ФГОУ ВПО
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра автоматизированных и вычислительных систем

№ 196-2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ 1-3
по дисциплине
«Математическая логика и теория алгоритмов»
для студентов специальности 230101
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»
очной, сокращенной очной, заочной и сокращенной заочной
форм обучения

$$\overline{\forall x A(x)} \sim \exists x \overline{A(x)}$$
$$\overline{\exists x A(x)} \sim \forall x \overline{A(x)}$$

Воронеж 2014

Составители: канд. техн. наук Л.В. Холопкина,
ст. преп. М.П. Носачева

УДК 681.3.06:800.92(075)
Методические указания к выполнению лабораторных работ 1–3 по дисциплине “Математическая логика и теория алгоритмов” для студентов специальности 230101 очной и сокращенной очной, сокращенной очной, заочной и сокращенной заочной форм обучения / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Л.В. Холопкина, М.П. Носачева. Воронеж, 2014. 47 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по основным темам курса, примеры решения типовых задач, перечень задач, предназначенных для самостоятельного решения.
Предназначены для студентов второго курса.

Табл.2. Ил. 3 Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. А.А. Кисурин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. С.Л. Подвальный

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

АЛГЕБРА ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является теоретическое изучение основных логических функций и эквивалентностей исчисления высказываний и приобретение навыков при решении практических задач.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Высказывание – это повествовательное предложение, которое может быть классифицировано либо как истинное, либо как ложное, но не как, то и другое одновременно.

2.1. Основные логические функции исчисления высказываний

Пусть A и B - высказывания. Основные логические функции исчисления высказываний задаются с помощью следующих таблиц истинности.

Отрицание высказывания ($\overline{A}$)

A	$\overline{A}$
$И$	$Л$
$Л$	$И$

Дизъюнкция высказываний A и B ($A \vee B$; $A + B$)

A	B	$A \vee B$
$И$	$И$	$И$
$Л$	$И$	$И$
$И$	$Л$	$И$
$Л$	$Л$	$Л$

Пусть A: “60 делится на 5 ”; B: “60 делится на 6”;

$A \vee B$: “60 делится на 5 или на 6”

Конъюнкция высказываний A и B ($A \wedge B$; $A \cdot B$; $A \& B$)

A	B	$A \wedge B$
$И$	$И$	$И$
$Л$	$И$	$Л$
$И$	$Л$	$Л$
$Л$	$Л$	$Л$

Пусть A: “$x > 3$”; B: “$x < 10$”;

$A \& B$: “3<x<10”.

Импликация высказываний A и B ($A \to B$)

A	B	$(A \to B)$
$И$	$И$	$И$
$Л$	$И$	$И$
$И$	$Л$	$Л$
$Л$	$Л$	$И$

A - посылка импликации; B - заключение импликации.

Пусть A: “число кратно 10 ”; B: “число кратно 5”;

$A \to B$: “Если число кратно 10, то оно кратно 5”.

Эквиваленция высказываний A и B ($A \leftrightarrow B$)

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
$И$	$И$	$И$
$Л$	$И$	$Л$
$И$	$Л$	$Л$
$Л$	$Л$	$И$

Используя таблицы истинности, можно выразить импликацию и эквиваленцию через элементарные логические операции.

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A} \wedge \overline{B} \vee A \wedge B = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

В исчислении высказываний справедливы следующие эквивалентности (равносильности).

Таблица 1

Основные эквивалентности

Для дизъюнкции	Для конъюнкции	Название закона
$A\vee B=B\vee A$	$AB=BA$	Коммутативный
$A\vee(B\vee C)=$ $=(A\vee B)\vee C$	$A(BC)=$ $(AB)C$	Сочетательный
$A(B\vee C)=$ $=AB\vee AC$	$A\vee(BC)=$ $=(A\vee B)(A\vee C)$	Дистрибутивный
$A\vee A=A$	$AA=A$	
$\overline{A\vee B}=\overline{A}\ \overline{B}$	$\overline{AB}=\overline{A}\vee\overline{B}$	Законы де Моргана
$A\vee 0=A$	$A\cdot 1=A$	
$A\vee 1=1$	$A\cdot 0=0$	
$A\vee\overline{A}=1$	$A\overline{A}=0$	
$A\vee AB=A$	$A(A\vee B)=A$	Формула поглощения
$A\vee\overline{A}B=A\vee B$	$A(\overline{A}\vee B)=AB$	Формула поглощения
$(A\vee B)(C\vee D)=$ $=AC\vee AD\vee$ $BC\vee BD$	$AB\vee CD=$ $=(A\vee C)(A\vee D)\cdot$ $(B\vee C)(B\vee D)$	

2.2. Дизъюнктивно-нормальная и конъюнктивно-нормальная формы

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, состоящая из переменных или их отрицаний. *Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)* – дизъюнкция элементарных конъюнкций. *Минимальной ДНФ* называется та ДНФ, которая имеет самую короткую запись. В общем случае для получения минимальной ДНФ существуют эффективные алгоритмы, например, метод Квайна, карта Карно. Однако для получения минимальной ДНФ в некоторых частных случаях можно использовать следующие правила:

Правило 1. Если ДНФ является трехчленом, зависящим от трех переменных, и если симметрия нарушена только по одной из переменных, то устраняется тот член дизъюнкции, который эту переменную не содержит.

Пусть необходимо привести к минимальной ДНФ следующее выражение $\left[\left(\overline{C}\to B\right)\to A\right]\to B\left(\overline{C}\leftrightarrow A\right)$.

Приводим сначала это выражение к ДНФ, пользуясь формулами перевода импликации и эквиваленции в элементарные логические операции и таблицей эквивалентностей (табл.1).

$$\left[\left(\overline{C}\to B\right)\to A\right]\to B\left(\overline{C}\leftrightarrow A\right)=\overline{\overline{C\vee B}\vee A}\vee B(A\overline{C}\vee\overline{A}C)=$$
$$(C\vee B)\overline{A}\vee AB\overline{C}\vee\overline{A}BC=\overline{A}C\vee\overline{A}B\vee AB\overline{C}\vee\overline{A}BC=$$
$$\overline{A}C\vee\overline{A}B\vee AB\overline{C}=\overline{A}C\vee B(\overline{A}\vee A\overline{C})=\overline{A}C\vee B(\overline{A}\vee\overline{C})=$$
$$\overline{A}C\vee\overline{A}B\vee B\overline{C}=\overline{A}C\vee B\overline{C}.$$

Поскольку в полученной ДНФ симметрия нарушена по переменной C, так как переменная C входит в ДНФ и с отрицанием и без отрицания, то для минимизации используется первое правило, то есть из выражения удаляется член, не содержащий эту переменную.

Правило 2. Если ДНФ является трехчленом, зависящим от трех переменных и если симметрия нарушена по двум из этих переменных, то данная ДНФ равносильна дизъюнкции, одним из членов которой является переменная, по которой симметрия не нарушена, а вторым членом служит тот член первоначальной ДНФ, который эту переменную не содержит.

Совершенная ДНФ (СДНФ) должна удовлетворять следующим условиям:

1. Все элементарные конъюнкции различны.
2. Нет нулевых конъюнкций.
3. Ни одна из элементарных конъюнкций не содержит одинаковых членов.
4. Каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные.

Для получения СДНФ необходимо сначала найти минимальную ДНФ, а затем путем ввода дополнительных множителей добиться выполнения условия 4, например,

$$AB\vee\overline{B}C\vee\overline{A}C=C\vee AB=C(A\vee\overline{A})\vee AB(C\vee\overline{C})=AC(B\vee\overline{B})\vee$$

$$\overline{A}C(B\vee\overline{B})\vee ABC\vee AB\overline{C}=ABC\vee\overline{A}BC\vee A\overline{B}C\vee\overline{A}\,\overline{B}C\vee AB\overline{C}$$

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция, состоящая только из переменных или их отрицаний.

Конъюнктивно-нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. *Минимальной КНФ* называется такая КНФ, которая имеет самую короткую запись.

Для получения минимальной КНФ, также как и для получения ДНФ, в некоторых частных случаях можно использовать следующие правила:

Правило 1. Если КНФ зависит от трех переменных и представляет конъюнкцию трех элементарных дизъюнкций и если симметрия нарушена по одной из переменных, то поглощается та элементарная дизъюнкция, которая эту переменную не содержит.

Правило 2. Если КНФ зависит от трех переменных и представляет собой конъюнкцию трех элементарных дизъюнкций и если симметрия нарушена по двум из этих переменных то данная КНФ равносильна конъюнкции, одним из членов которой является переменная, по которой симметрия не нарушена, а вторым членом является тот член первоначальной КНФ, который эту переменную не содержит.

Для получения минимальной КНФ сначала получают КНФ. Пусть необходимо привести к минимальной КНФ следующее выражение $\left[\left(A\overline{B}\to C\right)\to B\right]\to\left(A\overline{C}\leftrightarrow A\vee B\right)$.

Сначала получаем ДНФ:

$$\left[\left(A\overline{B}\to C\right)\to B\right]\to\left(A\overline{C}\leftrightarrow A\vee B\right)=$$

$$\overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{B}}}\vee C}\vee B}\vee A\overline{C}(A\vee B)\vee\overline{A\overline{C}}(\overline{A\vee B})=$$

$$(\overline{A\overline{B}}\vee C)\overline{B}\vee A\overline{C}\vee AB\overline{C}\vee(\overline{A}\vee C)\overline{A}\,\overline{B}=$$

$$(\overline{A}\vee B\vee C)\overline{B}\vee A\overline{C}\vee AB\overline{C}\vee\overline{A}\,\overline{B}\vee\overline{A}\,\overline{B}C=$$

$$\overline{A}\,\overline{B}\vee\overline{B}C\vee A\overline{C}\vee AB\overline{C}\vee\overline{A}\,\overline{B}\vee\overline{A}\,\overline{B}C=$$

$$\overline{B}C\vee A\overline{C}\vee\overline{A}\,\overline{B}.$$

Полученную ДНФ минимизируем, используя правило 2 для ДНФ, и получаем $\overline{B}C\vee A\overline{C}\vee\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}\vee A\overline{C}$.

Для получения КНФ преобразуем ДНФ в КНФ, используя последнюю формулу из таблицы эквивалентностей: $\overline{B}\vee A\overline{C}=(\overline{B}\vee A)(\overline{B}\vee\overline{C})$

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Упростить следующие выражения:

1. $((P\vee S)\leftrightarrow\overline{Q})\overline{S}\to\overline{((S\to R\vee Q)\vee P)}$;
2. $(A\to B)(B\to\overline{A})(C\to A)$;

3. $\overline{(\overline{A}\,\overline{B})} \vee ((A \to B)A)$.

Используя основные эквивалентности исчисления высказываний, проверить следующие равносильности:

1. $A\overline{B} \vee A\overline{C} \vee B\overline{C} \vee C = A \vee B \vee C$;
2. $(A \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B)(A \vee \overline{A}C \vee \overline{A}B \vee AB\overline{C}) = A \vee B$;
3. $[A \vee B \vee C\,\overline{(A \vee B)} \vee B\,\overline{(A \vee D)}](A \vee C\overline{A} \vee ABC) =$ $= A \vee C$;
4. $(AB \vee \overline{AB}C \vee A\overline{C})[A \vee C\overline{A} \vee B(\overline{A \vee C})] = A \vee C$;
5. $(\overline{A} \vee AB \vee \overline{B}CD \vee AD)[B \vee \overline{B}D \vee BC(A \vee D)] = B \vee D$;
6. $(\overline{A} \vee B \vee C)(AB\overline{C})(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})(A \vee BC)(AB \vee CD) =$ $AB\overline{C}$;
7. $(\overline{A} \vee ABC \vee \overline{C})ABC(A\overline{C} \vee C\overline{D} \vee D)(AC \vee BD) = ABC$;
8. $[(\overline{A} \vee AB \vee B(C \vee D)](BD \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} \vee \overline{A}D \vee A \vee B) \wedge BC =$ BC;
9. $A\overline{B} \vee ABC \vee A\overline{C}D \vee ABD \vee \overline{AD}\,\overline{C} = A \vee \overline{C}$;
10. $\overline{A}C \vee \overline{A}\,\overline{C}D \vee BC\overline{D} \vee A\overline{BC} \vee CD = A \vee C \vee D$;
11. $\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee ACD \vee AC\overline{D} \vee A\overline{CD} = A \vee C$;
12. $AD \vee AB\overline{D} \vee \overline{A}CD \vee \overline{AB}D \vee B\overline{D} = B \vee D$;
13. $\overline{A}\,\overline{B}C \vee A\overline{B}C \vee ABC \vee \overline{A}BC = C$;
14. $AB \vee A\overline{B}C \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee A\overline{C} = A$;
15. $\overline{A}\,\overline{B}C \vee A\overline{B}C \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{C} = \overline{B} \vee \overline{C}$;
16. $\overline{A}C\overline{D} \vee \overline{C}D \vee AC \vee \overline{A}CD = C \vee D$;
17. $A\overline{B}\,\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee \overline{B}CD \vee BC \vee \overline{B}C\overline{D} = A \vee C$;
18. $(AC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}C)(CD \vee C\overline{D} \vee ABC) = C$;

19. $(\overline{A}B\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee BC \vee A\overline{BC})(A \vee \overline{A}B \vee \overline{A}\,\overline{B}C) =$ $A \vee B$;
20. $(\overline{A}B \vee \overline{A}C \vee AB \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})(\overline{A}\,\overline{B} \vee B\overline{AC} \vee ACD \vee$ $AC\overline{D}) = \overline{A} \vee B$;
21. $(AB \vee \overline{A}B \vee \overline{B}C)(AB\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{B}) = B\overline{C} \vee \overline{B}C$;
22. $(AB \vee A\overline{B}C \vee A\overline{BC})(\overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C} \vee ABC) = ABC$;
23. $(B\overline{C} \vee ABC \vee C\overline{AB})(A\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee AB\overline{C}) = AB\overline{C} \vee \overline{B}C$;
24. $(ABD \vee A\overline{B} \vee B\overline{AD})(AD \vee \overline{A}BD \vee \overline{A}\,\overline{BD}) = AD \vee$ $BD \vee \overline{A}B$;
25. $(AB \vee AB\overline{C} \vee B\overline{C} \vee C)(\overline{C} \vee AC \vee \overline{A}BC) = B \vee AC$;
26. $(\overline{A}\,\overline{C} \vee C \vee \overline{C}D \vee AB)(C \vee \overline{C}D \vee A\overline{D} \vee \overline{C}\,\overline{D}\,\overline{B}) = C \vee$ $D \vee AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$;
27. $(BD \vee A\overline{D} \vee A\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}D)(A \vee \overline{A}\,\overline{D} \vee BD) =$ $A \vee BD$;
28. $(BC \vee A\overline{BC} \vee \overline{A}C)(AB \vee \overline{C} \vee AC) = A$;
29. $\overline{\overline{B \vee C} \vee \overline{A \vee C} \vee AB} = C\overline{A} \vee C\overline{B}$;
30. $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}(A \vee C) \vee B(\overline{A \vee C})} = AB$;
31. $\overline{\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \vee C \vee \overline{A \vee C} \vee A\overline{B}} = \overline{A}C \vee BC$;
32. $\overline{\overline{AC \vee B} \vee \overline{B} \vee B(\overline{A \vee C})} = AB \vee BC$.

Привести следующие формулы к минимальной ДНФ.

1. $\left[(AB \to C) \to (A \vee C \to A\overline{B})\right] \to AB$;
2. $\left[A \to (\overline{B} \leftrightarrow A \vee C)\right] \to [(B \to A \vee C) \to AC]$;
3. $\left[\overline{A} \to B(A \to C)\right] \to (\overline{A} \vee B \leftrightarrow C)B$;

4. $\left[(B \to C) \to A\right] \to \left[\left(\overline{C} \vee B \to \overline{A}\right) \to BC\right]$;
5. $\left[A \to \left(\overline{C} \leftrightarrow A \vee B\right)\right] \to (A \vee B \leftrightarrow BC)$;
6. $\left[\left(C\overline{B} \leftrightarrow A\right) \to C\right] \to \left(\overline{A} \vee C \leftrightarrow C\right)B$;
7. $\left[(A \leftrightarrow BC) \to C\right] \to (A \vee C \leftrightarrow B)$;
8. $\left[\left(A \leftrightarrow B \vee \overline{C}\right) \to \overline{A} \vee C\right] \to \left(A\overline{C} \vee B \to \overline{A}\,\overline{B}\right)$;
9. $\left[C \to \left(\overline{A} \leftrightarrow B \vee C\right)\right] \to (AC \vee B \leftrightarrow ABC)$.

Привести следующие формулы к минимальной КНФ.
1. $\left[\overline{A}C \to \left(C \leftrightarrow \overline{B}\right)\right] \to \left(\overline{A} \vee \overline{B} \to A\overline{C}\right)$;
2. $\left[(B \vee C \leftrightarrow AC) \to \overline{B}\right] \to \left[(C \to A) \to A\overline{B}\right]$;
3. $\left[\left(B\overline{C} \to A\right) \to C\right] \to A(C \leftrightarrow B)$;
4. $\left[(B \leftrightarrow C) \to \left(A \vee B \to \overline{A}\,\overline{C}\right)\right] \to \left(\overline{B\overline{C} \to \overline{A}}\right)$;
5. $\left[A \to \left(\overline{B} \vee C \leftrightarrow \overline{A}\right)\right] \to B\left(C \leftrightarrow A\overline{B}\right)$;
6. $\left(A \vee \overline{B}\,\overline{C} \to \overline{A} \vee \overline{C}\right) \to \left(\overline{B \to A \vee C}\right)$;
7. $\left[(B \vee C \leftrightarrow AC) \to \overline{A}B\right] \to \left(\overline{B \to \overline{A}}\right)$;
8. $(A \vee B \to C) \to \left[\left(A \to \overline{B}C\right) \to B(A \leftrightarrow C)\right]$;
9. $\left[\overline{A}C \to \left(C \leftrightarrow \overline{B}\right)\right] \to \left[\overline{A} \vee \overline{B} \to \left(\overline{A \to B \vee C}\right)\right]$.

Привести следующие формулы к виду СДНФ.
1. $\left(B \vee C \to \overline{A}\right) \to \left[(C \to B) \to AC\right]$;
2. $\left[AB \to \left(A \vee B\overline{C} \to \overline{B}\right)\right] \to \left(A \vee C \leftrightarrow B \vee \overline{C}\right)$;
3. $\left[A \to \left(A \vee C \leftrightarrow \overline{B}\right)\right] \to (A \vee C \to BC)$;
4. $\left[B \to \left(A \vee C \to \overline{C}\right)\right] \to A\left(\overline{B} \leftrightarrow AC\right)$;
5. $\left[(B \vee C \leftrightarrow A) \to \overline{B}\right] \to \left[\left(\overline{B} \to \overline{A} \vee C\right) \to \left(\overline{BC \to A}\right)\right]$;
6. $\left[AB \to \left(A \vee \overline{C} \to \overline{B}\right)\right] \to \left(A \vee C \leftrightarrow B \vee \overline{C}\right)$;

7. $\left[AC \to \left(B \vee C \to \overline{A}\right)\right] \to \left(B \vee C \leftrightarrow \overline{A}B\right)$;
8. $\left[\left(A\overline{B} \to C\right) \to B\right] \to (C \leftrightarrow A \vee B)$;
9. $\left[(B \vee C \leftrightarrow AC) \to \overline{A}B\right] \to \left(\overline{B \to \overline{A}}\right)$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ПЕРЕВОД ВЫСКАЗЫВАНИЙ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА НА ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является приобретение навыков перевода высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Язык алгебры логики может быть использован при решении большого числа содержательных логических задач. Решение таких задач с помощью логических рассуждений достаточно трудно. Если же применить аппарат алгебры логики к решению таких задач, то все рассуждения могут быть заменены на простые формализованные вычисления, гарантирующие правильность ответа.

Но прежде чем применить формализованный подход, исходные рассуждения надо нужно правильно перевести на яэык алгебры логики. Для решения данной задачи может быть использована таблица соотношений между наиболее часто встречающимися выражениями естественного языка и формулами алгебры логики.

Таблица 2

Таблица соотношений

Форма выражения естественного языка	Формула языка алгебры логики
Не **А**; неверно, что **А;** **А** не имеет места	$\overline{A}$
А и **В;** как **А**, так и **В;** не только **А,** но и **В** ; **А** вместе с **В;** **А,** несмотря на **В;** **А** в то время, как **В**	$A \wedge B$
А, но не **В** ; не **В,** а **А**	$A \wedge \overline{B}$
А или **В**; **А** или **В**, или оба	$A \vee B$
А, либо **В**; **А**, разве, что **В**; либо **А**, либо **В**; не **А**, разве, что не **В**; либо не **А**, либо не **В**; **А** или **В,** но не оба	$A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge B$
Либо А, либо **В** и **С;** **А**, разве что **В** и **С**	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee \overline{A} \wedge B \wedge C$
Либо **А** и **В**, либо **С** и **D**	$A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \vee$ $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D$
Если **А**, то **В**; **В**, если **А**; **А**, только, если **В**; **А**, только тогда, когда **В**; **А** достаточно для **В**; **А**, только при условии, что **В**; **В** необходимо для **А**; **А**, значит **В**; для **В** достаточно **А**; **А** влечет **В**; для **А** необходимо **В**; все **А** есть **В**; из **А** следует **В**; **В**, тогда, когда **А**	$A \to B$

Продолжение табл.2

А эквивалентно **В**; **А**, если и только если **В**; **А**, тогда и только тогда, когда **В**; **А** необходимо и достаточно для **В**	$A \leftrightarrow B$

При переводе высказываний естественного языка на язык алгебры логики нужно выделить сначала элементарные высказывания и обозначить их символами так, чтобы по этим обозначениям можно было восстановить полный текст составного высказывания. Нужно стремиться к введению минимального количества элементарных высказываний, пытаясь выражать одни элементарные высказывания через другие.

Покажем на примере, как осуществлять перевод выражений с естественного языка на язык алгебры логики и работать с полученными формулами.

Пример: Мать принесла яблоки. Дети стали гадать, какие яблоки она принесла, и высказали ряд предположений:

1. Если яблоки будут сладкими, то для того, чтобы они были большими, достаточно, чтобы они были не зелеными.

2. Яблоки будут маленькими, если они не кислые, но зеленые.

3. Для того, чтобы яблоки были зелеными, необходимо, чтобы они были большими тогда и только тогда, когда они сладкие.

Мать сказала, что эти высказывания можно свести к двум простейшим условиям, из которых истинно только одно. Кроме того, мать сказала, что яблоки, принесенные ее, либо кислые и маленькие, либо зеленые. Какие яблоки принесла мать?

Решение: Выделим элементарные высказывания: С - сладкие; $Б$ - большие; З - зеленые. Тогда $\overline{C}$ - кислые; $\overline{Б}$ - маленькие.

Рассуждения (1-3) на языке алгебры логики будут представлены так

$$1.\ С \to (\overline{З} \to Б);$$

$$2.\ СЗ \to \overline{Б};$$

$$3.\ З \to (Б \leftrightarrow С).$$

Условия (1-3) должны выполняться одновременно, значит, должна быть истинной их конъюнкция

$$(С \to (\overline{З} \to Б))(СЗ \to \overline{Б})(З \to (Б \leftrightarrow С)).$$

Приводим это выражение к минимальной ДНФ, пользуясь изложенными раннее правилами.

$$(С \to (\overline{З} \to Б))(СЗ \to \overline{Б})(З \to (Б \leftrightarrow С)) =$$
$$= \overline{З}\,\overline{С} \vee Б\overline{З} \vee \overline{С}\,\overline{Б} = Б\,\overline{З} \vee \overline{С}\,\overline{Б}$$

Поскольку из двух простейших высказываний истинным является только одно, то для однозначной записи этого условия необходимо перейти от минимальной ДНФ к КНФ, пользуясь основными эквивалентностями алгебры логики

$$Б\,\overline{З} \vee \overline{С}\,\overline{Б} = (Б \vee \overline{С})(\overline{З} \vee \overline{С})(\overline{З} \vee \overline{Б}) = (Б \vee \overline{С})(\overline{З} \vee \overline{Б}).$$

Так из двух простейших условий $(Б \vee \overline{С})(\overline{З} \vee \overline{Б})$ истинным может быть только одно, то это возможно только в том случае, если истинно первое условие и одновременно ложно второе или ложно первое условие и одновременно истинно второе:

$$(Б \vee \overline{С})\overline{(\overline{З} \vee \overline{Б})} \vee \overline{(Б \vee \overline{С})}(\overline{З} \vee \overline{Б}) = С\overline{Б} \vee БЗ.$$

Объединяя полученный результат с дополнительным условием, высказанным матерью $\overline{С}\,\overline{Б}\,\overline{З} \vee СБЗ$, получаем:

$$(С\overline{Б} \vee БЗ)(\overline{С}\,\overline{Б}\,\overline{З} \vee СБЗ) = СБЗ.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1.Обсуждая приход в класс новичка, школьники высказывали ряд предположений:

1.1. Для того, чтобы новичок был добрым, достаточно, чтобы он был умным и сильным.

1.2. Если новичок силач, то он либо глупый, либо злой.

1.3. Если новичок умный, то для того чтобы он был добрым, необходимо, чтобы он был сильным.

Учитель предложил свести эти высказывания к двум простейшим условиям, а из двух условий, как сказал учитель, выполнено только одно. Кроме того, учитель сказал: “Необходимое условие доброты – это ум. Значит, новичок умный, но слабый”. Каким был новичок?

2. Семья решила купить новый шкаф. Все хотели, чтобы шкаф был либо дубовый, либо березовый; либо желтый, либо коричневый; либо светлый, либо темный. Отцу дали рекомендации:

2.1. Ты можешь купить светлый шкаф, если только он будет березовым желтого цвета.

2.2. Если шкаф будет березовым, то светлый тон должен быть достаточным признаком желтой окраски.

2.3. Если шкаф будет коричневым, то для того, чтобы он был темным, необходимо, чтобы он был сделан из дуба.

Все эти условия можно свести к двум простейшим. Отцом был куплен шкаф, который удовлетворял только одному из этих условий. Он поступил так, потому что хотел, чтобы шкаф был светлым и березовым или темным, но желтым. И это условие действительно оказалось выполненным. Какой шкаф был куплен?

3. По поводу приглашения гостей были высказаны следующие соображения:

3.1. Если мы пригласим Андрея, то Володю приглашать не надо.

3.2. Но Сережу можно пригласить только тогда, когда будет приглашен Володя.

3.3. А если мы пригласим Андрея с Володей, то Сережу пригласить нельзя.

На следующий день было решено, что нужно сделать противоположное. Упростить новую инструкцию и свести ее к простейшим условиям.

4. В коробке лежат шары: большие и маленькие, красные и зеленые, темные и светлые. Из коробки надо достать шар, удовлетворяющий условиям:

4.1. Если шар светлый, то он может быть маленьким только тогда, когда он красный.

4.2. Шар может быть большим и светлым, если он зеленый.

4.3. Если шар большой, то для того чтобы он был зеленым, достаточно, чтобы он был темным.

Свести эти условия к двум простейшим.

5. Мать попросила сына купить цветы: либо гвоздики, либо розы; либо бордовые, либо красные; либо светлые, либо темные. Кроме того, должны быть выполнены следующие условия:

5.1. Чтобы цветок был красным или гвоздикой, достаточно, чтобы он был темным.

5.2. Цветок может быть бордовым, если он светлый

5.3. Цветок может быть розой, если только он светлый и красный.

Сын мог выполнить только одно из условий. Какие цветы заказала мать и как сын выполнил ее заказ?

6. Мать требовала, чтобы сын писал письма чаще и старался выполнять следующие условия:

6.1. Все короткие письма должны быть написаны на голубой бумаге фиолетовыми чернилами.

6.2. Ты можешь мне написать длинные письма черными чернилами, если воспользуешься голубой бумагой.

6.3. Если письмо не будет длинным, то пиши фиолетовыми чернилами.

Однако ни одно из этих условий не было выполнено. Какие письма хотела получать мать и какие письма писал сын?

7. Можно было купить костюм: черный либо синий; шерстяной либо хлопчатобумажный; с красными полосками либо без них. При покупке костюма были высказаны следующие соображения:

7.1. Я согласен купить шерстяной или синий костюм только в том случае, если он будет с красной полоской.

7.2. Можно купить синий хлопчатобумажный костюм, если он будет с полоской. Если же костюм будет без полоски, то он должен быть черным, если он не шерстяной.

7.3. Если выберешь хлопчатобумажный костюм, то он должен быть черным с красной полоской. Но лучше купить синий костюм. Значит, он будет шерстяным с красной полоской.

Продавец сказал, что все эти требования могут быть сведены к трем простейшим, а из этих трех, он может выполнить только одно. Кроме того, он сказал, что придется выбрать либо шерстяной, либо синий хлопчатобумажный костюм. Какой костюм хотел купить покупатель? Какой костюм предложил продавец?

8. При покупке дыни или арбуза были высказаны следующие соображения:

8.1. Все большие плоды спелые.

8.2. Если ты купишь маленький плод, то это будет спелая дыня.

8.3. Дыню ты сможешь купить только при условии, что она будет спелой, хотя и маленькой. А мы хотим, чтобы ты купил большой плод. Значит, надо купить спелый арбуз.

Эти соображения сводятся к двум простейшим условиям. Выполнить удалось лишь одно. Кроме того, купленный плод оказался спелым. Какой плод был куплен, и что хотели купить?

9. Учитель сказал ученику:

9.1. Если у тебя есть определенные способности, то для успешной сдачи экзаменов тебе необходимо еще и трудолюбие.

9.2. Если у тебя способностей нет, то ты сможешь сдать экзамены только при условии, что ты будешь трудолюбив или увлечен учебой.

9.3. Я заметил нечто парадоксальное: отсутствие увлеченности учебой является у тебя необходимым условием наличия способностей и трудолюбия. Значит, ты экзамен не сдашь.

Ученик ответил, что согласен только с первым утверждением. К какой формулировке сводятся утверждения учителя. Как расшифровывается ответ ученика.

10. По поводу погоды были высказаны соображения:

10.1. Если будет жарко, то необходимым условием пасмурной погоды будет отсутствие ветра.

10.2. Пасмурное небо бывает только при холодной и безветренной погоде.

10.3. Если будет ветрено, то достаточным условием жаркой погоды будет ясное небо.

10.4. Если небо будет ясным, то погода будет холодной, если будет дуть ветер.

10.5. Пасмурное небо является необходимым условием ветреной и холодной погоды.

Первые три высказывания сводятся к двум простейшим условиям, из которых истинным будет только одно. Из четвертого и пятого истинным будет тоже только одно. Какая будет погода?

11. Сестра по поводу предполагаемого подарка высказала следующие предположения:

11.1. Чтобы зверек был черным и вредным, достаточно, чтобы это была кошка.

11.2. Если зверек будет белым, то, для того чтобы это была собака, достаточно чтобы он был послушным.

11.3. Если зверек будет вредным, то он может быть белым только тогда, когда это кошка.

11.4. Если это кошка, то она будет послушной, если она черная.

11.5. Зверек может быть собакой, если он послушный и черный.

Первые три высказывания свести к двум простейшим условиям, из которых истинно только одно. Из четвертого и пятого условия истинно тоже только одно. Какого зверька подарили сестре?

12. Дети знали, что отец купил либо яблоки, либо груши. Они высказали ряд предположений:

12.1. Если отец купил яблоки, то они будут спелыми только тогда, когда они красные.

12.2. Для того, чтобы плода были зелеными, достаточно, чтобы это были неспелые груши.

12.3. Все зеленые плоды – это неспелые яблоки.

12.4. Если отец купил яблоки, то для того, чтобы они были спелыми, необходимо, чтобы они были зелеными.

12.5. Все спелые яблоки всегда бывают красными.

Первые три предположения сводятся к двум простейшим условиям, из которых справедливо только одно. Из четвертого и пятого условий выполнено только одно. Какой была покупка?

13. Обсуждая погоду, дети высказывали следующие предположения:

13.1. Града не будет, если не будет ни снега, ни дождя.

13.2. Если снега не будет, то нельзя утверждать, что дождь идет тогда и только тогда, когда идет град.

13.3. Если будет дождь с градом, то снега не будет. Но снег все же пойдет. Значит, будет, либо дождь, либо град.

Эти предположения сводятся к двум простейшим условиям, из которых оказалось выполненным только одно. Кроме того, должно быть выполнено дополнительное условие: будет либо град, либо дождь со снегом. Какая была погода?

14. По поводу погоды были высказаны предположения:

14.1. Если погода будет пасмурной, то для того, чтобы было холодно, необходимо, чтобы дул ветер.

14.2. Если погода будет холодной, то не может быть, чтобы солнце светило только тогда, когда нет ветра.

14.3. Для того, чтобы было пасмурно и ветрено достаточно, чтобы было холодно. Но погода будет жаркой. Значит, пасмурно будет только тогда, когда нет ветра.

Известно, что эти предположения сводятся к двум простейшим условиям. Оказалось, что может быть выполнено лишь одно из этих условий. Кроме того, известно, что было либо жарко и безветренно, либо пасмурно и холодно. Какая была погода?

15. В коробке лежат шары: красные и зеленые, большие и маленькие, деревянные и пластмассовые. Из коробки надо достать шар, соблюдая условия:

15.1. Для того, чтобы шар был красным, достаточно, чтобы он был большим и пластмассовым.

15.2. Шар может быть пластмассовым только тогда, когда он маленький и красный.

15.3. Если шар деревянный, то для того, чтобы он был зеленым, достаточно, чтобы он был большим.

15.4. Если шар зеленый, то не может быть, чтобы он был большим и пластмассовым.

Известно, что эти условия сводятся к двум простейшим. Когда вынули шар, оказалось, что выполнено только одно из этих условий. Кроме того, вынутый шар был либо красным пластмассовым, либо зеленым и маленьким. Какой шар вынули из коробки?

16. В коробке лежат шары: деревянные и пластмассовые, большие и маленькие, зеленые и красные. Из коробки надо достать шар, соблюдая следующие правила:

16.1. Шар может быть деревянным только тогда, когда он маленький и зеленый.

16.2. Если шар маленький, то для того, чтобы он был пластмассовым, достаточно, чтобы он не был зеленым.

16.3. Если шар красный и маленький, то он деревянный.

Эти правила сводятся к двум простейшим условиям. Из двух условий оказалось возможным выполнить только одно. Кроме того, о вынутом шаре известно, что он либо зеленый, либо большой и деревянный. Какой шар вынули из коробки?

17. Школьники собрались в поход: либо в лес, либо на озеро. Погода могла быть либо жаркой, либо холодной; либо солнечной, либо пасмурной. В связи с этим были высказаны некоторые суждения:

17.1. Мы пойдем на озеро, если будет жарко и солнечно.

17.2. Чтобы пойти на озеро, достаточно, чтобы погода была солнечной. Но погода будет пасмурной. Значит, мы пойдем в лес, если будет холодно.

17.3. Если солнечная погода будет достаточным условием для похода в лес, нельзя утверждать, что поход на озеро является необходимым условием холодной погоды.

Эти условия сводятся к двум простейшим условиям, из которых может быть выполнено только одно. Кроме того, известно, что: либо было жарко и школьники пошли в лес, либо было холодно, но солнечно и они пошли на озеро.

Куда пошли школьники, и какой была погода?

18. По поводу приглашения друзей на день рождения были высказаны следующие предположения:

18.1. Если пригласим Володю, то надо пригласить и Андрея. А Сережу приглашать не надо.

18.2. Неверно, что Андрея или Володю, а также Сергея можно пригласить тогда и только тогда, когда будет приглашен или Сережа или Володя.

18.3. Нельзя пригласить ни Андрея, ни Володю.

Было решено в качестве инструкции взять не эти высказывания, а их отрицания. Кроме того, необходимо свести эти новые инструкции к простейшим условиям. Какие условия получились?

19. Были высказаны следующие предположения по поводу рыбалки:

19.1. Тихая погода и наличие лодки являются достаточным условием хорошего улова.

19.2. Хороший улов бывает только при тихой погоде. Значит, лодку брать не надо.

19.3. Если будет тихая погода, то невозможно, чтобы наличие лодки было необходимым условием плохого улова.

Эти высказывания сводятся к двум простейшим условиям. Кроме того, лодку достать не удалось, а из двух простейших условий выполненным оказалось только одно. Как прошла рыбалка?

20. О яблоках, лежащих в корзине, известно, что каждое из них либо большое, либо маленькое; либо сладкое, либо кислое; либо желтое, либо зеленое.

Из корзины надо взять яблоки, удовлетворяющие следующим условиям:

20.1. Сладкое яблоко надо взять только при условии, что оно большое и желтое.

20.2. Если яблоко большое, то сладкий вкус должен быть достаточным признаком желтого цвета.

20.3. Если яблоко зеленое, то для того, чтобы оно было кислым, необходимо, чтобы оно было маленьким.

Свести эти условия к двум простейшим и узнать, какие яблоки разрешено взять из корзины?

21. Относительно покупаемых цветов известно, что они могут быть либо астрами, либо гладиолусами; либо красными, либо фиолетовыми; либо светлыми, либо темными. Кроме того, заказанные цветы должны удовлетворять следующим условиям:

21.1. Если цветы будут темными, то они могут быть фиолетовыми только тогда, когда это гладиолусы.

21.2. Чтобы цветы были астрами, необходимо, чтобы они были светлыми и красными.

21.3. Если цветы будут красными, то для того, чтобы это были астры достаточно, чтобы они были темными.

21.4. Если цветы будут светлыми, то они могут быть фиолетовыми, если это астры.

21.5. Все фиолетовые светлые цветы являются гладиолусами.

Оказалось, что первые три условия сводятся к двум простейшим, из которых выполнить удалось только одно. Из четвертого и пятого условий тоже удалось выполнить только одно. Какие цветы были заказаны и какие цветы были куплены?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является приобретение навыков проверки правильности умозаключений с использованием различных формальных методов математической логики.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Метод прямого преобразования

Высказывание B есть *логическое следствие* высказываний $A_1, A_2, ..., A_m$, то есть, $A_1, A_2, ..., A_m \models B$, если для всякого распределения истинностных значений, приписываемых каждой из простых формул $P_1, P_2, ..., P_n$, входящих в одну или несколько из формул $A_1, A_2, ..., A_m$ и в формулу B, формула B получает значение истина всякий раз, когда каждое значение A_i получает значение истина.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Если будет потепление, то пойдет снег. Потепления не будет. Вывод: снега не будет.

На языке исчисления высказываний эти условия будут выглядеть так: $П \to С, \overline{П} \models \overline{С}$, где $П$ - потепление; $С$ - снег. Для проверки правильности умозаключения составим таблицу истинности

$П$	$С$	$П \to С$	$\overline{П}$	$\overline{С}$
И	*И*	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*И*	*И*

Из таблицы истинности следует, что умозаключение является неверным, так как не всякий раз истинность посылок приводит к истинности вывода.

Теорема 1.

1. $A \models B$ тогда и только тогда, когда импликация $A \to B$ является тавтологией.
2. $A_1, A_2, ..., A_m \models B$ тогда и только тогда, когда $A_1 A_2, ..., A_m \to B$ является тавтологией.

Теорема 2. Если импликация $A \to B$ является тавтологией, то умозаключение B будет правильным, то есть, $A \models B$.

Воспользуемся рассмотренными теоремами для доказательства правильности умозаключения. Рассмотрим пример. Будет пасмурная погода со снегом. Если будет снег, то будет и дождь. Если будет пасмурная погода с ветром, то дождя не будет. Вывод: ветра не будет.

На языке исчисления высказываний эти условия запишутся так $ПС, (С \to Д)(ПВ \to \overline{Д}) \models \overline{В}$, где $П$ - пасмурная погода; $С$ - снег; $В$ - ветер, $Д$ - дождь.

Докажем, что $ПС\,(С \to Д)(ПВ \to \overline{Д}) \to \overline{В}$ является тавтологией.

$$ПС(С \to Д)(ПВ \to \overline{Д}) \to \overline{В} = \overline{ПС(\overline{С} \vee Д)(\overline{ПВ} \vee \overline{Д})} \vee \overline{В} =$$
$$= \overline{П} \vee \overline{С} \vee С\overline{Д} \vee ПВД \vee \overline{В} = \overline{П} \vee \overline{В} \vee Д \vee \overline{С} \vee \overline{Д} = 1.$$

2.2. Метод семантических таблиц

Методы доказательства – это алгоритмические процедуры, посредством которых можно установить, является ли данное высказывание тавтологией. Основой для построения семантических таблиц является атомарная семантическая таблица, которая строится на основе законов исчисления высказываний.

$t\sigma$	$f\sigma$	$\begin{array}{c} t(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \\ \downarrow \\ t\sigma_1 \\ \downarrow \\ t\sigma_2 \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{f(\sigma_1 \wedge \sigma_2)} \\ \downarrow & \downarrow \\ f\sigma_1 & f\sigma_2 \end{array}$
$\begin{array}{c} t\overline{\sigma} \\ \downarrow \\ f\sigma \end{array}$	$\begin{array}{c} f\overline{\sigma} \\ \downarrow \\ t\sigma \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{t(\sigma_1 \vee \sigma_2)} \\ \downarrow & \downarrow \\ t\sigma_1 & t\sigma_2 \end{array}$	$\begin{array}{c} f(\sigma_1 \vee \sigma_2) \\ \downarrow \\ f\sigma_1 \\ \downarrow \\ f\sigma_2 \end{array}$
$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{t(\sigma_1 \to \sigma_2)} \\ \downarrow & \downarrow \\ f\sigma_1 & t\sigma_2 \end{array}$	$\begin{array}{c} f(\sigma_1 \to \sigma_2) \\ \downarrow \\ t\sigma_1 \\ \downarrow \\ f\sigma_2 \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{t(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)} \\ \downarrow & \downarrow \\ t\sigma_1 & f\sigma_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ t\sigma_2 & f\sigma_2 \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{f(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)} \\ \downarrow & \downarrow \\ t\sigma_1 & f\sigma_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ f\sigma_2 & t\sigma_2 \end{array}$

Пусть σ – высказывание. Обозначим через $t\sigma$ - утверждение “σ истинно”, а через $f\sigma$ - утверждение “σ ложно”. При этом – $t\sigma$ и $f\sigma$ называются помеченными формулами.

Вершинами семантической таблицы называются все помеченные формулы, встречающиеся в таблице. Вершина семантической таблицы называется *особой*, если она встречается как корень некоторой атомарной семантической таблицы. В противном случае вершина называется *обычной*.

Ветвь семантической таблицы называется *противоречивой*, если для некоторого высказывания помеченные формулы $t\sigma$ и $f\sigma$ являются вершинами этой ветви. Семантическая таблица называется *замкнутой,* если каждая непротиворечивая ее ветвь не содержит обычных вершин. В противном случае семантическая таблица называется *незамкнутой.*

Семантическая таблица *противоречива*, если каждая ее ветвь противоречива. Алгоритм построения семантической таблицы для выражения A:

Помещаем помеченную формулу tA или fA в корень.

Шаг n. Пусть мы уже построили семантическую таблицу T_n, $n \geq 1$.

Шаг $n+1$. Расширим семантическую таблицу T_n до семантической таблицы T_{n+1}. При этом мы пользуемся некоторой вершиной семантической таблицы T_n, которую в дальнейшем не будем использовать. Из всех обычных вершин T_n, ближайших к корню, выбираем самую левую. Обозначим выбранную вершину X .

К концу каждой непротиворечивой ветви семантической таблицы T_n мы присоединяем атомарную семантическую таблицу, имеющую корнем X. (При этом вершина X становится особой вершиной.) В результате получаем семантическую таблицу T_{n+1} (как правило, мы не записываем саму вершину X, так как она уже присутствует в каждой из рассматриваемых непротиворечивых ветвей).

Построение заканчивается, если каждая непротиворечивая ветвь не содержит обычных вершин.

Доказательством или выводом по Бету высказывания A называется замкнутая противоречивая семантическая таблица, в корне которой помещена помеченная формула fA. Замкнутая противоречивая таблица, имеющая в качестве корня tA, называется *опровержением по Бету* высказывания A.

Итак, если замкнутая семантическая таблица с fA *в корне противоречива (что означает, что мы всеми возможными способами пытались сделать высказывание* A *ложным и не сумели), то* A *- тавтология.*

Если не все ветви семантической таблицы противоречивы, то это свидетельствует о том, при некоторой комбинации значений атомов, входящих в исходное выражение, это выражение будет истинным, а при другой комбинации - ложным, то есть, выражение не является тавтологией.

На рис. 1 изображена семантическая таблица для выражения $(П \to С)\overline{П} \to \overline{С}$.

В построенной семантической таблице нет противоречивых ветвей, что свидетельствует о том, что не при какой комбинации значений атомов данное выражение не будет истинным.

$$
\begin{array}{ccc}
 & f((П \to С)\overline{П} \to \overline{С}) & \\
 & | & \\
 & t((П \to С)\overline{П}) & \\
 & | & \\
 & f\overline{С} & \\
 & | & \\
 & tС & \\
 & | & \\
 & t(П \to С) & \\
 & | & \\
 & t\overline{П} & \\
 & | & \\
 & fП & \\
| & & | \\
fП & & tС
\end{array}
$$

Рис. 1. Непротиворечивая семантическая таблица

В построенной семантической таблице (рис.1.) нет противоречивых ветвей, что свидетельствует о том, что не при какой комбинации значений атомов данное выражение не будет истинным.

Докажем методом семантических таблиц, что выражение $A = (ПС(С \to Д)(ПВ \to \overline{Д})) \to \overline{В}$ является тавтологией.

Помещаем в корень семантической таблицы fA, а затем, пользуясь атомарной семантической таблицей, раскроем последовательно функцию импликации, функцию отрицания, функцию конъюнкции и, наконец, оставшиеся функции импликации (рис. 2.).

Все ветви построенной семантической таблицы являются противоречивыми, следовательно, предположение о ложности рассматриваемого выражения является неверным, следовательно, данное выражение есть – тавтология.

$$f((\text{ПС}(C \to \text{Д})(\text{ПВ} \to \overline{\text{Д}})) \to \overline{B})$$

$$t((\text{ПС}(C \to \text{Д})(\text{ПВ} \to \overline{\text{Д}}))$$

$$f\,\overline{B}$$

$$tB$$

$$t(\text{ПС})$$

$$t(C \to \text{Д})$$

$$t(\text{ПВ} \to \overline{\text{Д}})$$

$$t\text{П}$$

$$tC$$

$$fC \qquad\qquad t\text{Д}$$

$$\oplus \qquad f(\text{ПВ}) \qquad t(\overline{\text{Д}})$$

$$f\text{П} \qquad fB \qquad\qquad f\text{Д}$$

$$\oplus \qquad \oplus \qquad\qquad \oplus$$

Рис. 2. Пример противоречивой семантической таблицы

2.3. Метод резолюций

Пропозициональные символы с отрицанием либо без отрицания, входящую в элементарную сумму (дизъюнкт), называют *литералами (литерами)* логики высказываний. Литеры L и $\overline{L}$ называют *контрарными.*

Резольвентой двух дизъюнктов $D_1 \vee L$ *и* $D_2 \vee \overline{L}$ называется дизъюнкт $D_1 \vee D_2$.

Теорема. *Резольвента является логическим следствием порождающих ее дизъюнктов, то есть,* $(D_1 \vee L)(D_2 \vee \overline{L})$ $\models D_1 \vee D_2$.

Метод резолюций доказательства невыполнимости формулы A состоит в том, что эта формула представляется в КНФ и к ней конъюнктивно присоединяются все возможные резольвенты ее дизъюнктов и получаемых в процессе доказательства резольвент. Полнота метода резолюций состоит в том, что он *гарантирует* получение для формулы A следствия *false*, если A невыполнима. Если же, перебрав все возможные резольвенты формулы A, мы не нашли пустую резольвенту, то A не является невыполнимой.

Вывод пустого дизъюнкта может быть наглядно представлен с помощью *дерева вывода*, вершинами которого являются или исходные дизъюнкты, или резольвенты, а корнем – пустой дизъюнкт.

Пусть задано множество дизъюнктов $S = \{P \vee Q,\ \overline{P} \vee Q,\ P \vee \overline{Q},\ \overline{P} \vee \overline{Q}\}$. Для заданного множества дизъюнктов дерево поиска представлено на рис. 3.

Пример 1. Доказать правильность логического вывода.

Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Вывод: я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить на танцы.

Введем следующие обозначения:

C - “Я пойду на первое занятие”;

G - “Я должен встать рано”;

D - “Я пойду на танцы”;

S - “Я лягу спать поздно”;

E - “Я могу обойтись пятью часами сна”.

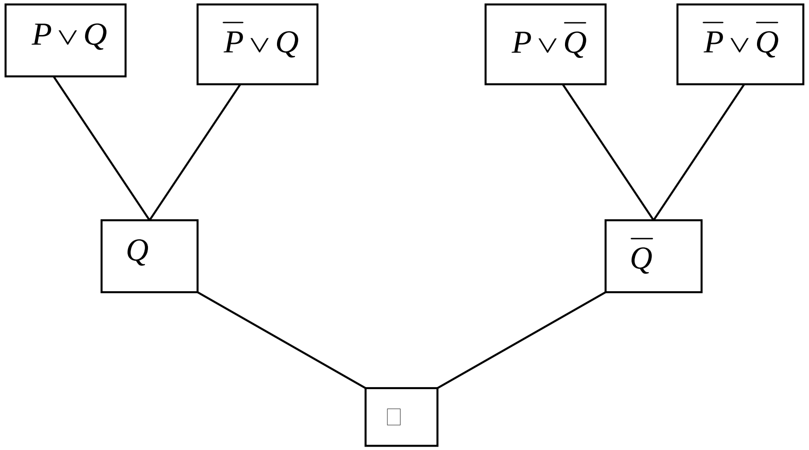

Рис. 3. Дерево поиска

Данной задаче соответствует следующее формальное описание: $(C \to G)(D \to S)$; $SG \to E$; $\overline{E} \models \overline{C} \vee \overline{D}$.

Так как доказательство проводится методом от противного, то вывод берется с отрицанием. Исходные посылки и вывод, взятый с отрицанием, представим в виде множества дизъюнктов и будем формировать возможные резольвенты с целью получения нулевой резольвенты.

1. $\overline{C} \vee G$;
2. $\overline{D} \vee S$;
3. $\overline{S} \vee \overline{G} \vee E$;
4. $\overline{E}$;
5. C;
6. D ;
7. G (1,5);
8. S (2,6);
9. $\overline{S} \vee \overline{G}$ (3,4);
10. $\overline{S}$ (7,9).
11. Нулевая резольвента (□) (8,10).

Получение нулевой резольвенты свидетельствует о невыполнимости исходной формулы, то есть, мы пытались всеми возможными методами подтвердить ложность вывода, но нам это не удалось. Следовательно, вывод является правильным.

Как следует из этого примера, формирование резольвент не является однозначной процедурой.

Существует много различных подходов к реализации метода резолюций, которые позволяют формализовать этот процесс.

2.3.1. Метод насыщения уровня

Метод насыщения уровня состоит в вычислении всех резольвент всех пар дизъюнктов из множества дизъюнктов S, добавлении этих резольвент к множеству S, вычислении всех следующих резольвент и повторении этого процесса, до тех пор, пока не найдется пустой дизъюнкт □.

Проиллюстрируем рассмотренный метод на примере множества дизъюнктов $S^0 = \{P \vee Q, \overline{P} \vee Q, \overline{P} \vee \overline{Q}, \overline{P} \vee \overline{Q}\}$

S^0 : 1. $P \vee Q$

2. $\overline{P} \vee Q$

3. $P \vee \overline{Q}$

4. $\overline{P} \vee \overline{Q}$

S^1:	5. Q	(1,2)
	6. P	(1,3)
	7. $Q \vee \overline{Q}$	(1,4)
	8. $P \vee \overline{P}$	(1,4)
	9. $Q \vee \overline{Q}$	(2,3)
	10. $P \vee \overline{P}$	(2,3)
	11. $\overline{P}$	(2,4)
	12. $\overline{Q}$	(3,4)
S^2:	13. $P \vee Q$	(1,7)
	14. $P \vee Q$	(1,8)
	15. $P \vee Q$	(1,9)
	16. $P \vee Q$	(1,10)
	17. Q	(1,11)
	18. P	(1,12)
	19. Q	(2,6)
	20. $\overline{P} \vee Q$	(2,7)
	21. $\overline{P} \vee Q$	(2,8)
	22. $\overline{P} \vee Q$	(2,9)
	23. $\overline{P} \vee Q$	(2,10)
	24. $\overline{P}$	(2,12)
	25. P	(3,5)
	26. $P \vee \overline{Q}$	(3,7)
	27. $P \vee \overline{Q}$	(3,8)

28. $P \vee \overline{Q}$	(3,9)
29. $P \vee \overline{Q}$	(3,10)
30. $\overline{Q}$	(3,11)
31. $\overline{P}$	(4,5)
32. $\overline{Q}$	(4,6)
33. $\overline{P} \vee \overline{Q}$	(4,7)
34. $\overline{P} \vee \overline{Q}$	(4,8)
35. $\overline{P} \vee \overline{Q}$	(4,9)
36. $\overline{P} \vee \overline{Q}$	(4,10)
37. Q	(5,7)
38. Q	(5,9)
39. Нулевая резольвента (□)	(5,12)

Этот пример наглядно демонстрирует, что при использования метода насыщения уровня генерируется много повторяющихся дизъюнктов, а также дизъюнктов, являющихся тавтологиями. Так как тавтология всегда истинна, то вычеркивая ее из невыполнимого множества дизъюнктов, мы сохраняем невыполнимость множества дизъюнктов.

Для сокращения избыточности могут использоваться различные стратегии, например, стратегия вычеркивания.

2.3.2. Стратегия вычеркивания

Дизъюнкт D называется *поддизъюнктом* D^* (или D поглощает D^*), если D является некоторой частью дизъюнкта D^*. При этом D^* называется *наддизъюнктом* для D. Например, если $D = P$, $D^* = P \vee Q$, то D - поддизъюнкт, а D^* наддизъюнкт для D.

Стратегия вычеркивания зависит от того, как удаляются из множества, полученного методом насыщения уровня, тавтологии и наддизъюнкты. Стратегия вычеркивания будет полной, если ее использовать вместе с методом насыщения уровня таким способом: сперва выписываются все дизъюнкты $(S^0 \vee S^1 \vee ... \vee S^{n-1})$ по порядку; затем вычисляются резольвенты путем сравнения каждого дизъюнкта $D_i \in (S^0, S^1, ..., S^{n-1})$ с дизъюнктом $D_k \in S^{n-1}$, который стоит после D_i. Если эта резольвента не тавтология и не поглощается каким-нибудь дизъюнктом из списка, то она записывается в конец списка. В противном случае она вычеркивается. Очевидно, при этом не выписывается повторно один и тот же дизъюнкт. Применение метода резолюций к примеру, рассмотренному в методе насыщения, дает следующий результат:

S^0: 1. $P \vee Q$

2. $\overline{P} \vee Q$

3. $P \vee \overline{Q}$

4. $\overline{P} \vee \overline{Q}$

S^1:	5. Q	(1,2)
	6. P	(1,3)
	7. $\overline{P}$	(2,4)
	8. $\overline{Q}$	(3,4)

S^2 Нулевая резольвента (□) (5,8)

Однако этот метод, уменьшая затраты памяти для реализации, увеличивает количество вычислений, поскольку помимо генерации всех дизъюнктов необходимо проверять,

являются ли полученные дизъюнкты тавтологиями или поддизъюнктами других дизъюнктов. Для уменьшения количества вычислений могут быть использованы следующие методы: метод семантической резолюции, лок-резолюции, линейной резолюции.

2.3.3. Метод лок- резолюции

Суть метода лок-резолюции состоит в использовании индексов для упорядочения литер в дизъюнктах из данного множества S дизъюнктов. Для каждого вхождения литеры в S вводится некоторое целое число. Разные вхождения одной и той же литеры могут быть индексированы по-разному. Разрешается удалять только литеры с наименьшим индексом в каждом из дизъюнктов. Литеры в резольвентах наследуют свои индексы из посылок. Если литера в резольвенте может унаследовать более одного индекса, то ей ставится в соответствие наименьший индекс. Рассмотрим следующие два дизъюнкта

${}_1P \vee {}_2Q$ (1)

${}_3\overline{P} \vee {}_4Q$ (2)

Так как индекс 1 в ${}_1P$ ниже, чем индекс 2 в ${}_2Q$, то удаляется ${}_1P$. Аналогично, так как индекс 3 в ${}_3\overline{P}$ ниже, чем индекс 4 в ${}_4Q$, то можно удалить ${}_3\overline{P}$. Применяя правило резолюции к дизъюнктам (1) и (2) по ${}_1P$ и ${}_3\overline{P}$ получаем

${}_2Q \vee {}_4Q$ (3)

Литера ${}_2Q$ и ${}_4Q$ одна и та же. Так как индекс 2 меньше индекса 4, то оставляем

${}_2Q$ (4)

Дизъюнкт (4) называется *лок-резольвентой* дизъюнктов (1) и (2).

Под *лок-резолюцией* понимается последовательное получение лок-резольвент из данного множества дизъюнктов и вновь получаемых дизъюнктов.

Рассмотрим применение метода лок-резолюции для еще одного примера, рассмотренного в методе насыщения и методе вычеркивания:

1. $P \vee Q$
2. $P \vee \overline{Q}$
3. $\overline{P} \vee Q$
4. $\overline{P} \vee \overline{Q}$

Проиндексируем вхождение каждой литеры в S:

1. ${}_1P \vee {}_2Q$
2. ${}_3P \vee {}_4\overline{Q}$
3. ${}_6\overline{P} \vee {}_5Q$
4. ${}_8\overline{P} \vee {}_7\overline{Q}$

Из дизъюнктов(1)-(4) можно получить только одну лок-резольвенту

5. ${}_6\overline{P}$ (3,4)

Из дизъюнктов (1)-(5) получаются только две лок-резольвенты

6. ${}_2Q$ (1,5)
7. ${}_4\overline{Q}$ (2,5)
8. Нулевая резольвента (□) (6,7)

Применяя правило резолюции к дизъюнктам (6) и (7), получаем пустую резольвенту.

Таким образом, для получения нулевой резольвенты были сгенерированны только три лок-резольвенты.

Результативность лок-резолюции не зависит от способа индексации литер. Изменим порядок индексации

1. ${}_1P \vee {}_2Q$
2. ${}_3P \vee {}_4\overline{Q}$
3. ${}_5\overline{P} \vee {}_6Q$
4. ${}_7\overline{P} \vee {}_8\overline{Q}$

Из (1) и (3) получаем:

5. ${}_2Q$ (1,3)
6. ${}_2Q \vee {}_8\overline{Q}$ (1,4)
7. ${}_6Q \vee {}_4\overline{Q}$ (2,3)
8. ${}_4\overline{Q}$ (2,4)
9. . Нулевая резольвента (□) (5,8)

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Задание 1

Проверить правильность логического вывода методом прямого преобразования, методом семантических таблиц, методом резолюций и методом лок-резолюций.

1. Работа автоматического устройства, имеющего три клапана A, B *и* C, удовлетворяет следующим условиям: если не срабатывают клапаны A или B или оба вместе, то срабатывает клапан C; если срабатывают клапаны A или B или оба вместе, то не срабатывает клапан C. Следовательно, если срабатывает клапан C, то не срабатывает клапан A.

2. Намеченная атака удастся, если только захватить противника врасплох или же если позиции его плохо защищены. Захватить его врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Вывод: атака не удастся.

3. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же будем

продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжиться перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то будет продолжаться перепроизводство.

4. В бюджете возникнет дефицит, если не повысятся пошлины. Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся. Значит: если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

5. Если шесть - составное число, то 12 - составное число; если 12 - составное число, то существует простое число, большее, чем 12. Если существует простое число, большее 12, то существует составное число, большее 12. Если 6 делится на 2, то 6 составное число. Число 12 составное. Вывод: 6 составное число.

6. Если 2 - простое число, то это наименьшее простое число. Если 2 - наименьшее простое число, то 1 не есть простое число. Число 1 не есть простое число. Следовательно, 2 - простое число.

7. Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда дом будет закончен в феврале. Если дом будет закончен в феврале, то мы можем переезжать 1-го марта. Если мы не сможем переехать 1-го марта, то мы должны внести квартирную плату за март. Если контракт не выполнен, то мы должны внести квартирную плату за март. Вывод: мы не будем вносить плату за март.

8. Относительно некоторого числа известно, что оно делится на 6 или же делится на 15. Но, если это число делится на 6,то оно делится на 2. А если это число делится на 15, то оно делится на 5. Если же оно делится на 2 и 5, то оно делится на 10. Вывод: число делится на 10.

9. Если мальчик не пойдет в кино, то он будет смотреть телевизор или пойдет к друзьям. Если же он пойдет к друзьям, то он не пойдет в кино. А если он пойдет в кино, то он не приготовит уроки. Если же он приготовит уроки, то будет смотреть телевизор. Вывод: если мальчик выполнит уроки, то он не пойдет в кино, то он не пойдет и к своим друзьям.

10. Относительно некоторого числа известно, что оно делится либо на 12, либо на 15. Но, если это число делится на 12, то оно делится на 3. А если это число делится на 15, то оно тоже делится на 3. Вывод: это число делится на 3.

11. Надо купить рубашку, которая может быть или белой, или голубой или розовой. Если будет куплена голубая или розовая рубашка, то она будет шерстяной. Если же будет куплена льняная или шерстяная рубашка, то она будет белой или голубой. Вывод: если будет куплена голубая рубашка, то она будет шерстяной.

12. Несколько друзей решили пойти на озеро или на речку. Известно, что на озеро они не пойдут только тогда, когда погода будет пасмурной. Если же они на озеро пойдут, то будут кататься на лодке. Известно также, что если они при пасмурной погоде пойдут на речку, то кататься в лодке не придется. Вывод: погода была пасмурной, но друзья все катались на лодке.

13. Если я пойду завтра на первые занятия, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Вывод: я должен или пропустить завтра первое занятие, или ходить на танцы.

14. Если завтра будет холодно, я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто.

15. Если исход скачек будет предрешен сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Следовательно, исход скачек не предрешен сговором.

16. Надо купить либо яблоки, либо груши. При этом надо учесть следующее: не может быть, чтобы все большие груши были спелыми. Все спелые яблоки – большие. Если будут куплены груши, то они будут или неспелыми, или небольшими. Вывод: если будут куплены яблоки, то они будут большими и сладкими.

17. Я могу поехать или утренним, или вечерним поездом. Если я поеду вечерним поездом, то опоздаю. А, если я поеду утренним поездом, то надо будет сделать пересадку. Если же я сделаю пересадку, то я опоздаю. Вывод: значит, я опоздаю.

18. Если будет идти снег, то машину трудно будет вести. Если трудно будет вести машину, то я опоздаю, если не выеду пораньше. Я не могу опаздывать. Идет снег. Вывод: я должен выехать пораньше.

19. Борщ всегда бывает вкусным. Если же выбранное блюдо невкусно, то это не харчо. Я могу купить борщ или харчо. Вывод: выбранное блюдо – вкусное.

20. В вазе лежит только одно яблоко. Известно, что оно или красное, или зеленое. Если это яблоко красное и большое, то оно сладкое. Если же это яблоко зеленое и не сладкое, то оно не большое. Выяснилось, что это яблоко сладкое. Вывод: если это яблоко не большое и не красное, то оно зеленое.

21. Либо будет снег, либо дождь. Погода будет пасмурная и ветреная. не пасмурной. Ветряная, дождливая погода бывает только при пасмурной погоде. Вывод: будет ветреная погода с дождем или снегом.

22. Мы должны подняться на гору. Но, если мы поднимемся на гору, то там мы сможем попить только в том случае, если у нас будет вода. А, чтобы иметь воду, необходима фляга. У нас нет фляги. Вывод: мы не сможем попить воды на горе.

23. Поставленную задачу я смогу решить только в том случае, если будет выполнено хотя бы одно из следующих двух условий: или мне должен помочь товарищ, или же я должен прочитать одну толстую книгу. Но, чтобы прочитать эту книгу, надо знать английский язык. Я не знаю английского языка. А задачу я должен решить. Вывод: мне должен помочь товарищ.

24. Будет пасмурная погода со снегом. Если будет снег, то будет и дождь. Если будет пасмурная погода с ветром, то дождя не будет. Вывод: ветра не будет.

25. На день рождения было решено купить астры или георгины. Было также решено, что купленные цветы должны быть светлыми и красными. В магазине выяснилось, то все светлые астры не красные. Вывод: были куплены георгины

26. Известно, что посетитель буфета взял или кефир, или молоко, или сок. Если он взял кефир или молоко, то взятый им напиток был холодный. Если же он взял не холодный напиток, то это не сок. Вывод: посетитель взял холодный напиток.

27. Если мы не будем тренироваться, мы не научимся играть в волейбол. Если же мы не научимся играть в волейбол, то мы не победим. Мы поедим в Москву. А, если мы хотим поехать в Москву, то надо победить. Вывод: мы будем тренироваться.

28. Если мы хотим попасть в старый замок, то мы должны идти туда длинной или короткой дорогой. Но по длинной дороге пройти нельзя. Если же мы пойдем по короткой дороге, то надо перебраться через речку. Мы не

умеем плавать. А чтобы перебраться через речку, надо уметь плавать. Вывод: мы не сможем попасть в замок.

29. Заработная плата возрастет только, если будет инфляция. Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни. Заработная плата возрастет. Следовательно, увеличится стоимость жизни.

30. Или Сергей и Борис одного возраста, или Сергей старше брата. Если Сергей и Борис одного возраста, то Николай и Борис не одного возраста. Если Сергей старше Бориса, то Борис старше Олега. Следовательно, или Николай и Борис не одного возраста, или Борис старше Олега.

31. Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенную встречу. Если я пропущу назначенную встречу и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу эту работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я не получу эту работу.

32. Если Иванов победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной кампании. Но если он провалится на выборах, то потеряет доверие партии. Он плохой борец в предвыборной кампании, если он потеряет доверие партии. Если он плохой борец в предвыборной кампании, ему следует выйти из партии. Иванов или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему нужно выйти из партии.

33. Профсоюзы будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

34. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или я пойду на лыжах. Если я пойду на

лыжах, то лучше поехать за город, а если я буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

35. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

36. Или Петр и Иван братья, или они однокурсники. Если Петр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья. Если Петр и Иван однокурсники, то Иван и Михаил тоже однокурсники. Следовательно, или Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил однокурсники.

37. Футбольная команда либо выиграет матч, либо проиграет, либо сведет его к ничьей. Если матч выигран или проигран, то он не перенесен. Команда матч не выиграла и не свела его к ничьей. Следовательно, матч не был перенесен, а был проигран.

Задание 2

Доказать с использованием метода прямого преобразования и метода семантических таблиц, что следующие выражения являются тавтологиями.

1. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;
2. $(AB)C \leftrightarrow A(BC)$;
3. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$;
4. $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$;
5. $A \vee (B\overline{B}) \leftrightarrow A$;
6. $A(B \vee \overline{B}) \leftrightarrow A$;

7. $A(B\vee C)\leftrightarrow AB\vee AC$;

8. $A\vee(BC)\leftrightarrow(A\vee B)(A\vee C)$;

9. $\overline{A\vee B}\leftrightarrow\overline{A}\,\overline{B}$;

10. $\overline{AB}\leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}$;

11. $(A(A\to B))\to B$;

12. $((AB)\to C)\leftrightarrow(A\to(B\to C))$;

13. $((A\to B)(A\to C))\to(A\to(BC))$;

14. $((A\to C)(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$;

15. $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow((AB)\vee(\overline{A}\,\overline{B}))$.

Задание 3

Проверить правильность логического вывода, используя метод прямого преобразования, метод семантических таблиц, метод резолюций и метод лок-резолюций.

1. $A\vee B;\ A\to C;\ B\to D\models C\vee B$;

2. $W\vee P\to J;\ J\to C\vee S;\ S\to U;\ \overline{C}\,\overline{U}\models\overline{W}$;

3. $A\to(B\to C);\ D\vee A;\ \overline{D}\models D\to C$;

4. $A\to B;\ \overline{(B\vee C)}\models\overline{A}$;

5. $(AB)\vee(CD);\ A\to\overline{A}\models C$;

6. $A\to B;\ C\to B;\ D\to A\vee C;\ D\models B$;

7. $A\to(C\to B);\ \overline{D}\vee A;\ C\models D\to B$;

8. $\overline{A}\vee B;\ C\to\overline{B}\models A\to\overline{C}$;

9. $A\to(B\to C);\ (CD)\to E;\ \overline{F}\to(D\overline{E})\models A\to(B\to F)$;

10. $A\vee B\to CD;\ D\vee E\to F\models A\to F$;

11. $A\to(BC);\ \overline{B}\vee D;\ (E\to\overline{F})\to\overline{D};\ B\to(A\overline{E})\models B\to E$;

12. $(A\to B)(C\to D);\ (B\to F)(D\to E);\ \overline{EF};$ $A\to C\models\overline{A}$;

13. $AC;\ (C\to D);\ (AB\to\overline{D})\models\overline{B}$;

14. $F\to G;\ K\to\overline{H};\ H\vee\overline{G}\models F\to\overline{K}$;

15. $F\to(\overline{K}\to M);\ \overline{H}L\to\overline{Q};\ Q\to F\models FL\to\overline{M}$;

16. $A\to B\vee C;\ C\vee D;\ \overline{D}\models A\to B$;

17. $A\vee B\vee\overline{C};\ A\to D;\ B\to E;\ C\models D\vee E$;

18. $A\to BC;\ B\to D\vee E;\ C\to D;\ \overline{D}\models A\to E$;

19. $A\to B;\ B\to C;\ D\to E\vee A\models D\to E$;

20. $A\overline{B}\vee C;\ B\to D;\ C\to A\models A\to D$;

21. $A\to B;\ B\to C;\ C\to D\vee E\models A\to D$;

22. $A\vee B\vee C;\ A\to D;\ B\to D\vee E;\ \overline{E}\models C\to D$;

23. $(A\vee B);\ (A\to C);\ (B\to D);\ (CD\to E)\models E$;

24. $A\overline{B}\vee\overline{A}B;\ (A\to C)(B\to C)\models C$;

25. $A\to B;\ C\to D,\ A\vee C\models BD$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Лихтарников Л.М. Математическая логика и теория алгоритмов / Л.М. Лихтарников. Т.Г., Сукачева. М.: Факториал, 2000. 420 с.

2. Метакидес Г. Принципы логики и логического программирования / Г. Метакидес, А. Нероуд. М.: Факториал. 1998. 450 с.

3. Карпов Ю.Г. Теория автоматов / Ю.Г. Карпов. М.: Питер.2002. 435 с.

4. Холопкина Л.В. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для вузов / Л.В. Холопкина. Воронеж: ВГТУ, 2008. 162 с.

5. Мадер В.В. Школьнику об алгебре логики / В.В. Мадер. М.: Просвещение. 1993. 240 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ 1- 3 по дисциплине
“Математическая логика и теория алгоритмов”
для студентов специальности 230101
очной, сокращенной очной, заочной и заочной сокращенной
форм обучения

Составители:
Холопкина Людмила Владимировна
Носачева Майя Павловна

В авторской редакции

Подписано в печать 18.03.2014.
Формат 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 3,1. Уч.- изд.л. 2,9. Тираж 150 экз.”С”.
Зак. №

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14