Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Строительно-политехнический колледж

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических занятий и выполнению самостоятельных работ
по дисциплине
ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

для студентов специальности
21.02.19 Землеустройство

Воронеж 2023

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Составители:
Ю. В. Черная
С. Л. Рыбина

Предел и непрерывность функции: методические указания по проведению практических занятий и выполнению самостоятельных работ по дисциплине **ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач** для студентов всех специальностей / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Ю. В. Черная, С. Л. Рыбина. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2023. 15 с.

Даны теоретические сведения по теории пределов и непрерывности функции, приведены примеры вычисления пределов, нахождения и классификации точек разрыва функции, предложены задания для самостоятельной работы. Могут использоваться для разработки индивидуальных проектов и для подготовки к сдаче ЕГЭ.
Предназначены для самостоятельной работы студентов по дисциплине **ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач** специальности 21.02.19 Землеустройство.

Ил. 4. Библиогр.: 2 назв.

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Рецензент – М. Ю. Глазкова, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры технологии строительных материалов, изделий и конструкций ВГТУ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов Строительно-политехнического колледжа в освоении методов нахождения пределов функций и исследования функций на непрерывность. Сообщаются основные определения и теоремы теории пределов и непрерывности функции, методы вычисления пределов функций, нахождения и классификации точек разрыва функций, приводятся примеры решения практических задач. Методические указания содержат задания для проведения практических занятий и самостоятельной работы и могут использоваться для разработки индивидуальных проектов, а также для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Общие положения

Самостоятельная работа студентов представляет собой работу, которую выполняют студенты по заданию и под руководством преподавателя без его непосредственного участия.

Целям и задачами самостоятельной работы студентов являются систематизация и закрепление знаний, умений и навыков, полученных в ходе практических занятий; формирование умений работать со специальной и справочной литературой, а также с Интернет-ресурсами; формирование самостоятельности мышления, стремления к самосовершенствованию и самореализации; формирование и развитие общих компетенций и подготовка к формированию профессиональных компетенций согласно ФГОС СПО; овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности; развитие исследовательских умений.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела

Определение 1: Функция y=f(x) имеет **предел** A при $x \to x_0$, если при приближении x к x_0 значение функции f(x) подходит как угодно близко к числу A:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Читается: предел f(x) при x стремящемся к x_0 равен A.

Определение 2: Число A называется **пределом функции** y=f(x) при x стремящемся к x_0, если для любого сколь угодно малого, наперед заданного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x таких, что $0<|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A|<\varepsilon$$

Теоремы о пределах

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существуют пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},\ g(x) \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{C} = \mathrm{C}$, где C – const
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{C}f(x) = \mathrm{C}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

Вычисление пределов

Пример 1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^2+3x-4}{x^2-1} = \frac{5\cdot 2^2+3\cdot 2-4}{2^2-1} = \frac{22}{3}$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2-2x-1} = \frac{7}{\infty} = 0$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2}{x^4+3x} = \frac{-2}{0} = \infty$$

Здесь под записью $\frac{-2}{0}$ подразумевается деление на бесконечно малое число.

При нахождении предела функции часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{\infty-\infty\}$, $\{1^\infty\}$ и др. Нахождение предела функций в таких случаях называют **раскрытием неопределенности**. Для раскрытия неопределенности прежде, чем перейти к пределу, производят преобразование выражения под знаком предела.

Пример 4.

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\frac{4^2-6\cdot4+8}{4^2-5\cdot4+4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

При x=4 имеем неопределенность. В подобных случаях, когда в числителе и знаменателе многочлены обращаются при x=a в нули, их необходимо сократить на (x-a) после предварительного разложения на множители:

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{3}$$

1. Задачи на нахождение пределов от дробно-рациональных функций при неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$
4. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3-x}{x^3-27}$
6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}$
7. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-9x+20}{x-4}$
8. $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-12x+36}{x^2-7x+6}$
9. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$
10. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

Для того, чтобы раскрыть неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to0}-\frac{5}{x^2}^{\to0}}{\frac{1}{x^2}^{\to0}+\frac{1}{x}^{\to0}+3}=\frac{2}{3}$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x}{x^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}-\frac{2x}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x}{5x^5+7}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^5}-\frac{3x}{x^5}}{\frac{5x^5}{x^5}+\frac{7}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{5+\frac{7}{x^5}}=\frac{0}{5}=0$$

2. Задачи на нахождение пределов от дробно-рациональных функций при неопределенности вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x^2}{x^2+3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+7x}{x^7+3x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-12x+36}{-3x^3-7x+6}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot 5^x}{5^x-4}$

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

Раскроем неопределенность. Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби, для чего домножим знаменатель и числитель на выражение, сопряженное знаменателю (дополняющее иррациональное выражение до полного квадрата, куба и пр.).

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}^2-1^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=\sqrt{1+0}+1=2$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x\quad -8}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{8-8}{2-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)=4+4+4=12$$

3. Задачи на нахождение пределов от иррациональных функций при неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3+2x}-3}{3-x}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$
4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
6. $\lim\limits_{x\to 27}\frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$

Первый замечательный предел

При вычислении пределов тригонометрических функций часто используется формула $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$, которая называется **первым замечательным пределом** и позволяет раскрывать неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Пример 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{-2x}=\frac{\sin 0}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=-\frac{3}{2}\cdot 1=-\frac{3}{2}$$

Пример 11.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\cos\frac{a+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a\cdot 1=\cos a$$

4. Задачи на нахождение пределов с помощью первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(x\, ctg\, x)$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x}{5x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{x^2-1}$
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется предел вида

$$\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e,\ e=2{,}71828\ldots,$$

с помощью которого можно раскрывать неопределенность вида $\{1^\infty\}$.

Пример 12.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\{1^\infty\}=$$

Приведем предел ко второму замечательному. Преобразуем степень:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{6}=e^{6}$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}=\{1^{\infty}\}$$

Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{3x}{3x+2}=\frac{3x+2-2}{3x+2}=\frac{3x+2}{3x+2}+\frac{-2}{3x+2}=1+\frac{-2}{3x+2}$$

Пусть $\frac{-2}{3x+2}=t.$

Выразим x:

$$(3x+2)t=-2$$
$$3xt+2t=-2$$
$$3xt=-2t-2$$
$$x=\frac{-2t}{3t}-\frac{2}{3t}$$
$$x=\frac{-2}{3}-\frac{2}{3t}$$

Следовательно, $t\to 0$ при $x\to\infty$

Выразим степень через t:

$$x+3=\frac{-2}{3}-\frac{2}{3t}+3=\frac{7}{3}-\frac{2}{3t}$$

Перейдем к пределу по переменной t:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{7}{3}-\frac{2}{3t}}=$$

По свойству степеней:

$$=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot(1+t)^{\frac{7}{3}}=e^{\frac{2}{3}}\cdot 1^{\frac{7}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$$

5. Задачи на нахождение пределов с помощью второго замечательного предела

1. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$
2. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x\to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{3x}}$
4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{2x}$
5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{x}$
6. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-3}\right)^{2x-5}$
7. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$
8. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-6}{5x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x}$
10. $\lim_{x\to\infty}(x(ln(x+1)-lnx))$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Непрерывность функций. Точки разрыва

Определение 1: Функция y=f(x) **непрерывна в точке x_0** тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

где $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ – **односторонние пределы** (левосторонний и правосторонний соответственно).

Пример 1.

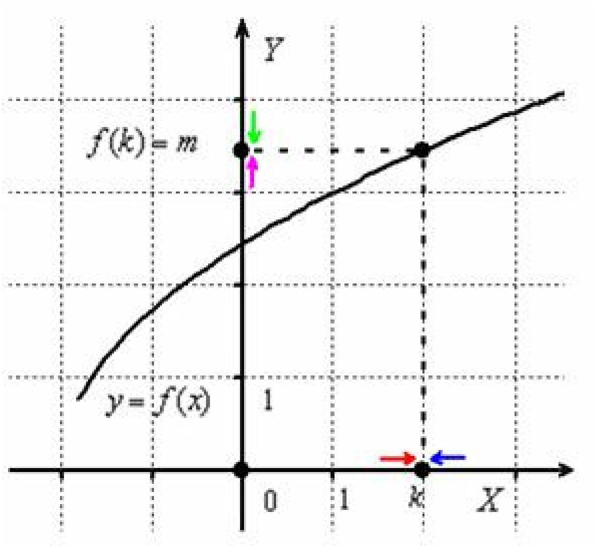

Рисунок 1 – Непрерывная функция

Рассмотрим рисунок 1. Если приближаться по оси Ox к точке k слева (x→k-0), то соответствующие значения *y* будут стремиться по оси Oy к точке m. Запишем **левосторонний предел:**

$$\lim_{x\to k-0} f(x) = m$$

При приближении к точке k справа (x→k+0), *y* также стремится к значению m. Запишем **правосторонний предел:**

$$\lim_{x\to k+0} f(x) = m$$

Значение функции в самой точке k равно m: *f(k)=m*, следовательно, выполнены все **условия непрерывности функции в точке**:

1) функция определена в точке k, то есть существует значение *f(k);*

2) односторонние пределы конечны и равны;

3) существует общий предел функции в точке k, равный значению функции в этой точке $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$.

Определение 2. Функция y=f(x) **непрерывна на интервале** (a; b), если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

Определение 3. Если функция y=f(x) в точке x_0 не является непрерывной, то она называется **разрывной** в точке x_0, а точка x_0 – **точкой разрыва** функции.

Классификация точек разрыва

Определение 4. Точкой разрыва первого рода называют такую точку x_0 *разрыва функции*, в которой существуют и конечны оба односторонних предела этой функции.

Определение 5. Если выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 – точка **устранимого разрыва**.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \frac{\sin x}{x}$ на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их.

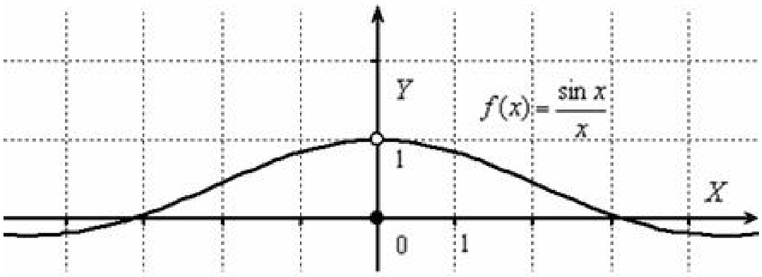

Рисунок 2 – Точка устранимого разрыва

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки x=0. Функция не определена в точке x=0, а значит, терпит разрыв в данной точке.

Односторонние пределы в этой точке существуют равны: $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$, но не равны значению функции в точке x=0. Следовательно, в точке x=0 функция претерпевает **устранимый разрыв.** «Устранимый», т.к. возможно доопределить функцию в данной точке и устранить разрыв, например, таким образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

Определение 6. Если выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 – точка **неустранимого разрыва**. В точке x_0 функция терпит разрыв первого рода **со скачком**.

Пример 3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если} \quad x\le 0 \\ 1+2x, & \text{если} \quad 0<x<2 \\ x-2, & \text{если} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Функция y=f(x) – кусочная.

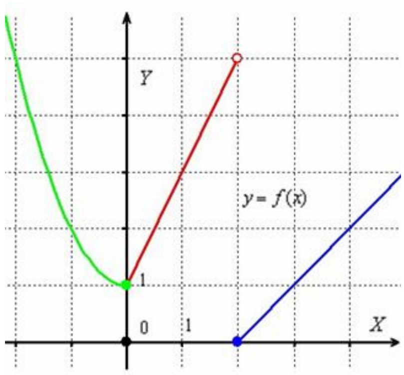

Рисунок 3 – Скачок функции

Интерес представляют точки x=0 и x=2.

Вычислив односторонние пределы при x→0, а также значение функции в данной точке, сделаем заключение, что функция непрерывна при x=0.

Исследуем точку x=2 на непрерывность:

1) f(2)=2-2=0 - функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы при x→2:

$$\lim_{x\to 2-0}(1+2x)=1+2\cdot 2=5 \qquad \lim_{x\to 2+0}(x-2)=2-2=0$$

Пределы конечны, но не равны, следовательно, x=2 – точка разрыва первого рода со скачком.

Вычислим скачок:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)-\lim_{x\to x_0-0} f(x)=0-5=-5$$

Определение 7. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции y=f(x), если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 не существует или бесконечен.

Пример 4.

Исследовать функцию $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их.

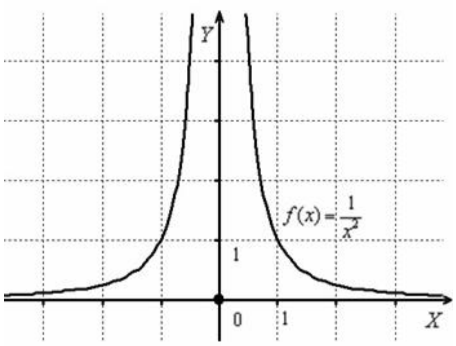

Рисунок 4 - Точка разрыва второго рода

Функция не определена в точке x=0, поскольку знаменатель обращается в ноль, следовательно, функция терпит разрыв в данной точке. Классифицируем характер разрыва. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(+0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ терпит разрыв второго рода в точке x=0.

Задачи

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их

1. $y=\frac{6}{x-3}$
2. $y=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 3, & x=2\end{cases}$
3. $y=\frac{4}{(x-2)^2}$
4. $y=\frac{1}{x-x^3}$
5. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
6. $y=\begin{cases}-x, & x\leq -1\\ \frac{2}{x+1}, & x>-1\end{cases}$
7. $y=\frac{4}{x^2-2x+1}$
8. $y=\begin{cases}3x, & x\leq 0\\ 2, & 0<x\leq 2\\ x, & x>2\end{cases}$
9. $y=\frac{x^3-8}{2x^2}$
10. $y=\begin{cases}3+x, & x<0\\ x^2, & 0\leq x\leq 4\\ 4x, & x>4\end{cases}$
11. $y=\frac{x^2-25}{x-5}$
12. $y=\sqrt[x]{3}$
13. $y=\frac{x-2}{|x-2|}$
14. $y=5^{\frac{1}{x-2}}$
15. $y=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 5, & x=1\end{cases}$
16. $y=e^{\frac{1}{x-3}}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колпачев, Виктор Николаевич. Учебные занятия по высшей математике в активных и интерактивных формах [Текст]: учебно-методическое пособие / Воронеж. гос. архитектур.-строит. ун-т. - Воронеж : [б. и.], 2015 (Воронеж : Отдел оперативной полиграфии изд-ва учеб. лит. и учеб.-метод. пособий Воронежского ГАСУ, 2015). - 127 с.: ил. - ISBN 978-5-89040-556-2 : 53-61.

2. Дорофеева, Алла Владимировна. Математика. Сборник задач: Учебно-практическое пособие для СПО / Дорофеева А. В. - 2-е изд. - Москва: Издательство Юрайт, 2022. - 176. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-08796-3 : 299.00.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение………………………………………………………………………… 3

Предел функции……………………………………………………………... 4

Определение предела………………………………………………………... 4

Теоремы о пределах……………………………………………………... 4

Первый замечательный предел……………………………………………... 7

Второй замечательный предел………………………………………….. 7

Непрерывность функций. Точки разрыва……………………………… 9

Классификация точек разрыва……………………………………….. 10

Библиографический список……………………………………………….. 13

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических занятий и выполнению самостоятельных работ
ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

для студентов специальности
21.02.19 Землеустройство

Составители:
Черная Юлия Викторовна
Рыбина Светлана Леонидовна

Подписано к изданию
Уч.-изд. л. 0,8.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14