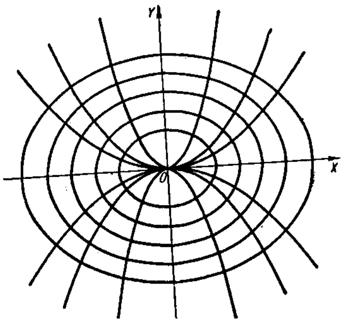
А.А. Катрахова Г.Ф. Федотенко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА

Учебное пособие



Воронеж 2010

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

А.А. Катрахова Г.Ф. Федотенко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2010

УДК 517.9

Катрахова А.А. Дифференциальные уравнения и их применение при решении задач прикладного характера: учеб. пособие /А.А. Катрахова, Г.Ф. Федотенко. Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2010. 147 с.

Учебное пособие состоит из семи глав, разбитых на параграфы, и четырех приложений. Оно содержит теоретический материал по разделу обыкновенные дифференциальные уравнения, а также решение задач, имеющих важное прикладное значение для студентов инженерно-технических специальностей. Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям 140600 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», 110300 «Агроинженерия», специальностям 140601 «Электромеханика», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства», дисциплине «Математика» очной и очной сокращенной форм обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе MS WORD и содержится в файле «ДИФУРЫ И ИХ ПРИМЕН .DOC»

Ил. 19. Библиогр.: 12 назв.

Научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Шашкин);
д-р физ.-мат. наук, проф. В.Г. Задорожний

© Катрахова А.А., Федотенко Г.Ф., 2010
© Оформление. ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2010

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения – большая и важная область современной математики, При изучении явлений природы, решения многих задач физики, техники, биологии и других наук непосредственно не всегда удается установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной процесс.

Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других независимых переменных величин, то есть найти уравнения, в которых неизвестные функции входят под знак производной или дифференциала. Такие уравнения называются дифференциальными.

Следует отметить, что во многих случаях различные явления описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями.

Характерное свойство дифференциальных уравнений – иметь бесконечное множество решений. Чтобы выделить из бесконечного множества зависимостей ту, которая описывает именно этот процесс, надо иметь дополнительную информацию, например, знать начальное состояние процесса.

Данное учебное пособие посвящено методам решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а также простейшим интегрируемым дифференциальным уравнениям n – го порядка ($n > 1$). В нем вводятся основные понятия, связанные с решением систем дифференциальных уравнений и решение задач прикладного характера.

Оно может быть использовано при подготовке к зачетам и экзаменам, практическим занятиям, выполнении курсовых работ студентами инженерно-технических специальностей.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением называется уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *уравнением с частными производными*. В главах I и II рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n порядка в общем виде можно записать так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right) = 0\,, \tag{1.1}$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция переменной x; $y, y', y'', \ldots, y^{n}$ – ее производные; $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}\right)$ – заданная функция своих аргументов. Отметим, что функция F может не содержать некоторых своих аргументов, но непременно должна зависеть от $y^{(n)}$ (когда речь идет об уравнении n – го порядка).

Если уравнение (1.1) разрешимо относительно производной n – го порядка, то его можно представить в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right) = 0\,. \tag{1.2}$$

Функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая n раз в интервале $(a,\ b)$, называется *решением* дифференциального уравнения (1.1) в этом интервале, если она обращает указанное уравнение в тождество, т.е.

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

для всех $x \in (a,b)$.

График решения дифференциального уравнения n – го порядка называется *интегральной линией* (или *интегральной кривой*).

Задача Коши дифференциального уравнения n – го порядка состоит в следующем: найти решение $y=y(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ y'' = y_0'', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0\,, \tag{1.3}$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называемые начальными данными решения. Равенства (1.3), которые называются начальными условиями, можно записать и в таком виде:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ y''(x_0) = y_0'', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\ .$$

Условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1.2) определяются следующей теоремой, приводимой здесь без доказательства.

<u>Теорема 1.1.</u>

Если в уравнении $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$ *функция* $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}\right)$ *и ее частные производные по* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой замкнутой области G, определяемой неравенствами*

$$\begin{gathered}|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, |y' - y_0'| \le b, \ldots, \\ \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| \le b \quad (a > 0, b > 0)\end{gathered},$$

и, следовательно, ограничены в ней, т.е.

$$\left| f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)\right| \le C, \quad \left|\frac{\partial f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)}{\partial y^{(k)}}\right| \le C_1,$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1;\ y^0 \equiv 0)$$

где

$$C > 0,\ C_1 > 0,\ M(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in G,$$

$$M_0\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in G$$

то существует единственное решение $y = y(x)$ *данного уравнения, удовлетворяющее условиям*

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ y'' = y_0'', \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

при $x = x_0$. *Это решение определено и непрерывно вместе с производными до порядка n включительно в промежутке* $|x - x_0| \le h$,

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{\max\limits_G\left(C, |y'|, \ldots, |y^{(n-1)}|\right)}\right)$$

Общим решением дифференциального уравнения n –го порядка называется функция

$$y = \varphi\ (x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \qquad (1.4)$$

обладающая следующими свойствами:

1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ она обращает уравнение (1.1) в тождество;

2) значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, чтобы она удовлетворяла условиям (1.3).

Частным решением дифференциального уравнения n –го порядка называется решение, получающееся из общего решения (1.4) при фиксированных значениях произвольных постоянных, т.е. функция

$$y = \varphi\ \left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right),$$

где $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ –некоторые числа.

Решением дифференциального уравнения n –го порядка, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*.

Общим интегралом дифференциального уравнения n –го порядка называется соотношение вида

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0, \qquad (1.5)$$

неявно определяющее общее решение $y = \varphi\ \left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ этого уравнения. Частным интегралом дифференциального уравнения n–го порядка называется соотношение $\Phi\left(x, y, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) = 0$, полученное из общего интеграла путем фиксирования значений $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ произвольных постоянных.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.6)$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то

$$y' = f(x, y) \qquad (1.7)$$

или

$$dy - f(x, y)dx = 0. \qquad (1.8)$$

Последнее уравнение является частным случаем уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (1.9)$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка: найти решение $y = y(x)$ уравнения (1.6), удовлетворяющее условию

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ или } y(x_0) = y_0, \qquad (1.10)$$

где x_0, y_0 – заданные числа. Геометрически задача Коши означает следующее: найти интегральную линию, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$. В соответствии с теоремой 1.1., если в уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная по *y*, т.е. $f'_y(x,y)$, непрерывны в некоторой области *G* плоскости *Oxy*, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то решение задачи Коши существует и является единственным. В этом случае через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная линия. Если известно общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения (1.7) или его общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$, то нахождение решения задачи Коши сводится к вычислению значения произвольной постоянной C из уравнения $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или уравнения $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$.

Будем считать, что дифференциальное уравнение первого порядка задано в виде(1.9). Рассмотрим частный случай, а именно, когда функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ представляют собой произведение функции только от *x* на функцию только от *y*, т.е. $P(x,y) = f(x)\varphi(y)$, $Q(x,y) = f_1(x)\varphi_1(y)$, в этом случае уравнение принимает вид

$$f(x)\varphi(y)dx + f_1(x)\varphi_1(y)dy = 0. \qquad (1.11)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно привести к виду (1.11), где $f(x)$, $f_1(x)$ – функции только от *x*, $\varphi(y), \varphi_1(y)$ – функции только от *y*.

Разделив почленно это уравнение на $f_1(x)\varphi(y)$ в предположении, что

$$f_1(x)\varphi(y) \neq 0, \qquad (1.12)$$

получим уравнение

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0. \qquad (1.13)$$

Уравнение (1.13) называется уравнением с разделенными переменными: при *dx* находится функция только от *x*, при *dy* – только от *y*.

Взяв неопределенные интегралы от обеих частей уравнения, получим

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy = C. \qquad (1.14)$$

Пример. Проинтегрировать уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Найти решение, удовлетворяющее условию *y* = 1 при *x* = 1.

Полагая $y \neq 0$, разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$dy = 3y^{2/3}dx,\ \frac{dy}{y^{2/3}} = 3dx,\ y^{1/3} = x + C,\ y = (x+C)^3.$$

Подставляя начальные данные $x_0 = 1, y_0 = 1$ в формулу для общего решения $y = (x+C)^3$, находим значение C: $1=(1+C)^3$, $C = 0$; $y = x^3$ – искомое частное решение. Очевидно, *y* = 0 – также решение уравнения, это решение является особым: в каждой точке оси *Ox* нарушаются условия теоремы 1.1 (производная функции $f(x,y) = 3y^{2/3}$ по *y* обращается в бесконечность). Через каждую точку $M_0(x_0, 0)$ оси *Ox* проходят два решения: $y = (x - x_0)^3$ и $y = 0$; последнее решение нельзя получить из общего решения $y = (x+C)^3$ ни при каком численном значении C, включая $C = \pm\infty$ (а только при $C = C(x) = -x$).

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $F(x,y)$ называется однородной измерения *n*, если при любом t выполняется тождество

$$F(tx,ty)=t^n F(x,y). \tag{1.15}$$

Например, функции

$$F_1(x,y)=x+2y,\ F_2(x,y)=x^2\sin\frac{x}{y},\ F_3(x,y)=\frac{x+y}{x}$$

являются однородными функциями соответственно первого, второго, нулевого измерений. Действительно,

$$F_1(tx,ty)=tx+2ty=t(x+2y)=tF_1(x,y);$$

$$F_2(tx,ty)=(tx)^2\sin\frac{tx}{ty}=t^2x^2\sin\frac{x}{y}=t^2F_2(x,y);$$

$$F_3(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx}=\frac{t(x+y)}{tx}=\frac{x+y}{x}=t^0F_3(x,y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1.16}$$

называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения *n*. В этом случае соотношение (1.15) для данных функций принимает вид

$P(tx,ty)=t^n P(x,y),\quad Q(tx,ty)=t^n Q(x,y)$.

Полагая в последних равенствах *t* = 1: *x*, получаем

$$P\left(1,\frac{y}{x^n}\right)=\frac{1}{x^n}P(x,y),\quad Q\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^n}Q(x,y),$$

откуда

$$P(x,y)=x^nP\left(1,\frac{y}{x}\right),\quad Q(x,y)=x^nQ\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Подставив эти выражения в уравнение (1.16), получим

$$x^nP\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+x^nQ\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0$$

или

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0. \tag{1.17}$$

Введем новую переменную *u* по формуле

$$u=\frac{y}{x},\ \text{или}\ y=ux. \tag{1.18}$$

Поскольку в этом случае *dy* = *udx*+ *xdu*, то уравнение (1.17) принимает вид $P(1,u)dx+uQ(1,u)dx+xQ(1,u)du=0$ или

$$\left[P(1,u)+uQ(1,u)\right]dx+xQ(1,u)du=0. \tag{1.19}$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными *x*, *u*, а из формулы (1.18) – искомая функция *y*.

Если

$$\Phi(x,u,C)=0 \tag{1.20}$$

– общий интеграл уравнения (1.19), то

$$\Phi\left(x,\frac{y}{x},C\right)=0 \tag{1.21}$$

– общий интеграл уравнения (1.16).

1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнение первого порядка называется уравнения вида

$$a(x)y'+b(x)y=c(x), \tag{1.22}$$

где *y* = *y*(*x*) – искомая функция; *a*(*x*), *b*(*x*), *c*(*x*) – заданные функции. Будем считать, что они непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем *a*(*x*) ≠ 0. Поскольку *a*(*x*) ≠ 0 при любом $x\in[a,b]$, то данное уравнение можно переписать так:

$$y'+p(x)y=f(x). \tag{1.23}$$

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций $v = v(x)$, $u = u(x)$

$$y = uv. \qquad (1.24)$$

Так как $y' = u'v + uv'$, то подстановка выражений для y и y' в уравнение (1.23) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)v = f(x), \qquad (1.25)$$

В качестве v выберем одну из функций, обращающих в нуль сумму в квадратных скобках, т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$v' + p(x)v = 0. \qquad (1.26)$$

С учетом (1.26) уравнение (1.25) принимает вид

$$u'v = f(x). \qquad (1.27)$$

Уравнение (1.26) является уравнением с разделяющимися переменными x и v, из него определяется функция $v = v(x)$. Функция $u = u(x)$ определяется из уравнения (1.27), которое при $v = v(x)$ также является уравнением с разделяющимися переменными. Определив $u = u(x)$ и $v = v(x)$, по формуле (1.24) найдем y.

Действительно, из уравнения (1.26) получаем

$$v(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \qquad (1.28)$$

а из уравнения (1.27) –

$$u(x) = \frac{1}{C_1}\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_2. \qquad (1.29)$$

По формуле (1.24) находим общее решение линейного уравнения (1.23)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right] \quad (C = C_1C_2) \qquad (1.30)$$

1.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (1.31)$$

левая часть которого есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y) = C$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU. \qquad (1.32)$$

Переписав исходное уравнение в виде $dU = 0$, заключим, что общий интеграл уравнения (1.31) определяется формулой

$$U(x,y) = C. \qquad (1.33)$$

Как известно, полный дифференциал функции $U = U(x,y)$ выражается формулой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \qquad (1.34)$$

Из равенств (1.32) и (1.34) следует, что

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \qquad (1.35)$$

Необходимое и достаточное условие того, что левая часть уравнения (1.31) является полным дифференциалом некоторой функции, выражается равенством

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (1.36)$$

Функция $U = U(x,y)$, входящая в формулу (1.33), находится из уравнений (1.35).

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2x–3y)dx + (2y–3x)dy = 0$$

Для данного уравнения

$$P(x,y) = 2x - 3y, \quad Q(x,y) = 2y - 3x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3,$$

Так как выполнено условие (1.36), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах; следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 3y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 3x. \qquad (I)$$

Интегрируя первое из этих уравнений (y при этом считается постоянным), находим

$$U(x,y)=x^2-3xy+\varphi(y),\qquad \text{(II)}$$

где $\varphi(y)$ – функция, подлежащая определению.

Дифференцируя по y функцию $U=U(x,y)$ и принимая во внимание второе из равенств (I), получаем $-3x+\varphi'(y)=2y-3x$, откуда

$$\varphi'(y)=2y,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y,\quad d\varphi=2y\,dy,\quad \varphi(y)=y^2+C_1.$$

Подставив выражение для $\varphi(y)$ в равенство (II),

$$U(x,y)=x^2-3xy+y^2+C_1.$$

В соответствии с формулой (1.33) получаем

$$x^2-3xy+y^2+C_1=C_2 \text{ или } x^2-3xy+y^2=C, \text{ где } C=C_2-C_1.$$

Итак, $x^2-3xy+y^2=C$ – общий интеграл данного уравнения.

1.6. Приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений

Прежде всего нужно отметить, что не существует общих методов интегрирования дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, интегрируемые с помощью известных методов, в приложениях встречаются сравнительно редко. В связи с этим особое значение приобретают *приближенные методы* решения дифференциальных уравнений.

Среди приближенных методов различают *аналитические* и *численные*. Аналитические методы дают возможность найти решение дифференциального уравнения в виде некоторого аналитического выражения. При использовании численных методов решения дифференциального уравнения получают в виде таблицы численных значений искомой функции при заданных значениях ее аргумента.

К аналитическим методам относятся, например, метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов, метод последовательных приближений и др.

$$p(x)y'+q(x)y=r(x).\qquad (1.37)$$

Если функции $p(x), q(x), r(x)$ разлагаются в ряды по степеням (x–a), сходящиеся в некотором интервале $(a-R, a+R)$, тогда искомая функция $y=y(x)$ также разлагается в ряд

$$y(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^{n-1}+\ldots,\qquad (1.38)$$

сходящийся в том же интервале.

Подставляя ряды для $y(x), y'(x), p(x), q(x), r(x)$ в уравнение (1.37), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (x–a), получаем уравнения, из которых определяются коэффициенты c_n (n = 0, 1, 2, …) ряда (1.38). Этот способ называется способом *неопределенных коэффициентов.*

Употребляют и другой способ, основанный на применении ряда Тейлора и последовательном дифференцировании данного дифференциального уравнения.

Если требуется найти решение дифференциального уравнения

$$F(x,y,y')=0,\qquad (1.39)$$

удовлетворяющее условию $y(a)=b$, то его ищут в виде

$$\begin{aligned} y(x)=y(a)+\frac{y'(a)}{1!}(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\\ +\frac{y^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \end{aligned}.\qquad (1.40)$$

Из начального условия определяется $y(a)$, из уравнения (1.39) находится $y'(a)$. Из уравнения, полученного дифференцированием уравнения (1.39), находят $y''(a)$. Аналогично вычисляют $y'''(a)$, $y^{\text{iv}}(a)$ и т. д.

З а м е ч а н и е. Указанные способы применимы к дифференциальным уравнениям высших порядков.

К простейшим численным методам относится *метод Эйлера*, основанный на использовании приближенной формулы $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть требуется найти численные значения решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \tag{1.41}$$

удовлетворяющего условию $y = y_0$ при $x = x_0$ или $y(x_0) = y_0$ в заданных точках отрезка $\left[x_0, b\right]$.

Отрезок $\left[x_0, b\right]$ разобьем на n равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, длину каждого элементарного отрезка $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ обозначим через h, тогда

$$x_k = x_0 + kh \; (k = 0,1,2,\ldots,n). \tag{1.42}$$

Этим значениям x_k будут соответствовать некоторые значения искомой функции $y = y(x)$. Найдем формулу для определения приближенных значений $y_k = y(x_k)$. Равенство (1,41) заменим приближенным равенством

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y) \quad \text{или} \quad \Delta y = f(x,y)\Delta x.$$

Для указанных точек последнее равенство запишется так:

$$\Delta y_k = f(x_k, y_k)\Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = h, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad \left(k = 0,1,2,\ldots,n-1\right)$

Следовательно,

$$y_{k+1} - y_k = f\left(x_k, y_k\right)h \quad \text{или} \quad y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right). \tag{1.43}$$

По этой формуле и определяются приближенные значения искомой функции в заданных точках.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Некоторые интегрируемые типы дифференциальных уравнений *n*–го порядка. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим уравнение (1.2), правая часть которого является непрерывной функцией только одной переменной *x*, т.е. уравнение

$$y^{(n)} = f(x). \tag{2.1}$$

Общее решение уравнения (2.1) находится с помощью *n*–кратного интегрирования по следующей схеме:

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}, \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f\left(x\right)$$

$$dy^{(n-1)} = f\left(x\right)dx, \quad y^{(n-1)} = \int f\left(x\right)dx + c_1,$$

$$y = \int dx \int dx \int f\left(x\right)dx + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n,$$

$$y = \int dx \int f\left(x\right)dx + c_1 x + c_2 + \ldots + .$$

Пример. Проинтегрировать уравнение $y''' = \sin x - \cos x$.

Так как

$$y''' = \frac{dy''}{dx}, \quad \frac{dy''}{dx} = \sin x - \cos x, \quad dy'' = \left(\sin x - \cos x\right)dx,$$

то

$$y'' = \int\left(\sin x - \cos x\right)dx, \quad y'' = -\cos x - \sin x + c_1.$$

Аналогично получаем

$$y' = -\sin x + \cos x + c_1 x + C_2,$$

$$y = \cos x + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad \left(C_1 = \frac{c_1}{c_2}\right)$$

К числу уравнений, допускающих понижение порядка, относятся следующие:

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0 \qquad (2.2)$$

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0 . \qquad (2.3)$$

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0 . \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.2) с помощью подстановки

$$y^{(n-1)}=z , \qquad (2.5)$$

где

z – новая неизвестная функция, приводится к уравнению первого порядка $F(z, z')=0$. Если $z=\varphi(x, C_1)$ – общее решение последнего уравнения, то с учетом (2.5) получаем $y^{(n-1)}=\varphi(x, C_1)$. Это уравнение вида (2.1), его общее решение может быть найдено с помощью n – 1 интегрирований (при этом вводятся еще n – 1 произвольных постоянных $C_2, C_3, \ldots C_n$).

В случае уравнения (2.3) полагаем

$$y^{(k)}=z , \qquad (2.6)$$

тогда $y^{(k+1)}=z'$, $y^{(k+2)}=z'', \ldots, y^{(n)}=z^{(n-k)}$. Уравнение (2.3) принимает вид $y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$ – общее решение этого уравнения (порядок которого равен n – k), то уравнение (2.6) принимает вид $y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$. Из последнего уравнения искомая функция $y(x)$ находится путем k – кратного интегрирования. Отметим частный случай уравнения (2.3): при $k=1$ получаем

$$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0 . \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.7) подстановкой $y'=z$ приводится к уравнению $(n-1)$ – го порядка $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)=0$.

С помощью той же подстановки $y'=z$ порядок уравнения (2.4) также понижается на единицу. Действительно,

$$y''=\left(y'\right)'=z'=z'_y y'=z'_y z ,$$

$$y'''=\left(y''\right)'=\left(z'_y z\right)_{y'} y'=z''z^2+z \times z'^2 ,$$

производная k – го порядка от y по x выражается через производные (k – 1) – го порядка от z по y. Уравнение (2.4) принимает вид $F_1\left(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)=0$.

В заключение отметим, что уравнение

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right)=0 \qquad (2.8)$$

приводится к уравнению второго порядка $F\left(z, z''\right)=0$, где $z=y^{(n-2)}$.

Это уравнение вида (2.2). Положим $y'''=z$, тогда $y^{iv}=z'$ и уравнение примет вид $xz'-z=0$. Интегрируя полученное уравнение первого порядка, находим

$$x \frac{dz}{dx}-z=0, \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}, \ln|z|=\ln|x+\ln C, z=Cx| .$$

Подставляя эту функцию в уравнение $y'''=z$, получаем $y'''=Cx$, откуда $y=C_1 x^4+C_2 x^2+C_3 x+C_4$.

2.2. Линейное однородное уравнение *n* – го порядка

2.2.1. Свойства решений линейного однородного уравнения n – го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется уравнение вида

$$q_0(x) y^{(n)}+q_1(x) y^{(n-1)}+\ldots+q_{n-1}(x) y'+q_n(x) y=f_1(x) , \qquad (2.9)$$

где $y=y(x)$ – искомая функция; $f_1(x), q_k(x) \quad (k=0,1,2, \ldots, n)$ – заданные функции. Будем считать, что они определены и непрерывны на некотором отрезке [a, b].

Если $f_1(x)\not\equiv 0$, то данное уравнение называется линейным неоднородным; если $f_1(x)\equiv 0$ – линейным однородным.

При $q_0(x)\neq 0$ линейное неоднородное уравнение после деления на $q_0(x)$ можно привести к виду

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=f(x). \quad (2.10)$$

Линейное однородное уравнение n – го порядка в этом случае ($q_0(x)\neq 0$) приводится к виду

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0. \quad (2.11)$$

Последнее уравнение кратко запишем так:

$$L[y]=0. \quad (2.12)$$

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y. \quad (2.13)$$

Будем называть L *линейным дифференциальным оператором.*

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

$$L[C]\equiv CL[y] \quad (C=const); \quad (2.14)$$

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]. \quad (2.15)$$

Действительно,

$$L[Cy]\equiv (Cy)^{(n)}+p_1(x)(Cy)^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)(Cy)\equiv$$
$$\equiv C\left[y^{n}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y\right]\equiv CL[y],$$

$$L[y_1+y_2]\equiv (y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)(y_1+y_2)\equiv$$
$$\equiv\left[y_1^{(n)}+p_1(x)\,y_1^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y_1\right]+\left[y_2^{(n)}+p_1(x)\,y_2^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y_2\right]\equiv$$
$$\equiv L[y_1]+L[y_2].$$

С помощью формул (2.14), (2.15) докажем некоторые теоремы о свойствах решений линейного однородного уравнения n – го порядка.

Теорема 2.1. *Если y_1 – решение линейного однородного уравнения $L[y_1]=0$, то Cy_1, где C - постоянная, также является решением этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По условию $L[y_1]\equiv 0$. В соответствии с формулой (2.14) получаем

$$L[Cy_1]\equiv CL[y_1]\equiv 0, \quad L[Cy_1]\equiv 0.$$

Это и означает, что Cy_1 – решение уравнения $L[y]=0$.

Теорема 2.2. *Если y_1 и y_2 – два решения линейного однородного уравнения $L[y]=0$, то их сумма также является решением этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По условию $L[y_1]\equiv 0$, $L[y_2]\equiv 0$. В соответствии с формулой (2.15) получаем

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]\equiv 0. \quad (2.16)$$

Итак, сумма y_1+y_2 является решением уравнения $L[y]=0$.

С л е д с т в и е. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения уравнения $L[y]=0$, то функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \quad (2.17)$$

также является решением этого уравнения.

Это утверждение следует из теорем 2.1, 2,2.

Теорема 2.3. *Если уравнение $L[y]=0$ с действительными коэффициентами $p_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ имеет комплексное решение $y(x)=u(x)+iv(x)$, то действительная $u(x)$ и $v(x)$ мнимая части также являются решениями этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По условию $L[u(x)+iv(x)]\equiv 0$. В соответствии с формулами (2.14) и (2.15) получаем

$$L[u(x)+iv(x)]=L[u(x)]+iL[v(x)]\equiv 0,$$

откуда $L[u(x)] \equiv 0, \quad L[v(x)] \equiv 0$, так как комплексная функция действительной переменной тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда тождественно равны нулю действительная и мнимая части.

2.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость функций. Определитель Вронского.

Функции

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x) \tag{2.18}$$

называются линейно-независимыми на отрезке [a, b], если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю $\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0\right)$, такие, что для любых $x \in [a, b]$ выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0. \tag{2.19.}$$

Если равенство (2.19) выполняется лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0, \tag{2.20}$$

то функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно-независимыми*. Отметим, что функции

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \ldots, y_n = x^{n-1} \tag{2.21}$$

линейно-независимы на любом отрезке [a, b]. Действительно, равенство $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$ для всех $x \in [a, b]$ выполняется лишь в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, (так как многочлен степени $n - 1$ имеет не более $n - 1$ корней). Можно доказать, что если $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, то функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}, \tag{2.22}$$

а также функции

$$\begin{gathered} e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, \ldots, x^{n_1} e^{k_1 x}, \quad e^{k_2 x}, xe^{k_2 x}, \ldots, x^{n_2} e^{k_2 x}, \\ e^{k_p x}, xe^{k_p x}, \ldots, x^{n_p} e^{k_p x}, \end{gathered} \tag{2.23}$$

линейно-независимы на любом отрезке [a, b].

Очевидно, если одна из функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, тождественно равно нулю, то функции линейно-независимы. Действительно, пусть, например, $y(x) \equiv 0$, тогда $1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \ldots + 0 \cdot y_n = 0, \quad \alpha_1 = 1 \neq 0$. Если среди n функций k (k < n) линейно-независимы. В самом деле, если $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k = 0$, где не все α_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ равны нулю, например, $\alpha_1 \neq 0$, то

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k + 0 \cdot y_{k+1} + \ldots + 0 \cdot y_n = 0, \alpha_1 \neq 0.$$

В случае двух функций $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ \left(y_1 \not\equiv 0, y_2 \not\equiv 0\right)$ необходимым и достаточным условием линейной зависимости является их пропорциональность. Действительно, если

$$y_2 = ky_1, \quad y_2(x) = ky_1(x), \quad k = const, \tag{2.24}$$

то $ky_1 - y_2 = 0$ или $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$, где $\alpha_2 = -1 \neq 0$. Обратно, если $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

Пусть $\alpha_2 \neq 0$, тогда $y_2 = -(\alpha_1 : \alpha_2) y_1$ или $y_2 = ky_1$, где $k = -\alpha_1 : \alpha_2$.

Например, функции $y_1 = x, y_2 = 2x$ – линейно-зависимы на любом отрезке [a, b]; функции $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x} \quad (k_1 \neq k_2)$ – линейно-независимы. Линейно-независимыми на любом отрезке являются также функции

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \ y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x. \tag{2.25}$$

Теорема 2.4. *Если функции* $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *линейно-зависимы на отрезке* [a, b], *то определитель*

$$W(x)=W\left[y_1,y_2,...,y_n\right]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2.26)$$

тождественно равен нулю на этом отрезке.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно-зависимы на отрезке [*a*, *b*], то по определению на этом отрезке справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+...+\alpha_n y_n\equiv 0,$$

причем не все α_i равны нулю.

Продифференцируем это тождество *n* – 1 раз:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+...+\alpha_n y_n\equiv 0 \\ \alpha_1 y_1'+\alpha_2 y_2'+...+\alpha_n y_n'\equiv 0 \\ .... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}+\alpha_2 y_2^{(n-1)}+...+\alpha_n y_n^{(n-1)}\equiv 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.27)$$

При любом $x\in$ [*a*, *b*] получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно *n* неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, .Поскольку эта система имеет ненулевое решение (не все α_i равны нулю), то как известно, определитель ее равен нулю.

Следовательно, определитель системы (2.27) , являющийся определителем (2.26), равен нулю в каждой точке $x\in$ [*a*, *b*].

Определитель (2.26) называется определителем Вронского.

Проиллюстрируем теорему 2.3. на примере функций $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=shx,\ y_3(x)=chx$. Эти функции линейно-зависимы, так как для любых $shx+chx=e^x$, $shx+chx-e^x=0$.

__Теорема 2.5__. *Если функции* $y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),...,\ y_n=y_n(x)$ *линейно-независимые решения уравнения на отрезке* [*a*, *b*], *то определитель уравнения*

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+...+p_n(x)\,y=0 \qquad (2.28)$$

с коэффициентами $p_k(x)\quad (k=1,2,...,n)$, *непрерывными на отрезке* $[a,b]$, *то определитель Вронского* $w(x)=w[y_1,y_2,...,y_n]$ *не обращается в нуль ни в одной точке отрезка* $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим противное, т.е. в некоторой точке $x\in$ [*a*, *b*] определитель Вронского равен нулю, т.е. $w(x_0)=0$.

Выберем числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, среди которых есть отличные от нуля, так, чтобы они удовлетворяли системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 y_1(x_0)+\alpha_2 y_2(x_0)+...+\alpha_n y_n(x_0)\equiv 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0)+\alpha_2 y_2'(x_0)+...+\alpha_n y_n'(x_0)\equiv 0 \\ .... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0)\equiv 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.29)$$

Это можно сделать, поскольку определитель системы (2.29) является определителем Вронского и $w(x_0)=0$. Система в этом случае имеет ненулевое решение.

На основании следствия из теорем 2.1., и 2.2. функция

$$y=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+...+\alpha_n y_n(x) \qquad (2.30)$$

является решением уравнения (2.28). Это решение удовлетворяет начальным условиям

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,...,\ y^{(n-1)}(x_0)=0,$$

что следует из равенств (2.29). Но этим начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y\equiv 0$ уравнения (2.28).

В соответствии с теоремой 2.1. заключаем, что решение (2.30) тождественно равно нулю, т.е.

$$y \equiv 0 \text{ или } \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Последнее означает, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно-зависимы на отрезке $[a, b]$, что противоречит условию.

Следовательно, определитель Вронского для линейно-независимых решений уравнения (2.28) не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$.

2.2.3. Общее решение линейного однородного уравнения n – го порядка

Структуру общего решения линейного однородного уравнения n – го порядка выясняет следующая теорема.

<u>Теорема 2.6</u>. *Если функции* $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *линейно-независимые на отрезке* $[a, b]$, решения однородного уравнения (2.28) коэффициенты которого непрерывны на этом отрезке, то его общее решение определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{2.31}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

На основании следствия из теоремы 2.2. функция (2.31) обращает в тождество уравнение (2.28).

Далее, постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, чтобы получить решение, удовлетворяющее произвольным заданным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

т.е.

$$\left.\begin{array}{r} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\}. \tag{2.32}$$

Определитель системы (2.32) является определителем Вронского $w(x_0)$. Поскольку решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ Линейно-независимы на отрезке $[a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ $w(x_0) \neq 0$. Следовательно, система (2.32) определяет общее решение уравнения (2.28).

С л е д с т в и е. *Максимальное число линейно-независимых решений уравнений линейного однородного уравнения равно порядку этого уравнения.*

О п р е д е л е н и е. Любые n линейно-независимых решений линейного однородного уравнения n–го порядка называются его фундаментальной системой решений.

2.3. Линейные однородные уравнения n – го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением n - го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.33}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – действительные числа.

Уравнение (2.33) является частным случаем уравнения (2.28), поэтому все сказанное в 2.2. применимо к уравнению (2.33).

Решение уравнения (2.33) будем искать в виде

$$y = e^{kx} \quad (k = const). \tag{2.34}$$

Подставляя эту функцию и ее производные

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

в уравнение (2.33), получаем

$$(k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_n e^{kx}) = 0,$$

$$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) = 0 .$$

Функция (2.34) будет решением уравнения тогда и только тогда, когда

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 , \qquad (2.35)$$

т.е. когда k – корень алгебраического уравнения (2.35)

Уравнения (2.35) называется *характеристическим уравнением*. Это алгебраическое уравнение n – ой степени, оно имеет n корней (считая и равные корни), среди которых могут быть и комплексные.

Рассмотрим основные возможные случаи.

1. Характеристическое уравнение имеет различные действительные корни.

Обозначим эти корни через $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(k_i \ne k_j$ при $i \ne j)$. Им соответствуют решения уравнения (2.33):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x} . \qquad (2.36)$$

Функция (2.36) в этом случае $(k_i \ne k_j$ при $i \ne j)$ линейно-независимы на любом отрезке $[a, b]$ (см. 2.33).

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} . \qquad (2.37)$$

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 .$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Ему соответствует характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$, имеющее корни $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 2$.

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения определяется формулой

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} .$$

2. Характеристическое уравнение имеет действительные корни, среди которых m равны между собой.

Будем говорить в этом случае, что среди корней характеристического уравнения имеется один m кратный корень. Обозначим его через k_1. Предположим, что все остальные действительные корни различны.

Корням характеристического уравнения

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_m,\ \ k_{m+1}, \ldots, k_n$$

соответствуют решения дифференциального уравнения

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_1 x}, \ldots, y_m = e^{k_1 x},$$
$$y_{m+1} = e^{k_{m+1} x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x} .$$

Эти решения линейно-зависимы (так как линейно-зависимы первые m функций; они равны между собой), поэтому посредством их получить общее решение дифференциального уравнения не представляется возможным.

Можно показать, что корню k_1 кратности m будут соответствовать m линейно-независимых решений $y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$. Рассмотрим n решений

$$\begin{matrix} y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}, \\ y_{m+1} = e^{k_{m+1} x}, \ldots, y_n = e^{k_n x} \end{matrix} . \qquad (2.38)$$

Решения (2.38) линейно–независимы на любом отрезке $[a, b]$ (см. (2.23)), поэтому общее решение уравнения (2.33) определяется формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} + \ldots + C_m x^{m-1} e^{k_1 x} +$$
$$+ C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

или

$$\begin{matrix} y = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + \\ + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x} \end{matrix} . \qquad (2.39)$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$ или $(k+1)^3 = 0$ имеет трехкратный корень $k_1 = k_2 = k_3 = -1$, поэтому общее решение данного дифференциального уравнения определяется формулой

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x}.$$

3. Характеристическое уравнение имеет простые комплексно-сопряженные корни.

Обозначим эти корни $k_1 = \alpha - i\beta$, $k_2 = \alpha + i\beta$, где α, β – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$. Им соответствуют комплексные решения дифференциального уравнения

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$
$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

На основании теоремы 2.3. уравнение будет также иметь и действительные решения

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Если все остальные корни являются действительными и различными, то общее решение уравнения (2.33) определяется формулой

$$y = (C_1\cos\beta x + C_2 i\sin\beta x)e^{\alpha x} + C_3 e^{k_3 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \qquad (2.40)$$

В частном случае, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни

$$k_1 = -i\beta, \quad k_2 = i\beta, \quad (\alpha = 0),$$

формула (2.40) имеет вид

$$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3 e^{k_3 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \qquad (2.41)$$

Если среди корней имеются кратные, то общее решение записывается с учетом формулы (2.39).

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y''' - 2y'' + y - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 + k - 2 = 0, \quad k^2(k-2) + (k-2) = 0, \; (k^2+1)(k-2) = 0$$

имеет корни $k_1 = -i, k_2 = i, k_3 = 2$, поэтому в соответствии с формулой (2.41) получаем общее решение

$$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3 e^{2x}$$

данного дифференциального уравнения.

4. Характеристическое уравнение имеет кратные комплексные корни.

Пусть комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha - i, k_2 = \alpha + i\beta$ являются m – кратными. Если остальные n–$2m$ корней $k_{2m+1}, \ldots, k_n$ являются действительными и различными, можно показать (на чем подробно не останавливаемся), что общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} y &= \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ &+ \left(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{2m}x^{m-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x + \\ &+ C_{2m+1}e^{k_{2m+1}x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \end{aligned} \qquad (2.42)$$

В частном случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни $k_1 = -i\beta$, $k_2 = i\beta$ $(\alpha = 0)$, формула (2.42) принимает вид

$$\begin{aligned} y &= \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}\right)\cos\beta x + \\ &+ \left(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{2m}x^{m-1}\right)\sin\beta x + \\ &+ C_{2m+1}e^{k_{2m+1}x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \end{aligned} \qquad (2.43)$$

Если среди действительных корней имеются кратные, то общее решение записывается с учетом формулы (2.39).

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $y^{iv} + 2y'' + y + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$, $(k^2+1) = 0$ имеет двукратные корни $k_1 = -i, k_2 = i$, поэтому

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

2.4. Линейное неоднородное уравнение *n*– го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение *n*–го порядка

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=f(x). \quad (2.44)$$

Будем считать, что функции $p_k(x)$ $(k=1,2,...,n)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке [*a*, *b*]. Уравнение (2.44) к5ратко запишем так:

$$L(y)=f(x),$$

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y. \quad (2.45)$$

<u>Теорема 2.7</u>. *Если* y_0 *– решение однородного уравнения* $L[y]=0$, y_1 *– решение соответствующего неоднородного уравнения* $L[y]=f(x)$, *то сумма* y_0+y_1 *является решением неоднородного уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По условию $L[y]\equiv 0$, $L[y_1]\equiv f(x)$, поэтому

$$L[y_0+y_1]\equiv L[y_0]+L[y_1]\equiv 0+f(x),$$
$$L[y_0+y_1]\equiv f(x).$$

Это означает, что y_0+y_1 – решение неоднородного уравнения $L[y]=f(x)$.

Структура общего решения неоднородного уравнения (2.44) определяется следующей теоремой.

<u>Теорема 2.7</u>. *Если* Y *– частное решение уравнения* $L[y]=f(x)$ *с непрерывными коэффициентами,* $y_0=\sum_{k=1}^{n}c_ky_k$ *– общее решение соответствующего однородного уравнения*

$L[y]=0$, *то общее решение данного неоднородного уравнения определяется формулой*

$$y=y_0+Y,\quad y=\sum_{k=1}^{n}c_ky_k+Y. \quad (2.46)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.6.

З а м е ч а н и е.

Чтобы записать общее решение линейного неоднородного уравнения необходимо найти какое-нибудь частное решение этого уравнения и общее решение соответствующего однородного уравнения(для чего нужно знать n линейно-независимых решений).

2.5. Линейное неоднородное уравнение *n* – го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение *n*–го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \quad (2.47)$$

где $a_1,a_2,...,a_n$ – действительные числа. Запишем следующие однородное уравнение, т.е. уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \quad (2.48)$$

в котором постоянные $a_1,a_2,...,a_n$ те же, что и в уравнении (2.47). Поскольку уравнение (2.47) является частным случаем уравнения (2.44), то общее решение его определяется формулой (2.46).

Общее решение y_0 однородного уравнения (2.48) находится согласно **2.3.**, частное решение *Y* неоднородного уравнения может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях:

1. $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*.

Если a не является корнем соответствующего характеристического уравнения, то полагают $Y = e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. Если a – корень характеристического уравнения, то $Y = x^r e^{ax}Q_n(x)$, где r – кратность корня a.

2. $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx]$.

Если $a \pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения, то полагают

$$Y = e^{ax}[Q_v(x)\cos bx + S_v(x)\sin bx],$$

где $Q_v(x)$, $S_v(x)$ – многочлены степени $v = \max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами. Если $a \pm ib$ корни характеристического уравнения, то

$$Y = x^r e^{ax}[Q_v(x)\cos bx + S_v(x)\sin bx],$$

где r –кратность корней $a \pm ib$.

В общем случае при решении неоднородного уравнения (2.47) применяется метод вариации произвольных постоянных (см. **2.6.**).

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$y''' - 5y'' + 8y' - 6y = 12e^{2x}.$$

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y''' - 5y'' + 8y' - 6y = 0$. Так как характеристическое уравнение

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 6 = 0, k^3 - 3k^2 - 2k^2 + 6k + 2k - 6 = 0,$$

$$k^2(k-3) - 2k(k-3) = 0, (k-3)(k^2 - 2k + 2) = 0$$

имеет корни $k_1 = 1 - i, k_2 = 1 + i, k_3 = 3$, то общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_0 = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)e^x + C_3 e^{3x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $Y = Ae^{2x}$. Подставляя в исходное уравнение выражения для функции Y и ее производных

$$Y' = 2Ae^{2x}, Y'' = 4Ae^{2x}, Y''' = 8Ae^{2x},$$

получаем

$$8Ae^{2x} - 20Ae^{2x} + 16Ae^{2x} - 6Ae^{2x}, -2Ae^{2x} \equiv 12e^{2x},$$

откуда $-2A=12$, $A = -6$. Итак, $Y = -6e^{2x}$.

В соответствии с формулой (2.46) находим общее решение данного неоднородного уравнения

$$y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)e^x + C_3 e^{3x} - 6e^{2x}.$$

2.6. Метод вариации произвольных постоянных

Обратимся снова к линейному неоднородному уравнению n – го порядка с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x). \qquad (2.49)$$

Будем считать, что функции $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$.

Если нахождение частного решения этого уравнения оказывается затруднительным, но известно общее решение уравнения (2.49) можно *найти методом вариации произвольных постоянных*.

Пусть соответствующее однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (2.50)$$

имеет общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n. \qquad (2.51)$$

Общее решение уравнения (2.49) будем искать в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x), \quad (2.52)$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – линейно-независимые решения уравнения (2.50), входящие в формулу (2.50), входящие в формулу (2.51), а $C_1(x), C_2(x), \ldots C_n(x)$ – неизвестные функции.

Чтобы найти эти функции, подчиним их некоторым условиям.

Найдем производную функции(2.52): потребуем, чтобы сумма во второй квадратной скобке равнялась нулю, т.е.

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0,$$

тогда $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'$.

Найдем вторую производную и потребуем, чтобы

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,$$

тогда

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''.$$

Продолжая аналогичный процесс, получаем

$$y^{(n)} = \left(C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}\right) + \\ + \left(C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}\right).$$

В этом случае нельзя потребовать, чтобы сумма во второй скобке обратилась в нуль, так как функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ уже подчинены $n - 1$ условиям, а нужно еще удовлетворить уравнению (2.49).

Подставляя в уравнение (2.49) выражения для функции (2.52) и ее производных

$$y' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k', \quad y'' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k'' \quad ,\ldots, \quad y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)},$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + p_1(x) \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} + \\ + p_2(x) \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) \sum_{k=1}^{n} C_k y_k' + p_n(x) \sum_{k=1}^{n} C_k y_k = f(x)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} C_k [y_k^{(n)} + p_1(x) y_k^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x) y_k' + p_n(x) y_k] = f(x).$$

Поскольку $y_k = y_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ – решения уравнения (2.50), то

$$y_k^{(n)} + p_1(x) y_k^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_k \equiv 0$$

и последнее уравнение принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)} = f(x).$$

Следовательно, для определения функций $C_k'(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ имеем систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{c} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\} \qquad (2.53)$$

Определитель этой системы отличен от нуля, как определитель Вронского для линейно-независимых функций, поэтому система имеет единственное решение.

Из системы (2.53) находим

$$C_k = \int \varphi_k(x)\,dx + \tilde{C}_k \quad (r = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.54)$$

где $\tilde{C}_k$ – постоянные.

Подставляя выражения (2.54) в формулу (2.52), получаем искомое общее решение уравнения (2.49).

2.7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (2.55)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0\,. \qquad (2.56)$$

Уравнения (2.56), (2.55) являются частными случаями уравнений (2.53) и (2.47), исследование которых дано в 2.3. и 2.5. Если характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (2.57)$$

имеет различные действительные корни k_1 и k_2 $\left(k_1 \neq k_2\right)$, то общее решение уравнения (2.56) определяется формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\,. \qquad (2.58)$$

В случае кратного корня характеристического уравнения $k_1 = k_2 = k$ общее решение уравнения (2.56) выражается формулой

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{kx}\,. \qquad (2.59)$$

Если характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$, то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \qquad (2.60)$$

В частности, если уравнение (2.57) имеет мнимые корни $k_1 = -i\beta, k_1 = i\beta \quad (\alpha = 0)$, то

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\,. \qquad (2.61)$$

Общее решение неоднородного уравнения (2.55) определяется формулой

$$y = y_0 + Y\,, \qquad (2.62)$$

где y_0 – общее решение уравнения (2.56); Y – частное решение уравнения (2.55). В простейших случаях частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2\,. \qquad \text{(I)}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение, получим его общее решение

$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, где $k_1 = 2, \quad k_2 = 3$ – корни характеристического уравнения $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Так как число $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (I) ищется в виде

$$Y = Ax^2 + Bx + C \qquad \text{(II)}$$

Продифференцируем его два раза по x и получим

$$Y' = 2Ax + Bx; \quad Y'' = 2A\,.$$

Подставим $Y, Y' Y''$, умножив на соответствующие коэффициенты, в левую часть уравнения (I), получим

$$2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) \equiv 6x^2 - 10x + 2\,.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему:

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 6B - 10A = -10 \\ 6C - 5B + 2A = 2 \end{cases}$$

откуда А = 1, В = 0, С = 0. Следовательно, У = x^2, а общее решение неоднородного уравнения (I) по формуле (2.62)

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2\,.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 6e^{2x}$

Составим характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $k^2 - 1 = 0$, его корни $k_1 = 1, \quad k_2 = -1$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$, так как число $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение

$$Y = Ae^{2x}, Y' = 2Ae^{2x}, Y'' = 4Ae^{2x}.$$

Получим систему для нахождения неопределенного коэффициента *A*. $4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 6e^{2x}$, т.к. $e^{2x} \neq 0$ $3A = 6, A = 2, Y = 2e^{2x}$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2e^{2x}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, \quad (\alpha = 2).$$

Имеем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$, где $k_1 = k_2 = 2$. Так как число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения, то $Y = Ax^2e^{2x}$, $y_0 = e^{2x}\left(C_1 + C_2x\right)$. Найдем *A* методом неопределенных коэффициентов, получим *A* = 1, откуда следует, что $y = x^2e^{2x} + e^{2x}\left(C_1 + C_2x\right)$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x), \quad (a = 1, b = 1).$$

Решая соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$, получим $k_1 = 1, k_2 = -2$, $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Составим число $a + ib = 1 + i$. Так как оно не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $Y = e^x(A\cos x + B\sin x)$.

Найдем Y' и Y'' и подставим их в данное уравнение. Получим $e^x[(-A + 3B)\cos x - (B + 3A)\sin x] = e^x(\cos x - 7\sin x); e^x \neq 0$.

Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Получим систему

$\begin{cases} -A + 3B = 1 \\ -B - 3A = -7 \end{cases}$, откуда $A = 2,\ B = 1$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^x(2\cos x + \sin x) + C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Пример 5. Рассмотрим уравнение $y'' + y = 2\sin x$.

Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет два комплексно-сопряженный корня $k_1 = i, k_2 = -i$, $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$. Составим число $a + ib = i$.

Оно является простым корнем характеристического уравнения, следовательно, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $Y = x(A\cos x + B\sin x)$.

Методом неопределенных коэффициентов находим $A = -1, B = 0$, откуда $Y = -x \cdot \cos x$, а общее решение неоднородного уравнения

$$y = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

2.8. Уравнение колебаний

Рассмотрим задачу о механических колебаниях. Пусть груз массы *m* покоится на упругой рессоре, закрепленной в некоторой точке А. Отклонение груза от положения равновесия обозначим буквой *y*. Будем считать положительным отклонение вниз и отрицательным – отклонение вверх. В положении равновесия сила веса уравновешивается упругостью рессоры. Предположим, что сила F_1, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия (так называемая восстанавливающая сила), пропорциональна отклонению, т.е.

$$F_1 = -ky \quad \left(k = \text{const}, k > 0\right) \tag{2.63}$$

(*k* – положительная постоянная для данной рессоры, так называемая жесткость рессоры). Предположим еще, что движению груза препятствует сила сопротивления F_2, направленная в сторону, противоположную направлению движения груза, т.е.

$$F_2 = -\lambda v = -\lambda\frac{dy}{dt} \quad \left(\lambda = \text{const}, \lambda > 0\right). \tag{2.64}$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза на рессоре. В соответствии со вторым законом Ньютона получаем

$mw = F_1 + F_2$, где $w = {d^2y}/{dt^2}$, или

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt} \quad (k>0,\ \lambda>0). \qquad (2.65)$$

Уравнение (2.65) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, его можно записать в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \qquad (2.66)$$

где

$$p = \frac{\lambda}{m},\ q = \frac{k}{m}. \qquad (2.67)$$

Уравнение (2.66) называется уравнением свободных колебаний.

Рассмотрим случай, когда точка *A* прикрепления рессоры совершает вертикальное движение по закону $z = \varphi(t)$. Это имеет место тогда, когда нижний конец рессоры прикреплен к катку, движущемуся вместе с рессорой и грузом по неровности.

При этом восстанавливающая сила F_1 будет выражаться формулой $F_1 = -k[y + \varphi(t)]$, а сила сопротивления F_2 – формулой $F_2 = -\lambda[y' + \varphi'(t)]$. Дифференциальное уравнение движения груза на рессоре принимает вид

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k[y + \varphi(t)] - \lambda[y' + \varphi'(t)] \qquad (2.68)$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \qquad (2.69)$$

где

$$p = \frac{\lambda}{m},\ q = \frac{k}{m}, \quad f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m} \qquad (2.70)$$

Уравнение (2.69) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Это уравнение называется уравнением вынужденных колебании

2.8.1. Свободные колебания

Рассмотрим уравнение свободных колебаний, т.е. уравнение $\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ имеет корни

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

в зависимости от которых получаем общее решение уравнения свободных колебаний.

Рассмотрим сначала случай, когда отсутствует сила сопротивления, т.е. $F_2 = 0$, тогда $\lambda = 0$ и $p = 0$ (см. (2.64) и (2.67).

Характеристическое уравнение в этом случае принимает вид $k^2 + q = 0$ и имеет комплексные корни $k_1 = -i\beta,\ k_2 = i\beta,\ \beta = \sqrt{q}$, Поэтому общее решение уравнения свободных колебаний $y'' + qy = 0$ определяется формулой

$$y = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t. \qquad (2.71)$$

Преобразуем правую часть этой формулы, введя новые постоянные A и φ_0:

$$C_1 = A\sin\varphi_0,\ C_2 = A\cos\varphi_0, \qquad (2.72)$$

откуда

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}. \qquad (2.73)$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в формулу (2.71), получаем общее решение

$$y = A\sin(\beta t + \varphi_0), \qquad (2.74)$$
где A и φ_0 – произвольные постоянные.

Колебания в данном случае называются *гармоническими*. Интегральными линиями являются синусоиды. *Периодом* колебаний называется промежуток времени *T*, за который аргумент синуса изменится на 2π. В рассматриваемом случае $T = 2\pi / \beta$. *Частотой* колебаний называется число колебаний за время 2π (в данном случае частота равна β). *Амплитуда* колебаний есть величина наибольшего отклонения от положения равновесия. Из формулы (2.74) видно, что это наибольшее отклонение равно *A*. *Начальной фазой* называется величина φ_0.

Исследуем случай, когда $F_2 \neq 0$, т.е. $p \neq 0$. Рассмотрим три возможности:

1). Если $\frac{p^2}{4} < q$, то характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = -\frac{p}{2} < 0,\ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Общее решение уравнения (2.68) определяется формулой (см. 2.7)

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right) \qquad (2.75)$$

или

$$y = Ae^{\alpha t}\sin\left(\beta t + \varphi_0\right). \qquad (2.76)$$

В качестве амплитуды здесь рассматривают величину $y = Ae^{\alpha t}$, зависящую от времени. Поскольку $\alpha < 0$, то эта величина стремиться к нулю при $t \to \infty$ и колебания называются затухающими.

2). Если $\frac{p^2}{4} > q$, то характеристическое уравнение имеет действительные различные отрицательные корни $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = -\frac{p}{2} < 0,\ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Общее решение уравнения (2.50) определяется формулой
$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad \left(k_1 < 0, k_2 < 0\right), \qquad (2.77)$$
из которой видно, что $y \to 0$ при $t \to \infty$. Колебаний в данном случае не будет (сила сопротивления велика по сравнению с жесткостью рессоры).

2). Если $\frac{p^2}{4} = q$, то корни характеристического уравнения равны между собой $(k_1 = k_2 = -p/2 < 0)$, поэтому общее решение уравнения (2.68) определяется формулой
$$y = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-pt/2}. \qquad (2.78)$$

Здесь также $y \to 0$ при $t \to \infty$, однако, *y* стремится медленнее, чем в предыдущем случае.

2.8.2. Вынужденные колебания

Обратимся к уравнению вынужденных колебаний, т.е. к уравнению (2.69). Рассмотрим практически важный случай, когда возмущающая внешняя сила является периодической и изменяется по закону $f(t) = a\sin\omega t$. В этом случае уравнение (2.71) запишется так:
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = a\sin\omega t. \qquad (2.79)$$

Исследуем уравнение (2.79) при $p = 0$ (сила сопротивления отсутствует) $p \neq 0,\ p^2/4 < q$.

Если сила сопротивления отсутствует, т.е. $p = 0$, то уравнение вынужденных колебаний принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2}+qy=a\sin\omega t\,. \tag{2.80}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение

$$y_0=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t \quad \left(\beta^2=q\right) \tag{2.81}$$

или

$$y_0=A\sin(\beta t+\varphi_0)\,. \tag{2.82}$$

Предположим, что частота внешней силы не равна частоте собственных колебаний, т.е. $\beta\ne\omega$, тогда частное решение неоднородного уравнения (2.80) имеет вид

$$Y=P\cos\omega t+Q\sin\omega t\,. \tag{2.83}$$

Подставляя эту функцию и ее вторую производную в уравнение (2.80), находим коэффициенты P и Q: $P=0,\quad Q=\dfrac{a}{q-\omega^2}$.

Следовательно,

$$Y=\frac{a}{q-\omega^2}\sin\omega t\,. \tag{2.84}$$

Общее решение уравнения (2.80) определяется формулой $y=y_0+Y$, т.е.

$$y=A\sin(\beta t+\varphi_0)+\frac{a}{q-\omega^2}\sin\omega t \tag{2.85}$$

Если частота собственных колебаний совпадает с частотой внешней силы, т.е. $\beta=\omega$, то частное решение уравнения (2.80) следует искать (см. **2.5.**) в следующем виде:

$$Y=t(P\cos\omega t+Q\sin\omega t)\,. \tag{2.86}$$

Подставляя функцию (2.86) и ее вторую производную в уравнение (2.80), находим $P=-\dfrac{a}{2\omega},\quad Q=0$, т.е. $Y=-\dfrac{a}{2\omega}t\cos\omega t$.

Итак, общее решение уравнения (2.80) в этом случае имеет вид

$$y=A\sin(\beta t+\varphi_0)-\frac{a}{2\omega}t\cos\omega t$$

или

$$y=A\sin(\beta t+\varphi_0)-\frac{a}{2\beta}t\cos\beta t\,, \tag{2.87}$$

поскольку $\beta=\omega$.

Из последней формулы видно (см. второе слагаемое алгебраической суммы), что амплитуда колебания неограниченно возрастает при неограниченном возрастании времени t. Рассматриваемое явление (частота собственных колебаний совпадает с частотой внешней силы) называется *резонансом*.

При $p\ne0$ и $\dfrac{p^2}{4}<q$ характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_1=\alpha+i\beta$ и $k_2=\alpha-i\beta$. Общее решение однородного уравнения $y''+py'+qy=0$, где $y=y(t)$, определяется формулой (см. **2.7.**).

$$y_0=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$$

или

$$y_0=Ae^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0)\,. \tag{2.88}$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.79) ищем в виде функции

$$Y=P\cos\omega t+Q\sin\omega t\,. \tag{2.89}$$

Подставляя функцию (2.89) и ее производные Y' и Y'' в уравнение (2.79), находим коэффициенты P и Q:

$$P=\frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2},\quad Q=\frac{(q-\omega^2)a}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}. \qquad (2.90)$$

Вводим новые постоянные A_1 и φ_1, полагая

$$P=A_1\sin\varphi_1 \quad Q=A_1\cos\varphi_1, \qquad (2.91)$$

$$A_1=\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2}},\quad \mathrm{tg}\varphi_1=\frac{P}{Q}.$$

Формула (2.89) с учетом равенств (2.90) и (2.91) принимает вид

$$Y=\frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi_1). \qquad (2.92)$$

Общее решение уравнения (2.79) определяется формулой $y=y_0+Y$ или

$$y=Ae^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0)+\frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi_1) \qquad (2.93)$$

Таким образом, отклонение y состоит из суммы двух слагаемых. Первое из них (решение соответствующего однородного уравнения) определяет затухающие колебания $((\alpha=-p/2<0,\quad p>0)$, это слагаемое убывает при возрастании t. Следовательно, через некоторой промежуток времени главное значение y будет определяться вторым слагаемым, представляющим вынужденные колебания. Частота этих колебаний равна частоте

внешней силы $f(t)=a\sin\omega t$. Амплитуда вынужденных колебаний тем больше, чем меньше p и разность $q-\omega^2$.

2.9. Системы дифференциальных уравнений

Введем основные понятия, связанные с системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}=F_1(x,y_1,y_2,\dots y_n);\\
&\frac{dy_2}{dx}=F_2(x,y_1,y_2,\dots y_n);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dx}=F_n(x,y_1,y_2,\dots y_n),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.94)$$

где $F_k(x,y_1,y_2,\dots y_n)$ $(k=1,2,\dots,n)$ – заданные функции своих аргументов; $y_k=y_k(x)$ – искомые функции независимой переменной x.

Порядком нормальной системы называется число входящих в нее уравнений. Система(2.94) по определению является системой n – го порядка.

Всякая совокупность n функций

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \dots,\ y_n=\varphi_n(x), \qquad (2.95)$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b), называется решением системы (2.94) в этом интервале, если она обращает в тождество каждое из уравнений данной системы, т. е.

$$\varphi'_k(x)\equiv F_k(x,\varphi_1(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_1(x)) \quad (k=1,2,\dots,n)$$

для всех $x\in(a,b)$.

Задача Коши для системы (2.94) состоит в следующем: среди всех решений системы найти такое решение

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)\,, \qquad (2.96)$$

которое удовлетворяет условиям

$$y_1 = y_1^0,\ y_2 = y_2^0, \ldots, y_n = y_n^0, \ \text{при} \quad x = x_0\,, \qquad (2.97)$$

где $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ – заданные числа, называемые *начальными значениями* искомых функций, или *начальными значениями* решения (2.96). Число x_0 называется начальным значением независимой переменной *x*; числа $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, вместе взятые, – *начальными данными* решения (2.96), а условия (2.97) – . *начальными условиями* этого решения. Начальные условия можно записать так:

$$y_k(x_0) = y_k^0 \quad (k = 1, 2, \ldots n)\,. \qquad (2.98)$$

Совокупность n функций

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x, C_1, C_2, \ldots C_n); \\ y_2 = f_2(x, C_1, C_2, \ldots C_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x, C_1, C_2, \ldots C_n), \end{array}\right\} \qquad (2.99)$$

называется *общим решением* системы (2.94), если:

1) система (2.99) разрешима относительно произвольных постоянных

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_1; \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_n; \end{array}\right\} \qquad (2.100)$$

2) совокупность функций (2.99) является решением системы (2.94) при всех значениях произвольных постоянных, определяемых формулами (2.100).

Решение, получающееся из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным.

Рассмотрим любое из равенств (2.100)

$$\varphi_k(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_k\,. \qquad (2.101)$$

Функция $\varphi_k(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$, входящая в равенство (2.101), обладает следующим свойством: она обращается в постоянную при замене $y_1, y_2, \ldots y_n$ любым частным решением системы (2.94), т.е.

$$\varphi_k(x, f_1(x, C_1, C_2, \ldots C_n),\ f_2(x, C_1, C_2, \ldots C_n), \ldots,\ f_n(x, C_1, C_2, \ldots C_n)) \equiv C_k$$

Всякая функция, обладающая таким свойством, называется *интегралом* системы (2.94).

Равенство

$$\varphi\ (x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C\,, \qquad (2.102)$$

где $\varphi\ (x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ – интеграл системы (2.94), а C – произвольная постоянная, называется *первым интегралом* этой системы.

Каждое из равенств (2.100) является первым интегралом системы (2.94).

Совокупность n первых интегралов системы (2.100) обладает тем свойством, что она разрешима относительно искомых функций $y_1, y_2, \ldots y_n$, причем в результате получается общее решение (2.99).

Совокупность n первых интегралов, обладающую таким свойством, называют общим интегралом системы (2.98).

Первые интегралы (2.100), образующие общий интеграл системы, обладает тем свойством, что интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ не существует соотношение вида $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$ ни при каком выборе функции *Φ*.

Пример 1. Найти общий интеграл системы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}.$$

Это нормальная система дифференциальных уравнений. Интегрируем ее:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|, \ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

$$y = C_1 x, z = C_2 x. \qquad \text{(I)}$$

Разрешив эти уравнения относительно произвольных постоянных, получим

$$\frac{y}{x} = C_1 x, \frac{z}{x} = C_2 x. \qquad \text{(II)}$$

Формулы (I) определяют общее решение системы, Формулы (II) – ее первые интегралы. Левые части уравнений (II) являются интегралами системы.

Поскольку интегралы $\varphi_1 = y : x, \varphi_2 = z : x$ независимы, то общий интеграл системы определяется равенствами (II).

З а м е ч а н и е.

Систему можно записать в симметрической форме:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \frac{dz}{1} = \frac{dx}{\frac{y}{x}} = \frac{dx}{\frac{z}{x}}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Из последней системы следует, что имеется еще один первый интеграл, $z : y = C_3$. Соответствующий интеграл $\varphi_3 = z : y$ выражается через независимые интегралы $\varphi_1 = y : x$, $\varphi_2 = z : x$, А именно: $\varphi_3 = \varphi_2 : \varphi_1$.

Пример 2. Найти общий интеграл системы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - z}{z - y}, \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}. \qquad \text{(I)}$$

Переписав эту систему в симметричной форме, получим:

$\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{\frac{x - z}{z - y}} =, \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{\frac{y - x}{z - y}}$ или (умножая все знаменатели на $x - y$)

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}. \qquad \text{(II)}$$

Складывая числители и знаменатели соответственно, получим

$dx + dy + dz = 0$ èëè $d(x + y + z) = 0$,

следовательно,

$$\varphi_1 = x + y + z = C_1$$

есть первый интеграл системы (I).

Для получения другого первого интеграла умножим числители и знаменатели дробей (II) соответственно на $2x$, $2y$ и $2z$ и сложим числители и знаменатели полученных дробей:

$$\frac{2dx}{2x(z-y)}=\frac{2ydy}{2y(x-z)}=\frac{2zdz}{2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

Отсюда видим, что семейство сфер

$$\varphi_2 = x^2+y^2+z^2 = C_2$$

представляет собой первый интеграл системы (I). Полученные первые интегралы линейно независимы, так что их совокупность дает общий интеграл системы (I).

З а м е ч а н и е. В некоторых случаях систему дифференциальных уравнений вида (II) можно свести к одному дифференциальному уравнению n – го порядка методом исключения неизвестных. Соответствующие примеры решения этим методом приведены, в частности, в [1].

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, для простоты изложения ограничимся тремя уравнениями с тремя неизвестными.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z\\ \dfrac{dz}{dt}=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z\end{cases}. \qquad (2.103)$$

Рассмотрим еще один метод, применимый только к нормальным системам уравнений с постоянными коэффициентами. Будем искать решение этой системы в виде:

$$x=\alpha e^{kt},\ y=\beta e^{kt},\ z=\gamma e^{kt}. \qquad (2.104)$$

Мы должны определить коэффициенты α,β,γ и показатель системы k так, чтобы формулы (2.104) были решением системы (2.103). Найдем

$$\frac{dx}{dt}=k\alpha e^{kt},\ \frac{dy}{dt}=k\beta e^{kt},\ \frac{dz}{dt}=k\gamma e^{kt}.$$

Подставляя функции и их производные в систему (2.103) и сокращая на $e^{kz}\neq 0$, получим:

$$\begin{cases}k\alpha=a_{11}\alpha+a_{12}\beta+a_{13}\gamma\\ k\beta=a_{21}\alpha+a_{22}\beta+a_{23}\gamma\\ k\gamma=a_{31}\alpha+a_{32}\beta+a_{33}\gamma\end{cases}.$$

Перенеся все члены в одну сторону, получим:

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha+a_{12}\beta+a_{13}\gamma=0\\ a_{21}\alpha+(a_{22}-k)\beta+a_{23}\gamma=0\\ a_{31}\alpha+a_{32}\beta+(a_{33}-k)\gamma=0\end{cases}. \qquad (2.105)$$

Система (2.105) является однородной системой алгебраических уравнений. Для того, чтобы она имела решение, отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k\end{vmatrix}=0. \qquad (2.106)$$

Равенство (2.106) является уравнением 3 – ей степени относительно k и называется характеристическим уравнением для системы (2.103). Если характеристическое уравнение имеет различные Действительные корни k_1, k_2, k_3, обозначим частные решения, соответствующие каждому корню, через $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ соответственно. Тогда можно показать, что общее решение системы дифференциальных уравнений (2.103) запишется в виде:

$$x(t)=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3$$
$$y(t)=C_1x_1+C_2y_2+C_3y_3\,.$$
$$z(t)=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3$$

Пример 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x+3y\\ \dfrac{dy}{dt}=6x+4y\end{cases}.$$

Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}7-k & 3\\ 6 & 4-k\end{vmatrix}=0,\ \text{или}\ k^2-11k+10=0\,.$$

Его корни $k_1=1,\quad k_2=10$ действительны и различны.

а) при $k_1=1$ получаем систему для нахождения α и β:

$$\begin{cases}(7-1)\alpha\ \ +3\beta=0\\ 6\,\alpha+\ (4-1)\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha+3\beta=0\\ 6\alpha+3\beta=0\end{cases},$$

система сводится к одному уравнению 2α + β = 0, которому удовлетворяют β= – 2α, в частности, при $\alpha_1=1,\quad \beta_1=-2$. Получим

$x_1(t)=e^t,\quad y_1(t)=-2e^t$;

б) при $k_2=10$, получим следующую систему

$$\begin{cases}(7-10)\alpha\ \ +3\beta=0\\ 6\,\alpha+\ (4-10)\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\alpha+3\beta=0\\ 6\alpha-6\beta=0\end{cases},$$

которому эквивалентна одному уравнению α – β =0, откуда следует, что α = β, в частности, при $\alpha_2=1,\quad \beta_2=1$. Получим решение

$x_2(t)=e^{10t},\quad y_2(t)=e^{10t}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^t+C_2e^{10t},\\ y(t)=-2C_1e^t+C_2e^{10t}\end{cases}.$$

3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

3.1. Основные понятия и определения. Примеры

Наряду с основной начальной задачей Коши приходится решать так называемые краевые (или граничные) задачи в теории дифференциальных уравнений.

Многие задачи и явления в физике, механике, электро/радио технике и других науках, задачи космонавтики приводят к тому, что условия задаются не в одной точке. В них значение искомой функции задается в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение.

Приведем примеры.

1) В задаче о движении материальной точки массой m под действием заданной силы $\bar F\left(t,\bar r,\bar r'\right)$ часто требуется найти закон движения, если в начальный момент времени $t=t_0$ точка находится в положении, характеризуемом радиусом-вектором r_0, в в момент $t=t_1$ должна попасть в точку $\bar r=\bar r_1$. Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения

$$m\frac{d^2\bar r}{dt^2}=\bar F\left(t,\bar r,\bar r'\right)$$

с краевыми условиями $\begin{cases}\bar r(t_0)=\bar r_0\\ \bar r(t_1)=\bar r_1\end{cases}.$

Эта задача, вообще говоря, имеет не единственное решение. Если речь идет о баллистической задаче и о точках земной поверхности, то в одну и ту же точку тело может попасть по разным траекториям, более того, при очень больших начальных скоростях можно попасть в заданную ту же точку и после однократного или многократного облета земного шара.

2) В задаче о луче света, проходящего через преломляющую среду, требуется найти направление, по которому луч света должен выйти из точки *A*, чтобы через некоторое время $t_1 = t_0 + \Delta t$ попасть в другую заданную точку *B*.

Эта задача также не всегда разрешима, а если решение существует, то может быть их несколько и даже бесконечное множество (например, если лучи, выходящие из точки *A*, фокусируются в точке *B*).

Задачи, в которых условия заданы в двух различных точках, называются двухточечными краевыми задачами. Краевая задача называется *линейной*, если линейны и дифференциальное уравнение и краевые условия. В противном случае краевая задача называется нелинейной.

Примеры.

1. $y'' = y^2 + 2y$;

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=0 \end{cases} \Rightarrow$ нелинейная краевая задача, т.к. дифференциальное уравнение нелинейно.

2. $y'' = 3x^2 y'$;

$\begin{cases} y(0)=2 \\ y^2(1)+2y'(1)=3 \end{cases} \Rightarrow$ нелинейная краевая задача, т.к. граничное условие нелинейно.

3. $y'' = 2y' + 4y = \sin x$;

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=1 \end{cases} \Rightarrow$ линейная краевая задача.

Краевые условия для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка в общем виде имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha y(x_0) + \beta y'(x_0) = A \\ \delta y(x_1) + \gamma y'(x_1) = B \end{cases},$$

где *A*, *B*, α, δ, β, γ – заданные постоянные, причем коэффициенты α, δ, β, γ удовлетворяют условию.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.е. одновременно не равны нулю.

Если *A* = *B* = 0, то краевые условия называются однородными. Заметим, что неоднородные краевые условия с помощью линейной замены переменных сводятся к однородным.

Например, линейной заменой

$z = y - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция, краевые условия $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$ сводятся к нулевым $\begin{cases} z(x_0) = 0 \\ z(x_1) = 0 \end{cases}$, причем линейность дифференциального уравнения при этом не нарушается.

Если удается найти общее решение дифференциального уравнения краевой задачи, то для решения краевой задачи надо определить произвольные постоянные, содержащиеся в общем решении, из краевых условий. При этом краевая задача не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно не обязательно единственно в отличии от начальной задачи Коши.

В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее граничным условиям $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$.

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$\lambda^2+1=0$, корни которого $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$. Применяя формулу Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ и отделяя в ней действительную и мнимую части, получим два линейно-независимых уравнения: $\varphi_1(x)=\cos x; \varphi_2(x)=\sin x$, которые образуют фундаментальную систему решений.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$y=c_1\cos x+c_2\sin x$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Далее определяем значения c_1, c_2, используя граничные условия. Первое граничное условие удовлетворяется при $c_1=0, \forall\ c_2$, т.к. при $x=0$ получаем $0=c_1\cdot 1+c_2\cdot 0$. Подставляя общее решение во второе граничное условие, получаем с учетом $c_1=0$ при $x=x_1$:

$$y_1=0\cdot\cos x_1+c_2\sin x_1, \qquad (*)$$

откуда находим $c_2=\dfrac{y_1}{\sin x_1}$, если $\sin x_1\neq 0$, т.е. $x_1\neq n\pi, n\in Z$.

Следовательно, в этом случае

$\tilde{y}=\dfrac{y_1}{\sin x_1}\cdot\sin x$ – единственное решение краевой задачи.

Если $x_1=n\pi$ и $y_1=0$, то из (*) получаем $\forall\ c_2$; тогда все кривые пучка $\tilde{y}=c_2\sin x$ являются графиками решений краевой задачи.

При $x_1=n\pi$ и $y_1\neq 0$ из (*) не получаем ни одного значения c_2, т.к. $y_1=c_2\cdot 0$. Значит не существует решений краевой задачи, ибо ни одна кривая пучка $y_2=c_2\sin x$ не проходит через точку $(x_1; y_1)$, где $x_1=n\pi$, $n\in Z, y_1\neq 0$.

Таким образом, рассматриваемая краевая задача:

а) имеет единственное решение $y=\dfrac{y_1}{\sin x_1}\cdot\sin x$, когда $x_1\neq n\pi$, y_1 – любое;

б) имеет бесконечное множество решений $y=c_2\cdot\sin x$, когда $x_1=n\pi$, $n\in Z$, $y_1=0$;

в) не имеет решений, если $x_1=n\pi$ и $y_1\neq 0$, где n – целое число.

3.2. Линейная двухточечная краевая задача. Функция Грина

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x), \qquad (3.1)$$

где в правой части функция $f(x)$ и коэффициенты $a_i(x), i=0,1,2$ определены и непрерывны для всех $x\in[x_0,x_1]$.

Требуется найти решение уравнения (3.1), подчиненное линейным однородным краевым условиям

$$\begin{cases}\alpha y(x_0)+\beta y'(x_0)=0\\ \delta y(x_1)+\gamma y'(x_1)=0\end{cases}. \qquad (3.2)$$

Определение. Однородной краевой задачей называется задача нахождения функции $y(x)$, удовлетворяющей линейному однородному уравнению

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (3.3)$$

и краевым условиям (3.2).

Имеет место следующая теорема *существования и единственности решения* двухточечной краевой задачи.

Теорема. Для любой непрерывной на отрезке $[x_0,x_1]$ функции $f(x)$ двухточечная краевая задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение, если соответствующая однородная краевая задача (3.3), (3.2) имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Это решение задается формулой

$$\hat{y}(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds\,,$$

где $G(x,s)$ – функция Грина (или функция влияния) рассматриваемой краевой задачи.

Физический смысл функции влияния $G(x,s)$ ***и решения*** $\hat{y}(x)$.

Если в уравнении (3.1) рассматривать $y(x)$ как смещение некоторой системы под влиянием непрерывно распределенной на отрезке $[x_0, x_1]$ силы $f(x)$, (например, отклонение струны от положения равновесия под влиянием распределенной нагрузки с плотностью $f(x)$), то функция Грина $G(x, s)$ описывает смещение, вызываемое единичной сосредоточенной силой, приложенной к точке $x = s$, а решение $\hat{y}(x)$ рассматривается как предел интегральной суммы решений

$$\sum_{i=1}^{m} G(x,s_i)f(s_i)\Delta s\,,$$

соответствующих сосредоточенным силам, где $f(s_i)\Delta s$ – импульсы в точках s_i деления отрезка $[x_0, x_1]$ на m равных частей, $\Delta s=\dfrac{x_1-x_0}{m}$.

Определение. Функцией Грина $G(x,s)$ линейной двухточечной краевой задачи (3.1), (3.2) называется функция, удовлетворяющая следующим четырем условиям:

1. $G(x,s)$ определена в области $D:\begin{cases} x_0\le x\le x_1\\ x_0\le s\le x_1\end{cases}$ и непрерывна по x при фиксированном s при всех $x_0\le x\le x_1$ и $x_0\le s\le x_1$, т.е. $G(s+0,s)=G(s-0,s)$;

2. $G(x,s)$ является решением соответствующего однородного уравнения (3.3) как функция от x в каждом из интервалов $[x_0, s)$ и $(s, x_1]$, т.е. она удовлетворяет уравнению (3.3) при $x\ne s$;

3. $G(x,s)$ удовлетворяет заданным граничным условиям как функция от x: $G(x_0,s)=0,\quad G(x_1,s)=0$.

4. Производная $G'_x(x,s)$ функции $G(x,s)$ по x непрерывна в $[x_0,x_1]$ всюду за исключением точки $x=s$, где она имеет разрыв 1-го рода со скачком $\dfrac{1}{a_0(s)}$:

$$G'_x(s+0,s)-G'_x(s-0,s)=\frac{1}{a_0(s)}\,,$$

что означает

$$G'_x(s+0,s)=\lim_{\substack{x\to s+0\\ x>s}} G'_x(x,s),$$

$$G'_x(s-0,s)=\lim_{\substack{x\to s-0\\ x<s}} G'_x(x,s).$$

З а м е ч а н и е 1.

Условие несуществования ненулевого решения $y(x)\ne 0$ у однородной краевой задачи (3.3), (3.2) гарантирует не только существование и единственность решения краевой задачи (3.1), (3.2), но и единственность функции Грина. Это следует из следующей теоремы.

Теорема. Если однородная краевая задача (3.3), (3.2) имеет лишь тривиальное решение $y(x)\equiv 0$, то существует одна функция Грина краевой задачи (3.1), (3.2).

З а м е ч а н и е 2.

Если краевая задача самосопряженная, то функция Грина является симметричной:

$$G(x,s)=G(s,x)\,.$$

Верно и обратное утверждение.

З а м е ч а н и е 3.

В случае, когда коэффициент при старшей производной обращается в нуль на одном из концов отрезка $[x_0, x_1]$, например, при $x = x_0$, то ставится естественное граничное условие ограниченности решения при $x = x_0$, а на другом конце задается обычное граничное условие.

Например, краевая задача

$$xy'' + y' = f(x),$$

$$\begin{cases} y(x) \text{ ограничено при } x \to 0, \\ y(1) - \alpha y'(1) = 0 \end{cases}$$

В некоторых краевых задачах приходится рассматривать однородные краевые условия, связывающие значения функции и ее производной на разных концах отрезка. Наиболее важными из таких условий являются условия $y(x_0) = y(x_1),\ y'(x_0) = y'(x_1)$, которые можно рассматривать как условия периодичности. Для краевых задач с такими условиями справедливо все изложенное выше.

З а м е ч а н и е 4.

Линейные уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (3.4)$$

и

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0 \qquad (3.5)$$

могут быть преобразованы одно в другое. Действительно, умножением на множитель $e^{\int p_1(x)dx}$ уравнение (3.4) приводится к виду (3.5). Поэтому уравнения вида

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0, \text{ где } p(x) > 0$$

назвали самосопряженными.

3.3. Метод построения функции Грина

Чтобы построить функцию Грина для линейной краевой задачи

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),\ \ x_0 \le x \le x_1, \qquad (3.6)$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0, \qquad (3.7)$$

надо найти два решения $\bar{y}_1(x)$ и $\bar{y}_2(x)$ (отличных от $y(x) \equiv 0$) соответствующего линейного однородного уравнения, удовлетворяющих соответственно первому и второму из граничных условий (3.7).

Если $\bar{y}_1(x)$ не удовлетворяет сразу обоим краевым условиям, то функция Грина существует и ее можно искать в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)\bar{y}_1(x) \text{ при } x_0 \le x \le s, \\ b(s)\bar{y}_2(x) \text{ при } s \le x \le x_1, \end{cases} \qquad (3.8)$$

причем функции $a(s)$ и $b(s)$ выбираем так, чтобы были выполнены условия 1. и 4. , т.е чтобы функция $G(x,s)$ была:

1. Непрерывна по x при фиксированном s, и, в частности, непрерывна в точке $x = s$

$$b(s)\bar{y}_2(s) = a(s)\bar{y}_1(s),$$

4. Чтобы производная от нее по x

$$G'_x(x,s) = \begin{cases} a(s)(\bar{y}_1(x))' \text{ при } x_0 \le x < s, \\ b(s)(\bar{y}_2(x))' \text{ при } s \le x \le x_1, \end{cases}$$

в точке $x = s$ имела скачок, равный $\dfrac{1}{a_0(s)}$:

$$b(s)(\bar{y}_2(x))' - a(s)(\bar{y}_1(x))' = \frac{1}{a_0(s)}.$$

Таким образом, неизвестные функции $a(s)$ и $b(s)$ находим из линейной системы уравнений при $x = s$:

$$\begin{cases} b(s)\bar{y}_2(s) - a(s)\bar{y}_1(s) = 0 \\ b(s)(\bar{y}_2(s))' - a(s)(\bar{y}_1(s))' = \dfrac{1}{a_0(s)}, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение, т.к. основной определитель этой системы есть определитель Вронского, отличный от нуля, ибо найденные решения $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ – линейно-независимые функции.

Пример. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$x^2 y'' + 2xy' = f(x),.$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(3) = 0 \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

1. Находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (ЛОУ): $x^2 y'' + 2xy' = f(x)$.

Это уравнение Эйлера. С помощью замены независимого переменного $x = e^t$ приводим данное уравнение к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Имеем (по правилам дифференцирования сложной функции)

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{e^t}, \text{ или } y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \dot{y} e^{-t},$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{e^t}\right)'_x = \frac{y''_{xx} \cdot t'_x \cdot e^t - y'_t \cdot e^t \cdot t'_x}{e^{2t}} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}},$$

т.к. $t'_x \cdot e^t = \frac{1}{x'_t} \cdot e^t = 1$.

Подставляя в уравнение, получаем

$$e^{2t} \cdot \frac{(y''_{tt} - y'_t)}{e^{2t}} + 2e^t \cdot \frac{y'_t}{e^t} = 0, \text{ или } y''_{tt} + y'_t = 0. \text{ (**)}$$

Тогда $\lambda^2 + \lambda = 0$ – характеристическое уравнение; $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ – его корни; $\varphi_1(t) = e^0 = 1, \varphi_2(t) = e^{-t}$ – фундаментальная система решений уравнения (**).

Следовательно, общее решение уравнения (**):

$$y_{00}(t) = c_1 + c_2 e^{-t}, \text{ где } c_1, c_2 - \forall \text{ const}.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получаем общее решение исходного ЛОУ

$$y_{00}(x) = c_1 + c_2 \cdot \frac{1}{x}, \text{ где } x \in [1,3].$$

2. Находим два решения $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ ЛОУ, удовлетворяющих соответственно первому и второму из граничных условий.

Находим $\tilde{y}_1(x)$. При $x = 1$, $y(1) = 0$ по условию, тогда

$$0 + c_1 + c_2 \cdot \frac{1}{1}, \text{ откуда } c_1 = -c_2, \text{ где } c_2 - \text{ любое число.}$$

Пусть $c_2 = 1$, тогда $c_1 = -1$. Подставив в общее решение найденные значения, имеем

$$\tilde{y}_1(x) = -1 + \frac{1}{x}.$$

Находим $\tilde{y}_2(x)$: при $x = 3$, $y' = 0$. Так как $y'_{00}(x) = -\frac{c_2}{x^2}$, то $-\frac{c_2}{9} = 0$, т.е. $c_2 = 0$, c_1 - любое число. Полагаем $c_1 = 1$. Тогда имеем $\tilde{y}_2(x) = 1 + \frac{0}{x} = 1$.

3. Строим функцию Грина $G(x,s)$ по формуле(3.8):

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s) \cdot \left(-1 + \frac{1}{x}\right) & \text{при } 1 \le x \le s \\ b(s) \cdot 1 & \text{при } s < x \le 3 \end{cases},$$

где $a(s), b(s)$ – функции, подлежащие определению.

$$G'_x(x,s) = \begin{cases} a(s) \cdot \left(0 - \frac{1}{x^2}\right) & \text{при } 1 \le x \le s \\ b(s) \cdot 0 & \text{при } s < x \le 3 \end{cases}$$

Функции $a(s), b(s)$ находим из системы алгебраических уравнений, исходя из свойств 1. и 4. функции Грина при $x = s$, где $a_0(x) = x^2$ по условию:

$$\begin{cases} b(s) - a(s)\left(-1+\frac{1}{s}\right) = 0 \\ 0 - a(s)\cdot\left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2} \end{cases},$$

у которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1-\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{s^2} \neq 0 .$$

Следовательно, система имеет единственное решение

$$a(s) = 1, \quad b(s) = \frac{1}{s} - 1 .$$

Таким образом, построена функция Грина

$$G(x,s) = \begin{cases} -1+\frac{1}{x} & \text{при } 1 \le x \le s \\ \frac{1}{s} - 1 & \text{при } s \le x \le 3 \end{cases}.$$

Решение исходной краевой задачи находим по формуле

$$\hat{y}(x) = \int_1^3 G(x,s)\cdot f(s)ds .$$

Так как при

$$s \le x \quad G(x,s) = \frac{1}{s} - 1, \text{ а при } \quad s \ge x \quad G(x,s) = \frac{1}{x} - 1 ,$$

то получаем

$$\hat{y}(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{s} - 1\right)\cdot f(s)ds + \int_x^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)\cdot f(s)ds .$$

Вывод. С помощью функции Грина $G(x,s)$ можно найти семейство решений данной краевой задачи при любой непрерывной функции $f(x)$, являющейся правой частью данного дифференциального уравнения.

Например, возьмем $f(x) = 4x^2$. Тогда решение краевой задачи $x^2y'' + 2xy' = 4x^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0$ будет следующее

$$\hat{y}(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{s} - 1\right)\cdot 4s^2ds + \int_x^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)\cdot 4s^2ds =$$

$$= 4\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_1^x + 4\left(\frac{1}{x} - 1\right)\cdot\frac{s^3}{3}\Bigg|_x^3 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{36}{x} - \frac{110}{3}.$$

3.4. Собственные значения и собственные функции краевой задачи

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y , \tag{3.9}$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\alpha y(x_0) + \beta y'(x_0) = 0, \quad \delta y(x_1) + \gamma y'(x_1) = 0 , \tag{3.10}$$

где величина λ – постоянная (параметр уравнения), $x \in [x_0, x_1]$.

Определение. *Собственным значением* однородной краевой задачи (3.9), (3.10) называется такое число λ, при котором уравнение (3.9) имеет нетривиальное решение $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющее граничным значениям (3.10), а само это решение $y(x) \not\equiv 0$ называется *собственной функцией*, отвечающей данному собственному значению.

Отметим их *основные свойства:*

1. Собственные значения краевой задачи (3.9), (3.10) образуют числовую последовательность действительных чисел, стремящуюся к бесконечности.

Собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n имеет ровно n нулей в интервале (x_0, x_1).

2. Если $y(x), z(x)$ – собственные функции, отвечающие одному собственному значению λ, то $y(x) = cz(x)$, где c - постоянная.

3. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – собственные функции, отвечающие *различным* собственным значениям λ_1, λ_2, то

$$\int_{x_0}^{x_1} y_1(x)y_2(x)dx = 0 \quad \text{(свойство ортогональности).}$$

Задача отыскания собственных значений и собственных функций для сопряженного уравнения

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y + \lambda y = f(x) \qquad (3.11)$$

с однородными краевыми условиями (3.10), $x_0 \le x \le x_1$, носит название задачи Штурма-Лиувилля.

Доказано, что при фиксированном значении параметра λ:

а) либо неоднородная краевая задача имеет решение при любых непрерывных $f(x)$, и тогда это решение единственное, а соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное (тождественно равное нулю) решение $y(x) \equiv 0$;

б) либо соответствующая однородная краевая задача имеет нетривиальные (отличные от нуля) решения, и тогда неоднородная задача разрешима не для всех правых частей $f(x)$, а в случае существования решения оно не определяется однозначно.

Пример. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' = \lambda y, \quad (\lambda \ne 0),$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(l) = 0, \end{cases} \quad \text{где } x \in [0, l].$$

Решение.

Имеем дифференциальное уравнение $y'' - \lambda y = 9$, характеристическое уравнение которого $\omega^2 - \lambda = 0$ имеет два корня $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Рассмотрим два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

1). Пусть $\lambda = -k^2 < 0$. Тогда $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki$.

Общее решение уравнения

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx, \qquad (3.12)$$

отсюда

$$y'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx. \qquad (3.13)$$

Полагая $x = 0$ в (3.13) и $x = l$ в (3.12) и учитывая краевые условия, получаем для нахождения c_1 и c_2 однородную линейную систему

$$\begin{cases} -c_1 \cdot k \cdot \sin 0 + c_2 \cdot k \cdot \cos 0 = 0 \\ c_1 \cdot \cos kl + c_2 \cdot \sin kl = 0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} -c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot k = 0 \\ c_1 \cdot \cos kl + c_2 \cdot \sin kl = 0 \end{cases},$$

откуда $c_2 = 0$, c_1 – любое.

Эта система будет иметь ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю; приравняв его нулю, получаем уравнение для нахождения собственных значений данной краевой задачи:

$$\begin{vmatrix} 0 & k \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix} = 0, \text{ или } -k \cdot \cos kl = 0.$$

Так как по условию $\lambda \ne 0$, то $k \ne 0$, тогда $\cos kl = 0$, отсюда

$$kl = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z, \text{ или } k = \frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2} + n\right),$$

$$\text{или} \quad k = \frac{\pi}{2l}(2n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Значит, собственные значения

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4l^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Им соответствуют (с точностью до постоянного множителя c_1, который можно положить равным единице) собственные функции

$$y_n(x) = \cos kx = \cos\frac{\pi}{2l}(2n+1)x, \quad n \in Z,$$

являющиеся решениями краевой задачи.

Определение. Совокупность собственных значений краевой задачи называется *спектром*.

В рассмотренном примере спектр составляет последовательность чисел $\left\{-\frac{\pi^2}{4l^2}; -\frac{9\pi^2}{4l^2}; \frac{25\pi^2}{4l^2}; \ldots\right\}$.

2. Пусть $\lambda = k^2 > 0$. Тогда $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{k^2} = \pm k$.

Общее решение исходного уравнения

$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, отсюда $y'(x) = c_1 \cdot k \cdot e^{kx} + c_2 \cdot k \cdot e^{-kx}$.

Полагая $x = 0$ и $x = l$ с учетом краевых условий, получаем линейную однородную систему относительно неизвестных c_1, и c_2.

$$\begin{cases} c_1 \cdot k - c_2 \cdot k = 0 \\ c_1 \cdot e^{kl} + c_2 \cdot e^{-kl} = 0 \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 \cdot e^{kl} + c_2 \cdot e^{-kl} = 0. \end{cases}$$

Система будет иметь ненулевые решения, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{kl} & e^{-kl} \end{vmatrix} = 0;$$

раскрывая его, получаем уравнение для нахождения собственных значений краевой задачи

$$e^{-kl} + e^{kl} = 0, \text{ или } 1 + e^{2kl} = 0,$$

которое не имеет решения ни при каком значении k.

Следовательно, при $\lambda > 0$ краевая задача не имеет собственных значений и собственных функций, а данная краевая задача имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ (при $c_1 = c_2 = 0$).

Ответ: $y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right)$, $\lambda_n = -\frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2$, $n \in Z$.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

4.1. Нахождение решений дифференциальных уравнений первого порядка в виде степенного ряда

Если интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно или затруднительно, ищут решение такого уравнения в виде степенного ряда.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n, \qquad (1)$$

где неизвестные коэффициенты $C_n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ находят методом неопределенных коэффициентов подстановкой ряда (1) в дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удается найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

Условия, при которых существуют решения в виде суммы степенного ряда, устанавливаются следующей теоремой.

<u>**Теорема**</u> (об аналитичности решения).

Если в уравнении

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \qquad (3)$$

правая часть – функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) *аналитическая*, т.е. разлагается в ряд по степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, то решение задачи Коши (2), (3) тоже *является аналитической функцией*, т.е. разлагается в степенной ряд (1) в окрестности точки x_0.

Замечание. В случаях, когда требуется решить задачу Коши (2), (3), искомое решение можно искать с помощью ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=f(x_0,y_0)$. Дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находятся последовательным дифференцированием уравнения (2) и подстановкой в результат дифференцирования вместо $x, y, y', y'',\ldots$ значений x_0, y_0, y_0' и всех остальных найденных последующих производных.

Пример. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Тейлора уравнение

$$y'=x^2+y^2,\quad y(0)=1,$$

взяв шесть первых членов разложения, отличных от нуля.

Р е ш е н и е. Будем решение задачи Коши искать в виде ряда

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots .$$

Из уравнения и начального условия $x_0=0,\ y_0=1$ находим $y'(0)=0^2+y^2(0)=1$. Дифференцируя исходное уравнение последовательно, получаем

$$y''=2x+2yy';\ y'''=2+2y'^2+2yy'';$$

$$y^{(4)}=4y'y''+2y'y''+2yy'''=6y'y''+2yy'''$$

$$y^{(5)}=6y''^2+6y'y'''+2y'y'''+2yy^{(4)}=6y''^2+8y'y'''+2yy^{(4)}.$$

Полагая $x=0$ с учетом $y(0)=1$, $y'(0)=1$, последовательно находим:

$$y''(0)=2,\ y'''(0)=8,\ y^{(4)}(0)=28,\ y^{(5)}(0)=144 .$$

Таким образом, получили приближенное решение в виде ряда

$$y\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}.$$

Заметим, что, получив формально решение в виде ряда, исследуют это решение на сходимость и на возможность почленного дифференцирования. В той области, где ряд сходится, он не только формально удовлетворяет уравнению, но его сумма действительно является искомым решением.

Например, найдя решение $y(x)$ уравнения $y'-2xy=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$ с помощью ряда

$$y(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!},$$

видим, что ряд в правой части, сходящийся при всех $x\in(-\infty,+\infty)$, имеет сумму $S(x)=e^{x^2}$, которая и является точным решением данной задачи Коши. Следовательно, решением уравнения является функция $y=e^{x^2}$.

4.2. Нахождение решений дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенных относительно старшей производной

Рассмотрим способ интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов Тейлора, который оказывается более простым применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям *n*-го порядка, разрешенным относительно старшей производной. Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (4)$$

и начальные условия

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'', \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (5)$$

Утверждение, аналогичное теореме об аналитичности решения уравнения $y'=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$, справедливо для уравнения n-го порядка (4) с начальными условиями (5). Искомое решение задачи Коши (4), (5) ищем в виде ряда Тейлора.

$$y(x)=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}c_k(x-x_0)^k, \qquad (6)$$

где $c_k=\dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Первые $(n+1)$ коэффициентов ряда (6) определяются начальными условиями (3) и дифференциальным уравнением (4). Следующие коэффициенты ряда $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ определяются путем последовательного его дифференцирования уравнения (4).

Пример. Найти в виде ряда решение уравнения $y''=xy^2-y'$ с начальными условиями $y(0)=2,\ y'(0)=1$.

Р е ш е н и е. Способ 1. Ищем решение в виде степенного ряда $y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots=2+x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$; т.к. из начальных условий следует, что $c_0=2,\ c_1=1$. Подставляя в дифференциальное уравнение ряды для функций $y(x),\ y'(x)$ и $y''(x)$, получим

$$2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\ldots=x\left(2+x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots\right)^2-1-2c_2x-3c_3x^2.$$

Раскрывая скобки в правой части и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получим

$$\begin{array}{l|ll}
x^0 & 2c_2=-1, & \text{откуда}\quad c_2=-1/2 \\
x^1 & 6c_3=4-2c_2, & \text{откуда}\quad c_3=5/6 \\
x^2 & 12c_4=4-3c_3, & \text{откуда}\quad c_4=1/8 \\
x^3 & 20c_5=1+2c_2-4c_4, & \text{откуда}\quad c_5=-1/40, \ldots
\end{array}$$

Следовательно,

$$y=2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{40}x^5+\ldots.$$

Способ 2. Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots.$$

Из уравнения с учетом начальных условий, находим

$$y''(0)=0\cdot y^2(0)-y'(0)=-1,$$

Дифференцируем последовательно исходное уравнение

$$y'''=y^2+2xyy'-y'',$$
$$y^{(4)}=2yy'+(2y+2xy')y'+2xyy''-y'''=4yy'+2xy'^2+2xyy''-y''',$$
$$y^{(5)}=4y'^2+4yy''+2y'^2+4xy'y''+(2y+2xy')y''+2xyy'''-y^{(4)},$$

……………………………………………………………………

Полагая $x=0$, находим $y'''(0)=2^2+1=5$, $y^{(4)}(0)=8-5=3$, $y^{(5)}(0)=4+4\cdot2\cdot(-1)+2+2\cdot2\cdot(-1)-3=-3$.

Следовательно, искомое решение получаем в виде ряда

$$y = 2 + x - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \dots$$

Ответ: $y = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \dots$

4.3. Нахождение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

Данный метод является особенно удобным в применении к линейным дифференциальным уравнениям.

Пусть дано линейное однородное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + r(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad (7)$$

и поставлены начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y'_0 \qquad (8)$$

__**Теорема.**__ Если коэффициенты $r(x)$ и $q(x)$ уравнения (7) разложимы в степенные ряды по степеням $(x - x_0)$:

$$r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k (x - x_0)^k, \quad q_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \qquad (9)$$

сходящиеся в области $|x - x_0| < R$, то уравнение (7) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (8), разложимое в ряд по степеням разности $(x - x_0)$:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad (10)$$

который сходится, по крайней мере, в той же области $|x - x_0| < R$, что и ряды (9).

При этом в начальных условиях (8) числа y_0 и y'_0 можно брать любыми.

Коэффициенты c_k ряда (10) определяются единственным образом, если заданы числа y_0 и y'_0, например, *методом неопределенных коэффициентов*: подставляя ряды (9) и ряд (10) и его производные в уравнение (7), перемножая ряды и собирая подобные члены, приравниваем нулю коэффициенты при различных степенях $(x - x_0)$ в левой части полученного равенства. Заметим, что если в уравнении (7) функции $r(x)$ и $q(x)$ – многочлены от *x*, то ряд (10) сходится при всех конечных значениях *x*.

Для нахождения общего решения уравнения (7) $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные, достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x), y_2(x)$, т.е. фундаментальную систему решений y_1, y_2, нормированную в точке $x = x_0$, так что

$$\begin{cases} y_1 = 1, \ \ y'_1 = 0 \ \ \text{при} \ \ x = x_0, \\ y_2 = 0, \ \ y'_2 = 1 \ \ \text{при} \ \ x = x_0. \end{cases}$$

Если начальные условия вида $y(0) = A, \ \ y'(0) = B$, то, очевидно, частное решение задачи Коши будет

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

Пример. Найти общее решение линейного уравнения с переменными коэффициентами $y'' - xy' - 2y = 0$ в виде степенного ряда.

Р е ш е н и е. Будем строить фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x = 0$.

Сначала найдем первое частное решение $y_1(x)$ в виде ряда, полагая $y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0$:

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots,$$

$$y_1'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_kx^{k-1}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots,$$

$$y_1''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,c_kx^{k-2}=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\ldots.$$

Подставляя $y_1(x), y_1'(x)$ и $y_1''(x)$ в исходное уравнение, получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,c_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty} kc_kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k=0$$

Приводя подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях x_1 получаем соотношения, из которых находим коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \ldots$. Очевидно, что $c_0=1,\ c_1=0$.

Итак, имеем:

$$\begin{array}{l|ll}
x^0 & 2c_2-2c_0=0, & \text{отсюда}\quad c_2=1; \\
x^1 & 3\cdot2c_3-1c_1-2c_1=0, & \text{отсюда}\quad c_3=0; \\
x^2 & 4\cdot3c_4-2c_2-2c_2=0, & \text{отсюда}\quad c_4=\frac{1}{3}; \\
x^3 & 5\cdot4c_5-3c_3-2c_3=0, & \text{отсюда}\quad c_5=0; \\
x^4 & 6\cdot5c_6-4c_4-2c_4=0, & \text{отсюда}\quad c_6=\frac{1}{5}c_4=\frac{1}{3\cdot5}\ ;
\end{array}$$

…………………………………………………..
……………………………………………………...

Следовательно,

$$y_1(x)=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{15}x^6+\ldots. \qquad (11)$$

Аналогично находим второе частное решение $y_2(x)$ в виде ряда $y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty} A_kx^k=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$, полагая начальные условия для него: $y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1$. Тогда $A_0=0,\ A_1=1$. В этом случае решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений, так как они будут линейно независимыми по построению.

Подставляем $y_2(x), y_2'(x)$ и $y_2''(x)$ в исходное уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,A_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)\,A_kx^k=0,$$

находим коэффициенты $A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$

$$\begin{array}{l|ll}
x^0 & 2A_2=0; & A_2=0; \\
x^1 & 3\cdot2A_3-3A_1=0; & A_3=1/2; \\
x^2 & 4\cdot3A_4-4A_2=0; & A_4=0; \\
x^3 & 5\cdot4A_5-5A_3=0; & A_5=1/(2\cdot4); \\
x^4 & 6\cdot5A_6-6A_4=0; & A_6=0; \\
x^5 & 7\cdot6A_7-7A_5=0; & A_7=1/(2\cdot4\cdot6).
\end{array}$$

Очевидно, что $A_{2k}=0,\ A_{2k+1}=\dfrac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots(2k)},\ k=1,2,3,\ldots$.

Следовательно,

$$y_2(x)=x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot4}+\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\ldots=x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^k=x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}. \qquad (12)$$

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ задаются формулами (11) и (12) соответственно, A и B – произвольные постоянные, причем при $x = 0$: $y(0) = A$, $y'(0) = B$.

З а м е ч а н и е. Решение линейного неоднородного уравнения любого порядка, все коэффициенты и правая часть которого разлагаются в степенные ряды, также можно искать в виде ряда по степеням $(x - x_0)$.

4.4. Интегрирование линейных систем при помощи степенных рядов

Рассмотрим линейную однородную систему двух дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = r_{11}(x)y + r_{12}(x)z \\ \dfrac{dz}{dx} = r_{21}(x)y + r_{22}(x)z \end{cases}, \tag{13}$$

где коэффициенты $r_{ij}(x)\,(i,\ j = 1, 2)$ определены и непрерывны в интервале $(a,\ b)$. Доказано, что если коэффициенты системы (13) разлагаются в ряды по степеням *x*, сходящиеся в области $|x| < R$, то существует единственное решение

$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$, удовлетворяющее начальным условиям при $x = 0$,

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где начальные значения y_0 и z_0 можно задавать произвольно.

Это решение, согласно теореме Коши, разложимо в ряды по степеням *x*:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ z(x) &= z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \end{aligned}, \tag{15}$$

которые будут сходиться, по крайней мере, в той же области $|x| < R$, в которой сходятся ряды для коэффициентов системы (13).

Поэтому решение $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ данной системы (13), удовлетворяющее начальным условиям (14), можно искать в виде (15). Коэффициенты a_n и b_n $(n = 1, 2, 3\ldots)$ находим методом неопределенных коэффициентов.

Для нахождения общего решения системы (13)

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, обычно находят фундаментальную систему решений

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

нормированную в точке $x = 0$, т.е. два линейно независимых частных решения $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, которые удовлетворяют соответственно начальным условиям:

$$Y_1(0)=\begin{pmatrix} y_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Y_2(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ z_1^0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ при } x=0.$$

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y'=\dfrac{x}{1+x^2}y+\dfrac{1}{1+x^2}z \\ z'=-\dfrac{1}{1+x^2}y+\dfrac{x}{1+x^2}z \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Будем строить фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x=0$. Сначала найдем частное решение

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix}$$

с начальными данными

$$Y_0(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } y_1^0=1,\ z_1^0=0 \quad \text{при } x=0.$$

Это решение имеет вид:

$$y_1=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots, \quad (16)$$

$$z_1=0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^4=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots. \quad (17)$$

Находим

$$y_1'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots$$
$$z_1'=b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3+\ldots$$

и подставляем (16) и (17) в данную систему

$$\begin{cases} (1+x^2)y'=xy+z \\ (1+x^2)z'=-y+xz \end{cases}. \quad (18)$$

Получили

$$\begin{cases} (1+x^2)\cdot(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots)= \\ =x(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots, \\ (1+x^2)(b_1+2b_2x+3b_3x^2+\ldots)= \\ =-(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)+x(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots). \end{cases}$$

Методом неопределенных коэффициентов ищем a_n и b_n $(n=1,2,3,\ldots)$:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & a_1=0,\ b_1=-1 \\ x^1 & 2a_2=1+b_1;\ 2b_2=-a_1 \\ x^2 & a+3a_3=a_1+b_2;\ b_1+3b_3=-a_2+b_1 \\ x^3 & 2a_2+4a_4=a_2+b_3;\ 2b_2+4b_4=-a_3+b_2 \\ x^4 & 5a_5+3a_3=a_3+b_4;\ 5b_5+3b_3=-a_4+b_3 \end{array}\right\}$$

находим

$$\begin{aligned} &a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ldots,a_n=0,\ldots, \\ &b_1=-1,\ b_2=0,\ b_3=0,\ldots,b_n=0,\ldots. \end{aligned}$$

Следовательно, первое частное решение будет

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}, \text{ где } y_1=1;\ z_1=-x.$$

Аналогично находим второе частное решение

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$$

с начальными данными $Y_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $y_2^0 = 0,\ z_2^0 = 1$ при $x = 0$.

Это решение имеет вид

$$y_2 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$
$$z_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots .$$

Подставляя эти ряды в систему (18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } y_2 = x,\ z_2 = 1.$$

Таким образом, общее решение системы в векторной форме будет

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall\, c_1, c_2 - \text{const}, \text{ или}$$

в координатной форме $\begin{aligned} y(x) &= c_1 + c_2 x, \\ z(x) &= -c_1 x + c_2 \end{aligned}$.

5. ЗАДАЧИ НА ТРАЕКТОРИИ

5.1. Нахождение ортогональных траекторий семейства кривых. Примеры

Пусть дано семейство плоских кривых L

$$\Phi\,(x, y, a) = 0, \qquad (1)$$

зависящее от одного параметра a. Кривая L_1, пересекающая все кривые L данного семейства (1) под одним и тем же постоянным углом α, называется *изогональной траекторией* этого семейства.

Если угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то изогональная траектория называется *ортогональной*. Следовательно, ортогональные траектории – это кривые L_1, пересекающие кривые L данного семейства (1) под прямым углом. Ортогональные траектории семейства (1) удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению. Для нахождения ортогональных траекторий нужно:

а) составить дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$ заданного семейства (1);

б) исходя из условия ортогональности $(k_1 \cdot k_2 = -1$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = \operatorname{tg}\beta$, $\angle\alpha \perp \angle\beta)$ заменить в полученном уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$ ($y' = \operatorname{tg}\alpha$ – геометрический смысл производной, где α – угол, образованный касательной к кривой с положительным направлением оси Ox);

в) проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$. Общий интеграл этого уравнения $\Phi_1(x, y, C)$ дает семейство ортогональных траекторий.

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства эллипсов $x^2 + 2y^2 = a^2$. Изобразить семейства на одном рисунке.

Р е ш е н и е. Дифференцируя обе части данного уравнения, находим дифференциальное уравнение данного семейства кривых

$$x + 2yy' = 0.$$

Отсюда, заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $x-\frac{2y}{y'}=0$, или $y'=\frac{2y}{x}$. Интегрируя, будем иметь $y=Cx^2$ – семейство парабол (рис. 1).

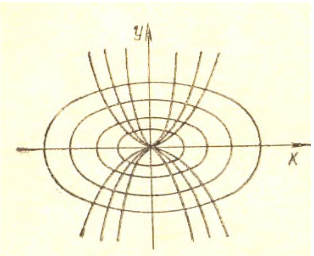


Рис. 1.

Если семейство плоских кривых задано уравнением в полярных координатах

$$\Phi(r,\varphi,a)=0 \qquad (2)$$

где a – параметр, то, дифференцируя по φ уравнение (2) и исключив параметр a, получаем дифференциальное уравнение данного семейства:

$$F(r,\varphi,r')=0$$

Заменяя в нем r' на $-\frac{r^2}{r'}$, получаем дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий.

$$F\left(r,\varphi,-\frac{r^2}{r'}\right)=0$$

Пример 2. Найти ортогональные траектории семейства лемнискат $r^2=a\cos 2\varphi$

Р е ш е н и е. Дифференцируем по φ: $rr'=-a\sin 2\varphi$ и, исключая параметр a из системы

$$\begin{cases} r^2=a\cos 2\varphi \\ rr'=-a\sin 2\varphi \end{cases},$$

получаем дифференциальное уравнение данного семейства кривых

$$r'=-r\,\mathrm{tg}\,2\varphi.$$

Заменяя r' на $-\frac{r^2}{r'}$, находим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $-\frac{r^2}{r'}=-r\,\mathrm{tg}\,2\varphi$,

откуда $\frac{dr}{r}=\mathrm{ctg}\,2\varphi\,d\varphi$.

Интегрируя, находим уравнение ортогональных траекторий $r^2=C\sin 2\varphi$, где C – произвольная постоянная.

Таким образом, ортогональными траекториями семейства лемнискат являются лемнискаты, ось симметрии которых образуют с полярной осью угол, равный $\pm 45^\circ$ (рис. 2).

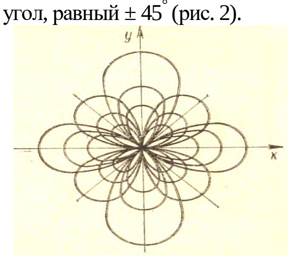


Рис. 2.

5.2. Нахождение ортогональных траекторий в прикладных задачах

С ортогональными траекториями приходится иметь дело во многих прикладных задачах.

Пусть имеем силовое поле, созданное силами $\overline{F}(x, y)$, имеющими потенциал $U = U(x, y)$, т.е. такую функцию, что проекции сил на оси координат равны соответствующим частным производным функции $U(x, y)$:

$$\overline{F}_x' = \frac{\partial U}{\partial x},\ \overline{F}_y' = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (3)$$

Линии семейства $U(x, y) = C$, где $\forall\, C \in R$, называются линиями уровня, т.е. линиями равного потенциала (эквипотенциальные линии). Линии, касательные к которым во всех точках совпадают с направлением силы в точке касания, называются *силовыми линиями*. Доказано, что силовые линии такого поля являются ортогональными траекториями семейства линий уровня.

Так, в случае электрического или магнитного поля эквипотенциальные линии (линии уровня) и силовые линии взаимно ортогональны (рис. 3). При рассмотрении плоского течения жидкости в векторном поле скоростей $\nu(x, y)$ ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий служат *силовые линии тока*.

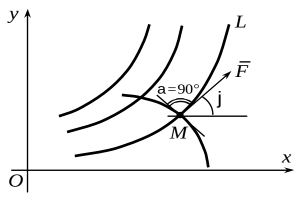


Рис. 3

Пусть φ – угол, образованный вектором $\overline{F}(x, y)$ с осью Ox. Тогда $\overline{F}_x = \left|\overline{F}\right|\cos\varphi$, $\overline{F}_y = \left|\overline{F}\right|\sin\varphi$ и на основании (3) имеем $\frac{\partial U}{\partial x} = \left|\overline{F}\right|\cos\varphi$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \left|\overline{F}\right|\sin\varphi$, отсюда угловой коэффициент касательной к силовой линии в точке $M(x, y)$

$$k_1 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_y'}{U_x'}.$$

Угловой коэффициент касательной к эквипотенциальной линии получим, дифференцируя по x уравнение $U(x, y) = C$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,\ \text{откуда}\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{U_x'}{U_y'} = k_2.$$

Получили условие ортогональности: угловой коэффициент k_2 касательной к линии уровня обратен по величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту k_1 касательной к силовой линии: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Задача 1. Найти силовые линии поля, создаваемого силами, имеющими потенциал $U = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. Дифференцируем по x уравнение семейства эквипотенциальных линий $x^2 + y^2 = C$. Находим его дифференциальное уравнение

$$2x + 2yy' = 0,\ \text{или}\ y' = -\frac{x}{y}\quad (y \neq 0).$$

Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получаем дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y},\ \text{или}\ y' = \frac{y}{x}\quad (x \neq 0).$$

Интегрируя $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+C$, находим ортогональные траектории $y=Cx\ \left(x\ne 0\right)$, $x=0\ \left(y\ne 0\right)$. Таким образом, силовыми линиями поля являются полупрямые:

$$\begin{cases} y=Cx & \text{при } x\ne 0,\\ x=0 & \text{при } y\ne 0\end{cases}\qquad \text{(см. рис. 4)}$$

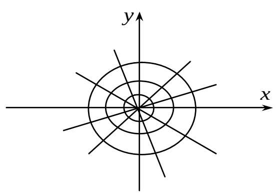


Рис. 4.

Задача 2. Найти уравнение семейства эквипотенциальных линий (т.е. линий равного потенциала), ортогональных силовым линиям электрического поля, создаваемого диполем.

Р е ш е н и е. Диполь – это два заряда $+q$ и $-q$, удаленные друг от друга на расстояние $2a$. Уравнения силовых линий диполя согласно закону Кулона имеют вид

$$\frac{x+a}{r_1}-\frac{x-a}{r_2}=C,$$

где

$r_1=\sqrt{\left(x+a\right)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{\left(x-a\right)^2+y^2}$ – расстояния текущей точки $M(x, y)$ от заряженных центров электрического поля.

Сначала составим дифференциальное уравнение данного семейства силовых линий. Для этого продифференцируем по x обе части данного уравнения силовых линий

$$\frac{r_1-(x-a)\frac{dr_1}{dx}}{r_1^2}-\frac{r_2-(x-a)\frac{dr_2}{dx}}{r_2^2}=0, \qquad (4)$$

где

$$\frac{dr_1}{dx}=\frac{x+a+yy'}{r_1},\quad \frac{dr_2}{dx}=\frac{x-a+yy'}{r_2} \qquad (5)$$

Подставляя $\frac{dr_1}{dx}$ и $\frac{dr_2}{dx}$ в уравнение (4), имеем

$$\frac{r_1^2-(x+a)^2-(x+a)yy'}{r_1^3}-\frac{r_2^2-(x-a)^2-(x-a)yy'}{r_2^3}=0,$$

или

$$\frac{y_1^2-(x+a)^2yy'}{r_1^3}-\frac{y^2-(x-a)^2yy'}{r_2^3}=0.$$

После несложных преобразований получаем дифференциальное уравнение силовых линий диполя

$$\left(\frac{x-a}{r_2^3}-\frac{x+a}{r_1^3}\right)y'-\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)y=0,\ \text{где } y'=\frac{dy}{dx}.$$

Заменяя в нем y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий (линий равного потенциала)

$$\left(\frac{x-a}{r_2^3}-\frac{x+a}{r_1^3}\right)\left(-\frac{1}{y'}\right)-\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)y=0$$

или

$$(x-a)r_1^3-(x+a)r_2^3+(r_1^3-r_2^3)yy'=0.$$

Поскольку из (5)

$$r_1dr_1=(x+a)dx+ydy,\quad r_2dr_2=(x-a)dx+ydy,$$

последнее уравнение запишем в виде

$$r_1^3=(x-a)dx-r_2^3(x+a)dx+(r_1^3-r_2^3)ydy=0,$$

или

$$r_1^3r_2dr_2=r_2^3r_1dr_1.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим уравнение ортогональных траекторий

$$\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}=C,$$

где C – произвольная постоянная.

Это уравнение выражает основное геометрическое свойство эквипотенциальных линий рассматриваемого поля: разность величин, обратных расстояниям текущей точки $M(x, y)$ от заряженных центров поля, созданного диполем, есть величина постоянная. Переходя к переменным x, y, получаем искомое уравнение семейства эквипотенциальных линий

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=C.$$

6. СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений находит свои применения в различных областях науки и техники.

Рассмотрим некоторые из этих областей применения, в том числе в электро/радиотехнике.

6.1. Расчет электрических цепей

Под электрической цепью понимается некий электроприбор, сконструированный из деталей (элементов), к числу важнейших из которых принадлежат *сопротивление, индуктивность* (самоиндукция) и *емкость* (конденсатор). Таким образом, электрической цепью называется конечная совокупность элементов, полюсы которых соединены в так называемые узлы цепи. Работа электроприбора при некоторой идеализации может быть математически описана системой дифференциальных уравнений, где неизвестными функциями времени являются величины сила токов $i(t)$, проходящих через различные детали прибора, или падения напряжения $U(t)$ между отдельными узлами прибора.

Для решения такого рода прикладных задач пользуются законами (первым и вторым) Кирхгофа, управляющих работой электрических цепей:

1. Для каждого узла цепи сумма всех притекающих токов равна сумме вытекающих токов.

2. Алгебраическая сумма напряжений источников тока, содержащихся в любом замкнутом контуре цепи, равна алгебраической сумме падений напряжений на всех остальных участках этого контура.

Падение напряжения на сопротивлении R равно

$$U_R=Ri$$

падение напряжения на самоиндукции L равно

$U_L=L\dfrac{di}{dt}$; падение напряжения на конденсаторе емкости C равно $U_C=\dfrac{q}{C}$, где $q=q(t)$ – заряд конденсатора в момент t; при этом

$$\frac{dq}{dt}=i,\quad \text{или}\quad q=\int_0^t i(t)\,dt\ .$$

Во всех трех случаях $i=i(t)$ – сила тока, протекающего через рассматриваемый участок цепи в данный момент *t*. Обычно интересует величина $i(t)$ при установившемся режиме цепи. *Установившимся режимом* называется такой, при котором сила тока постоянна или меняется *периодически*.

Задача 1. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение *V*, сопротивления *R*, конденсатора емкости *C* и выключателя, который включается при *t* = 0 (рис.1). Найти зависимость силы тока от времени $(t>0)$.

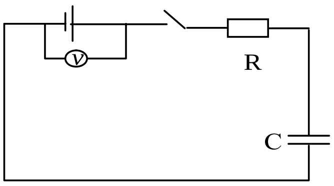


Рис. 1.

Р е ш е н и е. Сила тока $i(t)$ на любом участке цепи одна и та же (по закону о последовательном соединении). Согласно второму закону Кирхгофа напряжение V источника тока в цепи равна сумме падений напряжений на сопротивлении R и емкости C: $V=U_R+U_C$, где $U_R=Ri$, $U_C=\dfrac{q}{C}$, причем заряд конденсатора $q(t)$ связан с током в цепи соотношением

$$q=\int_0^t i(t)\,dt\ .$$

Следовательно, имеем уравнение

$$Ri+\frac{1}{C}q=V\ ,\ \text{или}\ Ri+\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(t)\,dt=V\ ,$$

которое после дифференцирования по *t* приводится к линейному однородному дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0\,,$$

где искомая функция $i(t)$ в начальный момент $t=0$ равна $i(0)=\dfrac{V}{R}$. Интегрируя уравнение, получаем решение (с учетом начального условия) $i(t)=\dfrac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$ – зависимость силы тока от времени (при *t* > 0).

Задача 2. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E=V\sin\omega t$, сопротивление *R* и самоиндукция *L*. Найти силу тока в цепи при установившемся режиме.

Р е ш е н и е. Согласно второму закону Кирхгофа имеем

$$U_R+U_L=V\sin\omega t\,,\ \text{или}\ L\frac{di}{dt}+Ri=V\sin\omega t\,. \tag{1}$$

Это – линейное неоднородное уравнение с постоянными *L*, *R* и правой частью специального вида $V\sin\omega t$. Для отыскания установившегося режима найдем периодическое решение этого уравнения. Исходя из вида правой части уравнения, решение ищем в виде

$$i_{чн}(t)=A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t\,, \tag{2}$$

где неопределенные коэффициенты A_1 и B_1 находятся подстановкой (2) в уравнение (1) и приравниванием коэффициентов при подобных членах, из системы двух алгебраических уравнений. Но так как в электротехнике важнее знать не коэффициенты A_1 и B_1, а амплитуду изменения силы тока, то, сделав замену в (2)

$$A_1 = -A\sin\varphi,$$

$$B_1 = A\cos\varphi,$$

имеем

$$\begin{aligned} i_{чн}(t) &= -A\sin\varphi\cos\omega t + A\cos\varphi\sin\omega t = \\ &= A(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) = A\sin(\omega t - \varphi), \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ – амплитуда колебаний,

ω – частота колебаний, φ – начальная фаза тока.

Подставим (3) в уравнение (1)

$$L A\omega\cos(\omega t - \varphi) + R A\sin(\omega t - \varphi) = V\sin\omega t.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ в выражении

$$\begin{aligned} &L A\omega\cos\omega t\cos\varphi + L A\omega\sin\omega t\sin\varphi + R A\sin\omega t\cos\varphi - \\ &- R A\cos\omega t\sin\varphi = V\sin\omega t: \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos\omega t & L A\omega\cos\varphi - RA\sin\varphi = 0 \\ \sin\omega t & L A\omega\sin\varphi + RA\cos\varphi = V \end{array}\right\}.$$

Получили систему двух уравнений для определения A, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и, значит φ.

Умножив сначала первое уравнение на $\cos\varphi$, второе – на $\sin\varphi$ и сложив почленно, получим $LA\omega = V\sin\varphi$, откуда

$$\sin\varphi = \frac{LA\omega}{V}.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $(-\sin\varphi)$, второе – на $\cos\varphi$ и сложив почленно, получаем $RA = V\cos\varphi$, откуда

$$\cos\varphi = \frac{RA}{V}.$$

Значит,

$$tg\varphi = \frac{L\omega}{R}, \text{ отсюда } \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

Коэффициент *A* находим из второго уравнения системы

$$A = \frac{V}{L\omega\sin\varphi + R\cos\varphi} = \frac{V^2}{\left(L^2\omega^2 + R^2\right)A}; \quad A^2 = \frac{V^2}{L^2\omega^2 + R^2};$$

отсюда

$$A = \frac{V}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}.$$

Ответ: сила тока в установившемся режиме

$$i_{чн}(t) = A\sin(\omega t - \varphi), \qquad (3)$$

где

$$A = \frac{V}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

Поясним, почему найденное периодическое решение называется *установившимся режимом*. Общее решение дифференциального уравнения (1) равно сумме найденного частного решения (3) и общего решения соответствующего линейного однородного уравнения

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0, \qquad (4)$$

т.е. $i_{он} = i_{оо} + i_{чн}$.

Так как общее решение однородного уравнения (4)

$$i_{оо} = ke^{-\frac{t}{RL}} \quad (k \text{ – произвольная постоянная})$$

стремится к нулю при $t \to +\infty$, то любое решение $i_{он}$ неоднородного уравнения (1) при $t \to +\infty$ неограниченно приближается (и при том весьма быстро) к найденному периодическому решению $i_{чн}$ (3). В этом случае говорят, что $i_{он}(t)$ описывает *переходный режим*.

6.2. Решение физических задач

В физических задачах надо, прежде всего, решить, какую из величин взять за независимое переменное, а какую – за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция $y(x)$, когда независимое переменное x получит приращение Δx, т.е. выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых сказано в задаче. Затем, разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию. Обычно в задачах даны условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения.

В некоторых задачах при составлении уравнения следует использовать физический смысл производной (скорость протекания неравномерного процесса) и применять также известные физические законы (Ньютона, Кирхгофа, теплопроводности Фурье и др.).

Задача 1. Метеорит, находящийся под влиянием земного притяжения, из состояния покоя начинает прямолинейно падать на Землю с высоты *h*. Какой была бы скорость метеорита при достижении им поверхности Земли, если бы отсутствовала земная атмосфера? Радиус Земли *R* =6377 км. На рис 2. обозначена высота падения метеорита

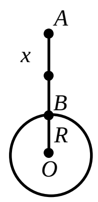


Рис. 2.

$AO = h$, где $AB = h - R$ – расстояние от точки *A* начала падения метеорита до поверхности Земли.

Р е ш е н и е. Обозначим через $x = x(t)$ – расстояние, пройденное метеоритом с начала падения за время *t*. Тогда $(h - x)$ – расстояние от метеорита до центра Земли в момент времени *t*. В момент *t* на метеорит действует сила $F = am$, где *m* – масса метеорита, ускорение *a* есть производная от его скорости $a = \frac{dv}{dt}$. На поверхности Земли на тело действует сила тяжести $P = mq$, где *q* – ускорение свободного падения на поверхности Земли, $q \approx 9{,}81$ м/с^2.

По закону Ньютона эти силы обратно пропорциональны квадратам расстояний падающего тела от центра Земли:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2}; \text{ т.е. } \frac{ma}{mq} = \frac{R^2}{(h-x)^2},$$

откуда $a = \dfrac{R^2 q}{(h-x)^2}$.

Следовательно, $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{R^2 q}{(h-x)^2}$. Учитывая равенство $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot v$, получим дифференциальное уравнение движения $v \cdot \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{R^2 q}{(h-x)^2}$. Интегрируя уравнение, получаем

общее решение $v^2 = \dfrac{2qR^2}{h-x} + C$, где $\forall C$ – const.

Движение начиналось из состояния покоя, т.е. при $t=0$ расстояние $x=0$ и скорость $v=0$. Подставляя начальное условие в решение $0=\dfrac{2qR^2}{h-0}+C$, находим значение $C=-\dfrac{2qR^2}{h}$.

Таким образом, получили формулу изменения скорости v метеорита в зависимости от пройденного расстояния x:

$$v^2=\frac{2qR^2x}{h(h-x)}.$$

На поверхности Земли при $x=h-R$ скорость метеорита будет равна $v=\sqrt{2qR\left(1-\dfrac{R}{h}\right)}$. Так как высота h по условию неограниченно велика, то, переходя к пределу при $h\to+\infty$, получим $v=\sqrt{2qR}$. Заметим, что при достижении поверхности Земли скорость метеорита $v=\sqrt{2\cdot 9,81\cdot 6377000}\approx 11,2$ км/с.

Задача 2. Вентиляция цеха. В помещении цеха вместимостью 10800 м^3 воздух содержит 0,12% углекислого газа CO_2. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% газа CO_2, в количестве x м^3 в минуту. Предполагается, что концентрация газа CO_2 во всех частях помещения в каждый момент одна и та же (смешивание чистого воздуха с загрязненным происходит немедленно). Определить, какова должна быть *мощность* x вентиляторов, чтобы по истечению 10 мин. содержание газа CO_2 не превышало 0,06%.

Р е ш е н и е. Обозначим через $y(t)$% содержание углекислого газа в воздухе в момент времени t минут. Проследим, как изменится процентное содержание газа CO_2 в воздухе $\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$ за промежуток от момента t до момента $t+\Delta t$. За время Δt вентиляторы доставят $x\cdot\Delta t$ м^3 воздуха, в котором содержится 0,04% газа CO_2, т.е. за время Δt добавится $\dfrac{x\cdot\Delta t\cdot 0,04}{100}$ м^3 газа CO_2. С другой стороны, за это же время Δt уйдет $x\cdot\Delta t$ м^3 воздуха, в котором содержится $\dfrac{x\cdot\Delta t\cdot y(t)}{100}$ м^3 газа CO_2. Итак, приращение процентного содержания газа CO_2 в воздухе цеха $\Delta y\cdot\dfrac{10800}{100}$ в м^3 равно разности найденных величин, т.е.

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{100}\cdot 10800=\frac{x\cdot\Delta t\cdot 0,04}{100}-\frac{x\cdot\Delta t\cdot y(t)}{100}.$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. В левой части получится производная $y'(t)$, а в правой получим $\dfrac{x(0,04-y(t))}{10800}$. Следовательно, имеем дифференциальное уравнение баланса углекислого газа

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x(0,04-y)}{10800},$$

интегрируя которое, найдем общее решение

$$y(t)=0,04+Ce^{-\frac{xt}{10800}}.$$

Из начального условия $y(0)=0,12$ найдем, что $C=0,08$.

Значит, $y(t)=0,04+Ce^{-\frac{xt}{10800}}$. Для определения мощности вентиляторов x воспользуемся условием $y(10)=0,06$. Имеем $0,06=0,04+0,08\,e^{-\frac{x}{1080}}$, откуда получаем, что мощность

$$x = 1080\ln 4\approx 1500 \text{ (м}^3\text{/мин.)}.$$

Задача 3. Ветер, проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости ветра в начале этого пути и его длине. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу

150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с; после прохождения в лесу пути, равного 1 м, скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

Р е ш е н и е. Обозначим через x расстояние, т.е. путь ветра. Пусть $v(x)$ – скорость ветра в зависимости от пройденного пути. Дано по условию $v(0)$ = 12, $v(1)$ = 11,8 и $v(x+\Delta x)-v(x)=-kv(x)\cdot\Delta x$ где коэффициент пропорциональности $k>0$ – приращение скорости Δv на малом пути Δx

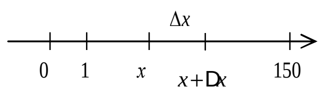


Рис. 3.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dv}{dx}=-kv$; отсюда $v(x)=Ce^{-kx}$ – общее решение.

Из начального условия находим C = 12, из дополнительного условия при $x=1: 11{,}8=12\,e^{-k}$, откуда

$$k\approx 0{,}02 \text{ и } v(x)=12e^{-0{,}02x}.$$

Значит, при x =150 м, $v=12\,e^{-0{,}02\cdot 150}\approx 0{,}6\,(\text{м/с})$.

6.3. Решение геометрических задач

Для решения задач с геометрическим содержанием надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y=y(x)$ и выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y и y'. Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$. В частности, при этом используется геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной).

Задача 1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,0)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат , равен полярному радиусу точки касания.

Р е ш е н и е. Сделаем чертеж (рис.4).

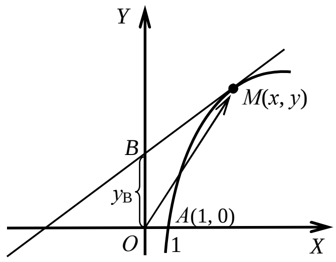


Рис.4.

Обозначим искомую кривую через $y(x)$. По условию отрезок OB=OM, где $OB=y_B$, $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ – полярный радиус точки касания $M(x,y)$, точка $B(0,y_B)$ – точка пересечения с осью OY касательной

$$Y-y=y'(X-x)$$

к искомой кривой; X, $У$ – текущие координаты.

Следовательно, с одной стороны,

$$y_B=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (*)$$

С другой стороны, координаты т. $B(0,y_B)$ удовлетворяют уравнению касательной: $y_B-y=y'(0-x)$, откуда

$$y_B=y-xy' \qquad (**)$$

Приравняв (*) и (**), имеем дифференциальное уравнение

$$y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

$$y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2},$$

или

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Это однородное уравнение 1-го порядка, которое заменой $y = zx$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$-\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем решение $-\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \ln|Cx|$, или, возвращаясь к старой переменной, получаем общий интеграл $C\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = 1, \quad C - \forall\ const$.

Так как искомая кривая должна проходить через точку $A(1,0)$, т.е. $y|_{x=1} = 0$, то, подставляя начальные данные в общий интеграл, находим C=1. Искомая кривая определится уравнением $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, или $x^2 + y^2 = (1 - y)^2$, откуда окончательно получаем ответ: $x^2 = 1 - 2y$.

Задача 2 (о погоне). Цель *A* движется с постоянной скоростью *v* вдоль некоторой прямой. Преследователь *M* движется также с постоянной скоростью *u*, описывая некоторую криволинейную траекторию. Скорость преследователя в каждый момент времени направлена в точку, в которой в данный момент находится цель. *В* начальный момент $t = 0$ преследователь находится в точке *P*, а цель – в точке *O*. Обе точки лежат на одном перпендикуляре к прямой, по которой движется цель. Расстояние $OP = a$. Найти траекторию движения преследователя.

Р е ш е н и е. Расположим оси координат так, как показано на рис. 5.

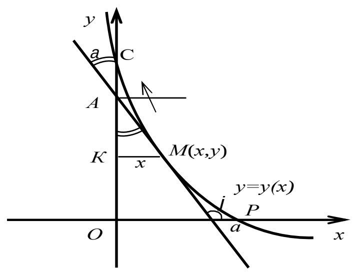


Рис. 5.

В начальный момент $t = 0$ преследуемый находился в точке $O(0,0)$, а преследователь – в точке $P(x_P, 0)$, где $x_P = a$ по условию. В некоторый момент времени *t* преследуемый находится в точке $A(0, y_A)$, преследователь – в точке $M(x, y)$. По условию задачи путь преследуемого $OA = y_A = v \cdot t$. Так как прямая *MA* – касательная к кривой *PMC* в точке касания $M(x, y)$, то

$$y'_x = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ где } \angle\alpha = \angle KAM.$$

Из треугольника KMA находим $AK = KM \cdot \operatorname{ctg}\alpha$,

где $KM = x$, $AK = AO - OK = vt - y$.

Поэтому $vt - y = -xy'_x$, или $t = \frac{y - xy'_x}{v}$. (5)

Дифференцируя (5), находим

$$dt = \frac{y' - y' - xy''}{v}dx, \text{ или } dt = -\frac{xy''}{v}dx. \qquad (6)$$

Так как преследователь движется со скоростью u по кривой PMC, то, обозначая дифференциал дуги кривой PMC через ds, имеем $\frac{ds}{dt}=u$, или $dt=\frac{1}{u}ds$. Но дифференциал дуги $ds=-\sqrt{1+y'^2}dx$ $\quad (ds>0,\ dx<0)$.

Следовательно,

$$dt=-\frac{1}{u}\sqrt{1+y'^2}dx. \qquad (7)$$

Сопоставляя равенства (6) и (7), приходим к дифференциальному уравнению «кривой погони».

$$\frac{xy''}{v}=\frac{1}{u}\sqrt{1+y'^2}. \qquad (8)$$

Полученное уравнение – нелинейное 2-го порядка, в которое явно не входит y. Понизим порядок уравнения, обозначив $y'=p$, где p – параметр. Тогда $y''=p'$. Подставляя в уравнение (8), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{n}x\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{1}{u}\sqrt{1+p^2}.$$

Интегрируя

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{v}{u}\cdot\frac{dx}{x}, \quad \text{имеем} \quad \ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|=\frac{v}{u}\ln|x|+|c_1|,$$

или $\operatorname{arsh}p=\ln\left|c_1x^{\frac{v}{u}}\right|$ (с учетом формулы $\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|=\operatorname{arsh}p$),

откуда $y'=\operatorname{sh}\left(\ln\left|c_1x^{\frac{v}{u}}\right|\right)$, или $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\ln\left|c_1x^{\frac{v}{u}}\right|}-e^{-\ln\left|c_1x^{\frac{v}{u}}\right|}\right)$, или $y'=\frac{1}{2}\left(c_1x^{\frac{v}{u}}-\frac{1}{c_1}\cdot x^{-\frac{v}{u}}\right)$. В результате интегрирования этого уравнения получили общее решение уравнения (8)

$$y=\frac{1}{2}\left(c_1\frac{x^{\frac{v}{u}+1}}{\frac{v}{u}+1}-\frac{1}{c_1}\cdot\frac{x^{1-\frac{v}{u}}}{1-\frac{v}{u}}\right)+c_2, \text{ или}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{c_1u}{u+v}x^{1+\frac{v}{u}}-\frac{u}{c_1(u-v)}x^{1-\frac{v}{u}}\right)+c_2,\ \forall\ c_1,c_2 - \text{const}. \qquad (9)$$

Подставив значения c_1,c_2, найденные при начальных условиях $y|_{x=a}=0$, $y'|_{x=a}=0$: $c_1=a^{-\frac{v}{u}}$, $c_2=-\frac{vua}{\left(u^2-v^2\right)}$ в общее решение (9), получим кривую–траекторию движения преследователя.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ЛЯПУНОВУ

Во многих задачах механики и техники бывает важно знать не конкретные значения решения дифференциальных уравнений и систем при данном конкретном значении аргумента, а *характер поведения решения при изменении аргумента*, и, в частности, *при неограниченном возрастании аргумента*. Бывает важно знать, например, являются ли решения периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции и т.д. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений. Одним из основных вопросов этой теории является вопрос об устойчивости решения или об устойчивости движения, который был подробно исследован выдающимся русским математиком и механиком А.М. Ляпуновым (1857–1918). Ляпунов создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Устойчивость определялась Ляпуновым по отношению к возмущениям начальных данных движения.

7.1. Понятие устойчивости решения

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями $x_i(t_0) = x_{i0}\ \ (i = 1,\ 2)$, где $f_i(t, x_1, x_2)$ – непрерывны вместе с частными производными $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}$ при $t \in (t_0, +\infty)$. Начальные условия обычно являются результатами измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью. Естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение, определяемое выбранными нами неточными начальными данными, обычно не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление.

Возникает важный для приложения вопрос о нахождении условий, при которых достаточно малое изменение начальных значений вызывает сколь угодно малое изменение решения.

Систему (1), записанную в координатной форме, удобно представить в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \tag{2}$$

если обозначить через вектор–функции известное решение $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, производную $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$ и

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Определение. Решение $\mathbf{x} = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ системы (2) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $\mathbf{x} = \psi(t)$ той же системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенству

$$|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \tag{3}$$

будет выполняться неравенство

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

при всех значениях $t \ge t_0$, т.е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \in (t_0, +\infty)$.

Если же для некоторого числа $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$ не существует, то решение $\varphi(t)$ называется *неустойчивым*.

Определение. Решение $\varphi(t)$ системы (2) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi(t)$ при $t \to \infty$, т.е. если из неравенства (3) следует предельное равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left|\psi(t)-\varphi(t)\right|=0.$$

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора t_0.

Пример. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=-a^2x,\ a\neq 0$, определяемое начальным условием $x(t_0)=x_0$.

Р е ш е н и е. Интегрируя уравнение, получаем частное решение задачи Коши $\varphi(t)=x_0e^{-a^2(t-t_0)}$. Зададим $\forall\ \varepsilon>0$. Пусть $x(t)=\overline{x}_0e^{-a^2(t-t_0)}$ – любое другое решение уравнения, подчиненное начальному условию $x(t)=\overline{x}_0$, где $\overline{x}_0\neq x_0$, но мало отличается от него. Рассмотрим модуль разности решений при $t\geq t_0$

$$\left|x(t)-\varphi(t)\right|=\left|\overline{x}_0e^{-a^2(t-t_0)}-x_0e^{-a^2(t-t_0)}\right|=e^{-a^2(t-t_0)}\cdot\left|\overline{x}_0-x_0\right|<\varepsilon,$$

если $\left|\overline{x}_0-x_0\right|<\delta$, где в качестве δ взять число $\delta=\varepsilon e^{-a^2t_0}$.

Более того, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|x(t)-\varphi(t)\right|=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-a^2(t-t_0)}\cdot\left|\overline{x}_0-x_0\right|=0$.

Следовательно, решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво.

З а м е ч а н и е. Вопрос об устойчивости решения $\mathbf{x}=\varphi(t)$ системы (2) может быть сведен к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения $y(t)\equiv 0$ другой системы, полученной из (2) с помощью линейной замены

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\boldsymbol{\varphi}(t). \qquad (*)$$

Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что на устойчивость исследуется *тривиальное решение* или, что одно и то же, расположенная в начале координат *точка покоя* системы уравнений.

Сформулируем условие устойчивости в применении к точке покоя $\mathbf{y}\equiv 0$ системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\Phi(t,\mathbf{y}),\quad \text{где}\ \ \Phi(t,\mathbf{y})=-\frac{d\varphi}{dt}+f(t,\mathbf{y}+\varphi(t))$$

в силу зависимости (*).

Точка покоя $\mathbf{y}\equiv 0$ этой системы устойчива, если для $\forall\ \varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства

$$\left|\mathbf{y}(t_0)\right|<\delta$$

следует

$$\left|\mathbf{y}(t)\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad t\geq t_0.$$

Геометрически устойчивость точки покоя интерпретируется так: траектория, начальная точка которой находится в – δ - окрестности начала координат, при $t\geq T\geq t_0$ не выходит за пределы ε–окрестности начала координат.

7.2. Исследование на устойчивость по первому приближению. Критерий Рауса-Гурвица. Задачи

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n),\quad i=1,2,\dots,n, \qquad (4)$$

или, в векторной форме записи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=f(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n). \qquad (4')$$

Пусть все f_i – непрерывно дифференцируемы в окрестности начала координат функции и f_i (t, 0,0,...,0) $\equiv 0$. Тогда $x_i(t) \equiv 0$ – решение системы (4), т.е. *точка покоя* $x_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$ системы (4).

Чтобы исследовать нулевое решение системы на устойчивость, надо выделить из функций f_i *линейную часть* вблизи точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, например, по формуле Тейлора, т.е. представить систему (4) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (5)$$

где R_i – бесконечно малые выше первого порядка относительно

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Систему (5) запишем в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}), \qquad (5')$$

и тогда вместо точки покоя системы (4') можно исследовать на устойчивость ту же точку покоя *линейной системы*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \text{ с матрицей } A(t) = (a_{ij}(t)). \qquad (6)$$

Система (6) называется *системой уравнений первого приближения* для системы (4'). В этом и состоит метод исследования на устойчивость системы (4) по первому приближению. Наиболее прост этот метод, когда *коэффициенты* $a_{ij}(t)$ *постоянные* в (6), т.е. имеем в качестве системы первого приближения линейную однородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, ..., n. \qquad (7)$$

Тогда система (5) называется *стационарной в первом приближении*, если коэффициенты a_{ij} – постоянные.

Имеет место следующая теорема.

Теорема Ляпунова. Пусть система уравнений (5)

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ...a_{in}x_n + R_i(t, x_1, ..., x_n), \quad i = 1, ..., n, \qquad (8)$$

где a_{ij} – постоянные, все члены R_i ограничены по *t*, разлагаются в ряды по степеням $x_1, x_2, ..., x_n$ в некоторой области $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$, причем начинаются членами не ниже второго порядка. Тогда, если все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

имеют *отрицательные действительные части*, то нулевые решения $x_i(t) \equiv 0$ системы (8) и системы (7) асимптотически устойчивы. Если же хотя бы один из корней характеристического уравнения (9) имеет положительную действительную часть, то нулевые решения системы (8) и системы (7) неустойчивы.

З а м е ч а н и е. Если действительные части всех корней характеристического уравнения (9) неположительны $(\mathrm{Re}\,\lambda_i \le 0)$, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно. В этом случае начинают влиять нелинейные члены R_i.

Пример 1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin t \\ \dot{y} = x + y - y^3 \end{cases}. \qquad (*)$$

Р е ш е н и е. Нелинейные члены удовлетворяют условиям теоремы. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Так как $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 1 > 0$, то в силу теоремы нулевое решение систем (*) и (**) неустойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Разлагая по формуле Тейлора

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \ldots, \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots, \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \ldots,$$

представляем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + R_1, \qquad R_1 = -\dfrac{8}{3!}y^3 + \ldots, \\ \dot{y} = -x - 3y + R_2, \quad R_2 = 2 - 1 - \dfrac{x^2}{2} - \ldots - 1 + \dfrac{y^2}{2!} - \ldots, \end{cases}$$

где R_1, R_2 удовлетворяют условиям теоремы.

Имеем систему первого приближения $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda + 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

имеет корни с отрицательными действительными частями $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} < 0$.

Следовательно, точка (0,0) обоих систем асимптотически устойчива.

Приведем еще теоремы об устойчивости *линейных систем* дифференциальных уравнений, полезных в приложениях.

Теорема 1. Если устойчиво какое-то решение линейной неоднородной системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + f(t), \qquad (10)$$

хотя бы при одной функции $f(t)$, то устойчиво тривиальное решение соответствующей линейной однородной системы (6) и, наоборот, если устойчиво решение $x(t) \equiv 0$ системы (6), то устойчиво любое решение системы (10) при любой функции $f(t)$.

Заметим, что если $f(t) \equiv 0$, то теорема 1 звучит так:

Из устойчивости какого-то решения системы(6) следует устойчивость нулевого решения системы (6). Значит, у линейной системы или все решения устойчивы или все неустойчивы.

Теорема 2. Нулевое решение системы (6) устойчиво тогда только тогда, когда все ее решения ограничены.

Теорема 3. (спектральный признак устойчивости). Пусть имеем систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (7')$$

где A – постоянная матрица.

Для того чтобы система (7') была устойчива по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех собственных значений матрицы A были неположительны $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$, $i=1,\dots,n$, причем собственным значениям, лежащим на мнимой оси ($\operatorname{Re}\lambda_j = 0$), должны отвечать столько собственных векторов, какова их кратность.

Напомним, что собственные значения матрицы A являются корнями характеристического уравнения (9).

Критерий Рауса-Гурвица

Известно, что нулевое решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{11}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – const, асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{12}$$

имеют отрицательные действительные части $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i=1,\dots,n$. Поэтому большое практическое значение приобретают признаки *отрицательности действительных частей всех корней* алгебраического уравнения (12) с действительными коэффициентами a_i, $i=0,1,\dots,n$, чтобы, не решая самого уравнения (12), установить, будут ли все его корни иметь $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$.

Необходимое (но не достаточное) условие для того, чтобы все корни уравнения (12) были расположены слева от мнимой оси, является *положительность всех коэффициентов* $a_i > 0$ уравнения (12).

Приведем следующую теорему.

Критерий Рауса-Гурвица. Для того чтобы все корни уравнения (12) имели отрицательные действительные части,

необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Матрица Гурвица составляется так. По главной диагонали стоят коэффициенты многочлена (12), начиная с a_1 до a_n. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, включая в число последних a_0. Все недостающие элементы, т.е. коэффициенты с индексами большими n или меньшими 0, заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix};\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix};\ \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условия Гурвица выглядят так

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Заметим, так как $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$, то условие $\Delta_n > 0$ можно заменить требованием $a_n > 0$.

Применим теорему к многочленам 2-ой и 3-ей степени (пусть $a_0 = 1$):

1. $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$: $\quad \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Leftrightarrow a_1 > 0, a_2 > 0, (i = 1, 2)$.
2. $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$: $\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Leftrightarrow a_1 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0$.

Пример. При каких значениях параметра α нулевое решение $x = 0, y = 0, z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = -3x \\ \dot{z} = \alpha x + 2y - z \end{cases}$$

асимптотически устойчиво?

Р е ш е н и е. Имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ \alpha & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 + \lambda^2 - \alpha\lambda + 6 = 0.$$

Обозначим (для удобства) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -\alpha, a_3 = 6$. Тогда матрица Гурвица примет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица, если положительны

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -\alpha \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \Delta_2,$$ то будут все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, (i = 1, 2, 3)$. Значит, нулевое решение системы асимптотически устойчиво при условии: $-\alpha - 6 > 0$, т.е. при $\alpha < -6$.

Задача 1. Выяснить условия устойчивости установившихся режимов вольтовой дуги в цепи с сопротивлением, самоиндукцией и зашунтированной емкостью.

Р е ш е н и е. Пользуясь законами Кирхгофа, получаем следующие дифференциальные уравнения процессов, протекающих по схеме (рис.1.).

$$L\frac{di}{dt} = u - \psi(i), \qquad C\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i. \qquad (13)$$

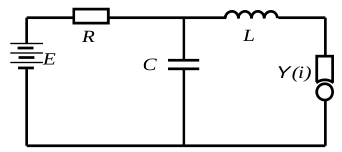


Рис.1.

В этих уравнениях L – самоиндукция, C – емкость конденсатора, R – омическое сопротивление, E – электродвижущая сила источника постоянного тока, $V = \psi(i)$ – напряжение на дуге. Положив в (13) $i = I$ - const, $u = U$ - const, получим уравнения для определения тока I и напряжения U, отвечающих установившимся режимам

$$U - \psi(I) = 0, \quad E - U - RI = 0. \qquad (14)$$

Обозначим $i = I + x$, $\quad u = U + y$, где x, y – некоторые возмущения движения, тогда система уравнений (13) перепишется следующим образом

$$\begin{cases} L\dfrac{dx}{dt}=U+y-\psi(I+x)\\[2mm] C\dfrac{dy}{dt}=(E-U-y)\cdot\dfrac{1}{R}-I-x\end{cases}. \qquad (15)$$

Разложив функцию $\psi(I+x)$ в ряд по степеням x

$$\psi(I+x)=\psi(I)+\psi'(I)x+\ldots$$

и подставив полученное выражение в уравнения (15), найдем

$$\begin{cases} L\dfrac{dx}{dt}=U+y-\psi(I)-\psi'(I)x+\ldots\\[2mm] C\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{E-U}{R}-\dfrac{1}{R}y-I-x\end{cases}.$$

Учитывая, что постоянные значения постоянного тока I и напряжения U в установившемся режиме должны удовлетворять равенствам (14), найдем дифференциальные *уравнения первого приближения* возмущенного движения

$$\begin{cases} L\dfrac{dx}{dt}=y-\psi'(I)x\\[2mm] C\dfrac{dy}{dt}=-x-\dfrac{1}{R}y\end{cases}, \text{ где } A=\begin{pmatrix} -\dfrac{\psi'(I)}{L} & \dfrac{1}{L}\\[2mm] -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR}\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение найденной системы

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\psi'(I)}{L}-\lambda & \dfrac{1}{L}\\[2mm] -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR}-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или

$$CL\lambda^2+\left(\frac{L}{R}+C\psi'(I)\right)\lambda+\frac{\psi'(I)}{R}+1=0$$

будет иметь корни с отрицательной действительной частью (т.е. иметь корни в левой полуплоскости комплексной плоскости), если, согласно критерию Рауса-Гурвица, все его коэффициенты строго положительны. Следовательно, в рассматриваемом случае будем иметь следующие условия асимптотической устойчивости установившегося режима относительно силы тока I и напряжения U:

$$\frac{L}{R}+C\psi'(I)>0,\quad \frac{\psi'(I)}{R}+1>0.$$

Если хотя бы одно из этих неравенств имеет противоположный смысл, то установившийся режим неустойчив.

Задача 2. Найти условия устойчивости равновесного состояния лампового генератора, математическая модель которого имеет следующий вид:

$$C\frac{dU}{dt}=-i,\; L\frac{di}{dt}=U-\frac{1}{C}(RC-MS(U))i.$$

Здесь C, L, R – емкость, индуктивность, сопротивление в рассматриваемой цепи, $S(U)$ – крутизна характеристики анодного тока лампы, M – характеристика обратной связи.

Р е ш е н и е. Используя разложение по степеням U

$$S(U)=S(0)+S'(0)U+\ldots,$$

запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} C\dfrac{dU}{dt}=-i\\[2mm] L\dfrac{di}{dt}=U-\dfrac{1}{C}\big(RC-MS(0)\big)i\end{cases}, \text{ где } A=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C}\\[2mm] \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{CL}\big(RC-MS(0)\big)\end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{CL}\left(RC - MS(0)\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$CL\lambda^2 + (RC - MS(0))\lambda + 1 = 0.$$

Используя теоремы об устойчивости по первому приближению, а также критерий Рауса-Гурвица, получим следующее условие асимптотической устойчивости равновесного состояния лампового генератора

$$RC - MS(0) > 0.$$

7.3. Фазовая плоскость и траектории движения

Если дифференциальные уравнения системы (1) описывают движение, где аргумент t есть время и при этом уравнения *не содержат явно* t, т.е имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \qquad (16)$$

то такая система называется *автономной*.

Определение. *Точкой покоя* системы (16) или *особой точкой* уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \qquad (17)$$

где функции $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}.$$

В силу теоремы существования и единственности задачи Коши для $\forall\, t_0 \in R$ и любой точки $(x_0, y_0) \in D$, (D – некоторое открытое множество плоскости xOy) существует единственное *решение* автономной системы (16), определяющее кривую на плоскости xOy. Эту кривую с заданным на ней параметром t называют *траекторией движения*. Саму координатную плоскость называют *фазовой плоскостью*. Интегральные кривые уравнения (17) совпадают с траекториями движения системы (16). Заметим, что точка покоя системы не принадлежит к области D существования и единственности решения, поэтому и является особой точкой уравнения (17).

Автономная система (16) в заданный момент t определяет на плоскости xOy поле скоростей; т.к. функции $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ не зависят явно от t, то поле скоростей стационарно, т.е. не изменяется с течением времени, и движение будет установившимся.

Пример. Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

имеет следующее семейство решений

$$\begin{cases} x = c_1 \cos(t - c_2) \\ y = -c_1 \sin(t - c_2) \end{cases}, \text{ где } c_1, c_2 - \forall \text{ const}.$$

Рассматривая t как параметр, исключим t; в результате получим на фазовой плоскости траектории. Это будет семейство окружностей $x^2 + y^2 = c_1^2$, которое не зависит от c_2.

При фиксированном c_1 все движения совершаются по одной и той же траектории. При $c_1 = 0$ фазовая траектория состоит из одной точки, называемой в этом случае *точкой покоя* системы.

В теории колебаний часто рассматривают уравнение

$$\ddot{x} = f\left(x, \dot{x}\right), \qquad (18)$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Для построения траекторий на фазовой плоскости надо от этого уравнения (18) перейти к системе. Обозначим $\dot{x} = v$. Тогда получим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = f(x,v) \end{cases},$$

которая исследуется также, как система (16).

Фазовой плоскостью для этой системы будет плоскость (x, v), на которой траектории дают геометрическое изображение зависимости скорости $v = v(x)$ от переменной x и наглядно качественно характеризуют изменение x и v. Если точка $x = 0$, $v = 0$ является *особой*, то эта точка (0,0) определяет *положение равновесия*. Эти особые точки бывают разных типов.

Так, например, если траектории на фазовой плоскости есть замкнутые линии, окружающие особую точку (0,0), то движения, определяемые уравнением (18), – не затухающие колебания (здесь точка (0,0) – центр).

Если особая точка есть фокус (при этом $|x| \to 0, |v| \to 0$ при $t \to +\infty$), то движение, описываемое (18), – затухающие колебания.

Если особая точка узел или седло, при этом $|x| \to \pm\infty$ при $t \to +\infty$, то движущаяся материальная точка уходит в бесконечность.

Отметим, что переменная x не обязательно механическое перемещение точки. Она может иметь различный физический

смысл, например, обозначать величину, характеризующую электрические колебания.

7.4. Простейшие типы точек покоя. Примеры

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (19)$$

с постоянными действительными коэффициентами $a_{ij}, \left(i, j = 1, 2\right)$, или, в векторной форме записи

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ – вектор - функции,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – постоянная матрица коэффициентов, у которой $\det A \neq 0$ (невырожденный случай). В этом случае точка покоя $x = 0$, $y = 0$ будет единственным положением равновесия системы. Исследуем расположение траекторий системы в окрестности этой точки (0,0).

Ищем решения в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}e^{\lambda t},$$

где $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \neq 0$ – ненулевой собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному *значению* λ, которое является корнем *характеристического уравнения*

$$\det\left(A-\lambda E\right)=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (20)$$

Устойчивость или неустойчивость линейной системы (19) определяется характером корней λ_1, λ_2 уравнения (20).

Если оба корня характеристического уравнения (20) *имеют отрицательную действительную часть* $\left(\operatorname{Re}\lambda_1<0, \operatorname{Re}\lambda_2<0\right)$, *то точка покоя асимптотически устойчива.*

Если же хотя бы один из корней уравнения (20) *имеет положительную действительную часть, то точка покоя неустойчива.*

Напомним, что координаты собственного вектора $\mathbf{h}\neq 0$ находятся с точностью до постоянного множителя из системы уравнений $(A-\lambda E)\mathbf{h}=0, i=1,2$. Это следует из *определения собственного вектора* **h,** отвечающего собственному значению λ: $A\mathbf{h}=\lambda\mathbf{h}$, или $\left(A-\lambda E\right)\mathbf{h}=0,$

где E – единичная матрица; для каждого корня $\lambda=\lambda_i$ имеем

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2=0 \end{cases} \quad \left(i=1,2\right).$$

Решая, находим координаты x_1, x_2 вектора **h** для каждого из корней характеристического уравнения (20).

Таким образом, для исследования точки покоя $x = 0$, $y = 0$ системы (19), или особой точки уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{21}x+a_{22}y}{a_{11}x+a_{12}y} \quad \left(\text{или} \quad \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}=\frac{a_{11}x+a_{12}y}{a_{21}x+a_{22}y}\right), \qquad (21)$$

надо найти корни характеристического уравнения (20).

Рассмотрим возможные случаи при решении характеристического уравнения (20).

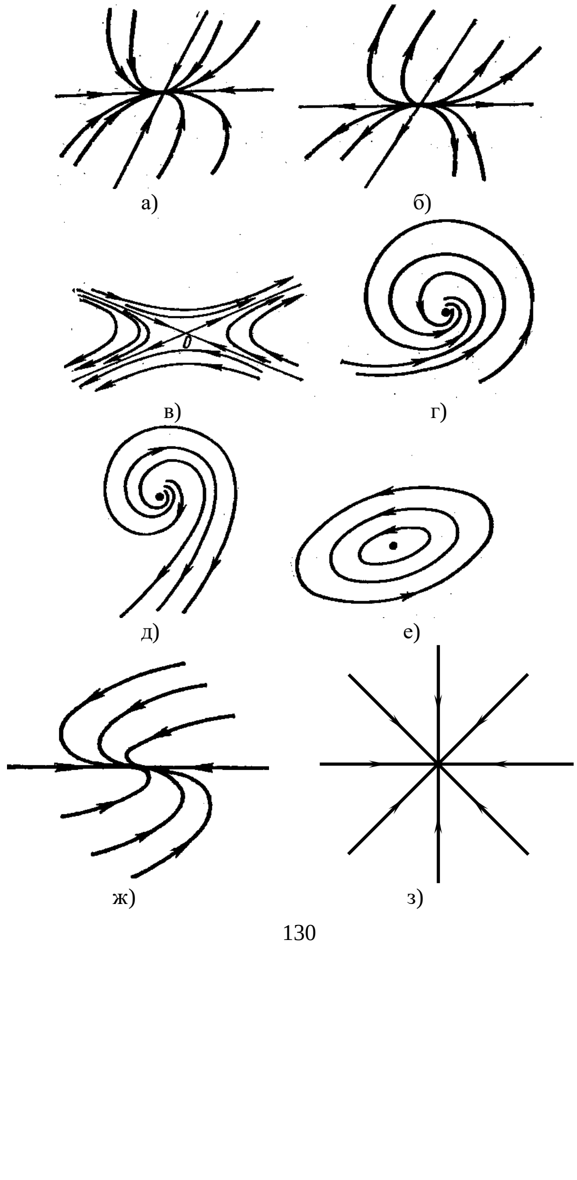
1. Если корни характеристического уравнения действительные, различные и одного знака, то точка покоя – *узел*, причем асимптотически устойчива при $\lambda_1<0, \lambda_2<0$ (рис. 2а), и неустойчива при $\lambda_1>0, \lambda_2>0$ (рис. 2б).

2. Если корни характеристического уравнения действительные, различные и разных знаков, $(\lambda_1<0, \lambda_2>0)$, то точка покоя – *седло* (рис. 2в), неустойчивая.

3. Если корни характеристического уравнения комплексные $\lambda_{1,2}=p\pm iq$ с действительной частью $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=p$, отличной от нуля, то точка покоя – *фокус*, причем асимптотически устойчива при $p<0$, $q\neq 0$ (рис.2 г) и неустойчива при $p>0$, $q\neq 0$ (рис. 2 д).

4. Если корни характеристического уравнения чисто мнимые $\lambda_{1,2}=\pm iq$, $(p=0)$, то точка покоя – *центр* (рис.2 е), устойчивая. Нет асимптотической устойчивости.

5. Если корни характеристического уравнения кратные ненулевые (т.е. $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$), то точка покоя может быть *вырожденным узлом*, асимптотически устойчива при $\lambda_1=\lambda_2<0$ (рис. 2 ж), и неустойчива при $\lambda_1=\lambda_2>0$ (рис. 2 и), или *дикритическим узлом* (рис.2 з и рис.2 к) только в единственном случае, когда система вида $\frac{dx}{dt}=ax, \frac{dy}{dt}=ay$ (или уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$).



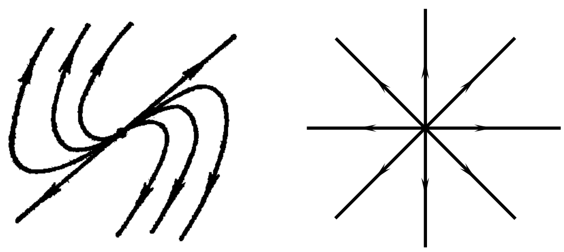


Рис.2.

В вырожденном случае, когда $\det A = 0$, характеристическое уравнение (20) имеет один нулевой корень или два нулевых корня. Дробь в правой части дифференциального уравнения (21) сокращается. Уравнение принимает вид $\frac{dy}{dx} = k$, и решения на плоскости xOy изображаются параллельными прямыми; все точки линии $a_{11}x + a_{12}y = 0$ – особые.

Пример 1. Исследовать на устойчивость решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

Изобразить траектории решений и направление движения по этим траекториям.

Р е ш е н и е. Матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ имеет $\det A = 0$. Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4 < 0.$$

Значит, решение устойчиво. Дифференциальное уравнение на фазовой плоскости будет

$$\frac{dx}{dy} = -2.$$

Интегрируя, получаем общее решение $y = -\frac{x}{2} + c$ – семейство параллельных прямых; все точки прямой $x - 2y = 0$ – особые (рис.3)

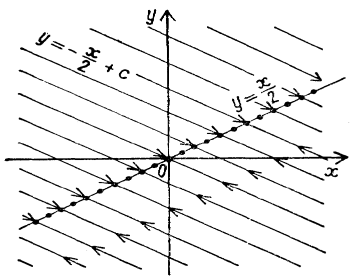


Рис. 3.

Следовательно, траектории решений данной системы представляют собой лучи, полученные из прямых

$$y = -\frac{x}{2} + c$$

и множество точек прямой

$$y = \frac{x}{2}.$$

Пример 2. Исследовать на устойчивость решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = 0.$$

Рассмотреть поведение фазовых траекторий.

Р е ш е н и е. Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 = 0, \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Решения находим непосредственно, решая систему

$$y = c_1, \quad x = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 - \forall \text{ const}.$$

Очевидно, что $x \to \infty$ при $t \to +\infty$. Решение неустойчиво. Дифференциальное уравнение на фазовой плоскости $\frac{dy}{dx} = 0$. Траектории $y = c_1$ – прямые, параллельные оси абсцисс (рис.4.)

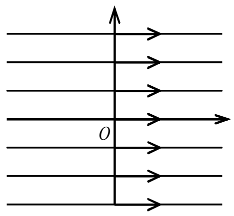


Рис. 4.

З а м е ч а н и е. Чтобы начертить интегральные кривые уравнения (21) на плоскости *xOy*, т.е. траектории системы (19), в случае *узла, седла, и вырожденного узла* надо прежде всего найти решения, которые лежат на прямых, проходящих через особую точку (0,0). Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы *A*. В случае *узла* кривые касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине значению λ.

Другой способ построения интегральных кривых уравнения (21). Искомые прямые, проходящие через особую точку (0,0), ищем в виде $y = kx$ (а также прямая $a_{11}x + a_{12}y = 0$). Подставляя в уравнение (21), находим значения *k*. Остальные интегральные кривые строятся, исходя из типа точки покоя, например, с помощью изоклин.

В случае *фокуса* надо определить направление закручивания траекторий. Для этого надо: а) исследовать устойчивость по знаку $\operatorname{Re}\lambda$; б) определить, в каком направлении вокруг особой точки происходит движение по траекториям. Для этого достаточно построить в какой-нибудь точке вектор скорости $\bar{\nu}=\left\{\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right\}$, определяемый по формулам (19).

Аналогично исследуется направление движения в случае вырожденного узла.

Пример 3. Исследовать на устойчивость решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x-3y\end{cases}.$$

Изобразить траектории решений и направление движения по ним.

Р е ш е н и е. Имеем $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2+4\lambda+4=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=-2<0.$$

Следовательно, все решения системы асимптотически устойчивы. Точка покоя $(0,0)$ – вырожденный узел.

Разделив одно из уравнений на другое, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-3y}{-x-y}.$$

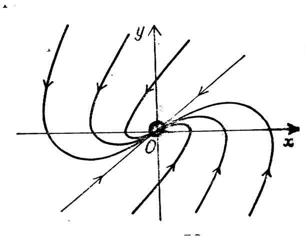


Рис. 5

Прямые, проходящие через особую точку, ищем в виде $y=kx$. Подставляя в написанное уравнение $k=\dfrac{1-3k}{-1-k}$, находим уравнение относительно k: $k^2-2k+1=0$; откуда $k_{1,2}=1$. Следовательно, искомые траектории решений представляют собой лучи $y=x,\ x>0$ или $x<0$; остальные траектории строим, исходя из типа точки покоя (рис. 5).

Пример 4. Исследовать особую точку уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-3y}{x-2y}.$$

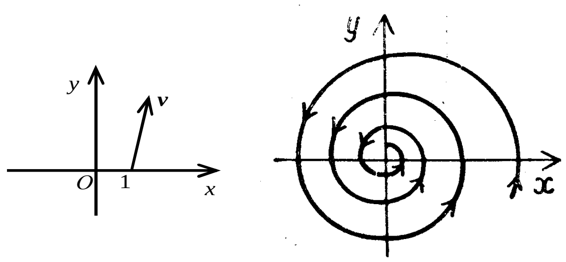
Р е ш е н и е. Переходим от уравнения к системе

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=4x-3y\end{cases},\quad \text{где } A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,\ \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -1 < 0$, то особая точка $(0,0)$ – асимптотически устойчивый фокус и решения неограниченно приближаются к особой точке при возрастании *t*. Строим, например, в точке $(1,0)$ вектор скорости $\bar{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (x - 2y,\ 4x - 3y)$; получаем $\bar{v}\big|_{(1,0)} = (1,4)$ (рис. 6 а). Следовательно, возрастанию *t* соответствует движение по траекториям против хода часовой стрелки. Итак, при $t \to +\infty$ траектории приближаются к началу координат по спирали (рис. 6 б).



а) б)

Рис. 6.

7.5. Исследование положений равновесия автономной нелинейной системы уравнений 2-го порядка. Задачи

Рассмотрим нормальную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \tag{22}$$

в предположении, что правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые в некоторой области *D* (или во всей координатной плоскости) функции.

Для исследования положения равновесия системы (22) надо перенести начало координат в исследуемую особую точку (x_0, y_0), т.е. выполнить параллельный перенос по формулам $x = \xi + x_0,\ y = \eta + y_0$, затем разложить функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в окрестности этой точки в ряд Тейлора по формуле:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) +$$
$$+\frac{1}{2!} f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)^2 + f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)(y - y_0) + \ldots,$$

ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (22), после приведения подобных членов, примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + \varphi(\xi,\eta) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + \psi(\xi,\eta) \end{cases} \tag{23}$$

где ξ, η – новые координаты после параллельного переноса, a_{ij} – постоянные $(i,\ j = 1, 2)$ коэффициенты при членах первой степени. Предположим, что при $\xi \to 0$ и $\eta \to 0$ остаточные члены $\varphi(\xi,\eta)$ и $\psi(\xi,\eta)$ также стремятся к нулю и притом быстрее, чем ρ, где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$; иными словами,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{r}=0,\ \lim_{r\to\infty}\frac{\psi(\xi,\eta)}{r}=0.$$

Очевидно, это выполняется, т.к. функции P и Q дифференцируемы.

Если действительные части всех корней характеристического уравнения $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$ отличны от нуля $\left(\operatorname{Re}\lambda_i\neq 0,\ i=1,2\right)$, то особая точка $\xi=0,\ \eta=0$ системы (23) будет того же типа, что и особая точка линейной системы первого приближения

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt}=a_{11}\xi+a_{12}\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt}=a_{21}\xi+a_{22}\eta, \end{cases} \tag{24}$$

полученной из системы (23) путем отбрасывания нелинейностей, т.е. при $\varphi(\xi,\eta)=0$ и $\psi(\xi,\eta)=0$.

В том случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=0$, т.е. когда для системы (24) особая точка $\xi=0,\ \eta=0$ – центр, для системы (23) она может быть центром или фокусом. Для наличия центра достаточно, чтобы траектории системы (23) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Очевидно, что ось симметрии существует, если уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

к которому можно привести систему (24), не меняется при замене *x* на *–x* (или *y* на *–y*). Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (23) было асимптотически устойчиво при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$. Однако, в этом случае вопрос об устойчивости или неустойчивости системы (23) решается значительно сложнее.

Задача 1. Исследовать тип каждого из положений равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x^2+xy-2x \\ \dfrac{dy}{dt}=y(1-x) \end{cases}.$$

Начертить на фазовой плоскости траектории решений системы.

Р е ш е н и е. Определяем положения равновесия данной системы из уравнений

$$\begin{cases} x(x+y-2)=0 \\ y(1-x)=0 \end{cases}.$$

Решив, получили три особые точки: $O(0,0), O_1(1,1), O_2(2,0)$. Исследуем каждую из них.

1. Рассмотрим точку $O(0,0)$. Выделим в исходной системе линейную часть $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x \\ \dfrac{dy}{dt}=y \end{cases}$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, отбросив члены порядка выше первого $\varphi(x,y)=x^2+xy$ и $\psi(x,y)=-yx$.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$, т.е. $(2+\lambda)(1-\lambda)=0$, имеет корни $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$ разных знаков. Следовательно, точка $(0,0)$ – седло (рис.7.).

2. Рассмотрим точку $O_1(1,1)$. Для исследования ее положения равновесия перенесем начало координат в точку O_1. Тогда, подставляя $x=\xi+1,\ \ y=\eta+1$ в исходную систему

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=(\xi+1)^2+(\xi+1)(\eta+1)-2(\xi+1)\\ \dfrac{d\eta}{dt}=(\eta+1)(1-\xi-1)\end{cases},$$

получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\xi+\eta+\xi^2+\xi\eta\\ \dfrac{d\eta}{dt}=-\xi-\xi\eta\end{cases}$$ с постоянной матрицей $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

при линейных членах и нелинейностями

$$\varphi(\xi,\eta)=\xi^2+\xi\eta \text{ и } \psi(\xi,\eta)=-\xi\eta.$$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}$, или $\lambda^2-\lambda+1=0$

имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$, где $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}>0$. Значит положение равновесия $O_1(1;1)$ – неустойчивый фокус, т.е. «раскрученная» спираль (рис. 8.).

3. Рассмотрим точку $O_2(2;0)$. Делаем параллельный перенос начала координат в эту точку: $\xi=x-2,\ \eta=y$. В результате получим систему $\begin{cases}\dot\xi=2\xi+2\eta+\xi^2+\xi\eta\\ \dot\eta=-\eta-\xi\eta\end{cases}$,

где $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}$, $\varphi(\xi,\eta)=\xi^2+\xi\eta,\ \psi(\xi,\eta)=-\xi\eta$.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \text{или}\ \lambda^2-\lambda-2=0$$

имеет действительные корни $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$ разных знаков. Следовательно, особая точка $O_2(2;0)$ – седло (рис.2в.).

Схематически изобразим на фазовых плоскостях траектории решений и направление движения по этим траекториям в каждом из трех случаев.

В 1-м случае траектории движения, кроме $x=0$, определяем из уравнения $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{2x}$, в которое подставив $y=kx$, получим уравнение $k=-\dfrac{k}{2}$, из которого находим значение $k=0$. Значит, фазовые прямые $y=0$ и $x=0$ (координатные оси в данном случае) являются асимптотами гипербол (ибо точка $O(0,0)$ – седло), (рис. 7.).

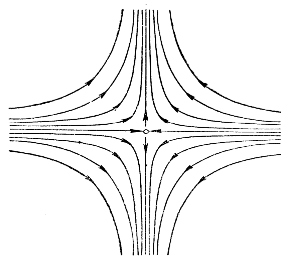


Рис. 7.

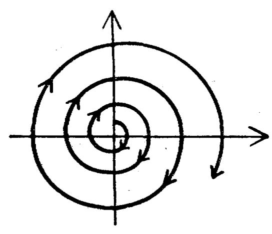


Рис. 8.

Во 2-м случае, т.к. точка $O_1(1,1)$ – неустойчивый фокус, строим, например, в точке (1, 2) вектор скорости $\bar v=\left(\frac{dx}{dt},\frac{d\eta}{dt}\right)$.

В силу системы первого приближения $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+\eta\\ \dfrac{d\eta}{dt}=-x\end{cases}$ он равен

$\bar v\big|_{(1,2)}=(x+\eta;-x)\big|_{(1;2)}=(3;-1)$. Значит, возрастанию t соответствует движение по траекториям (спиралям) по ходу часовой стрелки (рис. 8).

В 3-м случае точка $O_2(2,0)$ – седло. Поэтому для нахождения k подставляем прямые $\eta=kx$ в уравнение $\dfrac{d\eta}{dx}=-\dfrac{-\eta}{2x+2\eta}$, траекториями которых являются гиперболы. Получили $k=\dfrac{-k}{2-2k}$, $2k^2+3k=0$, $k_1=0$, $k_2=-\dfrac{3}{2}$. Следовательно, искомые прямые $\eta=0$ и $\eta=-\dfrac{3}{2}x$, являющиеся асимптотами гипербол, вдоль которых движется фазовая точка $(x(t),\eta(t))$ (рис. 2в.).

Объединяя полученные траектории решений вблизи особых точек, получаем на фазовой плоскости общую картину поведения фазовых кривых на рис. 9.

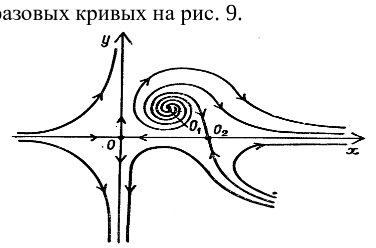


Рис. 9.

З а м е ч а н и е. Для определения типа особой точки (x_0,y_0) практически поступают так:

1. Находят матрицу $A(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}$, составленную из частных производных правых частей $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ нелинейной системы (22).
2. Вычисляют матрицу $A(x,y)$ в особой точке (x_0,y_0): $A(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}P'_x(x_0,y_0) & P'_y(x_0,y_0)\\ Q'_x(x_0,y_0) & Q'_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}$, которая является матрицей линейной системы первого приближения (24).
3. Находят собственные значения λ_1,λ_2 матрицы $A(x_0,y_0)$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$\left|A(x_0,y_0)-\lambda E\right|=0,\ \text{где}\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Исследовать особые точки и начертить на фазовой плоскости траектории решений следующей системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2xy\\ \dfrac{dy}{dt}=1+y-x^2-y^2\end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Из системы алгебраических уравнений

$$2xy=0,\ 1+y-x^2-y^2=0$$

находим особые точки $O_1(-1;0)$ и $O_2(1;0)$. Поскольку исходная система не изменяется при замене x на $-x$, ее фазовые траектории симметричны относительно оси ординат. Значит, достаточно исследовать тип одной особой точки из двух, например, $O_2(1;0)$.

По условию $P(x,y)=2xy$, $Q(x,y)=1+y-x^2-y^2$.

Находим матрицу $A(x,y)=\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -2x & 1-2y \end{pmatrix}$.

Вычислим матрицу $A(x,y)$ в особой точке $O_2(1;0)$:

$A(1,0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица системы 1-го приближения.

Итак, получили систему первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x}=2y \\ \dot{y}=-2x+y \end{cases}.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-\lambda+4=0,\quad \lambda_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}.$$

Корни этого уравнения комплексно-сопряженные, причем $\operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2=\frac{1}{2}>0$. Следовательно, обе особые точки – неустойчивые фокусы, т.е «раскрученные» спирали (рис.2д).

Траектории решений на фазовой плоскости изображены на рис. 10.

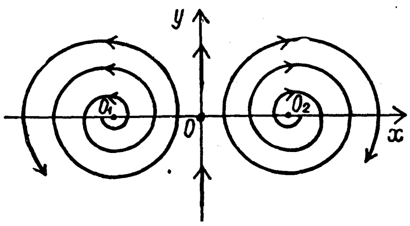


Рис. 10

Отметим, что ось ординат также является фазовой траекторией и на этой оси $x=0$ система эквивалентна уравнению $\dot{y}=1+y-y^2$. Фазовая точка $(x(t),\ y(t))$, в какой бы точке оси ординат она ни начинала движение, с течением времени уходит в бесконечность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие издано авторами на основе многолетнего опыта преподавания основ численных методов в курсе математики в техническом университете. Оно рассчитано на студентов тех специальностей, в программу которых входят изложенные в нем разделы, находящие свое применение в лабораторных работах по курсу математики для студентов, обучающихся по направлениям 140600 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» и 110300 «Агроинженерия» специальностям 140601 «Электромеханика», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» дисциплине «Математика».

Учебное пособие также служит теоретической базой при решении многих прикладных задач технических дисциплин и спецкурсов, при выполнении курсовых и дипломных работ, в которых используются численные методы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК
(ГОСТ 1.7–2003)

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное интегральное исчисления, II том: учебник /Н.С. Пискунов. – М.: «Наука», 2001.– 560 с.

2. Гусак А.А. Высшая математика, II том: учебник /А.А. Гусак. – Минск, 2004.– 433 с.

3. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике, 2 часть: учебник /А.А. Гусак. – Минск, 1973.– 433 с.

4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учебник /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – М.: Высш. шк., 1989. –383 с.

5. Понтрягин А.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник /А.С. Понтрягин. – М.: «Физмат литература», 1981. – 311 с.

6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений: учебник /В.В. Степанов: – М.: «Физмат литература», 1981. – 468 с.

7.Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учебник /Б.П. Демидович. – М.: «Наука», 1969.

8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник /Л.Э. Эльсгольц.– М.: «Наука», 1969. – 424 с.

9. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям /А.Ф. Филиппов. – М.: «Наука», 1992. 128 с.

10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям /Н.М.. Матвеев. –Л.: Изд-во ЛГУ, 1960. – 287 с.

11. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: «Высшая школа», 1978. –287 с.

12. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. II часть /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: «Высшая школа», 1987. – 415 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Федотенко Галина Федоровна

В авторской редакции

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА

Компьютерный набор Л.П. Коломейцевой

Подписано к изданию 01.04. 2010.
Уч.-изд. л. 9,2

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14