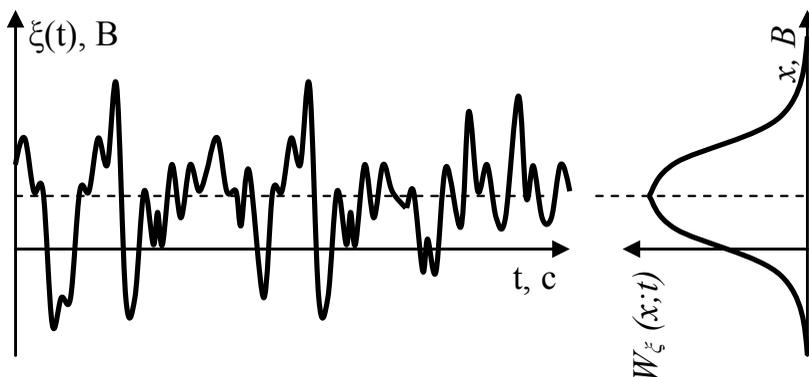


А.Б. Токарев

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 1

Учебное пособие



Воронеж 2016

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет»

А.Б. Токарев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСЕЙ  
И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 1

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2016

УДК 621.391

Токарев А.Б. Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике. Часть 1: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (1,5 Мб) / А.Б. Токарев. – Воронеж, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM диск; мышь. – Загл. с экрана.

Учебное пособие предназначено для освоения студентами дисциплины “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”. Оно определяет математический аппарат, применяемый при описании случайных событий и случайных величин, свойств систем случайных величин, а также основы математической статистики.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 11.03.01 “Радиотехника” (профиль «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов»).

Табл. 7. Ил. 37. Библиогр.: 11 назв.

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных систем и технологий Воронежского института МВД РФ (начальник д-р техн. наук, проф. О.И. Бокова); д-р техн. наук, проф. Ю.Г. Пастернак

© Токарев А.Б., 2016

© Оформление. ФГБОУ ВО  
«Воронежский государственный  
технический университет», 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Научный подход к описанию явлений окружающего нас мира предполагает, в частности, необходимость установления количественных закономерностей между разными сторонами анализируемого явления, а также возможность предсказания направления развития наблюдаемых явлений при продолжении или повторении наблюдений. Во многих научно-технических областях подобные закономерности и методы предсказания опираются на принцип детерминизма. Детерминистический подход предполагает, что при воздействии любого конкретного сигнала на систему с известными свойствами, реакция системы может быть рассчитана со сколь угодно высокой точностью для произвольного по длительности интервала наблюдения.

Явными преимуществами детерминистического подхода являются относительная простота математического аппарата, четкость и однозначность получаемых формулировок и выводов. Благодаря этому, он приобрел широчайшее распространение в самых разных областях науки и техники. Однако, ситуации, когда и исследуемая система, и воздействия на неё точно известны, встречаются на практике далеко не всегда. Наличие же в исследуемом явлении ряда факторов, не поддающихся контролю, становится непреодолимым препятствием для предсказания результатов. Например, при многократном повторении одного и того же опыта в сходных условиях его результат от опыта к опыту может случайно изменяться.

В условиях влияния на результат опыта многих, принципиально неконтролируемых факторов, возможность предсказания результатов отдельных экспериментов исчезает. Вместе с тем, на практике часто наблюдается закономерность, называемая статистической устойчивостью. Она проявляется в том, что усредненные показатели, характеризующие результаты больших серий опытов со случайным исходом, не являются случайными и могут быть предсказаны с высокой точностью.

Исследованием подобных показателей и занимается теория вероятностей.

Итак, вероятностный метод описания явлений заключается в том, что при наличии неконтролируемых факторов поведение исследуемых систем (явлений) в отдельных опытах считается принципиально непредсказуемым. Анализ подобных систем направлен на наиболее достоверное предсказание статистических закономерностей, проявляющихся при многократных испытаниях системы (наблюдении явления). Целью синтеза является разработка таких систем (или алгоритмов обработки данных), которые при многократном применении в среднем обеспечивают наилучшие по выбранному критерию результаты обработки.

Основы теории вероятностей, с которых начинается освоение данного курса, были заложены очень давно. Отдельные задачи, касающиеся подсчета шансов в азартных играх, рассматривались ещё в XV-XVI веках итальянскими математиками (Кардано, Пачоли, Тарталья и др.). Первые общие методы решения таких задач были, по-видимому, даны в знаменитой переписке между Паскалем (1623-1662) и Ферма (1601-1665), начавшейся в 1654 г., и в первой книге по теории вероятностей «О расчетах в азартной игре», опубликованной Гюйгенсом в 1657 г.

Истинная теория вероятностей начинается с работы Я. Бернулли «Искусство предположения», опубликованной в 1713 г., в которой была доказана первая предельная теорема – закон больших чисел. В 1812 г. Лаплас в работе «Аналитическая теория вероятностей» изложил идеи своих предшественников и результаты собственных вероятностных исследований. К этому же этапу можно отнести работы Пуассона (1781-1840) и Гаусса (1777-1855), которому принадлежит заслуга создания теории ошибок и, в частности, обоснование одного из её основных принципов – метода наименьших квадратов.

Следующий важный период в развитии теории вероятностей связан с именами П.Л. Чебышева (1821-1894), А.А. Маркова

(1856-1922), А.М. Ляпунова (1857-1918). Число публикаций Чебышева по теории вероятностей невелико – их всего четыре, но их роль в создании классической русской школы теории вероятностей крайне велика. Он впервые выдвинул требования строгого доказательства предельных теорем, стремился получить точные оценки отклонений от предельных закономерностей в виде неравенств, безусловно правильных при любом (а не только бесконечно большом) числе испытаний. Марковым были исследованы разнообразные свойства зависимых случайных величин. Центральная предельная теорема, многократно исследованная многими математиками, была с использованием характеристических функций при весьма общих условиях доказана А.М. Ляпуновым.

В 1933 г. вышла книга А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», в которой была предложена аксиоматика, получившая всеобщее признание и позволившая не только охватить все классические разделы теории вероятностей, но и дать строгую основу для развития её новых разделов. В 20-30 годы XX века приходится бурное развитие теории случайных процессов, занимающейся изучением семейств случайных величин, эволюционирующих во времени, а также зарождение и развитие математической статистики.

Итак, теория вероятностей и случайных процессов является разделом математики с давней и прочной историей. Безусловно, её развитие активно продолжается и по сей день, однако, как и для других разделов математики, уже выявленные закономерности остаются при этом незыблемыми. С учетом этого, для освоения применения вероятностного подхода к радиотехнике можно успешно использовать как эту и другие современные книги, так и вышедшие много лет назад издания иных авторов. Подобные книги, часть из которых приведена в списке литературы, ещё долго будут оставаться полезными радиоинженерам.

# 1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

## 1.1. Основные характеристики случайных событий

В научных исследованиях, в технике и производстве часто не удается предсказать результаты экспериментов, испытаний, измерений или некоторых операций, многократно повторяемых при одинаковых условиях. Эксперименты, при повторении которых их результаты могут непредсказуемо изменяться, называют **опытами со случайным исходом**, а непредсказуемые до проведения подобного опыта их результаты – **случайными событиями**. Теория вероятностей изучает закономерности случайных событий и способы их количественного описания.

Пусть событие  $A$  – один из возможных результатов некоторого опыта со случайным исходом. Если при  $n$  повторениях этого опыта событие  $A$  наблюдалось  $n_A$  раз, то величину

$$P^* \{A\} = \frac{n_A}{n} \quad (1.1)$$

называют **частотой** события  $A$  в проведенной серии опытов. Непредсказуемость результата каждого из проводимых опытов в отдельности означает, что число  $n_A$  случаев регистрации события  $A$  при повторении проведенной серии опытов может измениться. Таким образом, частота события  $P^* \{A\}$  является величиной случайной и для коротких серий опытов может изменяться в больших пределах. Если же число проводимых опытов велико, то обнаруживается статистическая закономерность – частота события становится устойчивой. В разных сериях опытов она принимает почти совпадающие значения и, как следствие, может служить количественной мерой возможности (статистической закономерности) появления события  $A$ .

Таблица 1

Результаты серии опытов по подбрасыванию монеты

Кол-во бросков	1	2	3	4	5	6	7	8
Выпадение “решки”	+	–	–	–	+	–	+	+
Частота наблюдения “решки”	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$

**Вероятность**  $P\{A\}$  события  $A$  – это константа, к которой стремится частота наблюдения этого события при бесконечном увеличении числа проводимых опытов

$$P^*\{A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\{A\} \quad (1.2)$$

Число случаев появления события  $A$  в серии опытов не может быть отрицательным или превосходить число опытов  $n$ , поэтому как частоты, так и вероятности любых событий обязаны удовлетворять граничным условиям

$$0 \leq P\{A\} \leq 1 \quad (1.3)$$

Событие, вероятность которого равна единице, называется **достоверным**. Событие, характеризующее нулевой вероятностью, называется **невозможным**.

Следует иметь в виду, что понятия достоверного и невозможного событий в теории вероятностей несколько шире общепринятых. Хотя событие, имеющее вероятность, равную единице, происходит практически всегда, но в принципе не исключено, что при каком-то частном испытании оно не наступит. Аналогично не исключается принципиальная возможность реализации события с нулевой вероятностью. Например, вероятность встретить резистор, сопротивление которого (скажем, в килоомах) строго равняется числу  $\pi$ , равна нулю, но, тем не менее, подобное событие в принципе возможно.

На практике польза от знания вероятности событий заключается в следующем: хотя исход конкретного опыта и не может быть предсказан до его проведения, однако можно рассчитывать на то, что в любой достаточно продолжительной серии испытаний частота наблюдения события будет мало отличаться от его вероятности. Чем больше вероятность некоторого события, тем чаще в серии испытаний оно будет наблюдаться. Это позволяет выбирать и осознанно применять на практике те варианты технических решений, которые позволяют (пусть и без полной гарантии) достигать поставленных целей наиболее надежно.

## 1.2. Алгебраический метод расчета вероятности событий

Если условия проводимого опыта налагают на наблюдаемые в опыте события одинаковые ограничения, и, следовательно, нет причин, по которым одно из них могло бы появляться чаще, чем какие-либо другие события из рассматриваемого множества, то подобные события (исходы) называют **равновозможными**.

*Примеры равновозможных событий:*

- 1) выпадение после броска симметричного игрального кубика на его верхней грани цифр “1”, “2”, “3”, “4”, “5” или “6”;
- 2) наблюдение в произвольно выбираемый момент времени значения положительной или отрицательной полярности на клеммах включенного генератора гармонических сигналов.

Представим, что множество  $\Omega$  всех исходов, которыми может завершиться проводимый опыт, ограничено и включает  $m$  взаимоисключающих равновозможных исходов. И пусть анализируемое событие  $A$  совершается при наступлении исходов из некоторого подмножества  $\Omega_A$ , включающего  $m_A$  исходов. Чем больше количество благоприятных для события  $A$  исходов  $m_A$  по отношению к общему числу имеющихся исходов  $m$ , тем, очевидно, выше объективная возможность наблюдения события  $A$  в продолжительной серии опытов. Это утверждение и составляет основу алгебраического метода расчета вероятности.

Вероятность любого события  $A$ , наблюдаемого при проведении опыта, характеризуемого  $m$  взаимоисключающими равновозможными исходами, может быть рассчитана как

$$P\{A\} = \frac{m_A}{m}, \quad (1.4)$$

где  $m_A$  – число исходов, благоприятных для события  $A$ .

*Пример 1:* После подбрасывания симметричного игрального кубика вероятность выпадения на верхней грани числа, нацело делящегося на 3, составляет  $P\{A\} = 2/6 = 1/3$ , т.к. из общего числа  $m = 6$  исходов, благоприятными для наступления исследуемого события являются  $m_A = 2$  случая, когда на верхней грани кубика появляются “3” или “6”.

*Пример 2:* Если из набора костяшек для домино случайно выбирается одна, то вероятность того, что сумма значений на обеих половинках выбранной кости не превзойдет 2, составляет  $P\{A\} = 4/28 = 1/7$ , т.к. из общего числа  $m = 28$  костей, подходящими для наступления исследуемого события являются  $m_A = 4$  случая, включающие элементы “0-0”, “0-1”, “0-2” и “1-1”.

В более сложных случаях для расчета числа различных исходов, соответствующих проводимому опыту, могут оказаться полезными следующие правила:

**Правило суммы.** Если объект  $A$  может быть выбран  $m_A$  способами, а объект  $B$  – другими  $m_B$  способами, то выбор “либо  $A$ , либо  $B$ ” можно осуществить  $m_A + m_B$  способами.

**Правило произведения.** Если объект  $A$  может быть выбран  $m_A$  способами и после каждого из таких выборов объект  $B$  в свою очередь может быть выбран  $m_B$  способами, то выбор “ $A$  и  $B$ ” в указанном порядке можно осуществить  $m_A \cdot m_B$  способами.

Пример 3: Из набора костяшек для домино наугад выбираются две кости. Какова вероятность того, что выбранные кости можно будет приложить друг к другу (т.е. они будут содержать совпадающие по очкам половинки)?

Воспользуемся для расчета общего числа исходов правилом произведения, подсчитывая упорядоченные пары элементов. Первой можно выбрать любую из 28 костяшек, тогда для выбора второй кости остается 27 вариантов, а общее число исходов будет равно  $m = 28 \cdot 27 = 756$ .

При подсчете числа благоприятных исходов необходимо отдельно рассмотреть 7 случаев, когда вытащенная первой кость будет “дублем”, т.е. будет содержать совпадающие половинки. В каждом из этих случаев для получения “парных” костей существует по 6 вариантов выбора второй костяшки. Например, при выборе первой кости “4-4” второй необходимо выбрать одну из костей “0-4”, “1-4”, “2-4”, “3-4”, “5-4” или “6-4”. В результате,  $m_{\text{дубль}} = 7 \cdot 6 = 42$ .

Если же первая кость содержит несовпадающие половинки (таких случаев 21), то вторую можно выбрать 12 способами. Например, для костяшки “3-5” подходящую пару могут составить кости “0-3”, “1-3”, “2-3”, “3-3”, “4-3”, “6-3”, а также “0-5”, “1-5”, “2-5”, “4-5”, “5-5” и “6-5”. Это порождает еще  $m_{\text{разн}} = 21 \cdot 12 = 252$  благоприятных исходов.

Учитывая, что к  $m_{\text{разн}}$  относятся исходы, отличающиеся от учтенных в  $m_{\text{дубль}}$ , по правилу суммы общее число благоприятных исходов  $m_A = m_{\text{дубль}} + m_{\text{разн}} = 294$ . Таким образом, вероятность выбора сочетающихся костей домино составляет  $P\{A\} = m_A/m = 294/756 \approx 0,39$ .

Пример 4 (Парадокс де Мере): В результате продолжительных наблюдений француз де Мере подметил, что при одновременном броске 3 игральных кубиков комбинация, дающая в сумме 11 очков, выпадает более часто, чем комбинация, дающая в сумме 12 очков, хотя (с его точки зрения) эти комбинации являются равновероятными. Де Мере рассуждал следующим образом: 11 очков можно получить шестью различными способами (6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3), и столькими же способами можно получить 12 очков (6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4). Равенство же числа благоприятных исходов для двух рассматриваемых событий должно приводить и к совпадению частоты их наблюдения.

Ошибка де Мере была указана знаменитым Паскалем, который заметил, что рассматриваемые де Мере исходы в данной задаче не являются равновероятными. Нужно учитывать не только очки, но и то, на каких именно кубиках они выпадают. Например, пронумеровав кубики и выписывая выпадающие очки в соответствующей последовательности, легко увидеть, что комбинация 6-4-1 соответствует следующим (в действительности равновероятным) случаям: “6-4-1”, “6-1-4”, “4-6-1”, “4-1-6”, “1-6-4” и “1-4-6”, а комбинация 4-4-4 реализуется лишь в единственном случае совпадения выпавших значений на всех кубиках.

Равновероятными в данном опыте являются исходы, описываемые тройками чисел  $(a-b-c)$ , где  $a$  – число на верхней грани первого кубика,  $b$  – число, выпавшее на втором кубике,  $c$  – число на третьем кубике. Нетрудно подсчитать, что всего имеется  $m = 216$  подобных равновероятных исходов. Из них событию  $A =$  “сумма выпавших очков равна 11” благоприятствуют  $m_A = 27$  случая, а событию  $B =$  “сумма выпавших очков равна 12” соответствуют  $m_B = 25$  исходов. Это и приводит к более частому выпадению 11 очков.

Отметим, однако, что непосредственный подсчет как общего числа равновозможных исходов, так и количества среди них благоприятных для наступления исследуемого события может оказаться весьма непростой задачей. Существенную помощь при подобном расчете может оказать знание основ комбинаторики.

### 1.3. Основы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, касающийся свойств комбинаций элементов. Комбинации элементов, сформированные по определенным правилам, возникают при решении многих вероятностных задач и потому заслуживают особого внимания.

**Перестановки.** Пусть из элементов некоторого множества, включающего  $n$  значений, формируются комбинации, содержащие все  $n$  элементов этого множества и отличающиеся друг от друга лишь порядком их взаимного расположения. Подобные комбинации называют перестановками. Для определения общего числа отличающихся перестановок учтем, что на первое место в комбинации можно поставить любой из имеющихся элементов. При каждом “зафиксированном” первом элементе для заполнения второй позиции остается  $(n - 1)$  элемент. При каждой конкретной паре начальных элементов на третью позицию можно поставить любой из оставшихся  $(n - 2)$  элементов и т.д. Тогда, согласно правилу произведения (см. с. 9), число способов заполнения элементами позиций в комбинации равно

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \times \dots \times 1 = n! \quad (1.5)$$

*Пример 1:* Если набор пронумерованных шариков ①, ②, ③ перепорядочивать различными способами, то можно получить комбинации

①, ②, ③; ①, ③, ②; ②, ①, ③; ②, ③, ①; ③, ①, ②; ③, ②, ①.

С позиций комбинаторики речь идет о множестве из  $n=3$  разнотипных элементов. Для формирования комбинации каждый раз берут все  $n$  шариков, а отличаются друг от друга комбинации порядком расположения элементов. Таким образом, речь идет о различных перестановках набора из  $n=3$  элементов. Соответствующее число комбинаций согласно (1.5) равно  $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ .

**Размещения.** Пусть из  $n$  различных элементов для формирования комбинации выбираются какие-либо  $k \leq n$  элементов, и пусть различными считаются комбинации отличающиеся друг от друга или составом, или порядком взаимного расположения элементов. Такие комбинации называют размещениями. Для определения числа различных размещений предположим сначала, что для формирования комбинации используются все элементы множества (т.е. создаются перестановки), а затем внесем поправку на тот факт, что на самом деле значимыми являются лишь первые  $k$  элементов комбинации. При “фиксации”  $k$  начальных элементов сформированные первоначально перестановки могут отличаться лишь порядком размещения последних  $(n-k)$  элементов (см. рис. 1), упорядочить которые можно  $(n-k)!$  способами. Итак, каждые  $(n-k)!$  ранее различных перестановок приводят к одному и тому же размещению элементов, а потому правило расчета числа возможных размещений имеет вид

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1.6)$$

Приведенное в (1.6) обозначение  $A_n^k$  для числа размещений читается как “А из  $n$  по  $k$  элементов”.

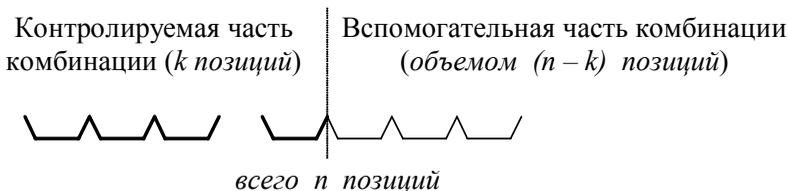


Рис. 1. Иллюстрация к определению числа размещений элементов

*Пример 2: Если из набора пронумерованных шариков ①, ②, ③ выбирать для образования комбинаций по 2 шарика, то комбинации, отличающиеся составом или порядком выбора элементов, будут иметь вид*

①, ②; ②, ①; ①, ③; ③, ①; ②, ③; ③, ②.

*С позиций комбинаторики число различных размещений из  $n = 3$  по  $k = 2$  элементов будет определяться соотношением*

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

**Сочетания.** Если при выборе из  $n$  различных элементов множества каких-либо  $k \leq n$  элементов порядок их следования не является существенным, и различными считаются лишь комбинации отличающиеся входящими в них элементами, то такие комбинации называются сочетаниями.

Для определения числа различных сочетаний элементов учтем, что в рассмотренных ранее размещениях при “фиксации” совокупности  $k$  элементов, входящих в начало комбинации, можно было получать по  $k!$  различных расстановок, перепорядочивая начальные элементы относительно друг друга. Теперь эти расстановки преобразуются в единственное сочетание элементов, а потому число сочетаний, получаемых из расстановок, оказывается в  $k!$  раз меньше. Итак, число различных сочетаний элементов определяется правилом

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (1.7)$$

Приведенное в (1.7) обозначение  $C_n^k$  для числа сочетаний читается как “С из  $n$  по  $k$  элементов”.

Пример 3: Если в предыдущем примере комбинации, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считать неразличимыми, то остается лишь три варианта выбора

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}, \quad \textcircled{1} + \textcircled{3} \text{ и } \textcircled{2} + \textcircled{3}.$$

Тот же результат можно получить по формуле (1.7) как

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \times 1} = 3$$

Пример 4: Определить число способов, которыми можно разложить в  $n$  различных ящиков  $r$  белых и  $s$  чёрных шариков, если в каждом ящике может находиться любое количество шариков (некоторые ящики могут оставаться пустыми)?

Решение: Сперва подсчитаем отдельно количество способов распределения по ящикам белых шариков. Все возможные варианты распределения белых шариков по ящикам можно представить как некоторую последовательность чередования разложенных шариков («о») и границ между ящиками («|»). Например, применительно к  $n = 4$ ,  $r = 10$  размещению шариков по схеме «3+2+0+5» (см. рис. 2а) соответствует чередование элементов «ooo | oo | | ooooo», а схеме размещения

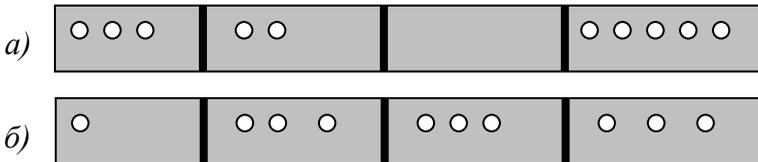


Рис. 2. Возможные варианты размещения шариков

«1+3+3+3» (см. рис. 2б) соответствует чередование элементов «о | ооо | ооо | ооо».

Итак, число различных вариантов размещения белых шаров по ящикам совпадает с числом способов упорядочивания последовательностей из  $r$  шариков и  $(n-1)$  границ. Количество способов, которыми в совокупности из  $(n-1)+r$  элементов можно выбрать  $r$  мест для размещения шариков составляет  $m_{\text{бел}} = C_{n-1+r}^r$ .

Аналогично для расчета числа различных распределений черных шариков получаем расчетное выражение  $m_{\text{черн}} = C_{n-1+s}^s$  и, используя правило произведения (см. с. 9), для общего числа способов распределения черных и белых шариков имеем  $m = C_{n-1+r}^r \cdot C_{n-1+s}^s$ .

**Перестановки с повторениями.** Пусть теперь набор из  $n$  элементов множества включает  $n_1$  элемент первого типа,  $n_2$  элементов второго типа и т.д., завершая  $n_m$  элементами  $m$ -го типа. Если из этих элементов формировать комбинации, включающие все  $n$  элементов, и считать различимыми лишь комбинации элементов, отличающиеся взаимным расположением элементов разных типов, то такие комбинации называются перестановками с повторениями. Число различных перестановок определяется при этом правилом

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \quad (1.8)$$

Пример 5: В название города “БОБРОВ”, входят  $n_1 = 2$  буквы ‘Б’,  $n_2 = 2$  буквы ‘О’ и по одной букве ‘Р’ и ‘В’. Таким образом, переставляя буквы названия в разном порядке можно сформировать  $P_{2,2,1,1} = 6! / (2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!) = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 180$  различных буквенных комбинаций.

Рассмотрим два примера применения алгебраического метода расчета вероятности.

*Пример 6: Подбрасывается 12 игральных кубиков. Какова вероятность того, что каждая грань выпадет ровно 2 раза?*

*Решение:* При подсчете общего числа исходов, соответствующих проводимому эксперименту, учтем, что на каждом кубике независимо от прочих может оказаться вверху любая грань из 6 имеющихся, поэтому  $t = 6^{12} = 2176782336$ .

Для реализации же события  $A$  на каких-то двух кубиках должна выпасть «1», на двух других – «2» и т.д. Выбрать из 12 кубиков ту пару, которая будет давать «1» можно  $C_{12}^2$  способами. Среди оставшихся 10 кубиков выбрать те, на которых будет «2» можно  $C_{10}^2$  способами. Выбор пары кубиков с «3» осуществляется  $C_8^2$  способами и т.д. Согласно правилу произведения (см. с. 9), общее число вариантов падения кубиков, соответствующих событию  $A$ , равно

$$m_A = C_{12}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{12!}{2! \cdot 10!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} \times \\ \times \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{12!}{(2!)^6} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3.$$

В итоге для вероятности появления каждой грани ровно 2 раза получаем

$$P\{A\} = m_A / t = 7484400 / 2176782336 \approx 0,00344.$$

*Примечание 1.* В этом расчете используются именно числа сочетаний, поскольку уникальность варианта выбора определяется номерами выбранных для появления конкретной грани кубиков, а внутри каждой пары кубики неразличимы и пытаться учитывать порядок их взаимного расположения, применяя в расчетах число размещений, - бессмысленно.

*Примечание 2. Соответствующие анализируемому событию варианты выпадения кубиков каждый раз содержат 2 кубика с верхней гранью «1», ещё 2 кубика с верхней гранью «2» и т.п., а различаются лишь порядком взаимного расположения этих кубиков. Таким образом, при подсчете числа благоприятных для наступления события  $A$  вариантов можно было бы (вместо учета набора сочетаний) определять число различных перестановок с повторениями, что также дало бы  $m_A = \frac{12!}{(2!)^6}$ .*

*Пример 7: В лифт 9-этажного дома вошли 4 человека. Если считать, что каждый из вошедших равновероятно и независимо от других может выйти из лифта на любом этаже, то какова вероятность того, что по меньшей мере трое из них выйдут на каком-то этаже вместе?*

*Решение: В этой задаче, как и в парадоксе де Мере (см. с. 11) для обеспечения равной вероятности рассматриваемых исходов необходимо учитывать не только то, на каких этажах выходят пассажиры, но и то, где именно каждый выйдет.*

*Каждый из вошедших в лифт может равновероятно выйти на любом из 8 этажей (со второго по девятый), т.е. каждому варианту выхода первого из пассажиров, соответствует 8 подвариантов выхода второго из пассажиров. При любом исходе, соответствующей этой паре, существует ещё 8 подвариантов, определяемых действиями третьего пассажира и т.д. Таким образом, общее число исходов, отличающихся друг от друга тем, кто именно на каком этаже вышел из лифта, равно  $m = 8^4 = 4096$ .*

*При подсчете числа благоприятных вариантов учтём, что формулировка «по меньшей мере трое...» подразумевает, что условиям задачи удовлетворяют как случаи, когда на каком-то*

из этажей выйдут ровно 3 пассажиров, так и случаи, когда все 4 пассажира выходят из лифта вместе.

Разных вариантов выхода из лифта всех 4 пассажиров существует, очевидно,  $m_4 = 8$ . Реализации же альтернативного сценария будут отличаться друг от друга тем,

1) кто из пассажиров войдет в тройку, а кто выйдет отдельно от других;

2) на каком из 8 этажей (со второго по девятый) выйдет трое людей, а на котором – одинокий пассажир.

Так как люди, входящие в тройку, всё равно выходят вместе, то контролировать их «взаимное расположение» не имеет смысла, поэтому при расчете числа вариантов выбора тройки следует использовать сочетания, что дает  $C_4^3 = 4$ . Впрочем, так как выбрать одиночного пассажира из четырех можно, очевидно, лишь 4 способами, то в этой части расчета можно было бы обойтись и без комбинаторных формул.

Что же касается той пары этажей, на которых выйдет тройка и одиночный пассажир, то выбирать пару этажей из 8 возможных следует, контролируя порядок выбора, т.е. различая случаи, скажем, когда тройка выходит на втором, а один – на третьем, и когда один пассажир выходит на втором этаже, а остальные – на третьем. Таким образом, различных пар этажей, используемых для выхода, существует  $A_8^2 = 8!/(8-2)! = 8 \cdot 7 = 56$ , а общее число вариантов выхода на одном этаже ровно 3 пассажиров составляет  $m_3 = 8 \cdot 56 = 448$ .

Учитывая, что способы совместного выхода ровно трех и всех четырех пассажиров не совмещаются, а дополняют друг друга, по правилу сложения получаем, что общее число благоприятных исходов составляет  $m_A = 8 + 448 = 456$ . В итоге, вероятность того, что по меньшей мере трое из пассажиров выйдут из лифта вместе, составит

$$P\{A\} = m_A/m = 456/4096 \approx 0,111.$$

#### 1.4. Геометрический метод расчета вероятности событий

Если число исходов проводимого опыта  $m$  бесконечно велико, то использовать для расчета вероятностей алгебраический метод расчета невозможно, так как правило (1.4) приводит к неопределенности  $\infty/\infty$ . Однако, если исходы опыта по отношению друг к другу равновероятны, то расчет вероятностей можно осуществить, используя геометрический метод расчета. Согласно этому методу, каждому из равновозможных исходов опыта ставится в соответствие некоторая точка геометрического пространства, так что все возможные исходы занимают некоторую область этого пространства, а благоприятствующие событию  $A$  варианты – какую-то часть этой области (см. примеры ниже). Вероятность случайного события  $A$  определяется при этом как соотношение геометрических размеров указанных областей. Например, при использовании двумерного пространства для представления точек – исходов опыта, вероятность будет определяться соотношением площадей соответствующих фигур

$$P\{A\} = \frac{S_A}{S_{\text{общ}}}, \quad (1.9)$$

а при работе в трехмерном пространстве придется оценивать соотношение объемов и т.д.

*Пример 8:* Стержень длиной  $L$  разломил наугад на две части. Какова вероятность того, что длина меньшей части не превосходит  $L/3$ ?

*Решение:* Исходы анализируемой задачи, отличающиеся друг от друга координатой точки разлома, равновероятны, а их число бесконечно велико, что доказывает возможность и целесообразность использования геометрического метода расчета вероятностей.

Из текста задачи очевидно, что всем возможным исходам опыта соответствует совокупность точек, заполняющих отрезок длиной  $L$ . Для возникновения же при разломе стержня одного маленького и одного большого кусков точка разлома должна располагаться либо в начале этого стержня, либо в его конце. Координата  $x$  точки разлома, должна удовлетворять одному из неравенств  $x < L/3$  или  $x > 2L/3$  (содержащие подобные точки участка отрезка  $L$  показаны на рис. 3 заштрихованными).

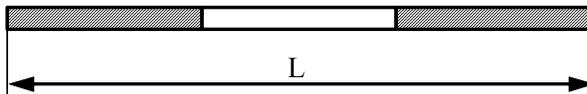


Рис. 3. При попадании точки разлома стержня из примера 8 на заштрихованные участки требования задачи выполняются

Итак, геометрическим местом размещения всех исходов опыта в данной задаче служит отрезок прямой. Сопоставляя его длину  $L$  с суммарной длиной двух участков, содержащих точки, благоприятствующие наступлению нужного события,  $l_A = L/3 + L/3$  для вероятности получения меньшего куска стержня, не превосходящего  $L/3$ , получаем

$$P\{A\} = l_A / m = (2L/3) / L = 2/3 .$$

Пример 9: По радиоканалу в течение промежутка времени  $(0,1)$  передаются два сигнала длительностью  $\tau$ . Каждый из них с одинаковой вероятностью начинается в любой момент времени из интервала  $(0, 1 - \tau)$ . Если сигналы перекроют друг друга хотя бы частично, оба они искажаются и приняты быть не могут. Найти вероятность того, что сигналы будут приняты без искажений.

Решение: Анализируемая задача характеризуется, как непосредственно следует из условия, бесконечным количеством равновозможных исходов и, следовательно, её разумно решать с использованием геометрического метода расчета. Так как в задаче фигурируют два сигнала с независимо изменяющимися параметрами, то геометрическое пространство, на которое будут отображаться исходы опытов, должно иметь два измерения, т.е. точки, соответствующие исходам задачи, следует размещать на плоскости.

Обозначим момент начала первого из сигналов через  $x$ , а начало второго сигнала – через  $y$ . Тогда точки, с координатами  $(x, y)$ , соответствующие по условию задачи всем возможным исходам опыта, будут размещаться в пределах прилегающего к началу координат квадрата со стороной  $a = (1 - \tau)$ . Для определения же геометрического места точек, соответствующих исходам, при которых сигналы будут приняты без искажений, учтем, что перекрытие сигналов невозможно, если моменты их начала отличаются более чем на  $\tau$ . Отсюда,

$$\begin{aligned} |y - x| > \tau &\Rightarrow (y - x < -\tau) \text{ или } (y - x > \tau) \Rightarrow . \\ &\Rightarrow (y < x - \tau) \text{ или } (y > x + \tau). \end{aligned}$$

Отобразим границы, определяемые условиями  $y = x - \tau$  и  $y = x + \tau$ , на той же системе координат (см. рис. 4), тогда благоприятными для приема сигналов являются случаи, когда точки – исходы опыта попадают в верхнюю левую или нижнюю правую заштрихованные зоны.

Итак,  $S_{\text{общ}} = (1 - \tau)^2$ , а площадь двух треугольников, образующих благоприятную зону, составит  $S_{\Lambda} = 2 \cdot 0,5 \cdot (1 - 2\tau)^2 = (1 - 2\tau)^2$ ; таким образом, вероятность передачи сигналов без искажений определится выражением

$$P\{A\} = (1 - 2\tau)^2 / (1 - \tau)^2 .$$

График соответствующей зависимости показан на рис. 5.

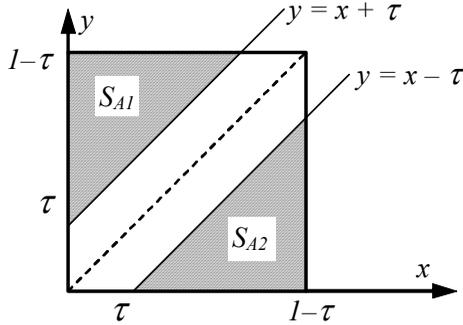


Рис. 4. К определению вероятности передачи без искажений сигналов из примера 9

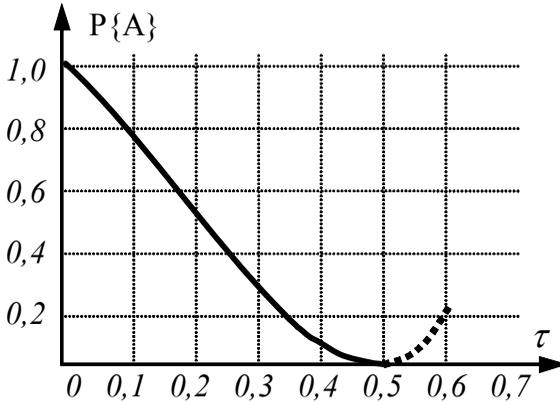


Рис. 5. Зависимость вероятности передачи без искажений сигналов из примера 9 от их длительности

*Поведение вероятности  $P\{A\}$  на участке  $0 \leq \tau \leq 0,5$  вполне объяснимо: при длительности сигналов  $\tau \approx 0$  их перекрытие маловероятно, а вероятность успешного приема близка к единице; затем, по мере увеличения  $\tau$ , шансы на перекрытие сиг-*

налов возрастают и  $P\{A\} \rightarrow 0$ . Возрастание же вероятности на показанном пунктиром участке  $\tau > 0,5$  является ложным. При подобных длительностях сигналов их перекрытие, а значит и искажение – неизбежно, т.е. на самом деле  $P\{A\} = 0$ .

Для выяснения причин наблюдаемого противоречия нужно вернуться к анализу ситуации на рис. 4. Выражение для  $P\{A\}$ , по которому строился график рис. 5, было получено исходя из треугольной формы благоприятных зон  $A1$  и  $A2$ . Однако, при  $\tau = 0,5$  эти зоны сливаются воедино и далее уже не увеличиваются, но заполняют всю площадь анализируемого квадрата, т.е.  $S_A = S_{\text{общ}}$ . Попытка буквального использования пунктирного участка кривой с рис. 5 приводит к ошибке, однако эта ошибка не является недостатком геометрического метода расчета вероятностей. Она порождается некорректным его применением, вызванным изменением конфигурации благоприятных областей по сравнению с представленными на рис. 4.

Итак, используя для расчета вероятностей геометрический метод, следует иметь в виду возможные изменения конфигурации контролируемых геометрических мест точек – исходов опытов и, соответственно, уделять особое внимание оценке границ изменения параметров задачи, при которых результаты расчетов остаются справедливыми.

### **1.5. Классификация событий**

Если проводимый эксперимент предполагает возможность реализации нескольких случайных событий, то наступление одного из таких событий может увеличивать или уменьшать возможность реализации других событий. Например, при изготовлении радиоаппаратуры использование комплектующих низкого качества, а также выбор близких к критическим режи-

мов работы электронных приборов повышают риск выхода этой аппаратуры из строя. Напротив, при использовании компонентов схемы в режимах, облегченных по сравнению с предельно допустимыми, риск отказа аппаратуры снижается (хотя и не устраняется полностью).

Если наступление события  $A$  влечет изменение вероятности реализации события  $B$ , то такие события называют **зависимыми**. Вероятность совершения события  $B$  при условии, что в проводимом опыте событие  $A$  уже произошло, называют **условной вероятностью** события  $B$  и обозначают  $P\{B|A\}$ .

Если же условная вероятность  $P\{B|A\}$  наступления события  $B$  совпадает с его безусловной вероятностью  $P\{B\}$ , то события  $A$  и  $B$  считаются **независимыми**.

*Пример 10:* Из набора костяшек для домино наугад выбирают одну кость. Рассмотрим возможные события

$A$  = “значения на половинках кости совпадают”;

$B$  = “сумма цифр на половинках костяшки равна 8”.

Из  $t = 28$  костей  $t_A = 7$  имеют совпадающие значения половинок, поэтому  $P\{A\} = t_A / t = 7 / 28 = 1 / 4$ . Событие  $B$  наступает при выборе костяшек “2-6”, “3-5”, “4-4” ( $t_B = 3$ ) и безусловная вероятность события  $B$  равна  $P\{B\} = 3 / 28$ . Если же оценивать вероятность реализации события  $B$  при условии совпадения значений на разных половинках вынудой костяшки, то из 7 подобных костей лишь выбор “4-4” влечет наступление события  $B$ , поэтому  $P\{B|A\} = 1 / 7$ . Наконец, если известно, что сумма цифр на половинках кости равна 8, то из 3 подобных костяшек (соответствующих событию  $B$ ), лишь “4-4” имеет совпадающие половинки. Таким образом,  $P\{A|B\} = 1 / 3$ .

Итак, условные вероятности событий  $A$  и  $B$  отличаются от безусловных, т.е. наступление одного из этих событий влияет на возможность реализации другого. Таким образом, события  $A$  и  $B$  – зависимые.

Рассмотрим теперь событие  $C$  = “сумма цифр на половинках костяшки домино равна 6”. Оно наступает при выборе костяшек “0-6”, “1-5”, “2-4” и “3-3”. Безусловная вероятность события  $C$  равна  $P\{C\} = 4/28 = 1/7$ . Из  $m = 7$  костей с совпадающими половинками ровно одна (“3-3”) влечет наступление события  $C$ , поэтому  $P\{C|A\} = 1/7$ . Наконец, среди четырех костей, обладающих суммой цифр, равной 6, лишь одна имеет совпадающие половинки, поэтому  $P\{A|C\} = 1/4 = P\{A\}$ .

Итак, при наступлении любого из событий  $A$  и  $C$  шансы совершения другого события не увеличиваются и не уменьшаются, а значит эти события – независимые.

*Примечание:* Текстовым признаком того, что рассматриваемая в задаче вероятность – условная, является возможность представить формулировку этой задачи в виде: “Найти вероятность  $B$  при условии  $A$ ”. В математической записи сочетание слов «при условии» заменяется вертикальной чертой «|».

Если при проведении опыта могут совершаться сразу несколько событий, то подобные события считаются **совместными**. Если же наступление одного из событий исключает возможность реализации другого (других), то такие события называются **несовместными**. Для несовместных событий  $A$  и  $B$  справедливо  $P\{B|A\} = 0$  и  $P\{A|B\} = 0$ .

Частным случаем несовместных событий являются два противоположных события. Событие  $\bar{A}$  (читается «не  $A$ ») называют **противоположным** событию  $A$ , если оно наступает в каждом опыте, где не совершается  $A$ .

Продолжение примера 10: К числу событий, рассмотренных выше, добавим событие  $D =$  “половинки костяшки домино отличаются друг от друга”. Тогда пары событий  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $C$ ,  $D$  и  $B$ ,  $D$  и  $C$  являются совместными, события  $B$  и  $C$  – несовместными, а события  $A$  и  $D$  – противоположными друг другу  $D = \bar{A}$ .

Группа несовместных событий называется **полной**, если при проведении опыта одно (и только одно) из этих событий обязательно происходит. Минимальную по объему полную группу образуют два противоположных события  $A$  и  $\bar{A}$ .

Продолжение примера 10: Во многих ситуациях существует не единственная, но многие полные группы событий. Так, для набора костей домино можно сформировать полную группу событий, дополняя события  $B$  и  $C$  аналогичными, определяющими другие возможные суммы очков на половинках косточек. Если же вместо суммы очков контролировать отличия между ними, то у выбранной наугад костяшки домино значения могут совпадать (событие  $H_0$ ) а могут отличаться на 1, 2...6 (события  $H_1, H_2, \dots, H_6$ ). Набор событий  $H_0 \dots H_6$  также образует полную группу. Определим их вероятности:

$$P\{H_0\} = P\{\text{“0-0”, “1-1”, “2-2”, “3-3”, “4-4”, “5-5”, “6-6”}\} = 7 / 28.$$

$$P\{H_1\} = P\{\text{“0-1”, “1-2”, “2-3”, “3-4”, “4-5”, “5-6”}\} = 6 / 28.$$

$$P\{H_2\} = P\{\text{“0-2”, “1-3”, “2-4”, “3-5”, “4-6”}\} = 5 / 28.$$

$$P\{H_3\} = P\{\text{“0-3”, “1-4”, “2-5”, “3-6”}\} = 4 / 28.$$

$$P\{H_4\} = P\{\text{“0-4”, “1-5”, “2-6”}\} = 3 / 28.$$

$$P\{H_5\} = P\{\text{“0-5”, “1-6”}\} = 2 / 28.$$

$$P\{H_6\} = P\{\text{“0-6”}\} = 1 / 28.$$

Обратите внимание, что сумма вероятностей событий  $H_0 \dots H_6$  составляет строго 1,0.

## 2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

### 2.1. Понятие сложного события

Если анализируемой задаче (ситуации) нельзя поставить в соответствие набор равновозможных исходов, то ни алгебраический, ни геометрический методы использовать для расчета вероятностей оказывается невозможно. В подобной ситуации имеет смысл попытаться представить анализируемые (сложные) события как логическую комбинацию каких-то более простых утверждений, для каждого из которых вероятность реализации известна или может быть рассчитана. Правила расчета вероятности итогового сложного события по вероятностям событий, его образующих, устанавливаются ниже.

### 2.2. Расчет вероятности пересечения (логического произведения) событий

**Пересечением** (логическим произведением)  $N$  событий  $A_j$  называют событие  $\prod_{j=1}^N A_j$ , заключающееся в наступлении всех событий  $A_j$  в одном опыте. В частности, пересечением двух событий  $A$  и  $B$  называют событие  $A \cdot B$ , наблюдаемое, когда и  $A$ , и  $B$  наступают в одном и том же опыте. Признаком пересечения в текстовых формулировках событий служит союз “и”.

*Примечание:* Некоторые авторы для обозначения пересечения и объединения событий применяют символы  $\cap$  и  $\cup$  соответственно, но в настоящем пособии эти символы не используются. Как правило, явной потребности в подобных специфичных символах не возникает, а использование вместо символа  $\cap$  значка произведения и вместо  $\cup$  – знака суммы к неясностям, как правило, не приводит, но позволяет достичь большей компактности записи.

Для упрощения рассуждений, определяющих правило расчета вероятности пересечения событий, будем полагать, что возможным исходам анализируемого опыта можно поставить в соответствие какое-то геометрическое место точек на плоскости. Вероятность пересечения событий  $A$  и  $B$  будет отличной от нуля, только если существует некая общая для этих событий совокупность исходов. Подобная ситуация представлена на рис. 6, где событию  $A$  соответствует группа точек, помеченная  $S_A$ , событию  $B$  – группа точек с пометкой  $S_B$ , а исходам общим для этих событий – центральная область с площадью  $S_{A \cdot B}$ .

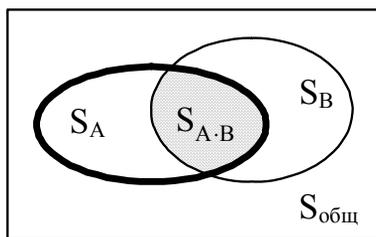


Рис. 6. Пересечение событий  $A \cdot B$

Представим временно, что вместо исходного эксперимента мы проводим опыты, в которых событие  $A$  гарантированно происходит. При подобном изменении ситуации в качестве геометрического места точек, соответствующего всем исходам опыта, выступала бы лишь площадка  $S_A$ , выделенная на рис. 6 жирной линией. Соответственно, вероятность наблюдения в этих условиях события  $B$  (помимо обязательного события  $A$ ) определялась бы соотношением площадей  $S_{A \cdot B}$  и  $S_A$ . Применительно же к условиям исходного эксперимента указанное отношение есть ни что иное как условная вероятность события  $B$

$$\frac{S_{A \cdot B}}{S_A} = P\{B | A\}.$$

Возвращаясь к расчету вероятности пересечения событий А и В, в соответствии с геометрическим подходом получаем

$$P\{A \cdot B\} = \frac{S_{A \cdot B}}{S_{\text{общ}}} = \frac{S_A}{S_{\text{общ}}} \cdot \frac{S_{A \cdot B}}{S_A} = P\{A\} \cdot P\{B | A\}.$$

Итак, вероятность пересечения двух событий А и В равна

$$P\{A \cdot B\} = P\{A\} \cdot P\{B | A\} = P\{B\} \cdot P\{A | B\}, \quad (2.1)$$

где  $P\{B|A\}$  – условная вероятность события В, т.е. вероятность, вычисленная при условии, что событие А уже произошло;  $P\{A|B\}$  – условная вероятность события А, определяющая возможность наступления этого события при уже свершившемся событии В.

Вероятность пересечения произвольного числа  $N$  событий  $A_j$  определяется выражением

$$P\left\{\prod_{j=1}^N A_j\right\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2 | A_1\} \cdot P\{A_3 | A_2, A_1\} \times \dots \times P\{A_N | A_{N-1}, \dots, A_1\}, \quad (2.2)$$

где, в частности,  $P\{A_N | A_{N-1}, \dots, A_1\}$  – это вероятность наступления события  $A_N$ , вычисленная при условии, что все события, начиная с  $A_1$  и до  $A_{N-1}$ , совершились.

### **2.3. Расчет вероятности объединения (логической суммы) событий**

**Объединением** (логической суммой)  $N$  событий  $A_j$  называют событие  $\sum_{j=1}^N A_j$ , которое наблюдается каждый раз, когда наступает хотя бы одно из событий  $A_j$ . В частности, объединением событий А и В называют событие А+В (у некоторых авторов  $A \cup B$ ), которое наблюдается, когда наступает

или А, или В или оба этих события одновременно (рис. 7). Признаком пересечения в текстовых формулировках событий служит союз “или”.

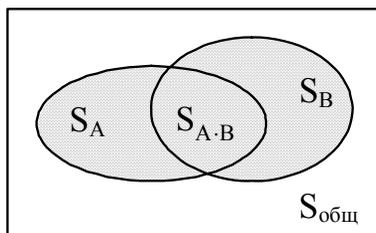


Рис. 7. Объединение событий А+В

Необходимо учитывать, что вероятности события  $P\{A\}$  соответствует как левая часть заштрихованной на рис. 7 фигуры, так и её центральная часть, помеченная как  $S_{A·B}$ . И исходы, соответствующие событию В, располагаются как в правой части заштрихованной фигуры, так и в помеченной  $S_{A·B}$  центральной части. Таким образом, при сложении  $S_A$  и  $S_B$  площадка  $S_{A·B}$  реально войдет в эту сумму дважды, а точное выражение для площади заштрихованной фигуры имеет вид  $S_A + S_B - S_{A·B}$ .

Итак, вероятность объединения двух событий А и В равна

$$P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\}, \quad (2.3)$$

Аналогично из анализа характера взаимного наложения трёх геометрических областей для объединения трёх совместных событий можно получить расчетное выражение

$$P\{A + B + C\} = P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{A \cdot B\} - P\{A \cdot C\} - P\{B \cdot C\} + P\{A \cdot B \cdot C\}. \quad (2.4)$$

Для большего числа событий общее расчетное выражение становится крайне громоздким из-за необходимости учета

многочисленных вариантов взаимного наложения областей. Однако, если объединяемые события являются несовместными (см. с. 33), то взаимное наложение областей оказывается невозможным, а благоприятная зона определяется непосредственно суммой областей, соответствующих отдельным событиям.

Вероятность объединения произвольного числа несовместных событий  $A_j$  определяется выражением

$$P\left\{\sum_{j=1}^N A_j\right\} = \sum_{j=1}^N P\{A_j\}. \quad (2.5)$$

Следствие 1: Полная группа событий состоит из событий несовместных, одно из которых в опыте обязательно реализуется. В результате, если события  $A_1 \dots A_N$ , образуют полную группу, то для них

$$\sum_{j=1}^N P\{A_j\} = 1. \quad (2.6)$$

Следствие 2: Два противоположных события всегда образуют полную группу, поэтому

$$P\{A\} + P\{\bar{A}\} = 1. \quad (2.7)$$

Таким образом,

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}. \quad (2.8)$$

Следствие 3 Учтем, что противоположным утверждению «произойдет хотя бы одно из событий  $A_1 \dots A_N$ » является утверждение «ни одно из событий  $A_1 \dots A_N$  не реализуется». Т.е., иначе говоря, «в опыте будут наблюдаться события  $\bar{A}_1$ , и  $\bar{A}_2$ , и  $\dots \bar{A}_N$ », что представляет собой уже пересечение событий, противоположных исходному набору. С учетом (2.2) получаем...

вероятность объединения произвольного числа событий

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{j=1}^N A_j\right\} &= 1 - P\left\{\prod_{j=1}^N \bar{A}_j\right\} = \\ &= 1 - P\{\bar{A}_1\} \cdot P\{\bar{A}_2 | \bar{A}_1\} \cdot P\{\bar{A}_3 | \bar{A}_2, \bar{A}_1\} \times \dots \times P\{\bar{A}_N | \bar{A}_{N-1}, \dots, \bar{A}_1\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следствия 2, 3 показывают, что в тех случаях, когда непосредственный расчет вероятности какого-то события является проблематичным, полезно оценить трудоёмкость исследования события ему противоположного. Ведь, зная значение  $P\{\bar{A}\}$ , получить из (2.7) нужную величину  $P\{A\}$  никакого труда уже не представляет.

#### 2.4. Примеры расчетов вероятностей сложных событий

*Пример 1:* Двое студентов (Иванов и Петров) вместе явились на защиту лабораторной работы, выучив первые 8 контрольных вопросов к этой работе из 10 имеющихся. Проверая подготовленность, преподаватель задает каждому лишь один случайно выбираемый вопрос. Определить вероятность следующих событий:

$A$  = “Иванов защитит лабораторную работу”;

$B$  = “Петров защитит лабораторную работу”;

$C$  = “оба защитят лабораторную работу”;

$D$  = “хотя бы один из студентов защитит работу”;

$E$  = “только один из студентов защитит работу”;

$F$  = “никто из них не защитит работу”.

*Решение.* Отметим, что способность защитить работу как Иванова, так и Петрова в отдельности определяется лишь числом освоенных вопросов, поэтому  $P\{A\} = P\{B\} = 8/10$ . (Примечание: в данном примере значения получаемых дробей сознательно не сокращались для упрощения сопоставления результатов расчетов.)

Событие  $C$  можно сформулировать иначе как «работу защитит и Иванов, и Петров», т.е. произойдут и событие  $A$ , и событие  $B$ . Таким образом, событие  $C$  является пересечением событий  $A$  и  $B$ , поэтому в соответствии с (2.1)

$$P\{C\} = P\{A \cdot B\} = P\{A\} \cdot P\{B|A\} = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90},$$

где сомножитель «7/9» появляется из-за того, что наступление события  $A$  означает, что Иванову достался «удачный» вопрос, а значит на долю Петрова из оставшихся 9 вопросов приходится теперь лишь 7 «хороших» вопросов.

Событие  $D$  подразумевает, что «работу защитит или Иванов, или Петров, или они оба вместе», т.е. произойдет хотя бы одно из событий  $A$  и  $B$ . Итак, событие  $D$  является объединением событий  $A$  и  $B$ , и в соответствии с (2.3)

$$P\{D\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\} = \frac{8}{10} + \frac{8}{10} - \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{88}{90},$$

что соответствует ожиданиям, т.к. даже для каждого из студентов в отдельности шансы на успех довольно велики.

Событие  $E$  означает, что «либо работу защитит Иванов, а Петров «провалится», или Иванову попадет неудачный вопрос, а Петров с защитой справится». Два альтернативных варианта являются взаимоисключающими (несовместными), поэтому

$$P\{E\} = P\{A \cdot \bar{B}\} + P\{B \cdot \bar{A}\} = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{90},$$

Наконец, утверждение  $F$  окажется справедливым лишь если «и Иванов, и Петров с защитой не справятся». Итак,

$$P\{F\} = P\{\bar{A} \cdot \bar{B}\} = P\{\bar{A}\} \cdot P\{\bar{B}|\bar{A}\} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}.$$

На этом решение задачи завершено, однако полезно отметить следующие моменты:

1. Каждая из полученных вероятностей удовлетворяет условию (1.3), но если для  $P\{C\}$  и  $P\{F\}$  получить конфликтующие с (1.3) значения в принципе невозможно, то для  $P\{D\}$  попытка использования (2.5) вместо (2.3) привела бы к явно некорректному значению  $P\{A\} + P\{B\} = \frac{8}{10} + \frac{8}{10} = \frac{16}{10} > 1$ . Важно помнить, что подобное значение вероятности принципиально невозможно, и при получении столь парадоксального результата незамедлительно приступать к поиску ошибки.

2. Найденные вероятности удовлетворяют соотношениям

$$P\{C\} + P\{E\} + P\{F\} = 1,$$

$$P\{D\} + P\{F\} = 1.$$

Это вполне ожидаемо, т.к. события  $C$ ,  $E$  и  $F$  образуют полную группу, а события  $D$  и  $F$  противоположны друг другу. Учет этих соотношений с одной стороны может быть использован для перепроверки расчетов, а в другой ситуации может послужить основой альтернативного способа решения задачи.

Примечание: Не пренебрегайте письменной фиксацией точной формулировки события, иначе по ходу решения задачи Вы можете произвольно перейти к иной трактовке смысла этого события, что повлечет ошибки в рассуждениях.

Пример 2: В крупной партии микросхем, не прошедших выходной контроль качества, 30% изделий являются бракованными. Если из этой партии наугад выбрать какие-либо две микросхемы, то какова вероятность, что среди них:

$A$  = “обе годные”;

$B$  = “ровно 1 годная микросхема”;

$C$  = “обе бракованные”.

Проанализируем следующий вариант рассуждений  
(осторожно, содержит ошибку):

Так как речь идет о крупной партии изделий, то изъятие из неё нескольких микросхем практически не влияет на соотношение числа годных и бракованных изделий, а значит, выбирая несколько раз подряд какие-то микросхемы из этой партии, можно считать, что в каждом из случаев остаются неизменными вероятности

$$P_B = P\{\text{выбрано бракованное изделие}\} = 0,3 \quad \text{и}$$

$$P_G = P\{\text{выбрано годное изделие}\} = 0,7.$$

Для наступления события  $A$  необходимо, чтобы  $\mathbf{u}$  в первый,  $\mathbf{u}$  во второй раз было выбрано годное изделие, а потому (учитывая независимость друг от друга успешности выбора первой и второй микросхемы) для пересечения событий имеем

$$P\{A\} = P_G \cdot P_G = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49.$$

Аналогично, для наступления события  $C$  нужно, чтобы оба изделия оказались бракованными  $P\{C\} = P_B \cdot P_B = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ , а для получения  $B$  нужно один раз выбрать годное, а один – бракованное изделие  $\tilde{P}\{B\} = P_G \cdot P_B = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$ .

Признак ошибки. Хотя все полученные выше вероятности выглядят правдоподобными, при их совместном анализе легко заметить, что  $P\{A\} + \tilde{P}\{B\} + P\{C\} = 0,79$ . Однако случаи  $A$ ,  $B$  и  $C$  образуют полную группу событий, для которой должно выполняться  $P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} = 1,0$ . Это противоречие указывает на наличие какой-то ошибки в рассуждениях.

Суть ошибки. Введем в рассмотрение два вспомогательных события:

$V_1$  = “первая микросхема – годная, вторая – бракованная”;

$V_2$  = “первая микросхема – бракованная, вторая – годная”.

Очевидно, что  $P\{V_1\} = P_G \cdot P_B = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$ , однако именно такой вариант расчета был выше использован для получения

вероятности события  $B$ , хотя события  $B$  и  $B_1$  не являются эквивалентными. На самом деле,  $B = B_1 + B_2$ , т.к. формулировка события  $B$  требует, чтобы среди микросхем ровно одна, но совсем не обязательно первая была годной (а другая – бракованной). Поэтому, хотя  $P\{B_2\} = P_B \cdot P_G = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21 = P\{B_1\}$  событие  $B_2$  не является дублем события  $B_1$ , а должно учитываться независимо. Учитывая несовместность событий  $B_1$  и  $B_2$ , вероятность их логической суммы будет равна

$$P\{B\} = P\{B_1\} + P\{B_2\} = 0,42.$$

После указанного исправления расчетов имеем

$$P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} = 0,49 + 0,42 + 0,09 = 1,0$$

что косвенно подтверждает корректность найденных вероятностей.

*Примечание:* Обращайте особое внимание на отличие в формулировках событий типа “только первый из перечисленных элементов должен...” и “только один из перечисленных элементов должен...”. Последнее событие явно шире и включает в свой состав первое как один из (возможно многочисленных) вариантов. Эти альтернативные варианты (даже при совпадении их вероятностей) следует учитывать независимо друг от друга.

*Примечание:* Слово “процент” произошло от “per cent”, т.е. “на сотню”. Представление частот и вероятностей в процентах позволяет оперировать более крупными значениями, что иногда упрощает восприятие значений “на слух”. Однако использовать в расчетах для правильной нормировки умножение или деление на “100 %” громоздко и неэффективно. В связи с этим, не забывайте при использовании значений, упомянутых в процентах, подставлять их в расчетные выражения уже в виде долей от единицы (например, 35% в расчете записывается как “0,35”), чтобы минимизировать риск ошибочной нормировки результатов.

Пример 3: Набор резисторов содержит один резистор номиналом 4 кОм, три резистора по 8 кОм и шесть резисторов с сопротивлением 15 кОм. Выбранные наугад три резистора соединяются друг с другом параллельно. Определить вероятность получения итогового сопротивления, не превышающего 4 кОм.

Решение. Сопротивление параллельного соединения резисторов может быть рассчитано по формуле

$$R_{\text{итог}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}.$$

Это позволяет ввести в рассмотрение события, такие как

$A = \text{“выбраны три резистора по 15 кОм”} = \text{“} R_{\text{итог}} = 5 \text{ кОм”}$ ;

$B = \text{“взяты два резистора по 15 кОм и один с сопротивлением 8 кОм”} = \text{“} R_{\text{итог}} = 3,87 \text{ кОм”} \dots$

Полная группа событий, соответствующих условию задачи, включает ещё целый ряд вариантов, причем именно таких, которые соответствуют выдвинутому требованию о получении сопротивления не более чем 4 кОм. Однако, хотя “прямой” путь решения, предполагающий расчет (и последующее суммирование) вероятностей, характеризующих все эти события, и является правильным, действовать таким образом нецелесообразно.

Отметим, что для получения итогового сопротивления менее 4 кОм достаточно, чтобы в используемый набор вошел хотя бы один резистор с сопротивлением менее 15 кОм. Таким образом, лишь в случае  $A$  требование задачи не выполняется; событие  $A$  является противоположным исследуемому. Вместе с

$$\begin{aligned} \text{тем, } P\{A\} &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}. \text{ Таким образом, } P\{\text{“} R_{\text{итог}} \leq 4 \text{ кОм”}\} = \\ &= P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Примечание: Рассчитывая вероятность некоторого события  $A$ , не забывайте проанализировать трудоемкость определения вероятности события ему противоположного. Если рассчитать  $P\{\bar{A}\}$  легко, то именно с этого и надо начинать решение задачи, завершая его применением соотношения (2.8).

Пример 4: В коробке имеются  $n$  белых,  $t$  черных и  $k$  красных шаров. Шары по одному наугад извлекаются из коробки и возвращаются обратно после каждого извлечения. Определить вероятность события  $A$  = “белый шар будет извлечен раньше, чем черный”.

Решение. Рассмотрим следующую совокупность событий

$A_1$  = “белый шар извлекли при первой же попытке”;

$A_2$  = “сначала вынули красный шар, а затем - белый”;

$A_3$  = “дважды вынули красный шар, а на третий раз - белый” ...

Так как шарики возвращаются, то последовательность событий  $A_j$  может быть формально бесконечно протяженной.

Эти события являются несовместными и составляют в совокупности тот набор ситуаций, при которых происходит событие  $A$ . Таким образом,  $P\{A\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_{k+1}\} =$   
 $= n / (n + t + k) + n \cdot k / (n + t + k)^2 + n \cdot k^2 / (n + t + k)^3 + \dots$

Несложно заметить, что входящие в сумму слагаемые образуют геометрическую прогрессию с начальным элементом  $a_1 = n / (n + t + k)$  и знаменателем  $q = k / (n + t + k)$ . Но сумма элементов бесконечной геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (2.10)$$

Таким образом,  $P\{A\} = \frac{n}{(n+m+k)} \bigg/ \left(1 - \frac{k}{(n+m+k)}\right) = \frac{n}{n+m}$ .

Любопытно, что эта вероятность (как следует из полученного выражения) не зависит от числа красных шаров в коробке.

## 2.5. Расчет вероятностей для последовательности независимых испытаний

Многочисленные практические задачи укладываются в следующую схему *последовательности независимых испытаний*, называемую иногда схемой Бернулли. Пусть производится  $n$  независимых испытаний (повторений эксперимента при неизменных условиях). В результате каждого испытания с вероятностью  $p$  появляется событие  $A$ . Вероятность противоположного события  $\bar{A}$ , т. е. не появления события  $A$ , равна  $q = 1 - p$ . Необходимо определить вероятность  $P_n(k)$  того, что в данной последовательности  $n$  независимых испытаний событие  $A$  произойдет ровно  $k$  раз,  $0 \leq k \leq n$ .

Для определения вероятности  $P_n(k)$  рассмотрим события

- $A_1 =$  “в первых  $k$  попытках событие  $A$  происходило, а последующие  $(n-k)$  попыток были неудачными”;
- $A_2 =$  “в первых  $(n-k)$  случаях событие  $A$  не наблюдалось, а затем происходило подряд ровно  $k$  раз”;
- $A_3 =$  “удачные и неудачные попытки чередовались, но в целом среди  $n$  попыток было ровно  $k$  удачных”...

Отличия между этими событиями заключаются лишь в порядке чередования удачных и неудачных попыток, что означает разный порядок следования сомножителей при подстановке вероятностей  $p$  и  $q$  в правило (2.2). Но так как в каждом произведении присутствует ровно  $k$  сомножителей  $p$  и  $(n-k)$  сомножителей  $q$ , то, группируя их, для каждого из событий  $A_j$  получаем  $P\{A_j\} = p^k \cdot q^{n-k}$ .

Количество различных вариантов  $A_j$  определяется числом разных способов расстановки  $k$  удачных попыток среди всех  $n$  проводимых испытаний. Контролировать взаимное расположение удачных попыток в рассматриваемой ситуации не имеет смысла, поэтому число подлежащих учету несовместных событий  $A_j$  составляет  $C_n^k$  и, следовательно,  $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k q^{n-k}$ . Так как  $P_n(k)$  совпадает с коэффициентом при  $x^k$  в разложении бинома  $(q + px)^n$  по степеням  $x$ , то полученную формулу часто называют биномиальной.

Итак, вероятность того, что в последовательности  $n$  независимых испытаний событие  $A$  произойдет ровно  $k$  раз

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (2.11)$$

Соответственно, вероятность того, что при выполнении  $n$  испытаний событие  $A$  будет наблюдаться от  $k_1$  до  $k_2$  раз, равна

$$P_n\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (2.12)$$

## 2.6. Независимые испытания с несколькими исходами

Соотношения (2.11), (2.12) позволяют оценить вероятность многократного появления в серии испытаний какого-то одного события, но для контроля за несколькими событиями, к сожалению, непригодны.

Пусть, по-прежнему, производится  $n$  испытаний и каждое испытание заканчивается каким-то из  $m$  возможных исходов. Обозначим вероятность появления  $i$ -го исхода в отдельном испытании через  $p_i$ , где  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Тогда для любого  $n$  и любых целочисленных  $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_m \geq 0$ , таких что  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ , вероятность появления первого исхода ровно  $n_1$  раз, второго – ровно  $n_2$  раз, а  $m$ -го – ровно  $n_m$  раз составит

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}. \quad (2.13)$$

Пример 5: Игральный кубик подбрасывают 15 раз. Какова вероятность того, что выпадет ровно 10 единиц и 3 двойки?

Решение. Перечисленные в условии задачи требования характеризуют результаты каких-то 13 бросков, однако кубик подбрасывают 15 раз, поэтому нужная для рассуждений совокупность исходов включает

$A_1$  = “на кубике выпала единица” ( $p_1 = 1/6$ );

$A_2$  = “на кубике выпала двойка” ( $p_2 = 1/6$ );

$A_3$  = “выпало любое значение, большее 2” ( $p_3 = 4/6$ ).

Вероятность появления первого исхода ровно  $n_1 = 10$  раз, второго – ровно  $n_2 = 3$  раза, а последнего  $n_m = 2$  раза составит

$$P_{15}(10, 3, 2) = \frac{15!}{10! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 4^2}{12 \cdot 6^{15}} \approx 10^{-6}$$

## 2.7. Расчеты для продолжительных серий испытаний

**Асимптотика Муавра—Лапласа.** В тех случаях, когда число независимых испытаний велико, непосредственное вычисление вероятностей по формуле (2.11) и, особенно, (2.12) представляет большие трудности, так как при этом определение биномиальных коэффициентов связано с вычислением факториалов при больших аргументах. Факториал можно с достаточной точностью получить, применив так называемую **асимптотическую формулу Стирлинга**

$$m! \sim \sqrt{2\pi} \cdot m^{m+1/2} \cdot e^{-m}. \quad (2.14)$$

Символ  $\sim$  (асимптотическое равенство) означает, что отношение двух выражений, соединенных этим символом, стремится к единице при неограниченном возрастании  $m$ .

Используя формулу Стирлинга, из (2.11) с точностью до малых порядка  $1/\sqrt{n}$  можно получить следующее асимптотическое равенство, иногда называемое **локальной формулой Муавра—Лапласа**

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (2.15)$$

где 
$$\sigma = \sqrt{npq}. \quad (2.16)$$

Вероятность того, что число появлений события А при  $n$  независимых испытаниях находится в пределах от  $k_1$  до  $k_2$ , определяется так называемой **интегральной теоремой Лапласа**

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = F_{\text{cr}}(b) - F_{\text{cr}}(a), \quad (2.17)$$

где  $a = (k_1 - np)/\sigma$ ,  $b = (k_2 - np)/\sigma$ ,  $\sigma$  – определяется соотношением (2.16), а таблица значений функции  $F_{\text{cr}}(x)$  приведена в прил. 1.

Погрешность, сопровождающую использование в расчетах вместо (2.17) асимптотики Муавра-Лапласа, можно охарактеризовать соотношением [10]

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - [F_{\text{cr}}(b) - F_{\text{cr}}(a)] \right| \leq 0,4 \cdot \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}, \quad (2.18)$$

т.е. погрешность расчетов не превышает величины  $0,4/\sqrt{npq}$ .

***Пример 6:** Определить вероятность того, что при подбрасывании монеты  $n = 10^4$  раз частота наблюдения герба будет отличаться от  $1/2$  более чем на  $0,5\%$ .*

***Решение.** При  $n = 10000$  «идеальным» результатом, соответствующим вероятности события  $p = 1/2$ , являлось бы наблюдение ровно  $5000$  решек и  $5000$  гербов. Отклонение час-*

тоты более чем на 0,5% означает, что число зафиксированных гербов либо меньше 4950, либо больше 5050.

С использованием асимптотики Муавра-Лапласа подсчитаем вероятность наблюдения в исследуемой последовательности независимых испытаний от 4950 до 5050 гербов. При  $n=10000$ ,  $p = 1/2$  параметрами соотношения (2.17) служат  $\sigma = \sqrt{npq} = 50$ ,  $a = -50/\sigma = -1$ ,  $b = 50/\sigma = 1$ , откуда

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx [F_{\text{ст}}(b) - F_{\text{ст}}(a)] = 0,7228.$$

Таким образом, вероятность значительного отклонения частоты наблюдения гербов от 1/2 составит

$$P\{\text{отклонение частоты превысит } 0,005\} = 1 - 0,7228 = 0,2772.$$

Полученное значение  $P \approx 27,7\%$  не является точным, но согласно (2.18) его погрешность не превышает  $0,4 \cdot (p^2 + q^2)/\sigma = 0,4 \cdot (0,5^2 + 0,5^2)/50 = 0,004$ , т.е. истинная вероятность наблюдения заметного отклонения частоты от значения 1/2 лежит в диапазоне от 0,2732 до 0,2812. Подобная погрешность результата по смыслу задачи является вполне допустимой, и потому нет никакой необходимости осуществлять точный расчет на основе (2.12), трудоемкость которого несоизмеримо выше проделанных вычислений.

Примечание. Отметим, что если бы вероятность контролируемого события вместо 1/2 составляла, скажем,  $p = 0,042$ , то параметры (2.17) оказались бы равными  $\sigma = \sqrt{npq} = 20,06$ ,  $a = -50/\sigma = -2,5$ ,  $b = 50/\sigma = 2,5$ , откуда

$$P\{ "P_A^* < 0,032" \text{ или } "P_A^* > 0,052" \} = 1 - P\{ 320 \leq k \leq 520 \} \approx \\ \approx 1 - [F_{\text{ст}}(b) - F_{\text{ст}}(a)] \approx 0,0124$$

а контроль погрешности с помощью (2.18) дает в этих условиях

значение  $0,4 \cdot (0,042^2 + 0,958^2) / 20,06 = 0,0183$ . Значение  $0,0183$  не является истинной погрешностью (для её определения нужно было бы произвести строгий расчет искомой вероятности на основе (2.12)), а лишь её оценкой сверху, но то, что возможная погрешность может быть соизмерима с самим результатом, вряд ли радует.

Итак, согласно (2.18) асимптотика Муавра-Лапласа гарантирует высокую точность расчетов при  $n \gg 1$  и вероятностях контролируемого события из диапазона  $0,1 \leq p \leq 0,9$ . Если же вероятность  $p$  происходящего в серии испытаний события близка к нулю или к единице, то погрешность, сопровождающая применение (2.17) вместо (2.12), может оказаться излишне высокой. В таких ситуациях полезно оценить применимость описанной ниже асимптотики Пуассона.

**Асимптотика Пуассона.** Применяется, если число производимых независимых испытаний велико ( $n \gg 1$ ), а вероятность появления события при одиночном испытании относительно мала, так что, скажем,  $n \cdot p \leq 10$ . Согласно этой асимптотике вероятность того, что в серии опытов событие А произойдет ровно  $k$  раз, можно оценить по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}, \quad (2.19)$$

где  $p$  – вероятность наступления события А в одиночном испытании.

Погрешность применения асимптотики Пуассона для расчета вероятностей событий в последовательности независимых испытаний можно охарактеризовать соотношением [10]

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \right| \leq \min(p, np^2). \quad (2.20)$$

*Примечание:* Более громоздкие альтернативные правила оценивания погрешностей приближения можно найти в [10, с. 48].

*Пример 7:* Пусть в каждом из  $n = 1000$  испытаний событие  $A$  может наблюдаться с вероятностью  $p = 0,003$ . Определить вероятность того, что в серии испытаний события  $A$  появится не менее 7 раз.

*Решение.* На основе асимптотики Пуассона, где  $np = 3$ , требуемую вероятность можно получить из соотношения

$$P\{k \geq 7\} = 1 - \sum_{k=0}^6 \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 1 - e^{-3} \cdot \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \frac{81}{40} + \frac{81}{80}\right) = 0,0335$$

Определяемая согласно (2.20) погрешность не должна превышать  $\min(p, p^2) = 0,003$ . Следовательно, истинная вероятность должна лежать в пределах от 0,0305 до 0,0365.

Проверим полученный результат строгим расчетом:

$$P\{k = 0\} = 1 \cdot 0,003^0 \cdot 0,997^{1000} \approx 0,0495631$$

$$P\{k = 1\} = 1000 \cdot 0,003^1 \cdot 0,997^{999} \approx 0,1491366$$

$$P\{k = 2\} = 500 \cdot 999 \cdot 0,003^2 \cdot 0,997^{998} \approx 0,2241537$$

$$P\{k = 3\} = 500 \cdot 333 \cdot 998 \cdot 0,003^3 \cdot 0,997^{997} \approx 0,2243786$$

$$P\{k = 4\} = 125 \cdot 333 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 0,003^4 \cdot 0,997^{996} \approx 0,1682839$$

$$P\{k = 5\} = 25 \cdot 333 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996 \cdot 0,003^5 \cdot 0,997^{995} \approx 0,1008691$$

$$P\{k = 6\} = 25 \cdot 111 \cdot 499 \cdot 997 \cdot 996 \cdot 995 \cdot 0,003^6 \cdot 0,997^{994} \approx 0,0503334$$

Итак, точное значение  $P\{k \geq 7\} = 1 - \sum_{j=0}^6 P\{k = j\} = 0,03328$ , т.е.

погрешность результата, полученного с использованием асимптотики Пуассона, составила примерно 0,00022 (явно меньше предельной погрешности, определяемой (2.20)).

## 2.8. Потоки событий и закон распределения Пуассона

Асимптотическая формула (2.19) использовалась выше как приближенный механизм расчета вероятностей, связанных с последовательностями независимых испытаний, однако, при небольшом изменении анализируемой ситуации формула (2.19) оказывается точной и приобретает важное самостоятельное значение. Для конкретизации таких случаев необходимо познакомиться с потоками событий.

Последовательность событий, происходящих друг за другом в некоторые моменты времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , принято называть **поток**ом. Геометрически поток событий можно изобразить в виде точек на оси времени. Различают регулярные и случайные потоки. Рассмотрим случайный поток, обладающий тремя специальными свойствами: стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

В **стационарном** потоке вероятность наступления какого-либо числа событий в течение заданного интервала времени  $\tau$  зависит только от величины этого интервала и не зависит от начала отсчета времени. Среднее число событий, приходящихся на интервал длительности  $\tau$ , остается неизменным вдоль всей временной оси и называется **интенсивностью** потока событий

$$\lambda = n_{\text{среднее}} / \tau. \quad (2.21)$$

Свойство **ординарности** заключается в том, что вероятность наступления двух и более событий на достаточно малом интервале времени является исчезающе малой в сравнении с вероятностью наступления одного события. Иными словами, ординарным считается поток относительно редких событий.

**Отсутствие последействия** в потоке означает, что отдельные события в нем происходят независимо одно от другого, так что «сгущения» событий на одном интервале не означает их обязательного «разрежения» на соседних интервалах.

Поток событий, обладающий всеми перечисленными свойствами, называется **пуассоновским**. Для подобного потока вероятность наступления за время наблюдения  $\tau$  ровно  $k$  событий равна

$$P_{\tau}(k) = \frac{(\lambda \cdot \tau)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}, \quad (2.22)$$

где  $\lambda$  – интенсивность потока событий.

Обоснование:

Разделим интервал наблюдения  $\tau$  на  $n$  одинаковых отрезков. При  $n \rightarrow \infty$  вероятностью попадания на отдельный отрезок двух и более событий можно будет пренебречь, вероятность наблюдения на нём ровно одного события составит  $\lambda\tau/n$ , а вероятность того, что ни одного события на отрезке наблюдаться не произойдёт будет равна  $1 - \lambda\tau/n$ . При этом состояния разных отрезков будут независимы по отношению друг к другу, а всю совокупность состояний можно рассматривать как последовательность независимых испытаний. И, с учетом (2.11), вероятность того, что на всём интервале наблюдения будет ровно  $k$  событий, составит  $P_k = C_n^k \cdot (\lambda\tau/n)^k \cdot (1 - \lambda\tau/n)^{n-k}$ . Запишем её в виде

$$P_k = \frac{n \cdot (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(\lambda\tau)^k}{n^k} \cdot \frac{(1 - \lambda\tau/n)^n}{(1 - \lambda\tau/n)^k}$$

и учтем, что при  $n \rightarrow \infty$  и  $k = \text{const}$   $n \cdot (n-1) \times \dots \times (n-k+1) / n^k \rightarrow 1$ ,  $(1 - \lambda\tau/n)^k \rightarrow 1$ , а  $(1 - \lambda\tau/n)^n = \left\{ (1 - \lambda\tau/n)^{n/\lambda\tau} \right\}^{\lambda\tau} \rightarrow e^{-\lambda\tau}$ . Таким образом, действительно  $P_k \rightarrow (\lambda\tau)^k \cdot e^{-\lambda\tau} / k!$

Ряд прочих свойств пуассоновского и других потоков событий будет получен и проанализирован в подразделах 3.7.5 и 4.6.

Пример 8: По эскалатору станции метро каждый час спускаются в среднем 1200 пассажиров. Определить вероятность того, что число пассажиров, сошедших с эскалатора за конкретные 15 секунд, превысит 5 человек.

Решение. Анализируемые в задаче события – сход пассажиров с эскалатора – образуют поток, который допустимо считать пуассоновским. Интенсивность потока составляет

$$\lambda = 1200 \text{ событий} / 3600 \text{ секунд} = 0,333 \text{ с}^{-1}$$

Тогда вероятности наблюдения малого числа пассажиров на интервале длиной в 15 секунд составят ( $\lambda \cdot \tau = 0,333 \cdot 15 = 5$ )

$$P_{15}(0) = e^{-5} \cdot 5^0 / 0! = 0,0067 \quad P_{15}(1) = e^{-5} \cdot 5^1 / 1! = 0,0337$$

$$P_{15}(2) = e^{-5} \cdot 5^2 / 2! = 0,0842 \quad P_{15}(3) = e^{-5} \cdot 5^3 / 3! = 0,1404$$

$$P_{15}(4) = e^{-5} \cdot 5^4 / 4! = 0,1755 \quad P_{15}(5) = e^{-5} \cdot 5^5 / 5! = 0,1755$$

а вероятность схода более чем 5 пассажиров равна

$$P = 1 - 0,0067 - 0,0337 - 0,0842 - 0,1404 - 0,1755 - 0,1755 = 0,3841.$$

## 2.9. Формула полной вероятности. Теорема о гипотезах

Если условия проведения некоторого опыта со случайным исходом представляют собой несколько взаимоисключающих случайных событий, образующих полную группу, то такие события принято называть **гипотезами** и обозначать  $H_1, H_2 \dots H_N$ . Любое событие  $A$ , которым может закончиться подобный опыт, будет, таким образом, всегда наблюдаться совместно с одной из этих гипотез. Если вероятности реализации всех гипотез  $P\{H_i\}$  известны, и известны также условные вероятности события  $A$  при каждой из гипотез  $P\{A|H_i\}$ , то определить вероятность наступления события  $A$  можно по правилу

$$P\{A\} = \sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A|H_i\}, \quad (2.23)$$

где суммирование производится по всем возможным гипотезам.

Правило (2.23) называют формулой полной вероятности.

Пример 9: При передаче сообщений, закодированных в двоичной форме, вероятность искажения нулей (т.е. приема их

как единицы) составляет 5%. Может ли в подобных условиях полная вероятность ошибочного приема символов сообщения оказаться меньше 2% ?

Решение. Описанная ситуация характеризуется существенной неопределенностью, т.к. в условии не задана ни вероятность искажения единичных символов, ни соотношение числа единиц и нулей в сообщении. Опишем ситуацию более подробно.

Двоичная форма представления сообщения означает, что передатчик будет излучать лишь радиосигналы, соответствующие символам '0' и '1'. Таким образом, относительно условий приёма символов сообщения можно выдвинуть лишь 2 гипотезы:  $H_0$  = «передатчик излучал '0'» и  $H_1$  = «передатчик излучал '1'». Вероятности этих гипотез можно представить в виде  $P\{H_0\} = p_0$  и  $P\{H_1\} = 1 - p_0$ , где  $p_0$  – неизвестная величина, удовлетворяющая неравенству  $0 \leq p_0 \leq 1$  и определяемая реально числом единиц и нулей в передаваемом сообщении.

Рассмотрим событие  $A$  = “при приеме символа сообщения возникла ошибка”. По условию  $P\{A | H_0\} = 0,05$ , а вероятность  $P\{A | H_1\}$  не задана; обозначим её через  $p_{10}$ . Тогда полную вероятность ошибки при приёме символов сообщения можно представить в виде  $P\{A\} = p_0 \cdot 0,05 + (1 - p_0) \cdot p_{10}$ , и из требования  $P\{A\} < 0,02$  получаем

$$p_{10} < \frac{0,02 - p_0 \cdot 0,05}{(1 - p_0)}.$$

Вероятность  $p_{10}$  также должна удовлетворять неравенству  $0 \leq p_{10} \leq 1$ , поэтому для выполнения предыдущего неравенства и, как следствие, требований задачи вероятность  $p_0$  следует выбирать из интервала  $0 \leq p_0 < 0,4$ . Рассмотрим ряд частных случаев, при которых обеспечивается вероятность ошибочного приема не превышающая 2%:

А. При  $p_0 = 0,0$  из полученного выше неравенства следует  $p_{10} < 0,02$ . Действительно, если сообщение совсем не содержит нулевых символов, то вероятность их искажения уже никак не влияет на итоговую вероятность ошибки. Важно лишь, чтобы вероятность искажения прочих (реально передаваемых) символов сообщения не превышала требуемой величины.

Б. При  $p_0 = 0,2$  требуется  $p_{10} < 0,0125$ . В подобном случае нулевые символы в сообщении есть, и хотя их лишь 20% искажаются они (согласно условию) часто, что дает заметный вклад в общую вероятность ошибки. Как следствие, требования к отсутствию ошибок при передаче прочих символов сообщения становятся сравнительно жесткими.

В. При  $p_0 = 0,39$  имеем  $p_{10} < 0,0008$ , т.е. для обеспечения требуемой общей вероятности ошибки при передаче единичных символов сообщения требуется, по сути, безошибочный прием, т.к. все резервы “съедаются” часто искажающимися нулевыми символами.

Используемые в (2.23) вероятности  $P\{H_i\}$  характеризуют возможность реализации каждой из гипотез по состоянию на момент до проведения опыта и называются **априорными** (доопытными). Информация же о том, чем завершился опыт, влияет на распределение вероятностей между гипотезами и после проведения опыта вероятность того, что в проведенном опыте реализовалась гипотеза  $H_i$ , оказывается отличающейся от исходной и называется **апостериорной** (послеопытной). При условии, что в проведенном опыте событие  $A$  произошло, эту апостериорную вероятность можно рассчитать по теореме о гипотезах:

$$P\{H_i|A\} = \frac{P\{H_i\} \cdot P\{A|H_i\}}{\sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A|H_i\}} = P\{H_i\} \cdot \frac{P\{A|H_i\}}{P\{A\}}. \quad (2.24)$$

Соотношение (2.24) часто называют также **формулой Байеса**.

Примечание: Томас Байес (1702–1761) – английский математик и священник, который первым предложил использование теоремы для корректировки убеждений, основываясь на обновлённых данных. Его работа «An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances» впервые опубликована в 1763 году[2], через два года после смерти автора.

Пример 10: В сообщении, закодированном в двоичной форме, число нулей вдвое меньше числа единиц. Вероятность искажения при передаче составляет для нулей  $p\{0 \rightarrow 1\} = 3/8$ , а для единиц  $p\{1 \rightarrow 0\} = 1/8$ . При передаче сообщения в какой-то момент на приемной стороне последними принятыми символами оказались “10”. Оценить вероятности того, что эти символы были получены при передаче комбинаций “00”, “01”, “10” и “11”.

Решение. Возможность передачи символьных комбинаций требуется оценить не в произвольный момент времени, а именно тогда, когда на приёмной стороне оказалась зафиксированной комбинация “10”, т.е. вычисляемые вероятности являются условными. Для математической записи этих вероятностей можно было бы, в принципе, использовать произвольные обозначения, однако весьма полезно отметить следующее:

Появление каких-то символов на приемной стороне, является следствием излучения передатчиком соответствующих радиосигналов, которые могут быть восприняты на приемной стороне корректно, либо искаженно. Информационные символы сообщения составляют случайную последовательность, поэтому как тип излученных сигналов, так и возникновение искажений при их приеме являются случайными событиями. Первое из этих событий определяет случайные условия дальнейшего развития ситуации и включает взаимоисключающие варианты, которые и образуют соответствующий решаемой задаче набор гипотез. Фиксация на приемной стороне комбинации “10” возможна лишь как следствие событий

гипотеза  $H_{00}$  – «передавали 00»;

гипотеза  $H_{01}$  – «передавали 01»;

гипотеза  $H_{10}$  – «передавали 10»;

гипотеза  $H_{11}$  – «передавали 11».

и если теперь зафиксированный итог «принятыми оказались символы “10”» рассматривать как некое событие  $A$ , то рассчитываемые вероятности есть ни что иное, как  $P\{H_{ij} | A\}$ , т.е. апостериорные вероятности гипотез при зафиксированном конечном событии  $A$ . Расчет апостериорных вероятностей событий базируется на формуле Байеса (2.24), поэтому необходимо определить величину вероятностей, входящих в состав данной формулы.

Будем полагать, что единичные и нулевые символы сообщения хаотично перемешаны и обозначим вероятность передачи в конкретный момент времени нуля через  $p_0$ , а вероятность передачи единицы – через  $p_1$ . Тогда согласно условию, справедливо

$$\begin{cases} p_0 = p_1 / 2 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 1/3 \\ p_1 = 2/3 \end{cases}$$

О взаимозависимости символов сообщения в условии ничего не говорится, поэтому будем полагать, что излучение любого из информационных символов не увеличивает и не уменьшает вероятность того, что следующим символом будет ноль или единица. Для независимых событий имеем

$$P\{H_{00}\} = p_0 \cdot p_0 = 1/9;$$

$$P\{H_{01}\} = p_0 \cdot p_1 = 2/9;$$

$$P\{H_{10}\} = p_1 \cdot p_0 = 2/9;$$

$$P\{H_{11}\} = p_1 \cdot p_1 = 4/9.$$

Полезно заметить, что вероятности всех гипотез составляют в сумме ровно единицу; иное значение суммы указывало бы на наличие какой-то ошибки в рассуждениях или расчетах.

Для реализации события  $A =$  «принятыми оказались символы “10”» при гипотезе  $H_{00}$  необходимо, чтобы «первый ноль при передаче исказился, а второй – был принят корректно»; соответствующая вероятность равна

$$P\{A | H_{00}\} = p\{0 \rightarrow 1\} \cdot (1 - p\{0 \rightarrow 1\}) = 3/8 \cdot 5/8 = 15 / 64.$$

Аналогично, при прочих гипотезах условные вероятности наступления события  $A$  будут равны

$$P\{A | H_{01}\} = p\{0 \rightarrow 1\} \cdot p\{1 \rightarrow 0\} = 3/8 \cdot 1/8 = 3 / 64;$$

$$P\{A | H_{10}\} = (1 - p\{1 \rightarrow 0\}) \cdot (1 - p\{0 \rightarrow 1\}) = 7/8 \cdot 5/8 = 35 / 64;$$

$$P\{A | H_{11}\} = (1 - p\{1 \rightarrow 0\}) \cdot p\{1 \rightarrow 0\} = 7/8 \cdot 1/8 = 7 / 64.$$

Осталось рассчитать стоящую в знаменателе (2.24) полную вероятность события  $A$ , характеризующую безусловную вероятность его наблюдения (усредненную по всем возможным на практике гипотезам)

$$P\{A\} = \sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A|H_i\} = \frac{1 \cdot 15}{9 \cdot 64} + \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 64} + \frac{2 \cdot 35}{9 \cdot 64} + \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 64} = \frac{119}{9 \cdot 64}$$

Теперь все входящие в формулу Байеса (2.24) вероятности определены и можно приступать к оценке вероятности того, что принятые символы “10” были получены при передаче комбинаций “00”, “01”, “10” и “11”:

$$P\{H_{00} | A\} = \frac{P\{H_{00}\} \cdot P\{A | H_{00}\}}{P\{A\}} = \frac{1 \cdot 15}{9 \cdot 64} / \frac{119}{9 \cdot 64} = \frac{15}{119};$$

$$P\{H_{01} | A\} = \frac{P\{H_{01}\} \cdot P\{A | H_{01}\}}{P\{A\}} = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 64} / \frac{119}{9 \cdot 64} = \frac{6}{119};$$

$$P\{H_{10} | A\} = \frac{P\{H_{10}\} \cdot P\{A | H_{10}\}}{P\{A\}} = \frac{2 \cdot 35}{9 \cdot 64} / \frac{119}{9 \cdot 64} = \frac{70}{119};$$

$$P\{H_{11} | A\} = \frac{P\{H_{11}\} \cdot P\{A | H_{11}\}}{P\{A\}} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 64} / \frac{119}{9 \cdot 64} = \frac{28}{119}.$$

Обратите внимание на несколько особенностей полученных результатов:

1. Так как « $15+6+70+28=119$ », то сумма всех полученных вероятностей составляет ровно единицу, что вполне справедливо, т.к. и при произошедшем событии  $A$  анализируемые гипотезы составляют в совокупности полную группу событий.

2. Применительно к гипотезе  $H_{00}$  поправочный коэффициент к априорной вероятности гипотезы оказывается равным  $\frac{P\{A|H_i\}}{P\{A\}} = \frac{15}{64} / \frac{119}{9 \cdot 64} = \frac{15 \cdot 9}{119} \approx 1,13$ , поэтому хотя результаты опыта, казалось бы, свидетельствуют в пользу ситуации  $H_{10}$  вероятность гипотезы  $H_{00}$  всё же не уменьшается, а чуть увеличивается (оставаясь по абсолютной величине малой).

2. Для получения результата  $A$  при гипотезе  $H_{01}$  должны произойти сразу два маловероятных искажения сигналов, поэтому апостериорная вероятность этой гипотезы оказывается почти нулевой.

3. Апостериорная вероятность гипотезы  $H_{10}$  существенно увеличилась по сравнению с априорной (с «2/9» до «2/5»). Действительно, реализация события  $A$  при этой гипотезе не требует искажений сигналов и потому результат  $A$  является весомым подтверждением возможности того, что передатчиком в эфир излучалась именно комбинация символов «10».

4. Вероятность  $P\{H_{11} | A\}$  несмотря на существенное снижение по отношению к априорной  $P\{H_{11}\}$  с «4/9» до «28/119» остаётся всё же довольно высокой (23,5%). Объяснением этому служит очень высокая априорная вероятность, указывающая на то, что сочетание двух единиц в передаваемом сообщении исходно наблюдается чуть ли не в половине случаев.

Итак, теорема о гипотезах (формула Байеса) численно определяет перераспределение вероятностей разных гипотез в соответствии с той информацией, которую дал проведенный опыт. Вероятности гипотез, хорошо согласующихся с наступившим событием, увеличиваются. Вероятности гипотез, при которых наступившее событие наблюдается редко, уменьшаются. Вместе с тем, апостериорные вероятности ни одной из гипотез не оказываются нулевыми, т.к. даже крайне маловероятные сочетания событий всё же иногда могут происходить.

### 3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

#### 3.1. Случайные величины и их классификация

Рассматривавшиеся в предыдущих разделах случайные события являются удобным математическим аппаратом в тех случаях, когда в опытах со случайным исходом интересующее нас событие может лишь произойти или не произойти. Если же опыт характеризуется большой совокупностью вариантов завершения, то использовать случайные события оказывается уже не удобно. Например, анализируя прибытие на железнодорожный вокзал какого-то поезда можно, конечно, ограничиться рассмотрением таких исходов как «поезд прибыл вовремя» и «поезд опоздал», но с позиции людей, ожидающих этот поезд, существенной оказывается ещё и степень опоздания. Попытка использовать вспомогательные события, такие как, «опоздал менее чем на 5 минут», «опоздал менее чем на 30 минут» или «опоздал более чем на полчаса» позволяют уточнить ситуацию, однако удачным такой подход также не является. Гораздо практичнее зафиксировать конкретную величину опоздания (равную 0 при своевременном прибытии поезда). Это и приводит нас к понятию случайной величины (СВ)..

Случайная величина — это результат опыта со случайным исходом, представленный в численной форме. Если первая попытка проведения опыта даёт результат  $x_1$ , его повторение в тех же условиях влечет появление результата  $x_2$ , а последующие попытки завершаются фиксацией значений  $x_3, x_4, \dots, x_n$ , хаотично сменяющих друг друга, то можно говорить о наблюдении случайной величины, множество возможных значений которой включает величины  $x_1 \dots x_n$ . Для обозначения случайных величин условимся в дальнейшем использовать буквы греческого алфавита  $\xi$  (“кси”),  $\eta$  (“эта”),  $\zeta$  (“дзета”) и т.п.

Рассмотрим ряд примеров:

1. Пусть случайная величина  $\xi$  (“кси”) – это цифра, наблюдаемая после броска игрального кубика на его верхней грани. Тогда множество возможных значений СВ  $\xi$  включает ровно 6 цифр – от  $x_1 = 1$  до  $x_6 = 6$ .

2. В цифровых системах связи для передачи информации используется ограниченный набор сигналов, так что сигналу, излучаемому передатчиком в каждый конкретный момент времени, обязательно можно поставить в соответствие некий номер, характеризующий расположение передаваемого сигнала в общем перечне разрешенных сигналов. Для любой реальной системы связи содержимое передаваемых сообщений является случайным (т.к. если бы оно было predetermined, то не было необходимости даже включать передатчик), поэтому и порядковый номер сигнала, излучаемого в произвольный момент времени, представляет собой случайную величину  $\eta$  (“эта”). Множество её значений  $y_1 \dots y_n$  является ограниченным и упорядоченным, хотя его объем потенциально может быть и весьма большим.

3. Представим себе, что для подсчета посетителей некоторого сайта на нем установили счетчик. Рассмотрим случайную величину  $\zeta$  (“дзета”), представляющую собой число посетителей сайта за первый месяц работы. Естественно, что отрицательных значений СВ  $\zeta$  принимать не может, а вот значение  $z_0 = 0$  хотя и не соответствует нормальной работе сайта, относится к вполне возможным. Любые натуральные числа, естественно, также будут входить в область возможных значений СВ  $\zeta$ , а вот указать для них какую-то конкретную границу сверху в анализируемом случае проблематично, т.е. область значений оказывается формально не ограниченной.

Во всех рассмотренных примерах значения СВ являлись упорядочиваемыми последовательностями, т.е. их можно было пронумеровать и расположить относительно друг друга в каком-то конкретном порядке. Подобные множества значений называют **счётными**. Случайные величины, обладающие счетным множеством значений, называют **дискретными**.

Рассмотрим теперь ряд других примеров:

4. Радиотехнические устройства состоят из множества элементов. Даже при самом тщательном контроле технологических особенностей изготовления этих элементов добиться на практике идентичности их параметров невозможно, поэтому, скажем, точное сопротивление некоторого выбранного для проверки резистора всегда представляет собой случайную величину  $\xi$ . Диапазон возможных значений СВ  $\xi$  при должном качестве изготовления не является широким, однако в пределах этого диапазона сопротивление резистора  $x_i$  может быть каким угодно, пробегая всю последовательность вещественных значений.

5. Представим, что в нашем распоряжении имеется множество тщательно откалиброванных однотипных генераторов гармонических колебаний. При одинаковой настройке органов управления этих генераторов они обязаны формировать сигналы одной и той же частоты и амплитуды, однако, если мы проведем реальный эксперимент, используя достаточно точные приборы для измерения параметров излучаемых сигналов, то убедимся, что и частоты, и амплитуды колебаний немного отличаются друг от друга. Итак, частота  $\eta$  (“эта”) и амплитуда  $\zeta$  (“дзета”) конкретного генератора представляют собой случайные величины и могут принимать произвольные вещественные значения в пределах каких-то интервалов на оси частот и напряжений.

Обратите внимание на следующие особенности рассмотренных примеров:

- а) значения СВ занимают ограниченные или неограниченные области вещественной оси (иначе говоря, величины оказываются представленными континуумом значений);
- б) между любыми двумя «разрешенными» значениями СВ существует бесконечное число промежуточных – также «разрешенных», поэтому предложить какой-то способ упорядочения всего набора значений – невозможно;

в) в пределах области допустимых значений любому невырожденному интервалу можно поставить в соответствие некоторую положительную вероятность наблюдения соответствующих значений, но число отдельных значений СВ, содержащихся в сколь угодно узком интервале, бесконечно велико, и вероятность принятия случайной величиной какого-то конкретного заранее выбранного значения бесконечно мала  $P\{\xi = x_i\} = 0$ .

Подобные рассмотренным случайные величины, принимающие **несчётное** множество значений, называют **непрерывными**.

6. Проанализируем теперь величину  $\xi$  – время наработки на отказ обычной лампочки накаливания, отсчитываемое от момента её первого включения. К возможным значениям СВ относятся любые неотрицательные вещественные числа, однако если в ходе работы все «соседние» моменты времени с позиций опасности выхода лампочки из строя являются однопозиционными, то в моменты включения и выключения лампочки вероятность её выхода из строя существенно возрастает. Итак, большая часть конкретных значений времени наработки на отказ (аналогично непрерывным СВ) характеризуется бесконечно малыми вероятностями их наблюдения. Но существуют отдельные значения СВ, например,  $x_i = 0$ , для которых подобно дискретным случайным величинам вероятности наблюдения оказываются положительными. Случайные величины, подобные рассмотренной, называют **смешанными**.

Итак, в зависимости от характеристик множества возможных значений случайные величины можно разделить на

- а) дискретные (принимают счетное множество значений);
- б) непрерывные (имеют несчетное множество значений, каждое из которых наблюдается с бесконечно малой вероятностью);
- в) смешанные (характеризуются несчетным множеством значений, среди которых отдельные конкретные значения наблюдаются с вероятностью  $P\{\xi = x_i\} > 0$ ).

### 3.2. Понятие закона распределения случайной величины

Друг от друга случайные величины отличаются не только множеством своих возможных значений, но и распределением вероятностей практического наблюдения этих значений.

Правило, определяющее вероятности принятия случайной величиной её возможных значений, называют её **законом распределения**. Конкретных форм (способов) представления подобного правила может быть очень много; закон распределения может быть задан текстовым описанием, формулой, таблицей, рисунком и т.п. Выбор способа записи закона распределения определяется типом (особенностями поведения) СВ, а также решаемой задачей. Наиболее употребительные варианты записи закона распределения и взаимосвязь между ними будут представлены в следующих 3 подразделах пособия.

### 3.3. Ряд распределения дискретной случайной величины

**Ряд распределения** – это табличная форма представления закона распределения, используемая для описания свойств дискретных случайных величин (ДСВ). Таблица, образующая ряд распределения, состоит из 2 строк, в первой из которой в порядке возрастания перечисляются возможные значения ДСВ, а во второй – приведены вероятности наблюдения каждого из этих значений.

Таблица 2

Общий вид ряда распределения случайной величины

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

Предполагается, что верхняя строчка таблицы должна включать в себя все возможные значения СВ (при бесконечном их количестве после нескольких начальных элементов в таблице указывают способ расчета (предсказания) последующих значений).

Соответственно, набор событий  $A_i = \{ \xi = x_i \}$ , рассматриваемый для всех возможных значений случайной величины (для всех  $i$ ), обязательно образует полную группу событий, и для величин  $p_i = P\{ \xi = x_i \}$ , заполняющих нижнюю строку ряда распределения, справедливы соотношения

$$\begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1, \\ \sum_i p_i = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Нижнюю равенство в (3.1) называют свойством нормировки ряда распределения.

Пример 1: Из набора костяшек для домино случайным образом выбирается одна кость. Величина  $\xi$  равна абсолютной величине разности значений на разных половинках этой кости. Необходимо построить ряд распределения СВ  $\xi$ .

Решение: Наименьшим значением СВ  $\xi$  является нулевое, наблюдаемое при выборе «дубля». В набор входит 7 дублей, поэтому вероятность подобного выбора среди 28 костяшек набора составляет  $P\{ \xi = 0 \} = 7 / 28$ . Ровно на единицу отличаются значения на костяшках “0-1”, “1-2”, “2-3”, “3-4”, “4-5” и “5-6”, таким образом  $P\{ \xi = 1 \} = 6 / 28$ . Отличие на 2 наблюдается для 5 костяшек, на 3 – для 4, на 4 – для 3, на 5 – для 2. Наконец, наибольшая разница, порождающая значение  $\xi = 6$ , соответствует выбору костяшки “0-6” и наблюдается с вероятностью  $P\{ \xi = 6 \} = 1 / 28$ . Как следствие, ряд распределения исследуемой величины  $\xi$  приобретает вид

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$p_i$	7/28	6/28	5/28	4/28	3/28	2/28	1/28

Суммируя вероятности, составляющие нижний ряд приведенной таблицы, нетрудно заметить, что свойство нормировки для неё выполняется.

### 3.4. Типовые законы распределения дискретных случайных величин

Разнообразных распределений дискретных случайных величин (ДСВ) существует бесконечно много, однако среди них можно выделить несколько достаточно простых по свойствам и часто встречающихся на практике.

#### 3.4.1. Равномерное распределение ДСВ

Этот вид распределения ДСВ соответствует случаям, когда существует лишь несколько равновероятных значений случайной величины. Соответствующий ряд распределения будет иметь вид

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_N$
$p_i$	$1/N$	$1/N$	...	$1/N$

где  $N$  – число «разрешенных» (наблюдаемых) значений СВ.

Примером ДСВ, подчиняющейся подобному распределению, может служить цифра, наблюдаемая после броска на верхней грани игрального кубика. Действительно, любая из шести граней кубика может равновероятно оказаться верхней, поэтому каждое из возможных значений от  $x_1 = 1$  до  $x_6 = 6$  имеет одинаковые шансы  $p_i = 1/6$  стать результатом очередного опыта.

Равномерное распределение используют также как первое приближение реальной ситуации в тех случаях, когда истинное распределение ДСВ неизвестно, однако число возможных значений ограничено и нет оснований полагать какие-то из них возникающими в опыте чаще, чем другие. Например, если известен конкретный набор сигналов, используемый противником для передачи информации, а сведения о частоте применения разных сигналов из этого набора отсутствуют, то до сбора статистики, характеризующей возможность появления отдельных сигналов набора, можно полагать сигналы исполь-

зумыми равновероятно. Тогда номер сигнала, который будет задействован противником в очередном сеансе связи, окажется дискретной СВ с равномерным распределением.

*Примечание:* Полезно иметь в виду, что наряду с равномерным распределением ДСВ существует и равномерное распределение для величин непрерывных, отличающееся по свойствам от рассмотренного выше. Это распределение будет рассмотрено в п. 3.7.1.

### 3.4.2. Геометрическое распределение ДСВ

Этот вид распределения ДСВ появляется при рассмотрении последовательности независимых испытаний.

Пусть производится ряд однотипных независимых опытов, в каждом из которых с одной и той же вероятностью  $p_1$  может наблюдаться некоторое событие А. Обозначим через  $\xi$  число неудачных попыток, которые придется проделать в конкретной серии испытаний до первого появления события А. Тогда наименьшим значением, которое сможет принять СВ  $\xi$ , будет нулевое, соответствующее экспериментам, где событие А наступает в первом же опыте. Вероятность такого развития событий, очевидно, составляет  $P\{\xi = 0\} = p_1$ .

Для появления значения СВ  $\xi$ , равного  $k$ , необходимо, чтобы ровно  $k$  первых опытов в последовательности испытаний были неудачными, а завершающий последовательность  $(k+1)$ -й опыт характеризовался наступлением события А. Вероятность такого развития событий будет равна  $P\{\xi = k\} = (1 - p_1)^k \cdot p_1$ .

В итоге ряд распределения СВ  $\xi$ , имеющей геометрическое распределение, принимает вид

$x_i$	0	1	...	k	...
$p_i$	$p_1$	$(1 - p_1)^1 \cdot p_1$	...	$(1 - p_1)^k \cdot p_1$	...

Нетрудно заметить, что вероятности, составляющие нижнюю строку ряда распределения, образуют геометрическую прогрессию

сию со знаменателем  $q = (1 - p_1)$ . Данный факт и послужил первопричиной соответствующего названия для самого закона распределения.

Обратите внимание, что при  $p_1 \approx 0$  многие близкие к нулю значения СВ  $\xi$  будут характеризоваться почти совпадающими вероятностями; при  $p_1 \approx 1$  наибольшей окажется вероятность  $P\{\xi=0\} = p_1$ , а каждое последующее значение, начиная с  $\xi = 1$ , будет характеризоваться резко уменьшающейся вероятностью, однако в любом из этих случаев сумма всех вероятностей из нижней строки таблицы будет составлять ровно 1.

Действительно, сумма элементов бесконечной геометрической прогрессии, начинающейся с  $a_1$  и имеющей знаменатель  $q$ , составляет

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (3.2)$$

Для представленного в таблице выше набора вероятностей соотношение (3.2) дает  $S_{\infty} = p_1 / [1 - (1 - p_1)] = 1$ , что подтверждает справедливость свойства нормировки, обсуждавшегося в (3.1), и для геометрического распределения.

Кстати, если в тех же условиях неограниченной последовательности независимых испытаний фиксировать величину  $\zeta$  – общее число удачных и неудачных испытаний, предшествующих наступлению  $r$ -го очередного “успеха”, то распределение вероятностей СВ  $\zeta$  будет иметь вид

$$P\{\zeta = k\} = C_{r+k-1}^{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^k, \quad k \geq 0 \quad (3.3)$$

и называться распределением Паскаля.

### **3.4.3. Биномиальное, пуассоновское и гипергеометрическое распределения**

Некоторые из часто наблюдаемых на практике распределений ДСВ были нами уже (в неявной форме) рассмотрены ранее при обсуждении способов расчета вероятностей сложных событий.

Например, в п.2.5 (как и в предыдущем п.3.4.2) обсуждалось проведение серии однотипных независимых опытов, в каждом из которых с одной и той же вероятностью  $p$  может наблюдаться событие  $A$ . Но если в п.3.4.2 испытания проводились до первого удачного, то в п.2.5 число опытов в серии было фиксированным и составляло  $n$  испытаний. Если число опытов, в которых при проведении серии из  $n$  испытаний будет зафиксировано событие  $A$ , рассматривать как дискретную случайную величину  $\xi$ , то согласно (2.11) для неё вероятность принятия конкретных целочисленных значений  $k$  составляет

$$P\{ \xi = k \} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (3.4)$$

Распределение (3.4) называют **биномиальным**.

Вместо упорядоченных серий испытаний на практике часто могут наблюдаться также потоки событий, о которых говорилось в п.2.8. Если поток наблюдаемых событий является пуассоновским (признаки см. на с.47), то случайная величина  $\eta$  – число событий, происходящих на временном интервале длительности  $\tau$ , будет подчиняться закону распределения **Пуассона**

$$P\{ \eta = k | \tau \} = \frac{(\lambda \cdot \tau)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}, \quad k \geq 0 \quad (3.5)$$

где  $\lambda$  – интенсивность потока событий (2.21).

Наконец, некоторые из рассмотренных выше задач можно преобразовать к следующей схеме:

В некоторой ёмкости находятся  $n$  однотипных шаров, среди которых  $b$  шаров - белые, а остальные  $(n - b)$  имеют другой цвет. Из ёмкости вынимают наугад  $r$  шаров. Случайное количество  $\zeta$  белых шаров среди вынутого набора  $r$  шаров будет подчиняться **гипергеометрическому** закону распределения

$$P\{ \zeta = k \} = C_b^k \cdot C_{n-b}^{r-k} / C_n^r, \quad (3.6)$$

где  $\max(0, b + r - n) \leq k \leq \min(b, r)$ .

*Примечание:* Все рассмотренные выше распределения относились к дискретным случайным величинам, значения которых можно было выразить некоторым набором чисел, либо просто перечислить в таблице; это позволяло использовать для их описания ряд распределения. Но непрерывные и смешанные СВ обладают несчётным множеством значений, не допускающим упорядочения элементов, поэтому для записи их законов распределения вместо ряда распределения необходимо использовать иной вариант представления информации, не требующий табличного перечисления значений СВ.

### 3.5. Функция распределения вероятностей СВ

**Функция распределения вероятностей (ФРВ)** случайной величины  $\xi$  имеет единственный аргумент  $x$  и показывает зависимость от этого аргумента вероятности наблюдения значений СВ  $\xi$ , меньших чем  $x$

$$F_{\xi}(x) = P\{ \xi < x \}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим основные свойства функций распределения:

1. Это безразмерная функция, принимающая значения

$$0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1. \quad (3.8)$$

2. Если диапазон значений, принимаемых случайной величиной, ограничен слева значением  $x_{\min}$ , то

$$F_{\xi}(x) = 0 \quad \text{для всех } x \leq x_{\min}, \quad (3.9)$$

а при бесконечном диапазоне значений СВ  $\xi$  справедливо

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0 \quad (3.10)$$

т.к. характеризует вероятность наступления невозможного события « $\xi < -\infty$ ».

3. Если наибольшим значением, принимаемым случайной величиной, является значение  $x_{\max}$ , то

$$F_{\xi}(x) = 1 \quad \text{для всех } x > x_{\max}, \quad (3.11)$$

и в любом случае справедливо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1, \quad (3.12)$$

т.к. какое бы значение ни приняла в опыте величина  $\xi$  соотношение « $\xi < +\infty$ » окажется истинным.

4. По известной функции распределения легко рассчитать вероятность попадания значений СВ в интервал от  $a$  до  $b$

$$P\{a \leq \xi < b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a). \quad (3.13)$$

Действительно, используя произвольную точку  $a < b$ , любой интервал  $x < b$  (такой как (1) на рис. 8) можно разбить на аналогичный интервал  $x < a$  (см. (2) на рис. 8) и отрезок  $a \leq x < b$ . Области  $x < a$  и  $a \leq x < b$  не имеют общих точек, поэтому попадание значений  $\xi$  в каждую из них – это несовместные события, а объединение этих событий эквивалентно попаданию в интервал  $x < b$ . Таким образом,  $P\{\xi < b\} = P\{\xi < a\} + P\{a \leq \xi < b\}$  или, учитывая определение (3.7),  $F_{\xi}(b) = F_{\xi}(a) + P\{a \leq \xi < b\}$ , откуда непосредственно следует (3.13).

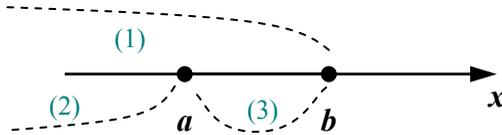


Рис. 8. К обоснованию свойства 4 функции распределения

5. Функция распределения любой СВ является неубывающей функцией своего аргумента, т.е. для любых  $x_1 < x_2$

$$F_{\xi}(x_1) \leq F_{\xi}(x_2). \quad (3.14)$$

Действительно, левая часть равенства (3.13) не может быть отрицательной, значит,  $F_{\xi}(b)$  не может быть меньше  $F_{\xi}(a)$ . Впрочем, тот же вывод можно было сделать и на основании «физических»

рассуждений: если  $x_2 > x_1$ , то  $F_\xi(x_2)$  характеризует вероятность попадания в интервал, расширенный по отношению к тому, который соответствует  $F_\xi(x_1)$ ; естественно, при расширении интервала вероятность попадания в него уменьшиться не может.

6. С использованием функции распределения вероятность наблюдения отдельных значений СВ может быть определена как

$$P\{\xi = c\} = \lim_{x \rightarrow c+0} F_\xi(x) - \lim_{x \rightarrow c-0} F_\xi(x). \quad (3.15)$$

Пример 2: В отсутствие устройств внешней синхронизации генератор гармонических колебаний формирует сигналы, начальная фаза  $\xi$  которых может равновероятно принимать любые значения из диапазона от 0 до  $2\pi$ . Построить функцию распределения СВ  $\xi$ .

Решение: Наименьшим значением СВ  $\xi$  является нулевое, поэтому для любых отрицательных значений аргумента  $x$  выполнение соотношения " $\xi < x$ " является невозможным; таким образом для всех  $x < 0$  справедливо  $F_\xi(x) = 0$ .

Аналогично, поскольку любые значения  $\xi$  не превышают  $2\pi$ , то неравенство " $\xi < x$ " будет гарантировано выполняться для любых  $x > 2\pi$ , и для всех подобных аргументов  $F_\xi(x) = 1$ .

Наконец, из равной вероятности наблюдения значений, принадлежащих интервалу  $0 \dots 2\pi$ , следует, что вероятность выполнения неравенства " $\xi < x$ " с ростом аргумента  $x$  будет нарастать линейно (т.е. пропорционально  $x$ ). Для прохождения через упомянутые выше граничные точки  $F_\xi(0) = 0$  и  $F_\xi(2\pi) = 1$  коэффициент пропорциональности в линейной зависимости должен быть равным  $k = 1 / 2\pi$ . Соответствующая функция распределения представлена на рис. 9. Несложно убедиться, что она удовлетворяет всем первым пяти свойствам, перечисленным выше, а из свойства №6 и непрерывного характера зависимости  $F_\xi(x)$  следует, что для всего диапазона изменения

СВ вероятность появления конкретного (выбранного заранее) значения является бесконечно малой величиной  $P\{\xi = c\} = 0$ .

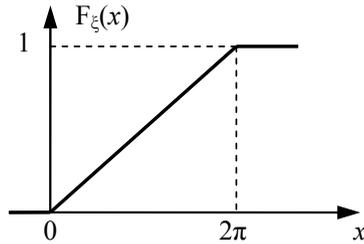


Рис. 9. Функция распределения случайной начальной фазы  $\xi$

Пример 3: Построим функцию распределения вероятностей СВ  $\xi$  из рассмотренного на странице 61 примера 1 про разность значений на половинках кости для домино.

Решение: Для анализируемой СВ наименьшим возможным значением является нулевое, поэтому для любых отрицательных значений  $x$  справедливо  $F_\xi(x) = 0$ .

Рассмотрим значения  $x$ , лежащие между 0 и 1. Для таких аргументов требование “ $\xi < x$ ” выполняется лишь в тех опытах, в которых СВ  $\xi$  принимает нулевое значение, а значит для всех подобных  $x$  значение ФРВ остается постоянным и равным  $F_\xi(x) = 7/28$ . Причем на уровень “7/28” функция распределения переходит скачкообразно в точке  $x = 0$ , формируя на графике в этой точке «ступеньку» (см. рис. 10).

Для аргументов  $x$ , лежащих между 1 и 2, событие “ $\xi < x$ ” наблюдается, если величина  $\xi$  принимает в опыте или нулевое, или единичное значение. Объединение указанных несовместных событий характеризуется вероятностью  $P = 7/28 + 6/28 = 13/28$ , а факт постоянства ФРВ на интервале от 1 до 2 приводит к появлению на её графике ещё одной ступеньки высотой  $6/28 = P\{\xi = 1\}$ .

Аналогично рассмотренному, каждому прочему разрешенному (наблюдаемому) значению  $x_i$  на графике ФРВ соответствует ступенька, координата которой по оси  $x$  равна  $x_i$ , а высота – вероятности наблюдения этого значения  $P\{\xi = x_i\}$ . Итоговый вид графика функции распределения для СВ  $\xi$  представлен на рис. 10.

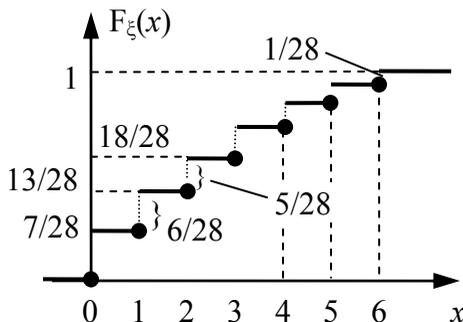


Рис. 10. Функция распределения модуля разности значений на половинках кости домино

Так как сумма вероятностей, составляющих нижнюю строку любого ряда распределения, равна 1, то и совокупность «ступенек», из которых состоит график ФРВ любой дискретной случайной величины, обязательно «поднимает» этот график с нулевого уровня, наблюдаемого слева (при больших отрицательных  $x$ ), строго до уровня  $F_\xi(x) = 1$ , наблюдаемого правее наибольшего возможного значения СВ  $\xi$ .

Если ввести в рассмотрение функцию единичного скачка

$$u(z) = \begin{cases} 1, & \text{при } z > 0, \\ 0, & \text{при } z \leq 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

то функцию распределения любой дискретной случайной величины (ДСВ) можно будет представить в виде суммы скачков

$$F_\xi(x) = \sum_i p_i \cdot u(x - x_i). \quad (3.17)$$

Для непрерывных случайных величин (НСВ), напротив, функция распределения представляет собой не имеющую разрывов зависимость, горизонтальную на участках, значения из которых наблюдаться в опытах не могут, и плавно нарастающую на участках, содержащих наблюдаемые значения СВ.

### 3.6. Плотность вероятности случайной величины

Непрерывность функции распределения любой НСВ в соответствии с соотношением (3.15) означает, что вероятность наблюдения любого конкретного значения случайной величины  $P\{\xi = c\} = 0$ . Этот результат не следует рассматривать как признак физической невозможности наступления события “ $\xi = c$ ”; более корректно говорить о бесконечно малой вероятности данного события. И действительно, рассмотрим произвольный интервал  $(a, b)$ , содержащий допустимые значения СВ  $\xi$ . Не зависимо от того, сколь малым по протяженности является этот интервал, число заключенных на нём возможных значений СВ  $\xi$  бесконечно велико, а значит на долю каждого значения приходится бесконечно малая вероятность его получения в опыте. По указанной причине, сопоставлять вероятности наблюдения разных значений случайной величины с использованием ФРВ не слишком удобно.

Отметим, что пока интервал  $(a, b)$  допустимых значений СВ сохраняет ненулевую протяженность ( $b > a$ ), вероятность наблюдения значений из этого интервала также остается неотрицательной  $P\{a \leq \xi < b\} \geq 0$ , а для малых интервалов стремление  $b \rightarrow a$  вызывает пропорциональное снижение вероятности. Если применительно к бесконечно малой окрестности точки  $\xi = x$  определить коэффициент пропорциональности между шириной интервала  $\Delta x$  и вероятностью наблюдения значений  $x \leq \xi < (x + \Delta x)$ , то такой коэффициент, очевидно, будет служить объективным показателем возможности наступления события “ $\xi = x$ ”. С другой стороны, в соответствии с (3.13)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} = F'_\xi(x),$$

что объясняет появление следующего определения...

**Плотность вероятности** случайной величины характеризует возможность наблюдения значений СВ  $\xi$  из бесконечно малой окрестности аргумента  $x$  и равна

$$W_\xi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x} = F'_\xi(x). \quad (3.18)$$

Рассмотрим наиболее важные свойства плотности вероятности:

1. Плотность вероятности имеет размерность обратную к размерности самой случайной величины (для напряжений измеряется в “1/В”, для временных интервалов – в “1/с”, а для расстояний (декартовых координат) – в “1/м”) и принимает лишь неотрицательные значения

$$W_\xi(x) \geq 0. \quad (3.19)$$

*Действительно, в числителе (3.18) стоит безразмерная вероятность, а аргумент  $x$ , как и его приращение  $\Delta x$ , совпадают по размерности с самой случайной величиной.*

2. Вероятность попадания значений СВ  $\xi$  в интервал от  $a$  до  $b$  может быть рассчитана при помощи интеграла

$$P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b W_\xi(x) dx. \quad (3.20)$$

*Для расчета вероятности  $P\{a \leq x < b\}$  разделим интервал от  $a$  до  $b$  на ряд примыкающих друг к другу малых интервалов шириной  $\Delta x$ . Вероятность попадания значения СВ  $\xi$  на конкретный участок с центром  $x_i$  в соответствии с (3.18) приблизительно равна  $W_\xi(x_i) \cdot \Delta x$ . События, соответствующие попаданию  $\xi$  на различные участки, являются несовместными. Как следствие,*

$$P\{a \leq x < b\} \approx \sum_i W_\xi(x_i) \cdot \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^b W_\xi(x) dx.$$

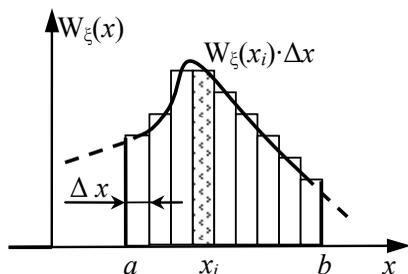


Рис. 11. К пояснению свойства 2

3. По известной плотности вероятности функция распределения вероятностей СВ может быть рассчитана из соотношения

$$F_{\xi}(x_0) = P\{\xi < x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x) dx. \quad (3.21)$$

*Примечание: Обратите внимание, что целью соотношения (3.21) является получение именно функции, т.е. некоторого выражения, содержащего символьный аргумент  $x_0$ , на место которого при последующих расчетах будет подставляться реальное значение аргумента функции распределения.*

4. Если границы  $a \dots b$  из свойства 2 расширить до “ $-\infty$ ” и “ $+\infty$ ”, то выражение (3.20) будет соответствовать вероятности выполнения неравенства « $-\infty \leq \xi < +\infty$ ». Но указанное событие гарантированно выполняется для любой случайной величины:  $P\{-\infty \leq \xi < +\infty\} = 1$ . Как следствие, для любой СВ справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx = 1. \quad (3.22)$$

Соотношение (3.22) называют свойством нормировки НСВ. С геометрических позиций интеграл в (3.22) определяет площадь фигуры, заключенной между графиком плотности вероятности и осью абсцисс, поэтому означает, что для всех СВ фигуры, заключенные под кривой  $W_{\xi}(x)$ , имеют одинаковую площадь строго равную единице.

### 3.7. Типовые законы распределения непрерывных случайных величин

Рассмотрим несколько часто встречающихся на практике законов распределения непрерывных случайных величин.

#### 3.7.1. Равномерное распределение НСВ

Равномерным называется распределение непрерывной случайной величины, равновероятно принимающей любые вещественные значения из некоторого диапазона с границами  $a$  и  $b$ . Плотность вероятности подобной СВ имеет вид, показанный на рис. 12(а), и определяется выражением

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{при прочих } x \end{cases}. \quad (3.23)$$

*Обратите внимание на следующие особенности рис. 12(а):*

- 1) на участках оси  $x$ , соответствующих неравенствам  $x < a$  и  $x > b$ , значение плотности вероятности равно нулю, указывая невозможность наблюдения в опыте подобных значений;*
- 2) для значений  $x$ , лежащих между  $a$  и  $b$ , плотность вероятности сохраняет фиксированное значение, указывая на равную вероятность наблюдения любых значений из этого диапазона;*
- 3) график плотности вероятности имеет прямоугольную форму и при ширине  $(b - a)$  и высоте  $1/(b - a)$  имеет единичную площадь, что успешно согласуется со свойством нормировки (3.22).*

*Отметим также, что, записывая аналитические выражения для плотностей вероятности аналогичные (3.23), обычно ограничиваются лишь строками с ненулевыми значениями, т.е. вместо всей формулы (3.23) приводят лишь верхнюю строку. При этом подразумевается, что на не указанных интервалах изменения аргумента (при прочих  $x$ ) значение  $W_{\xi}(x)$  равно нулю.*

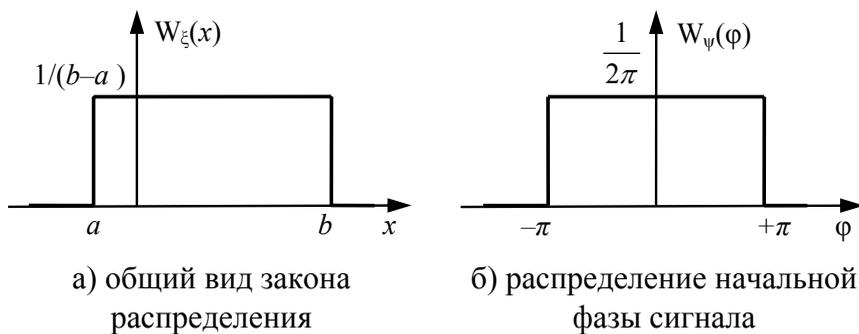


Рис. 12. Равномерное распределение непрерывной СВ

Типовой ситуацией, в которой приходится иметь дело с плотностью вероятности (3.23), является распределение начальной фазы гармонического сигнала, формируемого соответствующим генератором. На процесс установления колебаний в генераторе влияют многочисленные случайные факторы и без применения внешней синхронизации любые значения сдвига генерируемых колебаний (в пределах периода) оказываются равновероятными. Это означает, что начальная фаза сигнала оказывается распределенной равномерно в пределах от минус  $\pi$  до  $\pi$  (см. рис. 12(б)).

### 3.7.2. Нормальное (гауссовское) распределение

Случайная величина называется распределенной нормально, если её плотность вероятности имеет вид

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad (3.24)$$

где  $a$  – произвольная по величине константа, а  $\sigma$  – параметр, принимающий лишь положительные значения.

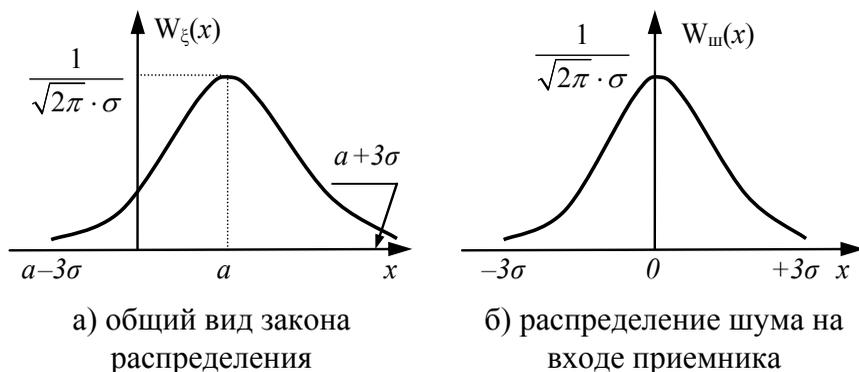


Рис. 13. Нормальное распределение случайной величины

Нормальное распределение оказывается одним из важнейших (наиболее востребованных) в теории вероятностей. Оно отличается от других распределений целым набором уникальных свойств и, кроме того, очень часто встречается на практике. Объясняется это существованием центральной предельной теоремы Ляпунова (см. п. 7.2), в соответствии с которой сумма большого числа величин с произвольными законами распределения при не слишком существенных ограничениях ведёт себя как нормально распределенная случайная величина.

Рассмотрим с этих позиций случай приема какого-то полезного сигнала радиоприёмным устройством. Электромагнитное поле вблизи антенны приёмника практически всегда определяется не только этим полезным сигналом, но и многочисленными сигналами других источников, которые по отношению к анализируемой системе играют роль радиопомех. В результате наведенный в антенне сигнал включает не только полезную составляющую, но и шумовую добавку. Её конкретная величина является случайной, а многочисленность слагаемых, образующих этот аддитивный шум, приводит к тому, что закон распределения шума оказывается нормальным. Таким образом, типовой задачей радиоприёма является обработка полезного сигнала на фоне помехи с нормальным распределением.

Расчет вероятности попадания значений нормальной СВ в некоторый диапазон оказывается, к сожалению, несколько проблематичным в связи с тем, что плотность вероятности (3.24) является неинтегрируемой функцией, т.е. не имеет аналитического выражения для первообразной. Интегралы от (3.24) вычисляются путём их сведения к известным (и представленным практически во всех математических справочниках) специальным функциям, таким как **интеграл вероятности**  $\Phi(x)$ , определяющий функцию распределения  $F_{cm}(x)$  стандартной нормальной СВ с параметрами  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$

$$\Phi(x) = F_{cr}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{1 + erf\left(x/\sqrt{2}\right)}{2}, \quad (3.25)$$

или **функция ошибок**

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x \exp(-z^2) dz = 2 \cdot \Phi(x \cdot \sqrt{2}) - 1. \quad (3.26)$$

Действительно, используя подстановку  $(x - a)/\sigma = z$ , функцию распределения произвольной нормальной СВ можно представить в виде

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{(x_0-a)/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = F_{cr}\left(\frac{x_0 - a}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

а из таблицы значений  $F_{cm}(x)$ , приведенной в прил. 1, следует, что и для нормального распределения выполняется свойство нормировки (3.22), т.е. справедливо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dx = 1. \quad (3.28)$$

### 3.7.3. Распределение Релея

Распределение Релея описывает вариацию длины случайного вектора, горизонтальная и вертикальная координаты которого имеют нормальное распределение (при  $a = 0$ ), характеризует интенсивность отклика амплитудного детектора на шумовое воздействие, описывает поведение отсчетов спектроанализатора, приходящихся на шумовой участок частотного диапазона и т.д.

Плотность вероятности релеевского распределения имеет вид

$$W_{\xi}(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \quad (3.29)$$

где  $\sigma$  – параметр, принимающий положительные значения.

Производная плотности вероятности (3.29) имеет вид

$$\frac{dW_{\xi}(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right),$$

откуда следует (см. последний множитель), что параметр  $\sigma$  определяет наиболее вероятное значение величины  $\xi$  – так называемую *моду* распределения (см. подробнее п. 4.3).

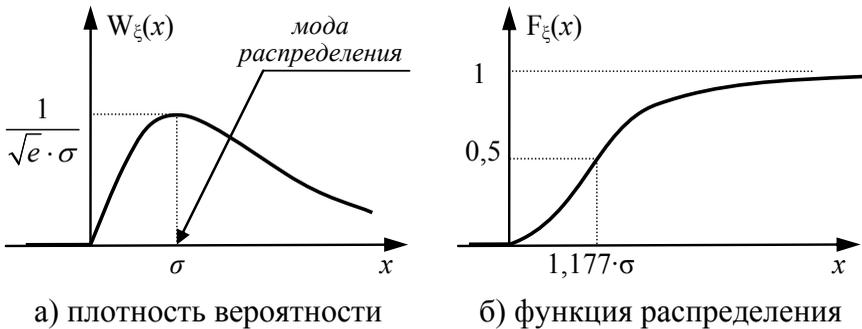


Рис. 14. Характеристики закона распределения Релея

Для получения функции распределения Релея воспользуемся (3.21). Учитывая, что допустимыми (наблюдаемыми) являются лишь неотрицательные значения СВ, получаем

$$F_{\xi}(x_0) = \int_0^{x_0} \exp\left(\frac{-x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) d\left(\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) = 1 - \exp\left(\frac{-x_0^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad x_0 \geq 0. \quad (3.30)$$

Зависимости (3.29) и (3.30) представлены на рис. 14.

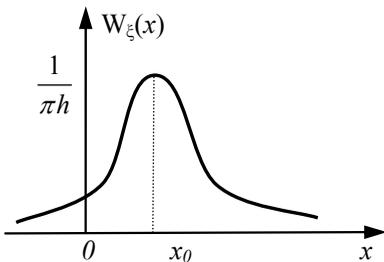
### 3.7.4. Распределение Коши

Распределение Коши зависит от двух параметров  $x_0$  и  $h$  ( $h > 0$ ). Оно характеризуется плотностью вероятности

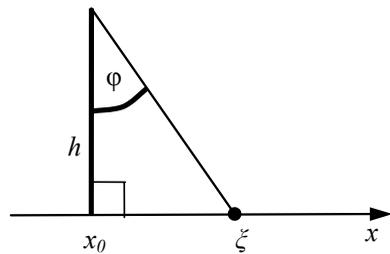
$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{h}{h^2 + (x - x_0)^2} \quad (3.31)$$

и функцией распределения

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{h}\right). \quad (3.32)$$



а) плотность вероятности



б) вариант возникновения распределения Коши

Рис. 15. Свойства распределения Коши

Распределению Коши подчиняется, например, координата вершины прямоугольного треугольника (см. рис. 15), у которого противолежащий вершине угол  $\phi$  распределен равномерно в пределах от минус  $\pi/2$  до плюс  $\pi/2$ , прилежащий к этому углу катет имеет длину  $h$ , а координата прямого угла составляет  $x_0$ .

Другие случаи возникновения распределения Коши будут рассматриваться ниже.

### 3.7.5. Показательное распределение

Показательное распределение зависит от неотрицательного параметра  $\lambda$  и характеризуется выражениями

$$W_{\xi}(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x), \quad x \geq 0, \quad (3.33)$$

$$F_{\xi}(x) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x), \quad x \geq 0. \quad (3.34)$$

Соответствующие графики показаны на рис. 16. Применительно к теории надёжности параметр  $\lambda$  может быть равен интенсивности потока отказов оборудования (о потоках событий см. с. 47), а при исследовании вариаций мощности колебаний на шумовых участках радиодиапазона величина  $1/\lambda$  соответствует средней мощности анализируемого шума и т.п.

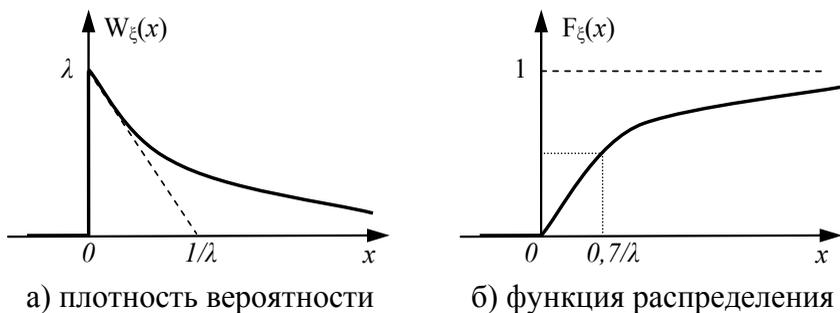


Рис. 16. Характеристики показательного распределения

Отметим, что показательное распределение связано также с потоками событий. Рассмотрим поток, получающийся в результате «просеивания» простейшего (стационарного пуассоновского) потока событий (см. с. 47), при котором из каждых последовательных  $(k+1)$  событий сохраняется лишь одно, последнее. Получающийся в результате подобного «просеивания» поток называют **потоком Эрланга  $k$ -го порядка**.

Обозначим через  $T$  случайный промежуток времени между соседними событиями потока. Для стационарного потока с интенсивностью  $\lambda$  вероятность попадания какого-то, например,  $(k+1)$ -го события на произвольный временной интервал длиной  $\Delta t$  равна  $\lambda \cdot \Delta t$ , а вероятность наблюдения на интервале  $[0; t]$  ровно  $k$  событий будет определяться (2.22). Таким образом

$$P_{\tau}\{k \text{ событий приходится на интервал времени } [0; t], \text{ а } (k+1)\text{-е событие} - \text{ на интервал } [t; t + \Delta t)\} = \lambda \cdot \Delta t \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

И на основании определения (3.18) для случайного промежутка времени  $T$  между соседними событиями потока Эрланга  $k$ -го порядка получаем

$$W_T(t) = \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (3.35)$$

Для исходного же простейшего (стационарного пуассоновского) потока вероятность отсутствия событий потока на произвольном интервале времени длиной  $t$  будет равна

$$P_{\tau}(0) = (\lambda \cdot \tau)^0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} / 0! = \exp(-\lambda \cdot \tau),$$

Это значит, что вероятность наличия на произвольном интервале длительности  $t$  хотя бы одного из событий простейшего потока, составляет

$$P_{\tau}\{k \geq 1\} = 1 - P_{\tau}(0) = 1 - \exp(-\lambda \cdot \tau),$$

но одновременно, это вероятность  $P\{T < t\}$  того, что временной интервал  $T$  между соседними событиями в потоке будет меньше  $t$ .

Итак, *интервал времени  $T$  между соседними событиями в простейшем потоке подчиняется показательному распределению с параметром, равным интенсивности потока  $\lambda$*

$$F_T(t) = P\{T < t\} = 1 - \exp(-\lambda \cdot t), \quad t \geq 0. \quad (3.36)$$

### 3.7.6. Распределение арксинуса

Распределение арксинуса зависит от единственного неотрицательного параметра  $U$ . Оно характеризуется плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{U^2 - x^2}}, \quad -U \leq x \leq U, \quad (3.37)$$

и функцией распределения

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{U}\right), \quad -U \leq x \leq U. \quad (3.38)$$

Распределению арксинуса подчиняется, например, мгновенное значение напряжения, изменяющегося по гармоническому закону

$$\xi = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (3.39)$$

при условии, что замеры напряжения производятся в случайные моменты времени  $t$ , равномерно распределенные в пределах периода колебания.

### 3.7.7. Распределение константы

Величину  $\xi$ , принимающую в каждом опыте одно и то же значение  $a$ , можно рассматривать как вырожденный вариант случайной величины. Из бесконечного числа точек оси  $x$  в этом случае лишь в единственной точке  $x = a$  плотность вероятности отлична от нуля, причем в числителе определения (3.18) стоит фиксированная вероятность  $P\{x=a\} = 1$ , поэтому при знаменателе  $\Delta x \rightarrow 0$  плотность вероятности бесконечно велика. Во всех остальных точках  $W_{\xi}(x) = 0$ . Соответствующий результат аналитически записывается посредством дельта-функции (о ней подробно говорится в прил. 4)

$$W_{\xi}(x) = \delta(x - a). \quad (3.40)$$

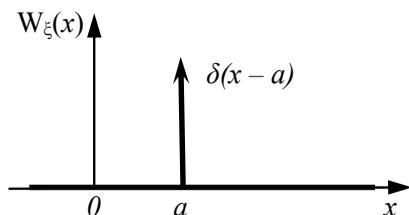


Рис. 17. Плотность вероятности константы

### 3.8. Пример и особенности распределения смешанных случайных величин

Проанализируем работу прожектора, использующего для создания светового потока мощную лампу накаливания. При включении малое сопротивление пока ещё холодной нити лампы является причиной возникновения значительного по интенсивности импульса тока. Протекающий ток нагревает нить лампы, её сопротивление растёт, а сила тока снижается. Таким образом, в рабочем режиме выход прожектора из строя хотя и возможен, но маловероятен, а вот вероятность повреждения лампы начальным мощным броском тока довольно велика.

Пусть случайная величина  $\xi$  – это астрономическое время между моментом первого включения прожектора с исходно работоспособной лампой и моментом его выхода из строя из-за перегорания нити лампы накаливания. При построении функции распределения СВ  $\xi$  следует учесть, что каждому моменту включения прожектора  $t_{\text{вкл } i}$  соответствует скачкообразное увеличение вероятности  $P\{\xi < t_{\text{вкл } i}\}$ , по ходу работы прожектора вероятность  $P\{\xi < t\}$  нарастает плавно, а с момента выключения прожектора и до очередной точки  $t_{\text{вкл } (i+1)}$  вероятность выхода из строя сохраняется без изменений (возможность механических повреждений прожектора мы не рассматриваем). Таким образом, функция распределения СВ  $\xi$  имеет вид, показанный на рис. 18. Плотность вероятности, получаемая в результате её дифференцирования, представлена на рис. 19.

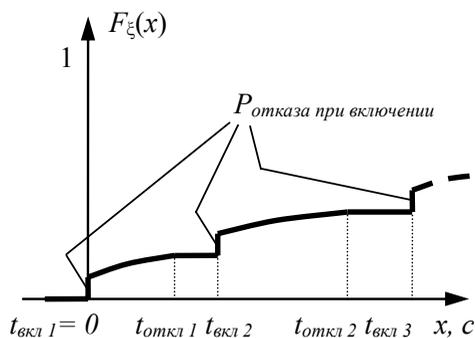


Рис. 18. Функция распределения времени  $\xi$  до перегорания нити прожектора

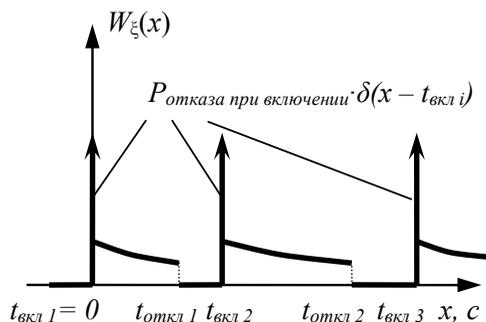


Рис. 19. Плотность вероятности времени  $\xi$  до перегорания нити прожектора

Как из вида функции распределения, так и из характера плотности вероятности видны особенности поведения величины  $\xi$ . Бесконечные значения плотности вероятности в точках  $x = t_{\text{вкл } i}$  указывают на превышающую ноль вероятность наблюдать в опытах строго значения  $\xi = t_{\text{вкл } i}$ . Такое поведение характерно для дискретных СВ. Конечная же величина  $W_{\xi}(x)$  для диапазонов  $t_{\text{вкл } i} < x < t_{\text{откл } i}$  указывают, что вероятность получения в экспериментах отдельных (конкретных) точек из этих диапазонов бесконечно мала, и лишь имеющим положительную протяженность диапазонам значений  $\xi$  соответствует положительная

вероятность наблюдения. Эта особенность характерна для непрерывных СВ. Обе же перечисленные особенности, наблюдаемые вместе, указывают на смешанный характер распределения СВ  $\xi$ .

Особенностью аналитического выражения плотности вероятности любой смешанной СВ является обязательное присутствие в нём слагаемых вида  $P_i \cdot \delta(x - x_i)$ , где  $x_i$  – это отдельные значения СВ, наблюдаемые с положительной вероятностью  $P_i$

$$W_{\xi}(x) = W_{\xi \text{ непр}}(x) + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta(x - x_i). \quad (3.41)$$

Обратите внимание, что добавление к  $W_{\xi \text{ непр}}(x)$  дельтообразных слагаемых не нарушает описания свойств СВ, так как в точках  $x_i$  значение плотности вероятности всё равно бесконечно велико, а во всех остальных точках дельта-функции принимают нулевые значения и любое их количество никак не искажает  $W_{\xi \text{ непр}}(x)$ .

### 3.9. Примеры исследования вероятностных характеристик случайных величин

*Пример 4: Непрерывная случайная величина характеризуется плотностью вероятности вида*

$$W_{\xi}(x) = \beta \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|), \quad (3.42)$$

где  $\lambda$  – известная положительная константа (параметр распределения);  $\beta$  – неизвестный поправочный коэффициент. Необходимо определить значение коэффициента  $\beta$  и построить функцию распределения величины  $\xi$ .

Решение: Коэффициент  $\beta$  действительно не может быть произвольным по величине. Он должен быть положительным, т.к. иначе формула (3.42) будет порождать отрицательные значения  $W_{\xi}(x)$ , противоречащие свойству (3.19), а среди по-

положительных значений  $\beta$  допустимым будет только то, которое обеспечит выполнение свойства нормировки (3.22). При интегрировании плотности вероятности (3.42) учтем, что она является чётной функцией аргумента  $x$ , а в диапазон интегрирования от 0 до бесконечности входят лишь неотрицательные значения  $x$ , для которых  $|x| = x$ , поэтому знак модуля в подынтегральном выражении можно опустить:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \beta \cdot \exp(-\lambda \cdot x) dx = \frac{2\beta}{-\lambda} \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\beta}{\lambda}.$$

Приравнявая полученную дробь 1, как требует свойство нормировки (3.22), приходим к заключению  $\beta = \lambda / 2$ .

Основой для расчета функции распределения случайной величины служит соотношение (3.21). При его использовании следует четко представлять, что целью расчетов является получение именно функции, т.е. зависимости вероятности  $P\{\xi < x_0\}$  от неизвестного заранее аргумента  $x_0$ .

Несложно убедиться, что применение (3.21) в анализируемом примере приводит к разным промежуточным выкладкам при отрицательных, и при положительных значениях  $x_0$ .

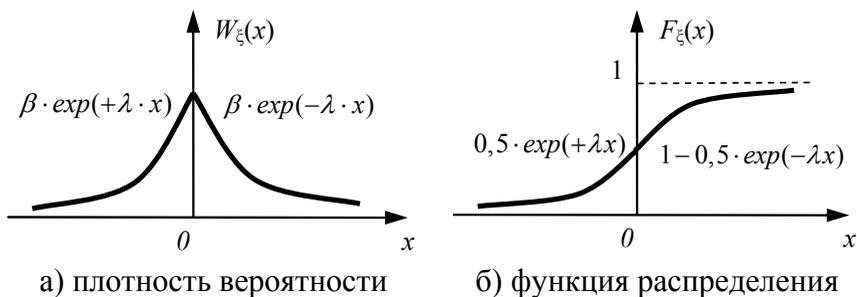


Рис. 20. Распределение случайной величины из примера 4

Действительно, при вычислении интеграла (3.21) для отрицательных значений  $x_0$  интегрирование производится лишь по нарастающему (левому на рис. 20(а)) участку  $W_\xi(x)$ , где

$$\int_{-\infty}^{x_0} W_\xi(x) dx = \frac{\lambda}{2} \cdot \int_{-\infty}^{x_0} \exp(+\lambda x) dx = \frac{1}{2} \cdot \exp(+\lambda x) \Big|_{-\infty}^{x_0} = \frac{1}{2} \cdot \exp(+\lambda x_0).$$

Для положительных значений  $x_0$  в интервал интегрирования попадает точка излома  $x = 0$ , где характер подынтегрального выражения скачкообразно изменяется и для вычисления интеграла, область интегрирования необходимо разбивать на интервалы, в пределах которых выражение, от которого берется модуль, сохраняет знак неизменным. В рассматриваемом примере это означает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} W_\xi(x) dx \Big|_{x_0 \geq 0} &= \frac{\lambda}{2} \cdot \left( \int_{-\infty}^0 \exp(+\lambda x) dx + \int_0^{x_0} \exp(-\lambda x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \exp(-\lambda x) \Big|_0^{x_0} \right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp(-\lambda x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, итоговое аналитическое выражение для функции распределения оказывается составным

$$F_\xi(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} W_\xi(x) dx = \begin{cases} 0,5 \cdot \exp(+\lambda x_0), & \text{при } x_0 < 0 \\ 1 - 0,5 \cdot \exp(-\lambda x_0), & \text{при } x_0 \geq 0 \end{cases}$$

График этой функции распределения показан на рис. 20(б).

Пример 5: Плотность вероятности СВ имеет вид

$$W_\xi(x) = \frac{1}{6} \delta(x+6) + \frac{1}{6} \delta(x-8) + \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right). \quad (3.43)$$

Найти вероятность наблюдения значений СВ, принадлежащих диапазону  $\xi < 2,34$ .

Решение: Расчет вероятности попадания значений СВ в диапазон с границами от  $a$  до  $b$  по известной плотности вероятности производится с использованием правила (3.20). В рассматриваемом случае границами диапазона являются  $a = -\infty$  и  $b = 2,34$ .

Дельта-функция, определяющая первое слагаемое плотности вероятности, становится бесконечно большой в точке  $x = -6$ , принадлежащей анализируемому диапазону, поэтому

$$\int_{-\infty}^{2,34} \frac{1}{6} \cdot \delta(x+6) dx = \frac{1}{6} \cdot \int_{-\infty}^{2,34} \delta(x+6) dx = \frac{1}{6}.$$

Напротив, дельта-функция из второго слагаемого уходит в бесконечность в точке  $x = +8$ , не входящей в интервал интегрирования, поэтому

$$\int_{-\infty}^{2,34} \frac{1}{6} \cdot \delta(x-8) dx = \frac{1}{6} \cdot \int_{-\infty}^{2,34} \delta(x-8) dx = 0.$$

Рассмотрим отдельно и последний интеграл, предполагаемый (3.20). Используя замену переменных  $(x-1)/2 = z$ , его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{2,34} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8}\right) dx &= \int_{-\infty}^{0,67} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) 2dz = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0,67} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right] \approx \frac{2}{3} \cdot \left[ 0,7258 + 0,0322 \cdot \frac{0,07}{0,1} \right] = 0,4989. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что для функции вида « $\exp(-z^2/2)$ » невозможно аналитически записать первообразную, поэтому рассматриваемый интеграл следует привести к известной табличной спецфункции. Во второй строке выражение в квадратных скобках как раз и соответствует виду функции распределения стандартной нормальной случайной величины, значения которой в табличной форме представлены в прил. 1. Если бы верхний

предел интегрирования для выражения в квадратных скобках составлял ровно 0,6, то (согласно прил. 1) значение интеграла было бы равно 0,7258. Для расчета интеграла при верхнем пределе 0,67 учтено, что между представленными в таблице с шагом 0,1 значениями аргумента результат интегрирования – функция  $F_{cm}(x)$  – ведет себя практически линейно, нарастая между точками  $x = 0,6$  и  $x = 0,7$  на величину 0,0322. Тогда пропорциональное приращению аргумента на 0,07 увеличение функции  $F_{cm}(x)$  может быть приближенно получено как  $0,0322 \times 0,07 / 0,1$ .

Завершая решение задачи, объединим проанализированные выше интегралы

$$P\{\xi < 2,34\} = \int_{-\infty}^{2,34} W_{\xi}(x) dx \approx 0,1666 + 0 + 0,4989 = 0,6655.$$

Это и будет ответом на вопрос задачи.

Пример 6: Дан график функции распределения вероятностей (ФРВ) случайной величины. Как он изменится, если прибавить к СВ константу  $a$ , если умножить СВ на 2, если изменить знак СВ на противоположный?

Решение: Пусть случайная величина  $\eta$  получается при добавлении к значениям СВ  $\xi$  константы  $a$ . Тогда, очевидно, для произвольного значения  $y$  вероятность наблюдения значений  $\eta < y$  будет совпадать с вероятностью выполнения для СВ  $\xi$  неравенства  $\xi < (y - a)$ . Таким образом, для ФРВ получаем

$$F_{\eta}(y) = F_{\xi}(y - a),$$

т.е. ФРВ величины  $\eta$  оказывается смещенной на величину  $a$  вправо вдоль оси аргумента.

Теперь рассмотрим случай, когда случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  оказываются связанными соотношением  $\eta = 2 \cdot \xi$ . В этом случае, очевидно, равными оказываются вероятности наблюде-

ния событий  $\eta < y$  и  $\xi < (y/2)$ . Как следствие, для функций распределения получаем соотношение

$$F_{\eta}(y) = F_{\xi}(y/2).$$

Это соответствует двукратному растяжению графика ФРВ величины  $\eta$  (вдоль оси аргумента) по отношению к графику ФРВ величины  $\xi$ .

Наконец, если случайные величины связаны между собой соотношением  $\eta = -\xi$ , то совпадающими оказываются вероятности осуществления событий  $\eta < y$  и  $\xi > -y$ . Это означает, что функции распределения связаны правилом

$$F_{\eta}(y) = 1 - F_{\xi}(-y),$$

т.е. график ФРВ величины  $\xi$  нужно развернуть вдоль вертикальной оси, а затем каждую полученную ординату вычесть из единицы (см. рис. 21).

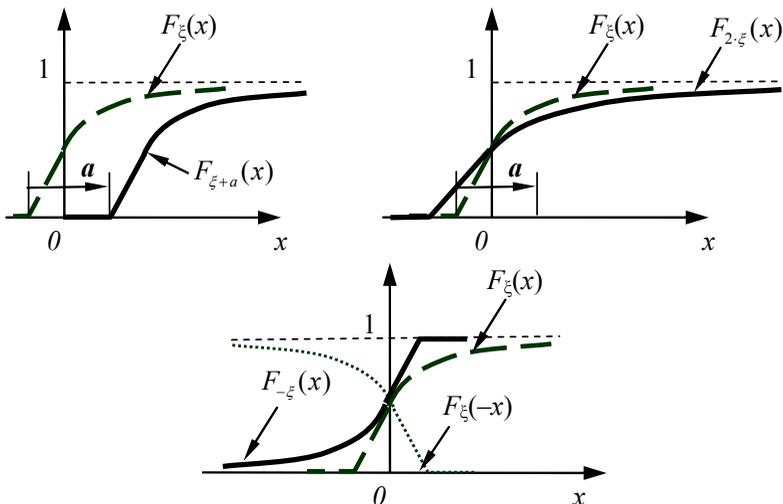


Рис. 21. ФРВ из примера 6

Пример 7: В пространстве трёх измерений случайным образом расположены точки. Число точек в некотором объеме  $v$  пространства есть случайная величина, подчиняющаяся закону Пуассона со средним значением  $a = \lambda \cdot v$ , где  $\lambda$  – среднее число точек, находящихся в единичном объеме. Требуется найти закон распределения расстояния  $\rho$  от любой точки пространства до ближайшей к ней случайной точки.

Решение: В соответствии с (3.5) вероятность того, что сфера радиуса  $r$  с центром в заданной точке пространства не будет содержать ни одной из случайно распределенных точек, определяется выражением

$$P\{ \eta = 0 | v \} = (\lambda \cdot v)^0 \cdot e^{-\lambda \cdot v} / 0! = e^{-\lambda \cdot v},$$

где  $v = v(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$  – объем сферы радиуса  $r$ .

Функция распределения  $F_\rho(r)$  расстояния  $\rho$  до ближайшей из случайных точек есть вероятность того, что в сферу радиуса  $r$  попадет хотя бы одна из этих точек, т.е.

$$F_\rho(r) = 1 - P\{ \eta = 0 | v \} = 1 - \exp(-\lambda \cdot v(r)).$$

Соответственно, плотность вероятности для величины  $\rho$  будет иметь вид

$$W_\rho(r) = 4\pi \cdot \lambda r^2 \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \frac{4}{3} \pi r^3\right), \quad r > 0.$$

### 3.10. Интегральная формула полной вероятности

На практике можно встретить ситуации, когда вероятность наступления какого-то события  $A$  зависит от того, какое значение приняла НСВ  $\xi$  с плотностью вероятности  $W_\xi(x)$ .

В подобной ситуации полезно представить ось аргументов  $x$  состоящей из множества элементарных участков шириной  $dx$ . Принадлежность СВ  $\xi$  участку, начинающемуся в точке  $x$ ,

представляет собой случайное условие проведения опыта – одну из гипотез, которые можно поставить в соответствие анализируемой ситуации. Вероятность реализации данной гипотезы составляет приблизительно  $W_{\xi}(x) \cdot dx$ .

Обозначим  $P\{A|x\}$  условную вероятность наступления события  $A$  при условии, что СВ  $\xi$  приняла значение  $x$ . Тогда, учитывая, что для достижения максимальной точности следует использовать  $dx \rightarrow 0$ , а при этом каждое из слагаемых суммы (2.23) будет становиться бесконечно малым и сама сумма из дискретной превращается в интегральную, запишем

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|x\} \cdot W_{\xi}(x) dx. \quad (3.44)$$

Эту формулу называют *интегральной формулой полной вероятности*.

Соответствующий аналог можно предложить и для формулы Байеса. Взяв за основу равенство  $P\{A\} \cdot P\{H_i|A\} = P\{H_i\} \cdot P\{A|H_i\}$ , перепишем его, заменяя априорную вероятность  $P\{H_i\}$  элементом вероятности  $W_{\xi}(x) \cdot dx$ , а  $P\{H_i|A\}$  – элементом  $W_{\xi}(x|A) \cdot dx$ , где  $W_{\xi}(x|A)$  – условная плотность вероятности СВ  $\xi$ , соответствующая тем опытам, в которых наблюдалось событие  $A$ . Получаем

$$P\{A\} \cdot W_{\xi}(x|A) dx = W_{\xi}(x) dx \cdot P\{A|x\},$$

откуда в качестве **интегральной формулы Байеса** запишем

$$W_{\xi}(x|A) = \frac{W_{\xi}(x) \cdot P\{A|x\}}{P\{A\}}, \quad (3.45)$$

где  $P\{A\}$  – полная вероятность события  $A$ , определяемая (3.44).

#### 4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотренные в предыдущем разделе функция распределения и плотность вероятности дают полную характеристику случайной величины. Однако в ряде ситуаций о случайной величине достаточно иметь лишь некоторое общее представление. Аналогичное положение имеет место тогда, когда вместо описания мельчайших подробностей геометрической формы твердого тела ограничиваются такими его числовыми характеристиками, как длина, ширина, высота, объем, момент инерции и т. д.

Следует также иметь в виду, что в задачах, где по известному закону распределения нужно вычислить иные характеристики СВ, полнота описания свойств случайной величины, обеспечиваемая функцией распределения или плотностью вероятности, оказывается крайне полезной. Если же, напротив, закон распределения неизвестен и необходимо оценить его по результатам наблюдения значений СВ, то для сбора информации, соответствующей полному описанию свойств СВ, требуется бесконечный по объему эксперимент. Даже по обширным экспериментальным данным можно лишь ответить на вопрос: противоречат собранные данные некоторому ожидаемому закону распределения или нет. Но установить единственный «правильный» закон распределения на основе результатов измерений – невозможно.

Числовые характеристики случайной величины представляют собой совокупность констант, каждая из которых характеризует какую-то особенность поведения этой СВ. Например, характеристикой положения СВ может служить среднее арифметическое её значений, определяющее точку, около которой группируются возможные значения этой СВ. Рассмотрим дискретную СВ, характеризуемую рядом распределения:

$\xi$ 

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_m$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_m$

Проведем  $n$  независимых измерений значений этой СВ. Если число измерений  $n$  велико (заметно превышает количество различных значений СВ  $m$ ), то наблюдаемые в опытах значения СВ будут многократно повторяться. Предположим, что значение  $x_1$  появилось  $n_1$  раз, значение  $x_2 \rightarrow n_2$  раз и т.д.; при этом  $\sum n_i = n$ . Среднее арифметическое наблюдавшихся значений будет определяться представленной ниже формулой, в которой отношения  $n_i/n$  характеризуют частоту наблюдения значения  $x_i$  в проведенной серии измерений. При увеличении числа измерений эти частоты становятся всё более стабильными (предсказуемыми) и при  $n \rightarrow \infty$  сходятся к вероятностям  $p_i$ :

$$x_{cp} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_m n_m}{n} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{n_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m x_i p_i = const. \quad (4.1)$$

Таким образом, при большом числе случайных измерений их среднее арифметическое становится вполне предсказуемым.

#### 4.1. Начальные моменты распределения и математическое ожидание случайной величины

Как будет показано ниже, константа, стоящая в правой части (4.1), является частным случаем группы числовых характеристик, называемых *начальными моментами распределения* случайной величины.

Начальным моментом распределения СВ  $k$ -го порядка называют константу, определяемую правилом

$$m_k \{ \xi \} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i^k p_i, & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot W_{\xi}(x) dx, & \text{для НСВ} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Моменты четных порядков всегда неотрицательны, а нечетные начальные моменты могут принимать произвольные значения. Размерность начального момента  $k$ -го порядка совпадает с  $k$ -ой степенью размерности СВ  $\xi$ .

*Примечание: Для существования начальных моментов требуется абсолютная сходимость соответствующих интегралов и рядов, в частности, конечное значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot W_{\xi}(x) dx$ . Если существует момент  $n$ -го порядка, то, конечно, существуют все моменты порядка  $k < n$ . Если же момент  $n$ -го порядка неограничен, то и любые моменты порядка  $k > n$  неограниченны.*

**Математическим ожиданием** случайной величины называют её начальный момент распределения первого порядка, т.е. константу

$$M_{\xi} = m_1 \{ \xi \} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i p_i, & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx, & \text{для НСВ} \end{cases} \quad (4.3)$$

Из сопоставления верхней строки определения (4.3) с правой частью (4.1) следует, что математическое ожидание – это и есть та константа, к которой стремится среднее арифметическое наблюдаемых значений СВ. С геометрических позиций математическое ожидание совпадает с абсциссой центра тяжести плоской фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс. Т.е. если изготовить из однородного по плотности материала плоскую фигуру, совпадающую по форме с плотностью вероятности, и поместить её на опору, размещенную в точке, определяемой математическим ожиданием  $M_{\xi}$ , то на такой опоре эта фигура будет находиться в равновесии (рис. 22).

Аналогично начальные моменты более высоких порядков характеризуют среднее арифметическое  $k$ -х степеней значений случайной величины. В частности, начальный момент 2-го по-

рядка характеризует среднее значение квадратов значений СВ, и если величина  $\xi$  характеризует некоторое случайное напряжение, то  $m_2\{\xi\}$  определяет среднее значение мощности этого сигнала.

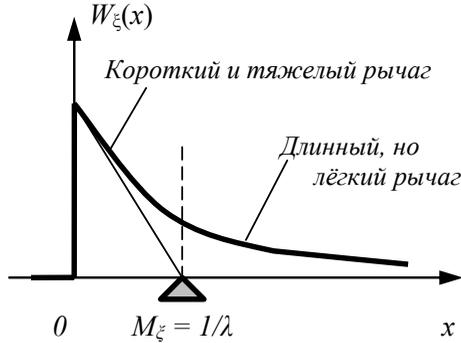


Рис. 22. Расположение математического ожидания показательного распределения (см. п. 4.5.4)

## 4.2. Центральные моменты распределения и дисперсия СВ

Условимся называть *центрированной случайной величиной*  $\overset{\circ}{\xi}$  отклонение СВ  $\xi$  от её математического ожидания

$$\overset{\circ}{\xi} = \xi - M_{\xi}. \quad (4.4)$$

*Центральным моментом распределения  $k$ -го порядка* СВ  $\xi$  называется начальный момент того же порядка *центрированной величины*  $\overset{\circ}{\xi}$ , т.е. константа

$$\mu_k\{\xi\} = m_k\left\{\overset{\circ}{\xi}\right\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m (x_i - M_{\xi})^k p_i, & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^k \cdot W_{\xi}(x) dx, & \text{для НСВ} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Наиболее важным из центральных моментов является момент второго порядка, называемый **дисперсией**

$$D_{\xi} = \mu_2 \{ \xi \} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m (x_i - M_{\xi})^2 p_i, & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^2 \cdot W_{\xi}(x) dx, & \text{для НСВ} \end{cases}. \quad (4.6)$$

Дисперсия, очевидно, не может принимать отрицательных значений, равна нулю для детерминированных величин  $\xi = c = \text{const}$  и положительна для величин случайных, принимая тем большее значение, чем больше разброс значений СВ относительно её математического ожидания. Т.е. дисперсия служит характеристикой разброса («рассеяния») значений СВ.

Раскрыв скобки в подынтегральном выражении для вычисления дисперсии, можно получить весьма полезное на практике соотношение

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot W_{\xi}(x) dx - 2M_{\xi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx + M_{\xi}^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx = \\ &= m_2 \{ \xi \} - 2M_{\xi}^2 + M_{\xi}^2 \cdot \underbrace{1}_{\text{см. св-во нормировки}} = m_2 \{ \xi \} - M_{\xi}^2. \end{aligned}$$

Итак, дисперсия любой случайной величины может быть получена как разность математического ожидания квадрата СВ и квадрата математического ожидания этой СВ

$$D_{\xi} = m_2 \{ \xi \} - M_{\xi}^2. \quad (4.7)$$

Размерностью дисперсии служит квадрат размерности случайной величины. Это не всегда удобно, поэтому наряду с дисперсией для отражения степени разброса значений СВ по отношению к её математическому ожиданию используют также **среднеквадратическое отклонение** (с.к.о.) или, иначе, **эффективное значение** СВ, определяемое выражением

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D_{\xi}}. \quad (4.8)$$

Среднеквадратическое отклонение совпадает по размерности с самой случайной величиной и позволяет предсказывать ориентировочный диапазон, в котором лежат значения СВ. Можно доказать, что для почти всех случайных величин подавляющее большинство значений уместаются в диапазоне  $M_{\xi} \pm 3\sigma_{\xi}$ .

Центральные моменты порядков  $k > 2$  могут, в принципе, принимать произвольные значения (чётные моменты всегда неотрицательны), а центральный момент 1-го порядка, очевидно, всегда равен нулю

$$\begin{aligned} \mu_1 \{\xi\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi}) \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx - M_{\xi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx = \\ &= M_{\xi} - M_{\xi} \cdot \underbrace{1}_{\text{см. св-во нормировки}} \equiv 0. \end{aligned}$$

### 4.3. Прочие числовые характеристики СВ

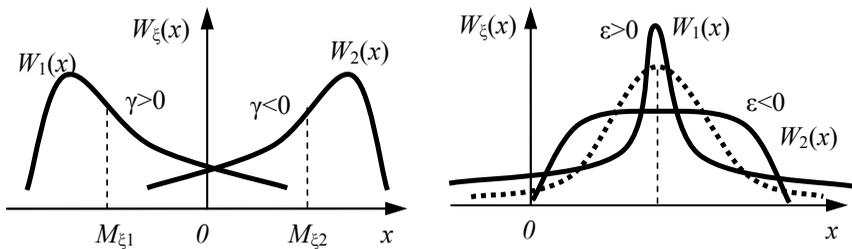
Ряд полезных характеристик СВ можно получить за счет подходящей нормировки моментов распределения. Например, для любого симметричного относительно своего центра распределения центральные моменты всех нечетных порядков равны нулю. Как следствие, простейший из нечетных моментов – центральный момент третьего порядка – может быть задействован для отражения симметрии или асимметрии кривой плотности относительно оси, проходящей через математическое ожидание. Назовем **коэффициентом асимметрии** («скошенности») безразмерное соотношение

$$\gamma = \mu_3 \{\xi\} / \sigma_{\xi}^3, \quad (4.9)$$

где  $\sigma_{\xi}$  – с.к.о. величины  $\xi$ .

В подынтегральное выражение для расчета центрального момента 3-го порядка плотность вероятности  $W_{\xi}(x)$  входит в первой степени, а разности “ $(x - M_{\xi})$ ” – в третьей степени. Как следствие, хотя у плотности вероятности  $W_1(x)$  с рис. 23 зона наиболее вероятных значений лежит левее  $M_{\xi 1}$ , её вклад в зна-

чение  $\mu_3\{\xi\}$  относительно невелик, т.к. все эти часто наблюдаемые значения лежат вблизи  $M_{\xi 1}$ . Значения, лежащие правее  $M_{\xi 1}$ , встречаются заметно реже, однако пологий характер  $W_1(x)$  указывает, что наблюдать их всё же можно, а огромная величина “ $(x - M_{\xi})^3$ ” приводит к заметно большему влиянию этих значений на  $\mu_3\{\xi\}$  несмотря на малость плотности вероятности. В результате, для  $W_1(x)$  коэффициент асимметрии  $\gamma$  оказывается положительным. И напротив, показанная на рис. 23 плотность вероятности  $W_2(x)$  плавно понижается к области отрицательных значений и ей соответствует коэффициент асимметрии  $\gamma < 0$ .



а) коэффициенты асимметрии      б) коэффициенты эксцесса

Рис. 23. Коэффициенты асимметрии и эксцесса распределений

Характеристикой сглаженности кривой распределения служит безразмерный **коэффициент эксцесса** («островершинности»)

$$\varepsilon = \mu_4\{\xi\} / \sigma_{\xi}^4 - 3. \quad (4.10)$$

Ниже (см. (4.16)) будет показано, что для нормального распределения четвертый центральный момент равен  $\mu_4\{\xi\} = 3\sigma^4$  и, соответственно, коэффициент эксцесса  $\varepsilon = 0$ . Распределения с более острой вершиной обладают положительным эксцессом, а для плотностей вероятности с полой вершиной характерны отрицательные значения коэффициента эксцесса.

Начальные и центральные моменты, естественно, не отражают всех особенностей распределения случайной величины.

К числу альтернативных часто используемых числовых характеристик относится, в частности, *мода* распределения.

**Модой** называют наиболее вероятное значение СВ

$$x_{\text{мод}} = \arg \max_x W_{\xi}(x), \quad (4.11)$$

т.е. такое значение аргумента плотности вероятности, при котором  $W_{\xi}(x)$  оказывается максимально возможной. Отметим, что кривая плотности вероятности может быть *унимодальной*, т.е. иметь единственный максимум, или *полимодальной*, т.е. иметь несколько максимумов.

Ещё одну группу характеристик образуют квантили и процентные точки распределения. **Квантилем** порядка  $p$ , называют значение аргумента функции распределения  $x_p^*$ , удовлетворяющее уравнению

$$F_{\xi}(x_p^*) = p. \quad (4.12)$$

**Процентные точки**  $x_q$  распределения определяются уравнением

$$P\{\xi > x_q\} = 1 - F_{\xi}(x_q) = q, \quad (4.13)$$

т.е. определяют значение случайной величины, вероятность превышения которого равна  $q$ . Очевидно, что  $q$ -процентная точка распределения совпадает с квантилью порядка  $(1 - q)$ .

Для непрерывной СВ квантиль  $x_{0,5}^*$  совпадает с процентной точкой  $x_{0,5}$  и делит площадь под кривой плотности вероятности на две равные части. Подобное значение, по отношению к которому как меньшие, так и большие значения встречаются одинаково часто, называют **медианой распределения**.

#### 4.4. Расчет числовых моментов нормального распределения

Получим расчетные выражения для числовых характеристик нормального распределения.

Согласно (4.3) для определения математического ожидания необходимо рассчитать интеграл

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dx.$$

Громоздкий показатель экспоненты в подынтегральном выражении можно несколько упростить использованием подстановки  $z = (x - a)/\sigma$ . При такой замене пределы интегрирования корректировать не потребуется, поскольку при любых конкретных значениях параметров  $a$  и  $\sigma$  бесконечным значениям  $x$  будут соответствовать бесконечные значения  $z$ , однако следует принять во внимание, что  $dz = dx/\sigma$ . Заменяя первый множитель под интегралом как  $x = \sigma \cdot z + a$ , получим

$$M_{\xi} = \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz}_{=0} + a \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz}_{=1 \text{ (см. св-во нормировки)}} = a,$$

так как первый интеграл берется в симметричных пределах от нечетной подынтегральной функции, а во втором интеграле в бесконечных пределах интегрируется плотность вероятности нормальной СВ (3.24) с параметрами  $a=0$ ,  $\sigma=1$ .

Проанализируем теперь особенности центральных моментов нормальных СВ. Используя стандартную подстановку  $z = (x - a)/\sigma$ , запишем выражение для расчета центрального момента  $k$ -го порядка нормальной случайной величины в виде

$$\mu_k\{\xi\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dx = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^k \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Применительно к моментам нечетного порядка  $k$  функция  $f_1(z) = z^k$  оказывается нечетной, а функция  $f_2(z) = \exp(-z^2/2)$  – четной, поэтому подынтегральное выражение в целом представляет собой нечетную функцию аргумента  $z$ , что однозначно обеспечивает нулевое значение интеграла и, соответственно, равенство нулю всех моментов нечетного порядка.

Для расчета центральных моментов четного порядка воспользуемся интегрированием по частям. Выбирая  $u = z^{(k-1)}$  и  $dv = z \cdot \exp(-z^2/2)dz$ , имеем  $du = (k-1) \cdot z^{(k-2)}dz$  и  $v = -\exp(-z^2/2)$ . Таким образом,

$$\mu_k \{ \xi \} = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ -z^{(k-1)} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (k-1) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} z^{(k-2)} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right]$$

В этой сумме первое слагаемое всегда принимает нулевое значение, а второе – соответствует по структуре исходному интегралу, но с уменьшенной на “2”: степени  $z$ . Повторяя аналогично операции по понижению степени, получим

$$\mu_k \{ \xi \} = \sigma^k \cdot (k-1) \cdot (k-3) \times \dots \times 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz}_{=1 \text{ (по свойству нормировки)}} = \sigma^k \cdot (k-1)!!$$

Учитывая, что начальные моменты распределения любой случайной величины можно представить в виде

$$m_k \{ \xi \} = m_1 \left\{ \left( x - M_\xi + M_\xi \right)^k \right\} = \sum_{i=0}^k C_k^i \cdot \mu_i \{ \xi \} \cdot M_\xi^{k-i}, \quad (4.14)$$

а центральные моменты нормального распределения имеют вид

$$\mu_k \{ \xi \} = \begin{cases} 0, & \text{для нечетных } k \\ \sigma^k \cdot (k-1)!!, & \text{для четных } k \end{cases} \quad (4.15)$$

для нормального распределения получаем

$$\begin{aligned} m_1 \{ \xi \} &= M_\xi = a, \\ \mu_2 \{ \xi \} &= \sigma^2, \quad m_2 \{ \xi \} = \sigma^2 + M_\xi^2, \\ \mu_3 \{ \xi \} &= 3\sigma^2 \cdot M_\xi + M_\xi^3, \\ \mu_4 \{ \xi \} &= 3\sigma^4, \quad m_4 \{ \xi \} = 3\sigma^4 + 6\sigma^2 \cdot M_\xi^2 + M_\xi^4, \\ \mu_5 \{ \xi \} &= 15\sigma^4 \cdot M_\xi + 10\sigma^2 \cdot M_\xi^3 + M_\xi^5, \\ \mu_6 \{ \xi \} &= 15\sigma^6, \quad m_6 \{ \xi \} = 15\sigma^6 + 45\sigma^4 M_\xi^2 + 15\sigma^2 M_\xi^4 + M_\xi^6. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Обратите внимание, что оба параметра нормального распределения имеют чёткий физический смысл:  $a$  определяет математическое ожидание СВ,  $\sigma$  – совпадает со среднеквадратическим отклонением (эффективным значением) СВ.

Колоколообразный вид кривой плотности вероятности нормального распределения (см. выше рис. 13), симметричный относительно центральной точки  $x = a$ , указывает на то, что единственной *модой* и, одновременно, *медианой* этого распределения служит именно точка  $x_{\text{мод}} = x_{0,5} = a$ . При этом и *коэффициент асимметрии*  $\gamma$ , и *коэффициент эксцесса*  $\varepsilon$  имеют нулевые значения.

## 4.5. Примеры расчета числовых характеристик типовых распределений непрерывных случайных величин

### 4.5.1. Свойства равномерного распределения

В пределах всего разрешенного диапазона значений  $[a, b]$  плотность вероятности равномерного распределения принимает одно и то же значение

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.17)$$

поэтому моды равномерное распределение не имеет. Симметрия же плотности  $W_{\xi}(x)$  относительно середины диапазона наблюдаемых значений позволяет без вычислений утверждать, что медиана и математическое ожидание совпадают между собой

$$M_{\xi} = x_{0,5} = \frac{b+a}{2}, \quad (4.18)$$

а центральный момент третьего порядка равен нулю  $\mu_3\{\xi\} = 0$ .

Таким образом, рассчитать необходимо лишь дисперсию и коэффициент эксцесса распределения. Вычислим сначала второй начальный момент

$$m_2\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot W_\xi(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

откуда, согласно (4.7), для дисперсии получаем

$$D_\xi = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (4.19)$$

Для получения коэффициента эксцесса сначала рассчитаем четвертый центральный момент распределения

$$\mu_4\{\xi\} = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^4 \frac{dx}{b-a} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} y^4 \frac{dy}{b-a} = \frac{2}{b-a} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^{(b-a)/2} = \frac{(b-a)^4}{80};$$

здесь использована замена  $y = x - (b+a)/2$ , а затем учтено, что при интегрировании по  $y$  подынтегральное выражение четное. В итоге, получаем отрицательный коэффициент эксцесса (4.10)

$$\varepsilon = \frac{\mu_4\{\xi\}}{\sigma_\xi^4} - 3 = -1,2 \quad (4.20)$$

что вполне согласуется с физическим смыслом данного показателя, обсуждавшимся на с. 99.

#### 4.5.2. Числовые характеристики распределения Релея

При расчете математического ожидания распределения Релея следует иметь в виду, что релеевская СВ принимает лишь неотрицательные значения и при подстановке плотности вероятности (3.29) в определение (4.3) получаем

$$M_\xi = \int_0^{+\infty} x \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \underbrace{\left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot x\right]}_{=0} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Здесь правая часть получена интегрированием по частям, где из  $u = x$ ,  $dv = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$  следует  $v = -\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $du = dx$ .

Оставшийся интеграл в элементарных функциях не выражается и его следует преобразовать к какому-либо известному результату. Так как подынтегральное выражение является четным, то расширение области интегрирования на отрицательные значения приведет к удвоению значения интеграла, поэтому

$$M_{\xi} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{=1 \text{ (см. (2.28))}} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Для получения дисперсии вместо определения (4.6) вновь воспользуемся (4.7). При расчете начального момента  $m_2\{\xi\}$  используем подстановку  $z = x^2/(2\sigma^2)$ ,  $dz = (x/\sigma^2)dx$ . Тогда

$$m_2\{\xi\} = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 2\sigma^2 \int_0^{+\infty} z \cdot \exp(-z) dz$$

откуда интегрированием по частям с  $u = z$ ,  $dv = \exp(-z)dz$  и, соответственно,  $du = dz$ ,  $v = -\exp(-z)$  получаем

$$m_2\{\xi\} = 2\sigma^2 \cdot \left( \left[ -\exp(-z) \cdot z \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp(-z) dz \right) = 2\sigma^2$$

В итоге, числовые характеристики распределения Релея равны

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25 \cdot \sigma, \\ D_{\xi} &= 2\sigma^2 - \left( \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 = \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sigma^2 \approx 0,43 \cdot \sigma^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Обратите внимание, что для релеевского распределения эффективное значение не совпадает с параметром распределения  $\sigma$  и составляет  $\sigma_{\xi} \approx 0,655 \cdot \sigma$ . Напротив, расчет, произведенный ранее на с. 79, показал, что значение этого параметра служит модой распределения Релея  $x_{\text{мод}} = \sigma$ .

Для определения медианы распределения необходимо решить уравнение  $F_{\xi}(x_{0,5}) = 0,5$ . Используя (3.30), получим  $\exp(-x_{0,5}^2/(2 \cdot \sigma^2)) = 0,5$ . Отсюда, медиана распределения Релея

$$x_{0,5} = \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(2)}. \quad (4.22)$$

### 4.5.3. Числовые характеристики распределения Коши

Отметим, что числовые характеристики случайных величин существуют не всегда. Попробуем определить математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Коши (3.31).

Вариант рассуждений 1: Плотность вероятности (3.31) симметрична относительно точки  $x_0$ , поэтому точка  $x_0$  и должна служить математическим ожиданием распределения.

Вариант рассуждений 2: Формально, математическое ожидание распределения Коши определяется значением интеграла

$M_{\xi} = \frac{h}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{h^2 + (x - x_0)^2} dx$ . Записав числитель подынтегрального выражения в виде « $(x - x_0) + x_0$ », получим

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \frac{h}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d[(x - x_0)^2]}{h^2 + (x - x_0)^2} + \frac{x_0}{\pi \cdot h} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + [(x - x_0)/h]^2} = \\ &= \frac{h}{2\pi} \cdot \ln(h^2 + (x - x_0)^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{x_0}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{h}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Подстановка пределов интегрирования приводит в первом слагаемом к неопределенности « $\infty - \infty$ », что не позволяет поставить в соответствие распределению Коши конкретное значение математического ожидания.

*Замечание: Глубинный смысл обнаруженной неопределенности состоит в том, что попытка экспериментального определения математического ожидания СВ  $\xi$  по статистической выборке её*

значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  не приводят к положительному результату. Даже при бесконечном увеличении числа измерений вероятность наблюдения заметных отличий  $x_0$  от среднего арифметического значений  $x_i$  будет оставаться существенно отличной от нуля.

Итог: распределение Коши является примером распределения, не имеющего ни математического ожидания, ни дисперсии.

#### 4.5.4. Характеристики показательного распределения

Плотность вероятности показательного распределения определяется соотношением (3.33). Опираясь на определение (4.3) для математического ожидания получим

$$M_{\xi} = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) dx = x \cdot [-\exp(-\lambda \cdot x)] \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda \cdot x) dx .$$

Приведенная в правой части сумма получена путем интегрирования по частям, где  $u = x$ ,  $dv = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) dx$ . Учтем далее, что при  $x \rightarrow \infty$  функция  $\exp(-\lambda \cdot x)$  при любом положительном  $\lambda$  стремится к нулю быстрее, чем возрастает любая степень  $x$ , поэтому первое слагаемое суммы стремится к нулю.

В результате, математическое ожидание показательного распределения оказывается равным

$$M_{\xi} = 1/\lambda . \quad (4.23)$$

Для расчета дисперсии разумно использовать (4.7). Дважды применив интегрирование по частям, получаем

$$D_{\xi} = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) dx - M_{\xi}^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} . \quad (4.24)$$

Как следствие, среднеквадратическое отклонение (4.8) величины, имеющей показательное распределение, составляет

$$\sigma_{\xi} = 1/\lambda . \quad (4.25)$$

Расчет третьего центрального момента путем непосредственного интегрирования оказывается весьма громоздким, но в конечном счете приводит к

$$\mu_3\{\xi\} = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) dx = \frac{2}{\lambda^3}$$

Таким образом, коэффициент асимметрии (4.9) показательного распределения оказывается равным

$$\gamma = \frac{\mu_3\{\xi\}}{\sigma_\xi^2} = 2,$$

что вполне согласуется с физическим смыслом данного параметра, обсуждавшимся на с. 98.

#### 4.5.5. Гамма-распределение

При решении задач математической статистики довольно часто приходится иметь дело с гамма-распределением, которое является обобщением показательного распределения и определяется плотностью вероятности

$$W_\xi(x) = \frac{\lambda^k \cdot x^{k-1} \exp(-\lambda \cdot x)}{\Gamma(k)}, \quad x \geq 0, \lambda > 0, k > 0. \quad (4.26)$$

где  $\Gamma(k)$  – гамма-функция, определяемая интегралом

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} \exp(-t) dt \quad (4.27)$$

и обладающая следующим набором свойств

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k),$$

для целочисленных аргументов ( $k > 0$ )  $\Gamma(k+1) = k!$ , (4.28)

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \times \dots \times (2k-1) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2k-1)!!}{2^n}.$$

Гамма-распределение превращается в показательное при  $k=1$ .

При поиске числовых характеристик гамма-распределения воспользуемся заменой переменных  $t = \lambda \cdot x$

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k \cdot x^k}{\Gamma(k)} \exp(-\lambda \cdot x) dx = \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^k \cdot \exp(-t) dt$$

Сопоставляя последний интеграл с определением (4.27), а затем, используя верхнее свойство из (4.28), для математического ожидания гамма-распределения получаем

$$M_{\xi} = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda \cdot \Gamma(k)} = \frac{k}{\lambda}. \quad (4.29)$$

Найдем второй начальный момент распределения

$$\begin{aligned} m_2\{\xi\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k \cdot x^{k+1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^{k+1} \cdot e^{-t} dt = \\ &= \frac{\Gamma(k+2)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(k)} = \frac{k \cdot (k+1)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Тогда для дисперсии гамма-распределения получаем

$$D_{\xi} = m_2\{\xi\} - M_{\xi}^2 = \frac{k}{\lambda^2}. \quad (4.30)$$

*Примечание: При целочисленном  $k > 1$  гамма-распределение превращается в распределение Эрланга  $k$ -го порядка, характеризующее свойства суммы  $k$  интервалов между событиями в простейшем пуассоновском потоке событий (см. с. 81).*

## 4.6. Производящие функции и их применение для расчета числовых характеристик дискретных случайных величин

Расчет числовых характеристик дискретных случайных величин производится в соответствии с выражениями

$$m_k\{\xi\} = \sum_{i=1}^m x_i^k p_i, \quad (4.31)$$

$$\mu_k \{ \xi \} = \sum_{i=1}^m (x_i - M_\xi)^k p_i, \quad (4.32)$$

т.е. предполагает суммирование совокупности слагаемых, количество которых равно числу возможных значений СВ. Если это число невелико, то никаких проблем расчет  $m_k \{ \xi \}$  и  $\mu_k \{ \xi \}$  не вызывает. Однако, часто приходится иметь дело с ДСВ, имеющими от многих десятков до бесконечного числа возможных значений. Применительно к таким ДСВ использование выражений (4.31) и (4.32) оказывается затруднительным. В связи с этим, рассмотрим особый подход к расчету числовых характеристик ДСВ, принимающих лишь неотрицательные целочисленные значения. Он опирается на использование *производящих функций*.

*Примечание: Ещё один способ альтернативного расчета числовых характеристик СВ, вычисление которых непосредственно по определениям (4.2) и (4.5) затруднительно, предполагает использование аппарата характеристических функций. Свойства характеристических функций СВ будут рассматриваться в п. 6.11.*

#### 4.6.1. Понятие и свойства производящих функций

Производящей функцией ДСВ, принимающей лишь неотрицательные целочисленные значения  $x_i = i$ , называется функция

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot z^i, \quad (4.33)$$

где коэффициенты  $p_i$  равны вероятностям наблюдения соответствующих значений ДСВ, т.е.  $p_i = P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = i\}$ .

Применительно к значению аргумента  $z = 1$  производящие функции обладают целым набором интересных свойств:

1. Свойство нормировки. Для любой случайной величины

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1. \quad (4.34)$$

2. Связь производной производящей функции с математическим ожиданием ДСВ.

Первая производная по  $z$  от производящей функции равна

$$\varphi'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot i \cdot z^{i-1}, \quad (4.35)$$

При  $z = 1$  выражение (4.35) приобретает вид

$$\varphi'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_i$$

и, с учётом  $x_i = i$ , становится идентичным по значению первому начальному моменту СВ  $\xi$ , определяемому (4.31).

Итак, математическое ожидание принимающей неотрицательные целочисленные значения ДСВ может быть определено через её производящую функцию по правилу

$$M_{\xi} = \varphi'(1). \quad (4.36)$$

Пример применения правила (4.36) будет приведен в п. 4.6.2.

3. Связь дисперсии ДСВ с её производящей функцией.

Рассмотрим вторую производную от производящей функции

$$\varphi''(z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot z^{i-2}$$

Для аргумента  $z = 1$  она приобретает вид

$$\varphi''(1) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot z^{i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot p_i - \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_i. \quad (4.37)$$

Но, согласно (4.31), при  $x_i = i$  первая сумма в (4.37) совпадает по значению со вторым начальным моментом распределения  $\xi$ , а вторая сумма есть ничто иное как математическое ожидание.

Таким образом, второй начальный момент СВ  $\xi$  может быть рассчитан по её производящей функции как

$$m_2\{\xi\} = \varphi''(1) + \varphi'(1), \quad (4.38)$$

а дисперсия ДСВ связана с производящей функцией правилом

$$D_\xi = \varphi''(1) + \varphi'(1) \cdot [1 - \varphi'(1)]. \quad (4.39)$$

#### 4. Расчет моментов распределения более высоких порядков

Можно получить аналогичные (4.36) и (4.38) формулы взаимосвязи характеристической функции с моментами более высоких порядков, однако эти формулы оказываются весьма громоздкими. Остановимся на соотношении, определяющем расчет третьего начального момента распределения СВ  $\xi$

$$m_3\{\xi\} = \varphi'''(1) + 3 \cdot \varphi''(1) + \varphi'(1). \quad (4.40)$$

#### 4.6.2. Характеристики биномиального распределения

Возможный вариант возникновения биномиального распределения уже обсуждался, например, на с. 40. Выяснилось, что вероятность наблюдения в последовательности  $n$  независимых испытаний ровно  $k$  случаев наступления события  $A$  равна

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.41)$$

где  $p$  и  $q = 1 - p$  - параметры распределения, определяющие вероятность наступления (и отсутствия) события  $A$  в отдельном опыте.

Формальный подход, скажем, к расчету математического ожидания предполагает вычисление суммы

$$M_\xi = \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (4.42)$$

однако найти в математических справочниках готовый результат для подобного выражения совсем непросто, а непосредственное суммирование слагаемых имеет приемлемую сложность лишь для  $n \ll 100$ , но не позволяет увидеть общего решения. В связи с этим, попробуем использовать аппарат производящих функций.

В рассматриваемом случае производящая функция будет определяться выражением

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} [C_n^i \cdot p^i \cdot q^{(n-i)}] \cdot z^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_n^i \cdot (zp)^i \cdot q^{(n-i)},$$

но последняя сумма есть ни что иное, как определяемое биномом Ньютона разложение по степеням  $z$   $n$ -степени суммы  $(zp + q)$ . Таким образом, производящая функция биномиального распределения имеет вид

$$\varphi(z) = (zp + q)^n, \quad (4.43)$$

Запишем первые две производные функции  $\varphi(z)$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= n \cdot (zp + q)^{n-1} \cdot p, \\ \varphi''(z) &= n \cdot (n-1) \cdot (zp + q)^{n-2} \cdot p^2. \end{aligned}$$

При подстановке аргумента  $z = 1$  учтем, что параметры распределения связаны соотношением  $p + q = 1$ , а значит центральные элементы обеих зависимостей  $(zp + q)^* \equiv 1$ . Таким образом, математическое ожидание биномиальной СВ равно

$$M_{\xi} = \varphi'(1) = np, \quad (4.44)$$

а дисперсия биномиального распределения составляет

$$D_{\xi} = n \cdot (n-1) \cdot p^2 + np \cdot (1 - np) = npq. \quad (4.45)$$

Итак, использование аппарата производящих функций не только существенно уменьшило трудозатраты на расчет числовых характеристик, но и позволило получить эти результаты в общем виде.

Завершая анализ биномиального распределения, получим выражение для определения его моды (см. с. 100). Для этого проанализируем приведенное ниже соотношение вероятностей

$$\frac{P\{\xi = k\}}{P\{\xi = k - 1\}} = \frac{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}}{C_n^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{(n-k+1)}} = \frac{(n-k+1) \cdot p}{k \cdot q}.$$

Добавив к числителю “ $\pm k \cdot q$ ” и перегруппировав слагаемые, это соотношение можно представить в виде

$$\frac{P\{\xi = k\}}{P\{\xi = k - 1\}} = \frac{k \cdot q + (n+1) \cdot p - k}{k \cdot q} = 1 + \frac{(n+1) \cdot p - k}{k \cdot q}. \quad (4.46)$$

Для малых  $k \geq 1$  дробь в правой части (4.46) оказывается, как правило, положительной, а выражение в целом – больше единицы. Это означает, что с увеличением  $k$  вероятность  $P\{\xi = k\}$  увеличивается. При  $k > (n+1)p$ , напротив, дробь в правой части (4.46) становится отрицательной, а отношение вероятностей – меньше единицы, т.е. при дальнейшем росте  $k$  вероятность  $P\{\xi = k\}$  уменьшается.

Итак, модой биномиального распределения служит значение  $k$ , определяемое правилом

$$k_{\text{мод}} = \text{int}((n+1) \cdot p), \quad (4.47)$$

где  $\text{int}(x)$  – операция взятия целой части числа.

### 4.6.3. Характеристики геометрического распределения

Ещё один вид распределения ДСВ, связанный с исследованием последовательности независимых испытаний, был рассмотрен на с. 63 – это геометрическое распределение. Для ДСВ, подчиняющейся геометрическому распределению, вероятность наблюдения любого целочисленного значения составляет

$$P\{\xi = k\} = p \cdot q^k, \quad k \geq 0, \quad (4.48)$$

где  $p$  - параметр распределения,  $q = 1 - p$ .

Для расчета производящей функции геометрического распределения, запишем

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} [p \cdot q^i] \cdot z^i = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (qz)^i.$$

В полученном выражении фигурирует бесконечная сумма слагаемых, образующих геометрическую прогрессию. Используя для расчета этой суммы известную формулу (2.10), для производящей функции геометрического распределения получаем окончательно

$$\varphi(z) = p / (1 - qz). \quad (4.49)$$

Запишем первые две производные функции  $\varphi(z)$ :

$$\varphi'(z) = pq / (1 - qz)^2,$$

$$\varphi''(z) = 2pq^2 / (1 - qz)^3.$$

и подставим значение аргумента  $z = 1$ , учитывая, что  $p = 1 - q$ . В результате, математическое ожидание геометрического распределения составляет

$$M_{\xi} = \varphi'(1) = q / p. \quad (4.50)$$

Для дисперсии в соответствии с (4.39) получаем

$$D_{\xi} = 2 \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} \cdot \left[ 1 - \frac{q}{p} \right] = \frac{q^2 + pq}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \quad (4.51)$$

#### 4.6.4. Свойства распределения Пуассона

Говорят, что ДСВ имеет распределение Пуассона, если вероятность принятия ею целочисленных значений выражается формулой

$$P\{ \xi = k \} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, \quad k \geq 0, \quad (4.52)$$

где параметр распределения  $a = \text{const} > 0$ .

Для получения производящей функции распределения полезно вспомнить, что известное разложение функции  $f(z) = e^{+az}$  в ряд Маклорена имеет вид

$$e^{+az} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(az)^i}{i!}.$$

С учетом этого, расчетное выражение, записанное на основе определения (4.33), можно преобразовать к виду

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{a^i}{i!} \cdot e^{-a} \right] \cdot z^i = e^{-a} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(az)^i}{i!} = e^{-a} \cdot e^{+az}.$$

В результате, для производящей функции пуассоновского распределения получаем выражение

$$\varphi(z) = e^{a(z-1)}. \quad (4.53)$$

Вновь запишем первые две производные функции  $\varphi(z)$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= a \cdot e^{a(z-1)}, \\ \varphi''(z) &= a^2 \cdot e^{a(z-1)}. \end{aligned}$$

Подставляя  $z = 1$ , видим, что математическое ожидание пуассоновского распределения равно

$$M_{\xi} = \varphi'(1) = a. \quad (4.54)$$

Для дисперсии, согласно (4.39), получаем

$$D_{\xi} = a^2 + a \cdot [1 - a] = a. \quad (4.55)$$

Итак, параметр  $a$  пуассоновского распределения может определяться как  $a = n \cdot p$ , если это распределение возникает как предельный случай биномиального (см. с. 45), или как  $a = \lambda \cdot \tau$ , если оно характеризует простейший поток событий (см. с. 48). Однако в любом случае, параметр  $a$  характеризует среднее число ожидаемых событий, а потому совпадает с математиче-

ским ожиданием СВ. Любопытно, что и дисперсия распределения Пуассона также оказывается равной  $a$ .

#### 4.7. Примеры исследования числовых характеристик случайных величин

Пример 1 (продолжение примера, приведенного на с. 85):  
 Определить числовые характеристики непрерывной случайной величины с плотностью вероятности (см. рис. 20)

$$W_{\xi}(x) = 0,5\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|), \quad \lambda > 0. \quad (4.56)$$

Решение: При расчете математического ожидания под интегралом оказывается нечетная функция  $0,5x \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|)$ , что (без дальнейших расчетов) означает

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 0,5\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|) dx = 0.$$

Аналогичный вывод следует из симметрии  $W_{\xi}(x)$  относительно точки  $x=0$ , что однозначно определяет расположение «центра масс» плотности вероятности и, соответственно, математического ожидания  $\xi$  (см. рассуждения на с. 96).

Для расчета дисперсии сначала избавимся от «модуля» в подынтегральном выражении на основе четности функции, затем дважды воспользуемся интегрированием по частям и, наконец, тем фактом, что функция  $\exp(-\lambda \cdot x)$  при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю быстрее, чем возрастает любая степень  $x$ . В результате, имеем

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|) dx = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^{-\lambda x} dx \\ du = 2x \cdot dx & v = -e^{-\lambda x} / \lambda \end{array} \right| = -x^2 \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x \cdot e^{-\lambda x} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad dv = e^{-\lambda x} dx \\ du = 2 \cdot dx \quad v = -e^{-\lambda x} / \lambda \end{array} \right| = -\frac{2}{\lambda} x \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \\
 &= -\frac{2}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Эффективное значение (с.к.о.) распределения (4.56) составит

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{2/\lambda}.$$

Расчет коэффициента асимметрии производить в реальности не требуется, так как из четности плотности вероятности однозначно следует  $\gamma = 0$ .

Попробуйте самостоятельно (по аналогии с расчетом дисперсии) выполнить расчет  $\mu_4\{\xi\}$ . После 4-кратного интегрирования по частям должно получиться

$$\mu_4\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot 0,5\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|) dx = 24/\lambda^4,$$

тогда коэффициент эксцесса (4.10) распределения составит

$$\varepsilon = \mu_4\{\xi\} / \sigma_{\xi}^4 - 3 = 3.$$

Подобный результат вполне соответствует островершинному характеру плотности вероятности (4.56).

Кстати, тот факт, что функция  $W_{\xi}(x)$  имеет единственную вершину в точке  $x = 0$ , указывает, что именно эта точка и служит модой (4.11) анализируемого распределения

$$x_{\text{мод}} = \arg \max_x W_{\xi}(x) = 0.$$

Пример 2: При каждом цикле обзора радиолокатора объект (независимо от результатов других циклов) обнаруживается с вероятностью  $p = 0,2$ . Обозначим через  $\xi$  число циклов обзора, которое придется произвести до обнаружения объекта, а через  $\eta$  – число циклов, требующихся для обнаружения (т.е. включая и тот, последний, при котором объект

был обнаружен). Найти математическое ожидание, дисперсию и эффективное значение обеих случайных величин. Оценить вероятность того, что  $\eta$  окажется в опыте больше своего математического ожидания более чем на  $3 \cdot \sigma_\eta$ .

Решение: Поиск радиолокатором объекта представляет собой последовательность независимых испытаний, уже ранее рассматривавшуюся, например, на с. 63. Это позволяет однозначно утверждать, что СВ  $\xi$  подчиняется геометрическому распределению с параметрами  $p_1 = 0,2$  и  $q_1 = 1 - p_1 = 0,8$  и для расчета её характеристик применимы соотношения (4.50) и (4.51). В результате, математическое ожидание СВ  $\xi$  составляет

$$M_\xi = q_1 / p_1 = 0,8 / 0,2 = 4. \quad (4.57)$$

а дисперсия и эффективное значение (с.к.о.) равны

$$D_\xi = \frac{q_1}{p_1^2} = \frac{0,8}{0,2^2} = 20; \quad \sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{20} \approx 4,47. \quad (4.58)$$

Найдем вероятность того, что до обнаружения объекта потребуется произвести более чем  $M_\xi + 3 \cdot \sigma_\xi$  безрезультатных циклов обзора

$$\begin{aligned} P\{\xi > (4 + 3 \cdot 4,47)\} &= P\{\xi > 17,42\} = 1 - \sum_{i=18}^{\infty} p_1 \cdot q_1^i = \\ &= 1 - p_1 \cdot (1 - q_1^{18}) / (1 - q_1) = q_1^{18} \approx 0,018. \end{aligned}$$

Как видно, эта вероятность весьма мала.

При обнаружении каждого из объектов значение СВ  $\eta$  ровно на 1 отличается от соответствующего значения СВ  $\xi$ , т.к. учитывает последний цикл, завершающий процедуру обнаружения. Таким образом, характеристики разброса для  $\eta$  будут такими же, как у СВ  $\xi$ :  $D_\eta = D_\xi = 20$ ,  $\sigma_\eta = \sigma_\xi = 4,47$ , а математическое ожидание составит

$$M_\eta = 1 + q_1 / p_1 = 5. \quad (4.59)$$

## 5. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Большинство технических устройств и систем представляют собой совокупность взаимодействующих модулей, преобразующих поступающие на вход сигналы в отклики на выходе устройства по некоторым жестко установленным правилам. При воздействии на вход такого устройства (модуля) случайных сигналов, очевидно, и реакция, наблюдаемая на выходе модуля, будет носить случайный характер. Однако из-за наличия четкой зависимости между входными и выходными сигналами, их законы распределения также жестко связаны друг с другом. Необходимо лишь выявить правила, позволяющие по свойствам нелинейного модуля и вероятностным характеристикам воздействия, прогнозировать закон распределения отклика, формируемого конкретным нелинейным модулем.

В текущей главе мы рассмотрим преобразование единственной СВ  $\xi$  в наблюдаемую на выходе нелинейного преобразователя СВ  $\eta$ . При этом взаимосвязь между входом и выходом будет задаваться некоторой известной функцией прямого преобразования  $y = f(x)$ , позволяющей рассчитать реакцию  $y$  анализируемого преобразователя в ответ на входное воздействие  $x$  (рис. 24). Случаи преобразования нескольких случайных входных воздействий в одну или несколько случайных реакций будут рассматриваться в гл. 6.

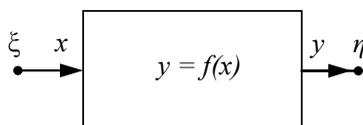


Рис. 24. Общий вид исследуемого нелинейного преобразователя

### 5.1. Преобразование дискретных случайных величин

Случай воздействия на нелинейный преобразователь ДСВ является максимально простым для анализа. Для выявления

принципов расчета здесь достаточно произвести анализ какого-либо простого конкретного случая, например...

Пример 1: Работа генератора гармонических сигналов синхронизирована с работой некоего внешнего задающего устройства. В зависимости от нюансов процесса синхронизации начальная фаза  $\psi$  колебания

$$\eta = A \cdot \cos(\pi \cdot 10^5 \cdot t + \psi), \quad (5.1)$$

формируемого генератором, может принять одно из нескольких возможных значений в соответствии с рядом распределения СВ, представленным строчками « $x_i$ » и « $p_i$ » таблицы ниже

$x_i$	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi$	$4\pi/3$	$5\pi/3$
$p_i$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,25
$y_i$	$-A$	$-A/2$	$+A/2$	$+A$	$+A/2$	$-A/2$

Определить закон распределения мгновенного значения на выходе генератора в момент времени  $t_0 = 10$  мкс.

Решение: Дополним стандартную таблицу ряда распределения случайной начальной фазы  $\psi$  новой (третьей) строкой, в которую внесём соответствующие  $\psi$  мгновенные значения сигнала  $\eta$ , возникающего на выходе генератора. При этом учтем, что  $\pi \cdot 10^5 \cdot t_0 = \pi \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = \pi$ , т.е. значения, наблюдаемые в момент времени  $t_0$  являются противофазными по отношению к начальной фазе  $\psi$ .

Из сформированной строки таблицы видно, что величина  $\eta$  может принимать лишь 4 различных значения  $\pm A$  и  $\pm A/2$ ; разместим их в порядке возрастания в новой таблице, тем самым получив заготовку для ряда распределения СВ  $\eta$ . Наименьшее значение ( $-A$ ) СВ  $\eta$  приобретает тогда и только тогда, когда начальная фаза  $\psi$  оказывается нулевой, поэтому  $P\{\eta = -A\} = P\{\psi = 0\} = 0,05$ . Значение же ( $-A/2$ ) СВ  $\eta$  принимает как

при  $\psi_1 = \pi/3$ , так и при  $\psi_2 = 5\pi/3$ , поэтому  $P\{\eta = -A/2\} = P\{\psi = \pi/3\} + P\{\psi = 5\pi/3\} = 0,35$ . (Вероятности здесь можно и нужно просто суммировать, т.к. объединяемые события – несовместны) Просуммировав вероятности для двух случаев, приводящих к появлению  $\eta = +A/2$ , и зафиксировав  $P\{\eta = +A\} = P\{\psi = \pi\} = 0,20$ , получаем для СВ  $\eta$  следующий ряд распределения, который и будет ответом к рассматриваемому случаю функционального преобразования ДСВ:

$y_j$	$-A$	$-A/2$	$+A/2$	$+A$
$p_j$	0,05	0,35	0,40	0,20

Итак, при функциональном преобразовании ДСВ и на входе, и на выходе преобразователя могут наблюдаться лишь счетные множества значений. Число разных значений СВ  $\eta$ , наблюдаемой на выходе преобразователя, не может превышать число различных значений СВ  $\xi$ , подаваемой на его вход. И анализ функционального преобразования ДСВ сводится, по сути, к пересчету наблюдаемых значений со входа на выход, их упорядочению по возрастанию и к записи получаемого в итоге нового ряда распределения.

## 5.2. Преобразование непрерывных случайных величин

### 5.2.1. Базовый случай

Рассмотрим теперь случай, когда СВ  $\xi$ , воздействующая на вход преобразователя (рис. 24), является непрерывной, а функция  $y = f(x)$  не содержит горизонтальных участков (пример подходящей функции показан на рис. 25). Тогда каждое выходное значение  $y$  может быть получено из конечного числа аргументов  $x$ , т.е. существует *конечнозначная* обратная функция  $x = \varphi_i(y)$ , где  $i$  – номер ветви обратной функции  $\varphi(\cdot)$ . В частности, для случая, представленного на рис. 25, обратная функция является однозначной для  $y \in (-\infty; y_0]$  и трехзнач-

ной для  $y \in [y_0; y_1]$  (три разных значения  $x_1^* = \varphi_1(y^*)$ ,  $x_2^* = \varphi_2(y^*)$  и  $x_3^* = \varphi_3(y^*)$  соответствуют одному и тому же  $y^*$ ).

В соответствии с определением (3.18)

$$W_\eta(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P\{y \leq \eta < y + \Delta y\}}{\Delta y}. \quad (5.2)$$

Оценим стоящую в числителе вероятность  $P\{y \leq \eta < y + \Delta y\}$ . Для этого проконтролируем, сколь сильно нужно изменить  $x_i^*$ , чтобы на выходе вместо  $y^*$  наблюдалось значение  $(y^* + \Delta y)$ .

Согласно рис. 25 существуют 3 несовместных случая, когда СВ  $\eta$  будет попадать в нужный диапазон значений:

1) Входная величина  $\xi$  лежит в интервале от  $x_1^*$  до  $(x_1^* + \Delta x_1)$ .

При малом интервале  $\Delta x_1$  вероятность подобного события равна  $P\{x_1^* \leq \xi \leq x_1^* + \Delta x_1\} \approx W_\xi(x_1^*) \cdot \Delta x_1 = W_\xi(\varphi_1(y^*)) \cdot \Delta x_1$ ;

2) Величина  $\xi$  лежит в интервале от  $(x_2^* + \Delta x_2)$  до  $x_2^*$ . Порядок следования граничных точек здесь изменен в связи с тем, что при положительном приращении  $\Delta y$  изменение аргумента  $x$  будет отрицательным, т.е.  $\Delta x_2 < 0$ . Соответственно, в расчетном выражении для вероятности следует исполь-

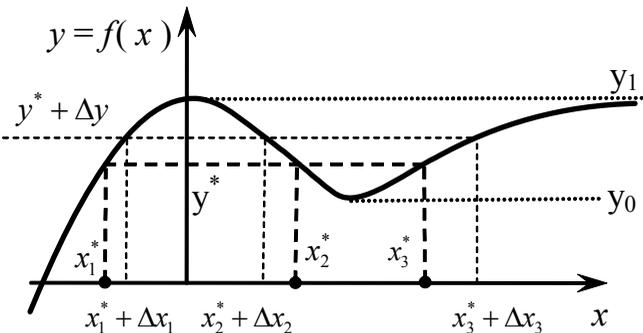


Рис. 25. Пример функциональной зависимости с конечнозначной обратной функцией

зовать абсолютное значение величины  $\Delta x_2$ , а именно  $P\{x_2^* + \Delta x_2 \leq \xi \leq x_2^*\} \approx W_\xi(x_2^*) \cdot |\Delta x_2| = W_\xi(\varphi_2(y^*)) \cdot |\Delta x_2|$ ;

3) Значение  $\xi$  может лежать в интервале от  $x_3^*$  до  $(x_3^* + \Delta x_3)$ .  
Здесь  $\Delta x_3 > 0$ , однако если при расчете вероятности использовать знак модуля, то выражение останется вполне корректным  $P\{x_3^* \leq \xi \leq x_3^* + \Delta x_3\} \approx W_\xi(x_3^*) \cdot |\Delta x_3| = W_\xi(\varphi_3(y^*)) \cdot |\Delta x_3|$ .

Вероятность того, что в конкретном опыте произойдет какое-то из этих несовместных событий в соответствии с (2.5) определяется суммой

$$P\{y \leq \eta < y + \Delta y\} \approx \sum_{i=1}^3 W_\xi(\varphi_i(y^*)) \cdot |\Delta x_i|. \quad (5.3)$$

Этот результат будет тем точнее, чем меньше величины  $\Delta x_i$ , которые будут уменьшаться вслед за  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Подстановка (5.3) в числитель (5.2) приводит к необходимости оценивать величины отношений  $\Delta x_i / \Delta y$ , но для зависимости  $x = \varphi(y)$  приращения  $\Delta x_i$  оказываются приращениями функции, возникающими в ответ на приращение её аргумента  $y$ . Отношение этих приращений при условии  $\Delta y \rightarrow 0$  приводит нас, по сути, к определению производной функции  $x = \varphi_i(y)$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta y} = \frac{d\varphi_i}{dy}.$$

Объединяя собранные факты воедино, приходим к выводу:

Если для каждого возможного значения выходной СВ  $\eta$  обратная функция оказывается конечнозначной, то закон распределения  $\eta$  определяется правилом

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right|, \quad (5.4)$$

где суммирование идет по всем ветвям обратной функции.

### 5.2.2. Анализ функционального преобразования при бесконечнозначной обратной функции

К сожалению, формула (5.4) не является универсальной. Например, её затруднительно применить к случаю, представленному на рис. 26. Ранее предполагалось, что для каждого аргу-

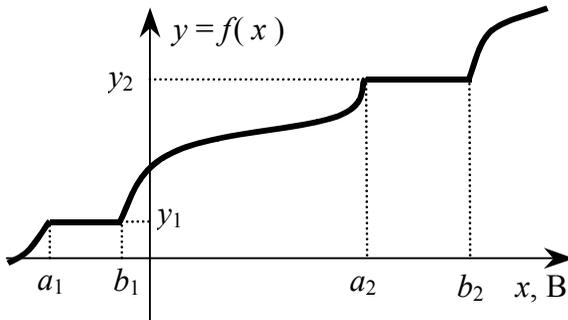


Рис. 26. Пример функциональной зависимости с бесконечнозначной обратной функцией

мента  $y$  существует конечное число ветвей обратной функции, определяющее число слагаемых в сумме (5.4). Но согласно рис. 26, для получения на выходе значения  $y_1$  достаточно подать на вход любое воздействие из диапазона  $a_1 \leq x \leq b_1$ . Аналогично, количество аргументов  $x$ , соответствующих выходному уровню  $y_2$ , бесконечно велико – это любые значения из диапазона  $a_2 \leq x \leq b_2$ .

Для преодоления затруднений полезно вспомнить, что в соответствии с п.3.2, под законом распределения понимается правило, определяющее вероятности принятия случайной величиной её возможных значений, а вероятности наблюдения на выходе значений  $y_1$  и  $y_2$  определить легко. Действительно,

$$P\{ \eta = y_i \} = P\{ a_i \leq \xi < b_i \} = \int_{a_i}^{b_i} W_{\xi}(x) dx. \quad (5.5)$$

Полученный результат указывает, что значения СВ  $\eta$  можно разделить на 2 отличающиеся по свойствам группы:

- 1) набор значений из диапазонов  $\eta < y_1$ ,  $y_1 < \eta < y_2$ ,  $\eta > y_2$ , где каждая реакция на выходе возникает в ответ на единственное конкретное подаваемое на вход воздействие; вероятность наблюдения каждого конкретного значения из этой группы бесконечно мала;
- 2) уровни, строго равные  $y_1$  и  $y_2$ , наблюдаемые с положительной вероятностью, определяемой (5.5).

Величины  $\eta$  с подобными свойствами уже рассматривались в п. 3.8 и назывались смешанными случайными величинами. Согласно (3.41), для записи плотности вероятности такой СВ достаточно к выражению, определяющему непрерывную часть зависимости, добавить  $\delta$ -образные слагаемые, соответствующие значениям, наблюдаемым с положительной вероятностью.

Дополняя правило (5.4) набором  $\delta$ -образных слагаемых с вероятностями, определяемыми (5.5), приходим к результату:

Плотность вероятности отклика  $\eta$  нелинейного преобразователя на воздействие СВ  $\xi$  с законом распределения  $W_\xi(x)$  в общем случае может быть рассчитана по правилу

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| + \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (5.6)$$

где первая сумма включает все ветви обратных функций по всем наклонным участкам зависимости  $y = f(x)$ , вторая сумма – все горизонтальные участки той же самой зависимости, а вероятности  $P\{\eta = y_m\}$  рассчитываются в соответствии с (5.5).

### 5.3. Расчет числовых характеристик случайных величин на выходе нелинейного преобразователя

В соответствии с определением (4.2) начальные моменты  $k$ -го порядка величины  $\eta$  можно рассчитывать по правилу

$$m_k \{ \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k \cdot W_\eta(y) dy, \quad (5.7)$$

т.е.  $k$ -й начальный момент есть результат усреднения  $k$ -х степеней всех возможных значений СВ  $\eta$  с учетом вероятности их наблюдения в опыте, определяемой сомножителем  $W_\eta(y)dy$ .

Однако, любое значение  $y$  выходной СВ  $\eta$  – это реакция нелинейного преобразователя на конкретное входное воздействие  $x$ , порожденное в данном опыте величиной  $\xi$ . Вероятность появления значений  $\eta$  из малой окрестности конкретного уровня  $y$  определяются возможностью наблюдения значений СВ  $\xi$ , принадлежащих соответствующим диапазонам оси  $x$  (см., в частности (5.3)). А значит, перебор всех значений  $y$  СВ  $\eta$  вполне можно заменить перебором от минус до плюс бесконечности всех возможных значений  $x$  величины  $\xi$ . Если при подобном переборе усреднять  $k$ -е степени самих значений  $x$ , то (см. (4.2)) будет получен  $k$ -й начальный момент величины  $\xi$ . Если же выполнять усреднение  $k$ -х степеней реакций  $y = f(x)$ , то результатом будет  $k$ -й начальный момент СВ  $\eta$ :

Итак, числовые характеристики отклика  $\eta$  нелинейного преобразователя на воздействие подчиняющейся закону распределения  $W_\xi(x)$  СВ  $\xi$  могут быть получены без предварительного расчета  $W_\eta(y)$  по правилам

$$m_k \{ \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^k \cdot W_\xi(x) dx, \quad (5.8)$$

$$\mu_k \{ \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_\eta]^k \cdot W_\xi(x) dx. \quad (5.9)$$

И, в частности, для математического ожидания и дисперсии

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_\xi(x) dx, \quad (5.10)$$

$$D_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_\eta]^2 W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 W_\xi(x) dx - M_\eta^2, \quad (5.11)$$

#### 5.4. Примеры анализа функциональных преобразований случайных величин

Пример 1: Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  связаны линейной зависимостью  $\eta = a \cdot \xi + b$ . Установить взаимосвязь между их законами распределения и числовыми характеристиками.

Решение: Функция прямого преобразования, определяющая реакцию  $y$  преобразователя на входное воздействие  $x$ , имеет вид  $y = a \cdot x + b$  и является взаимнооднозначной (см. рис. 27): каждому  $x$  соответствует единственная реакция  $y$ , и каждому  $y$  соответствует один аргумент  $x$ , определяемый обратной функцией  $x = \varphi_1(y) = \frac{y-b}{a}$ . Её производная  $\frac{d\varphi_1}{dy} = \frac{1}{a}$ .

Горизонтальных участков зависимость  $y = f(x) = a \cdot x + b$  не имеет. Таким образом, в универсальной формуле (5.6) первая сумма будет представлена единственным слагаемым, а вторая – отсутствовать. Получаем связь законов распределения

$$W_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot W_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right). \quad (5.12)$$

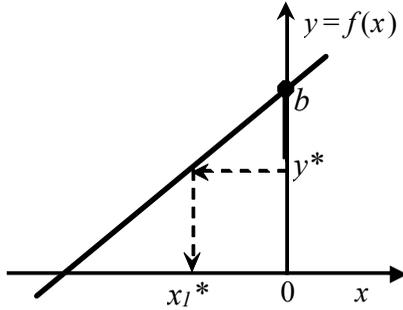


Рис. 27. Случай линейной взаимозависимости величин

Для расчета начальных моментов распределения СВ  $\eta$  подставим функцию  $y = f(x) = a \cdot x + b$  в правило (5.8)

$$m_k \{ \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} [a \cdot x + b]^k \cdot W_{\xi}(x) dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot b^{n-k} \cdot a^k \cdot m_k \{ \xi \}. \quad (5.13)$$

Например, для математического ожидания логично получаем

$$M_{\eta} = a \cdot M_{\xi} + b. \quad (5.14)$$

Центральные моменты в соответствии с (5.9)

$$\begin{aligned} \mu_k \{ \eta \} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(a \cdot x + b) - (a \cdot M_{\xi} + b)]^k \cdot W_{\xi}(x) dx = \\ &= a^k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^k \cdot W_{\xi}(x) dx = a^k \cdot \mu_k \{ \xi \} \end{aligned} \quad (5.15)$$

не зависят от параметра  $b$ , который лишь смещает  $M_{\eta}$  вдоль оси  $y$ , никак не затрагивая величину отклонения значений СВ от математического ожидания, а вот параметр  $a$  явно влияет на разброс значений СВ  $\eta$  и потому, например, её дисперсия увеличивается пропорционально квадрату данного параметра

$$D_{\eta} = a^2 \cdot D_{\xi}. \quad (5.16)$$

Пример 2: Величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\sigma$ , а СВ  $\eta$  связана с ней правилом  $\eta = \exp(\xi)$ . Определить плотность вероятности и числовые характеристики СВ  $\eta$ .

Решение: Функции прямого и обратного преобразования в рассматриваемом случае имеют вид  $y = \exp(x)$  и  $x = \varphi(y) = \ln(y)$ . Взаимосвязь между входом и выходом здесь, как и в предыдущем примере, взаимнооднозначная, т.е. любому конкретному  $y^* > 0$  соответствует единственный конкретный аргумент  $x_1^*$ .

В соответствии с этим, в универсальной формуле (5.6) следует использовать лишь единственное слагаемое первой суммы, что дает следующую связь законов распределения

$$W_{\eta}(y) = \frac{1}{|y|} \cdot W_{\xi}(\ln(y)), \quad y > 0. \quad (5.17)$$

Не следует забывать фиксировать требование « $y > 0$ », т.к. отклик  $y$ , формируемый при анализируемом преобразовании, принципиально не может принимать отрицательных значений (см. рис. 28).

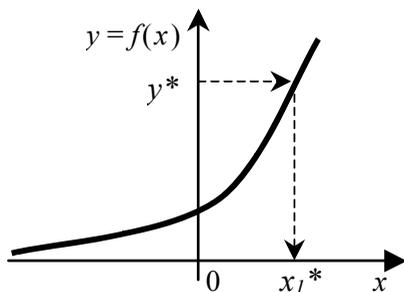


Рис. 28. Случай экспоненциальной взаимозависимости величин

Если СВ  $\xi$  имеет нормальное распределение, то результатом применения правила (5.17) будет плотность вероятности

$$W_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot y} \exp\left(-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0. \quad (5.18)$$

Полученный закон распределения называют логарифмически нормальным.

Очевидно, прямой расчет числовых характеристик СВ  $\eta$  с использованием (5.18) может оказаться проблематичным. Получим основные числовые характеристики на основе (5.9) и (5.10).

Для математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} M_{\eta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{[x-(a+\sigma^2)]^2 - (2a\sigma^2 + \sigma^4)}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{[x-(a+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\text{(равно 1 по свойству нормировки нормального закона)}} \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание логарифмически нормального закона составляет

$$M_{\eta} = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (5.19)$$

Аналогично, для расчета дисперсии сперва запишем

$$\begin{aligned} m_2\{\eta\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{[x-(a+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} + (2a+2\sigma^2)x\right) dx, \end{aligned}$$

что после применения (4.7) приводит к соотношению

$$D_{\eta} = m_2\{\eta\} - M_{\eta}^2 = \exp(2a + 2\sigma^2) - \exp\left(2 \cdot \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right).$$

В итоге, для дисперсии логарифмически нормального закона получаем

$$D_{\eta} = \exp(2a + \sigma^2) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1]. \quad (5.20)$$

Пример 3: Величина  $\xi$  представляет собой случайную начальную фазу гармонического сигнала  $\eta = A \cdot \sin(\omega_0 t + \xi)$ . Определить закон распределения и числовые характеристики СВ  $\eta$  при равномерном распределении  $\xi$  в пределах от минус  $\pi$  до плюс  $\pi$ .

Решение: Поставим в соответствие величине  $\xi$  значение  $x$ , величине  $\eta$  – значение  $y$ , и обозначим  $\omega_0 t = \alpha$ . Тогда для любого конкретного момента времени функция прямого преобразования приобретает вид

$$y = f(x) = A \cdot \sin(\alpha + x).$$

При любой величине параметра  $\alpha$  значения полной фазы колебания  $(\alpha + x)$  занимают диапазон длиной  $2\pi$ , на котором

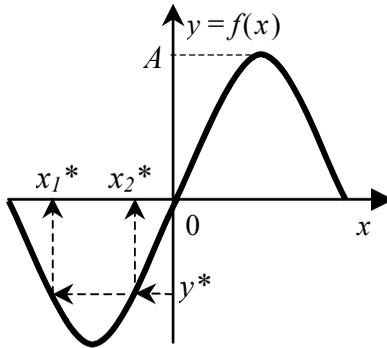


Рис. 29. Взаимосвязь  $y = f(x)$  при  $\alpha = 0$

выбранному отклику  $y^*$  (не превышающему по модулю  $A$ ) соответствует ровно 2 значения воздействия  $x$ . В частности, при  $\alpha = 0$  согласно рис. 29 расчетные формулы для  $x$  зависят от знака величины  $y$ :

$y > 0$  соответствуют  $x_1 = \arcsin(y/A)$  и  $x_2 = \pi - \arcsin(y/A)$ ,  
 $y < 0$  соответствуют  $x_1 = \arcsin(y/A)$  и  $x_2 = -\pi - \arcsin(y/A)$ .

Однако, несмотря на некоторые отличия в приведенных расчетных формулах, нетрудно убедиться, что и абсолютные значения производных, и значения плотности вероятности при воздействиях  $x_1$  и  $x_2$  совпадают между собой и равны

$$\left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| = \frac{1}{A\sqrt{1-(y/A)^2}}, \quad W_\xi(\varphi_i(y)) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{при } |\alpha + x| \leq \pi.$$

Учтем, наконец, что горизонтальных участков зависимость  $y = f(x)$  не содержит, а потому в универсальной формуле (5.6) первая сумма будет каждый раз представлена двумя слагаемыми, а вторая – отсутствовать. Применяя (5.6), получаем плотность вероятности гармонического колебания

$$W_\eta(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}, \quad |y| \leq A \quad (5.21)$$

Используя соотношение (3.21), нетрудно получить и функцию распределения вероятностей гармонического колебания

$$F_\eta(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^y \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) \Big|_{-A}^y = \frac{1}{\pi} \left( \arcsin\left(\frac{y}{A}\right) + \frac{\pi}{2} \right),$$

которую можно представить в виде

$$F_\eta(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{y}{A}\right), \quad |y| \leq A. \quad (5.22)$$

Итак, при равномерно распределенной начальной фазе мгновенно-

венное значение гармонического колебания подчиняется распределению арксинуса (см. п. 3.7.6).

Для расчета числовых характеристик, безусловно, можно воспользоваться базовыми формулами (4.2) и (4.5), однако это потребует вычисления совокупности интегралов, включающих сомножитель (5.21), что не так уж просто. Вместе с тем, использование (5.8)-(5.9) позволяет решить задачу легко. В частности, из периодичности и нечетности функции  $\sin()$  следует, что все нечетные моменты распределения равны нулю

$$m_{2k+1} \{ \eta \} = \int_{-\pi}^{+\pi} [A \cdot \sin(\alpha + x)]^{2k+1} \cdot \frac{dx}{2\pi} = 0,$$

и, в частности,  $M_\eta = 0$ , потому для всех порядков  $m_k \{ \eta \} = \mu_k \{ \eta \}$ .

Ненулевыми (положительными) являются лишь четные моменты распределения. Например, для  $\mu_2 \{ \eta \}$  имеем

$$\mu_2 \{ \eta \} = \int_{-\pi}^{+\pi} [A \cdot \sin(\alpha + x) - 0]^2 \frac{dx}{2\pi} = \frac{A^2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos(2 \cdot (\alpha + x))] dx$$

но второе слагаемое в подынтегральном выражении не требует вычислений, т.к. на интервале длиной  $2\pi$  содержится ровно два периода косинусоиды и, следовательно, при любом  $\alpha$  результат подобного интегрирования будет нулевым. Итак, интегрируя лишь первое слагаемое, для дисперсии гармонического колебания получаем

$$D_\eta = \mu_2 \{ \eta \} = \frac{A^2}{2}. \quad (5.23)$$

Пример 4: Сканирующий радиоприемник выполняет поиск радиосигналов на одной из 6 контрольных частот. Он начинает поиск с контрольной частоты №1, при отсутствии там сигнала переходит к анализу ситуации на частоте №2, затем к частоте №3 и продолжает циклически перестраиваться с частоты на частоту, пока не обнаружит где-то полезный сигнал. Для всех контрольных частот вероятность появления полезного сигнала одинакова и составляет 0,04. Определить

закон распределения для номера контрольной частоты, на которой остановится поиск.

Решение: Отличие данной задачи от всех предыдущих состоит в том, что анализируемая в ней СВ является дискретной. Более того, поставленная задача может быть решена и без использования представлений о функциональном преобразовании случайных величин. Попробуем всё же рассуждать следующим образом...

Пусть СВ  $\xi$  – это число перестроений, которые совершит приемник до обнаружения полезного сигнала. Ситуация, когда общее число попыток – неограниченное, а вероятность удачного исхода при каждой из попыток остается неизменной уже рассматривалась ранее, например в п. 3.4.2. Это означает, что СВ  $\xi$  обязана иметь геометрическое распределение

$$P\{\xi = k\} = (1 - p_1)^k \cdot p_1,$$

где  $p_1 = 0,04$  – вероятность успеха в отдельной попытке.

Номер контрольной частоты  $\eta$ , на которой остановится поиск, является случайным и связанным с числом перестроений  $\xi$  соотношением  $\eta = (\xi \text{ MOD } 6) + 1$ , где « $t \text{ MOD } n$ » – операция вычисления остатка при целочисленном делении  $t$  на  $n$ . Иначе говоря, событие « $\eta = j$ » наступает при  $\xi = (j - 1)$ ,  $\xi = (j - 1 + 6)$ ,  $\xi = (j - 1 + 2 \cdot 6)$ ... А это, в свою очередь, означает, что вероятность наступления события « $\eta = j$ » определяется суммой

$$\begin{aligned} P\{\eta = j\} &= (1 - p_1)^{(j-1)} \cdot p_1 + (1 - p_1)^{(j-1+6)} \cdot p_1 + (1 - p_1)^{(j-1+2 \cdot 6)} \cdot p_1 + \dots = \\ &= \frac{(1 - p_1)^{(j-1)} \cdot p_1}{1 - (1 - p_1)^6} = 0,1841 \cdot (1 - p_1)^{(j-1)}, \quad 1 \leq j \leq 6. \end{aligned}$$

Итоговый ряд распределения СВ  $\eta$  имеет вид

$y_j$	1	2	3	4	5	6
$p_j$	0,1841	0,1767	0,1697	0,1629	0,1564	0,1501

Пример 5: Случайная величина  $\xi$ , подчиняющаяся закону распределения Релея с параметром  $\sigma = 1$ , подвергается преоб-

$$\text{разованию } \eta = \begin{cases} 1, & \text{при } \xi < 1, \\ (\xi - 2)^2, & \text{при } 1 \leq \xi \leq 4, \\ 4, & \text{при } \xi > 4. \end{cases}$$

Определить закон распределения СВ  $\eta$ .

Решение задачи следует начать с построения и анализа графика функциональной взаимосвязи

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 1, \\ (x - 2)^2, & \text{при } 1 \leq x \leq 4, \\ 4, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

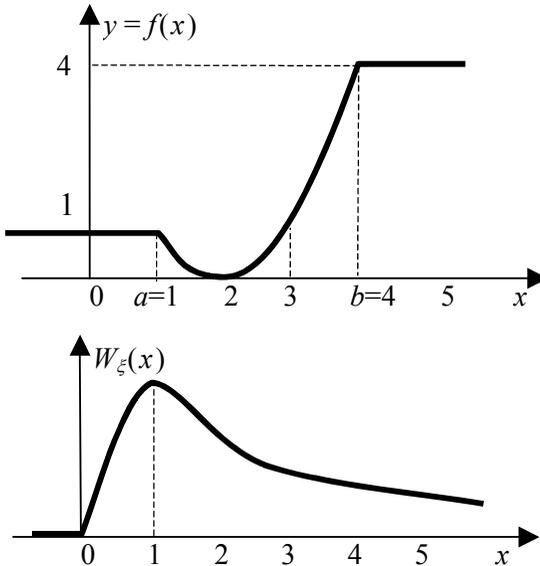


Рис. 30. Взаимосвязь  $y = f(x)$  и плотность вероятности воздействия из примера №5

Из графика, представленного на рис. 30, следует, что значения, наблюдаемые на выходе преобразователя, покрывают диапазон от 0 до 4, однако различным частям этого диапазона соответствует разное число ветвей в обратной функции.

Значениям  $y \in [0; 1)$  соответствует по два возможных аргумента  $x$ , определяемых ветвями обратной функции  $x_1 = \varphi_1(y) = 2 - \sqrt{y}$  и  $x_2 = \varphi_2(y) = 2 + \sqrt{y}$ . На данном участке компоненты, входящие в “сумму по  $t$ ” формулы (5.6) не потребуются, а первая сумма (по ветвям обратной функции) будет содержать два слагаемых (см. также (3.29))

$$W_\eta(y) = W_\xi(2 - \sqrt{y}) \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + W_\xi(2 + \sqrt{y}) \cdot \left| +\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \\ = \frac{1}{\sigma^2 \cdot 2\sqrt{y}} \cdot \left\{ (2 - \sqrt{y}) \cdot \exp\left(-\frac{(2 - \sqrt{y})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) + (2 + \sqrt{y}) \cdot \exp\left(-\frac{(2 + \sqrt{y})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \right\},$$

а вот значениям из диапазона  $y \in (1; 4)$  соответствует лишь единственная ветвь обратной функции  $x_1 = \varphi_1(y) = 2 + \sqrt{y}$  и для подобных значений выходной случайной величины

$$W_\eta(y) = W_\xi(2 + \sqrt{y}) \cdot \left| +\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{(2 + \sqrt{y})}{\sigma^2 \cdot 2\sqrt{y}} \cdot \exp\left(-\frac{(2 + \sqrt{y})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right).$$

Остаётся лишь определить вероятности наблюдения на выходе значений  $\eta = 1$  и  $\eta = 4$ , соответствующих левому (до точки  $x=a$  на рис. 30) и правому (после точки  $x=b$ ) горизонтальным участкам зависимости  $y = f(x)$ . Учитывая (3.30), запишем

$$P\{\eta = 1\} = P\{\xi < a\} = F_\xi(a) = 1 - \exp\left(\frac{-a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) = 1 - e^{-0.5} = 0,3935,$$

$$P\{\eta = 4\} = P\{\xi > b\} = 1 - F_\xi(b) = \exp\left(\frac{-b^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) = e^{-8} = 0,0003.$$

Объединяя полученные результаты, плотность вероятности СВ  $\eta$  можно записать окончательно в виде

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{(2-\sqrt{y})}{\sigma^2 \cdot 2\sqrt{y}} \cdot \exp\left(-\frac{(2-\sqrt{y})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) + \\ + \frac{(2+\sqrt{y})}{\sigma^2 \cdot 2\sqrt{y}} \cdot \exp\left(-\frac{(2+\sqrt{y})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) + 0,3935 \cdot \delta(x-1) & \text{при } 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{(2+\sqrt{y})}{\sigma^2 \cdot 2\sqrt{y}} \cdot \exp\left(-\frac{(2+\sqrt{y})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) + 0,0003 \cdot \delta(y-4) & \text{при } 1 < y \leq 4. \end{cases}$$

## 5.5. Формирование случайных величин с заданным законом распределения

Проверку правильности результатов вероятностных расчетов можно осуществлять путем статистического моделирования. Подробную информацию о методах статистического моделирования можно найти, например, в [11]. Вместе с тем, рассмотренного к настоящему моменту теоретического материала вполне достаточно для освоения способа получения случайной величины с любым заранее заданным законом распределения из СВ с равномерным распределением.

Пусть распределенная равномерно на интервале от 0 до 1 СВ  $\xi$  подвергается некоторому функциональному преобразованию, обратная функция которого имеет единственную ветвь  $x = \varphi(y) = F(y)$ , где  $F(y)$  – некая функция распределения (ФРВ). Плотность вероятности  $W_{\xi}(x) = 1$  для  $0 \leq x \leq 1$ , а ФРВ убывающей быть не может, поэтому  $\left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = W(y)$ , где  $W(y)$  – соответствующая  $F(y)$  плотность вероятности. В результате,

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = 1 \cdot W(y)$$

т.е. закон распределения СВ на выходе преобразователя совпадает с произвольно выбранной функцией  $W(y)$ .

Итак, для преобразования СВ  $\xi$ , распределенной равномерно на интервале от 0 до 1, в новую СВ  $\eta$ , обладающую функцией распределения  $F_\eta(y)$ , следует применить к ней функциональное преобразование

$$y = F_\eta^{-1}(x), \quad (5.24)$$

где  $F_\eta^{-1}(x)$  – функция, обратная зависимости  $x = F(y)$ .

Пример 6: Найти правило формирования из равномерно распределенной величины  $\xi$  СВ с законом распределения Коши.

Решение: Закон Коши характеризуется функцией распределения (3.32). Перепишем эту ФРВ в виде  $x = F_{\text{Коши}}(y)$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_0}{h} \right).$$

и выразим отсюда  $y$  как функцию  $x$ . В результате, для преобразования равномерно распределенной  $\xi$  в СВ, подчиняющуюся закону распределения Коши, получим соотношение

$$y = y_0 + h \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot (x - 0,5)), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.25)$$

Пример 7: Найти правило получения СВ, распределенной по закону арксинуса (3.37).

Решение: Закону арксинуса соответствует функция распределения (3.38). Перепиывая её в виде  $x = F_{\text{asin}}(y)$ , имеем

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \left( \frac{y}{U} \right), \quad -U \leq y \leq U.$$

Решая это уравнение относительно  $y$ , получаем правило преобразования СВ  $\xi$  в величину  $y$  с распределением арксинуса

$$y = U \cdot \sin(\pi \cdot (x - 0,5)), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.26)$$

Пример 8: Разработать правило формирования СВ, подчиняющейся закону распределения Релея с параметром  $\sigma$ .

Решение: Запишем функцию распределения релейской СВ (3.30) в виде зависимости  $x = F_{\text{Релея}}(y)$ , а именно

$$x = 1 - \exp\left(\frac{-y^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad y \geq 0.$$

Выражая отсюда  $y$  как функцию  $x$ , получим

$$y^2 = -2 \cdot \sigma^2 \cdot \ln(1 - x).$$

Если учесть, что в рассматриваемом случае распределения величин  $\xi$  и  $(1-\xi)$  – совпадают, то для преобразования равномерно распределенной величины  $\xi$  в релейскую СВ можно предложить соотношение

$$y = \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.27)$$

Пример 9: Найти правило формирования СВ с показательным распределением.

Решение: Запишем функцию распределения (3.34) в виде зависимости  $x = F_{\eta}(y)$  и выразим  $y$  как функцию  $x$

$$x = 1 - \exp(-\lambda \cdot y) \quad \Rightarrow \quad y = \ln(1 - x) / (-\lambda).$$

Вновь учитывая совпадение распределений  $\xi$  и  $(1-\xi)$ , для формирования из равномерно распределенной СВ  $\xi$  величины  $\eta$ , подчиняющейся показательному распределению, получим правило

$$y = -\ln(x) / \lambda, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.28)$$

Примечание: О формировании нормальных случайных величин будет говориться в п. 7.3.

## 6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### 6.1. Понятие системы случайных величин (многомерной случайной величины)

До сих пор рассматривались опыты со случайным исходом, результат которых можно было описать единственным числом. Направление из точки приема на обнаруженный источник радиоизлучения (азимут) или значение напряжения на выходе некоторого электронного устройства являются примерами случайных величин, которые мы в дальнейшем будем называть одномерными.

Однако существует множество ситуаций, когда результат опыта может быть представлен лишь совокупностью чисел: например, при описании места расположения обнаруженного источника радиоизлучения или состояния сложного радиотехнического устройства. Совокупность СВ, характеризующих результат конкретного опыта со случайным исходом, принято называть **системой случайных величин** или **многомерной случайной величиной**. Для обозначения систем СВ будем использовать перечисление входящих в них случайных величин, заключая их в фигурные скобки: например,  $\{ \xi, \eta \}$  – это двумерная СВ или система из случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .

### 6.2. Вероятностное описание систем дискретных СВ

Если входящие с систему СВ принимают лишь счетное множество значений, то сочетания возможных значений СВ могут быть отражены в табличной форме, что позволяет описывать свойства подобной системы в форме **матрицы распределения**, представляющей собой многомерный массив. В частности, для системы двух случайных величин матрица распределения принимает вид

$y_j \backslash x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	...	$p_{i1}$	...	$p_{n1}$
...	...	...	...	...	...	...
$y_j$	$p_{1j}$	$p_{2j}$	...	$p_{ij}$	...	$p_{nj}$
...	...	...	...	...	...	...
$y_m$	$p_{1m}$	$p_{2m}$	...	$p_{im}$	...	$p_{nm}$

Значения  $x_i$  и  $y_j$ , принимаемые случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$ , могут произвольными (их лишь принято упорядочивать по возрастанию), а вот для вероятностей появления в опыте их конкретного сочетания  $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$  должны выполняться следующие свойства:

1) Как и для любых иных вероятностей

$$0 \leq p_{ij} \leq 1. \quad (6.1)$$

2) Все сочетания значений являются взаимоисключающими, но какое-то из них в результате проведения опыта обязано появиться, поэтому

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (6.2)$$

3) Объединяя случаи, соответствующие отдельной  $j$ -й строке таблицы, мы оцениваем возможность появления конкретного значения  $\eta = y_j$  вместе хоть с каким-то значением СВ  $\xi$ ; это означает отказ от контроля над СВ  $\xi$  и переход к закону распределения лишь величины  $\eta$

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = p_j = P\{\eta = y_j\}. \quad (6.3)$$

Аналогично для столбцов матрицы распределения

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = p_i = P\{\xi = x_i\}. \quad (6.4)$$

Это свойство является проявлением принципа: вероятностные характеристики системы случайных величин содержат всю информацию о каждой из СВ, входящих в данную систему.

*Пример 1:* Найти законы распределения случайных величин из системы  $\{\xi, \eta\}$ , свойства которой задаются матрицей

$y_j \backslash x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_1$	0,12	0,25	0,25
$y_2$	0,06	0,18	0,14

*Решение:* Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности наблюдения различных значений СВ  $\xi$ . Прделав ту же операцию для строк, получим ряд распределения СВ  $\eta$ .

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$p_i$	0,18	0,43	0,39

$y_j$	$y_1$	$y_2$
$p_j$	0,62	0,38

### 6.3. Функция распределения системы случайных величин

**Функция распределения вероятностей (ФРВ)** системы случайных величин определяет вероятность того, что каждая из СВ, входящих в систему, примет в опыте значение, меньшее соответствующего аргумента ФРВ

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}. \quad (6.5)$$

*Прим.:* Здесь и далее перечисление нескольких требований через запятую будет считаться эквивалентным пересечению событий.

Рассмотрим основные свойства ФРВ системы двух СВ:

1. Это безразмерная функция, принимающая значения

$$0 \leq F_{\xi\eta}(x, y) \leq 1. \quad (6.6)$$

2. Существенное уменьшение даже одного (любого) из аргументов ФРВ осложняет выполнимость набора требований, определяемых (6.5), поэтому

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0; \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0. \quad (6.7)$$

3. Близость значения ФРВ к 1 можно гарантировать, лишь обеспечив возможность выполнения всех неравенств, поэтому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{\xi\eta}(x, y) = 1. \quad (6.8)$$

4. Значительное повышение лишь одного из аргументов означает, по сути, отказ от попыток контроля над значением соответствующей случайной величины. Это позволяет получить правило выделения из ФРВ системы информации, характеризующей свойства отдельной СВ

$$F_{\eta}(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi\eta}(x, y); \quad F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\xi\eta}(x, y). \quad (6.9)$$

5. Функция распределения является неубывающей по каждому из своих аргументов, т.е. для любых  $x_1 < x_2$

$$F_{\xi\eta}(x_1, y) \leq F_{\xi\eta}(x_2, y), \quad (6.10)$$

и для любой пары аргументов  $y$ , таких что  $y_1 < y_2$

$$F_{\xi\eta}(x, y_1) \leq F_{\xi\eta}(x, y_2). \quad (6.11)$$

Вероятности же попадания значений системы СВ в определенные заранее заданные области требуют отдельного обсуждения.

С геометрических позиций значение ФРВ системы случайных величин  $F_{\xi\eta}(x_1, y_2)$  определяет вероятность принадлежности точек - результатов опыта, квадранту координатной плоскости, расположенному левее и ниже точки с координатами  $(x_1, y_2)$  (см. заштрихованную зону на рис. 31).

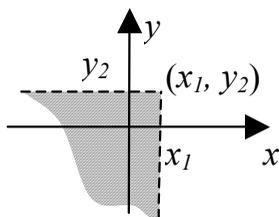


Рис. 31. Геометрический смысл ФРВ системы СВ

Разобьем этот квадрант горизонтальной линией, проходящей на уровне  $y_1$ , на верхнюю (заштрихованную на рис. 32) полосу и нижний квадрант, граничной точкой которого служит точка с координатами  $(x_1, y_1)$ . Попадание в каждую из этих областей составляет два несовместных события, и потому вероятность попадания в исходную общую область, равная  $F_{\xi\eta}(x_1, y_2)$ , обязана складываться из вероятности  $F_{\xi\eta}(x_1, y_1)$  попадания в новый нижний квадрант и вероятности попадания в заштрихованную полосу.

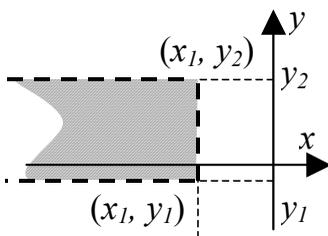


Рис. 32. Расчет вероятности наблюдения значений из полосы

Таким образом, вероятность попадания значений системы СВ в полосу, показанную на рис. 32, определяется выражением

$$P\{ \xi < x_1, y_1 < \eta < y_2 \} = F_{\xi\eta}(x_1, y_2) - F_{\xi\eta}(x_1, y_1). \quad (6.12)$$

Для оценки вероятности попадания значений системы СВ в прямоугольник, показанный на рис. 33, продлим мысленно его верхнюю и нижнюю границы влево до бесконечности. Тогда

прямоугольник будет содержать те точки горизонтальной полосы, ограниченной справа вертикальной линией  $x = x_2$ , которые не вошли в состав другой аналогичной полосы с границей  $x = x_1$ . Это позволяет для расчета вероятности попадания в заштрихованный прямоугольник предложить соотношение

$$P\{x_1 < \xi < x_2, y_1 < \eta < y_2\} = [F_{\xi\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi\eta}(x_2, y_1)] - [F_{\xi\eta}(x_1, y_2) - F_{\xi\eta}(x_1, y_1)]. \quad (6.13)$$

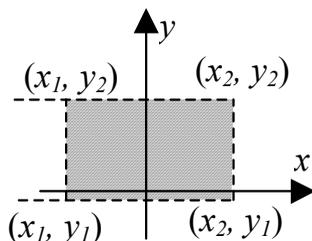


Рис. 33. Расчет вероятности принадлежности результатов прямоугольной области

Итак, с использованием ФРВ системы СВ можно легко определять вероятность принадлежности результатов измерений бесконечным и конечным областям с прямоугольными границами, однако аналогичная задача для области с криволинейными границами оказывается гораздо проблематичнее и для её решения выгоднее использовать другую форму представления закона распределения системы СВ.

#### 6.4. Плотность распределения вероятностей системы СВ

**Плотность распределения вероятностей** системы СВ характеризует вероятность наблюдения в опыте значений системы, принадлежащих бесконечно малой окрестности точки, задаваемой аргументами плотности вероятности. При сокращении размеров окрестности контрольной точки вероятность попадания в неё практически всегда стремится к нулю, поэтому для получения измеримых результатов уменьшающуюся вероятность

(аналогично изложенному на с. 72) соотносят с уменьшающимися геометрическими размерами контролируемой области пространства. На основе (6.14) можно показать, что для системы двух случайных величин данное отношение стремится к значению смешанной производной 2-го порядка от ФРВ системы по каждому из её аргументов.

Итак, плотность распределения вероятностей системы двух СВ численно определяется соотношением

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y\}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \quad (6.14)$$

Основные свойства плотности вероятности системы двух СВ:

1. Плотность вероятности системы имеет размерность, обратную произведению размерности всех входящих в неё СВ и принимает лишь неотрицательные значения

$$W_{\xi\eta}(x, y) \geq 0, \quad (6.15)$$

т.е. если величины  $\xi$  и  $\eta$ , к примеру, соответствуют координатам объекта, выраженным в метрах, то размерностью плотности вероятности будет «1/м<sup>2</sup>»; если же  $\xi$  – это некоторый ток, а  $\eta$  – какое-то напряжение, то размерностью функции  $W_{\xi\eta}(x, y)$  будет «1/(А·В)».

2. Для расчета вероятности наблюдения в опытах значений системы СВ, принадлежащих произвольной области пространства, достаточно проинтегрировать  $W_{\xi\eta}(x, y)$  на множестве точек, образующих эту область. Если же контрольная область имеет прямолинейную форму, то расчетная формула приобретает вид

$$P\{x_1 < \xi < x_2, y_1 < \eta < y_2\} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (6.16)$$

3. Если в область интегрирования из (6.16) включить все возможные сочетания значений, то анализируемое пересечение требований становится достоверным событием и потому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1. \quad (6.17)$$

Соотношение (6.17) – это новый вариант свойства нормировки. С геометрических позиций интеграл (6.17) определяет объем тела, заключенного между горизонтальной плоскостью и поверхностью, форму которой задает анализируемая плотность вероятности. В результате, для любой системы двух СВ объем тела, определяемого  $W_{\xi\eta}(x, y)$ , обязан оставаться постоянным, строго равным единице.

4. С учетом определения (6.5), правило расчета ФРВ по плотности вероятности системы СВ имеет вид

$$F_{\xi\eta}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (6.18)$$

5. Наконец, для выделения из плотности вероятности системы закона распределения какой-то конкретной величины следует проинтегрировать  $W_{\xi\eta}(x, y)$  по всем прочим переменным

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx; \quad W_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy. \quad (6.19)$$

Пример 2: Найти функцию распределения вероятностей системы СВ, плотность вероятности которой определяется выражением  $W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1+x^2) \cdot (1+y^2)}$ .

Решение: Для определения ФРВ достаточно воспользоваться правилом (6.18)

$$\begin{aligned}
 F_{\xi\eta}(x_0, y_0) &= \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{y_0} \left( \frac{1}{(1+y^2)} \cdot \int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(1+x^2)} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{y_0} \frac{(\arctg(x_0) + \pi/2)}{(1+y^2)} dy = \left( \frac{\arctg(x_0)}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{(1+y^2)} = \\
 &= \left( \frac{\arctg(x_0)}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{\arctg(y_0)}{\pi} + \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

*Примечание:* Обратите внимание, что целью задачи было получение **функции** распределения вероятностей, т.е. **не** какого-то **числа** (константы), **а правила**, связывающего аргументы  $x_0$  и  $y_0$ , с заранее неизвестным результатом  $F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$ .

## 6.5. Зависимость случайных величин и условные законы распределения составляющих системы СВ

Образующие систему случайные величины называются **независимыми**, если принятие одной из величин конкретного значения никак не сказывается на вероятности принятия в том же опыте тех или иных значений другой (другими) СВ. Для независимости величин  $\xi$  и  $\eta$  необходимо и достаточно, чтобы ФРВ системы можно было представить в виде произведения законов распределения величин  $\xi$  и  $\eta$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y), \quad (6.20)$$

В соответствии с определением (6.14) для плотности вероятности системы условие независимости величин  $\xi$  и  $\eta$  имеет аналогичный вид

$$W_{\xi\eta}(x, y) = W_{\xi}(x) \cdot W_{\eta}(y). \quad (6.21)$$

Если же факт принятия величиной  $\xi$  конкретного значения  $x$  изменяет вероятность принятия СВ  $\eta$  значения  $y$ , то  $\xi$  и  $\eta$  являются **зависимыми**. Для работы с подобными величинами часто оказывается удобно использовать условные ФРВ и плотности вероятности. Знакомство с условными законами распределения разумно начать с анализа следующего предела

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P\{\eta < y \mid x \leq \xi < x + \Delta x\} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi < x + \Delta x, \eta < y\}}{P\{x \leq \xi < x + \Delta x\}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\int_x^{x+\Delta x} \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y) dy dx}{\int_x^{x+\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy dx} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x \cdot \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y) dy}{\Delta x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy} \right) = \frac{\int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y) dy}{W_{\xi}(x)}. \end{aligned}$$

Проанализированная выше вероятность, определяющая ФРВ СВ  $\eta$ , вычисленную при условии, что принятое в опыте величиной  $\xi$  значение фактически известно, называется **условной функцией распределения** величины  $\eta$

$$F_{\eta}(y|x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P\{\eta < y \mid x \leq \xi < x + \Delta x\} = \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y) dy / W_{\xi}(x) \quad (6.22)$$

Аналогично, **условная плотность вероятности** величины  $\eta$ , зависящей от величины  $\xi$ , определяется выражением

$$W_{\eta}(y|x) = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{P\{y \leq \eta < y + \Delta y \mid x \leq \xi < x + \Delta x\}}{\Delta y} = \frac{\partial F_{\eta}(y|x)}{\partial y} = \frac{W_{\xi\eta}(x, y)}{W_{\xi}(x)} \quad (6.23)$$

и характеризует возможность наблюдения значений СВ  $\eta$  из бесконечно малой окрестности аргумента  $y$  в тех опытах, где величина  $\xi$  находилась в бесконечно малой окрестности  $x$ .

Для условных плотностей вероятности тоже выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\eta}(y|x) dy = \frac{1}{W_{\xi}(x)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x,y) dy = \frac{W_{\xi}(x)}{W_{\xi}(x)} = 1, \quad (6.24)$$

а приведенные ниже выражения являются аналогами формулы полной вероятности

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi\eta}(x,y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\eta}(y|x) \cdot W_{\xi}(x) dx, \quad (6.25)$$

$$F_{\eta}(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) \cdot \left( \int_{-\infty}^{y_0} W_{\eta}(y|x) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta}(y_0|x) \cdot W_{\xi}(x) dx. \quad (6.26)$$

В итоге, аналогом формулы Байеса для непрерывных случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  может служить правило

$$W_{\xi}(x|y) = \frac{W_{\eta}(y|x) \cdot W_{\xi}(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_{\eta}(y|x) \cdot W_{\xi}(x) dx}. \quad (6.27)$$

## 6.6. Числовые характеристики системы двух СВ

К наиболее часто используемым числовым характеристикам системы СВ относят *смешанные начальные и центральные моменты* распределения. Различающиеся порядками моменты могут иметь заметно отличающийся «физический смысл»; в связи с этим, начнем с формального определения числовых характеристик, а их свойства и практическое назначение будем исследовать для каждого конкретного случая в отдельности.

### 6.6.1. Определения и общие свойства моментов распределения системы СВ

Смешанным начальным моментом распределения порядка  $k, r$  для системы случайных величин  $\{\xi, \eta\}$  называют константу

$$m_{kr} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dx dy, \quad k \geq 0, r \geq 0. \quad (6.28)$$

В этот набор констант входят как величины, характеризующие особые свойства системы, так и «классические» моменты распределений, характеризующие свойства отдельных компонент. Действительно, с учетом (6.19) для произвольной системы СВ при  $k=0$  получим

$$m_{0r} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{\infty} y^r \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^0 W_{\xi\eta}(x, y) dx \right) dy = m_r \{ \eta \}. \quad (6.29)$$

Аналогично,

$$m_{k0} \{ \xi, \eta \} = m_k \{ \xi \} \quad (6.30)$$

и, в частности,

$$m_{10} \{ \xi, \eta \} = m_1 \{ \xi \} = M_{\xi}; \quad m_{01} \{ \xi, \eta \} = m_1 \{ \eta \} = M_{\eta}. \quad (6.31)$$

Если вместо значений самих СВ использовать при усреднении отклонения величин от их математических ожиданий, то получаемые числовые характеристики называют центральными моментами распределения системы СВ

$$\mu_{kr} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_{\xi})^k (y - M_{\eta})^r \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (6.32)$$

Нетрудно заметить, что для независимых случайных величин, у которых плотность вероятности системы распадается на произведение законов распределения составляющих систему СВ, как начальные, так и центральные смешанные моменты пред-

ставляют собой просто произведение числовых характеристик отдельных СВ

$$m_{kr} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^r W_{\eta}(y) dy = m_k \{ \xi \} \cdot m_r \{ \eta \}; \quad (6.33)$$

$$\mu_{kr} \{ \xi, \eta \} = \mu_k \{ \xi \} \cdot \mu_r \{ \eta \}.$$

В результате, информацию о системе (т.е. характеризующую особенности зависимости между величинами) несут, прежде всего, смешанные моменты порядков  $k \geq 1, r \geq 1$ .

### 6.6.2. Корреляционные характеристики случайных величин

Моменты распределения системы СВ порядка (1,1) важны для многих практических приложений теории вероятностей и имеют собственные названия.

Смешанный начальный момент порядка (1,1) называют **корреляцией** величин  $\xi$  и  $\eta$ . Корреляцию  $B_{\xi\eta}$  рассчитывают по формулам

$$B_{\xi\eta} = m_{11} \{ \xi, \eta \} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} & \text{(для ДСВ)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dy dx & \text{(для НСВ)} \end{cases} \quad (6.34)$$

Смешанный центральный момент порядка (1,1) называют **ковариацией** величин  $\xi$  и  $\eta$ . Для системы непрерывных СВ ковариацию  $K_{\xi\eta}$  рассчитывают по правилу

$$K_{\xi\eta} = \mu_{11} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_{\xi}) \cdot (y - M_{\eta}) \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dy dx. \quad (6.35)$$

Раскрыв в (6.35) скобки и проанализировав четыре получающихся интеграла, нетрудно убедиться, что ковариация  $K_{\xi\eta}$  и корреляция  $B_{\xi\eta}$  связаны простым соотношением

$$K_{\xi\eta} = B_{\xi\eta} - M_{\xi} \cdot M_{\eta}, \quad (6.36)$$

а значит для величин  $\xi$  и  $\eta$ , хотя бы одна из которых обладает нулевым математическим ожиданием, они просто совпадают.

Наконец, безразмерное отношение

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi} \cdot \sigma_{\eta}} = \frac{B_{\xi\eta} - M_{\xi} \cdot M_{\eta}}{\sqrt{D_{\xi} \cdot D_{\eta}}} \quad (6.37)$$

называют **коэффициентом корреляции** величин  $\xi$  и  $\eta$ .

*Примечание:* Зафиксированное после (6.36) совпадение значений величин  $K_{\xi\eta}$  и  $B_{\xi\eta}$  привело к неоднозначности в терминологии; часть авторов в своих книгах две эти величины меняют местами. В их книгах название коэффициент корреляции для  $r_{\xi\eta}$  выглядит более логичным, чем при предложенных выше обозначениях, однако при более широком рассмотрении это приводит к иным нелогичностям и хуже согласуется с трудами иностранных авторов.

Рассмотрим физический смысл понятия корреляции случайных величин. Для этого с учетом (6.19) и (6.35) проанализируем приведенный ниже интеграл:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{(x - M_{\xi})}{\sigma_{\xi}} \pm \frac{(y - M_{\eta})}{\sigma_{\eta}} \right)^2 W_{\xi\eta}(x, y) dy dx = \\ &= \frac{1}{\sigma_{\xi}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx + \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (y - M_{\eta})^2 W_{\eta}(y) dy \pm \\ &\pm \frac{2}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_{\xi}) \cdot (y - M_{\eta}) W_{\xi\eta}(x, y) dy dx = \frac{D_{\xi}}{\sigma_{\xi}^2} + \frac{D_{\eta}}{\sigma_{\eta}^2} \pm 2 \cdot \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}. \end{aligned}$$

Итак, 
$$J = 2 \cdot (1 \pm r_{\xi\eta}),$$

но т.к. исходный интеграл  $J$ , очевидно, не может быть отрицательным, то коэффициент корреляции всегда удовлетворяет соотношению

$$|r_{\xi\eta}| \leq 1. \quad (6.38)$$

Кроме того, случаю  $r_{\xi\eta} = 1$ , очевидно, соответствует  $J = 0$ , но такое возможно лишь если для всех наблюдаемых пар значений величин  $\xi$  и  $\eta$  соблюдается равенство

$$\frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}} = \frac{y - M_{\eta}}{\sigma_{\eta}},$$

т.е. если значения СВ функционально связаны между собой линейной зависимостью.

Рассмотрим также ряд представленных на рис. 34 случаев, характеризующих разные варианты взаимозависимостей между величинами системы  $\{\xi, \eta\}$ . Значения  $x_i$  и  $y_i$ , принятые в  $i$ -м опыте величинами  $\xi$  и  $\eta$ , определяют расположение на плоскости очередной  $i$ -й точки, а наиболее вероятным сочетаниям значений соответствуют области плоскости с наибольшей густотой расположения точек.

Левый рисунок соответствует случаю объединения в систему независимых случайных величин. В результате, число точек, принадлежащих каждой четверти плоскости (относительно линий  $x = M_{\xi} = a$  и  $y = M_{\eta} = b$ ), оказывается вполне сопоставимым, а потому результаты усреднения произведений  $(x_i - M_{\xi}) \cdot (y_i - M_{\eta})$  с учетом их отмеченных на рис. 34 знаков, дают нулевое значение ковариации  $K_{\xi\eta}$ , а значит и нулевой коэффициент корреляции  $r_{\xi\eta}$ .

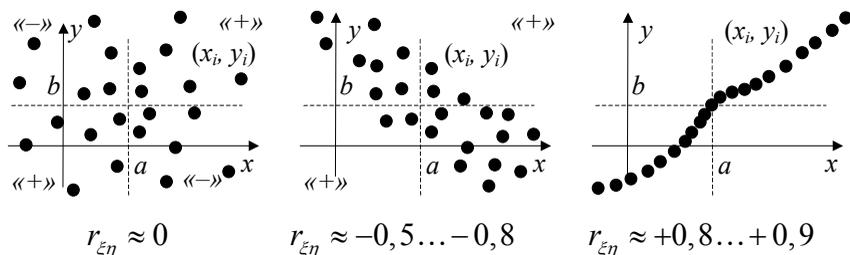


Рис. 34. Варианты взаимозависимости величин  $\xi$  и  $\eta$

На центральном рисунке наблюдается тенденция, при которой увеличение значений  $x_i$  СВ  $\xi$  сопровождается, как правило, уменьшением значения  $y_i$  парной СВ  $\eta$ . Как следствие, число усредняемых слагаемых, имеющих отрицательный знак, существенно превосходит число положительных слагаемых, а потому как ковариация  $K_{\xi\eta}$ , так и коэффициент корреляции  $r_{\xi\eta}$ , оказываются отрицательными.

Наконец, на правом рисунке представлен случай «жёсткой», функциональной зависимости между величинами. При показанном, близком к линейно нарастающему характере зависимости отрицательных слагаемых не наблюдается совсем, а коэффициент корреляции  $r_{\xi\eta}$  принимает значения близкие к 1,0.

Итак, коэффициент корреляции  $r_{\xi\eta}$  характеризует степень линейной зависимости между двумя случайными величинами: при жесткой, функциональной зависимости  $|r_{\xi\eta}| = 1$ ; ослабление связи влечет уменьшение абсолютной величины  $r_{\xi\eta}$ . Случайные величины, для которых  $r_{\xi\eta} = 0$  ( $K_{\xi\eta} = 0$ ), называются **некоррелированными**; линейная взаимосвязь для них совсем не проявляется (хотя они могут быть связаны зависимостями иного, нелинейного характера).

Согласно (6.33), для независимых СВ

$$K_{\xi\eta} = \mu_{1,1} \{ \xi, \eta \} = \mu_1 \{ \xi \} \cdot \mu_1 \{ \eta \} \equiv 0, \quad (6.39)$$

т.е. статистически независимые случайные величины являются некоррелированными. Обратное в общем случае неверно, т.е. некоррелированные СВ вполне могут оказаться зависимыми.

## 6.7. Двумерный нормальный закон распределения

Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  считаются распределенными по двумерному нормальному (гауссовскому) закону, если плотность вероятности системы  $\{ \xi, \eta \}$  может быть записана в виде

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_\xi \sigma_\eta \sqrt{1-r^2}} \times \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} - 2r \frac{(x-a_\xi)(y-a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} + \frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma_\eta^2} \right] \right\}, \quad (6.40)$$

где параметры  $a_\xi, a_\eta$  могут принимать произвольные значения, а остальные параметры удовлетворяют условиям  $\sigma_\xi > 0, \sigma_\eta > 0$  и  $|r| \leq 1$ .

Найдем условную плотность вероятности величины  $\eta$ , входящей в двумерное нормальное распределение

$$W_\eta(y|x) = W_\xi^{-1}(x) \cdot W_{\xi\eta}(x, y) = \sqrt{2\pi} \sigma_\xi \cdot \exp \left[ + \frac{(x-a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} \right] \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_\xi \sigma_\eta \sqrt{1-r^2}} \times \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} - 2r \frac{(x-a_\xi)(y-a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} + \frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma_\eta^2} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\eta \cdot \sqrt{1-r^2}} \times \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} - (1-r^2) \frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} - 2r \frac{(x-a_\xi)(y-a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} + \frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma_\eta^2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\eta \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left( \frac{y-a_\eta}{\sigma_\eta} - r \frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 \right\}.$$

Из сопоставления полученного выражения с одномерной нормальной плотностью вероятности (3.24) видно, что при  $r = 0$  условная плотность вероятности СВ  $\eta$  приобретает вид

$$W_\eta(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\eta} \cdot \exp \left( -\frac{(y-a_\eta)^2}{2 \cdot \sigma_\eta^2} \right). \quad (6.41)$$

Она уже не зависит от  $x$  и имеет классическое нормальное распределение (3.24). Как следствие, при  $r = 0$  можно записать

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\xi} \cdot \exp \left( -\frac{(x-a_\xi)^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2} \right) \times \quad (6.42)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\eta} \cdot \exp \left( -\frac{(y-a_\eta)^2}{2 \cdot \sigma_\eta^2} \right) = W_\xi(x) \cdot W_\eta(y)$$

и, в соответствии с (6.21), величины  $\xi$  и  $\eta$  оказываются независимыми.

Отсюда следует важное свойство: для нормальных случайных величин некоррелированность означает также и их статистическую независимость.

## 6.8. Функциональное преобразование системы СВ

Пусть система СВ  $\{\xi_1, \xi_2\}$  преобразуется в новую систему  $\{\eta_1, \eta_2\}$  в соответствии с некоторым известным правилом

$$\begin{cases} \eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2) \\ \eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2) \end{cases}. \quad (6.43)$$

Случаи с бесконечнозначными обратными преобразованиями, подобными обсуждавшимся в п. 5.2.2, для систем СВ хотя и возможны, но не являются типичными для радиотехнической

практики. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что обратные функции, позволяющие вычислить значения  $x_1, x_2$  входных СВ, необходимые для получения на выходе преобразователя значений  $y_1, y_2$ , являются конечнозначными (т.е. состоят из одной или конечного числа ветвей). В подобном случае можно доказать, что взаимосвязь между плотностями вероятности систем СВ на входе и выходе функционального преобразователя может быть записана в виде

$$W_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \sum_i W_{\xi_1\xi_2}(\varphi_{1i}(y_1, y_2), \varphi_{2i}(y_1, y_2)) \cdot |J_i|, \quad (6.44)$$

где функции  $\varphi_{1i}(\dots), \varphi_{2i}(\dots)$  - определяют одну из ветвей обратного преобразования

$$\begin{cases} \xi_{1i} = \varphi_{1i}(\eta_1, \eta_2) \\ \xi_{2i} = \varphi_{2i}(\eta_1, \eta_2) \end{cases}, \quad (6.45)$$

а  $|J_i|$  – модуль якобиана обратного преобразования – поправочный коэффициент, характеризующий растяжение/сжатие элементарных областей при переходе от одного набора аргументов к другому и численно равный значению определителя, состоящего из частных производных обратных функций

$$J_i = \left| \frac{\partial(x_{1i}, x_{2i})}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_{2i}}{\partial y_2} \end{array} \right|. \quad (6.46)$$

*Пример 3:* Найти функцию распределения полярных координат случайно расположенной на плоскости точки, декартовы координаты которой независимы и подчиняются нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и одинаковым среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ .

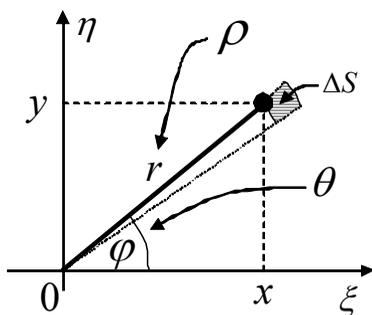


Рис. 35. Связь декартовых и полярных координат точки на плоскости

Решение: Переход от декартовых координат к полярным

определяется выражениями 
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \theta = \arctg(\eta / \xi) \end{cases}$$

а обратные функции, позволяющие вычислить значения  $\{\xi, \eta\}$  входных СВ, необходимые для получения на выходе преобразователя значений  $\{\rho, \theta\}$ , в соответствии с рис. 35 являются

однозначными и имеют вид 
$$\begin{cases} \xi = \rho \cdot \cos(\theta) \\ \eta = \rho \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Переписывая эти же зависимости для значений, принимаемых СВ в отдельных опытах, получаем

$$\begin{cases} x = \varphi_1(r, \varphi) = r \cdot \cos \varphi \\ y = \varphi_2(r, \varphi) = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Определим якобиан обратного преобразования

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial\{r \cdot \cos \varphi\}}{\partial r} & \frac{\partial\{r \cdot \cos \varphi\}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial\{r \cdot \sin \varphi\}}{\partial r} & \frac{\partial\{r \cdot \sin \varphi\}}{\partial \varphi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{array} \right| =$$

$$= r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r.$$

Полученный результат соответствует тому факту, что при фиксированных изменениях угла и радиуса-вектора, определяющих положение точки на плоскости в полярных координатах, площадь  $\Delta S$  элементарной площадки, соответствующей этим изменениям является прямо пропорциональной  $r$ .

Итак, двумерная плотность вероятности системы  $\{\rho, \theta\}$  связана с плотностью вероятности  $W_{\xi\eta}(x, y)$  соотношением

$$W_{\rho\theta}(r, \varphi) = W_{\xi\eta}(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \cdot |r|, \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq +\pi, \quad (6.47)$$

что при независимых, нормально распределенных декартовых координатах может быть записано в виде

$$W_{\rho\theta}(r, \varphi) = r \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-r^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-r^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}\right)$$

и, после принятия во внимание, что  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , даёт

$$W_{\rho\theta}(r, \varphi) = r \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq +\pi. \quad (6.48)$$

Используя теперь соотношение (6.19), для компонент системы получим

$$W_{\rho}(r) = \int_{-\pi}^{+\pi} r \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) d\varphi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0. \quad (6.49)$$

$$W_{\theta}(\varphi) = \int_{-\pi}^{+\pi} r \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) dr = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq +\pi. \quad (6.50)$$

Таким образом, удалённость  $\rho$  исследуемой точки от начала координат подчиняется релеевскому закону распределения (см. п. 4.5.2), а угловое направление на точку  $\theta$  – равномерному закону распределения (см. п.4.5.1).

## 6.9. Преобразование системы СВ в новую случайную величину

Пусть задана некоторая функция  $f(x_1, x_2)$ , используемая для преобразования системы СВ  $\{\xi_1, \xi_2\}$  в новую случайную величину

$$\eta = f(x_1, x_2) \quad (6.51)$$

и необходимо отыскать правило расчета закона распределения этой новой СВ по плотности вероятности системы  $\{\xi_1, \xi_2\}$ . Для использования ранее полученных соотношений (6.44)-(6.46) обозначим временно  $\eta = \eta_1$  и дополним эту СВ вспомогательной случайной величиной  $\eta_2 = \xi_2$ . Тогда одна из двух обратных функций для системы СВ  $\{\eta_1, \eta_2\}$  оказывается для всех функциональных преобразований равной  $x_{2i} = \varphi_{2i}(y_1, y_2) = y_2$ , т.е. не зависящей от  $\xi_1$ , а потому якобиан преобразования (6.46)

приобретает вид

$$J_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \{y_2\}}{\partial y_1} & \frac{\partial \{y_2\}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial y_1}$$

(= 0)  $\leftarrow$   $\leftarrow$  (= 1)

Из определяемой (6.44) плотности вероятности системы  $\{\eta_1, \eta_2\}$  информацию об исходной величине  $\eta = \eta_1$  можно выделить с помощью правила (6.19), а именно

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i W_{\xi_1 \xi_2}(\varphi_{1i}(y_1, y_2), y_2) \left| \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial y_1} \right| dy_2.$$

При однозначной обратной функции  $\varphi_{1i}(\dots)$  суммировать ветви обратного преобразования не требуется и правило расчета закона распределения функции от системы СВ приобретает вид

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(\varphi_{1i}(y, u), u) \left| \frac{\partial \varphi_{1i}(y, u)}{\partial y} \right| du, \quad (6.52)$$

где аргумент  $y$  соответствует искомой величине  $\eta$ , а исчезающий при интегрировании аргумент  $u$  – вспомогательной СВ  $\eta_2$ .

Пример 3: Закон распределения суммы двух СВ  $\eta = \xi_1 + \xi_2$ .

Введём вспомогательную СВ  $\eta_2 = \xi_2$  и из  $\eta = \eta_2 + \xi_1$  получим обратную функцию  $\xi_1 = \varphi_1(\eta, \eta_2) = \eta - \eta_2$ . Сопоставляя величине  $\eta$  аргумент  $y$ , а величине  $\eta_2$  аргумент  $u$  на основании (6.52) и того, что  $\frac{\partial \{y - u\}}{\partial y} = 1$ , получаем соотношение

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(y - u, u) du. \quad (6.53)$$

Пример 4: Закон распределения произведения СВ  $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$ .

Введём вспомогательную СВ  $\eta_2 = \xi_2$ . Из  $\eta = \eta_2 \cdot \xi_1$  получим обратную функцию  $\xi_1 = \varphi_1(\eta, \eta_2) = \eta / \eta_2$ . Сопоставляя величине  $\eta$  аргумент  $y$ , а величине  $\eta_2$  аргумент  $u$  на основании (6.52) и того, что  $\frac{\partial \{y / u\}}{\partial y} = \frac{1}{u}$ , получаем соотношение

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2} \left( \frac{y}{u}, u \right) \frac{du}{|u|}. \quad (6.54)$$

По аналогии можно получить правила расчета законов распределения и для других арифметических функций. Отметим, что соотношения (6.53)-(6.54) могут использоваться, в том числе, и для зависимых аргументов  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Для независимых аргументов правила немного упрощаются; они представлены в таблице

## Законы распределения функции независимых СВ

$$W_{\xi_1 + \xi_2}^{\zeta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}^{\zeta}(y-u) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}^{\zeta}(x) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}(y-x) dx \quad (6.55)$$

$$W_{\xi_1 - \xi_2}^{\zeta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}^{\zeta}(y+u) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}^{\zeta}(x) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}(x-y) dx \quad (6.56)$$

$$W_{\xi_1 \cdot \xi_2}^{\zeta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}^{\zeta}\left(\frac{y}{u}\right) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}(u) \frac{du}{|u|} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}^{\zeta}(x) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dx}{|x|} \quad (6.57)$$

$$W_{\xi_1 / \xi_2}^{\zeta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \cdot W_{\xi_1}^{\zeta}(yu) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{y^2} \cdot W_{\xi_1}^{\zeta}(x) \cdot W_{\xi_2}^{\zeta}\left(\frac{x}{y}\right) dx \quad (6.58)$$

В некоторых случаях использование подхода, определяемого (6.52), не вполне удобно. Альтернативные варианты рассуждений можно найти, например, в [1, с. 372-380], где анализируются весьма интересные для практики случаи максимизации и минимизации совокупности случайных величин.

Пример 5: Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Принципиально важно, что показательное распределение (3.33) предполагает возможность наблюдения лишь неотрицательных значений СВ. Это означает, что при использовании интегральной свёртки (6.55) необходимо уделить особое внимание определению реальных пределов интегрирования. Для этого нарисуем друг под другом входящие в (6.55) сомножители (см, рис. 36); нижний рисунок получается из функции  $W_2(x)$  за счет её разворота вдоль оси  $x$  («слева направо») и смещения начала координат в точку  $y$ . Действительно, функция  $W_2(y-x)$  будет принимать наибольшее значение в точке  $x=y$ , т.е. при нулевом аргументе; она плавно понижается для  $x < y$  – там, где

разность  $(y-x)$  принимает положительные значения, и  $W_2(y-x) = 0$  для  $x > y$ , т.к. для подобных значений  $x$  аргумент  $(y-x)$  оказывается отрицательным.

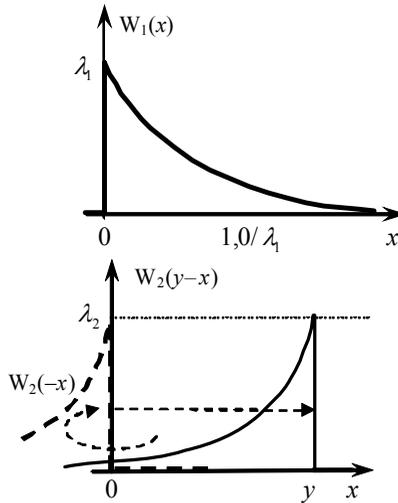


Рис. 36. ПРВ для подынтегральных сомножителей из (6.55)

Итак, область аргументов  $x$ , в которой как верхний, так и нижний график принимают ненулевые значения, является диапазон  $x \in [0, y]$ . Таким образом, ограничение области допустимых значений для показательного закона распределения при использовании свёртки (6.55) проявляется в использовании пределов

$$\begin{aligned}
 W_{\xi_1 + \xi_2}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1}(x) \cdot W_{\xi_2}(y-x) dx = \int_0^y \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot x} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot (y-x)} dx = \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot y} \cdot \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot x} dx = \begin{cases} \lambda_2^2 \cdot y \cdot e^{-\lambda_2 \cdot y}, & \lambda_1 = \lambda_2, \quad y \geq 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 \cdot y} - e^{-\lambda_2 \cdot y}}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad y \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для случая  $\lambda_1 = \lambda_2$  закон распределения суммы показан на рис. 37.

Как следует из рисунка, закон распределения суммы может заметно отличаться по форме от законов распределения слагаемых. Вершина плотности вероятности оказывается сглаженной, более «колоколообразной». Как будет установлено позднее, этот эффект является вполне закономерным и ожидаемым.

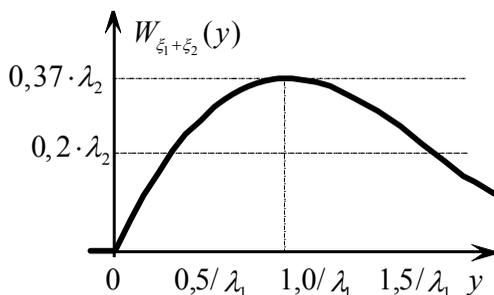


Рис. 37. Закон распределения суммы независимых СВ, распределенных по показательному закону

Пример 6: Найти закон распределения суммы двух независимых нормально распределенных случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  с параметрами  $(a_\xi, \sigma_\xi)$  и  $(a_\eta, \sigma_\eta)$ .

Искомый закон распределения будет определяться интегральной сверткой (6.55), где бесконечно широкие диапазоны допустимых значений слагаемых означают необходимость интегрирования вдоль всей оси  $x$

$$W_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(x-a_\xi)^2}{2\cdot\sigma_\xi^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{(z-x-a_\eta)^2}{2\cdot\sigma_\eta^2}\right) du.$$

Для преобразования записанного интеграла полезно принять во внимание, что для произвольных величин  $\varphi$  и  $\psi$  справедливо соотношение

$$\left(\frac{\psi}{\sigma_\eta}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{\sigma_\xi}\right)^2 = \frac{1}{(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)} \cdot \left[ (\psi + \varphi)^2 + \left(\varphi \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} - \psi \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}\right)^2 \right].$$

Тогда, используя обозначения  $\varphi = (x - a_\xi)$  и  $\psi = (z - x - a_\eta)$ ,

представим сумму показателей экспонент в виде  $-\frac{(z-x-a_\eta)^2}{2 \cdot \sigma_\eta^2} - \frac{(x-a_\xi)^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2} = \frac{-1}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)} \cdot \left[ (z - (a_\xi + a_\eta))^2 + \left( (x - a_\xi) \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} - (z - x - a_\eta) \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \right)^2 \right]$ .

В полученной сумме первое слагаемое не зависит от переменной интегрирования “ $x$ ”, а второе слагаемое можно записать в виде

$$\frac{-1}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)} \cdot \left\{ \left( \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \right) \cdot x - A \right\}^2 = \frac{-1}{2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \cdot x - \frac{A}{\sqrt{\sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2}} \right\}^2,$$

где  $A$  – константа, сложным образом зависящая как от параметров распределений, так и от текущего значения аргумента  $z$ .

Используя обозначения  $\sigma_z = \frac{\sigma_\xi \sigma_\eta}{\sqrt{\sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2}}$  и  $A^* = \frac{A \cdot \sigma_\eta \sigma_\xi}{(\sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2)}$ , пред-

ставим анализируемую свертку в виде

$$W_{\xi+\eta}(z) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_\xi \sigma_\eta} \exp\left(-\frac{(z - (a_\xi + a_\eta))^2}{2 \cdot (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp\left(-\frac{[x - A^*]^2}{2 \cdot \sigma_z^2}\right) du$$

но в таком случае последний интеграл, как результат интегрирования вдоль всей оси аргументов нормальной плотности вероятности по свойству нормировки (3.22) будет равен единице (независимо от конкретных значений параметров  $(A^*, \sigma_z)$ ). В

итоге, распределение суммы величин  $\xi$  и  $\eta$  принимает вид

$$W_{\xi+\eta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(z - (a_\xi + a_\eta))^2}{2 \cdot (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}\right), \quad (6.59)$$

т.е. оказывается нормальным распределением с параметрами

$$a_{\xi+\eta} = a_\xi + a_\eta, \quad \sigma_{\xi+\eta} = \sqrt{\sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2}. \quad (6.60)$$

Полученный результат можно обобщить следующим образом:

Сумма произвольного числа независимых нормальных случайных величин  $\xi_i$  с параметрами  $(a_i, \sigma_i)$  подчиняется нормальному распределению с параметрами

$$a_{\Sigma} = \sum_i a_i, \quad \sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}. \quad (6.61)$$

### 6.10. Числовые характеристики функции системы СВ

При дальнейшем анализе свойств системы СВ могут оказаться полезными следующие свойства числовых характеристик:

1) при масштабировании случайной величины

$$M\{c \cdot \xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (cx) \cdot W_{\xi}(x) dx = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx = c \cdot M_{\xi}. \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} D\{c \cdot \xi\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (cx - cM_{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = \\ &= c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = c^2 \cdot D_{\xi} \end{aligned} \quad (6.63)$$

2) при суммировании случайных величин

$$\begin{aligned} M\{\xi_1 \pm \xi_2\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 \pm x_2) W_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} W_{12}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \pm \\ &\pm \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 W_1(x_1) dx_1 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 W_2(x_2) dx_2 = M_{\xi_1} \pm M_{\xi_2}, \end{aligned}$$

а для дисперсии аналогично получаем (см. (4.4), (4.6))

$$\begin{aligned} D\{\xi_1 \pm \xi_2\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 \pm x_2)^2 W_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 W_{12}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \pm \\ &\pm \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 W_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \pm 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = D_{\xi_1} + D_{\xi_2} \pm 2K_{12} \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание суммы СВ равно сумме математических ожиданий, а для дисперсии суммы соотношение оказывается более сложным и требует учета взаимной корреляции величин, но для некоррелированных СВ дисперсия суммы величин равна сумме дисперсий.

В общем случае, для линейной комбинации СВ справедливо

$$M \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot \xi_i \right\} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot M_{\xi_i} \quad (6.64)$$

$$D \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot \xi_i \right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot D_{\xi_i} + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij} \quad (6.65)$$

3) для получения математического ожидания произведения СВ следует вернуться к п. 6.6.2, где было введено понятие корреляции. Из соотношения (6.36) следует, что

$$m_1 \{ \xi \cdot \eta \} = B_{\xi\eta} = M_{\xi} \cdot M_{\eta} + K_{\xi\eta}, \quad (6.66)$$

т.е. для некоррелированных СВ математическое ожидание произведения СВ равно произведению математических ожиданий, а при  $K_{\xi\eta} \neq 0$  требуется поправка на величину ковариации.

Общие выражения и для математического ожидания, и для дисперсии оказываются весьма громоздкими, поэтому ограничимся следующим результатом: для произведения независимых СВ справедливо

$$M \left\{ \prod_{i=1}^n \xi_i \right\} = \prod_{i=1}^n M_{\xi_i} \quad (6.67)$$

$$D \left\{ \prod_{i=1}^n \xi_i \right\} = \prod_{i=1}^n (D_{\xi_i} + M_{\xi_i}^2) - \prod_{i=1}^n M_{\xi_i}^2. \quad (6.68)$$

## 6.11. Комплексные случайные величины и характеристические функции СВ

Комплексной называют случайную величину вида

$$\zeta = \xi + j\eta. \quad (6.69)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  – действительные случайные величины. Плотность вероятности системы СВ  $\{\xi, \eta\}$  определяет статистические свойства СВ  $\zeta$ ; отдельных плотностей вероятности от комплексного аргумента для описания свойств комплексных СВ не используют.

Математическим ожиданием комплексной СВ называют комплексное число

$$M_{\zeta} = M_{\xi} + j \cdot M_{\eta}, \quad (6.70)$$

а дисперсией комплексной СВ называют математическое ожидание квадрата модуля соответствующей центрированной СВ

$$D_{\zeta} = M \left\{ |\zeta - M_{\zeta}|^2 \right\} = M \left\{ (\xi + j\eta - (M_{\xi} + j \cdot M_{\eta})) \times \right. \\ \left. \times (\xi - j\eta - (M_{\xi} - j \cdot M_{\eta})) \right\} = D_{\xi} + D_{\eta}. \quad (6.71)$$

**Характеристической функцией**  $\mathcal{G}_{\zeta}(v)$  вещественной СВ  $\xi$  называют математическое ожидание комплексной величины  $\zeta$ , получаемой из  $\xi$  преобразованием  $\zeta = \exp(jv\xi)$ , где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $v$  – вещественный параметр, т.е.

$$\mathcal{G}_{\zeta}(v) = m_1 \left\{ \exp(jv\xi) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{jvx\} \cdot W_{\xi}(x) dx. \quad (6.72)$$

Характеристическая функция безразмерна, а параметр  $v$  имеет размерность обратную размерности СВ  $\xi$ . Усредняемые в (6.72) комплексные значения представляют собой разнонаправленные (при разных  $v\xi$ ) вектора единичного радиуса, а поэтому результат усреднения не может по абсолютной величине превосходить 1

$$\left| \mathcal{G}_\xi(v) \right| \leq 1. \quad (6.73)$$

Кстати, при нулевом аргументе значения характеристических функций для всех случайных величин совпадают

$$\mathcal{G}_\xi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{j \cdot 0 \cdot x\} \cdot W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\xi(x) dx = 1. \quad (6.74)$$

При линейном преобразовании случайной величины:

$$\mathcal{G}_{a \cdot \xi + b}(v) = m_1 \left\{ \exp(jv(a \cdot \xi + b)) \right\} = \left\{ \exp(jvb) \right\} \cdot \mathcal{G}_\xi(av). \quad (6.75)$$

Характеристическая функция суммы независимых СВ равна произведению характеристических функций слагаемых. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sum_{i=1}^n \xi_i}(v) &= m_1 \left\{ \exp\left(jv \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i\right) \right\} = m_1 \left\{ \prod_{i=1}^m \exp(jv \xi_i) \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^m m_1 \left\{ \exp(jv \xi_i) \right\} = \prod_{i=1}^m \mathcal{G}_{\xi_i}(v). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Если мысленно поменять порядок следования сомножителей в (6.72), то за исключением знака в показателе экспоненты выражение совпадет с прямым интегральным преобразованием Фурье. Как следствие, каждой характеристической функции соответствует единственный закон распределения, определяемый по правилу

$$W_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\xi(v) \cdot \exp\{-jvx\} dx. \quad (6.77)$$

Наконец, если у СВ существует начальный момент  $k$ -го порядка, то существует  $k$ -я производная характеристической функции этой СВ, которая выражается формулой

$$\frac{\partial^k \mathcal{G}_\xi(v)}{\partial v^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k \exp\{jv x\}}{\partial v^k} \cdot W_\xi(x) dx = j^k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{jv x} W_\xi(x) dx$$

При  $v \rightarrow 0$  последнее выражение превращается в  $m_k\{\xi\}$ , т.е.

$$\left. \frac{\partial^k \mathcal{G}_\xi(v)}{\partial v^k} \right|_{v=0} = j^k \cdot m_k\{\xi\}. \quad (6.78)$$

Это позволяет рекомендовать для поиска начальных моментов распределения СВ  $\xi$  формулу

$$m_k\{\xi\} = j^{-k} \cdot \left. \frac{\partial^k \mathcal{G}_\xi(v)}{\partial v^k} \right|_{v=0}. \quad (6.79)$$

## 6.12. Примеры исследования характеристических функций случайных величин

Пример 1: Определить характеристическую функцию биномиально распределенной СВ  $\xi_1$ .

Решение: С использованием формул (3.4) и (5.8) запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\xi_1}(v) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot q^{(n-k)} \cdot e^{jv \cdot k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (e^{jv} p)^k \cdot q^{(n-k)} = (pe^{jv} + q)^n. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Пример 2: Определить характеристическую функцию пуассоновской СВ  $\xi_2$ .

Решение: Учтем, что  $\exp\{a \cdot e^{jv}\} = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot e^{jv})^k / k!$  для любых  $|a \cdot e^{jv}| < \infty$ . Тогда (см. (3.5))

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\xi_2}(v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \tau} \right] \cdot e^{jv \cdot k} = e^{-\lambda \tau} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\lambda \tau \cdot e^{jv})^k}{k!} \right] = \\ &= e^{-\lambda \tau} \cdot \exp\{\lambda \tau \cdot e^{jv}\} = \exp\{-\lambda \tau(1 - e^{jv})\}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Пример 3: Найти характеристическую функцию равномерно распределенной СВ  $\xi_3$ .

Решение: Плотность вероятности равномерно распределенной СВ определяется формулой (3.23), поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\xi_3}(v) &= \int_a^b \frac{e^{jvx}}{b-a} dx = \frac{e^{jvx}}{jv \cdot (b-a)} \Big|_a^b = e^{jv \frac{b+a}{2}} \cdot \frac{e^{jv \frac{b-a}{2}} - e^{-jv \frac{b-a}{2}}}{2j \cdot v \cdot \frac{b-a}{2}} = \\ &= e^{jv \frac{b+a}{2}} \cdot \sin\left(v \frac{b-a}{2}\right) / \left(v \frac{b-a}{2}\right) = e^{jv \frac{b+a}{2}} \cdot \text{sinc}\left(v \frac{b-a}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Пример 4: Найти характеристическую функцию СВ  $\xi_4$ , распределенной по показательному закону.

Решение: Подставляя плотность вероятности (3.33) в определение (6.72), получим

$$\mathcal{G}_{\xi_4}(v) = \int_0^{+\infty} e^{jvx} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} e^{(jv-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - jv}. \quad (6.83)$$

Пример 5: Найти характеристическую функцию нормально распределенной СВ  $\xi_5$ .

Решение: Для плотности вероятности (3.24), применяя «стандартную» замену переменных  $(x-a)/\sigma = z$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\xi_5}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jvx}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jv \cdot (\sigma z + a)}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz = \\ &= e^{jva - \frac{v^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{v^2\sigma^2}{2} + jv\sigma z - \frac{z^2}{2}} dz = e^{jva - \frac{v^2\sigma^2}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(z-jv\sigma)^2}{2}} dz \right] \end{aligned}$$

Если сравнить последний интеграл со свойством нормировки (3.22), то единственное отличие состоит в комплексном характере «математического ожидания» нормального распределения. Это отличие не является принципиальным. К тому

же, с заменой переменных  $y = z - j\sigma v$  можно перейти к обычному нормальному распределению (3.24) с параметром  $a=0$ , но с комплекснозначными пределами интегрирования  $(-\infty - j\sigma v; +\infty - j\sigma v)$ . В соответствии со свойствами комплексной плоскости подобные пределы означают необходимость интегрирования аналитической функции (экспоненты) по замкнутому контуру, а результат подобного интегрирования не зависит от конкретной траектории интегрирования и должен оставаться равным единице (как и в правиле (3.22)) при произвольном по величине смещении  $-j\sigma v$ .

Характеристическая функция нормального распределения равна

$$\mathcal{G}_{\xi}(\nu) = e^{j\nu a - \frac{\nu^2 \sigma^2}{2}}. \quad (6.84)$$

Проверим корректность (6.79).  $\frac{\partial \mathcal{G}_{\xi}(\nu)}{\partial \nu} = (ja - \nu \sigma^2) \cdot e^{j\nu a - \frac{\nu^2 \sigma^2}{2}}$ , а

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_{\xi}(\nu)}{\partial \nu^2} = \{(ja - \nu \sigma^2)^2 - \sigma^2\} \cdot e^{j\nu a - \frac{\nu^2 \sigma^2}{2}}, \text{ поэтому из правила (6.79)}$$

получаем  $M_{\xi} = m_1\{\xi\} = j^{-1} \cdot (ja + 0) \cdot e^0 = a$ . Для второго начального момента  $m_2\{\xi\} = j^{-2} \cdot (-a^2 - \sigma^2) \cdot e^0 = a^2 + \sigma^2$  и, в соответствии с (4.7), для дисперсии распределения получаем  $D_{\xi} = \sigma^2$ . Эти результаты полностью соответствуют свойствам нормального распределения (4.16).

Пример 6: Определить числовые характеристики биномиально распределенной СВ  $\xi_1$ .

Решение: На основе (6.80) определим производные от характеристической функции этой СВ

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{\xi}(\nu)}{\partial \nu} = n \cdot (pe^{j\nu} + q)^{n-1} \cdot pj \cdot e^{j\nu}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_\xi(\nu)}{\partial \nu^2} = npj \cdot \left\{ (n-1) \cdot (pe^{j\nu} + q)^{n-2} \cdot pj \cdot e^{j2\nu} + (pe^{j\nu} + q)^{n-1} \cdot j \cdot e^{j\nu} \right\}$$

При  $\nu = 0$  имеем  $(pe^{j\nu} + q)|_{\nu=0} = p + q = 1$  (см. п. 2.5), а значит

$$M_\xi = m_1\{\xi\} = j^{-1} \cdot [n \cdot 1^{n-1} \cdot pj \cdot e^0] = np$$

$$m_2\{\xi\} = j^{-2} \cdot [npj \cdot \{(n-1) \cdot p + 1\} \cdot j] = (np)^2 + npq,$$

откуда в соответствии с (4.7), для дисперсии получаем

$$D_\xi = m_2\{\xi\} - M_\xi^2 = npq.$$

Полученные числовые характеристики полностью соответствуют ранее полученным результатам (4.44) и (4.45).

## 7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Под предельными теоремами понимается совокупность закономерностей, характеризующих свойства большого числа случайных величин. С качественных позиций все эти закономерности являются проявлениями «закона больших чисел», который утверждает, что применительно к большому числу случайных явлений средний их результат становится практически неслучайным и может быть предсказан с близкой к единице вероятностью.

### 7.1. Неравенство Чебышева и теоремы Чебышева

Для получения неравенства Чебышева рассмотрим чуть подробнее выражение для расчета дисперсии СВ (4.6). Если из бесконечной области интегрирования исключить какой-то фрагмент, то, учитывая неотрицательность подынтегрального выражения, можно утверждать, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx \geq \int_{-\infty}^{M_{\xi} - \varepsilon} (x - M_{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx + \int_{M_{\xi} + \varepsilon}^{+\infty} (x - M_{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{M_{\xi} - \varepsilon} \varepsilon^2 W_{\xi}(x) dx + \int_{M_{\xi} + \varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^2 W_{\xi}(x) dx = \varepsilon^2 \cdot P\{|\xi - M_{\xi}| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Соотношение “ $\geq$ ” между первой и второй строкой выражения выше появляется из-за того, что лишь на границе интервала интегрирования справедливо  $(x - M_{\xi})^2 = \varepsilon^2$ , а в других точках  $(x - M_{\xi})^2 > \varepsilon^2$ . Разделив обе части неравенства на  $\varepsilon^2$ , получаем **неравенство Чебышева**

$$P\{|\xi - M_{\xi}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D_{\xi}}{\varepsilon^2}. \quad (7.1)$$

Итак: для любой СВ вероятность наблюдения значений, отличающихся по абсолютной величине от математического ожидания более чем на  $\varepsilon$  не может превысить отношения  $D_{\xi} / \varepsilon^2$ .

На практике часто используется следствие из неравенства Чебышева, получаемое из (7.1) при  $\varepsilon = \sigma_\xi$  и называемое **правилом 3 сигм**

$$P\left\{\left|\xi - M_\xi\right| \geq 3\sigma_\xi\right\} \leq \frac{D_\xi}{(3\sigma_\xi)^2} = \frac{1}{9}. \quad (7.2)$$

Неравенства, на основании которых выше было получено неравенство Чебышева, выполняются обычно с большим запасом, поэтому и соотношение (7.2) оказывается на практике заметно «жестче». Поэтому практический смысл правила 3 сигм состоит в том, что для любой величины практически все наблюдаемые значения уместаются на интервале  $[M_\xi - 3\sigma_\xi; M_\xi + 3\sigma_\xi]$ .

*Пример 1:* Проверить выполнение правила 3 сигм для нормально распределенной случайной величины.

*Решение:* Учитывая симметрию нормального распределения, входящую в (7.2) вероятность можно представить в виде

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\xi - M_\xi\right| \geq 3\sigma_\xi\right\} &= 2 \int_{M_\xi + 3\sigma_\xi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\xi} \exp\left\{-\frac{(x - M_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} dx = \\ &= 2 \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz = 2 \cdot (1 - F_{\text{ст}}(3)) = 2 \cdot (1 - 0,9987) = 0,0027 \end{aligned}$$

т.е. вероятность выполнения неравенства из (7.2) для нормального распределения в 40 раз меньше формальной границы и составляет менее 0,3%.

Проанализируем свойства среднего арифметического  $\eta_N$  результатов  $N$  независимых измерений  $x_i$  некоторой СВ  $\xi$ . При многократном повторении эксперимента будут получаться всё новые и новые комплекты измерений  $x_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), т.е. среднее арифметическое  $\eta_N$  будет представлять собой линейную комбинацию однотипных с  $\xi$  случайных величин  $\eta_N = N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N \xi_i$ .

В соответствии с (6.64) математическое ожидание СВ  $\eta_N$  равно

$$m_1\{\eta_N\} = N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N m_1\{\xi_i\} = N \cdot M_\xi / N = M_\xi,$$

а для дисперсии, в соответствии с (6.65) получаем

$$D\{\eta_N\} = (N^{-1})^2 \cdot \sum_{i=1}^N D\{\xi_i\} = N \cdot D_\xi / N^2 = D_\xi / N.$$

Теперь для произвольного  $\varepsilon > 0$  на основе (7.1) запишем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\eta_N - M_\xi| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D_\xi}{N\varepsilon^2} = 0,$$

т.е. наблюдение значений  $\eta_N$ , отличающихся от  $M_\xi$  даже на бесконечно малую величину  $\varepsilon$ , является событием невозможным. В подобных случаях говорят, что величина  $\eta_N$  **сходится по вероятности** к  $M_\xi$ . Полученный результат известен как **первая теорема Чебышева**: «Среднее арифметическое независимых измерений любой случайной величины сходится по вероятности к её математическому ожиданию»

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \xi_i \xrightarrow{P} M_\xi. \quad (7.3)$$

Немного более громоздко **вторая теорема Чебышева**: Среднее арифметическое последовательности произвольных независимых СВ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \xi_i \xrightarrow{P} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N m_1\{\xi_i\}. \quad (7.4)$$

Наконец, **теорема Маркова** утверждает, что результат (7.4) справедлив и для произвольной последовательности зависимых случайных величин.

## 7.2. Центральная предельная теорема Ляпунова

Пусть  $\xi_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) последовательность независимых случайных величин с одинаковой плотностью вероятностей  $W_{\xi_i}(x) = W_{\xi}(x)$ . Проанализируем свойства суммы

$$\zeta_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}, \quad (7.5)$$

где  $\sigma_{\xi}$  – эффективное значение СВ  $\xi$ .

Обозначим через  $\mathcal{G}_i(\nu)$  характеристические функции отдельных слагаемых  $\eta_i = (\xi_i - M_{\xi}) / (\sigma_{\xi} \sqrt{N})$

$$\mathcal{G}_i(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ j\nu \frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi} \sqrt{N}} \right\} \cdot W_{\xi}(x) dx. \quad (7.6)$$

Представим эти функции в форме разложения в ряд Маклорена

$$\mathcal{G}_i(\nu) = \mathcal{G}_i(0) + \frac{\nu}{1!} \cdot \mathcal{G}'_i(0) + \frac{\nu^2}{2!} \cdot \mathcal{G}''_i(0) + \frac{\nu^3}{3!} \cdot \mathcal{G}'''_i(0) + \dots$$

Учтём, что:

а) согласно (6.74)  $\mathcal{G}_i(0) = 1$ ;

б) в соответствии с (6.78) при  $m_1\{\eta_i\} = 0$  справедливо  $\mathcal{G}'_i(0) = 0$ ;

в)  $m_2\{\eta_i\} = D_{\eta_i} + m_1^2\{\eta_i\} = D_{\xi} / (\sigma_{\xi} \sqrt{N})^2 = N^{-1}$  и  $\mathcal{G}''_i(0) = -N^{-1}$ ;

г)  $m_3\{\eta_i\} = \mu_3\{\xi\} / (\sigma_{\xi} \sqrt{N})^3$ , поэтому  $\mathcal{G}'''_i(0) = -j\mu_3\{\xi\} / (\sigma_{\xi} \sqrt{N})^3$

и, соответственно, характеристические функции  $\mathcal{G}_i(\nu)$  имеют вид

$$\mathcal{G}_i(\nu) = 1 - \frac{\nu^2}{2N} - j \frac{\nu^3}{6} \cdot \frac{\mu_3\{\xi\}}{\sigma_{\xi}^3 \cdot N \sqrt{N}} + \dots$$

Для независимых слагаемых в соответствии с (6.76) справедливо

$$\mathcal{G}_{\eta_N}(\nu) = \prod_{i=1}^n \mathcal{G}_i(\nu) = \left( 1 - \frac{\nu^2}{2N} - j \frac{\nu^3}{6} \cdot \frac{\mu_3\{\xi\}}{\sigma_{\xi}^3 \cdot N \sqrt{N}} + \dots \right)^N$$

Учтем также, что при  $x \approx 0$   $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ , откуда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \ln \mathcal{G}_{\eta_N}(\nu) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ N \cdot \left( -\frac{\nu^2}{2N} - j \frac{\nu^3}{6} \cdot \frac{\mu_3 \{ \xi \}}{\sigma_\xi^3 \cdot N \sqrt{N}} + \dots \right) \right\} = -\frac{\nu^2}{2}.$$

Таким образом, 
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{\eta_N}(\nu) = \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \right\}. \quad (7.7)$$

Но в соответствии с (6.72), (6.77) характеристическая функция и плотность вероятности случайной величины однозначно соответствуют друг другу, а согласно формуле (6.84) характеристическая функция (7.7) должна принадлежать нормальной СВ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Итак, при количестве слагаемых стремящихся к бесконечности определяемая (7.5) СВ  $\zeta_N$  превращается в стандартную нормальную случайную величину с функцией распределения (3.25). Данный факт известен как частный случай **центральной предельной теоремы Ляпунова**:

Пусть  $\xi_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) сопоставимые по величине независимые случайные величины для которых выполняется условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |\xi_i|^3 / \left( \sum_{k=1}^N D_{\xi_k} \right)^{3/2} = 0$$

Тогда при  $N \rightarrow \infty$  закон распределения суммы  $\eta_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$  неограниченно приближается к нормальному.

### 7.3. Моделирование нормальных случайных величин

Центральная предельная теорема объясняет, почему в теории вероятностей и статистической радиотехнике столь большое значение уделяется нормальному распределению. Ведь, к примеру, совместное действие многих сопоставимых

по мощности источников радиоизлучений порождает на входе приёмника помеху, распределение которой можно считать нормальным. Как следствие, при моделировании процессов в радиотехнических цепях часто приходится формировать последовательности отсчетов шума, характеризуемых нормальным распределением. Один из классических способов формирования подобных последовательностей чисел опирается на центральную предельную теорему и может быть записан в форме

$$\zeta = \sum_{i=1}^{12} (x_i - 0,5), \quad (7.8)$$

где слагаемые  $x_i$  представляют собой независимые величины, распределенные равномерно на интервале от 0 до 1 (генератор подобных случайных величин имеется в любом языке программирования). Действительно, уже при суммировании более 8 слагаемых эффект нормализации оказывается достаточно ярко выражен, а использование 12 слагаемых гарантирует  $D_\zeta = 1,0$ .

Иной вариант формирования нормальных СВ называют методом Бокса-Маллера

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\ln \{x_{1i} \cdot \cos(2\pi x_{2i})\}, \\ \zeta_2 &= -\ln \{x_{1i} \cdot \sin(2\pi x_{2i})\}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где слагаемые  $x_i$  представляют собой независимые последовательности СВ, равномерно распределенных от 0 до 1. По методу Бокса-Маллера формируется сразу пара некоррелированных по отношению друг к другу нормальных СВ.

Действительно, в соответствии с примером 3 из п. 6.8 точка на плоскости, декартовы координаты которой характеризуются нормальным распределением, видна из начала координат под углом, равновероятно принимающим любое направление от 0 до 360°, а длина соответствующего вектора подчиняется распределению Релея.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии теоретические сведения и примеры составляют, по мнению автора, минимальный законченный объем материала, необходимый для ознакомления с первой частью курса “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”, охватывающей вопросы математического описания случайных событий, случайных величин и систем случайных величин. Автор сознательно стремился к минимизации объема пособия, поэтому ряд интересных примеров, детально рассмотренных в книгах иных авторов, не был включен в состав пособия. Студентам, заинтересованным в углубленном изучении данной дисциплины, будет полезно рассмотреть примеры и задачи, приведенные в других изданиях; некоторые из подобных рекомендуемых книг приведены ниже в библиографическом списке литературы. Курс теории вероятностей является достаточно устоявшимся, поэтому издания, выпущенные 20-30 лет назад, не потеряли своей актуальности и могут быть успешно использованы и сегодня. Автор будет благодарен за любую информацию о найденных неточностях и опечатках, а также за идеи по расширению и дополнению данного учебного пособия.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Функция распределения стандартной нормальной случайной величины

Данная функция распределения равна  $F_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$X$	$F_{\text{ст}}(x)$	$x$	$F_{\text{ст}}(x)$	$x$	$F_{\text{ст}}(x)$	$x$	$F_{\text{ст}}(x)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9773	3,0	0,9987
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821	3,1	0,9990
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861	3,2	0,9993
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893	3,3	0,9995
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918	3,4	0,9997
0,5	0,6915	1,5	0,9331	2,5	0,9938	3,5	0,9998
0,6	0,7258	1,6	0,9452	2,6	0,9953	3,6	0,9998
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965	3,7	0,9999
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974	3,8	0,9999
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981	3,9	0,9999

Для отрицательных аргументов  $x$  значения можно получить из соотношения  $F_{\text{ст}}(x)|_{x<0} = 1 - F_{\text{ст}}(-x)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Некоторые неопределенные и определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(a), \quad \text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (\text{П1})$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}, \quad (\text{П2})$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax), \quad (\text{П3})$$

$$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}, \quad (\text{П4})$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax) dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \cos(ax). \quad (\text{П5})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### Модифицированные функции Бесселя

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{П6})$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{z^2/4}{(1!) \cdot (2!)} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!) \cdot (3!)} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!) \cdot (4!)} + \dots \right] \quad (\text{П7})$$

x	exp(-x)·I <sub>0</sub> (x)	exp(-x)·I <sub>1</sub> (x)	x	exp(-x)·I <sub>0</sub> (x)	exp(-x)·I <sub>1</sub> (x)
0,0	1,0000	0,0000	2,0	0,3085	0,2153
0,2	0,8269	0,0823	2,2	0,2913	0,2121
0,4	0,6974	0,1367	2,4	0,2766	0,2085
0,6	0,5883	0,1722	2,6	0,2639	0,2047
0,8	0,5241	0,1945	2,8	0,2528	0,2007
1,0	0,4658	0,2079	3,0	0,2430	0,1968
1,2	0,4198	0,2153	3,2	0,2343	0,1930
1,4	0,3831	0,2185	3,4	0,2264	0,1892
1,6	0,3533	0,2190	3,6	0,2193	0,1856
1,8	0,3289	0,2177	3,8	0,2129	0,1821

Дельта-функция Дирака

Общие свойства

По определению дельта-функция  $\delta(t-t_0)$  для любой действительной величины  $t_0$  равна нулю при  $t \neq t_0$  и неограниченно велика при  $t = t_0$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq t_0, \\ \infty, & \text{при } t = t_0. \end{cases} \quad (\text{П4.1})$$

Интеграл от этой функции

$$\int_a^b \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 1, & \text{при } a < t_0 < b, \\ 1/2, & \text{при } t_0 = a \text{ или } t_0 = b, \\ 0, & \text{при } t_0 < a \text{ или } t_0 > b. \end{cases} \quad (\text{П4.2})$$

Дельта-функция – это предельная функция от однопараметрического семейства непрерывных функций, причем примеров таких семейств очень много. Рассмотрим, например, совокупность  $s(t, \tau)$  прямоугольных импульсов единичной площади, длительность которых составляет  $\tau$ , а высота  $1/\tau$

$$s(t, \tau) = \begin{cases} 1/\tau, & \text{при } t_0 \leq t < t_0 + \tau, \\ 0, & \text{при } t < t_0 \text{ и } t \geq t_0 + \tau. \end{cases} \quad (\text{П4.3})$$

Если длительность импульса  $\tau$  устремить к нулю, то в результате предельного перехода получим дельта-функцию.

Альтернативным вариантом получения  $\delta$ -функции может быть

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 t^2 + 1)} = \delta(t). \quad (\text{П4.4})$$

Если дельта-функция  $\delta(t-t_0)$  выступает в качестве множителя при любой ограниченной и непрерывной в точке  $t_0$  функции  $f(t)$ , то интеграл от подобного произведения определяется так называемым *фильтрующим свойством дельта-функции*

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & \text{при } a < t_0 < b, \\ 0,5 \cdot f(t_0), & \text{при } t_0 = a \text{ или } t_0 = b, \\ 0, & \text{при } t_0 < a \text{ или } t_0 > b. \end{cases} \quad (\text{П4.5})$$

Если же функция  $f(t)$  имеет в точке  $t_0$  разрыв (первого рода), то фильтрующее свойство *дельта-функции* приобретает вид [3]

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = 0,5 \cdot [f(t_{0-}) + f(t_{0+})], \quad \text{при } a < t_0 < b, \quad (\text{П4.6})$$

где  $f(t_{0-})$  и  $f(t_{0+})$  значения  $f(t)$  слева и справа от точки разрыва.

### Свойства производных дельта-функции

Производные от дельта-функции определяются как пределы соответствующих производных от аппроксимирующих функций. Например, используя (П4.4), для первой производной дельта-функции имеем

$$\delta'(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-2\lambda^3 t}{\pi(\lambda^2 t^2 + 1)^2}. \quad (\text{П4.7})$$

Нетрудно видеть, что при любом  $t \neq 0$  эта производная принимает нулевые значения, а в самой точке  $t=0$  наблюдается разрыв, причем производная стремится к  $+\infty$  при подходе к точке разрыва слева и к  $-\infty$  при стремлении к  $t=0$  справа. На производные распространяются и фильтрующие свойства дельта-функции. Свертка производной дельта-функции  $n$ -го порядка с любой функцией, имеющей непрерывную в точке  $t_0$  производную  $n$ -го порядка равна

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta^{(n)}(t - t_0) dt = (-1)^n \cdot f^{(n)}(t_0), \quad \text{при } a < t_0 < b, \quad (\text{П4.8})$$

Любопытно, что существуют и иные функции, обладающие фильтрующим свойством, например, функция  $\sin(x) / x$ . Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{\sin[\pi b(x-a)]}{\pi b(x-a)} \right\} dx = \frac{f^{(n)}(a)}{b}. \quad (\text{П4.9})$$

### Спектральные характеристики дельта-функции

Из фильтрующего свойства дельта-функции следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \cdot \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega t_0), \quad (\text{П4.10})$$

т.е. спектр дельта-функции равномерный на всех частотах и имеет единичную интенсивность. Соответственно, спектр полу-суммы двух дельта-функций  $0,5 \cdot [\delta(t-t_0) + \delta(t+t_0)]$  равен

$$0,5 \cdot [\exp(+j\omega t_0) + \exp(-j\omega t_0)] = \cos(\omega t_0). \quad (\text{П4.11})$$

Для обратного преобразования Фурье получаем соответственно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+j\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) d\omega = \delta(t), \quad (\text{П4.12})$$

а также

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+j\omega t) \cdot \cos(\omega t) d\omega = 0,5 \cdot [\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)]. \quad (\text{П4.13})$$

### Размерность и особенности нормировки

Размерность дельта-функции обратна размерности её аргумента, т.е. если аргументом дельта-функции служит время  $t$ , выражаемое в секундах, то значения  $\delta(t-t_0)$  выражаются в «1/с», а для функции  $\delta(u-u_0)$ , аргументом которой служит напряжение, результаты будут выражаться в «1/В».

Дельта-функции нередко появляются в составе плотности вероятности, спектральной плотности мощности и т.п., то есть характеризуют плотность  $y(x)$  распределения некоторой величины  $Y$  вдоль оси аргумента  $x$ . Своеобразие их поведения проявляется при попытке изменения масштаба аргумента, т.е. при переходе от  $y(x)$  к функции  $y(v)$  нового аргумента  $v = k \cdot x$ .

Рассмотрим сначала особенности поведения зависимостей  $y(\cdot)$ , не имеющих в своём составе дельтообразных компонент. Если функции  $y(x)$  и  $y(v)$  имеют совпадающую размерность, то никаких мер по нормировке значений принимать не требуется, а правило расчета доли величины  $Y$ , приходящейся на произвольный интервал от  $x_{min}$  до  $x_{max}$ , возникает при интегрировании автоматически - путем очевидной замены переменных

$$Y_{|x_{min} \leq x \leq x_{max}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} y(x) dx = \frac{1}{k} \cdot \int_{v_{min}}^{v_{max}} y(v) dv, \quad (\text{П4.14})$$

где, очевидно,  $v_{min} = k \cdot x_{min}$  и  $v_{max} = k \cdot x_{max}$ .

*Классические примеры подобной нормировки можно найти, например, в области спектрального анализа. Частотные характеристики могут выражаться функциями циклической частоты  $f$ , измеряемой в герцах, или функциями круговой частоты  $\omega$ , измеряемой в радианах за секунду. Однако, вне зависимости от конкретного используемого аргумента значения характеристик сигналов и цепей остаются неизменными и лишь при интегрировании по частоте  $\omega$  перед интегралом появляется нормировочный коэффициент « $1 / 2\pi$ ».*

Если же замена аргумента сопровождается соответствующим изменением размерности результатов, то значения функции должны быть увеличены в  $k$  раз. Например, если плотность печати принтера составляет 600 точек на дюйм, то при пересчете к 1 метру, включающему 39,37 дюйма, плотность печати будет уже 23622 точек на метр, что соответствует соотношению между аргументами  $v = 39,37 \cdot x$ . В подобных случаях, очевидно, расчетная формула (П4.14) распадается на две независимые части, каждая из которых не требует поправочных коэффициентов

$$Y_{|x_{min} \leq x \leq x_{max}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} y(x) dx = \int_{v_{min}}^{v_{max}} y(v) dv. \quad (\text{П4.15})$$

Случай присутствия дельтообразных компонент:

Пусть теперь в составе зависимости  $y(x)$ , имеется слагаемое вида  $Y_0 \cdot \delta(x-x_0)$ . Это означает, что доля величины  $Y$ , приходящейся на бесконечно малую окрестность точки  $x_0$ , составляет  $Y_0$ . Очевидно, что в бесконечно малой окрестности точки  $v_0 = k \cdot x_0$  должна содержаться та же доля  $Y$ .

Если функции  $y(x)$  и  $y(v)$  дают результаты с совпадающей размерностью, то для расчета этой доли  $Y$  будет использоваться (П4.14), а значит для сохранения  $Y$  поправочные коэффициенты потребуются увеличить в  $k$  раз, т.е.

$$y(v) = y_{\text{непрер}}(v) + k \cdot Y_0 \cdot \delta(v - v_0), \quad (\text{П4.16})$$

где  $y_{\text{непрер}}(v)$  - часть зависимости, не содержащая дельтаобразных компонент.

Если же замена аргумента сопровождается изменением размерности результатов, то в соответствии с (П4.15) корректировка коэффициентов при дельта-функции не требуется

$$y(v) = k \cdot y_{\text{непрер}}(v) + Y_0 \cdot \delta(v - v_0). \quad (\text{П4.17})$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – М.: Наука, 1988. – 480 с.

2. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.

3. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин – М.: Радио и связь, 1989. – 653 с.

4. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов – М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.

5. Горяинов, В.Т. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов – М.: Сов. радио, 1980. – 543 с.

6. Заездный, А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике / А.М. Заездный – М.: Связь, 1969. – 448 с.

7. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.

8. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1999. – 479 с.

9. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман – М.: Высш. шк., 1999. – 400 с.

10. Чернова, Н.И. Теория вероятностей: Учеб. пособие / Н.И. Чернова. – Новосибирск, Новосиб. гос. ун-т. 2007. – 160 с. – Режим доступа: <http://www.nsu.ru/mm/f/tvims/chernova/tv/portr.pdf>

11. Быков, В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ.....</b>	<b>6</b>
1.1. Основные характеристики случайных событий.....	6
1.2. Алгебраический метод расчета вероятности событий....	8
1.3. Основы комбинаторики .....	12
1.4. Геометрический метод расчета вероятности событий .	20
1.5. Классификация событий.....	24
<b>2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ .....</b>	<b>28</b>
2.1. Понятие сложного события .....	28
2.2. Расчет вероятности пересечения (логического произведения) событий.....	28
2.3. Расчет вероятности объединения (логической суммы) событий.....	30
2.4. Примеры расчетов вероятностей сложных событий ....	33
2.5. Расчет вероятностей для последовательности независимых испытаний .....	40
2.6. Независимые испытания с несколькими исходами .....	41
2.7. Расчеты для продолжительных серий испытаний .....	42
2.8. Потоки событий и закон распределения Пуассона .....	47
2.9. Формула полной вероятности. Теорема о гипотезах ....	49
<b>3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....</b>	<b>56</b>
3.1. Случайные величины и их классификация.....	56
3.2. Понятие закона распределения случайной величины ..	60
3.3. Ряд распределения дискретной случайной величины ..	60
3.4. Типовые законы распределения дискретных случайных величин .....	62
3.4.1. Равномерное распределение ДСВ.....	62
3.4.2. Геометрическое распределение ДСВ.....	63

3.4.3. Биномиальное, пуассоновское и гипергеометрическое распределения .....	64
3.5. Функция распределения вероятностей СВ .....	66
3.6. Плотность вероятности случайной величины .....	71
3.7. Типовые законы распределения непрерывных случайных величин .....	74
3.7.1. Равномерное распределение НСВ .....	74
3.7.2. Нормальное (гауссовское) распределение .....	75
3.7.3. Распределение Релея.....	78
3.7.4. Распределение Коши .....	79
3.7.5. Показательное распределение .....	80
3.7.6. Распределение арксинуса.....	82
3.7.7. Распределение константы .....	82
3.8. Пример и особенности распределения смешанных случайных величин .....	83
3.9. Примеры исследования вероятностных характеристик случайных величин .....	85
3.10. Интегральная формула полной вероятности .....	91
<b>4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....</b>	<b>93</b>
4.1. Начальные моменты распределения и математическое ожидание случайной величины .....	94
4.2. Центральные моменты распределения и дисперсия СВ.....	96
4.3. Прочие числовые характеристики СВ.....	98
4.4. Расчет числовых моментов нормального распределения.....	100
4.5. Примеры расчета числовых характеристик типовых распределений непрерывных случайных величин.....	103
4.5.1. Свойства равномерного распределения.....	103
4.5.2. Числовые характеристики распределения Релея.....	104
4.5.3. Числовые характеристики распределения Коши.....	106
4.5.4. Характеристики показательного распределения.....	107
4.5.5. Гамма-распределение .....	108

4.6. Производящие функции и их применение для расчета числовых характеристик дискретных случайных величин	109
4.6.1. Понятие и свойства производящих функций	110
4.6.2. Характеристики биномиального распределения	112
4.6.3. Характеристики геометрического распределения	114
4.6.4. Свойства распределения Пуассона	115
4.7. Примеры исследования числовых характеристик случайных величин	117
<b>5. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН</b>	<b>120</b>
5.1. Преобразование дискретных случайных величин	120
5.2. Преобразование непрерывных случайных величин	122
5.2.1. Базовый случай	122
5.2.2. Анализ функционального преобразования при бесконечнозначной обратной функции	125
5.3. Расчет числовых характеристик случайных величин на выходе нелинейного преобразователя	127
5.4. Примеры анализа функциональных преобразований случайных величин	128
5.5. Формирование случайных величин с заданным законом распределения	138
<b>6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН</b>	<b>141</b>
6.1. Понятие системы случайных величин (многомерной случайной величины)	141
6.2. Вероятностное описание систем дискретных СВ	141
6.3. Функция распределения системы случайных величин	143
6.4. Плотность распределения вероятностей системы СВ	146
6.5. Зависимость случайных величин и условные законы распределения составляющих системы СВ	149
6.6. Числовые характеристики системы двух СВ	151
6.6.1. Определения и общие свойства моментов распределения системы СВ	152

6.6.2. Корреляционные характеристики случайных величин .....	153
6.7. Двумерный нормальный закон распределения .....	157
6.8. Функциональное преобразование системы СВ .....	158
6.9. Преобразование системы СВ в новую случайную величину .....	162
6.10. Числовые характеристики функции системы СВ	168
6.11. Комплексные случайные величины и характеристические функции СВ .....	170
6.12. Примеры исследования характеристических функций случайных величин .....	172
<b>7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....</b>	<b>176</b>
7.1. Неравенство Чебышева и теоремы Чебышева.....	176
7.2. Центральная предельная теорема Ляпунова.....	179
7.3. Моделирование нормальных случайных величин .....	180
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>182</b>
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Функция распределения стандартной нормальной случайной величины .....	183
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Некоторые неопределенные и определенные интегралы.....	183
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Модифицированные функции Бесселя .....	184
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Дельта-функция Дирака .....	185
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>190</b>

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ  
ЧАСТЬ 1

В авторской редакции  
Компьютерный набор А.Б. Токарева

Подписано к изданию 25.02.2016.  
Объем данных 1,5 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14