МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

А.Г. Москаленко Т.Л. Тураева
Е.П. Татьянина С.А. Антипов

ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Утверждено учебно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 531.3(07)
ББК 22.313я73

Практикум по физике. Электродинамика: учеб. пособие / А.Г. Москаленко, Т.Л. Тураева, Е.П. Татьянина, С.А. Антипов. Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. 173 с.

В учебном пособии представлены краткая теория, основные типы и методы решения физических задач по электродинамике. Дается разбор задач различного уровня сложности с подробным описанием приемов и способов их решения. Задачи для самостоятельной работы соответствуют как базовому, так и повышенному уровню сложности.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по всем техническим направлениям.

Ил. 91. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра физики ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. Санин);
д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.Е. Калинин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика является базовой учебной дисциплиной в ВУЗе для технических направлений подготовки. В освоении физики, формировании соответствующих компетенций, приобретении необходимых знаний, умений и навыков значительное место занимает практика решения физических задач. Только в процессе решения задач развивается физическое мышление, достигается глубокое понимание теории, обретается умение и способность анализировать изучаемые явления, выделяя главные факторы и отбрасывая несущественные. Именно умение решать задачи, по нашему мнению, является определяющим при оценке учебной деятельности студентов. При этом приобретение такого умения и приобщение студентов к самостоятельной творческой работе требует необходимого методического обеспечения.

Методике решения физических задач, их анализу, выбору оптимальных приемов и способов решения посвящено данное учебное пособие. Многообразие физических явлений и законов не предполагает наличие общего подхода и какой-то единой методики решения задач. Однако вполне возможно и целесообразно дать некоторые методические рекомендации к решению целого ряда конкретных типов задач. Полезно выделить важнейшие темы и типовые подходы к формированию физических моделей и их аналитическому описанию.

Настоящее пособие посвящено одному из основных разделов дисциплины – «Электродинамике». «Электродинамика» является значительным и по содержанию и по объему разделом курса общей физики. При изложении этой части физики у студентов вузов возникают серьезные трудности, обусловленные существенным отставанием изложения вопросов интегрального исчисления в курсе высшей математики от применения их в преподавании физики.

В начале каждой темы приводятся основные уравнения, формулы и законы, которые используются при решении задач. Затем выделяются типы задач и методы их решения. Задачи, рассматриваемые в качестве примеров и предлагаемые для самостоятельного решения, взяты, в основном, из стандартных задачников, рекомендованных министерством образования. Их перечень представлен в библиографическом списке.

Существенно и то, что в пособии представлены задачи различного уровня сложности, что позволяет формировать индивидуальные траектории обучения и учитывать особенности изучения физики для различных профилей обучения. В приложении к пособию представлен справочный материал, а также кратко рассмотрены отдельные вопросы векторной алгебры, начальные понятия дифференциального и интегрального исчисления. Данные сведения из курса математики должны способствовать лучшему пониманию приводимых решений и математических преобразований без обращения к пособиям по математике.

1. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Основные понятия, уравнения и формулы

- Сила и плотность электрического тока

Сила тока – количественная мера электрического тока, равная заряду, переносимому сквозь рассматриваемую поверхность за единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt},\ [I] = 1A\ \text{(Ампер)}.$$

Плотность тока – отношение силы тока через элементарную площадку, перпендикулярную направлению движения носителей, к ее площади

$$j = \frac{dI}{dS_n},\ [j] = 1\frac{A}{м^2}.$$

Плотность тока это вектор $\vec{j}$, направление которого совпадает со скоростью упорядоченного движения положительных зарядов. Сила тока величина скалярная, за положительное направление тока принимается направление движения положительных зарядов.

$$I = \int_S j_n dS,\ j_n = j \cdot \cos\alpha .$$

- Плотность тока в металлическом проводнике

$$\vec{j} = en\langle\vec{\upsilon}\rangle,$$

где e – заряд электрона; n – концентрация электронов; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения электронов (скорость дрейфа).

- Общая формула, определяющая сопротивление проводников,

$$R = \int_1^2 \rho \cdot \frac{d\ell}{S} \qquad [R] = \text{Ом},$$

где $d\ell$ – элемент длины проводника, S – площадь поперечного сечения, ρ - удельное сопротивление материала ($[\rho] = Ом \cdot м$).

Сопротивление однородного проводника, площадь сечения которого одинакова по всей длине,

$$R = \rho \frac{\ell}{S}.$$

Зависимость сопротивления от температуры

$$R = R_0(1 + \alpha t),$$

где R и R_0 – сопротивление проводника при t и 0^0 C, $\alpha = 1/273$ К$^{-1}$ – температурный коэффициент сопротивления (для чистых металлов при не очень низких температурах).

- Сторонние силы, ЭДС, напряжение.

Постоянный электрический ток в замкнутой цепи возможен лишь при наличии сил не электростатического происхождения F^*, называемых сторонними силами. Действие сторонних сил характеризуется работой, которую они совершают по перемещению заряда в цепи

$$A^* = \oint_L F_\ell^* d\ell = \oint_L qE_\ell^* d\ell,$$

где E^* – напряженность поля сторонних сил.

ЭДС, действующая в цепи и равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, представляет собой циркуляцию вектора напряженности сторонних сил

$$\mathscr{E} = \frac{A^*}{q} = \oint_L E_\ell^* d\ell.$$

Напряжение на участке цепи – физическая величина, определяемая работой электростатических и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 E_\ell d\ell + \int_1^2 E_\ell^* d\ell = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}_{12}$$

• Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной и интегральной форме. Однородный участок – участок проводника, в котором не действуют сторонние силы.

Дифференциальная форма $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}$,

интегральная форма $I = \frac{\int_1^2 E_\ell d\ell}{R} = \frac{U_{12}}{R}$,

где E - напряженность электрического поля, $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – напряжение на однородном участке цепи, R - сопротивление участка цепи, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – удельная проводимость материала проводника.

• Обобщенный закон Ома в дифференциальной и интегральной форме для неоднородного участка цепи

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}^* + \vec{E}),$$

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}}{R},$$

где $\vec{E}^*$ – напряженность поля сторонних сил, действующих на этом участке, $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка, $\mathcal{E}_{12}$ – ЭДС на данном участке цепи. ($\mathcal{E}_{12} > 0$, если ЭДС способствует движению положительных зарядов, $\mathcal{E}_{12} < 0$ - если ЭДС препятствует их движению).

• Работа и мощность тока.

Работа тока

$$A = \int_1^2 UIdt.$$

Мощность, развиваемая током на участке цепи

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

- Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах

$$w = jE = \sigma \cdot E^2,$$

$$Q = \int_1^2 I^2(t) R dt,$$

где $w = \dfrac{dQ}{dt \cdot dV}$ – удельная тепловая мощность, т.е. количество теплоты, приведенное к единице времени и единице объема проводника.

- Правила Кирхгофа.

Первое правило – алгебраическая сумма токов сходящихся в узле равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Токи, входящие в узел, условно считают положительными, выходящие из узла – отрицательными.

Второе правило – в произвольном замкнутом контуре цепи алгебраическая сумма падений напряжений (произведений сил токов на сопротивление соответствующих участков) равна алгебраической сумме ЭДС

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k.$$

Токам и ЭДС следует предписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода контура.

1.2. Основные типы задач и методы их решения

1. Электрический ток в металлах. Определение средней скорости упорядоченного движения электронов, силы и плотности тока, напряженности электрического поля

Метод решения. В классической теории электропроводности металлов полагается, что электроны проводимости в металлах ведут себя подобно молекулам идеального газа. В отсутствии электрического поля они, в промежутках между соударениями с ионами кристаллической решетки, хаотически движутся со средней скоростью теплового движения. При включении внешнего электрического поля электроны начинают двигаться с ускорением, приобретая за среднее время свободного пробега $<\tau>$ дополнительную скорость

$$<\upsilon_{\max}>=a<\tau>=\frac{eE}{m}<\tau>.$$

Принимая, что в результате столкновения с ионами решетки электроны останавливаются, их результирующее движение можно представить как направленный дрейф со средней скоростью

$$<\upsilon>=\frac{<\upsilon_{\max}>}{2}=\frac{eE}{2m}<\tau>.$$

Учитывая, что $<\tau>=\dfrac{<\lambda>}{<\upsilon_T>}$, получим выражение для средней скорости упорядоченного движения электронов в металле

$$<\upsilon>=\frac{eE<\lambda>}{2m<\upsilon_T>},$$

где $<\lambda>$ – средняя длина свободного пробега, $<\upsilon_T>$ – средняя скорость теплового движения. Плотность возникающего при этом тока определяется выражением

$$j = en < \upsilon > = \frac{e^2 n < \lambda >}{2m < \upsilon_T >} E .$$

Введя обозначение

$$\sigma = \frac{e^2 n < \lambda >}{2m < \upsilon_T >} ,$$

получим закон Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E ,$$

где σ – удельная проводимость проводника.

Применение формул для заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, и силы тока в проводнике, в которых плотность тока определяется через скорость упорядоченного движения электронов или через удельную проводимость проводника, позволяет решать все задачи данного типа.

Примеры решения задач

Задача 1. Допустимая сила тока в алюминиевой проволоке площадью сечения $S = 1\,мм^2$ равна I_{max} = 8 *А*. При этом электроны проводимости имеют среднюю скорость дрейфа $\langle \upsilon \rangle = 0{,}28$ *мм/с*. Определить количество электронов проводимости, приходящееся на один атом алюминия.

Решение

Максимальная плотность тока в алюминиевой проволоке

$$j_{\max} = \frac{I_{\max}}{S} .$$

Тогда максимальная концентрация электронов проводимости

$$n_{\mathrm{e}} = \frac{j_{\max}}{e\langle \upsilon \rangle} ,$$

где e – заряд электрона.

Для нахождения концентрации атомов алюминия n_{am} воспользуемся понятием плотности

$$\rho = m_0 n_{am},$$

где $m_0 = A / N_A$ – масса атома алюминия, A – атомная масса, N_A – число Авогадро.

Отсюда

$$n_{am} = \frac{\rho N_A}{A}.$$

Следовательно, число свободных электронов, приходящихся на один атом алюминия, выражается формулой

$$\eta = \frac{n_e}{n_{am}} = \frac{j_{max} A}{e\rho N_A \langle \upsilon \rangle}.$$

Используя табличные данные для алюминия $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, $A = 27 \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*, получим $\eta = 3$.

Задача 2. Какова скорость дрейфа свободных электронов внутри медного проводника длиной 1 *м*, на концах которого поддерживается разность потенциалов 0,01 *В*? Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Решение

Согласно закону Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E = \frac{1}{\rho} E,$$

где ρ – удельное сопротивление меди.

Выражая напряженность электрического поля через напряжение, поддерживаемое на концах проводника, получим

$$j = \frac{U}{\rho \ell}.$$

С другой стороны

$$j = e n_e \langle \upsilon \rangle.$$

По условию задачи концентрация свободных электронов совпадает с концентрацией атомов, т. е.

$$n_e = n_{am} = \frac{\mathrm{DN_A}}{\mathrm{A}},$$

где D – плотность меди, A – атомная масса, N_A – число Авогадро.

На основании данных формул получим скорость дрейфа свободных электронов

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{AU}{e\rho D N_A \ell}.$$

Произведя вычисления, найдем

$$\langle \upsilon \rangle = 2{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

Задача 3. По прямому медному проводу длиной $\ell = 1000$ *м* и сечением $S = 1{,}0$ *мм*^{2} течет ток $I = 4{,}5$ *А*. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, найти:

а) время, за которое электрон переместится от одного конца провода до другого;

б) сумму электрических сил, действующих на все свободные электроны в данном проводе.

Решение

Скорость направленного движения свободных электронов для медного проводника получим из уравнения

$$en\langle \upsilon \rangle = \frac{I}{S},$$

откуда

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{I}{enS}.$$

Время перемещения отдельного электрона с одного конца проводника на другой равно

$$t = \frac{\ell}{\langle \upsilon \rangle} = \frac{en\ell S}{I}.$$

По условию задачи концентрация электронов равна концентрации атомов, следовательно

$$n = \frac{D}{m_a} = \frac{D}{A/N_A} = \frac{DN_A}{A},$$

где $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность меди, m_a – масса атома меди, $A = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – атомная масса меди, $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

Итак, для времени перемещения электрона от одного конца провода на другой, имеем

$$t = \frac{DeN_A S\ell}{AI} = 3 \cdot 10^6\, c \approx 35\,\text{сут}.$$

Так как силы, действующие на все свободные электроны в проводнике, направлены одинаково, то их сумма равна

$$F = (eE)N\ ,$$

где $N = \frac{m}{A} N_A = \frac{DS\ell}{A} N_a$ – общее число электронов во всем объеме проводника, а $E = \frac{U}{\ell} = \frac{IR}{\ell} = \frac{I\rho}{S}$ – напряженность электрического поля, здесь $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \textit{Ом·м}$ – удельное сопротивление меди.

Подставляя данные выражения в формулу, определяющую сумму сил, и проведя вычисления, получим

$$F = \frac{e\rho DI\ell N_A}{A} = 1{,}0\ (\textit{МН}).$$

Задача 4. Металлический стержень движется вдоль своей оси со скоростью $\upsilon = 200\ \textit{м/с}$. Оцените заряд, который проходит через гальванометр, подключенный к концам стержня, при его резком торможении, если длина стержня равна $\ell = 10$ м, а сопротивление всей цепи (включая гальванометр) равно $R = 10\ \textit{Ом}$.

Решение

В соответствии с законом сохранения энергии кинетическая энергия движения свободных электронов после торможения стержня переходит полностью в тепловую энергию, определяемую законом Джоуля-Ленца.

Кинетическая энергия электронов находится по формуле

$$W = N_e \cdot \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{n\ell Sm\upsilon^2}{2} \ ,$$

где n – концентрация электронов, S – площадь поперечного сечения стержня.

Тепловую энергию определим по закону Джоуля-Ленца, используя усредненные значения силы и плотности тока,

$$Q = I_{cp}^2 Rt = qI_{cp}R = qj_{cp}SR,$$

где q – заряд, прошедший через гальванометр при торможении стержня.

Среднюю плотность тока выразим через среднюю скорость электронов, полагая, что при торможении она равномерно убывает от υ до 0:

$$j_{cp} = \mathrm{en}\langle\upsilon\rangle = 0{,}5en\upsilon \ .$$

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$0{,}5n\ell Sm\upsilon^2 = 0{,}5qen\upsilon SR \ .$$

После преобразования, находим искомую величину

$$q = \frac{m\ell\upsilon}{e} \ .$$

Произведя вычисления, получим

$$q = 11{,}4\ нКл.$$

2. Расчет сопротивлений и токов утечки в сплошной слабо проводящей среде

Метод решения. Сопротивление проводника зависит от его формы, размеров, материала и температуры. В простейшем случае однородного цилиндрического проводника его сопротивление определяется формулой

$$R = \rho \frac{\ell}{S},$$

где $\rho(Ом \cdot м)$ – удельное электрическое сопротивление, зависящее от материала проводника и его температуры.

В случае неоднородного проводника ($\rho \neq const$) его сопротивление между сечениями 1 и 2 определяется интегралом

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{S}.$$

Выбор сечения проводника в каждом конкретном случае зависит от его симметрии, распределения тока по проводнику.

Слабо проводящая среда – это среда, для которой можно пренебречь изменением мгновенных значений силы тока, разности потенциалов, заряда и т.д. Именно в этих случаях возможно использование законов Ома в дифференциальной и интегральной формах.

Примеры решения задач

Задача 1. Цилиндрический воздушный конденсатор с внутренним a и внешним b радиусами заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi$. Пространство между обкладками заполняют слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ. Определить силу тока утечки, если высота конденсатора равна h.

Решение

В случае слабо проводящей среды изменением разности потенциалов можно пренебречь, считая $\Delta\varphi=const$. Так как участок однородный, то

$$I = \Delta\varphi / R,$$

где R – полное сопротивление участка.

Для нахождения R рассмотрим тонкостенный цилиндрический слой высотой h, толщиной dr и радиусом r (рис.1).

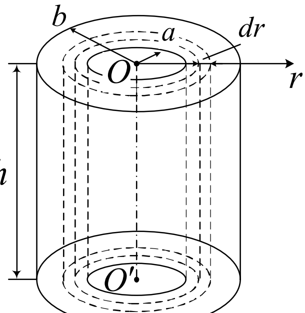


Рис.1

Элементарное сопротивление данного слоя составляет

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi rh},$$

откуда

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi rh} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln b/a .$$

Следовательно,

$$I = \frac{2\pi h \Delta\varphi}{\rho \ln(b/a)} .$$

Задача 2. Определить сопротивление изоляции на один погонный метр длины провода диаметром d = 2*мм*, если диаметр наружной проводящей оболочки равен D = 4*мм*, а удельное сопротивление фарфоровой изоляции равно $\rho=10^{13}$ *Ом·м*.

Решение

Будем рассматривать провод, окруженный проводящей оболочкой, как цилиндрический конденсатор и мысленно сообщим его обкладкам заряды $+q$ и $-q$. В соответствии с теоремой Гаусса напряженность электрического поля

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \cdot \frac{1}{r}.$$

Напряжение между проводом и наружной оболочкой определим интегрированием

$$U = \int_{d/2}^{D/2} E_r dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\frac{D}{d}.$$

С учетом полученной формулы, напряженность электрического поля E примет вид

$$E = \frac{U}{\ln(D/d)} \cdot \frac{1}{r},$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме, найдем вначале плотность тока

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{\rho \ln(D/d)} \cdot \frac{1}{r},$$

а, затем, и силу тока, отнесенную к длине провода ℓ

$$\mathrm{I} = j \cdot S = \frac{U}{\rho \ln(D/d)} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \ell = \frac{2\pi \ell U}{\rho \ln(D/d)}.$$

Таким образом, в соответствии с законом Ома сопротивление изоляции на единицу длины будет

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho \ln(D/d)}{2\pi} = 1{,}1 \cdot 10^{12}\ (\text{Ом}).$$

Задача 3. Металлический шар радиуса a окружен концентрической металлической оболочкой радиуса b. Пространство между этими электродами заполнено однородной слабо проводящей средой удельным сопротивлением ρ. Найти сопротивление межэлектродного промежутка.

Решение

Выделим слой среды между концентрическими сферами радиусов r и $r + dr$ (рис.2). Такой слой можно рассматривать как цилиндрический проводник длиной dr с площадью поперечного сечения $4\pi r^2$. Сопротивление этого слоя в поперечных направлениях равно

$$dR = \rho\frac{dr}{S} = \rho\frac{dr}{4\pi r^2}.$$

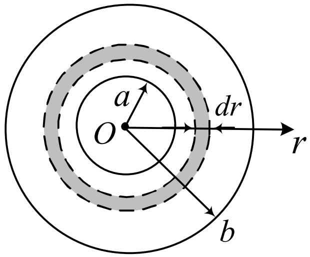


Рис.2

С точки зрения электропроводности слой среды между электродами представляет собой последовательное соединение элементарных сферических слоев. Следовательно, полное сопротивление межэлектродного промежутка будет равно

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ab}.$$

В предельном случае, при $b \to \infty$ сопротивление

$$R \to \frac{\rho}{4\pi a}.$$

Покажем, как можно решить данную задачу наиболее общим способом, а именно на основании закона Ома для участка цепи, предварительно определив силу тока и напряжение между двумя сферическими электродами.

При приложении к электродам некоторого напряжения в проводящей среде, заполняющей межэлектродное пространство, возникнет напряженность электрического поля, которое можно выразить на основании закона Ома в дифференциальной форме

$$E = \rho j = \frac{I}{4\pi r^2},$$

где j – плотность тока, зависящая от r, I – сила тока.

Определим теперь напряжение между электродами

$$U = \int_a^b E_r dr = \frac{\rho I}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho I}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\rho I(b-a)}{4\pi ab}.$$

В итоге, сопротивление межэлектродного промежутка, равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ab}.$$

Задача 4. Длинный проводник круглого сечения радиуса a сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния от оси проводника r по закону $\rho = \dfrac{c}{r^2}$, где c =*const*. Найти:

а) сопротивление единицы длины такого проводника;

б) напряженность электрического поля, при котором в нем будет протекать ток I.

Решение

Поперечными сечениями выделим отрезок проводника некоторой длины ℓ. Принимая во внимание характер зависимости $\rho(r)$, разобьем выделенный отрезок круглого проводника на систему коаксиальных цилиндрических трубок бесконечно малой толщины каждая (рис.3). Тогда сопротивление отрезка проводника можно представить как параллельное соединение на его торцах сопротивлений тонких цилиндрических слоев. При таком соединении общая проводимость равна сумме проводимостей отдельных слоев. Проводимость выделенного цилиндрического слоя равна

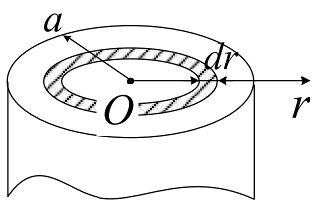


Рис.3

$$d\sigma = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dS}{\ell} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{2\pi r dr}{\ell} = \frac{2\pi r^3}{c\ell} dr.$$

Проводимость проводника длиной ℓ

$$\sigma = \frac{2\pi}{c\ell} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2c\ell},$$

а его сопротивление

$$R = \frac{1}{\sigma} = \frac{2c\ell}{\pi a^4}.$$

Сопротивление единицы длины данного проводника равно

$$R_{ед} = \frac{2c}{\pi a^4}.$$

Линии вектора $\vec{E}$ внутри проводника параллельны его оси. Если разность потенциалов между сечениями U, то

$$E(r_1)\cdot \ell = E(r_2)\cdot \ell = U.$$

Отсюда следует, что напряженность электрического E поля не зависит от r, т.е. является однородным. В этом случае

$$U = IR = E\ell \text{ и } E = I\frac{R}{\ell} = IR_{ед} = \frac{2cI}{\pi a^4}.$$

3. Расчет электрических цепей (нахождение токов, падений напряжений и т.д.)

Метод решения. Основной задачей при расчете электрических цепей, в которых известны ЭДС и сопротивления, является нахождение силы тока. Зная эту величину, можно определить практически любую другую величину (напряжение, работу, мощность, количество теплоты и т.д.).

При расчете простых, неразветвленных электрических цепей достаточно последовательно применять закон Ома для замкнутой цепи, закон Ома для однородного участка цепи и обобщенный закон Ома.

Расчет разветвленных электрических цепей осуществляется с использованием правил Кирхгофа. При применении правил Кирхгофа необходимо соблюдать следующий порядок действий.

1) Произвольно задать направления токов во всех участках разветвленной цепи, обозначив их стрелками.

2) Составить по первому правилу Кирхгофа независимые уравнения для узлов, при этом количество уравнений будет на единицу меньше, чем количество узлов.

3) Выбрать направление обхода контуров цепи (по часовой стрелке или против) и составить уравнения по второму правилу Кирхгофа для некоторого числа замкнутых контуров разветвленной цепи.

При составлении этих уравнений необходимо придерживаться следующих правил знаков: если направление обхода контура совпадает с выбранным направлением тока, то соответствующее произведение $I_i R_i$ берется со знаком плюс, если нет – со знаком минус. ЭДС источника берется со знаком плюс, если направление его сторонних сил совпадает с выбранным направлением обхода, т.е. обход идет от минуса ЭДС к плюсу. В противном случае ЭДС принимает знак минус.

4) Все ЭДС и все сопротивления, содержащиеся в данной цепи, должны входить в полную систему уравнений, решение которой позволит найти токи во всех ветвях цепи. Если при решении системы уравнений для каких–то токов получились отрицательные значения, это значит, что ток течет в направлении, противоположном выбранному направлению. Возможно решение и обратных задач. Для упрощения расчетов, связанных с решением полученной системы уравнений, следует предварительно подставить числовые значения всех известных величин.

Примеры решения задач

Задача 1. В конце зарядки аккумулятора током $I_1 = 3$ A присоединенный к нему вольтметр показал напряжение $U_1 = 4{,}25$ B, в то время как в начале разрядки током $I_2 = 4$ A

он показывал напряжение $U_2 = 3{,}9\,B$. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора.

Решение

Аккумулятор представляет собой многоразовый химический источник тока, который требует предварительной зарядки. Процесс зарядки заключается в том, что через аккумулятор пропускается электрический ток от внешнего источника в направлении противоположном сторонним силам, т.е. от плюса к минусу (рис.4,а).

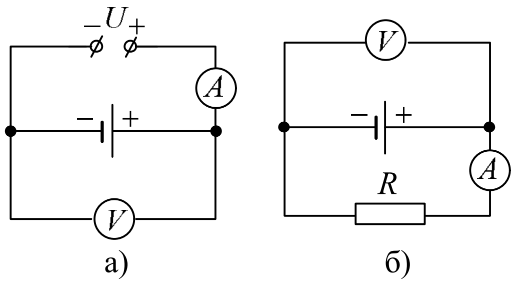


Рис.4

Закон Ома для участка цепи в этом случае примет вид

$$I_1 r = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U_1$ – показания вольтметра, подключенного к зажимам аккумулятора при его зарядке. В конце зарядки ЭДС аккумулятора имеет максимальное номинальное значение, которое и следует определить.

Разрядка аккумулятора происходит при его подключении на внешнее сопротивление R (рис.4,б). Ток I_2 в этом случае направлен в противоположную сторону и закон Ома для участка имеет вид

$$I_2 r = \varphi_1' - \varphi_2' + \mathcal{E},$$

где $\varphi_1' - \varphi_2' = -U_2$.

Решая совместно систему уравнений

$$I_1 r = U_1 - \mathscr{E} \quad \text{и} \quad I_2 r = \mathscr{E} - U_2,$$

найдем

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}, \; \mathscr{E} = \frac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{I_1 + I_2}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$r = 0{,}05\ Ом, \;\; \mathscr{E} = 4{,}1 В.$$

Задача 2. Определить силу тока, текущего через элемент $\mathscr{E}_2$, если $\mathscr{E}_1$ = 1*В*, $\mathscr{E}_2$ = 2*В*, $\mathscr{E}_3$ = 3*В*, r_1 = 1*Ом*, r_2 = 0,5*Ом*, r_3 = 1/3*Ом*, R_1 = 1*Ом*, R_2 = 1/3 *Ом*.

Решение

Для расчета цепи воспользуемся правилами Кирхгофа. Сначала выберем произвольно направление токов в ветвях так, как показано на рис.5.

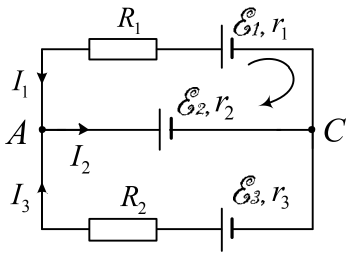


Рис.5

В данной цепи два узла, поэтому по первому правилу Кирхгофа можно составить одно независимое уравнение, например для узла *A*

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Выберем теперь за положительное направление обхода замкнутых контуров направление по часовой стрелке. По второму правилу Кирхгофа для контуров *ABCA* и *ACDA* будем иметь

$$-I_1 (R_1 + r_1) - I_2 r_2 = -\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2;$$

$$I_3 (r_3 + R_2) + I_2 r_2 = -\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$I_1 = -\frac{5}{8}A,\ I_2 = \frac{1}{2}A,\ I_3 = \frac{8}{9}A.$$

Знак “-” в значении силы тока I_1 показывает, что действительное направление этого тока противоположно выбранному.

Задача 3. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора С схемы (рис.6), если $\mathcal{E}_1 = 4{,}0\,В$, $\mathcal{E}_2 = 1{,}0\,В$, $R_1 = 10\,Ом$, $R_2 = 20\,Ом$, $R_3 = 30\,Ом$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

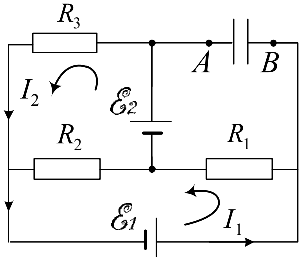


Рис.6

Решение

Обозначим на схеме направления токов и выберем направления обхода контуров. По правилам Кирхгофа для двух контуров получим следующие уравнения

$$I_2 R_3 + (I_2 - I_1) R_2 = \mathcal{E}_2,$$
$$I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 = \mathcal{E}_1.$$

Разность потенциалов для точек A и B

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 - I_1 R_1.$$

Из данного соотношения видно, что для нахождения искомой разности потенциалов нам достаточно найти ток I_1. Из первого уравнения

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + I_1 R_1}{R_2 + R_3}.$$

Подставляя найденный ток I_2 во второе уравнение, после преобразования получим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (R_2 + R_3) + \mathcal{E}_2 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Окончательно, для разности потенциалов найдем

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 - I_1 R_1.$$

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}_2 R_3 (R_1 + R_2) - \mathcal{E}_1 R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

$$\varphi_A - \varphi_B = -1 B.$$

Задача 4. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме (рис.7), если $\mathcal{E}_1$=1,5 *В*, $\mathcal{E}_2 = 3{,}7$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом и $R = 5{,}0$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

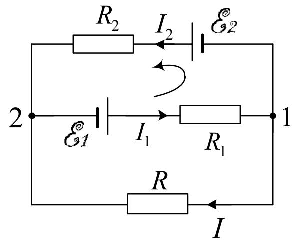


Рис.7

Решение

Выберем направления токов в ветвях цепи и направление обхода контуров. По правилам Кирхгофа напишем следующие уравнения:

1) для узла 1 , $I_1 - I_2 - I = 0$;

2) для верхнего контура, $I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$;

3) для нижнего контура, $I_1 R_1 + IR = \mathcal{E}_1$.

Решая систему уравнений относительно I, получим

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{RR_2 + R_1 (R_1 + R_2)}.$$

Подстановка заданных в условиях задачи значений ЭДС и сопротивлений приводит к результату: $I = -0{,}1$ А. Знак минус свидетельствует о том, что действительное направление тока противоположно выбранному направлению.

Задача 5. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2.

Решение

Эквивалентность источников A и B выражается в том, что ток в подключаемой к ним одной и той же нагрузке R будет одинаковым. Найдем соответствие между ЭДС и внутренними сопротивлениями этих источников.

Для цепи, изображенной на рис.8а, напишем систему уравнений в соответствии с правилами Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 = I\ ,$$
$$IR + I_1 r_1 = \mathcal{E}_1,$$
$$IR + I_2 r_2 = \mathcal{E}_2.$$

Решая данную систему уравнений, найдем

$$I = \frac{\mathcal{E}_1\, r_2 + \mathcal{E}_2\, r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

Для цепи, изображенной на рис. 8б, на основании закона Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}^*}{R + r^*},$$

где $\mathcal{E}^*$, r^* – ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника.

Приравнивая силы токов, получим

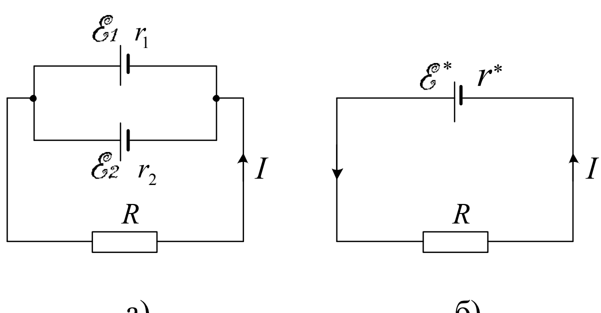


Рис.8

$$\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{\mathcal{E}^*}{R + r^*},$$

после преобразования

$$\frac{\mathcal{E}^*}{R + r^*} = \frac{(\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1)/(r_1 + r_2)}{R + r_1 r_2/(r_1 + r_2)}.$$

В результате, имеем

$$\mathcal{E}^* = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2},$$

$$r^* = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

В частности, при параллельном соединении двух одинаковых источников ($\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$, $r_1 = r_2 = r$), выполняются соотношения

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}, \quad r^* = r/2.$$

Задача 6. В схеме (рис.9) найти сопротивление между точками A и B, если $R = 100\ Ом$ и $r = 50\ Ом$.

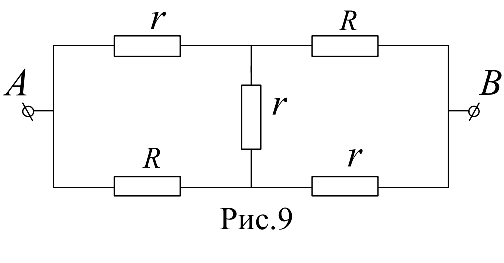


Рис.9

Решение

При расчете такого сложного соединения сопротивлений можно так же воспользоваться правилами Кирхгофа. Мысленно подключим к зажимам A и B данной цепи источник тока с $\mathcal{E}$ (его внутренним сопротивлением будем пренебрегать). На (рис.10) покажем предполагаемые токи на элементах цепи.

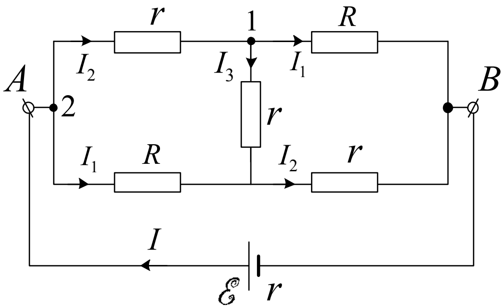


Рис.10

Определив ток I , найдем сопротивление всей цепи

$$R_{AB} = \frac{\mathcal{E}}{I}.$$

Составим систему уравнений Кирхгофа:

1) для узла 1 , $I_2 - I_1 - I_3 = 0$;

2) для узла 2, $I - I_1 - I_2 = 0$;

3) для левого контура, $I_2 r + I_3 r - I_1 R = 0$;

4) для правого контура, $I_1 R - I_2 r - I_3 r = 0$;

5) для нижнего контура, $I_1 R + I_2 r = \mathcal{E}$.

Путем последовательного исключения токов I_1, I_2, I_3 найдем

$$I = \frac{\mathcal{E}(R + 3r)}{r(3R + r)}.$$

Таким образом, сопротивление между точками A и B, равно

$$R_{AB} = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{r(3R + r)}{R + 3r} = 70\,Ом.$$

4. Расчет работы, тепловой мощности, КПД источника тока

Метод решения. Под работой источника тока следует понимать работу сторонних сил по перемещению заряда через источник. В соответствии с определением ЭДС, при постоянной силе тока I, эта работа за промежуток времени Δt определяется формулой

$$A = \mathcal{E} I \Delta t.$$

Если проводник неподвижен и в нем не происходит химических реакций, то работа источника идет только на нагревание проводника. При последовательном соединении во всех проводниках протекает ток одной величины, поэтому для определения количества теплоты удобна формула

$$Q = I^2 R t .$$

При параллельном соединении на концах сопротивлений одинаковое напряжение, поэтому удобно воспользоваться другой формулой

$$Q = \frac{U^2}{R} t .$$

Количество теплоты, выделяемое в проводнике сопротивлением R за время t при прохождении по нему изменяющегося тока определяется интегральной формой закона Джоуля-Ленца

$$Q = R \int_0^t I^2(t) dt .$$

Тепловая мощность это величина, определяемая отношением количества теплоты к тому промежутку времени, в течение которого она выделяется. Ее максимальное значение, выделяемое на определенном сопротивлении R, может быть рассчитано лишь на основе полученного аналитического выражения и последующего исследования его на экстремум.

При практическом использовании источников тока важна не только мощность, но их коэффициент полезного действия. Когда источник работает на внешнюю цепь, то некоторая мощность тратится бесполезно на выделение тепла внутри источника. Поэтому КПД источника равен

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{U}{\mathcal{E}},$$

где P_0 – мощность, выделяемая во внешней цепи, P – полная мощность источника. Отметим, что условия получения наибольшей полезной мощности и наибольшего КПД несовместимы.

Примеры решения задач

Задача 1. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}6\,B$, замкнутый на внешнее сопротивление, дает ток $I = 1{,}0\,A$. При этом вольтметр, подключенный к полюсам аккумулятора, показывает $U = 2{,}0\,B$. Найти тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе, и мощность, которую развивают в нем электрические силы.

Решение

Схема данной цепи представлена рис.11 Вольтметр, подключенный к полюсам аккумулятора, показывает падение напряжения на внешнем сопротивлении, следовательно

$$R = U / I\ .$$

Внутреннее сопротивление аккумулятора, определим по закону Ома для полной цепи

$$r = \frac{\mathcal{E} - U}{I}.$$

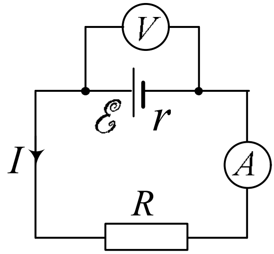


Рис.11

На основе полученных данных можно определить искомые величины. Так, тепловая мощность, выделяемая в аккумуляторе, равна

$$P_0 = I^2 r = \frac{I^2(\mathcal{E} - U)}{I} = 0{,}6(Bm).$$

Мощность, развиваемую электрическими силами внутри источника, определим по формуле

$$P = (\varphi_2 - \varphi_1)I = -UI = -2\ (Bm).$$

Знак «-» свидетельствует о том, что внутри источника положительную работу совершают сторонние силы, а работа электрических сил отрицательна.

Задача 2. Электромотор постоянного тока подключили к напряжению U. Сопротивление обмотки якоря равно R. При каком значении тока через обмотку полезная мощность мотора будет максимальной? Чему она равна? Каков при этом КПД мотора?

Решение

Энергия электрического тока, протекающего по обмоткам электродвигателя, расходуется на тепловые потери и на совершение механической работы, т.е.

$$A = Q + A_{мех}.$$

Перейдем к мощности и данное равенство перепишем в виде

$$IU = I^2 R + P_{мех},$$

где R - сопротивление обмоток электродвигателя.

Мощность на валу электромотора

$$P_{мех} = IU - I^2 R = I(U - IR).$$

Мощность электромотора максимальна, если

$$dP_{мех} / dI = 0.$$

Отсюда находим силу тока

$$U - 2I_1 R = 0\ ,\ \ I_1 = U / 2R.$$

При этом

$$P_{\max} = I_1(U - I_1 R) = \frac{U}{2R}(U - U/2) = \frac{U^2}{4R}.$$

КПД мотора, при его максимальной нагрузке, равен

$$\eta = \frac{P_{мех}}{P} = \frac{P_{мех}}{I_1 U} = 0{,}5 = 50\% .$$

Задача 3. В схеме (рис.12) заданы R_1 и R_2, а также $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. При каком сопротивлении R выделяемая на нем тепловая мощность будет максимальной? Чему она равна?

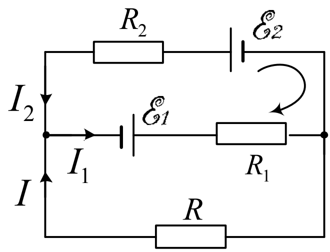


Рис.12

Решение

Представим распределение токов на участках данной цепи. Для оценки мощности, выделяемой на сопротивлении R, нам потребуется знание тока I, текущего через это сопротивление. С этой целью на основании правил Кирхгофа составим систему уравнений:

$$I_2 + I - I_1 = 0 ,$$

$$I_2 R_2 + I_1 R_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1,$$

$$-I_2 R_2 + IR = -\mathcal{E}_2.$$

Совместное решение этой системы дает

$$I = -\frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Выделяемая на сопротивлении R мощность

$$P = I^2 R = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)^2 R}{\left[R(R_1 + R_2) + R_1 R_2\right]^2}.$$

В экстремальной точке $dP/dR = 0$.

Из этого условия получаем:

$$R(R_1 + R_2) + R_1 R_2 - 2R(R_1 + R_2) = 0 ,\; R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом, максимальная мощность, выделяемая на этом сопротивлении, равна

$$P_{\max} = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)^2}{4R_1 R_2 (R_1 + R_2)}.$$

Задача 4. Сила тока в резисторе линейно возрастает за время $t_1 = 4$ с от $I_0 = 0$ до $I = 8$ А. Сопротивление резистора $R = 10$ Ом. Определить количество теплоты, выделившееся в резисторе за $t_2 = 3$ с.

Решение

Сила тока является линейной функцией времени, т.е.

$$I = kt,$$

где $k = \dfrac{I - I_0}{t_1} = 2\,(\text{А/с})$ – коэффициент пропорциональности, численно равный приращению силы тока в единицу времени.

По закону Джоуля-Ленца в интегральной форме, имеем

$$Q = \int_0^{t_2} I^2 R dt = k^2 R \int_0^{t_2} t^2 dt = \frac{k^2 R t_2^3}{3}.$$

Произведя вычисления, найдем $Q = 360$ Дж.

Задача 5. Сколько тепла выделится в спирали с сопротивлением $R = 75$ Ом при прохождении через нее количества электричества $q = 100$ Кл, если ток в спирали равномерно убывал до нуля в течение $\tau = 50$ с?

Решение

Обозначим начальную силу тока в спирали через I_0. Так как ток в течение времени τ убывал равномерно, то

$$I(t) = I_0 - kt = I_0(1 - t/\tau),$$

где $k = I_0 / \tau$ - коэффициент пропорциональности, равный скорости убывания силы тока.

Для заряда, прошедшего за это время через спираль, получим следующее выражение

$$q = \int_0^\tau I(t)dt = I_0 \int_0^\tau (1 - t/\tau)dt = I_0 \tau / 2 .$$

Отсюда, находим начальный ток

$$I_0 = \frac{2q}{\tau} .$$

Линейная зависимость убывающего тока от времени получает следующий вид

$$I(t) = 2q(1 - t/\tau)/\tau .$$

Количество теплоты, выделившееся в спирали за время убывания тока, определим по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = \int_0^\tau I^2 R dt = \frac{4q^2 R}{\tau} \int_0^\tau (1 - t/\tau)^2 dt = \frac{-4q^2 R}{\tau} (1 - t/\tau)^3 \Big|_0^\tau = \frac{4q^2 R}{\tau^2} ..$$

Вычисляя, получим $Q = 20\, кДж$.

5. Переходные процессы в цепи с конденсатором (зарядка и разрядка конденсатора)

Метод решения. В процессе зарядки конденсатора сила тока, определяющая скорость зарядки, уменьшается, а заряд асимптотически приближается к своему максимальному значению. При разрядке, наоборот, заряд асимптотически убывает до нуля. Чем больше сопротивление и емкость, тем медленнее происходят процессы зарядки и разрядки конденсатора. Величину $\tau = RC$ называют временем релаксации. Это то время, за которое при разрядке первоначальный заряд уменьшается в $e = 2{,}78$ раз. Как увидим в дальнейшем при решении задач, даже при больших значениях и сопротивлений, и емкости, процессы зарядки и разрядки происходят достаточно быстро. Тем не менее, в процессах разрядки и зарядки конденсатора ток можно считать квазистационарным.

Квазистационарные токи можно описывать законами постоянного тока. Обобщенный закон Ома, записанный для произвольного момента времени, дает дифференциальное уравнение, решение которого позволяет найти искомую функцию $q(t)$ или $I(t)$. Возможен и другой способ решения. Из закона сохранения энергии следует, что работа источника равна сумме количества джоулевой теплоты и электрической энергии заряженного конденсатора. Записав уравнение энергетического баланса для произвольного промежутка времени dt можно также получить дифференциальное уравнение относительно искомой функции.

Примеры решения задач

Задача 1. К источнику с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ подключены последовательно конденсатор емкостью C и резистор R (рис. 13) Найти закон изменения со временем заряда на обкладках конденсатора. Определить работу, совершаемую источником при заряде конденсатора, и количество теплоты, выделяющейся при этом в цепи.

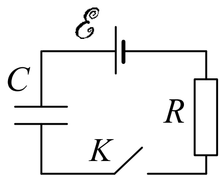


Рис.13

Решение

На основании обобщенного закона Ома получим

$$\mathscr{E} = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}.$$

После разделения переменных уравнение примет вид

$$\frac{dq}{C\varepsilon - q} = \frac{1}{CR}dt.$$

Интегрируя данное выражение в пределах от 0 до t и от 0 до q, после потенцирования получим закон изменения со временем заряда на обкладках конденсатора

$$q = C\mathcal{E}\left[1 - \exp\left(-t/CR\right)\right].$$

Работа, совершаемая источником за все время зарядки конденсатора,

$$A_{ист} = \int_0^\infty \mathcal{E} I dt = \mathcal{E}\int_0^q dq = C\mathcal{E}^2,$$

где $q_к = C\mathcal{E}$ – конечный заряд конденсатора.

Количество теплоты, выделившейся за все время зарядки на сопротивление R, может быть найдено из закона сохранения энергии

$$Q = A_{ист} - W,$$

где

$$W = \frac{q_{\text{k}}^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

– энергия заряженного конденсатора.

С учетом найденного значения $A_{ист}$ получим

$$Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Это выражение может быть получено и независимым путем из закона Джоуля-Ленца:

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt;$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right);$$

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}\cdot R\int_0^\infty e^{-2t/CR} dt = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Задача 2. Конденсатор емкостью $C = 8\,мкФ$ и резистор сопротивлением $R = 1200\,Ом$ соединены параллельно и подключены к источнику, ЭДС которого 36 *В*, через ключ К (рис. 14). В некоторый момент времени ключ К размыкают. Определить:

1) силу тока в цепи через 0,1 с;

2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,1 с;

3) заряд на конденсаторе через 0,1с.

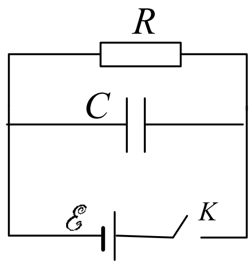


Рис.14

Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Решение

При замкнутой цепи напряжение на зажимах конденсатора равно ЭДС источника, следовательно, заряд конденсатора

$$q_0 = CU_C = C\mathcal{E}.$$

В любой момент времени после размыкания ключа *К* напряжение на резисторе U_R равно напряжению на обкладках конденсатора U_C, т.е.

$$IR = \frac{q}{C}.$$

С учетом того, что $I = -\frac{dq}{dt}$,

получим

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}.$$

Разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_{0}^{t} dt.$$

Интегрируя данное выражение в пределах от 0 до t и от q_0 до q, после потенцирования получим закон изменения со временем заряда на обкладках конденсатора

$$q(t) = C\mathcal{E} e^{-t/RC}.$$

Закон изменения силы тока в процессе разрядки конденсатора, имеет вид

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}.$$

Количество теплоты, выделившееся за время t на резисторе сопротивлением R, определим по закону Джоуля-Ленца

$$Q = \int_0^t I^2 R dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^t e^{-2t/RC} dt = \frac{C\,\mathcal{E}^2}{2} e^{-2t/RC}.$$

Выполнив вычисления, получим

I=0,01 A, Q_1=671 *мкДж*, q_1=104 *мкКл*.

Задача 3. Незаряженный конденсатор емкостью $C = 12{,}5\,мкФ$ и резистор сопротивлением $R = 800\,Ом$ в некоторый момент времени подключают к источнику, ЭДС которого 60*В* (рис.15). Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Определить:

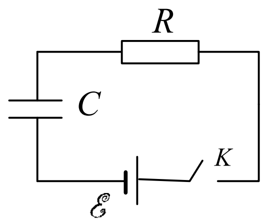


Рис.15

1) силу тока в цепи через 0,1 с;

2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,1 с;

3) заряд на конденсаторе через 0,1с.

Решение

Для решения данной задачи воспользуемся энергетическим методом.

Для произвольного промежутка времени dt

$$dA_{ист} = dQ + dW\ ,$$

где $dA_{ист} = \mathcal{E}Idt$ – работа источника тока; $dQ = I^2Rdt$ – количество джоулевой теплоты, выделившейся за время dt; $dW = d\left(\dfrac{q^2}{2C}\right) = \dfrac{qdq}{C}$ – приращение энергии конденсатора за время dt.

После подстановки уравнение энергетического баланса примет вид

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + qdq/C\ .$$

Разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = \frac{dt}{CR}.$$

Произведя интегрирование, найдем

$$\ln\frac{C\mathcal{E} - q}{C\mathcal{E}} = -\frac{t}{CR},$$

или после потенцирования

$$q(t) = C\mathcal{E}\left[1 - \exp(-t/CR)\right].$$

Зависимость силы тока от времени получим, дифференцируя функцию $q(t)$ по времени

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right).$$

Количество теплоты, выделившееся за все время зарядки, определим по закону Джоуля-Ленца

$$Q=\int_0^\infty I^2Rdt=\frac{\mathcal{E}^2}{R^2}R\int_0^\infty e^{-2t/CR}dt=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Проведя вычисления для искомых величин, получим

q=480 *мкКл*, I=0, 027*А*, Q=22,5*мДж*.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. По медному проводнику сечением 0,8 *мм*^{2} течет ток 80 *мА*. Найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ *г/см*^{3}.

Ответ: 7,41 *мкм/с*.

2. По проводнику с площадью сечения 50 *мм*^{2} течет ток. Средняя скорость дрейфа свободных электронов $2{,}82\cdot10^{-3}$ *м/с*, их концентрация $7{,}9\cdot10^{20}$ *м*$^{-3}$. Найти силу тока и его плотность.

Ответ: 1,78 *мкА*, 36 *мА/м*^{2}.

3. По алюминиевому проводу сечением S = 0,2 *мм*^{2} течет ток I = 0,2 *А*. Определите силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление алюминия ρ=26 *нОм·м*.

Ответ: $14{,}6\cdot10^{-21}$ *Н*.

4. Плотность тока в никелиновом проводнике ($\rho = 4\cdot10^{-7}$ *Ом·м*) длиной 25 *м* равна 1 *МА/м*^{2}. Определить напряжение на концах проводника.

Ответ: 10 *В*.

5. На концах никелинового проводника длиной 5*м* поддерживается разность потенциалов 12*В*. Определить плотность тока в проводнике, если его температура 540^0C.

Ответ: $5{,}7\cdot10^6$ *А/м*^{2}.

6. Найти суммарный импульс электронов в прямом проводе длинной 1000*м*, по которому течет ток 70*А*.

Ответ: $p = 0{,}40\,мкН \cdot с$.

7. Из материала с удельным сопротивлением ρ изготовлено плоское кольцо толщиной d. Радиусы кольца равны a и b ($b > a$). Между внешней и внутренней цилиндрическими поверхностями кольца поддерживается некоторая разность потенциалов. Найти сопротивление R кольца в этих условиях.

Ответ: $R = (\rho/2\pi d)\ln(b/a)$.

8. Металлический шар радиуса R_1 окружен тонкой концентрической металлической оболочкой радиуса R_2. Пространство между этими электродами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ. Найти сопротивление межэлектродного промежутка.

Ответ: $R = \rho(R_2 - R_1)/4\pi R_1 R_2$

9. Однородная слабо проводящая среда с удельным сопротивлением ρ заполняет пространство между двумя коаксиальными проводящими тонкими цилиндрами. Радиусы цилиндров R_1 и R_2, длина каждого цилиндра ℓ. Найти сопротивление среды между цилиндрами.

Ответ: $R = (\rho/2\pi\ell)\ln(R_2/R_1)$

10. В цепь включены параллельно два гальванических элемента с разными ЭДС равными $\mathcal{E}_1$ = 1,9 *В* и $\mathcal{E}_2$ = 1,1 *В* и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1\,Ом$ и $r_2 = 0{,}8\,Ом$. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R = 10\,Ом$ (рис.16). Чему равны токи через элементы, как они направлены и

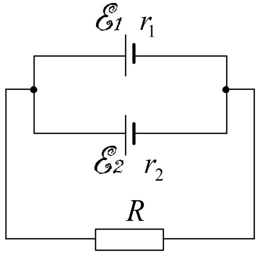


Рис.16

чему равно напряжение на сопротивлении R на внешней цепи?

Ответ: 1,05 *А* (по направлению ЭДС); 0,87 *А* (против направления ЭДС); 1,8 *В*.

11. Сопротивления R_1 и R_2 (рис.17) подобраны так, что ток через гальванометр *G* не идет. Считая известными ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_3$, найти ЭДС $\mathcal{E}$. Внутренними сопротивлениями батарей по сравнению с R_1 и R_2 пренебречь.

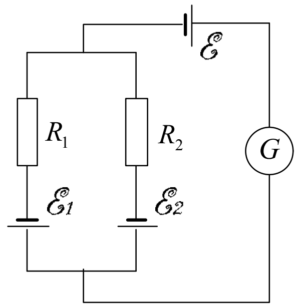


Рис.17

Ответ: $$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

12. В схеме, изображенной на рис.18, $\mathcal{E}_1$ = 10,0*В*, $\mathcal{E}_2$ = 20,0*В*, $\mathcal{E}_3$ = 30,0*В*, R_1 = 1,0*Ом*, R_2 = 2,0*Ом*, R_3 = 2,0*Ом*, R_4 = 4,0*Ом*, R_5 = 5,0*Ом*, R_6 = 6,0*Ом*, R_7 = 7,0*Ом*. Внутреннее сопротивление источников мало. Найти силы токов.

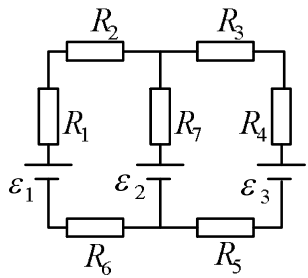


Рис.18

Ответ: I_1 = 0,6 *А*, I_2 = 2,9 *А*, I_3 = 2,3 *А*.

13. Найти ток, проходящий через резистор сопротивлением R_0 в схеме, изображенной на рис.19, считая все параметры заданными.

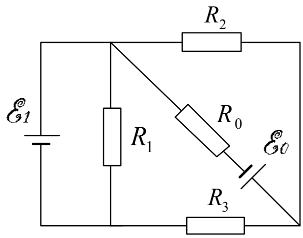


Рис.19

Ответ:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0(1 + R_3 / R_2) - \mathcal{E}_1}{R_0(1 + R_3 / R_2) + R_3}.$$

14. Сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что ток через гальванометр G (рис.20) равен нулю. Считая известными ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, найти ЭДС $\mathcal{E}$. Внутренними сопротивлениями батарей по сравнению с R_1 и R_2 пренебречь.

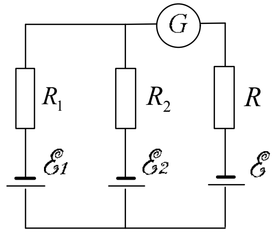


Рис.20

Ответ:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 + \dfrac{R_1}{R_2}\mathcal{E}_2}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}.$$

15. Сила тока в цепи линейно возрастает за 4*с* от 0 до 8*А*. Сопротивление резистора 10*Ом*. Определить количество теплоты, выделившееся в резисторе за первые 3*с*.

Ответ: 360 *Дж.*

16. Батарея состоит из пяти последовательно соединенных элементов. ЭДС каждого 1,4 *В*, внутреннее сопротивление 0,3 *Ом*. При каком токе полезная мощность батареи равна 8 *Вт*? Определить наибольшую полезную мощность батареи.

Ответ: 2,7 *А*; 2 *А*; 8,17 *Вт*.

17. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 15 *Ом* равномерно возрастает от I_0 = 0 до некоторого максимального значения в течение времени τ = 5 *с*. За это время в проводнике выделилось количество теплоты Q =10 *кДж*. Найти среднюю силу тока в проводнике за этот промежуток времени.

Ответ: $\langle I \rangle = \dfrac{1}{2}\sqrt{3Q/R\tau} = 10\ A$.

18. Незаряженный конденсатор емкостью $C = 10\,мкФ$ и резистор сопротивлением $R = 1000\,Ом$ в некоторый момент времени подключат к источнику, ЭДС

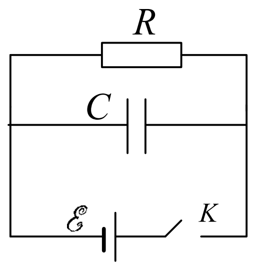


Рис.21

которого 50*В* (рис.21). Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Определить:

1) напряжение на конденсаторе через 0,01 с;

2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,01 с;

Ответ: 32 *В*, 12,5 *мДж*.

19. Конденсатор емкостью $C = 10\,мкФ$ и резистор сопротивлением $R = 900\,Ом$ соединены параллельно и подключены к источнику, ЭДС которого 40 *В*, через ключ *К* (см. рис.14). В некоторый момент времени ключ *К* размыкают. Определить:

1) заряд на конденсаторе через 0,01 *с*;

2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,01 *с*;

Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Ответ: 158 *мкКл*, 1,14 *мДж*.

Второй уровень сложности

1. Напряжение на концах проводника сопротивлением 5 *Ом* за 0,5 *с* равномерно возрастает от 0 до 20 *В*. Какой заряд проходит через проводник за это время?

Ответ: 1 *Кл*.

2. Какова скорость дрейфа свободных электронов внутри медного проводника длиной 1 *м*, на концах которого поддерживается разность потенциалов 0,01 *В*? Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Ответ: $\upsilon = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ *м/с*.

3. Какая мощность выделяется в единице объема проводника длиной 0,2 *м*, если на его концах поддерживается разность потенциалов $U = 4\,В$?

Ответ: $w = \dfrac{U^2}{\rho\ell^2} = 4\cdot 10^8$ *Вт/м*^{3}.

4. Плотность тока в алюминиевом проводе равна 1 *А/мм*^{2}. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 *см*^{3} алюминия равно числу атомов.

Ответ: 0,1 *мм/с*.

5. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с проницаемостью ε=7,0 и удельным сопротивлением ρ=100 *ГОм·м*. Емкость конденсатора C=3000 *пФ*. Найти ток утечки через конденсатор при подаче на него напряжения 2000 *В*.

Ответ: I = 0,97 *мкА*.

6. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен диэлектриком, удельная проницаемость σ которого изменяется в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от $\sigma_1 = 1{,}0\cdot 10^{-12}$ *см/м* до $\sigma_2 = 1{,}0\cdot 10^{-11}$ *см/м*. Найти ток утечки через конденсатор при условии, что напряжение на обкладках U = 300 *В*. Площадь обкладок S = 100 *см*^{2}, зазор между обкладками d = 2,0 *мм*.

Ответ: I = 5,9 *нА*.

7. Сопротивления R_1, R_2 и R_3 подобраны так, что ток через гальванометр G (рис.22) равен нулю. Электродвижущие силы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_3$. Пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти электро-движущую силу $\mathcal{E}_2$ и ток, текущий через батарею $\mathcal{E}_1$.

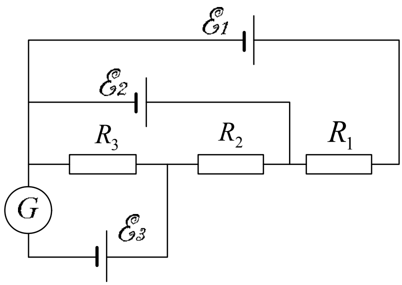


Рис.22

Ответ:

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3(1 + R_2 / R_3); \qquad I = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} - \frac{\mathcal{E}_3}{R_1}(1 + R_2 / R_3).$$

8. В схеме, изображенной на рис.23, заданы сопротивления R_1 и R_2. Определить сопротивление R, при котором рассеиваемая на нем мощность максимальна. Каково условие того, что ток, проходящий через сопротивление R, равен нулю?

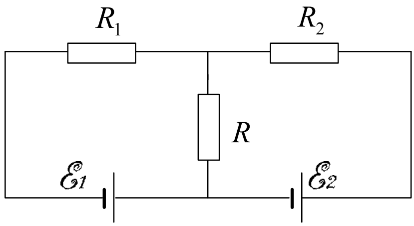


Рис.23

Ответ:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \qquad \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

9. Электрическая цепь составлена из двух батарей с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и четырех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый (рис.24). Какая мощность рассеивается на этих резисторах?

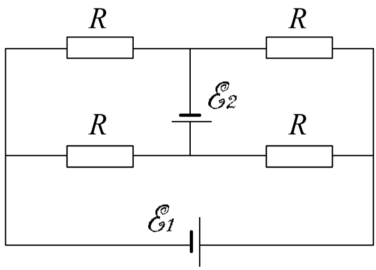


Рис.24

Ответ:

$$N_1 = N_4 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{4R}; \quad N_2 = N_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{4R}.$$

10. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме (рис.25), если $\mathcal{E}_1 = 1{,}5\,В$, $\mathcal{E}_2 = 3{,}7\,В$, $R_1 = 10\,Ом$, $R_2 = 20\,Ом$ и $R = 5{,}0\,Ом$. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Ответ: 0,02 A, направление тока слева направо.

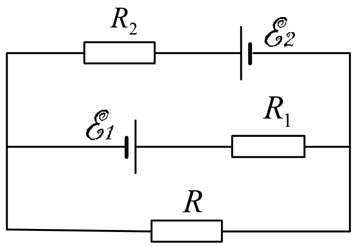


Рис.25

11. В схеме (рис.26) $\mathcal{E}_1 = 1{,}5\,B$, $\mathcal{E}_2 = 2{,}0\,B$, $\mathcal{E}_3 = 2{,}5\,B$, $R_1 = 10\,Ом$, $R_2 = 20\,Ом$ и $R_3 = 30\,Ом$. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы. Найти:

а) ток через сопротивление R_1;

б) разность потенциалов между точками А и В.

Ответ: а) $I_1 = 0{,}06\,\text{А}$, б) $\varphi_A - \varphi_B = 0{,}9\,\text{В}$

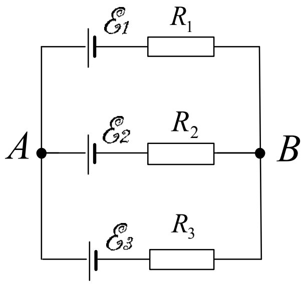


Рис.26

12. Найти ток через сопротивление R в схеме (рис.27). Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Ответ:

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

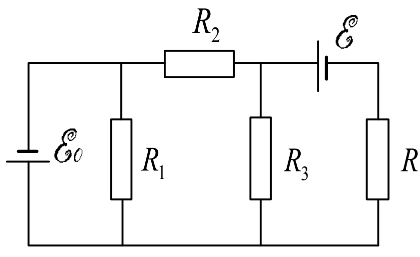


Рис.27

1
3. На схеме, показанной на рис.28 ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 10B$, $\mathcal{E}_2 = 20B$, $\mathcal{E}_3 = 40B$, а сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,Ом$. Определить силы токов I_1 и I_2 через

сопротивления и источники ЭДС соответственно.

Ответ: $I_1 = 1A$, $I_2 = 3A$, $I_3 = 3A$, $I'_1 = 2\,A$, $I'_2 = 0$, $I'_3 = 3A$.

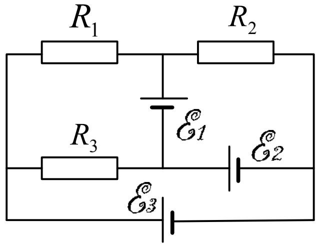


Рис.28

14. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 120*Ом* равномерно возрастает от I_0 =0 до I_{max} = 5*А* за время τ = 30*с*. Определите выделившееся за это время в проводнике количество теплоты.

Ответ: 100 *кДж*.

15. В схеме, показанной на рис.29, $\mathcal{E}_1 = 20B$, $\mathcal{E}_2 = 25B$, $R_1 = 10\,Ом$, $R_2 = 15\,Ом$, внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Определить работу, совершенную источниками, и полное количество выделившейся теплоты за интервал времени $\Delta t = 0{,}5\,с$ при $R_3 = 82\,Ом$. При каком сопротивлении R_3 выделяемая на этом резисторе мощность максимальна?

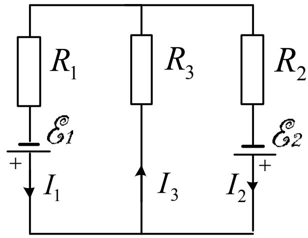


Рис.29

Ответ: R_3=6 Ом, $P_{\max} = 20{,}2$ Вт.

16. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от нуля до некоторого максимального значения в течение времени 10 *с*. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 1\,кДж$. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если сопротивление равно 3 *Ом*.

Ответ: 1 *А/с*.

17. Сколько тепла выделится в спирали с сопротивлением $R = 75$ Ом при прохождении через нее количества электричества $q = 100\,Кл$, если ток в спирали равномерно убывал до нуля в течение $\Delta t = 50\,c$? Ответ: 20 *кДж*.18. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}6\,B$, замкнутый на внешнее

сопротивление, дает ток $I = 1{,}0\,A$. При этом разность потенциалов между полюсами аккумулятора $U = 2{,}0\,B$. Найти тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе, и мощность, которую развивают в нем электрические силы.

Ответ: 0,6 *Вт*; -2,0*Вт.*

19. Определите объемную плотность тепловой мощности в металлическом проводнике, если плотность протекающего по нему тока 10 $A/мм^2$ при напряженности электрического поля 1 *мВ/м*.

Ответ: 10^4 Вт/м^3.

20.Незаряженный конденсатор емкостью $C = 14\,мкФ$ и резистор сопротивлением $R = 650\,Ом$ в некоторый момент времени последовательно подключают к источнику, ЭДС которого 40*В*. Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Определить:

1) силу тока в цепи через 0,01 *с*;
2) энергию электрического поля в конденсаторе через 0,01 *с*;
3) время, за которое напряженность поля в конденсаторе достигнет половины максимального значения.

Ответ: 19 *мА*, 4,6 *мДж*, 0,007 *с*.

21. Конденсатор емкостью $C = 9\,мкФ$ и резистор сопротивлением $R = 1400\,Ом$ соединены параллельно и подключены к источнику, ЭДС которого 50 *В*, через ключ *К* (рис. 14). В некоторый момент времени ключ *К* размыкают. Определить:

1) напряжение на конденсаторе через 0,01 *с*;
2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,01 *с*;
3) время, за которое напряженность поля в конденсаторе уменьшится в 2 раза.

Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Ответ: 18 *В*, 1,5 *мДж*, 6,8 *мс*.

2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

2.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА И ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1.1. Основные понятия, уравнения и формулы

- **Индукция магнитного поля**

Магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами, проводниками с током и постоянными магнитами. Силовой характеристикой магнитного поля служит вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Вектор $\vec{B}$ можно ввести одним из трех эквивалентных способов:

а) исходя из силового действия магнитного поля на движущийся в нем точечный электрический заряд;

б) основываясь на силовом действии магнитного поля на малый элемент проводника с током;

в) исходя из силового действия магнитного поля на небольшую рамку с током.

Единица магнитной индукции 1 *Тл* (Тесла) – индукция такого магнитного поля, которое действует с силой 1 *Н* на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению индукции поля $\vec{B}$, если по этому проводнику течет ток 1 *А*:

$$1 Тл = 1\frac{Н}{А \cdot м}.$$

Графически магнитное поле изображается с помощью линий магнитной индукции. Линии магнитной индукции (силовые линии магнитного поля) – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{B}$.

Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.

- **Индукция магнитного поля точечного заряда** q, движущегося с нерелятивистской скоростью υ,

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\left[\vec{\upsilon}, \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\upsilon}{r^2} \sin\alpha ,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* – магнитная постоянная, $\vec{r}$ –радиус вектор точки наблюдения в системе отсчета, связанной с зарядом, α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$.

Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$, и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\upsilon}$ к $\vec{r}$ для положительного заряда и противоположно этому направлению для отрицательного.

- **Закон Био-Савара-Лапласа** определяет индукцию поля $d\vec{B}$, создаваемую элементом длины проводника $d\vec{\ell}$ с током I на расстоянии r от него:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\left[d\vec{\ell}, \vec{r}\right]}{r^3}, \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\ell \sin\alpha}{r^2} ,$$

где $\vec{r}$ радиус-вектор точки наблюдения в системе отсчета, связанной с элементом тока, α – угол между векторами $d\vec{\ell}$ и $\vec{r}$.

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен $d\vec{\ell}$ и $\vec{r}$, направлен по касательной к линии магнитной индукции. Направление $d\vec{B}$ определяется правилом правого винта.

- **Принцип суперпозиции магнитных полей** – магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна их геометрической (векторной) сумме:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i ,$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция результирующего поля.

- **Магнитная индукция полей, создаваемых токами простейших конфигураций:**

а) бесконечно длинным прямым проводником

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{R},$$

где R – расстояние от оси проводника до точки наблюдения;

б) круговым током в центре симметрии

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R},$$

где R – радиус кругового проводника с током;

в) прямолинейным отрезком проводника

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

где α_1 и α_2 – значения угла между направлением тока и радиус-вектором $\vec{r}$ для концов отрезка;

г) бесконечно длинным соленоидом

$$B = \mu_0 nI$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида;

д) соленоидом конечной длины

$$B = \frac{\mu_0}{2} In\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right),$$

где α_1 и α_2 – углы, которые образует с осью соленоида радиус-вектор, проведенный к крайним виткам соленоида.

- **Циркуляция вектора магнитной индукции** – линейный интеграл, взятый по замкнутому контуру в магнитном поле. Циркуляция вектора магнитной индукции в вакууме вдоль замкнутого контура пропорциональна алгебраической сумме сил токов, охватываемых этим контуром $\oint B_\ell d\ell = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k$,

где $\sum_{k=1}^{n} I_k$ – алгебраическая сумма сил токов, охватываемых контуром.

2.1.2. Основные типы задач и методы их решения

1. Определение индукции магнитного поля движущегося заряда

Метод решения. Применение формулы, определяющей магнитное поле, создаваемое в некоторой точке P точечным зарядом, движущимся с постоянной нерелятивистской скоростью.

Индукция поля, создаваемая несколькими движущимися зарядами, определяется на основе принципа суперпозиции.

Примеры решения задач

Задача 1. Электрон движется прямолинейно с постоянной скоростью υ = 0,2 *Мм/с*. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии r = 2 *нм* от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона и составляющей угол $\alpha = 45^\circ$ с его скоростью.

Решение

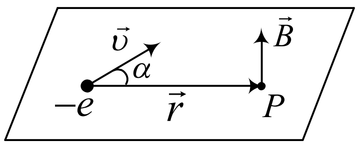


Рис.30

Вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля, создаваемого движущимся электроном в искомой точке, представлен на рис.30. Он перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$, но поскольку заряд электрона отрицателен, его направление противоположно векторному произведению $[\vec{\upsilon},\vec{r}]$, т.е.

$$\vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e[\vec{\upsilon},\vec{r}]}{r^3}.$$

Величина индукции поля определяется выражением

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e\upsilon}{r^2}\sin\alpha.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$B=566\ \text{мкТл}.$$

Задача 2. Электрон и протон движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $\upsilon=10^6$ *м/с.* Расстояние между ними $b=10^{-9}$ *м.* Определить индукцию магнитного поля в точке, находящейся на одинаковом расстоянии $r=7{,}0\cdot10^{-10}$ *м* от обеих частиц.

Решение

Положение движущихся зарядов и точки, в которой требуется определить индукцию поля, представлено на рис.31. Величины индукций магнитных полей, создаваемых как движущимся электроном, так и протоном одинаковы и равны

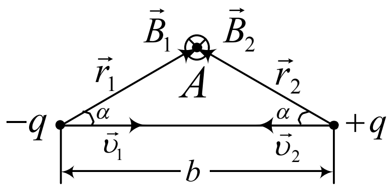


Рис.31

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e\upsilon}{r^2}\sin\alpha,$$

где $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{r^2-(b/2)^2}}{r}$, e – величина элементарного заряда.

Вектор $\vec{B}$ результирующего поля определяется по принципу суперпозиции

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2,$$

а с учетом того, что векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ сонаправлены, величина результирующего поля равна их сумме

$$B = \frac{\mu_0 e \upsilon}{2\pi r^2} \sin\alpha .$$

Проведя вычисления, получим $B = 45$ *мТл.*

Задача 3. Определить напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля, которые создаются электроном в точке P, в тот момент, когда он пролетает через начало системы координат со скоростью $\vec{\upsilon}$. Координаты точки P и проекции вектора скорости электрона равны: $x = 10$ *нм*, $y = 10$ *нм*, $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$, $\upsilon_z = 100$ *Мм/с.*

Решение

Выберем правостороннюю систему координат и в этой системе покажем положение и скорость электрона, а также расположение точки P, в которой следует определить векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (рис.32). Расстояние точки P от начала координат определим по теореме Пифагора

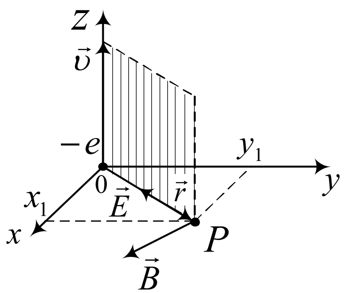


Рис.32

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 10\sqrt{2}\ (нм).$$

Вектор напряженности электрического поля направлен в начало координат и равен

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{x^2 + y^2} = 7{,}2 \cdot 10^6\ (В/м).$$

Величину индукции магнитного поля, создаваемого движущимся электроном, найдем по формуле

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\upsilon_z}{r^2} \sin\alpha ,$$

где $\sin\alpha = 1$, так как угол α между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$ равен 90^0.

Следовательно

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\upsilon_z}{x^2 + y^2} = 8\ (мТл).$$

Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$, а его направление, с учетом отрицательного знака заряда электрона, противоположно векторному произведению $\left[\vec{\upsilon},\vec{r}\right]$ (рис.32).

Задача 4. Точечный заряд q в точке O обладает скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис.33). Электрическое и магнитное поля движущегося заряда в точке P, отстоящей от O на расстоянии $\vec{r}$, характеризуются параметрами $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Найти связь между $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{\upsilon}$.

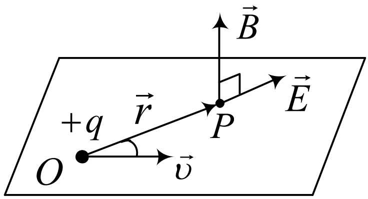


Рис.33

Решение

Движущийся электрический заряд создает вокруг себя электрическое и магнитное поля. Вектор напряженности электрического поля точечного заряда на расстоянии $\vec{r}$, равен

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3}\vec{r}\ .$$

С учетом данного выражения проведем преобразования в формуле, определяющей вектор индукции магнитного поля движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\left[\vec{\upsilon},\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{\upsilon}, 4\pi\varepsilon_0\vec{E}\right] = \varepsilon_0\mu_0\left[\vec{\upsilon},\vec{E}\right].$$

Учитывая, что электрическая ε_0 и магнитная μ_0 постоянные связаны со скоростью света в вакууме формулой

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

получим окончательно $\vec{B} = \frac{\left[\vec{\upsilon}, \vec{E}\right]}{c^2}.$

2. Определение индукции магнитного поля, создаваемого линейными проводниками с током произвольной конфигурации

Метод решения. Для нахождения индукции магнитного поля линейного проводника с током необходимо разбить его на элементарные участки. Магнитная индукция элемента тока $Id\vec{\ell}$ определяется законом Био-Савара_Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \left[d\vec{\ell}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}.$$

Магнитная индукция поля $\vec{B}$, создаваемая всем проводником, равна вектороной сумме

$$\vec{B} = \sum d\vec{B}.$$

От векторного суммирования следует перейти к его проекциям на координатные оси, а затем уже проводить интегрирование.

Рассмотрим вначале две стандартные задачи, связанные с расчетом индукции магнитного поля кругового тока, и индукции поля прямолинейного отрезка проводника с током. Полученные на основании закона Био-Савара-Лапласа формулы будем использовать в дальнейшем для упрощения расчета полей простейших проводников с токами, представляющих некоторую комбинацию прямолинейных и круговых участков.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить магнитную индукцию поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного прямого провода, в точке, расположенной на расстоянии r_0 от него (рис.34). Сила тока, текущего по проводнику I, длина отрезка ℓ.

Решение

Для определения магнитной индукции поля в точке *P*, создаваемого отрезком провода, выделим на нем элемент длиной $d\ell$ и воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} d\ell .$$

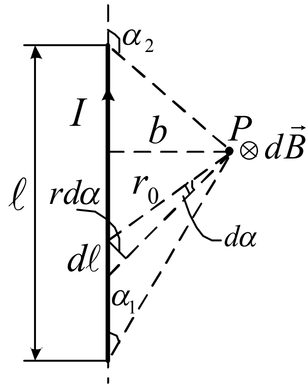


Рис.34

Заметим, что все вектора $d\vec{B}$, создаваемые элементами проводника с током, имеют одинаковое направление (от наблюдателя), поэтому сложение их векторов можно заменить сложением их модулей:

$$B = \int_1^2 dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\ell \frac{\sin\alpha}{r^2} d\ell .$$

Учитывая, что

$$d\ell \cdot \sin\alpha = r \cdot d\alpha \quad \text{и} \quad r_0 = r \cdot \sin\alpha ,$$

приведем представленный интеграл к виду, удобному для интегрирования по углу α:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha .$$

Интегрируя в пределах от α_1 до α_2, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) .$$

В частности, при симметричном расположении точки *P* относительно отрезка провода $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$, полученная формула преобразуется к виду

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\alpha_1 .$$

Для бесконечно длинного прямого проводника ($\ell \to \infty$, $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to \pi$), найдем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} .$$

Задача 2. Определить индукцию магнитного поля в точке *P*, находящейся на оси кругового контура радиуса R, по которому протекает ток I. Расстояние от центра кругового тока до точки *P* равно x.

Решение

Вектор индукции магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом тока $I \cdot d\ell$ в некоторой точке *P*, лежащей на оси кругового тока, показан на рис.35 . Его величина равна

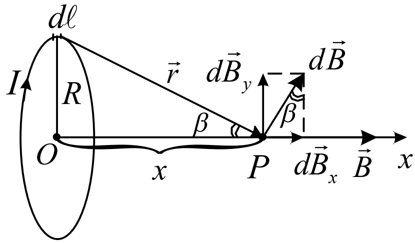


Рис.35

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\ell ,$$

так как угол $\alpha = \pi / 2$, а $\sin\alpha = 1$.

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие вдоль соответствующих координатных осей:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_x + d\vec{B}_y ,$$

тогда согласно принципу суперпозиции результирующий вектор магнитной индукции равен

$$\vec{B} = \sum d\vec{B}_x + \sum d\vec{B}_y .$$

Из соображений симметрии видно, что

$$\sum d\vec{B}_y = 0,$$

а векторы $d\vec{B}_x$ от различных элементов $d\vec{\ell}$ сонаправлены, поэтому вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси Ox. Заменяя векторное суммирование скалярным, величину индукции магнитного поля в данной точке найдем интегрированием

$$B = B_x = \int_\ell dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\beta \int_\ell d\ell = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R.$$

Учитывая, что $\sin\beta = \dfrac{R}{r}$ и $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{2\pi R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

В частности, индукция магнитного поля в центре кругового тока ($x = 0$) будет равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Задача 3. Найти индукцию магнитного поля, создаваемого контуром в виде квадрата со стороной a в точке P, находящейся на расстоянии a от вершин квадрата (рис.36). Сила тока в контуре I.

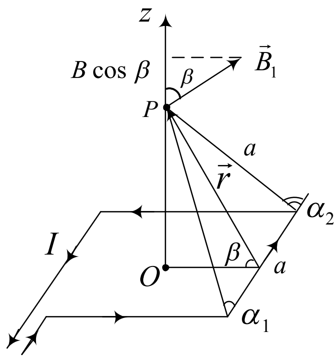


Рис.36

Решение

При решении данной задачи воспользуемся формулой, определяющей магнитную индукцию поля, создаваемого прямолинейным отрезком проводника с током

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Учитывая симметричное расположение точки P относительно стороны квадрата, а следовательно, равенство $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$, получим индукцию, создаваемую каждой стороной квадрата

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi a},$$

где $\alpha_1 = 60^0$, $\cos\alpha_1 = 0{,}5$, $r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\vec{B}_P = \sum_{i=1}^{4}\vec{B}_i .$$

Направление одного из векторов $\vec{B}_i$ показано на рис.36. Все данные вектора составляют с осью Oz угол β, а результирующий вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси Oz и равен

$$B_P = 4B_1\cos\beta .$$

Из рисунка видно, что

$$\cos\beta = \frac{a}{2r} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Таким образом, окончательно

$$B_P = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi a}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a} .$$

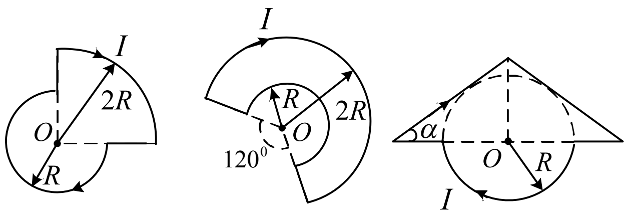
Задача 4. Определить индукцию магнитного поля, создаваемой плоским контуром в точке O. Сила тока $I = 1$ А. Радиус $R = 10$ см. Различные контуры представлены на рис.37.

Решение

1) Рассмотрим контур на рис.37*а*. В соответствии с принципом суперпозиции, индукция результирующего магнитного поля в точке O равна векторной сумме полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 ,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ – индукции круговых частей контура, $\vec{B}_3$ и $\vec{B}_4$ –



а) б) в)

Рис.37

магнитные индукции радиальных участков.

Магнитная индукция создаваемая радиальными участками контура равна нулю, так как для любого элемента этих участков $\left[I \cdot d\vec{\ell}, \vec{r}\right] = 0$. Индукции круговых частей тока в центре O определяются с использованием формулы (2):

$$B_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{3\mu_0 I}{8R}, \quad B_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2R} = \frac{\mu_0 I}{16R}.$$

Применив правило правого винта, видим, что векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены одинаково и перпендикулярны плоскости рисунка. В этом случае векторная сумма может быть заменена алгебраической. Результирующая магнитная индукция в точке O равна:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{7}{16} \cdot \frac{\mu_0 I}{R}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$B = 5{,}5 \text{ } мкТл.$$

2) Рассмотрим контур на рис.37*б*. Как и в предыдущем случая, магнитная индукция, создаваемая радиальными участками контура равна нулю, а круговых частей определяется по формулам:

$$B_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{3R}, \quad B_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2R} = \frac{\mu_0 I}{6R}.$$

Векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ в данном случае противоположны друг другу, поэтому искомая индукция магнитного поля определяется их разностью

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{6R}.$$

Вектор $\vec{B}$ в соответствии с правилом правого винта перпендикулярен плоскости рисунка и направлен к нам, а его численное значение равно $B = 2{,}1$ *мкТл*.

3) Перейдем к рассмотрению контура на рис.37в. Индукция результирующего магнитного поля в центре контура O равна векторной сумме полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + 2\vec{B}_2 ,$$

где $\vec{B}_1$ – индукция поля, создаваемого полуокружностью, $\vec{B}_2$ – индукция поля, создаваемого отрезком, касательным к данной окружности и симметрично расположенным относительно точки O.

Используя формулу для магнитной индукции в центре кругового тока, найдем

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Индукция магнитного поля, создаваемого симметричным отрезком, касательным к окружности и образующим углы $\alpha = 45^0$ с направлением на точку O, равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot 2\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \sqrt{2}.$$

Такую же величину индукции создает и второй такой отрезок проводника с током, при этом направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ совпадают. В силу этого, результирующая индукция магнитного поля определится алгебраической суммой

$$B = B_1 + 2B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 2\sqrt{2}).$$
$$B = 6\ \textit{мкТл}.$$

Задача 5. Однослойная катушка (соленоид) имеет длину ℓ и радиус сечения R. Число витков соленоида N, по которым течет ток I. Найти индукцию магнитного поля на оси соленоида в точке C, лежащей на расстоянии x от его середины. Изобразить примерный график зависимости индукции B от отношения x/R.

Решение

Соленоид, витки которого расположены вплотную друг к другу, эквивалентен системе круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось.

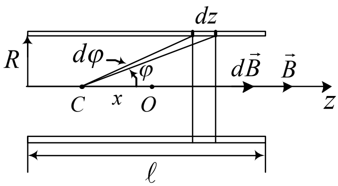


Рис.38

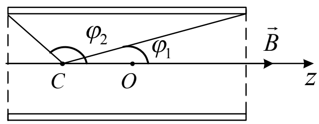


Рис.39

Для проведения расчета индукции магнитного поля введем координатную ось Z с началом отсчета в точке C (рис.38). Соленоид разобьем на элементы dz, каждый из которых можно считать круговым током. Такой элемент соленоида содержит $dN = \frac{N}{\ell}dz$ витков и сила тока в нем

$$dI = I \cdot dN = \frac{IN}{\ell}dz .$$

Магнитная индукция элемента длины соленоида, удаленного от точки C на расстояние z (в соответствии с формулой для кругового тока), будет равна

$$dB = \frac{\mu_0 INR^2}{2\ell\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}}dz \ .$$

Поскольку все элементарные векторы $d\vec{B}$ коллинеарны, индукция результирующего поля может быть найдена интегрированием данного выражения по всей длине соленоида.

Для упрощения интегрирования введем в качестве переменной угол φ и проведем преобразования с учетом того, что

$$\frac{R^3}{\left[R^2 + z^2\right]^{3/2}} = \sin^3\varphi\,, \quad dz = \frac{R \cdot d\varphi}{\sin^2\varphi}\,.$$

В результате получим

$$dB = \frac{\mu_0 IN}{2\ell}\sin\varphi \cdot d\varphi\ .$$

Интегрирование приводит к следующему результату

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\ell}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 IN}{2\ell}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)\,,$$

где φ_1 и φ_2 – углы, под которыми видны края рассматриваемого участка соленоида из точки наблюдения C (рис.39).

Как следует из рисунка

$$\cos\varphi_1 = \frac{(\ell/2)+x}{\sqrt{R^2 + \left[(\ell/2)+x\right]^2}}\,,$$

$$\cos\varphi_1 = -\frac{(\ell/2)-x}{\sqrt{R^2 + \left[(\ell/2)-x\right]^2}}\,.$$

Таким образом, окончательно

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\ell}\left(\frac{(\ell/2)+x}{\sqrt{R^2 + \left[(\ell/2)+x\right]^2}} + \frac{(\ell/2)-x}{\sqrt{R^2 + \left[(\ell/2)-x\right]^2}}\right).$$

В середине соленоида $x = 0$

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\ell} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{R^2 + \ell^2/4}}.$$

Если соленоид бесконечно длинный, то $R << \ell$ и

$$B = \frac{\mu_0 IN}{\ell} = \mu_0 nI,$$

где $n = N/\ell$ – число витков на единицу длины соленоида.

Вблизи края соленоида $x = \ell/2$

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\sqrt{R^2 + \ell^2}}.$$

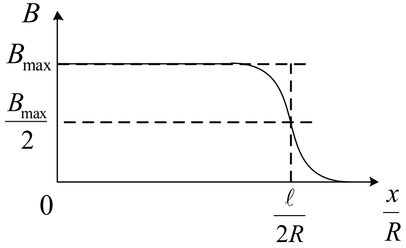


Рис.40

Таким образом, индукция магнитного поля на краях соленоида в 2 раза меньше, чем в его середине.

Примерный график зависимости магнитной индукции B от отношения x/R представлен на рис.40.

3. Определение магнитной индукции полей, обладающих специальной симметрией

Метод решения. При наличии специальной симметрии (поле прямого тока, поле коаксиальных проводников с токами, поле соленоида и тороида) наиболее эффективно использование теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$.

При выборе замкнутого контура интегрирования необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1) точка, в которой определяется магнитная индукция, должна принадлежать контуру L;

2) из соображений симметрии скалярное произведение $(\vec{B}, d\vec{\ell})$ вдоль контура должно быть постоянным или на отдельных участках равным нулю.

Примеры решения задач

Задача 1. По сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток плотностью j. Рассчитать магнитное поле внутри и вне проводника.

Решение

Силовые линии магнитного поля как вне, так и внутри проводника представляют собой концентрические окружности с центром на его оси. Модуль вектора $\vec{B}$ зависит только от расстояния r от оси цилиндра до точки наблюдения окружности, поле обладает осевой симметрией, поэтому для нахождения индукции можно воспользоваться теоремой о циркуляции.

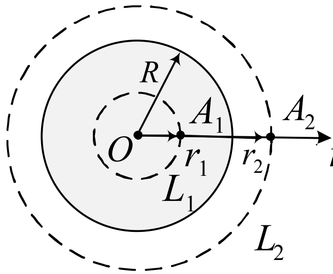


Рис.41

Рассмотрим точку A_1, расположенную внутри проводника на расстоянии r_1 (рис.41). Через данную точку проведем контур интегрирования L_1 в виде окружности радиуса r_1 $(r_1 \le R)$. Сумма токов, охватываемая этим контуром, равна

$$\sum I = j\pi r_1^2 .$$

В соответствии с теоремой о циркуляции имеем

$$B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 \cdot \pi r_1^{\,2} j ,$$

следовательно, индукция поля внутри проводника линейно зависит от расстояния точки наблюдения до его оси

$$B_1 = \frac{\mu_0 j r_1}{2} .$$

Рассмотрим теперь точку A_2, расположенную вне проводника на расстоянии r_2, и проведем через нее контур интегрирования L_2. Применяя теорему о циркуляции для данного контура, получим

$$B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 \cdot \pi R^2 j\,,$$

откуда индукция магнитного поля вне проводника равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 j R^2}{2r_2}.$$

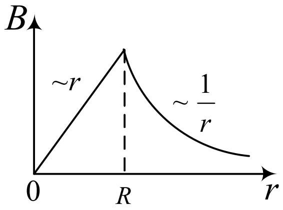


Рис.42

График зависимости $B(r)$ представлен на рис.42.

Задача 2. Двухпроводная система состоит из коаксиально расположенных проводника радиуса $R_1 = 2\,мм$ и тонкостенной цилиндрической трубы радиуса $R_2 = 2\,см$. Силы токов в обоих проводниках равны ($I = 10\,А$) и текут в противоположных направлениях. Найти индукцию магнитного поля в точках, лежащих на расстояниях $r_1 = 1\,см$ и $r_2 = 3\,см$ от оси системы. Систему считать бесконечно длинной.

Решение

В данной системе магнитные поля, создаваемые как током, текущим по осевому проводнику, так и током, текущим по трубе, обладают осевой симметрией. Силовые линии индукции являются окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси трубы и концентричных с ней (рис.43). Это позволяет воспользоваться для расчета индукции результирующего поля теоремой о циркуляции вектора

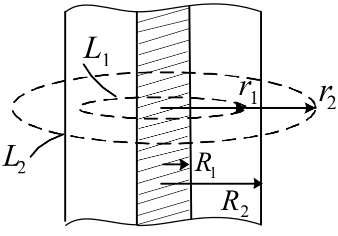


Рис.43

$\vec{B}$.

Контуры интегрирования проведем в виде окружностей, расположенных также как и линии индукции. Радиус контура L_1 удовлетворяет условию $R_1 < r < R_2$, а контура L_2 – условию $r > R_2$. Направление обхода контуров выберем так, чтобы оно составляло правовую систему с осевым током.

С контуром L_1 сцеплен только осевой ток, поэтому в соответствии с теоремой о циркуляции,

$$\oint B_\ell d\ell = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k ,$$

имеем

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \text{ , и } B = \mu_0 I/(2\pi r).$$

Контур L_2 охватывает токи, текущие и по осевому проводнику, и по трубе. Так как они направлены в противоположные стороны, то $\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$ и, следовательно, $B = 0$.

Таким образом, при $r = r_1 = 1 см$, получим $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = 2 \cdot 10^{-4}\, Тл$; при $r = r_2 = 3$ $см$ $B = 0$.

Задача 3. Найти зависимость индукции магнитного поля от расстояния до оси коаксиального длинного кабеля, состоящего из двух концентрических проводников (рис.44), по которым идут токи плотностью j_1 и j_2.

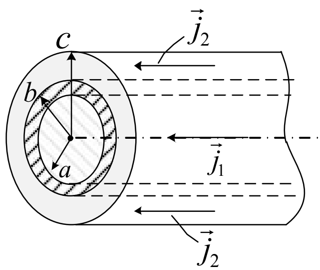


Рис.44

Решение

Магнитное поле обладает осевой симметрией, поэтому применим теорему о циркуляции B для контура в виде концентрической окружности, последовательно увеличивая ее радиус r.

Для области $r \le a$

$$\oint_{\ell} B_\ell d\ell = \mu_0 I \quad \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2 ,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 j_1 r}{2} .$$

Если $r = a$, то

$$B = \frac{\mu_0 j_1 a}{2} .$$

В области $a \le r \le b$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi a^2 \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 j_1 a^2}{2r} .$$

Если $r = b$,

$$B = \frac{\mu_0 j_1 a^2}{2b} .$$

В области $b \le r \le c$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi a^2 + \mu_0 j_2 \pi (r^2 - b^2) ,$$

следовательно

$$B = \frac{\mu_0 j_2 r}{2} + \frac{\mu_0 (j_1 a^2 - j_2 b^2)}{2r} .$$

Если $r = c$,

$$B = \frac{\mu_0 j_2 c}{2} + \frac{\mu_0 (j_1 a^2 - j_2 b^2)}{2c} .$$

В области $r > c$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi a^2 + \mu_0 j_2 \pi (c^2 - b^2)$$

и

$$B = \frac{\mu_0}{2r}(j_1 a^2 + j_2 c^2 - j_2 b^2) .$$

На основании полученных формул представим график зависимости $B(r)$ (рис.45).

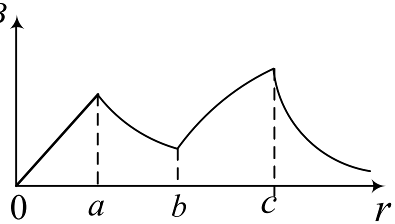


Рис.45

Задача 4. Внутри длинного провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние ℓ. По проводу течет постоянный ток плотности j. Найти индукцию магнитного поля внутри полости. Рассмотреть случай $\ell = 0$.

Решение

Предположим, что в полости протекает ток плотностью j и такой же ток протекает в противоположном направлении, т.е. ток в полости фактически отсутствует. В этом случае, проводник с полостью можно рассматривать как два сплошных проводника, вложенных друг в друга по которым идут токи в противоположных направлениях.

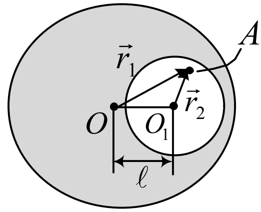


Рис.46

Найдем поле в точке А, находящейся внутри полости (рис.46). Для контура с радиусом r_1, в соответствии с теоремой о циркуляции, имеем

$$\oint_\ell B_\ell d\ell = \mu_0 j S_1 \qquad \Rightarrow \qquad B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 j \pi r_1^2 ,$$

откуда $B_1 = \dfrac{\mu_0 j r_1}{2}$ или в векторной форме $\vec{B}_1 = \dfrac{1}{2}\mu_0\left[\vec{j},\vec{r}_1\right]$.

Для контура с радиусом r_2:

$$\oint_\ell B_\ell d\ell = -\mu_0 j S_2 \qquad \Rightarrow \qquad B_1 \cdot 2\pi r_2 = -\mu_0 j \pi r_2^2 ,$$

откуда $B_2 = -\dfrac{\mu_0 j r_2}{2}$ или в векторной форме $\vec{B}_2 = -\dfrac{1}{2}\mu_0\left[\vec{j},\vec{r}_2\right]$.

Результирующее поле равно векторной сумме полей, созданных прямолинейными противоположно направленными токами

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2}\left[\vec{j},(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right] = \frac{\mu_0}{2}\left[\vec{j},\vec{\ell}\right].$$

Полученный результат свидетельствует о том, что поле в любой точке полости одинаково.

Задача 5. Ток течет вдоль длинной тонкостенной трубы радиусом R. Вдоль всей длины трубы прорезана узкая щель шириной h. Определить магнитную индукцию внутри трубы, если $h << R$.

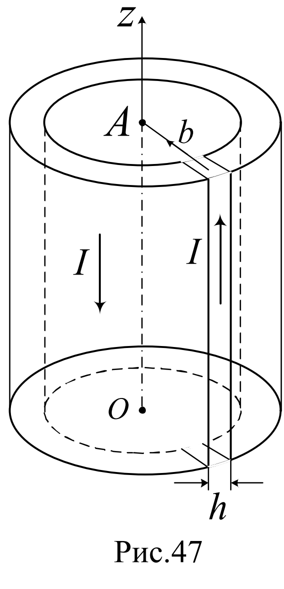


Рис.47

Решение

Прежде всего, отметим, что согласно теореме о циркуляции, внутри сплошной трубы индукция магнитного поля равняется нулю.

При решении этой задачи, как и в предыдущем случае, воспользуемся искусственным приемом. Будем считать, что ток I течет вдоль всей трубы в одну сторону, а по щели ток I' - в противоположную, причем такой, чтобы суммарный ток в щели был равен нулю. Следовательно, магнитное поле внутри трубы формируется только током I'. В этом случае для определения магнитной индукции внутри трубы, воспользуемся формулой прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi b},$$

где b - расстояние от тока до некоторой точки А внутри трубы (рис.47).

Введя линейную плотность тока I

$$i = \frac{I}{2\pi R},$$

для тока I', получим

$$I' = ih = \frac{Ih}{2\pi R}.$$

Таким образом, магнитное поле внутри трубы равно

$$B \frac{\mu_0 Ih}{4\pi^2 bR}.$$

Задача 6. Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределенного:

а) по плоскости с линейной плотностью $\vec{j}$;

б) по двум параллельным плоскостям с линейными плотностями $\vec{j}$ и -$\vec{j}$.

Решение

Рассмотрим магнитное поле тока, равномерно распределенного по плоскости. В данном случае линии вектора $\vec{B}$ параллельны плоскости, перпендикулярны линиям тока и по разным сторонам этой плоскости имеют противоположные направления. Из симметрии поля следует, что для определения индукции достаточно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$. На рис.48 показан выбранный контур L в сечении, перпендикулярном плоскости с током, при этом

$$\vec{B}_1 = B \cdot \vec{\tau}\ ,\quad \vec{B}_2 = -B \cdot \vec{\tau}\ ,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательный к плоскости.

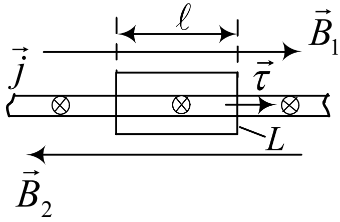


Рис.48

В соответствии с теоремой о циркуляции, имеем

$$\oint_{\Gamma}(\vec{B}, d\vec{\ell}) = \mu_0 \int_{\ell} j_{\ell} d\ell\ ,$$

$$\vec{B}_1(\ell\vec{\tau}) + \vec{B}_2(-\ell\vec{\tau}) = \ell\big[B - (-B)\big] = 2B\ell\ .$$

Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}\ .$$

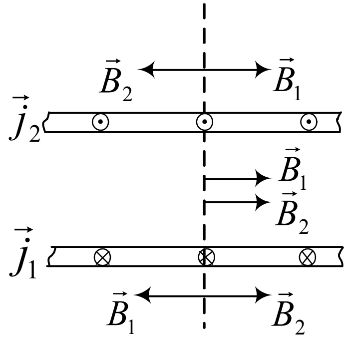


Рис.49

В случае двух плоскостей, по которым текут токи в противоположных направлениях, магнитные индукции между плоскостями направлены в одну сторону (рис.49). Индукция результирующего поля удваивается и равна $B = \mu_0 j$. Во внешних полупространствах индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены в противоположные стороны и результирующее магнитное поле равно нулю.

Задача 7. Требуется получить индукцию магнитного поля $B = 0{,}05\,Тл$ в соленоиде длиной $\ell = 20\,см$ и диаметром $D = 2\,см$. Найти число ампер-витков IN, необходимое для этого соленоида, и разность потенциалов U, которую надо приложить к концам обмотки из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5\,мм$. Считать поле соленоида однородным.

Решение

В данной задаче диаметр соленоида D существенно меньше его длины ℓ, поэтому такой соленоид приближенно можно считать бесконечно длинным. Внутри бесконечно длинного соленоида магнитное поле однородно и равно

$$B = \mu_0 n I ,$$

а, число ампер-витков для данного соленоида

$$I \cdot N = \frac{B\ell}{\mu_0} .$$

Напряжение, которое надо приложить к концам обмотки соленоида, найдем по закону Ома

$$U = I \cdot R = I \frac{\rho L}{S} ,$$

где $S = \pi d^2 / 4$ – площадь сечения, $L = \pi D N$ – длина медного провода, ρ – удельное сопротивление меди.

Окончательно, получим

$$U = \frac{4\rho B \ell D}{\mu_0 d^2} .$$

Выполнив вычисления, найдем:

$$IN = 80\, A, \quad U = 40{,}7\, B.$$

Задача 8. На тороид малого поперечного сечения намотано равномерно $N = 2{,}5 \cdot 10^3$ витков провода, по которому течет ток I. Найти отношение η индукции магнитного поля внутри тороида к индукции в его центре.

Решение

Пусть средний радиус тороида равен R. Выбирая контур интегрирования в виде окружности радиуса R вдоль осевой линии тороида, в соответствии с теоремой о циркуляции, получим

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 NI\ , \qquad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\ .$$

При осуществлении навивки провода на поверхность тора, на внешней стороне витки провода неизбежно будут располагаться на некотором расстоянии h (шаге) друг от друга. Вследствие этого при пропускании тока I по обмотке тороида будет иметь место продольный ток I_τ, который можно рассматривать как круговой ток радиуса R. При этом магнитная индукция в центре тороида

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_\tau}{2R}\ .$$

Для нахождения продольного тока введем линейную плотность тока в витке $i = I/h$. Вектор плотности тока $\vec{i}$ можно представить в виде продольной и поперечной составляющих $\vec{i} = \vec{i}_\tau + \vec{i}_n$. Продольная составляющая равна

$$i_\tau = i \cdot \sin\alpha = \frac{I}{h} \cdot \frac{h}{2\pi R} = \frac{I}{2\pi R}\ ,$$

следовательно, продольный ток можно определить величиной

$$I_\tau = i_\tau \cdot 2\pi R = \frac{I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = I\ .$$

Таким образом, магнитная индукция в центре тороида, создаваемая продольным током, равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}\ ,$$

а отношение

$$\eta = \frac{B}{B_0} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \cdot \frac{2R}{\mu_0 I} = \frac{N}{\pi}\ .$$

4. Определение магнитных полей, создаваемых вращающимися заряженными телами

Метод решения. При вращении заряженного тела вокруг его оси создаются элементарные круговые токи $dI = \frac{\omega}{2\pi} dq$, где ω – угловая скорость вращения, dq – выделенный элементарный заряд, определяемый через линейную, поверхностную или объемную плотность распределения зарядов в теле. В дальнейшем, используя формулу индукции для кругового тока, путем интегрирования можно определить результирующее значение B, создаваемое всеми элементарными токами. Аналогично, путем интегрирования, можно определить и магнитный момент вращающегося тела.

Примеры решения задач

Задача 1. Тонкий непроводящий диск радиуса R, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти:

а) индукцию магнитного поля в центре диска;

б) магнитный момент диска.

Решение

Рассмотрим кольцевой элемент диска радиуса r и ширины dr (рис.50). Электрический заряд данного кольца равен

$$dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi r dr .$$

Вращающееся заряженное кольцо подобно круговому току

$$dI = \nu dq = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi\sigma r dr = \omega\sigma r dr .$$

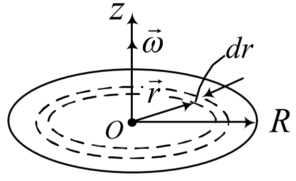


Рис.50

Индукцию магнитного поля в центре диска, создаваемую данным элементом, определим по формуле индукции кругового тока

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma\omega dr .$$

Интегрируя данное выражение по r в пределах от 0 до R, получим

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega\int_0^R dr = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R .$$

Магнитный момент, создаваемый элементарным током dI, равен

$$dp_m = \pi r^2 dI = \pi\sigma\omega r^3 dr .$$

Интегрируя обе части этого выражения, найдем полный магнитный момент вращающегося диска:

$$p_m = \pi\sigma\omega\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4} .$$

Задача 2. Заряд q равномерно распределен по объему однородного шара массы m и радиуса R, который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω. Найти соответствующий магнитный момент и его отношение к механическому моменту.

Решение

Заряженный шар мысленно делим на очень тонкие диски, перпендикулярные оси вращения шара (рис.51). Радиус выделенного диска толщиной dz, равен

$$r = \sqrt{R^2 - z^2} .$$

Для данного элементарного диска найдем магнитный момент, а затем путем интегрирования определим магнитный момент p_m для вращающегося шара в целом. В предыдущей задаче была

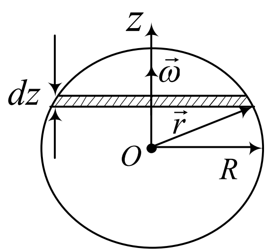


Рис.51

получена формула, определяющая магнитный момент вращающегося диска с поверхностной плотностью заряда σ:

$$p_m = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}.$$

Применительно к рассматриваемой задаче в этой формуле произведем следующие замены:

$$p_m \to dp_m; \quad R \to r = \sqrt{R^2 - z^2}; \; \sigma \to d\sigma = \rho \cdot dz,$$

где $\rho = 3q/4\pi R^3$ - плотность заряда.

Итак, для выделенного диска имеем:

$$dp_m = \frac{3q\omega}{16R^3}(R^2 - z^2)^2 dz.$$

Интегрируя по z от 0 до R и удваивая, полученный результат, найдем

$$p_m = \frac{3q\omega}{8R^3}\int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3q\omega}{8R^3}(R^4 z - 2R^2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5})\Big|_0^R = \frac{q\omega R^2}{5}.$$

Механический момент шара

$$L = I\omega = \frac{2mR^2}{5}\omega,$$

а отношение

$$\frac{p_m}{L} = \frac{q}{2m}.$$

Задача 3. Заряд q равномерно распределен по объему однородного цилиндра радиусом R и высотой h. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти соответствующий магнитный момент.

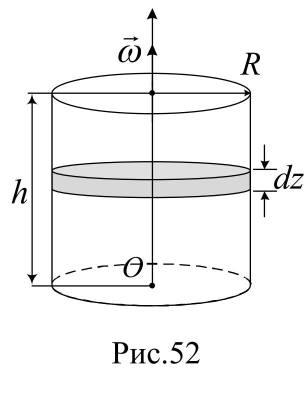


Рис.52

Решение

Однородный цилиндр мысленно разделим на очень тонкие диски толщиной dz, перпендикулярные оси цилиндра (рис.52). Магнитный момент вращающегося диска, заряженного с поверхностной плотностью σ, был получен в предыдущей задаче

$$p_m = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}.$$

В данной формуле проведем следующие замены:

$$p_m \to dp_m, \qquad \sigma \to d\sigma = \rho dz = \frac{q}{\pi R^2 h} dz,$$

где $\rho = \dfrac{q}{\pi R^2 h}$ – объемная плотность заряженного цилиндра.

С учетом произведенных замен, получим

$$dp_m = \frac{q\omega R^2}{4h} dz.$$

Интегрируя данное выражение, найдем полный магнитный момент цилиндра

$$p_m = \frac{q\omega R^2}{4h} \int_0^h dz = \frac{q\omega R^2}{4}.$$

Задача 4. Непроводящая сфера радиуса $R = 50\,мм$, заряженная равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 10\,мкКл/м^2$, вращается с угловой скоростью $\omega = 70\,рад/с$ вокруг оси, проходящей через ее центр. Найти магнитную индукцию в центре сферы.

Решение

На сфере с помощью двух параллельных плоскостей на расстоянии dz друг от друга и перпендикулярных оси вращения oz выделим кольцевой элемент, площадь которого будет равна

$$dS = 2\pi r R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta,$$

где $r = R\sin\theta$ – радиус кольцевого элемента, θ – полярный угол.

Вследствие вращения заряженной сферы данному кольцу будет соответствовать круговой ток

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma dS = \sigma\omega R^2 \sin\theta d\theta \ .$$

Магнитная индукция поля тока dI в центре сферы

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \cdot \frac{2\pi r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma\omega R^2 \sin^2\theta d\theta}{2(R^2 \sin^2\theta + R^2 \cos^2\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \sigma\omega R \sin^3\theta d\theta.$$

Магнитную индукцию в центре сферы, обусловленную ее вращением, найдем интегрированием

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma\omega R \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma\omega R \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma\omega R \ .$$

Проведенные вычисления, дают следующий результат

$$B = 29 \ nТл.$$

2.1.3. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Электрон движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{\upsilon}$ =3,0·10^5 *м/с*. Найти индукцию поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии r =1,0 ·10^{-9} *м* от него и лежащей на перпендикуляре к $\vec{\upsilon}$, проходящем через мгновенное положение электрона.

Ответ: B = 4,6 *мТл*.

2. Точечный заряд движется со скоростью $\upsilon = 900$ м/с. В некоторый момент времени в точке наблюдения P напряженность электрического поля этого заряда $E = 600$ В/м, а между векторами $\vec{E}$ и $\vec{\upsilon}$ в точке P угол $\alpha = 30^0$. Найти индукцию магнитного поля данного заряда в этот момент.

Ответ: $B = \varepsilon_0 \mu_0 \upsilon E \sin\alpha = 3{,}0 \ nТл.$

3. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиуса $r = 5{,}3 \, нм.$ Вычислить силу эквивалентного кругового тока и индукцию B поля в центре окружности.

Ответ: 1,1 *мА*; 12,57 *Тл*.

4. На расстоянии $r = 10\,нм$ от траектории прямолинейно движущегося электрона максимальное значение магнитной индукции $B_{\max} = 160\,мкТл$. Определить скорость электрона.

Ответ: 1 *Мм/с*.

5. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии 10 *см* друг от друга, По проводникам текут токи $I_1 = I_2 = 5\,A$ в противоположных направлениях. Найти величину и направление магнитной индукции поля в точке, находящейся на расстоянии 10 *см* от каждого проводника.

Ответ: $B = 10^{-5}\,Тл$.

6. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом рис.53. По проводникам текут токи $I_1 = 80\ A$ и $I_2 = 60A$. Расстояние между проводниками $d = 10\,см$. Чему равна магнитная индукция в точках *A* и *C*, одинаково удаленных от обоих проводников?

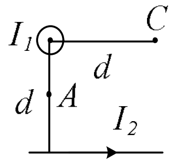


Рис.53

Ответ: $B_A = \dfrac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2}\quad B_C = \dfrac{\mu_0}{2\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2}$.

7. Бесконечно длинный прямой проводник согнут под прямым углом рис.54. По проводнику течет ток $I = 100\ A$. Вычислить магнитную индукции в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на $a = 20\ см$.

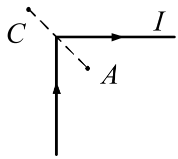


Рис.54

Ответ: $B_C = 0.4\cdot 10^{-4}\,Тл$, $B_A = 2.4\cdot 10^{-4}\,Тл$.

8. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму

квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура? Ответ: увеличилась в 1,14.

Второй уровень сложности

1. Определить напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля, которые создаются электроном в точке P, в тот момент, когда он пролетает через начало системы координат со скоростью $\vec{\upsilon}$.

а) Координаты точки P и проекции вектора скорости электрона равны: $x = -10\,нм$, $y = 10\,нм$, $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$, $\upsilon_z = 100\,Мм/с$.

б) Координаты точки P и проекции вектора скорости электрона равны: $x = 0\,нм$, $y = 10\,нм$, $z = 10\,нм$, $\upsilon_z = \upsilon_y = 0$, $\upsilon_x = 100\,Мм/с$.

2. По тонкому проводящему кольцу радиусом R = 10 *см* течет ток I = 80 *А*. Найти магнитную индукцию в точке, равноудаленной от всех точек кольца на r = 20 *см*.

Ответ: $B = (\mu_0 \mathrm{I} \mathrm{R}^2)/2r^3 = 6{,}28 \cdot 10^{-5}\,Тл$.

3. Длинный провод с током I = 50 *А* изогнут в точке *О* под углом 120° рис.55. Определить магнитную индукцию в точке *А*, расположенной на биссектрисе этого угла на расстоянии d = 5 *см* от точки *О*.

Ответ: $3{,}46 \cdot 10^{-4}$ *Тл*.

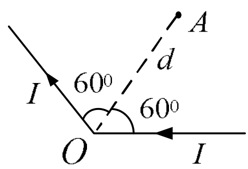
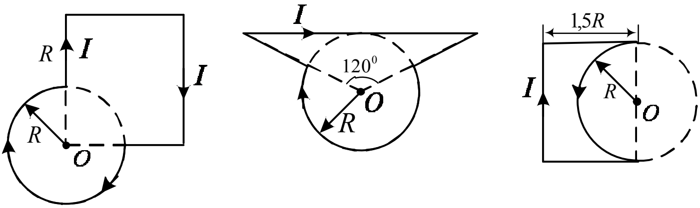


Рис.55

4. По однородному прямому проводу, радиус сечения которого R течет постоянный ток I. Найти индукцию магнитного поля этого тока в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором $\vec{r}$. Рассмотреть случаи, когда точка лежит внутри и вне провода.

5. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток $I = 1$ А. Определить индукцию магнитного поля,

создаваемого этим током в точке O (рис. 56,а,б,в). Радиус изогнутой части проводника $R = 20$ см.



а) б) в)

Рис.56

Ответ:а) 3,1 мкТл, б) 1,73 мкТл, в) 0,82 мкТл.

6. Однослойная катушка (соленоид) имеет длину ℓ и радиус сечения R. Число витков на единицу длины n. Найти индукцию магнитного поля в центре катушки, если ток через нее равен I.

7. Катушка длиной 30 см имеет 1000 витков. Найти индукцию магнитного поля внутри катушки, если по катушке проходит ток 2 А. Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Ответ: 8,37*мТл.*

2.2. СИЛА И МОМЕНТ СИЛ, ДЕЙСТВУЩИХ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. РАБОТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТУРА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.2.1. Основные законы и формулы

- **Закон Ампера**

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell}, \vec{B}\right], \; dF = IBd\ell \sin\alpha$$

где $d\vec{F}$ – сила, действующая на элемент длиной $d\ell$ проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией B, $d\vec{\ell}$ - вектор, совпадающий с направлением тока, α - угол между $d\vec{\ell}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Ампера определяется по правилу левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{B}$, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера.

- **Магнитный момент контура с током**

$$\vec{P}_m = \vec{n}IS,$$

где S – площадь контура, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности контура, направление которого связано с направлением тока в контуре правилом винта.

- **Момент сил Ампера, действующий на контур с током в магнитном поле с индукцией B**

$$\vec{M} = \oint\left[\vec{r}, d\vec{F}\right] = \left[\vec{P}_m, \vec{B}\right],$$

где $\vec{P}_m = \vec{n}IS$ магнитный момент контура с током, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности контура.

Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен как вектору $\vec{P}$, так и вектору $\vec{B}$, а его модуль равен

$$M = P_m B \sin\alpha,$$

где α - угол между векторами $\vec{P}_m$ и $\vec{B}$.

- **Магнитный поток (поток вектора $\vec{B}$) сквозь произвольную поверхность** S – число линий магнитной индукции, пронизывающих данную поверхность

$$\Phi_m = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B_n dS,$$

где $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к площадке dS, $B_n = B \cdot \cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали.

Для однородного поля и плоской поверхности

$$\Phi_m = BS\cos\alpha, \quad \alpha(\vec{B}, \vec{n}).$$

Единица измерения магнитного потока

$$[\Phi_m] = 1Тл \cdot 1м^2 = 1Вб \text{ (Вебер).}$$

- **Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле**

$$W = -(\vec{P}_m, \vec{B}), \; W = -P_m B \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{P}_m$ и $\vec{B}$.

Минимум потенциальной энергии достигается при $\vec{P}_m \parallel \vec{B}$.

- **Работа сил Ампера при перемещении контура с током в магнитном поле**

а) элементарная работа $\delta A = Id\Phi$

где $d\Phi = B_n dS$ – поток вектора магнитной индукции сквозь поверхность dS;

б) полная работа

$$A_{12} = \int_1^2 Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 – значения магнитных потоков через контур в начальном и конечном положениях.

2.2.2. Основные типы задач и методы их решения

1. Определение сил и механического момента сил, действующих на проводник и контур с током в магнитном поле

Метод решения. Результирующая сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, определяется интегрированием силы Ампера по всей его длине. Проводник разбивается на бесконечно малые элементы длины $d\ell$, находятся проекции вектора элементарной силы $d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell}, \vec{B}\right]$

на соответствующие координатные оси, а затем уже проводится их интегрирование. Величина и направление результирующей силы определяются на основе принципа суперпозиции.

Результирующий механический момент сил Ампера, действующий на контур с током в магнитном поле, может быть определен по формуле

$$d\vec{M} = \left[\vec{r}, d\vec{F}\right].$$

Однако, расчет по этой формуле слишком сложен и обычно вращательный момент сил Ампера определяют с использованием магнитного момента:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_{m,}\vec{B}\right].$$

Для достаточно малого плоского контура с током, называемого элементарным, магнитный момент определяется формулой

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где I – сила тока, S – площадь, ограниченная контуром, $\vec{n}$ – нормаль к контуру, направление которой связано с направлением тока правилом правого винта.

Нахождение механического момента, действующего на произвольный контур в неоднородном магнитном поле, требует его мысленного разбиения на бесконечно малые элементы длины с последующим интегрированием по всему контуру.

Механический момент определяет поведение контура с током в магнитном поле. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен как вектору $\vec{p}_m$, так и вектору $\vec{B}$, а его модуль равен $M = p_m B\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$. Следовательно, механический момент стремится повернуть контур с током так, чтобы его магнитный момент сориентировался в направлении вектора $\vec{B}$. В этом случае положение контура будет устойчивым.

Примеры решения задач

Задача 1. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток I_0, расположена прямоугольная рамка, по которой течет ток I. Направления этих токов, и размеры рамки представлены на рис.57. Определить силы взаимодействия прямого тока с каждой из сторон рамки и результирующую силу, действующую на рамку со стороны магнитного поля.

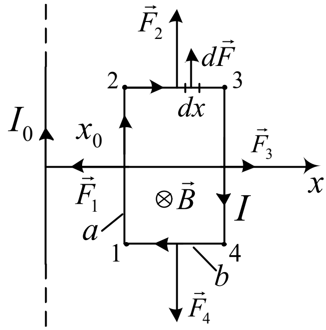


Рис.57

Решение

Вектор индукции магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током, перпендикулярен плоскости рамки и равен

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x},$$

где x – расстояние от проводника с током до рассматриваемой точки.

Сила, с которой это поле действует на каждую из сторон рамки, может быть найдена путем суммирования элементарных сил Ампера

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell}, \vec{B}\right].$$

Учитывая то, что в пределах каждой из сторон векторы $d\vec{\ell}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны $(\sin\alpha = 1)$, а элементарные силы параллельны друг другу, результирующая сила, действующая на каждую из сторон, определится интегрированием

$$F = \int_\ell dF = I\int_\ell B d\ell \, .$$

Стороны рамки 1-2 и 3-4 параллельны прямому проводу и находятся от него на расстояниях соответственно $r = x_0$ и $r = x_0 + b$. Величина индукции B для каждой стороны принимает определенное значение, поэтому, вынося ее из под интеграла и проведя интегрирование, получим

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi x_0}\int_0^a d\ell = \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi x_0},$$

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi(x_0 + b)}\int_0^a d\ell = \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi(x_0 + b)} \, .$$

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ направлены в противоположные стороны (рис. 56).

Силы, действующие на стороны 2-3 и 4-1, равны по модулю и также противоположны по направлению. Вдоль каждой из сторон индукция поля непрерывно изменяется. Нахождение этих сил осуществляется интегрированием

$$F_2 = F_4 = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+b}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\ln\frac{x_0 + b}{x_0} \, .$$

Результирующая сила, действующая на рамку в магнитном поле тока I_0, равна

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 \, .$$

Для модуля силы получаем

$$F = \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + b}\right).$$

Задача 2. По длинному проводнику и параллельной ему тонкой ленте, лежащими в одной плоскости, текут постоянные токи I_1 и I_2. Расстояние между проводником и лентой a, ее ширина b. Найти силу взаимодействия между ними в расчете на единицу их длины.

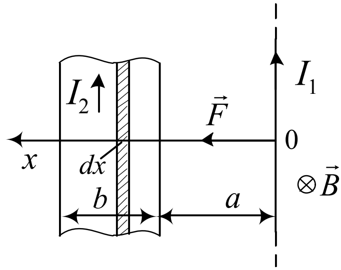


Рис.58

Решение

Для определения силы магнитного взаимодействия проводника и ленты сначала вычислим индукцию магнитного поля тока I_2 на удалении от него на расстоянии a, где расположен ток I_1. С этой целью разделим площадь ленты на узкие полосы шириной dx, в пределах которых магнитную индукцию можно считать постоянной (рис.58). Величину индукции, создаваемую узкой и длинной полоской, на расстоянии x до проводника с током I_1, найдем по формуле

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi x} = \frac{\mu_0}{2\pi x} \cdot \frac{I_2 dx}{b}.$$

Магнитная индукция поля, создаваемая всей полоской, перпендикулярна току I_1 (см. рис.58) и определяется интегралом

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Таким образом, в соответствии с законом Ампера, магнитная сила, действующая на единицу длины провода с током I_1, равна

$$F_{ед} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Направление силы совпадает с осью Ox.

Задача 3. В поле длинного прямого проводника с током I_0 находится контур с током I (рис.59). Плоскость контура перпендикулярна прямому проводу. Найти момент сил Ампера, действующих на этот контур. Размеры контура показаны на рисунке.

Решение

Силовые линии магнитного поля, создаваемого прямолинейным током I_0, представляют собой концентрические окружности, а направление вектора $\vec{B}$ совпадает с направлением касательной в каждой ее точке. Величина магнитной индукции поля зависит от радиуса r и определяется с помощью теоремы о циркуляции:

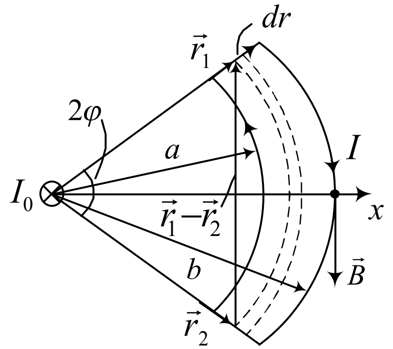


Рис.59

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}.$$

На круговых частях контура силы Ампера равны нулю. Силы же, действующие на элементах $d\vec{r}$ радиальных участках перпендикулярны плоскости контура и численно равны друг другу:

$$dF_1 = dF_2 = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi r} dr.$$

Момент этих сил относительно центра O равен

$$d\vec{M} = d\vec{M}_1 + d\vec{M}_2 = \left[\vec{r}_1, d\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, d\vec{F}_2\right].$$

Поскольку $dF_2 = -dF_1$, то эти силы создают пару сил, момент которой

$$d\vec{M} = \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), d\vec{F}_1\right].$$

Векторы $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ и $d\vec{F}_1$ взаимно перпендикулярны, поэтому

$$dM = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| \cdot dF ,$$

а с учетом того, что $\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = 2r \cdot \sin\varphi$, получим

$$dM = \frac{\mu_0 I_0 I}{\pi} \sin\varphi \cdot dr .$$

При интегрировании полученного выражения по r от a до b, найдем

$$M = \frac{\mu_0 I_0 I}{\pi}(b-a)\sin\varphi .$$

Задача 4. В центре длинного соленоида, имеющего n=$5 \cdot 10^3$ витков на метр, помещена рамка, состоящая из N=50 витков провода площадью $S = 4 см^2$ каждый. Плоскость рамки совпадает с направлением линии индукции внешнего магнитного поля. Рамка может вращаться вокруг оси ОО’, перпендикулярной оси соленоида (рис.60). При пропускании тока по рамке и соленоиду, соединенных последовательно, рамка повернулась на угол $\varphi =$ 60°. Определить силу тока, если жесткость упругой нити, на которой подвешена рамка, $k = 6 \cdot 10^{-5}$ Н·м/рад.

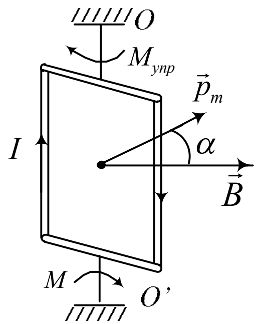


Рис.60

Решение

При появлении тока рамка установится в таком положении, когда момент сил магнитного поля $\vec{M}$ уравновесится моментом упругих сил, возникающих при закручивании нити

$$M = M_{упр}$$

По определению

$$M = P_{\mathrm{m}} B \sin\alpha ,$$

где $P_m = NIS$ - магнитный момент рамки, $B = \mu_0 nI$ - индукция поля соленоида, α - угол между векторами $\vec{P}_m$ и $\vec{B}$.

С учетом этих выражений имеем:

$$M = \mu_0 nNI^2 S \sin\alpha .$$

Заметим, что вначале, когда тока нет, $\alpha = \pi / 2$.

Согласно закону Гука

$$M_{упр} = k\varphi ,$$

где $\varphi = \pi / 2 - \alpha$ и, следовательно, $\sin\alpha = \cos\varphi$.

Таким образом,

$$\mu_0 nNI^2 S \cos\varphi = k\varphi .$$

Откуда

$$I = \sqrt{k\varphi / \mu_0 nNS \cos\varphi} = 1A .$$

Задача 5. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом 10 см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5.0 \cdot 10^{-2}$ Тл. По проводнику течет ток $I = 10$А. Плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а подводящие провода находятся вне поля. Найти: а) силу, действующую на проводник; б) силу, растягивающую полукольцо.

Решение

На рис.61 показано направление вектора индукции магнитного поля и тока в проводнике. На выделенный элемент витка с током I со стороны магнитного поля действует сила Ампера $d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell}, \vec{B}\right]$, направление которой определяется по правилу векторного произведения или по правилу левой руки. Вектор $d\vec{F}$

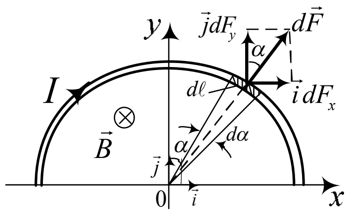


Рис.61

расположен в плоскости рисунка. Поскольку во всех точках полукольца угол α между векторами $d\vec{\ell}$ и $\vec{B}$ равен $\pi/2$, то в скалярной форме эта сила равна

$$dF = IBd\ell .$$

При переходе от одного элемента полукольца к другому направление действующей силы непрерывно изменяется, поэтому для нахождения результирующей силы следует прежде спроектировать ее на координатные оси, представленные на рис.61, и только после этого интегрировать:

$$\vec{F} = \vec{i}\int_L dF_x + \vec{j}\int_L dF_y ,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы осей координат, L – длина провода, по которому ведется интегрирование.

Из соображений симметрии первый интеграл равен нулю, а результирующая сила направлена вдоль оси Oy:

$$\vec{F} = \vec{j}\int_L dF_y .$$

Из рис.61 следует, что

$$dF_y = dF \cdot \cos\alpha = IBR\cos\alpha \cdot d\alpha ,$$

где $d\ell = R \cdot d\alpha$.

Полученное выражение будем интегрировать по углу α в пределах от *0* до π:

$$F_y = IBR\int_0^{\pi} \cos\alpha \cdot d\alpha = 2IBR.$$

Произведя вычисления, получим

$$F = 0{,}1\ H.$$

Для нахождения силы, растягивающей полукольцо, найдем проекцию результирующей силы F на ось Ox, действующей со стороны правой части полукольца на левую часть. Проекция элементарной силы на ось Ox, равна

$$dF_x = dF \cdot \sin\alpha = IBR\sin\alpha \cdot d\alpha .$$

Интегрируя по углу α в пределах от 0 до $\pi/2$ получим

$$F_x = IBR\int\limits_0^{\pi/2} \sin\alpha \cdot d\alpha = IBR = 0{,}4\ H.$$

Задача 6. Тонкий провод образует плоскую спираль из N плотно расположенных витков, по которым течет ток I. Радиусы внутреннего и внешнего витков a и b (рис.62). Найти магнитный момент спирали при данном токе.

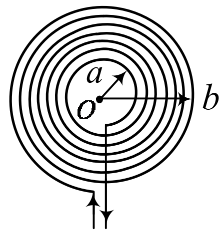


Рис.62

Решение

Плоскую спираль можно рассматривать как ленту, линейная плотность тока которой равна

$$i = \frac{IN}{b-a}.$$

Ток, проходящий по элементу ленты шириной dr, равен

$$dI = idr = \frac{IN}{b-a}dr.$$

Магнитный момент данного элемента

$$dP_m = SdI = \pi r^2 \frac{IN}{b-a}dr.$$

Результирующий магнитный момент найдем путем интегрирования

$$P_m = \frac{\pi IN}{b-a}\int\limits_a^b r^2 dr = \frac{\pi IN}{3(b-a)}(b^3 - a^3) = \frac{1}{3}\pi IN(b^2 + ab + a^2).$$

Вектор $\vec{P}_m$ приложен в точке О и направлен перпендикулярно плоскости спирали, в соответствии правилом правого винта.

2. Определение работы по перемещению контура с током в магнитном поле

Метод решения. При элементарном перемещении контура с током I во внешнем магнитном поле работа определяется по формуле

$$dA = Id\Phi\,,$$

где $d\Phi$ – приращение магнитного потока через контур при данном перемещении.

Работа сил Ампера при конечном произвольном перемещении контура находится интегрированием элементарных работ

$$A = \int_1^2 Id\varPhi\,.$$

Если $I = const$, то $A = I(\varPhi_0 - \varPhi_1)$, где Φ_0 и Φ_1 – магнитные потоки через контур в начальном и конечном положениях.

Полученное выражение дает не только величину, но и знак совершаемой работы. Необходимо учитывать, что поток $\Phi = \int_S B_n dS$ величина алгебраическая. Для определения знака магнитного потока условились всегда брать нормаль $\vec{n}$ к поверхности, так, чтобы она образовывала с направлением тока в контуре правовую систему.

Примеры решения задач

Задача 1. Два параллельных длинных провода с током $I = 6{,}0$ А в каждом (токи направлены в одну сторону) удалили друг от друга так, что расстояние между ними стало в $n = 2$ раза больше первоначального рис.63. Какую работу на единицу

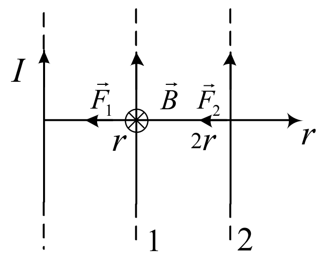


Рис.63

длины провода совершили при этом силы Ампера?

Решение

Используя закон Ампера, найдем вначале силу взаимодействия двух параллельных бесконечно длинных проводников с током I в каждом из них, расположенными на расстоянии r друг от друга. Величина индукции магнитного поля, создаваемая одним из проводников, равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

В данном поле на элемент с током $Id\ell$ второго проводника, с учетом того, что угол между векторами $Id\vec{\ell}$ и $\vec{B}$ прямой, действует сила Ампера

$$dF = IBd\ell = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} d\ell,$$

а сила, действующая на единицу длины проводника, равна

$$F_{ед} = \frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}.$$

Эта сила не постоянна, зависит от расстояния между проводниками, поэтому работу, совершенную этой силой при перемещении одного проводника относительно другого, найдем путем интегрирования

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}, d\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_{r}^{2r} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2.$$

При вычислении, получим

$$A_{12} = -5 мкДж.$$

При удалении параллельных проводников, по которым текут токи одного направления, внешние силы совершают положительную работу, следовательно, работа сил Ампера является отрицательной.

Задача 2. В условиях задачи №1 на стр. 89 определить:

а) работу внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, в котором поле отсутствует;

б) работу, которую надо совершить, чтобы повернуть рамку на угол $\alpha = \pi$ вокруг дальней стороны.

Токи в рамке и прямом проводе считать постоянными.

Решение

а) Работа внешних сил равна работе сил поля, взятой с обратным знаком

$$A^* = -A = -I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 – поток вектора индукции магнитного поля через рамку в первом и втором положении.

Очевидно, что во втором положении поток через рамку равен нулю: $\Phi_2 = 0$. Следовательно, для определения работы внешних сил по удалению контура из поля достаточно рассчитать магнитный поток Φ_1 через рамку в первом положении:

$$A^* = I\Phi_1.$$

Вследствие неоднородности поля прямого тока магнитный поток сквозь поверхность охватываемую рамкой следует определять путем интегрирования. Для этого разделим площадь рамки на столь узкие полоски, в пределах каждой из которых магнитное поле можно было бы приближенно считать однородным. Рассмотрим одну такую полоску шириной dx, находящуюся на расстоянии x от прямого проводника с током I_0.

Элементарный магнитный поток через эту полоску

$$d\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} a dx.$$

Проведя интегрирование, найдем

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln \frac{x_0 + b}{x_0}.$$

Таким образом, работа внешних сил по перемещению контура с током из магнитного поля, равна

$$A^* = \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x_0 + b}{x_0}.$$

б) Плоский контур с током I поворачивается в магнитном поле под действием внешних сил относительно оси OO' из устойчивого положения равновесия, при котором нормаль к контуру $\vec{n}$ параллельна вектору $\vec{B}$ ($\Phi_1 > 0$), в положение неустойчивого равновесия, при котором $\vec{n} \downarrow\uparrow \vec{B}$ ($\Phi_2' < 0$). При таком перемещении внешние силы совершают работу

$$A^* = I(\Phi_1 - (-\Phi_2')) = I(\Phi_1 + \Phi_2'),$$

где Φ_2' - магнитный поток через контур после его поворота.

По аналогии с потоком Φ_1 в задаче а), найдем поток через контур во втором положении

$$\Phi_2' = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \int_{x_0+b}^{x_0+2b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln \frac{x_0 + 2b}{x_0 + b}$$

Таким образом, используя полученное выражение для потока Φ_2', найдем $A^* = \dfrac{\mu_0 I_0 I a}{\pi} \ln \dfrac{x_0 + 2b}{x_0}$.

2.2.3. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10 см$ друг от друга, текут одинаковые токи по $100 A$. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу, действующую на единицу длины каждого провода.

Ответ: $F_1 = F_2 = \dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = 2 \cdot 10^{-2} H$, $F_3 = \dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi a} = 3.46 \cdot 10^{-2} H$

.

2. По кольцу течет ток. На оси кольца на расстоянии d = 1 м от его плоскости магнитная индукция В = 10 *Тл*. Чему равен магнитный момент P_m кольца с током? Радиус кольца много меньше величины d.

Ответ: $Pm = \dfrac{2\pi d^3 B}{\mu_0} = 5 \cdot 10^{-2} \, Am^2$.

3. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Чему равно отношение магнитного момента P_m эквивалентного кругового тока к величине момента импульса орбитального движения электрона?

Ответ: $\dfrac{P_m}{L} = \dfrac{e}{2m} = 8{,}79 \cdot 10^{10} \, Кл / кг$.

4. По тонкому проводнику в виде кольца радиусом $R = 20$ *см* течет ток I = 100 *А*. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией В = $2.0 \cdot 10^{-2}$ *Тл*. Чему равна сила, растягивающая кольцо?

Ответ: $F = IBR$ = 0,4 *Н*.

5. Линейный проводник с током расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции однородного магнитного поля. Во сколько раз изменится сила, действующая на проводник со стороны магнитного поля, если его изогнуть в виде полуокружности? Плоскость окружности перпендикулярна магнитному полю.

Ответ: 0,64.

6. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи I = 10 А. Определите силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

Ответ: 10^{-5} *Н*.

7. Квадратная рамка помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее плоскости. Сторона квадрата a = 0,2 *м*. По рамке протекает ток I = 10 *А*. Какова сила натяжения провода, если индукция магнитного поля B=1*Тл*? Деформацией и магнитным полем провода пренебречь.

Ответ: 1 *Н*.

8. Подвижный элемент гальванометра представляет квадратную рамку, содержащую N = 100 витков тонкой проволоки, помещенную в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,1 *Тл*. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Сторона рамки a=4*см*. Найти работу, совершаемую этими силами при повороте рамки в положение, при котором вектор магнитной индукции противоположен вектору дополнительного магнитного момента.

Ответ: -16 *мкДж*.

9. Виток, по которому течет ток силой I = 20 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,016 *Тл*, Диаметр витка $d = 10\,см$. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha = \pi / 2$ относительно оси, совпадающей с диаметром?

Ответ: А=$5{,}02 \cdot 10^{-3}$ *Дж*.

Второй уровень сложности

1. По двум тонким проводникам, изогнутым в виде кольца радиусом R = 10 *см*, текут одинаковые токи по 10 *А* в каждом. Найти силу взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние между центрами колец $d = 1мм$.

Ответ: $F = \frac{\mu_0 I^2 r}{d} 1.26 \cdot 10^{-2}\,H$.

2. По тонкому проводнику в виде кольца радиусом $R = 20$ см течет ток I = 100 А. Перпендикулярно плоскости

кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией В = $2.0\cdot10^{-2}$ Тл. Чему равна сила, растягивающая кольцо?

Ответ: $F = IBR$ = 0,4 Н.

3. Тонкий провод в виде дуги, составляющей треть кольца радиусом R = 15 *см* находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 20 *мТл*. По проводу течет ток I = 30 *А*. Плоскость, в которой лежит дуга, перпендикулярна линиям магнитной индукции, и подводящие провода находятся вне поля. Определите результирующую силу, действующую на провод со стороны магнитного поля.

Ответ: 0,15 *Н*.

4. Квадратная проволочная рамка со стороной длиной L = 10 см расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу (рис.64). Сторона AB рамки закреплена и находится на расстоянии от провода, равном ее длине. По проводу течет ток I_1 = 10 А, по рамке – ток I_2 = 0,1 А. Определите момент силы относительно точки B, действующей на участок BC. Магнитным полем тока в рамке пренебречь.

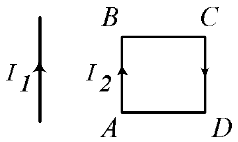


Рис.64

Ответ: $6\cdot10^{-9}$ Н·м.

5. Диск радиусом $R = 10$ *см* несет равномерно распределенный по поверхности заряд q = 0,2 *мкКл*. Диск равномерно вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Частота вращения n = 20 c^{-1}. Определить: 1) магнитный момент P_m кругового тока, создаваемого диском; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса P_m / L если масса диска m = 100 г.

Ответ: $6{,}28\cdot10^{-8}\,A\cdot м^2$; 2 *мкКл/кг*.

6. Рамка гальванометра, содержащая N = 200 витков тонкого провода, подвешена на упругой нитке. Площадь

рамки S=1$см^2$. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции (B=$5\cdot10^{-3}$ $Тл$). Когда через гальванометр был пущен ток I=$2\cdot10^{-6}A$, то рамка повернулась на угол α= 30°. Найти величину постоянной кручения C нити.

Ответ; $C = \text{М}/\varphi \dfrac{NISB\cos\alpha}{\alpha} = 3{,}32\cdot10^{-7}\,H\cdot м/рад$.

7. Короткая катушка площадью поперечного сечения S=160 $см^2$, содержащая N = 200 витков провода, по которому течет ток I = 4 A, помещена в однородное магнитное поле напряженностью H=$8\cdot10\,A/м$. Определить магнитный момента катушки, а также вращающий момент M, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол $\alpha = 60°$ с линиями поля.

Ответ: $P_m = ISN = 12\ A\cdot м^2$; $M = \mu_0 P_m H\sin\alpha =$ 0,1 $H\cdot м$.

8. Рамка гальванометра, содержащая N = 200 витков тонкого провода, подвешена на упругой нитке. Площадь рамки S=1$см^2$. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции (B=$5\cdot10^{-3}$ $Тл$). Когда через гальванометр был пущен ток I=$2\cdot10^{-6}A$, то рамка повернулась на угол α= 30°. Найти величину постоянной кручения C нити.

Ответ; $C = \text{М}/\varphi \dfrac{NISB\cos\alpha}{\alpha} = 3.32\cdot10^{-7}\,H\cdot м/рад$.

10. Магнитная стрелка, помещенная в центре кругового проводника радиусом $R = 10$ $см$, образует угол α = 20° с вертикальной плоскостью, в которой находится проводник. Когда по проводнику пустили ток силой I = 3 A, то стрелка повернулась в таком направлении, что угол α увеличился. Определить угол поворота стрелки.

Ответ: 33,5°.

11. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого проводника радиусом R = 10 *см*, течет ток I = 100 *А*. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле, индукция которого B = 0,1 *Тл*. Собственное магнитное поле кольца и внешнее поле совпадают. Определить работу внешних сил, которые, действуя на проводник, деформировали его и придали ему форму квадрата. Сила тока при этом поддерживалась неизменной.

Ответ: $A = \pi IBR^2(1 - \pi / 4) = 6.75 \cdot 10^{-2}$ *Дж*.

2.3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

2.3.1. Основные понятия и формулы

- **Сила Лоренца** – определяет результирующую силу, действующую на электрический заряд, движущийся в электрическом и магнитном поле

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; $\vec{B}$ – индукция магнитного поля.

Эта сила имеет две компоненты – электрическую $\vec{F}_э = q\vec{E}$, и магнитную $\vec{F}_m = q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]$. Модуль магнитной силы равен

$$F_m = q\upsilon B \sin\alpha,$$

где α - угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Магнитная сила перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$, а ее направление для положительного заряда определяется по правилу правого винта. В случае отрицательного заряда направления векторов $\vec{F}_m$ и $[\vec{\upsilon}, \vec{B}]$ противоположны.

В отличие от электрической компоненты, магнитная сила не совершает работы над частицей и не может изменить ее энергии.

Частицу называют нерелятивистской, если ее скорость удовлетворяет неравенству $\upsilon \ll c$. Для релятивистских частиц необходимо использовать основные соотношения релятивистской механики:

– релятивистский импульс

$$p = m\upsilon \Big/ \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\ ;$$

– уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) = \vec{F}\ ;$$

– соотношение между энергией и импульсом

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\ ;$$

– кинетическая энергия

$$T = E - E_0 = E - mc^2,$$

$E_0 = mc^2$ - энергия покоя частицы;

$E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ - полная энергия.

2.3.2. Основные типы задач и методы их решения

1. Нерелятивистское движение заряженных частиц в однородном электрическом и магнитном полях

Метод решения. Применение формулы Лоренца, основного закона классической динамики и кинематических уравнений движения.

Обобщенная формула Лоренца включает в себя, как электрическую, так и магнитную составляющие. Магнитная составляющая, как это следует из свойств векторного произведения, перпендикулярна вектору скорости и вектору магнитной индукции. Поэтому работа этой силы всегда равна нулю, а следовательно, ее действие не приводит к изменению кинетической энергии и модуля скорости заряженной частицы. Эта сила лишь создает нормальное (центростремительное) ускорение, вызывающее движение по окружности или по винтовой линии. Направление ускорения перпендикулярно плоскости, в которой находятся векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$, и определяется векторным произведением и знаком заряда.

Если скорости частиц, ускоренных электрическим полем, достигают значений, соизмеримых со скоростью света в вакууме, то следует использовать основные соотношения релятивистской механики.

Примеры решения задач

Задача 1. Электрон влетает со скоростью $\upsilon_0 = 10^7$ *м/с* в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам, длина которых ℓ=5*см*. Напряженность электрического поля конденсатора E = 10 *кВ/м*. При вылете из него электрон попадает в однородное магнитное поле, направленное вдоль вектора $\vec{\upsilon}_0$. Магнитная индукция этого поля B=l5 *мТл*. Определить траекторию электрона в магнитном поле.

Решение

Рассмотрим движение электрона в электрическом поле конденсатора (рис.65). Под действием электростатической силы $F=eE$ электрон приобретет ускорение, направленное вдоль оси Oy

$$a_y = \frac{eE}{m}.$$

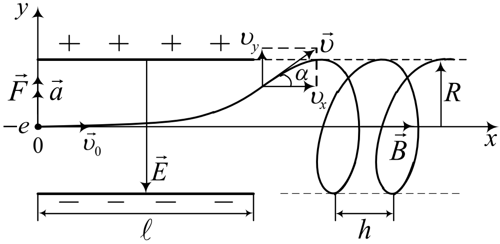


Рис.65

Следовательно, электрон начнет двигаться по параболической траектории, аналогично движению материальной точки в поле тяжести. На выходе из поля конденсатора его скорость $\vec{\upsilon}$ будет направлена под углом α к вектору первоначальной скорости $\vec{\upsilon}_0$. Горизонтальная составляющая этой скорости равна начальной скорости электрона $\upsilon_x = \upsilon_0$, а вертикальную составляющую скорости электрона при вылете из конденсатора найдем по формуле

$$\upsilon_y = at = (eE\ell)/(m\upsilon_0).$$

При попадании электрона в магнитное поле $\vec{B}$, составляющее угол α с направлением его скорости, на него будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца. В результате он будет участвовать в двух движениях: равномерном прямолинейном со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0$, и равномерном движении по окружности со скоростью υ_y. При сложении обоих движений электрон будет двигаться по винтовой линии (рис.64). Радиус винтовой линии определится из второго закона Ньютона

$$e\upsilon_y B = \frac{m\upsilon_y^2}{r}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{m\upsilon_y}{eB} = \frac{E\ell}{\upsilon_0 B} = 3{,}3\ \text{мм}.$$

При этом период обращения по окружности равен

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon_y} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Шаг винтовой линии h (расстояние между соседними витками), равен смещению электрона вдоль оси Ox за время одного оборота

$$h = \upsilon_0 T = \frac{2\pi m \upsilon_0}{eB}, \; h = 2{,}4\,см.$$

Задача 2. На рис.66 изображен простейший масс-спектрометр, индукция магнитного поля в котором $B = 0{,}1\,Тл$ (вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка). В ионизаторе A образуются ионы, которые ускоряются напряжением $U = 10\,кВ$ и через щель C влетают в магнитное поле. После поворота в магнитном поле ионы попадают на фотопластинку Φ и вызывают ее почернение. На каком расстоянии друг от друга будут находиться полосы от ионов H^{1+} и H^{2+} на фотопластинке?

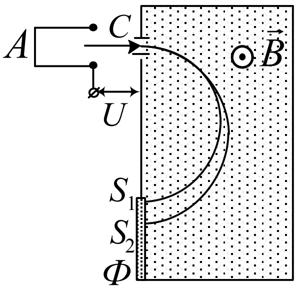


Рис.66

Решение

Прежде всего, отметим, что ионы молекул водорода имеют одинаковые массы, но отличающиеся в два раза заряды $q_2 = 2e$ и $q_1 = e$. Пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, они приобретают различную кинетическую энергию и скорость:

$$q_1 U = \frac{m\upsilon_1^2}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}};$$

$$q_2 U = \frac{m\upsilon_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{4eU}{m}}.$$

Радиусы полуокружностей, которые опишут ионы в магнитном поле в результате действия силы Лоренца, равны

$$R_1 = \frac{m\upsilon_1}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\,,$$

$$R_2 = \frac{m\upsilon_2}{2eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{2e}}\,.$$

Следы от попадания ионов на фотопластинку, будут находиться дуг от друга на расстоянии

$$S = 2(R_1 - R_2) = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right). \quad S = 5{,}8\,см.$$

Задача 3. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500\,кВ,$ влетает в область однородного магнитного поля перпендикулярно вектору $\vec{B}$. Ширина области с полем $d = 0{,}1\,м,$ индукция $B = 0{,}51\,Тл.$ Найти угол отклонения протона от первоначального направления движения.

Решение

Пройдя ускоряющую разность потенциалов в электрическом поле, протон приобретает скорость, определяемую из уравнения

$$qU = \frac{m\upsilon^2}{2}\,,$$

откуда

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\,.$$

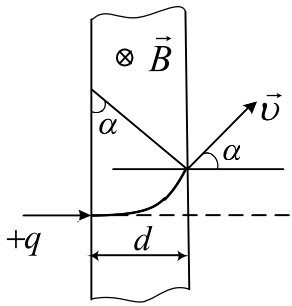


Рис.67

Влетев в область однородного магнитного поля, протон под действием магнитной составляющей силы Лоренца начинает двигаться с центростремительным ускорением по дуге окружности (рис.67). Второй закон Ньютона для данного случая имеет вид

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = q\upsilon B\,,$$

где R – радиус дуги, по которой движется протон в магнитном поле.

Найдя радиус дуги, и подставляя в полученную формулу выражение для скорости, получим

$$R = \frac{m\upsilon}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\ .$$

Согласно расчетам $R = 0{,}2$ м, что существенно больше ширины области магнитного поля. Следовательно, в магнитном поле протон опишет лишь часть окружности, а затем будет двигаться прямолинейно по касательной к окружности.

Как следует из рис.67

$$\sin\alpha = \frac{d}{R} = 0{,}5\,,$$

следовательно, угол отклонения протона от первоначального направления движения равен 30^0.

Задача 4. Диаметр дуантов циклотрона $d = 1{,}00$ *м*. Индукция магнитного поля $B = 1{,}20\,Тл$. Ускоряющее напряжение $U = 100\,кВ$. Найти: 1) максимальную энергию W, до которой могут быть ускорены протоны, и скорость υ, приобретаемую протонами к концу ускорения; 2) время τ, в течение которого длится процесс ускорения; 3) путь s, проходимый протонами в циклотроне. Рассматривать нерелятивистский протон.

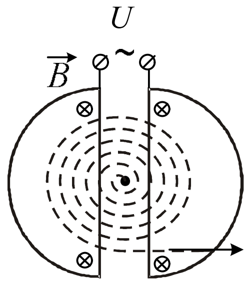


Рис.68

Решение

Принцип действия циклотрона состоит в том, что заряженная частица многократно проходит ускоряющее электрическое поле, локализованное в пространстве между дуантами (рис.68).

Внутри дуанта частица под действием магнитного поля движется по дуге окружности радиусом *r*. Так как сила Лоренца перпендикулярна скорости, то ее действие приводит лишь к изменению направления скорости, при этом ее остается постоянным.

Динамическое уравнение применительно к внешнему витку траектории протона

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = \upsilon Be.$$

Из этого уравнения следует, что максимальные скорость и кинетическая энергия протона соответственно равны

$$\upsilon = \frac{eBR}{m} = \frac{eBd}{2m},$$

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{(eBR)^2}{2m} = \frac{(eBd)^2}{8m}.$$

Период обращения протона в циклотроне

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{Be}.$$

За период одного обращения протон получает энергию $2eU$, а за все время процесса ускорения дополнительную кинетическую энергию

$$\Delta W = (2eU)N = 2eU \cdot \frac{\tau}{T},$$

где N - число оборотов протона за время ускорения τ. Если начальную кинетическую энергию принять за ноль, то $\Delta W = W$ и, следовательно,

$$W = \frac{2eU\tau}{T} = \frac{e^2 BU\tau}{\pi m}.$$

Сопоставляя полученные значения кинетических энергий, найдем время процесса ускорения

$$\tau = \frac{\pi B R^2}{2U} = \frac{\pi B d^2}{8U}.$$

Подставляя числовые значения данных величин, найдем

$$W = 17\,МэВ, \quad \upsilon = 5{,}8 \cdot 10^7\,м/с, \ \tau = 4{,}7\,мкс.$$

Полученное значение скорости протона $\upsilon < c$ подтверждает то, что в данных условиях протон действительно является нерелятивистским.

Вычислим путь, проходимый протоном за все время ускорения. С этой целью напишем выражение кинетической энергии на произвольном витке траектории радиуса r:

$$W = \frac{e^2 B^2}{2m} r^2.$$

Отсюда

$$dW = \frac{e^2 B^2}{m} r \cdot dr.$$

Теперь действие ускоряющего поля между дуантами циклотрона формально распределим по всему витку. Работа такого условного поля равна

$$2eU = eE \cdot 2\pi r,$$

откуда

$$E = \frac{U}{\pi r}.$$

На элементе $d\ell$ траектории полем E совершается работа

$$dA = eEd\ell = \frac{eU}{\pi r} d\ell = dW.$$

Приравнивая полученные выражения

$$\frac{e^2 B^2}{m} r \cdot dr = \frac{eU}{\pi r} d\ell,$$

найдем

$$d\ell = \frac{e\pi B^2}{mU} r^2 dr .$$

Длину траектории протона за время полного цикла ускорения, находим интегрированием:

$$S = \int d\ell = \frac{e\pi B^2}{mU} \int_0^R r^2 dr = \frac{e\pi B^2 R^3}{3mU} = \frac{e\pi B^2 d^3}{24mU} .$$

Вычисляя, получим

$$S = 198\,м.$$

2. Релятивистское движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

Метод решения. Применение формулы Лоренца, которая верна при любых значениях скорости движения заряженных частиц, а также основных уравнений релятивистской механики и кинематических уравнений движения.

Примеры решения задач

Задача 1. Релятивистский электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10\,мТл$ по окружности радиуса $r = 0{,}1$ м. Найти скорость и период обращения электрона.

Решение

При движении электрона по окружности в однородном магнитном поле под действием силы Лоренца

$$\frac{m_p \upsilon^2}{r} = e\upsilon B ,$$

где $m_p = \dfrac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – релятивистская масса частицы, m – масса покоя, $\beta = \upsilon / c$.

Релятивистский импульс электрона равен

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}} = erB\ .$$

Возведем в квадрат данное выражение, получим

$$\beta^2 = \frac{e^2 r^2 B^2}{c^2 m^2}\left(1-\beta^2\right).$$

С целью упрощения, введем обозначение

$$K = \frac{e^2 r^2 B^2}{c^2 m^2}\ .$$

В результате преобразований, получим

$$\beta = \sqrt{\frac{K}{1+K}}\ .$$

Вычисления дают следующий результат

$$\beta = 0{,}5\ ,\ \upsilon = \beta c = 1{,}5 \cdot 10^8\ м/с.$$

Таким образом, скорость электрона сопоставима со скоростью света, это означает, что в данном случае электрон является релятивистским.

Период обращения электрона по окружности будет равен

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} = 4{,}2\ нс.$$

Задача 2. Релятивистский протон в момент $t = 0$ влетел со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ в область, где имеется поперечное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$. Найти зависимость от времени угла α между скоростью $\vec{\upsilon}$ протона и первоначальным направлением его движения.

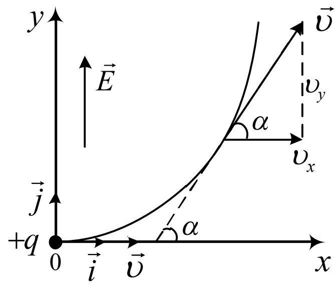


Рис.69

Решение

Начало системы координат совместим с начальным положением частицы и покажем направления векторов $\vec{E}, \vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\upsilon}$, а также примерную траекторию движущейся частицы (рис.69).

В выбранной системе координат

$$\vec{E} = E\vec{j}\ , \quad \vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0\vec{i} = x_0'\vec{i}\ , \quad \vec{\upsilon} = x'\vec{i} + y'\vec{j}\ .$$

Согласно уравнениям динамики

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mx'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \text{ и } \frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{my'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = eE\ .$$

В результате интегрирования, получим

$$p_x = const\ , \Rightarrow \frac{x_0'}{\sqrt{1-\beta_0^{\ 2}}} = \frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,$$

$$p_y = \frac{my'}{\sqrt{1-\beta^2}} = eEt\ ,$$

где $\beta_0 = \upsilon_0 / c$, $\beta = \upsilon / c$.

Для компонент скорости частиц имеем

$$x' = x_0' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\ ,$$

$$y' = \frac{eEt}{m}\sqrt{1-\beta^2}\ .$$

Как следует из рис.69

$$tg\alpha = \frac{y'}{x'}.$$

Следовательно

$$tg\alpha = \frac{eEt}{m}\sqrt{1-\upsilon_0^2 / c^2}\ .$$

Задача 3. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле напряженностью $E = 10\,кВ/см$. Через сколько времени после начала движения кинетическая энергия электрона станет равной его энергии покоя?

Решение

По условию задачи импульс электрона в начальный момент времени $\vec{p}_0 = 0$. Его импульс в произвольный момент времени найдем, интегрируя уравнение движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} \quad \Rightarrow \vec{p} = -e\vec{E}t\,.$$

Соотношение между полной энергией E частицы и ее импульсом p в релятивистской механике имеет вид

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,,$$

где m - масса покоя частицы, c - скорость света.

Возводя в квадрат это уравнение, и подставляя величину p, получим

$$\frac{E^2}{c^2} = (eEt)^2 + m^2c^2\,.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы равна

$$T = E - E_0 = E - mc^2\,,$$

где $E_0 = mc^2$ - энергия покоящейся частицы.

Так как по условию задачи $T = mc^2$, то $E = 2mc^2$.

Тогда

$$4m^2c^2 = (eEt)^2 + m^2c^2\,,$$

а затем искомую величину

$$t = \sqrt{3}\,\frac{mc}{eE}\,.$$

Проведя вычисления, получим

$$t = 3{,}0 \text{ нс.}$$

Задача 4. В циклотроне протоны ускоряются до кинетической энергии $T = 300\,МэВ$. Оставляя частоту изменения направления электрического поля постоянной, найти такой закон изменения индукции B от радиуса кривизны траектории протонов в дуантах, при котором напряженность электрического поля между дуантами будет всегда сонаправлена скорости протонов. Определить максимальный радиус полуокружности, по которой протоны движутся в дуантах. Индукция магнитного поля $B_0 = 0{,}7$ *Тл*.

Решение

В отличие от предыдущей задачи (см. пример 4) заданное значение энергии протонов столь велико, что они будут являться уже релятивистскими.

Уравнение движения протона в магнитном поле, с учетом зависимости массы от скорости, можно записать в виде

$$\frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \cdot \frac{\upsilon^2}{r} = e\upsilon B,$$

откуда
$$r = \frac{m\upsilon}{eB\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Таким образом, радиус кривизны траектории возрастает по мере ускорения частицы. Исходя из условия, что время движения протона по дуге полуокружности в одном из дуантов не должно зависеть от скорости, т.е.

$$t = \frac{\pi r}{\upsilon} = \frac{\pi m}{eB\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{\pi m}{eB_0},$$

найдем соотношение между B и B_0:

$$B_0 = B\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}.$$

Откуда

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{1-(eB_0/mc)^2 r^2}}.$$

Это и есть зависимость $B(r)$, при которой напряженность электрического поля и скорость протонов между дуантов остаются все время сонаправленными, причем частота изменения направления электрического поля постоянна. Индукция поля возрастает по мере увеличения скорости протонов.

Для расчета максимального радиуса кривизны траектории определим соответствующее значение скорости из выражения для полной энергии протона

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

откуда

$$\upsilon = c\sqrt{1-E_0^2/E^2},$$

где $E_0 = mc^2 = 940$ МэВ – энергия покоя протона. Тогда

$$r = \frac{mc\sqrt{1-E_0^2/E^2}}{eB_0}.$$

Полная энергия протона $E = E_0 + T = 1240$ *МэВ*, а максимальный радиус кривизны $r = 2{,}9$ *м*.

2.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}015$ *Тл* по окружности радиусом r = 10 *см*. Чему равен импульс иона?

Ответ: $p = 2{,}4\cdot10^{-22}$ *кг·м/с*.

2. Заряженная частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 1$ *мм*. Ее кинетическая энергия равна 1 *кэВ*. Найдите силу, действующую на частицу со стороны поля.

Ответ: $F = 2\mathrm{T}/\mathrm{r} = 0{,}32\cdot10^{-12}$ *Н*.

3. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}1$ *Тл* возбуждено электрическое поле напряженностью

E = 100 *кВ/м*. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

Ответ: $\upsilon = 10^6$ *м/с*.

4. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U = 104 *В* и влетела в скрещенное под прямым углом электрическое (E = 10 *кВ/м*) и магнитное (B = 0,1 *Тл*) поля. Найти отношение заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Ответ: $4{,}8 \cdot 10^7$ *Кл/кг*.

5. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов 600 *В*, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,3 *Тл* и начал двигаться по окружности. Вычислить радиус окружности.

Ответ: r = 12 *мм*.

6. Заряженная частица, обладающая скоростью $\upsilon = 2 \cdot 10^6$ *м/с*, влетела в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,52 *Тл*. Найти отношение заряда частицы к его массе, если частица в поле описала дугу окружности радиусом R = 4 *см*. Определить по отношению, какая это частица.

Ответ: $\frac{q}{m} = \frac{\upsilon}{RB} = 96{,}3 \cdot 10^6$ *Кл/кг*, протон.

7. Электрон в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 *Тл* движется по окружности. Найти величину эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона.

Ответ: $\mathrm{I} = \frac{Be^2}{2\pi m} = 4{,}48 \cdot 10^{-10}$ *А*.

8. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-4}$ *Тл* по винтовой линии. Чему равна скорость электрона, если шаг винтовой линии h = 20 *см*, а радиус R =5*см*?

Ответ: $\upsilon = \frac{Be}{m}\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = 1{,}04 \cdot 10^9$ *м/с*.

9. В циклотроне требуется ускорить ионы гелия (He^{++}). Частота переменной разности потенциалов, приложенной к дуантам, 10^7 *Гц*. Какова должна быть индукция B магнитного поля, чтобы период обращения ионов совпадал с периодом изменения разности потенциалов?

Ответ: $B = 1{,}3$ *Тл*.

Второй уровень сложности

1. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,5 *Тл*. Определить момент импульса, которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом 0,2 *см*.

Ответ: $L = 3{,}2 \cdot 10^{-25}$ *кг·м²/с*.

2. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U = 2 кВ и, попав в однородное магнитное поле, стала двигаться по окружности радиусом R = 1см. Определите отношение заряда частицы к ее массе, если индукция магнитного поля B = 15,1 мТл.

Ответ: $17{,}5 \cdot 10^{10}$ *Кл/кг*.

3. Однозарядные ионы аргона, пройдя ускоряющее напряжение U = 800 *В*, попадают в однородное магнитное поле, где разделяются на два пучка, движущиеся в вакууме по дугам окружностей радиусами R_1 = 7,66 *см* и R_2 = 8,08 *см*. Определите массовые числа изотопов аргона, если индукция магнитного поля B = 0,32 *Тл*.

Ответ: 35,9; 39,9.

4. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 9 \cdot 10^{-3}$ *Тл* по винтовой линии, радиус которой r = 1 *см* и шаг h = 7,8 *см*. Определить период обращения электрона и его скорость.

Ответ: $T = 3{,}97 \cdot 10^{-9}$ *с*; $\upsilon = 25 \cdot 10^6$ *м/с*.

5. Электрон движется в однородном магнитном поле так, что вектор его скорости, равной $2\cdot10^6$ *м/с*, составляет с направлением вектора индукции магнитного поля угол $\alpha = \pi/3$. Определите шаг винтовой линии, по которой движется электрон, если $B = 0{,}01$ *Тл*.

Ответ: 3,57 мм.

6. Какую энергию приобретет протон, сделав 40 оборотов в магнитном поле циклотрона, если максимальное значение переменной разности потенциалов между дуантами U= 60 *кВ*? На сколько процентов масса протона, обладающего такой кинетической энергией, больше массы покоя? Какую скорость приобретет протон?

Ответ: $T=2e\upsilon N$ $=4{,}8\cdot10^6$*эВ*; $\dfrac{\Delta m}{m_0} = \dfrac{T}{E_0} = 0{,}5\%$; $\upsilon=3\cdot10^7$ *м/с*.

7. Протон с кинетической энергией 1 *МэВ* влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции (В=1*Тл*). Какова должна быть минимальная протяженность поля в направлении, по которому первоначально летел протон, чтобы направление его движения изменилось на противоположное?

8. Сколько оборотов должен сделать протон в магнитном поле циклотрона, чтобы приобрести кинетическую энергию $T = 10^7$ *эВ*, если протон проходит между дуантами всегда при максимальной разности потенциалов $U = 30$ *кВ*?

Ответ: $N = 167$.

9. Определите удельный заряд частиц, ускоренных в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}7$ *Тл* при частоте ускоряющего напряжения $\nu = 25{,}9$ *МГц*.

Ответ: $9{,}57\cdot10^7$ *Кл/кг*.

2.4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

2.4.1. Основные понятия и формулы

- Всякое вещество является магнетиком, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться. Степень намагничивания магнетика характеризуется магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью и обозначают $\vec{J}$. По определению

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum \vec{p}_{mi} ,$$

где ΔV – физически малый объем, $\vec{p}_{mi}$ – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам в объеме ΔV.

- Вектор напряженности магнитного поля – вспомогательный вектор, представляющий комбинацию двух векторов $\vec{B}$ и $\vec{J}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} .$$

Единица напряженности: $[H] = 1\frac{A}{м}$ (ампер на метр).

Введение этого вектора во многих случаях значительно упрощает расчет поля в магнетиках.

- Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля – циркуляция вектора $\vec{H}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L H_\ell d\ell = \sum I_i .$$

- Связь между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} ,$$

где μ – магнитная проницаемость вещества, для диамагнетиков $0 < \mu < 1$, для парамагнетиков $\mu > 1$, для ферромагнетиков $\mu >> 1$.

Магнитная проницаемость показывает, во сколько раз магнетик усиливает внешнее магнитное поле:

$$B = \mu B_0,$$

где B_0 – магнитное поле в вакууме, B – поле в веществе.

- Преломление линий вектора $\vec{B}$ – на границе раздела двух магнетиков линии вектора $\vec{B}$ испытывают преломление

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

При переходе границы раздела двух магнетиков нормальные составляющие вектора $\vec{B}$ не изменяются, а тангенциальные составляющие претерпевают скачок:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1}.$$

2.4.2. Расчет магнитных полей в ферромагнетиках

Метод решения. При расчетах магнитных полей в ферромагнетиках необходимо использовать теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, называемую также законом полного тока, условие непрерывности нормальных составляющих вектора $\vec{B}$ и кривую намагничивания ферромагнетика, т.е. зависимость $B(H)$. Эта зависимость имеет сложный нелинейный вид и представлена для ряда ферромагнетиков на рис.70.

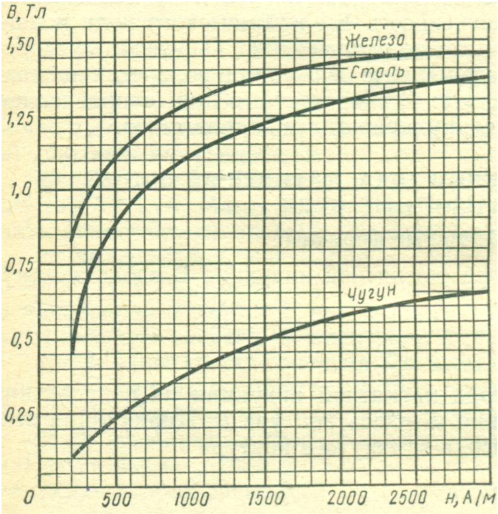


Рис.70

Примеры решение задач

Задача 1. Тороид со стальным сердечником имеет узкий воздушный зазор (рис.71). Обмотка тороида содержит $N = 1000$ витков. Длина сердечника по средней линии $\ell = 1\ м$, а ширина зазора $\ell_0 = 5\,мм$. Определить при какой силе тока I индукция в зазоре будет равна $B_0 = 1\,Тл$.

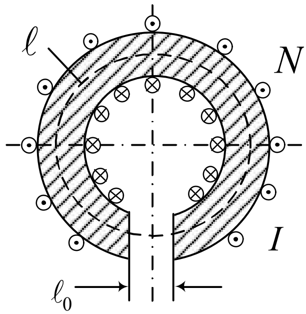


Рис.71

Решение

Пренебрегая рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре и учитывая условие непрерывности нормальных составляющих вектора $\vec{B}$, можно считать, что индукция в сердечнике равна индукции в зазоре, т.е. $B = B_0$.

Применяя теорему о циркуляции $\vec{H}$ к контуру, проходящему по оси сердечника, находим

$$H \cdot \ell + H_0 \cdot \ell_0 = IN,$$

где H, H_0 – напряженности поля в сердечнике и в зазоре.

Так как для воздуха $\mu = 1$, то

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 8 \cdot 10^5\,(А/м).$$

Для расчета напряженности магнитного поля в сердечнике необходимо воспользоваться графиком зависимости $B(H)$, поскольку магнитная проницаемость сердечника не известна. Из графика (рис.70), находим

$$H = 700\,\text{А/м}.$$

Искомое значение силы тока, равно

$$I = \frac{H\ell + H_0\ell_0}{N}.$$

Численный расчет дает $I = 4{,}7\,А$.

Задача 2. Стальной сердечник тороида, длина ℓ которого по средней линии равна 1 м, имеет вакуумный зазор длиной $\ell_0 = 4$ *мм*. Обмотка содержит $n = 8$ витков на 1 *см*. Определить индукцию поля в зазоре B_0, если ток в тороиде $I = 10\,А$.

Решение

Данная задача является обратной предыдущей. Однако, в этом случае мы не можем непосредственно воспользоваться графиком зависимости $B(H)$ и не можем также определить из закона полного тока напряженность поля ни в сердечнике, ни в зазоре.

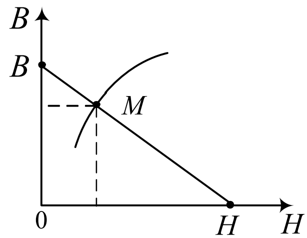


Рис.72

Для решения задачи воспользуемся графическим методом.

Прежде определим полное число витков в обмотке тороида $N = n\ell = 800$. С учетом соотношения $H_0 = \dfrac{B_0}{\mu_0} = \dfrac{B}{\mu_0}$, из закона полного тока, находим

$$B = \frac{IN\mu_0}{\ell_0} - \frac{\mu_0 \ell H}{\ell_0} .$$

Данное уравнение является уравнением прямой, точки пересечения которой с осями координат B и H, соответственно равны

$$B_1 = \frac{IN\mu_0}{\ell_0}; \qquad B_1 = 0{,}94 \text{ Тл.}$$

$$H_1 = \frac{IN}{\ell}; \quad H_1 = 3{,}0 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

Точка пересечения М данной прямой с графиком зависимости $B(H)$ для стали определяет значения B и H в сердечнике при данном токе (рис.72). По графику, находим

$$B_0 = B = 0{,}84 \text{ } Тл; \ H = 500 \text{ } А/м.$$

Задача 3. Тороид с железным сердечником, длина которого по средней линии ℓ=1 *м*, имеет воздушный зазор ℓ_0=3 *мм* (рис.73). По обмотке тороида, содержащей N=1300 витков, пустили ток, в результате чего индукция в зазоре стала B_0 =1 *Тл*. Определить:

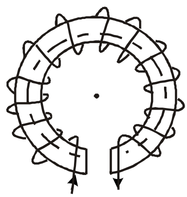


Рис.73

а) силу тока в тороиде;

б) остаточную намагниченность сердечника, а также напряженность H_1 поля в железе, если после выключения тока остаточная индукция в зазоре стала B_1=4,2·I0^{-2} *Тл*.

Решение

Пренебрегая рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре, можно считать, что магнитная индукция везде одинакова, т.е.

$$B = B_0 = 1\ Тл.$$

Применив теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ к контуру l, запишем:

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = H\ell_1 + H_0\ell_0 = NI\,,$$

где H и H_0 – напряженности магнитного поля в железе сердечника и зазоре; ℓ_1, ℓ_0 – длины сердечника и зазора; N – число витков в обмотке тороида. Так как для воздуха μ = 1, то

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 8 \cdot 10^5\ А/м.$$

Величину H найдем по графику намагничивания B=f(H) рис.70:

$$H = 350\ А/м.$$

Таким образом, сила тока в обмотке тороида определится из выражения

$$I = \frac{H\ell + H_0\ell_0}{N} \approx 2A\,.$$

Было бы ошибкой воспользоваться для отыскания величины H_1 кривой намагничивания железа, как это было сделано в начале. После выключения тока магнитное поле в железе, возникло в результате его неполного размагничивания, т.е. рассматриваемое магнитное поле создается только микротоками сердечника.

Воспользуемся законом полного тока, учитывая, что I= 0.

$$H_1\ell_1 + H_0\ell_0 = 0\,.$$

По-прежнему величины H_0 и B в воздушном зазоре связаны соотношением

$$H_0 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu}, \quad \text{где } \mu = 1.$$

Из закона полного тока

$$H_1 = -H_0 \frac{l_0}{l} = -\frac{B_1}{\mu_0}\frac{l_0}{l} = -10\ А/м.$$

Знак "-" в формуле показывает, что векторы $\vec{H}$ и $\vec{B}$ в намагниченном железе при отсутствии тока в обмотке направлены противоположно. Остаточную намагниченность железа определим из формулы

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{H}_1,$$

или с учетом противоположного направления векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$, запишем в скалярной форме

$$J = \frac{B_1}{\mu_0} + H_1.$$

Откуда

$$J = \frac{B_1}{\mu_0} + \frac{B_1}{\mu_0}\frac{\ell}{\ell_0} = \frac{B_1(\ell + \ell_0)}{\mu_0 \ell} = 3{,}4 \cdot 10^3\ А/м.$$

2.4.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с узким вакуумным зазором, содержит $N = 1000$ обмотке течет ток $I = 1$ $А$. При какой длине ℓ_0 вакуумного зазора индукция магнитного поля в нем будет равна 0,5 *Тл*? Длина тороида по средней линии равна 1 *м*.

Ответ: 2 мм.

2. Тороид со стальным сердечником имеет n = 10 витков на каждый сантиметр длины. По тороиду течет ток силой I=2A. Вычислить магнитный поток Φ в сердечнике, если его сечение S = 4 $см^2$.

Ответ: Φ = 0,52·10^{-2} $Вб$.

3. Тороид со стальным сердечником, длина которого по средней линии ℓ = 1 $м$, имеет вакуумный зазор ℓ_0 = 4 $мм$. Обмотка содержит n = 8 *витков/см*. При какой силе тока индукция B в зазоре будет равна 1 $Тл$?

Ответ: I= 5 A.

4. Определить число ампер-витков тороида с железным сердечником, при котором индукция B в узком вакуумном зазоре шириной ℓ_0 = 3,6 $мм$ составляет 1,4 $Тл$. Длина тороида по средней линии ℓ = 0,8 $м$.

Ответ: IN = 5,8·10^3 A.

5. По обмотке соленоида, в который вставлен железный сердечник течет ток I = 4 A. Соленоид имеет длину ℓ = 1 $м$, площадь поперечного сечения S = 20 $см^2$ и число витков N = 400. Определите энергию магнитного поля соленоида.

Ответ: 2,88 Дж.

Второй уровень сложности

1. Сколько ампер-витков требуется для того, чтобы получить магнитный поток Ф=3·10^{-3}$Вб$ в железном сердечнике тороида, если длина средней линии сердечника ℓ = 120 $см$ и сечение S = 2,5 $см^2$?

Ответ: IN = 840 A.

2. По обмотке тора течет ток, создающий в узком вакуумном зазоре магнитный поток Φ = 0,5·10^{-3} $Вб$. Ширина зазора ℓ_0 = 8 $мм$. Какова должна быть ширина эазора, чтобы магнитный поток в нем при той же силе тока увеличился в два раза?

Ответ: ℓ =1,8 $мм$.

3. Железное кольцо средним диаметром 11,4 *см* имеет обмотку из 200 витков, по которой течет ток силой 5 *А*. Какой ток должен проходить через обмотку, чтобы индукция в сердечнике осталась прежней, если в кольце сделать прорезь шириной в 1 *мм*? Найти магнитную проницаемость в материале сердечнике при этих условиях.

Ответ: I = 11,3 *А*; μ = 457.

4. Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с узким вакуумным зазором, содержит N = 1000 витков. По обмотке течет ток I = 1 *А*. При какой величине вакуумного зазора ℓ_0 индукция B магнитного поля в нем будет равна 0,5 *Тл*? Длина тороида по средней линии ℓ = 1*м*.

Ответ: ℓ_0 = 2,25 *мм*.

5. Обмотка тороида с железным сердечником имеет N = 151 виток. Средний радиус r тороида составляет 3 *см*. Сила тока I через обмотку равна 1 *А*. Определите для этих условий: 1) индукцию магнитного поля внутри тороида; 2) намагниченность сердечника; 3) магнитную проницаемость сердечника. Используйте график зависимости B от H.

Ответ: 1) 1,5 Тл; 2) $1{,}2\cdot10^6$ А/м; 3) $1{,}5\cdot10^3$.

6. Напряженность однородного магнитного поля в платине равна 5 *А/м*. Определите магнитную индукцию поля, создаваемого молекулярными токами, если магнитная восприимчивость платины равна $3{,}6\cdot10^{-4}$.

Ответ: 2,26 *нТл*.

7. По круговому контуру радиусом r = 40 *см*, погруженному в жидкий кислород, течет ток I = 1 *А*. Определите намагниченность в центре этого контура. Магнитная восприимчивость жидкого кислорода $\chi = 3{,}4\cdot10^{-3}$.

Ответ: 4,25 *мА/м*.

2.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.5.1. Основные понятия, законы и формулы

- Явление электромагнитной индукции – возникновение индукционного тока в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром. Появление тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, получившей название ЭДС индукции. Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt},$$

где $\mathcal{E}_i$ – электродвижущая сила индукции; N – число витков; $\psi = N\Phi$ – потокосцепление.

Знак минус в законе Фарадея определяется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

Единица магнитного потока и потокосцепления: $[\Phi] = 1Тл \cdot м^2 = 1Вб$.

- Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L:

$$\Phi = LI.$$

Индуктивность – физическая величина, характеризующая магнитные свойства контура (катушки). Индуктивность бесконечно длинного соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n – число витков на единицу длины; V – объем соленоида, μ – магнитная проницаемость сердечника.

Единица индуктивности в СИ: $[L] = 1\frac{Вб}{А} = 1Гн$ (Генри).

- Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией. Применяя к явлению самоиндукции закон Фарадея, получим для ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура.

- В соответствии с правилом Ленца ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток неизменным, она противодействует току, когда он увеличивается, и поддерживает ток, когда он уменьшается.

Характерные проявления самоиндукции наблюдаются при замыкании и размыкании тока в цепи, поэтому установление тока при этом происходит не мгновенно, а постепенно. Эффект замедления тем значительнее, чем больше индуктивность цепи.

Взаимная индукция – явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом. ЭДС взаимной индукции

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

где $\mathcal{E}_2$ – ЭДС, индуцируемая во втором контуре при изменении силы тока I_1.

Аналогично, если во втором контуре течет изменяющийся ток I_2, то он создает ЭДС взаимной индукции в первом контуре

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}.$$

Коэффициенты L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров. Они зависят от формы, размеров, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды.

Теорема взаимности: при отсутствии ферромагнетиков взаимные индуктивности контуров равны

$$L_{12} = L_{21}.$$

- Энергия магнитного поля контура (соленоида) – равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля:

$$W = A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

2.5.3. Основные типы задач и методы их решения

1. Расчет ЭДС индукции и тока индукции.

Метод решения. В случае замкнутого контура изменяющийся магнитный поток целесообразно представить как функцию времени $\Phi(t)$. Тогда ЭДС или ток индукции могут быть найдены последующим дифференцированием этой функции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad I_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Направление тока или знак ЭДС зависят от знака производной $d\Phi/dt$.

Если дан отдельный проводник, движущийся в магнитном поле, то при использовании приведенных формул под $d\Phi$ следует понимать абсолютное значение магнитного потока через поверхность dS, покрываемую проводником за время dt его движения. Знак ЭДС следует определять независимо от расчета. В этом случае ЭДС индукции можно находить и как удельную работу сторонней силы, роль которой играет магнитная составляющая силы Лоренца:

$$\mathscr{E}_i = \int\limits_L \upsilon B_\ell d\ell.$$

Интегрирование проводится по всей длине проводника.

Примеры решения задач

Задача 1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1\ Тл$ расположена прямоугольная рамка, подвижная сторона которой длиной $\ell = 0{,}1\ м$ перемещается со скоростью $\upsilon = 25\ м/с$ перпендикулярно линиям индукции поля (рис.74). Определить ЭДС индукции, возникающую в контуре.

Решение

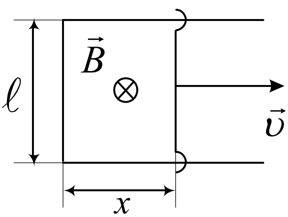


Рис.74

Решим данную задачу решить двумя способами.

1) Магнитный поток Φ сквозь рамку возрастает, что ведет к возникновению вихревого электрического поля, а значит, согласно закону Фарадея, в рамке появляется ЭДС индукции

$$\Phi = BS = B\ell x;$$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt},$$

где $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon$ – скорость перемещения проводника.

Поэтому

$$\mathscr{E}_i = -B\ell\upsilon = -2{,}5\cdot 10^{-2}\ В.$$

Знак “-” показывает, что ЭДС индукции действует в контуре в таком направлении, при котором связанная с ним правилом правого винта нормаль к контуру противоположна вектору $\vec{B}$ (т.е. направлена к наблюдателю). Таким образом, ЭДС индукции, а значит, и индукционный ток направлены в контуре против часовой стрелки.

2) В связи с тем, что действующая в цепи ЭДС обусловлена работой сторонних сил (т.е. сил неэлектрического происхождения) при перемещении вдоль замкнутой цепи единичного положительного заряда, можно записать

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q}\oint\limits_{l} \vec{F}_{ст}\, d\,\vec{\ell}.$$

При движении в магнитном поле проводника вместе с ним движутся со скоростью υ его свободные заряды. Поэтому на каждый из них действует сила Лоренца, выполняющая роль сторонней силы. В результате разделения зарядов в подвижном проводнике под действием силы Лоренца, на его концах возникает разность потенциалов, приводящая к возникновению тока в рамке, направленного против часовой стрелки.

Так как

$$\vec{F}_{л} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] \text{ и } \vec{\upsilon} \perp \vec{B}\text{, то } F_{л} = q\upsilon B,$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint\limits_{l} \vec{F}_{ст}\, d\,\vec{\ell} = \frac{1}{q}F_{ст}\ell = \frac{1}{q}F_{ст}\ell = \frac{1}{q}F_{Л}\ell = B\ell\upsilon.$$

Задача 2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4\ \ Тл$ в плоскости перпендикулярной линиям индукции поля, равномерно вращается стержень длиной $\ell = 0{,}1\ м$. Ось вращения проходит через один из концов стержня (рис.75). Определить разность потенциалов между осью и концом стержня при частоте вращения $\nu = 16\ с^{-1}$.

Решение

Перераспределение зарядов в стержне, приводящее к возникновению разности потенциалов, происходит под действием магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{F}_{л} = -e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right].$$

Вектор линейной скорости $\vec{\upsilon}$ в любой точке стержня перпендикулярен вектору $\vec{B}$, поэтому модуль силы равен

$$F_л = e\upsilon B,$$

где e -элементарный заряд.

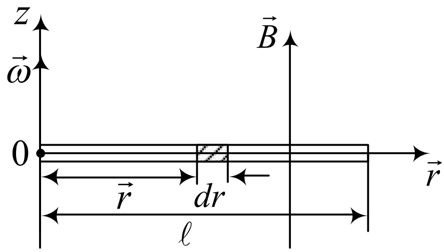


Рис.75

Учитывая, что скорость элемента dr, находящегося на расстоянии r от оси вращения, связана с частотой ν, соотношением

$$\upsilon = \omega r = 2\pi \nu r,$$

получим

$$F_л = e\upsilon B = 2\pi \nu e B r.$$

Удельную работу данной силы по перемещению единичного заряда вдоль стержня и численно равную разности потенциалов, определим интегрированием

$$\varphi - \varphi_0 = A^* = 2\pi \nu B \int_0^{\ell} r dr = \pi \nu B \ell^2.$$

Вычисляя, получим $\Delta\varphi = 0{,}2$ *В*.

Если стержень вращается, так как показано на рисунке (рис.75), то электроны будут накапливаться на закрепленном конце стержня, т.е. разность потенциалов $\varphi - \varphi_0 < 0$.

Задача 3. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ *Тл* равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков (рис.76). Какова должна быть частота вращения рамки, чтобы максимальное значение ЭДС достигло 100 *В*? Площадь рамки равна 150 *см*^{2}. Ось вращения лежит в плоскости рамки перпендикулярно вектору $\vec{B}$.

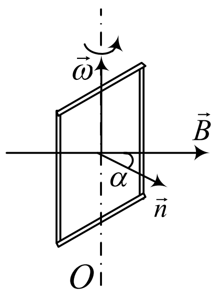


Рис.76

Решение

Будем считать, что в начальный момент времени направление нормали к рамке совпадает с вектором $\vec{B}$. При вращении рамки угол α между нормалью к ней и вектором индукции $\vec{B}$ изменяется по линейному закону

$$\alpha = \omega t = 2\pi\nu t\,.$$

Магнитный поток, пронизывающий рамку, зависит от времени по закону

$$\Phi = BS\cos 2\pi\nu t\,.$$

ЭДС индукции определим по закону Фарадея

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -NBS\frac{d}{dt}\cos 2\pi\nu t = -NBS\cdot 2\pi\nu\sin 2\pi\nu t.$$

Возникающая переменная ЭДС имеет максимальное значение

$$\mathscr{E}_{max} = NBS2\pi\nu.$$

Необходимую частоту вращения рамки найдем по формуле

$$\nu = \frac{\mathscr{E}_{max}}{2\pi NBS}.$$

После вычислений получим $\nu = 10{,}6$ с$^{-1}$.

Задача 4. Изолированный металлический диск радиусом $R = 0{,}25\,м$ вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 130\,рад/с$ вокруг его оси (рис.77). Найти разность потенциалов между центром и ободом диска, если:

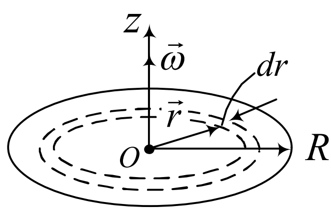


Рис.77

а) внешнего магнитного поля нет.

б) имеется перпендикулярное к диску внешнее магнитное поле с индукцией $B = 5{,}0\,мТл$.

Решение

а) Внешнее магнитное поле отсутствует. В этом случае роль сторонней силы, действующей на свободные электроны, играет центробежная сила инерции. Напряженность сторонней силы

$$E^* = \frac{F^*}{q} = \frac{m\omega^2 r}{(-e)} = -\frac{m\omega^2 r}{e},$$

где m – масса электрона, e – элементарный заряд.

Разность потенциалов между центром и ободом диска найдем интегрированием

$$\varphi_R - \varphi_0 = \int_0^R E^* dr = -\frac{m\omega^2 R^2}{2e}, \; \varphi_0 - \varphi_R = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}.$$

Произведя вычисления, получим $\varphi_0 - \varphi_R = 3\,нВ$. Как видим, это очень незначительная величина.

б) Существует однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное диску. Свободные электроны вследствие вращения диска получают дополнительную тангенциальную скорость $\upsilon_\tau = \omega r$. Напряженность сторонней силы здесь создается силой Лоренца:

$$E^* = \frac{F_л}{q} = \omega B r, \; (\vec{\upsilon}_\tau \perp \vec{B}).$$

Разность потенциалов, как и в предыдущем случае, определяем интегрированием

$$\Delta\varphi = \omega B \int_0^R r dr = \frac{\omega B R^2}{2} = 20\,(мВ).$$

Задача 5. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости (рис.78). Перемычку, длина которой ℓ, перемещают вправо с постоянной скоростью υ. Найти ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния r.

Решение

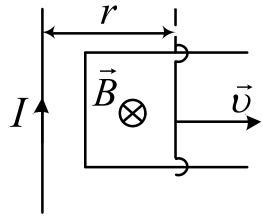


Рис.78

Поток вектора индукции через контур изменяется вследствие двух факторов: как возрастания площади контура за счет движения перемычки, так и изменения магнитного поля. Индукция магнитного поля, создаваемая прямолинейным током, определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Изменение магнитного потока вектора $\vec{B}$ сквозь контур за время dt равно

$$d\Phi = B\ell\upsilon dt = \frac{\mu_0 I\ell\upsilon}{2\pi r}dt.$$

Численное значение ЭДС индукции, возникающей в контуре, определим по закону Фарадея

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I\ell\upsilon}{2\pi r}.$$

Задача 6. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянным током I лежат в одной плоскости (рис.79). Сопротивление рамки R. Ее повернули на 180^0 вокруг оси OO', отстоящей от проводника с током на расстояние b. Найти количество электричества, протекшее в рамке.

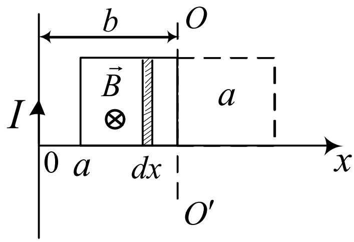


Рис.79

Решение

Рассчитаем магнитные потоки вектора индукции $\vec{B}$, пронизывающие рамку в первом и втором положении.

Магнитное поле, создаваемое прямолинейным током, не однородно, поэтому вначале определим элементарный поток через узкую полоску шириной dx, а затем проведем интегрирование.

Элементарный поток равен

$$d\Phi = Badx = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi x}dx .$$

Магнитные потоки сквозь рамку в первом и втором положении:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int\limits_{b-a}^{b}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{b}{b-a},$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int\limits_{b}^{b+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}.$$

Изменение магнитного потока через рамку при ее повороте составит

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

Наконец, количество заряда, протекшего в рамке, будет равно

$$\Delta q = I\Delta t = \frac{\xi}{R}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R}\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

Задача 7. Внутри длинного соленоида находится катушка из N витков с площадью поперечного сечения S. Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с ее диаметром и перпендикулярной оси соленоида. Найти ЭДС индукции в катушке, если индукция магнитного поля в соленоиде меняется со временем по закону $B = B_0 \sin\omega t$, и в момент $t = 0$, ось катушки совпадала с осью соленоида.

Решение

Полный магнитный поток сквозь катушку в момент времени t равен

$$\Psi = NBS\cos\varphi,$$

где $\varphi = \omega t$ – угол между осями катушки и соленоида.

В развернутом виде, с учетом зависимости $B(t)$, имеем

$$\Psi = NB_0S\sin\omega t\cos\omega t = NB_0S\,\frac{\sin 2\omega t}{2}.$$

ЭДС индукции в катушке найдем по закону Фарадея

$$\mathscr{E} = \frac{d\Psi}{dt} = \omega NB_0S\cos 2\omega t.$$

Задача 8. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени τ по закону $\Phi = at(\tau - t)$. Найти количество тепла, выделенное в контуре за это время. Индуктивностью контура пренебречь.

Решение

ЭДС, индуцируемую в контуре без учета знака, определим по закону Фарадея

$$\mathscr{E} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{d}{dt}\left\{at(\tau - t)\right\} = a(\tau - 2t).$$

Сила индукционного тока в контуре

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{a(\tau - 2t)}{R}.$$

Количество теплоты, выделенное в контуре за время τ, по закону Джоуля-Ленца, равно

$$Q = \int_0^\tau I^2 R\,dt = \frac{a^2}{R}\int_0^\tau (\tau - 2t)^2\,dt = \frac{a^2\tau^3}{3R}.$$

2. Вычисление индуктивности и взаимной индуктивности контуров. Расчет экстратоков замыкания и размыкания цепи

Метод решения. Задача о вычислении индуктивности контура обычно сводится к тому, чтобы, произвольно выбрав ток I, определить полный магнитный поток Φ, а затем согласно определению $L = \Phi / I$, рассчитать индуктивность.

При расчете взаимной индуктивности контуров, которые при отсутствии ферромагнетиков одинаковы $L_{12} = L_{21}$, следует помнить, что взаимная индуктивность численно равна магнитному потоку сквозь один из контуров, создаваемому единичным током в другом контуре. В ряде случаев, эти расчеты существенно упрощаются при использовании теоремы взаимности. Из этой теоремы в частности следует, что магнитный поток Φ_1 сквозь первый контур, созданный током I во втором контуре, равен магнитному потоку Φ_2, сквозь второй контур, созданному таким же током I в первом контуре. Необходимо обращать внимание на то, что индуктивность и взаимная индуктивность зависят от геометрии проводников, их взаимного расположения и магнитных свойств среды. Эти коэффициенты не зависят от силы тока только при отсутствии ферромагнетиков.

Само- и взаимоиндукция представляют собой частный случай явления электромагнитной индукции. В соответствии с правилом Ленца, ЭДС само- и взаимоиндукции препятствует изменению силы тока в контуре, стремясь сохранить магнитный поток постоянным.

Наиболее характерным проявлением самоиндукции в электрических цепях является возникновение экстратоков при замыкании и размыкании цепи. Установление тока происходит постепенно. Скорость убывания или возрастания тока характеризуется временем релаксации, определяемой отношением

$$\tau = \frac{L}{R} ,$$

где L и R – индуктивность и сопротивление цепи.

Расчет экстратоков проводится в соответствии с законом Ома, учитывающим действие как источника ЭДС, так и ЭДС самоиндукции.

Примеры решения задач

Задача 1. Сколько метров тонкого провода надо взять для изготовления соленоида длины $\ell_0 = 100\,см$ с индуктивностью $L = 1{,}0\,мГн$, если диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины?

Решение

При отсутствии магнитного сердечника $(\mu = 1)$ индуктивность длинного соленоида

$$L = \mu_0 n^2 V = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell_0},$$

где N – полное число витков обмотки, S – площадь поперечного сечения соленоида.

Если диаметр провода навивки d, то

$$N = \frac{\ell_0}{d}, \quad L = \frac{\mu_0 S \ell_0}{d^2},$$

отсюда

$$d = \sqrt{\mu_0 S \ell_0 / L} = R\sqrt{\pi \mu_0 \ell_0 / L} ,$$

где R – радиус соленоида.

Длина провода соленоида

$$\ell = 2\pi R N = \frac{2\pi R \ell_0}{d} = 2\sqrt{\pi \ell_0 L / \mu_0} .$$

Произведя вычисления, получим $\ell = 100\ м$.

Задача 2. Определить индуктивность тороидального соленоида из N витков, внутренний радиус которого равен b, а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a. Пространство внутри соленоида заполнено однородным парамагнетиком с магнитной проницаемостью μ.

Решение

Индуктивность магнитного поля тороида, заполненного парамагнетиком, равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r},$$

где r – расстояние от оси тора.

Полный магнитный поток через сечение тороида найдем интегрированием

$$\Psi = N\int_S BdS = N \cdot \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi}\int_b^{b+a}\frac{adr}{r} = \frac{\mu\mu_0 N^2 Ia}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}.$$

Отсюда имеем

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}.$$

Задача 3. Найти индуктивность единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных металлических цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в $\eta = 3{,}6$ раза больше, чем радиус внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице.

Решение

Обозначим через a и b радиусы внутреннего и внешнего цилиндров кабеля соответственно. Допустим, что по кабелю течет ток силой I. Токи по цилиндрам кабеля имеют противоположные направления. Ток, текущий по внешней оболочке кабеля не создает магнитного поля во внутренней области. Магнитное поле между проводящими поверхностями цилиндрического кабеля порождается током, текущим только по внутреннему проводу.

Определим магнитный поток через продольное сечение кабеля на единице его длины

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Отсюда получаем индуктивность кабеля единичной длины

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\eta,\ L = 0{,}26\,мкГн/м.$$

Задача 4. Найти закон изменения во времени тока, текущего через индуктивность L в схеме (рис.80) после замыкания ключа K в момент $t = 0$.

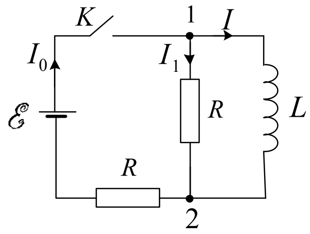


Рис.80

Решение

Покажем направления токов на различных участках цепи и составим уравнения для узла и двух контуров согласно правилам Кирхгофа:

$$I_0 = I + I_1,$$

$$(I_0 + I_1)R = \mathcal{E},$$

$$I_1 R = L\frac{di}{dt}.$$

Из полученных уравнений, исключая I_0 и I_1, получим дифференциальное уравнение относительно искомого тока $I(t)$

$$\mathcal{E} - IR = 2L\frac{dI}{dt},$$

и проводим разделение переменных

$$\frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{2L}dt.$$

Интегрируя полученное уравнение по I от I_0 до I, и по времени от 0 до t, получим

$$\int_0^i \frac{dI}{I - \mathscr{E}_i / R} = -\frac{R}{2L}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-Rt/2L}).$$

Задача 5. Вычислить взаимную индуктивность длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b. Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной b параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии ℓ.

Решение

Допустим, что по прямому проводу течет ток I_1, индукция поля которого равна

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r},$$

где r – расстояние от оси провода.

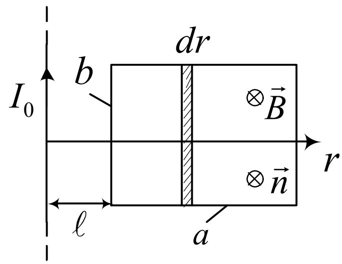


Рис.81

Для нахождения магнитного потока через рамку выделим узкую полоску шириной dr, параллельную проводу (рис.81). Элементарный поток сквозь полоску равен

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi r}dr.$$

Полный магнитный поток найдем интегрированием

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\int_{\ell}^{\ell+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{\ell + a}{\ell}.$$

Взаимная индуктивность системы по определению равна

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell} \ .$$

Задача 6. На поверхность тора квадратного сечения равномерно навито N_1 витков тонкой проволоки. На эту обмотку в свою очередь навито N_2 витков. Внутренний и внешний радиусы тора равны a и b (рис.82). Найти взаимную индуктивность обеих обмоток.

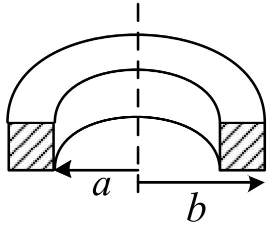


Рис.82

Решение

Пропуская ток I_1 по одной из обмоток, навитых на поверхность тора с числом витков N_1, создадим внутри тора магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r},$$

где r – расстояние до оси тора.

Магнитный поток через все витки второй обмотки определим интегрированием

$$\Phi_2 = N_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1 (b-a)}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 N_1 N_2}{2\pi} (b-a) \ln \frac{b}{a}.$$

Тогда взаимная индуктивность обеих обмоток равна

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{2\pi} (b-a) \ln \frac{b}{a}.$$

Задача 7. Имеется два неподвижных контура с взаимной индуктивностью L_{12}. В одном из контуров начали изменять ток по закону $I_1 = \alpha t$, где α - постоянная. Найти закон изменения тока $I_2(t)$ в другом контуре, индуктивность которого L_2 и сопротивление R.

Решение

ЭДС, возникшая во втором контуре и представляющая сумму ЭДС взаимо- и самоиндукции, равна

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(L_{21}I_1 + L_2 I_2).$$

Учитывая, что L_{21} и L_2 – постоянные, и что $L_{21} = L_{12}$, будем иметь

$$\mathcal{E}_2 = -\alpha L_{12} - L_2\frac{dI_2}{dt}.$$

По закону Ома получаем равенство

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R} = -\frac{\alpha L_{12}}{R} - \frac{L_2}{R}\cdot\frac{dI_2}{dt},$$

представляющее собой дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dI_2}{dt} + \frac{R}{L_2}I_2 + \frac{\alpha L_{12}}{L_2} = 0.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$I_2 = const\cdot e^{-Rt/L_{12}} - \frac{\alpha L_{12}}{R}.$$

Из начальных условий при $t = 0$: $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, находим $const = \frac{\alpha L_{12}}{R}$.

Тогда

$$I_2 = \frac{\alpha L_{12}}{R}\left(e^{-Rt/L_2} - 1\right).$$

Задача 8. Ток I течет по рамке в виде квадратного контура со стороной a. Найти магнитный поток через полуплоскость P, граница которой OO' отстоит от ближайшей стороны рамки на расстояние b. Полуплоскость P и рамка лежат в одной плоскости (рис. 81).

Решение

При вычислении магнитного потока через полуплоскость P воспользуемся теоремой взаимности. Для этого по краю OO' пропустим ток I и найдем поток вектора $\vec{B}$ через квадратную рамку. Поток через полоску поверхности рамки шириной dx равен

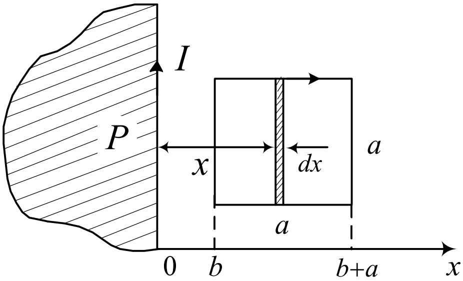


Рис.83

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx .$$

Полный поток сквозь рамку

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} .$$

Этот поток можно представить в виде

$$\Phi_2 = L_{21} I .$$

Отсюда взаимная индуктивность

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} .$$

Если пропустить тот же ток по контуру рамки, то магнитный поток через полуплоскость P, будет равен

$$\Phi_1 = L_{12} I = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} .$$

Задача 9. В цепи, схема которой изображена на рис.84, R_1 = 5 *Ом*, R_2 = 95 *Ом*, L = 0,34 *Гн*, $\mathcal{E}$ = 38 *В*. Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. Определить силу тока в резисторе R_2 в трех случаях: 1) до размыкания цепи;

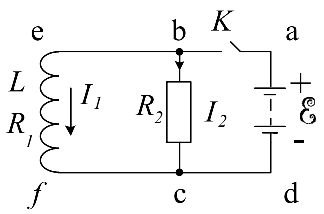


Рис.84

2) в первый момент после размыкания; 3) через 0,01 с после размыкания.

Решение

1. Силу тока I_2 до размыкания цепи находим по правилу Кирхгофа (контур *abcd*):

$$I_2R_2 + \mathrm{I}r = \mathscr{E},$$

где I – сила тока в батарее; r – внутреннее сопротивление источника.

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2} = 0{,}4A.$$

2. Найдем силу тока I_2' в резисторе R_2 сразу после размыкания ключа K. Если до размыкания цепи участки *bc* и *ef* были соединены параллельно, то после отключения батареи образуют неразветвленный контур *befcb*. Значит, по ним должен течь одинаковый ток. Так как из двух участков только *ef* обладают индуктивностью, то именно I_1, проходивший до размыкания цепи по этому участку, должен сохраниться, а I_2 в резисторе R_2 сразу исчезнет после отключения батареи и по всему контуру *befcb* потечет ток, равный I_1:

$$I_2 = I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1} = 7{,}6A.$$

3. Так как цепь отключена от батареи и ток начнет убывать по закону $I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}\right)t$, то в заданный момент времени величину I_2'' можно определить по формуле

$$I_2'' = I_1 \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} \cdot t\right) = 0{,}4A.$$

Задача 10. Катушку индуктивностью $L = 0{,}3$ Гн и сопротивлением $R_1 = 0{,}3$ Ом в некоторый момент времени подключают к источнику, ЭДС которого $\mathscr{E}$ = 12 *В*, через резистор сопротивлением $R_2 = 2{,}7$ *Ом* (рис.85). Определить: 1) силу тока в цепи через 0,1 с; 2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,1 с; 3) энергию магнитного поля в катушке через 0,1 с.

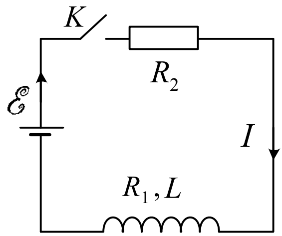


Рис.85

Решение

В момент включения цепи ток начнет нарастать и возникнет ЭДС самоиндукции. Закон Ома для данной цепи имеет вид

$$I(R_1 + R_2) = \mathscr{E} - L\frac{dI}{dt}.$$

Разделяя переменные и интегрируя путем замены переменных, получим

$$\int \frac{dI}{I(R_1 + R_2) - \mathscr{E}} = -\frac{1}{L}\int dt$$

$$\Rightarrow \quad I = I_0(1 - e^{t/\tau}),$$

где $\quad I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2}$ - установившийся ток при $t \to \infty$;

$\tau = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$ – постоянная для данной цепи, называемая временем релаксации.

Таким образом, сила тока в цепи, спустя время 0,1с будет равна

$$I = \frac{12}{3}(1 - 2{,}78^{-1}) = 2{,}56\,A.$$

Количество теплоты, которое выделится в катушке через 0,1 с, определим по закону Джоуля-Ленца

$$Q = \int_0^t I^2(t) R_1 dt = I_0^2 R_1 \int_0^t (1 - e^{-t/\tau})^2 dt = I_0^2 R_1 (t + 2\tau e^{-t/\tau} - \frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}).$$

При расчете, получим $Q = 0{,}54\,\textit{Дж}$.

Энергию магнитного поля в катушке определим по формуле

$$W = \frac{LI_1^2}{2} = 0{,}98\,\textit{Дж}.$$

Задача 11. Катушка индуктивностью $L = 0{,}25\,\textit{Гн}$ и сопротивлением $R_1 = 0{,}5\,\textit{Ом}$ и резистор сопротивлением $R_2 = 2{,}0\,\textit{Ом}$ соединены параллельно и подключены к источнику, ЭДС которого 12 *В*, через ключ К (рис.86). Внутренним сопротивлением источника пренебречь. В некоторый момент ключ К размыкают. Определить: 1) силу тока в цепи через 0,1 с; 2) количество теплоты, которое выделится на резисторе через 0,1 с.

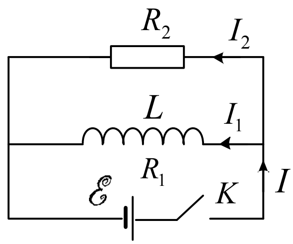


Рис. 86

Решение

В установившемся режиме, до размыкания ключа *К,* сила тока в цепи равна сумме токов текущих через катушку индуктивности I_1 и резистор I_2, причем

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1}.$$

В момент $t = 0$, соответствующий моменту отключения источника, ток через резистор исчезает мгновенно, и в цепи, состоящей теперь из последовательно соединенных резистора и катушки, сила тока одинакова и равна току в катушке I_1. ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке, будет способствовать постепенному исчезновению тока. Зависимость силы тока от времени может быть найдена из закона Ома. Для данной цепи

$$I(R_1 + R_2) = -L\frac{dI}{dt}.$$

После разделения переменных

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L}dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int_{I_1}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_1 e^{-t/\tau},$$

где $\tau = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$ - время релаксации.

Количество теплоты, которое выделится на резисторе, найдем по закону Джоуля-Ленца

$$Q = \int_0^t I^2(t)R_2 dt = I_1^2 R_2 \int_0^t e^{-2t/\tau}dt = \frac{I_1^2 R_2 \tau}{2}e^{-2t/\tau}.$$

Проведя вычисления, найдем

$$I = 8{,}63\ А,\quad Q = 7{,}45\ Дж.$$

3. Расчет энергии магнитного поля

Метод решения. Применение формул, определяющих собственную энергию тока и объемную плотность энергии магнитного поля.

Собственная энергия тока I, текущего по контуру (катушке) с индуктивностью L при отсутствии ферромагнетиков, определяется формулами

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2I}.$$

Эта энергия может быть целиком превращена во внутреннюю энергию проводников.

Энергия магнитного поля распределяется в пространстве с объемной плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Зная плотность энергии магнитного поля в каждой точке, можно путем интегрирования найти энергию поля, заключенного в любом объеме

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu\mu_0}\int_V B^2 dV.$$

Отметим, что все данные формулы применимы только к диамагнетикам и парамагнетикам, но неприменимы к ферромагнетикам.

При решении задач, в которых требуется найти энергию магнитного поля в ферромагнетиках, для объемной плотности энергии необходимо использовать формулу

$$w = \frac{BH}{2}.$$

При этом следует учесть, что напряженность H и индукция B в ферромагнетиках связаны кривой намагничивания (рис. 68).

Примеры решения задач

Задача 1. Соленоид без сердечника имеет плотную однослойную намотку проводом диаметром $d = 0{,}2$ *мм*, и по нему течет ток $I = 0{,}1$ *А*. Длина соленоида $\ell = 20$ *см*, диаметр $D = 5$ *см*. Найти энергию магнитного поля соленоида.

Решение

Определим вначале индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 n^2 \ell S,$$

где $n = \dfrac{1}{d}$ – число витков на 1 *м* длины соленоида, $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$ – площадь поперечного сечения соленоида.

Тогда

$$L = \frac{\mu_0 \pi \ell D^2}{4d^2}.$$

Энергию магнитного поля соленоида, по которому идет ток I, найдем по формуле

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \pi \ell D^2 I^2}{8d^2}.$$

Вычисления дают

$$W = 6{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж}.$$

Задача 2. Ток I течет по длинному прямому проводу круглого сечения из меди. Найти энергию магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины. Считать, что магнитная проницаемость меди постоянна и практически равна единице.

Решение

Обозначим радиус провода через R. Внутри цилиндрического проводника магнитное поле обладает осевой симметрией, что позволяет нам для расчета индукции применить закон о циркуляции вектора $\vec{B}$. Выбрав контур интегрирования в форме окружности радиуса $r < R$, совпадающей с линией индукции, можем записать

$$\oint_L B_\ell d\ell = \mu_0 \sum I.$$

Если плотность тока j постоянна по поперечному сечению проводника, то сумма токов внутри контура интегрирования, равна

$$\sum I = j \cdot \pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}.$$

После подстановки

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}, \text{ отсюда } B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}.$$

Объемная плотность магнитной энергии внутри провода

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}.$$

Энергию поля внутри провода найдем интегрированием

$$W = \int_V w dV.$$

В качестве элементарного объема dV возьмем тонкий цилиндрический слой, внутри которого индукция магнитного поля остается постоянной,

$$dV = 2\pi r \ell dr,$$

где ℓ – длина провода.

С учетом этого энергия магнитного поля, отнесенная к единице длины провода, равна

$$\frac{W}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}.$$

Задача 3. На тор из магнетика намотано $N = 500$ витков. Найти энергию магнитного поля, если при токе $I = 2{,}0\,A$ магнитный поток через поперечное сечение тора $\Phi = 1{,}0\,мВб$.

Решение

Энергия магнитного поля катушки индуктивностью L с током I равна

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

По определению, индуктивность данной тороидальной катушки

$$L = N\frac{\Phi}{I}.$$

После подстановки и вычисления, получим

$$W = \frac{N\Phi I}{2}, \quad W = 0{,}5\,Дж.$$

Задача 4. Железный сердечник, имеющий форму тора с круглым сечением радиуса $a = 3{,}0\,см$, несет на себе обмотку из $N = 1000$ витков, по которой течет ток $I = 1{,}0\,А$. Средний радиус тора $b = 32\,см$. Используя кривую намагничивания для железа (рис.70), найти магнитную энергию, запасенную в сердечнике, полагая напряженность поля H одинаковой по всему сечению.

Решение

Определим напряженность магнитного поля внутри данного тороида, по которому течет ток I, используя закон полного тока

$$H \cdot 2\pi b = NI,$$

откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi b}.$$

Для заданных значений N, I и b напряженность

$$H \cong 500\,А/м.$$

Согласно кривой намагничивания железа, данному значению H соответствует индукция $B = 1{,}4\,Тл.$

Таким образом, энергия, заключенная внутри намагниченного железного сердечника, равна

$$W = wV = \frac{BH}{2}V = \frac{BH}{2} \cdot 2\pi b \cdot \pi a^2 = \pi^2 BHba^2 .$$

Расчет дает $W \cong 2\,Дж$.

Задача 5. Коаксиальный кабель состоит из внутреннего, сплошного проводника радиуса a и наружной проводящей тонкостенной трубки радиуса b. Найти индуктивность и полную энергию магнитного поля единицы длины кабеля. Магнитная проницаемость всюду равна единице.

Решение

Определим вначале энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины кабеля, а затем уже через энергию, найдем его индуктивность.

Индукцию магнитного поля между проводящими поверхностями кабеля B_1 и в центральном проводе B_2, определим с помощью теоремы о циркуляции.

Индукция поля между проводящими поверхностями:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ здесь } a < r < b;$$

Индукция внутри сплошного провода $r<a$:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r},$$

где $I_r = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2$ – ток, текущий по сплошному проводнику радиуса r.

После подстановки

$$B_2 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}.$$

Энергию магнитного поля на единицу длины кабеля найдем интегрированием. В качестве элементарного объема

dV возьмем тонкий цилиндрический слой, внутри которого индукция магнитного поля остается постоянной,

$$dV = 2\pi r\ell dr,$$

где $\ell = 1\,м$ – длина кабеля.

С учетом этого энергия магнитного поля, отнесенная к единице длины кабеля, между оболочками:

$$W_1 = \int\limits_{V_1} w dV = \int\limits_{V_1} \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int\limits_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\frac{b}{a}.$$

Энергия магнитного поля в центральном проводе:

$$W_2 = \int\limits_{V_2} \frac{B_2^2}{2\mu_0} dV = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4} \int\limits_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}.$$

Полная энергия, приходящая на единицу длины кабеля, равна

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}(1 + 4\ln\frac{b}{a}).$$

Индуктивность единицы длины кабеля определим, используя формулу для энергии поля

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi}(1 + 4\ln\frac{b}{a}).$$

Задача 6. Тонкое кольцо из магнетика имеет средний диаметр $d = 30\,см$ и несет на себе обмотку из $N = 800$ витков. Площадь поперечного сечения кольца $S = 5{,}0\,см^2$. В кольце сделана поперечная прорезь ширины $b = 2{,}0\,мм$. Когда по обмотке течет некоторый ток, магнитная проницаемость магнетика $\mu = 1400$. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, найти: а) отношение магнитной энергии в зазоре к магнитной энергии в магнетике; б) индуктивность системы.

Решение

Характеристики магнитного поля внутри магнитного сердечника и в его зазоре будем сопровождать индексами 1 и 2. При отсутствии рассеяния поля на краях зазора выполняются соотношения

$$B_1 = B_2 = B\,,\; H_2 = \mu H_1\,.$$

Напряженность поля внутри магнетика определим по закону полного тока

$$H_1\pi d + H_2 b = NI \;\Longrightarrow\; H_1 = \frac{NI}{\pi d + \mu b}\,,$$

где $b << d$, I - сила тока.

Определим теперь энергию магнитного поля:

1) в объеме сердечника

$$W_1 = \frac{BH_1}{2}V_1 = \frac{BH_1}{2}S\pi d\,;$$

2) в объеме зазора

$$W_2 = \frac{BH_2}{2}V_2 = \frac{BH_2}{2}Sb = \frac{\mu BH_1}{2}Sb\,.$$

Отношение энергий магнитного поля в зазоре и в магнетике, равно

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{\mu b}{\pi d}\,.$$

Для нахождения индуктивности системы, определим суммарную энергию магнитного поля:

$$W = W_1 + W_2 = (1+\eta)W_1 = (1+\eta)\frac{H_1 B}{2}S\pi d =$$

$$= \frac{1}{2}(1+\eta)H^2{}_1\mu_0\mu S\pi d = \frac{\mu_0\mu S N^2 I^2}{2(\pi d + \mu b)}.$$

Следовательно, индуктивность данной системы

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{\pi d + \mu b}\,.$$

Для заданных исходных величин

$$L = 0{,}72\,Гн.$$

Задача 7. Длинный цилиндр радиуса a, заряженный равномерно по поверхности, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти энергию магнитного поля на единицу длины цилиндра, если линейная плотность заряда цилиндра равна λ и $\mu = 1$.

Решение

При вращении цилиндра, по поверхности которого распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = dq/d\ell$, создаются элементарные круговые токи

$$dI = \nu dq = \frac{\omega}{2\pi}\lambda d\ell ,$$

линейная плотность которых, составляет

$$j = \frac{dI}{d\ell} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} .$$

Магнитное поле внутри длинного цилиндра является однородным. Индукцию этого поля определим по теореме о циркуляции. В качестве замкнутого контура выберем прямоугольник, одна из сторон которого длиной ℓ находится внутри цилиндра, а другая снаружи. Тогда

$$\oint\limits_L B_\ell d\ell = B\ell = \mu_0 j\ell ,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0\omega\lambda}{2\pi} .$$

Энергия этого поля, приходящаяся на единицу длины цилиндра, равна

$$W_{ед} = \frac{B^2}{2\mu_0}V_{ед} = \frac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2 = \frac{\mu_0\omega^2\lambda^2 a^2}{8\pi} .$$

2.5.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Прямой проводник длиной 10 *см* помещен в однородном магнитном поле с индукцией 1 *Тл*. Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи 0,4 *Ом*. Какая мощность потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям индукции со скоростью 20 *м/с*?

Ответ: P = 10 *Вт*.

2. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества 10^{-5} *Кл*. Определить магнитный поток $Ф$, пересеченный кольцом, если сопротивление цепи гальванометра равно 30 *Ом*.

Ответ: $Ф = 3\cdot 10^{-4}$ *Вб*.

3. На расстоянии 1 *м* от длинного прямого проводника с током 10^3 *А* расположено кольцо радиусом 1 *см*. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий кольцо, максимален. Чему равно количество электричества, которое протечет по кольцу, если ток в проводнике будет выключен? Сопротивление кольца 10 *Ом*.

Ответ: $q = 62{,}8 \cdot 10^{-6}$ *Кл*.

4. Тонкий медный проводник массой 1 *г* согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле (B = 0,1 *Тл*) так, что плоскость его перпендикулярна линиям поля. Определить количество электричества q, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

Ответ: $q = 41{,}4 \cdot 10^{-3}$ *Кл*.

5. По длинному прямому проводу пропускают ток I = 10 А. На расстояниях L и $2L$ от него расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце резистором с сопротивлением R = 1 Ом. По проводам перемещают стержень-перемычку с постоянной скоростью υ = 1 *м/с* (рис.87). Найдите силу индуцируемого тока.

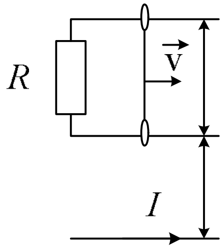


Рис.87

Ответ: 1,39 *мкА*.

6. В однородном магнитном поле с индукцией 0,35 *Тл* равномерно с частотой n = 480 *об/мин* вращается рамка, содержащая N = 1500 витков площадью S = 50 $см^2$. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

Ответ: $\mathcal{E}_{max} = 2\pi nNBS = 132$ *В*.

7. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 *Тл* равномерно вращается рамка, содержащая N = 1000 витков, с частотой ν = 16 $с^{-1}$. Площадь рамки равна 150 $см^2$. Определите значение ЭДС, возникающей в рамке в момент времени, когда угол между вектором $\vec{B}$ и плоскостью рамки равен 30°. Ось вращения лежит в плоскости рамки перпендикулярно вектору $\vec{B}$.

Ответ: 75,4 В.

8. Соленоид содержит 1000 витков. Сечение сердечника равно 10 $см^2$. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией B = 1,5 *Тл*. Найти среднее значение ЭДС, которая возникает в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время, равное $5\cdot10^{-4}$ *с*.

Ответ: $\mathcal{E} = NBS/t = 3\cdot10^3\,B$.

9. Соленоид сечением 5 $см^2$ содержит 1200 витков. Индукция магнитного поля внутри соленоида при токе,

равном 2 *А*, составляет 0,01 *Тл*. Определить индуктивность соленоида.

Ответ: $L = BSN / I = 3 \cdot 10^{-3}$ *Гн*.

10. Идеальная цепь состоит из источника постоянного тока с ЭДС ε = 1,5 В и катушки индуктивностью L = 0,1 Гн. Полное сопротивление цепи равно нулю. Какая будет сила тока в цепи спустя 1 с после замыкания ключа *К*?

Ответ: 0,15 *А*.

11. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой $\Delta I / \Delta t = 5$ А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{инд}$ = 0,1 В. Определить коэффициент L_{12} взаимной индукции катушек.

Ответ: $L_{12} = 2\cdot 10^{-2}$ *Гн*.

12. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 1 Гн. Через какое время сила тока замыкания достигнет 0,9 предельного значения?

Ответ: t = 0,23 *с*.

13. Соленоид содержит 1000 витков. Сила тока в обмотке соленоида 1 А, магнитный поток Φ = 0,01 Вб. Вычислить энергию магнитного поля.

Ответ: $W = NI\Phi / 2 = 0{,}5$ *Дж*.

14. Соленоид содержит 1000 витков. Сила тока в обмотке соленоида 1 *А*, магнитный поток Φ = 0,01 *Вб*. Вычислить энергию магнитного поля.

Ответ: $W = NI\Phi / 2 = 0{,}5$ *Дж*.

Второй уровень сложности

1. Длинный прямой проводник с током $I = 10$ *А* и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости. Перемычку, длина которой $\ell = 10$ *см*, перемещают вправо с постоянной скоростью $\upsilon = 0{,}1$ *м/с* (рис.88). Найдите ЭДС, индуцируемую в контуре в тот момент, когда расстояние от перемычки до проводника с током равно $b = 0{,}1$ *м*.

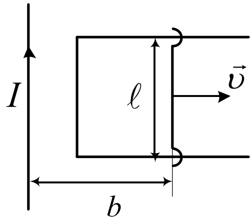


Рис.88

2. В плоскости квадратной рамки с омическим сопротивлением $R = 7$ Ом и стороной $b = 20$ см расположен на расстоянии $r_0 = 20$ см от рамки прямой бесконечный проводник (рис.89). Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = \alpha t^3$, где $\alpha = 2$ А/с^3. Проводник параллелен одной из сторон рамки. Определите силу тока в рамке в момент времени $t = 10$ с.

Ответ: 2,38 мкА.

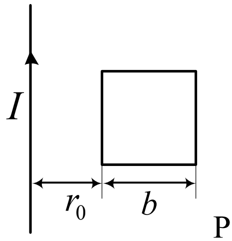


Рис.89

3. Плоскость прямоугольной проволочной рамки *ABCD* перпендикулярна однородному магнитному полю с индукцией $B = 0{,}001$ *Тл*. Одна сторона рамки *BC* подвижна и скользит без нарушения контакта с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ *см/с* по сторонам *AB* и CD. Между точками *A* и *D* включена лампа

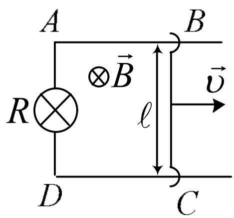


Рис.90

сопротивлением 5 *Ом* (рис.90). Какую силу необходимо приложить к стороне ВС для осуществления такого движения, если ℓ = 10 см?

Ответ: $2\cdot10^{-10}$ *Н*.

4. Рамка из провода сопротивлением 0,01 *Ом* равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,05 *Тл*. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки 100 *см*^{2}. Какое количество электричества протекает через рамку за время поворота ее на угол 30º в следующих трех случаях: 1) от 0 до 30º; 2) от 30 до 60º; 3) от 60 до 90º?

Ответ: $q = \dfrac{\Delta\Phi}{r}$; $q_1 = BS(1-\cos\alpha_1)/r = 6{,}7\cdot10^{-3}$ Кл;

$q_2 = \mathrm{BS}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)/r$; $q_3 = \mathrm{BS}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3)/r$.

5. В середине длинного соленоида находится коаксиальное ему кольцо. Радиус соленоида r_1 = 0,1 *м*, радиус кольца r_2 = 0,05 *м*, электрическое сопротивление кольца R = 25 *мОм*. Найдите силу индукционного тока в кольце, если индукция магнитного поля соленоида начинает меняться во времени по закону B = 3,18·t *мТл*. Индуктивностью кольца можно пренебречь.

Ответ: 1 *мА*.

6. Катушку индуктивностью L=0,3*Гн* и сопротивлением R_1= 0,3 *Ом* в некоторый момент времени подключают к источнику, ЭДС которого ε = 12 *В*, через резистор сопротивлением R_2=2,72*Ом* (рис.91). Определите напряжение на сопротивлении R_2 через 0,1 с.

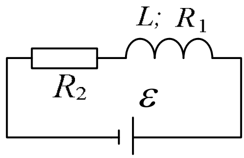


Рис.91

Ответ: 3,9 *В*.

7. Цепь состоит из катушки индуктивностью 1 *Гн* и сопротивлением 10 *Ом*. Источник тока можно отключить, не

разрывая цепи. Определить время, по истечении которого сила тока уменьшится до 0,001 первоначального значения.

Ответ: $t = 0{,}69$ с.

8. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 *Ом* была подключена катушка, индуктивность которой 0,5 *Гн*, а сопротивление 8 *Ом*. Найти время, в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, отличающегося от максимального на 1%.

Ответ: $t = (L \ln I_0 / \Delta I)/(R_1 + R_2) = 0{,}23\, c.$

9. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков. Чему равна энергия магнитного поля, если при токе 2,5 *А* магнитный поток в железе $\Phi = 5 \cdot 10^{-3}$ *Вб*?

Ответ: $W = 0{,}15$ *Дж*.

10. По обмотке тороида течет ток 0,6 *А*. Витки провода диаметром 0,4 *мм* плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Найти энергию магнитного поля в стальном сердечнике тороида, если площадь сечения его равна 4 см^2, диаметр средней линии D = 30 *см* (явление гистерезиса не учитывать).

Ответ: $W = \, = 3{,}24\,$*Дж*.

11. Индукция магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от B_1 = 0,5 *Тл* до B_2 = 1 *Тл*. Найти, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля.

Ответ: $\dfrac{B_2 H_2}{B_1 H_1} = 6{,}4$.

12. При некоторой силе тока плотность энергии магнитного поля соленоида (без сердечника) равна 0,2 *Дж/м*^{3}. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?

Ответ: $1{,}6 \cdot 10^3$.

13. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет 10 витков на каждый сантиметр длины. Чему равна плотность энергии поля при силе тока 16 *А*? Ответ: $\omega = 161$ *Дж/м*^{3}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-методическом пособии кратко представлены основные понятия, законы и уравнения постоянного тока и электромагнетизма в рамках основной образовательной программы высшей школы по общей физике. Выделены основные типы задач и рассмотрены методы их решения. Приведены примеры решения целого ряда задач, иллюстрирующих как основные положения теории, так и предлагаемые методы их решения. Особое внимание уделено анализу физической ситуации и выбору оптимальных методов решения той или иной задачи. Важное место также отведено математическому этапу при решении задач, в первую очередь связанному с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Пособие предназначено студентам технических вузов. Большое количество рассмотренных задач различного уровня сложности поможет студентам приобрести некоторый опыт в решении таких задач и будет способствовать активизации их самостоятельной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Некоторые физические постоянные

1. Элементарный заряд – $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
2. Масса электрона – $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
3. Удельный заряд электрона – $e / m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
4. Масса протона – $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
5. Электрическая постоянная – $\varepsilon_0 = 0{,}885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м
6. Магнитная постоянная – $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
7. Скорость света в вакууме – $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ м/с

2. Основные формулы векторного анализа

1. Скалярное произведение двух векторов

$$(\vec{a},\vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha .$$

2. Векторное произведение двух векторов

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{c}\,,\ c = a \cdot b \cdot \sin\alpha .$$

3. Градиент скалярной функции φ

$$grad\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} .$$

4. Циркуляция вектора $\vec{A}$ по контуру L

$$C = \oint_L (\vec{A}, d\vec{\ell}) = \oint_L A_\ell d\ell\,,\quad A_\ell = A \cdot \cos\alpha .$$

5. Поток вектора $\vec{A}$ через поверхность S

$$\Phi = \int_S (\vec{A}, d\vec{S}) = \int_S A_n dS\,,\ A_n = A \cdot \cos\alpha .$$

3. Производные элементарных функций

функция	производная	функция	производная
$y = C = conct$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = n^x$	$y' = n^x \ln n$	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

4. Первообразные элементарных функций

интеграл	первообразная	интеграл	первообразная
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos x}$	$\ln\left\|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\|+C$
$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$tgx+C$
$\int e^x dx$	e^x+C	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$-ctgx+C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$
$\int \sin xdx$	$-\cos x+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}+C$
$\int \cos xdx$	$\sin x+C$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$arctgx+C$
$\int tgxdx$	$-\ln\|\cos x\|+C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
$\int ctgxdx$	$\ln\|\sin x\|+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+$
$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т.И. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2007. – 560 с.

2. Детлаф А.А. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк. 2002. – 718 с.

3. Савельев И.В. Курс общей физики [Текст]: в 5 кн.: учеб. пособие для втузов / И.В. Савельев. – М.: АСТ: Астрель, 2005.

4. Яворский Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов [Текст]: учеб. пособие / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, А.К. Лебедев. - М.: Оникс, 2006. – 1056 с.

5. Чертов А.Г. Задачник по физике [Текст]: учеб. пособие для втузов / А.Г Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Изд-во физ.-мат. литер., 2001. – 640с.

6. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / В.С. Волькенштейн. – СПб.: Специальная литература, 2001. – 327с.

7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – 3.изд., перераб. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 432 с.

8. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / И.Е. Иродов. – М.: Высш. шк., 1991. – 289 с.

9. Новодворская Е.М. Методика проведения упражнений по физике во втузе [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. – М.: Высш. шк., 1981. – 318 с.

10. Новиков С.М. Сборник заданий по общей физике [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: Мир и образование, 2006. – 512 с.

11. Евсюков В.А. Практика решения задач по физике: Электромагнетизм [Текст]: учеб. пособие / В.А. Евсюков, А.Г. Москаленко. – Воронеж: ВГТУ, 2010. – Ч. 2.2. – 117 с.

12. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособие для вузов: Электричество и магнетизм. Оптика [Текст] / Под ред. В.А. Овчинкина. – М.: МФТИ, 2000. – Ч. 2. – 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Москаленко Александр Георгиевич
Тураева Татьяна Леонидовна
Татьянина Елена Павловна
Антипов Сергей Анатольевич

ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

В авторской редакции

Компьютерный набор Е.П. Татьянина

Подписано в печать 12.07.2017.
Формат 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 10,9. Уч.-изд. л. 8,1. Тираж 350 экз.
Зак.№104.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Московский пр.,14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Московский пр.,14