Определим константу C: $f(0) = i0^2 + 2i \cdot 0 + C = i \Rightarrow C = i$. Итак, аналитическая функция f (z) выглядит следующим образом: $f(z) = iz^2 + 2iz + i$

41. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена и непрерывна в области *G*, а Г — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G; $z = x + iy, \quad f(z) = u + i\upsilon, \quad где \quad u = u(x, y), \quad \upsilon = \upsilon(x, y)$ -действительные функции переменных *x* и *y*. Вычисление интеграла от функции $\omega = f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению криволинейных интегралов по координатам: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} udx - \upsilon dy + i\int\limits_{\Gamma} \upsilon dx + udy.$ Если кривая Г задана параметрическими уравнениями *x=x(t), y= y(t)*, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t=\beta$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dy, \quad где\, z(t) = x(t) + iy(t).$$

Если $\omega = f(z)$— аналитическая функция в односвязной области *G*, то интеграл не зависит от пути интегрирования (зависит только от начальной и конечной точек). В этом случае для вычисления интеграла применяется *формула Ньютона — Лейбница*

$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$ где Ф (z) —какая-либо первообразная для функции *f(z),* т. е, $\Phi'(z) = f(z)$ в области G, если функция $\omega = f(z)$ является аналитической в области *G*, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Г, и на самом контуре, то $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$ (Теорема Коши) и для любой внутренней точки

$z_0 \in G \;\; f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \dfrac{f(z)}{z - z_0}dz$ *(интегральная формула Коши)*

Пример 1 . Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int_{ABC} \left(\sin z + z^5\right)dz$; ABC – ломаная:

$z_A = 0; z_B = 1; z_C = 2i$

Решение: Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:

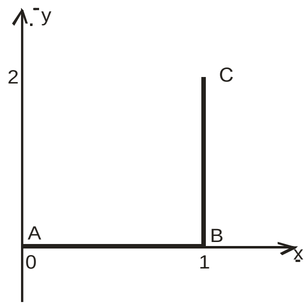


Рис. 41.1

Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$:

$$f(z)=\sin(x+iy)+(x+iy)^5=\frac{1}{2i}\left(e^{ix-y}-e^{-ix+y}\right)+x^5+5ix^4y-$$

$$-10x^3y^2-10ix^2y^3+5xy^4-iy^5=$$

$$=\frac{\sin x}{2}(e^{-y}+e^{y})+x^5-10x^3y^2+5xy^4+$$

$$+i(\frac{\cos x}{2}(e^{y}+e^{-y})+5x^4y-10x^2y^3+y^5)$$

Проверим, выполняются ли условия Коши – Римана:

$$\frac{du}{dx}=\frac{e^{-y}}{2}\left(\left(e^{2y+1}\right)\cos x+10e^{y}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)\right)=\frac{dv}{dy};$$

$$\frac{du}{dy}=-\frac{e^{-y}}{2}\left(\left(1-e^{2y}\right)\sin x+40xye^{y}\left(x^2-y^2\right)\right)=-\frac{dv}{dy};$$

Условия Коши – Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит: $\int\limits_{ABC}\left(\sin z+z^5\right)dz=$

$$=\int_0^{2i}\left(\sin z+z^5\right)dz=-\cos z+\frac{z^6}{2}\Big|_0^{2i}=-ch2-\frac{29}{3}$$

42. РЯД ЛОРАНА

Функция $\omega=f(z)$, однозначная н аналитическая в кольце $\rho<|z-z_0|<R,$ разлагается в этом кольце *в ряд Лорана*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-z_0)^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k,\quad(42.1)$$

коэффициенты находятся по формулам

$$C_k = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},\ k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \qquad (42.2)$$

Здесь Г—произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца. Разложение в ряд Лорана единственно. В формуле (42.1) ряды $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} C_k(z-z_0)^k$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^k$ называются соответственно *гласной частью ряда Лорана* и *правильной частью ряда Лорана.* На практике для нахождения коэффициентов C_k, если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора. Для примера разложим в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$. Функция $z^3 e^{1/z}$ аналитична в кольце $0 < |z| < \infty$, следовательно, разложима в нем в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi_0 = 0$: $e^{\xi} = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{\xi^k}{k!} + \ldots$ и положим $\xi = 1/z$, тогда $f(z) = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \ldots + \frac{1}{z^k k!} + \ldots\right) =$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z4!} + \ldots + \frac{1}{z^{k-3}k!} + \ldots$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции *f(z)* по степеням z является рядом Лорана для функции $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в кольце $0 < |z| < \infty$.

<u>Пример 1 .</u> Найти все Лорановские разложения данной функции по степеням z. $f(z) = \dfrac{6z+144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}$

<u>Решение:</u>

$$\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4} = \frac{6(z+24)}{-z^2(z+6)(z-12)} = -\frac{6}{z^2}\cdot\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

$$\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}=\frac{A}{z+6}+\frac{B}{z-12}=$$

$$=\frac{Az-12A+Bz+6B}{(z+6)(z-12)}\Rightarrow\{A=-1;D=2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}=\frac{-1}{z+6}+\frac{2}{z-12}$$

.Отсюда f(z) примет вид: f(z)= $\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)$. Особые точки: z = 0; z = -6; z = 12

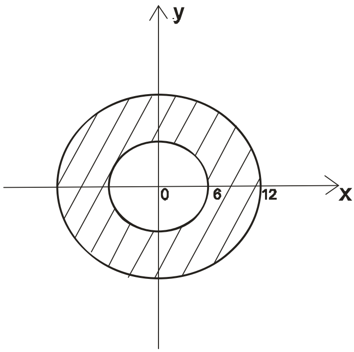


Рис. 42.1

Рассмотрим область $|z|<6$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{6}\right)}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}+\frac{z^3}{1728}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $6<|z|<12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{\left(1+\frac{6}{z}\right)}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}+\frac{z^3}{1728}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{z\left(1+\frac{6}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{12}{z}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+\ldots\right)-\left(\frac{12}{z}+\frac{144}{z^2}+\frac{1728}{z^3}+\frac{20736}{z^4}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{12}{z^3}+\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}+\frac{20736}{z^6}+\ldots\right)$$

$|z|<6$:

$$f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

$6<|z|<12$:

$$f(z)=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

$|z| > 12:$

$$f(z) = \left(\frac{6}{z^3} - \frac{36}{z^4} + \frac{216}{z^5} - \frac{1296}{z^6} + \ldots \right) + \left(\frac{12}{z^3} + \frac{144}{z^4} + \frac{1728}{z^5} + \frac{20736}{z^6} + \ldots \right)$$

Изолированные особые точки однозначной аналитической функции

Точка z_0 *называется изолированной особой точкой функции* $\omega = f(z)$, *если f (z)- однозначная и аналитическая функция в круговом кольце* $0 < |z - z_0| < \delta$, *кроме самой точки* z_0. Функцию $\omega = f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана(6), сходящийся в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$.

При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана:

1) не содержит членов **с** отрицательными степенями разности $z - z_0$, *т.е.* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$. В этом случае z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $\omega = f(z)$;
2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности

   $$(z - z_0), \quad т.е.\ f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, причем\ C_{-n} \neq 0.$$

   В этом случае z_0 называется *полюсом* порядка n функции $\omega = f(z)$;
3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности

   $$z - z_0, \quad т.е.\ f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k.$$

В этом случае z_0 называется *существенно особой точкой* функции $\omega = f(z)$. При определении характера изолированной особой точки используются следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $\omega = f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0, \quad \text{\it причем}\, | C_0 | < \infty.$

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $\omega = f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty.$

2. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка *n* аналитической функции *f(z)*, необходимо и достаточно, чтобы функцию *f(z)* можно было представить в виде $f(z) = \varphi(z)/(z - z_0)^n, \quad \text{\it где}\, \varphi(z)$ —функция аналитическая в точке z_0, причем $\varphi(z) \neq 0$ . .Пусть z_0—изолированная особая точка функции $f(z) = \lambda(z)/\mu(z), \quad \text{\it где}\, \lambda(z)\ \text{\it и}\ \mu(z)$ —функции аналитические в точке z_0. Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до *к*—1 порядка включительно в точке z_0 равны нулю, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0,$ знаменатель $\mu(z)$ и все производные до *l-1* порядка включительно также равны нулю в точке z_0, $\mu^{(l)}(z_0) \neq 0,$ то при *l*>*k* точка z_0 является полюсом порядка *n*=*l*—*k* аналитической функции *f(z)*. (Если $l \leq k,$ то точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции f(z).) В частном случае, при *k=0, l = 1* имеем: если $\lambda(z_0) \neq 0, \quad \mu(z_0) = 0, \quad \mu'(z_0) \neq 0, \quad \text{\it то}\, z_0$ — полюс первого порядка функции *f(z)*.

3. Пусть при $z \to z_0$ аналитическая функция $\omega = f(z)$ не имеет пределов ни конечного, ни бесконечного. Это условие

является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $\omega = f(z)$.

<u>Пример 2 .</u> Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}.$$

<u>Решение:</u> Изолированными особыми точками являются z = i, z = -i, z = ½, z = - ½. Запишем данную функцию в виде отношения g (z) и h (z): $f(z) = \dfrac{cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$;g (z) = cos πz;

h (z) = $(4z^2 -1)(z^2 + 1)$. Для каждой из функций найдём порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i, z = -i, z = ½, z = - ½: g (1/2) = 0, g (-1/2) = 0, g (i) ≠ 0, g (-i) ≠ 0;

g′(z) = - π sin πz, g ′ (1/2) ≠ 0, g ′ (-1/2) ≠ 0; h (1/2) = 0,
h (-1/2) = 0, h (i) = 0, h (-i) = 0; h ′ (z) = $16z^3 + 6z$;
h ′ (1/2) ≠ 0, h ′ (-1/2) ≠ 0, h ′ (i) ≠ 0, h ′ (-i) ≠ 0.

При z = ½ и z = - ½ порядок ненулевой производной для функции, стоящей в знаменателе, равен порядку ненулевой производной для функции, стоящей в числителе. Таким образом, можно сделать вывод, что z = ½ и z = - ½ являются устранимыми особыми точками. Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при z = i и z = -i выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки z = i и z = -i являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это 1 – 0 = 1. Точки z = ½ и z = - ½ являются устранимыми особыми точками. Точки z = i и z = -i являются полюсами 1-го порядка.

<u>*Вычеты*</u>

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $\omega = f(z)$. *Вычетом функции* f (z) в *точке* z_0 называется число, обозначаемое символом $res_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$res_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \qquad (42.3)$$

(другие обозначения: $resf(z_0), res\left[f(z), z_0\right]$). Замкнутый контур интегрирования γ лежит в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержит внутри других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0. Сопоставление формул (42.1) и (42.3) показывает, что вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$res_{z_0} f(z) = C_{-1}\,. \qquad (42.4)$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю. Вычет функции $f(z)$ в полюсе n-го порядка вычисляется по формуле

$$res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n];$$

при n=1

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)].$$

Если функция $\omega = f(z)$ в окрестности точки z_0 представляется как частное двух аналитических функций, $f(z) = \lambda(z)/\mu(z)$, причем $\lambda(z_0)\neq 0$, $\mu(z_0)$, $\mu'(z_0)\neq 0$ (в этом случае z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$), то

$$res_{z_0} f(z) = \lambda(z_0)/\mu'(z_0).$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $\omega = f(z)$, то вычет вычисляется по формуле (42.4).

Основная теорема Коши о вычетах.

Если функция $\omega = f(z)$ является аналитической на границе Г области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \mathrm{K}\ , z_n,$, то

$$\int_U f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z). \qquad (42.5)$$

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz$$

Решение: Найдем особые точки функции f(z):

$z = 0$

$z = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

В рассматриваемую область попадают точки $z = 0, z = \frac{\pi}{2}, z = -\frac{\pi}{2}$. Точка $z_1 = 0$ является простым нулем.

Найдем вычет в этой точке:

$$res_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{f(z)}{z-0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z^2\cos z} = 1$$

Точка $z_2 = \frac{\pi}{2}$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$res_{z_2} f(z) = \lim_{z\to \pi/2}\left[f(z)\left(z-\pi/2\right)\right] = \lim_{z\to\pi/2}\frac{\left(z-\pi/2\right)\sin^2 z}{z\cos z} = \left\{\begin{matrix} t = z - \pi/2 \\ z = t + \pi/2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\frac{\pi}{2})\sin t} = \lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\frac{\pi}{2})t} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 t}{-(t+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

Точка $z_3 = -\frac{\pi}{2}$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$res_{z_3} f(z)=\lim_{z\to-\pi/2}\left[f(z)\left(z+\pi/2\right)\right]=\lim_{z\to-\pi/2}\frac{\left(z+\pi/2\right)\sin^2 z}{z\cos z}=$$

$$=\begin{Bmatrix} t=z+\pi/2 \\ z=t-\pi/2 \end{Bmatrix}=\lim_{t\to0}\frac{t\sin^2(t-\frac{\pi}{2})}{(t-\frac{\pi}{2})\cos(t-\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to0}\frac{t\cos^2 t}{(t-\frac{\pi}{2})\sin t}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{t\cos^2 t}{(t-\frac{\pi}{2})t}=\lim_{z\to0}\frac{\cos^2 t}{(t-\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz=2\pi i\sum_{i=1} res_z f(z)=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)=2i\left(\pi-4\right)$$

Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций

Пусть *R (x)* — рациональная функция, $R(x)=P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ - многочлены степеней k и l соответственно. Если *R (x)* непрерывна на всей действительной оси и $l\geq k+2$, т.е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_m res_{z_m} R(z),$ здесь сумма вычетов функции $R(z)=P_k(z)/Q_l(z)$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости Im z>0.

Вычисление несобственных интегралов специального вида

Пусть *R (x)* — рациональная функция, $R(x)=P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ - многочлены степеней k и l соответственно. Если *R (x)* непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k+1$ (т. е. R(x) – правильная рациональная дробь), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \sum_m res_{z_m} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left\{2\pi i \sum_m res_{z_m} R(z)e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0.$$

где сумма вычетов функции $R(z)e^{i\lambda z}$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости Im z>0.

Пример 4 . Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$

Решение: Известно, что если функция рациональная, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_m \underset{z_m}{res} R(z)$. Сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$

Преобразуем исходный материал:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2+2}{(z^2+3)(z^2+4)}dz$$

Особые точки:

$z = 2i$ $(\mathrm{Im}\, z > 0)$; $z = -2i$ $(\mathrm{Im}\, z < 0)$;

$z = i\sqrt{3}$ $(\mathrm{Im}\, z > 0)$; $z = -i\sqrt{3}$ $(\mathrm{Im}\, z < 0)$;

Точки $z = 2i$ и $z = i\sqrt{3}$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\underset{z=2i}{res} f(z) = \lim_{z\to 2i}[f(z)(z-2i)] = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+2}{(z+2i)(z^2+3)} = -\frac{i}{2}$$

$$\underset{z=i\sqrt{3}}{res} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}}[f(z)(z-i\sqrt{3})] = \lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{x^2+5}{(z+i\sqrt{3})(z^2+4)} = \frac{i}{2\sqrt{3}}$$ и

используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = 2\pi i\left(\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{i}{2}\right) = 2\pi i\frac{i(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1).$$

Пример 5. Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$$

Решение: Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_0}{rez}R(z)e^{i\lambda z}\}, \lambda > 0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы. Найдем $z_m:(x^2+1)^2=0 \Rightarrow z_{1.2}=\pm i$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$. Из этого следует: $z_m=\{i\}$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет для каждой из функций:

$$\underset{z=i}{rez}R(z)e^{i\lambda z} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{2iz}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}e^{2iz}\right] =$$

$$= \frac{-4+2iz}{(z+1)^3}e^{2iz} = -\frac{3}{4}ie^{-2}$$

$$\underset{z=i}{rez}R(z)e^{i\lambda z} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{iz}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}e^{iz}\right] =$$

$$= \frac{-3+iz}{(z+1)^3}e^{iz} = -\frac{1}{2}ie^{-1}$$

Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\{2\pi i\sum_m \underset{z_m}{rez}R(z)e^{i\lambda z}\}=\pi(\frac{3}{2}e^{-2}-e^{-1})$$

Вычисление определенных интегралов специального вида

Пусть R —рациональная функция *cos t* и *sin t*, непрерывная внутри промежутка интегрирования. Полагаем $z=e^{it}$, тогда

$$\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad dt=\frac{dz}{iz};$$

имеем

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz. \qquad (42.6)$$

где путь интегрирования—окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Контурный интеграл в правой части равенства (42.6) вычисляется по формуле (42.5), где сумма вычетов функции *F(z)* берется по всем особым точкам, лежащим в области $|z|<1$.

Пример 6 . Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$$

Решение: Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z=e^{n};\ \cos t=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z});\sin t=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z});dt=\frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и получим:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{2}}{i}(z-\frac{1}{z})+3}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z^2-1)+3iz}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})(z+i/\sqrt{2})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки: $z=-i\sqrt{2};z=-i/\sqrt{2};$ Точка $-i\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования. Точка $-i/\sqrt{2}$ является простыми полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\underset{z=-i/\sqrt{2}}{res} f(z)=\lim_{z\to -i/\sqrt{2}}[f(z)(z+i/\sqrt{2})]=\lim_{z=-i/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2(z+i\sqrt{2})}}=$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}(-i/\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=-i$. По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})(z+i/\sqrt{2})}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_0}{res}f(z)=2\pi i(-1)=2\pi$$

43. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа и его свойства

Функцией-оригиналом называется функция *f(t)* действительного аргумента *t*, удовлетворяющая условиям: 1**)** *f(t)* интегрируема на любом конечном интервале оси *t;* 2) для всех отрицательных *t* *f(t)=0;* 3) *f(t)* возрастает не быстрое показательной функции, т. е. существуют такие постоянные M и σ_0 ,что для всех t $|f(t)|<Me^{\sigma_0 t}$. *Изображением функции f(t) по Лапласу* называется функция *F(p)* комплексного переменного

$p=\sigma+i\tau$, определяемая равенством $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$; обозначение: *f(t)* $\div$ *F(p).* Для любой функции-оригинала *f(t)* изображение *F(p)* определено в полуплоскости $\mathbf{Re}\, p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией выполняются свойства:

1^0. Линейность: для любых комплексных постоянных C_1 *и* C_2

$$C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)\div_1 F_1(p)+C_2F_2(p).$$

2^0. Формула подобия: для любого постоянного ω>0

$$f(\omega t)\div\frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3^0. Дифференцирование оригинала: *если функции*

$f(t),\ f'(t),\dots,\ f^{(n)}(t)$ *являются функциями-оригиналами, то*

$$f'(t)\div pF(p)-f(0),$$

$$f''(t)\div p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

....

$$f^{(n)}(t)\div p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Величина

$f^{(k)}(0),\ k=0,1,\dots,n-1,$ понимается как $\lim\limits_{t\to+0}f^{(k)}(t)$.

4^0. Дифференцирование изображения: $F'(p)\div -tf(t)$.

5^0. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\div\frac{F(p)}{p}$.

6^0. Интегрирование изображения: *если* $\frac{f(t)}{t}$ *является функцией-оригиналом, то*

$$\int_p^\infty F(p)dp \div \frac{f(t)}{t}.$$

7^0. Формула смещения: *для любого комплексного* λ

$$f(t)e^{-\lambda t} \div F(p+\lambda).$$

8^0. Формула запаздывания: $f(t-\tau) \div e^{-p\tau}F(p),\ \tau > 0.$

9^0. Формула умножения изображений:

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл называется сверткой функций $f_1(t)\ u\ f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Отыскание оригинала по изображению.

Для нахождения оригинала f(t) по известному изображению F(p) наиболее широко применяются следующие приемы:

1) если *F(p)* есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства $1^0 - 9^0$ преобразования Лапласа; используют *формулу разложения,* согласно которой при некоторых достаточно общих условиях оригиналом

2) для *F(p)* служит функция $f(t) = \sum_k res\left[F(p)\, e^{pt}, p_k\right]$, где

сумма вычетов берется по особым точкам p_k функции *F(p).*

<u>Формулы соответствия</u>

Широко применяются следующие табличные соотношения:

$1 \div 1/p; e^{at} \div 1/(p-a); \sin\omega t \div \omega/(p^2+\omega^2); \cos\omega t \div p/(p^2+\omega^2);$

$sh\,\omega t \div \omega/(p^2-\omega^2); ch\,\omega t \div p/(p^2-\omega^2); t^n \div n!/p^{n+1}.$

Левые части операционных соотношений предполагаются помноженными на функцию $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ которая для сокращения записи, как правило, опускается.

Изображение кусочно-линейной функции

Примерный вид графика кусочно-линейной (полигональной) функции представлен на рис.1. Введём следующие обозначения: τ_k – точки разрыва функций *f(t)* или $f'(t)$; $\alpha_k = a_k - b_k$ – скачки функций в узлах «стыка»; $\beta_k = tg\gamma_k - tg\delta_k$ – скачки производной $f'(t)$ в узлах «стыка».

Изображение полигональной функции имеет вид

$$F(p)=\sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right).$$

Пример 1 . Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной графически (рис. 43.1).

Решение: Найдем аналитическое выражение для $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ A, & t_1<t<t_2\\ B, & t_2<t<t_3\\ C, & t>t_3\end{cases} \quad \text{или} \quad f(t)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ A\eta(t-t_1), & t_1<t<t_2\\ B\eta(t-t_2), & t_2<t<t_3\\ C\eta(t-t_3), & t>t_3\end{cases}.$$

Для всех $t\ge 0$ получим

$$f(t)=A\eta(t-t_1)-A\eta(t-t_2)+B\eta(t-t_2)-B\eta(t-t_3)+C\eta(t-t_3)=$$
$$=A\eta(t-t_1)-(A-B)\eta(t-t_2)+(C-B)\eta(t-t_3).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, находим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{A}{p}e^{-t_1p}-\frac{A-B}{p}e^{-t_2p}+\frac{C-B}{p}e^{-t_3p}.$$

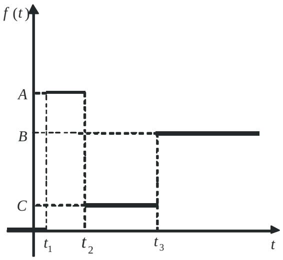


Рис. 43.1

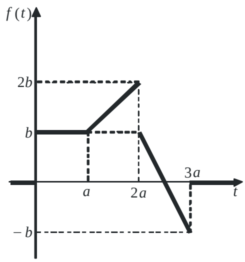


Рис. 43.2

$$F(p) = \frac{A}{p}e^{-t_1 p} - \frac{A-B}{p}e^{-t_2 p} + \frac{C-B}{p}e^{-t_3 p}.$$

<u>Пример 2 .</u> Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной графически (рис. 43.2).

<u>Решение:</u> Найдем аналитическое выражение для

$$f(t) = \begin{cases} b\cdot\eta(t), & 0 < t < a \\ \dfrac{b}{a}t\cdot\eta(t-a), & a < t < 2a \\ -2\dfrac{b}{a}(t-2{,}5a)\cdot\eta(t-2a), & 2a < t < 3a \\ 0, & t > 3a \end{cases}$$

Для всех $t \ge 0$ получим

$$f(t) = b\eta(t) - b\eta(t-a) + \frac{b}{a}t\eta(t-a) - \frac{b}{a}t\eta(t-2a) -$$
$$-2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)\eta(t-2a) + 2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)\eta(t-3a) =$$
$$= b\eta(t) + \frac{b}{a}(t-a)\eta(t-a) - \frac{b}{a}(3t-5a)\eta(t-2a) +$$
$$+2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)\eta(t-3a) = b\eta(t) + \frac{b}{a}(t-a)\eta(t-a) -$$
$$-3\frac{b}{a}(t-2a)\eta(t-2a) - b\eta(t-2a) +$$
$$+2\frac{b}{a}(t-3a)\eta(t-3a) + b\eta(t-3a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания , находим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\frac{3b}{ap^2}e^{-2ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{2b}{ap^2}e^{-3ap}+\frac{b}{p}e^{-3ap}=$$

$$=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\left(1+\frac{3}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-2ap}+\left(1+\frac{2}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-3ap}.$$

$$F(p)=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\left(1+\frac{3}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-2ap}+\left(1+\frac{2}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-3ap}.$$

Пример 3. Найти изображение $F(p)$ периодической функции $f(t)$, заданной графически (рис. 43.3).

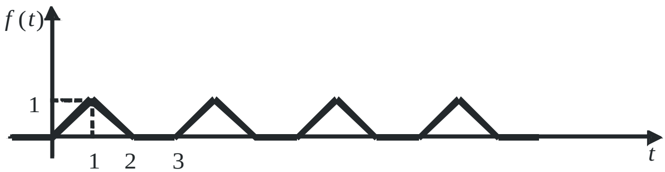


Рис. 43.3

Решение: Из рисунка видно, что период функции $T=3$. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$ на отрезке $[0,T]$:

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 2-t, & 1<t<2 \\ 0, & 2<t<3 \end{cases}$$

Для нахождения изображения периодической функции воспользуемся формулой

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pT}f(t)dt.$$

Для данной функции получим

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2(2-t)e^{-pt}dt+\int_2^3 0\cdot e^{-pt}dt\right].$$

Третий интеграл равен нулю, а первые два интегрируем по частям и получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{e^{-pt}}{p}dt--\frac{(2-t)e^{-pt}}{p}\Bigg|_1^2-\int_1^2\frac{e^{-pt}}{p}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-3p}}\cdot\frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}=\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}+e^{-2p}\right)}.$$

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\cdot\frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}=\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}+e^{-2p}\right)}.$$

44. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение линейных дифференциальных уравнений операционным методом предполагает три этапа: 1) переход от исходных функций к их изображениям по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображения искомой функции; 2) решение полученного алгебраического уравнения; 3) получение искомого решения по его изображению.

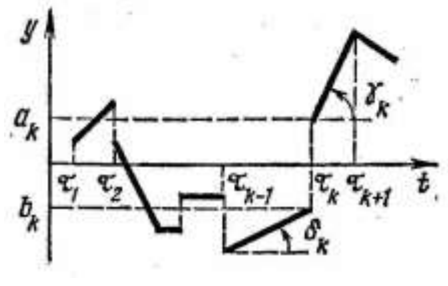


Рис. 44.1

Решим Задачу Коши для дифференциального уравнения $x' - x = 1$ при начальном условии x(0)=1. Операционный метод решения такой задачи состоит в том, что искомую функцию и правую часть дифференциального уравнения считаем оригиналами и переходим от уравнения, связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения. Воспользуемся формулой дифференцирования оригинала $x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$. Применяя свойство линейности, перейдём в уравнении $x' - x = 1$ от оригинала к изображениям: $[pX(p) - 1] - X(p) = 1/p$. Решим полученное уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения *X(p)*: $X(p) = 2/(p-1) - 1/p$. Осталось по неизвестному изображению *X(p)* найти соответствующий ему оригинал *x(t)*. Используя свойство линейности преобразования Лапласа и табличные операционные соотношения, получаем $x(t) = 2e^t - 1$. Это и есть искомое решение задачи Коши. Аналогично решаются системы линейных дифференциальных уравнений.

Формула Дюамеля

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\{x(t)\} = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

(Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями.). Допустим, что известно решение уравнения $L\{x(t)\} = 1$ (с той же левой частью и правой частью, равной единице) при нулевых условиях. Обозначим его $x_1(t)$. Тогда решение *x(t)* задачи Коши можно выразить через $x_1(t)$ *и* $f(t)$ с помощью одной из формул:

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad x(t)=\int_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau, \quad x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

Каждое из этих выражений называют *формулой (или интегралом) Дюамеля.* Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения *F(p)* правой части *f(t)* , а также при необходимости многократного решения задачи для различных функций *f(t)*

Пример 1 . На материальную точку массы m действует сила сопротивления R = kv, пропорциональная скорости. Какое расстояние пройдёт точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0 ? k = m, v_0 = 7 м/с.

Решение: Исходя из второго закона Ньютона: am= -kv, $\ddot{x}m+kx=0$. Начальные условия: $x(0)=v_0=7$, x (0) = 0. Подставим значения k: $\ddot{x}m+mx=0$. Сократим все выражения на m: $\ddot{x}+x=0$. Перейдём к изображениям функций:

p ^{2} X (p) – px (0) – x (0) –pX(p) – x (0) = 0,

p (p+1)X (p) – 7 = 0, p (p+1)X (p) = 7

X (p) = $\dfrac{7}{p(p+1)}=\dfrac{7}{p}-\dfrac{7}{p+1}$

По такому изображению легко найти оригинал:

x (t)=7 – 7 e $^{-t}$.

Пример 2 . Найти решение задачи Коши

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}, y(0)=0; y'(0)=0$$

Решение: Вначале решим вспомогательную задачу

$$y''+4y'+4y=1;$$
$$y_1(0)=0;\ y'_1(0)=0$$

Если $y_1(t)$ соответствует изображение $Y_1(P)$, то переходят от оригиналов функций к их изображениям, получим

$$(p^2+4p+4)\times Y_1(p)=\frac{1}{p};Y_1(p)=\frac{1}{p(p^2+4p+4)}=\frac{1}{p(p+2)^2}$$

Разложим дробь на простые дроби, получим

$$Y_1(p)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{p+2}$$

По таблице оригиналов .

Найдем $y_1(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\times e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

Используя формулу Дюамеля, получим искомое решение

$$y(t)=\int_0^t\frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\times e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t})'_t d\tau=\frac{1}{4}e^{-2t}(2t-\ln(1+2t))$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрены лекции по разделам «Математика». Издание рекомендуется вместе со стандартными задачами по высшей математике для работы на практических занятиях, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных работ по указанным темам.

Авторы считают, что пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса по курсу «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я.С. Элементы алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Дрофа, 2006. – 192 с.
2. Беклемешев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. – М.: Наука, 2005. – 320 с.
3. Головина, Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – М.: Наука, 1979. – 390 с.
4. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М.: Наука, 2007. – 333 с.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Ч. 1. – М.: «Оникс 21 век», 2007. – 368 с.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Ч. 2. – М.: «Оникс 21 век», 2007. – 416 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. – М.: Физматлит. 2004. – 462 с.
8. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с.
9. Шипачев, В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
10. Катрахова, А.А. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие / А.А. Катрахова, Г.Ф. Федотенко. – Воронеж. ВГТУ, 2008. – 161с.
11. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов.– Т.1.– М.:Символ плюс, 2007.–416 с.
12. Катрахова, А. А. Дифференциальные уравнения и их приложения: учебное пособие / А.А. Катрахова, Г.Ф. Федотенко. – Воронеж. ВГТУ, 2009 . –146 с.
13. Краснов, М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.А. Краснов, А.И. Киселев , Г.И. Макаренко - М.: 1981. – 204 с.

14. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление /Н. С. Пискунов.–Т.2.–М.:Символ плюс, 2007.–544 с.
15. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курса высшей математики. Типовые расчеты / В.Ф. Чудесенко. – СПб.: Лань, 2007. –126 с.
16. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 1. – СПб.: Лань, 2008. – 440 с.
17. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 2. – СПб.: Лань, 2008. – 464 с.
18. Будак, Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
19. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис- пресс, 2004. –592 с.
20. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – М. : Ком. Книга, 2006. – 272 с.
21. Бугров, Я.С. Высшая математика. Задачник / Я. С. Бугров. – С. М. Никольский. – М.: Дрофа, 2006. – 253 с.
22. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров. – С. М. Никольский. – М.: Дрофа, 2006. – 432 с.
23. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексной переменной / Я. С. Бугров. – С. М. Никольский. – М.: Дрофа, 2006. – 464 с.
24. Катрахова, А. А. Лекции по теории комплексного переменного и операционному исчислению: учебное пособие / А.А. Катрахова, М.П. Семенов. – Воронеж. ВГТУ, 2004 . – 120 с.
25. Катрахова, А. А. Ряды Фурье и их применение в решении задач математической физики и обработки информации: учебное пособие / А.А. Катрахова, Е.М. Васильев, В.С. Купцов, А.В. Купцов. – Воронеж. ВГТУ, 2010 . – 216 с.
26. Катрахова, А. А. Кратные интегралы. Векторный анализ: учебное пособие / А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов . – Воронеж. ВГТУ, 2006. –97 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Купцов Валерий Семенович
Купцова Екатерина Валериевна

КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

В авторской редакции

Подписано к изданию 13.05. 2015.

Объем данных 6,17 Мб

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп.,14