

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра электропривода, автоматике и управления в технических системах

**ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

*к выполнению лабораторной работы «Построение решетчатой функции»  
для студентов направления 27.03.04 «Управление в технических системах»  
(профиль «Управление и информатика в технических системах»)*

Воронеж 2023

УДК 62-503.4:681.5(07)

ББК 32.965.6я7

**Составители:**

*д-р техн. наук В. Л. Мурзинов,  
канд. техн. наук Ю. В. Мурзинов*

**Дискретное управление в технических системах:** методические указания к выполнению лабораторной работы «Построение решетчатой функции» для студентов направления 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль «Управление и информатика в технических системах») / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: В. Л. Мурзинов, Ю. В. Мурзинов. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2023. – 12 с.

Методические указания разработаны с целью организации процессов выполнения лабораторной работы «Построение решетчатой функции» по дисциплине «Теория дискретных систем». В рекомендациях определены подходы к выбору варианта индивидуального задания. Показан пример выполнения задания.

Предназначены для студентов направления 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль «Управление и информатика в технических системах»).

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ\_КУР\_ЦМЭ\_2023.pdf.

Ил. 1. Табл. 4. Библиогр.: 4 назв.

**УДК 62-503.4:681.5(07)**

**ББК 32.965.6я7**

**Рецензент** – С. Д. Кургалин, д-р ф-м. наук, проф. кафедры цифровых технологий ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета*

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Процесс перехода от исходной непрерывной функции к дискретизированной посредством Z-преобразования лежит в основе всего описательного процесса ДСАУ. Для этого перехода составлены таблицы, в которых показаны выражения непрерывных функций, преобразованных по Лапласу и Z-преобразованию (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Преобразования Лапласа и z-преобразования. Некоторые формулы

$f(t), f[n]$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - nT)$	$e^{-pnT}$	$z^{-n}$
$\frac{a \cdot \delta(n,0) - a \cdot b^n}{b}$	$\frac{a \cdot \delta(n,0) - a \cdot b^n}{b \cdot p}$	$\frac{a}{z - b}$
$a \left[ \frac{b}{c} \cdot b^n - \delta(n,0) \right]$	$a \left[ \frac{b}{c} \cdot b^n - \delta(n,0) \right]$	$\frac{a}{c \cdot z - b}$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z - 1}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
$t^2$	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
$t^3$	$\frac{6}{p^4}$	$\frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z - 1)^4}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{z}{z - e^{-a}}$
$\sin(\alpha t),$ $\sin(\alpha) \frac{(\cos(\alpha) + \sqrt{Z})^n - (\cos(\alpha) - \sqrt{Z})^n}{\sqrt{Z}},$ где $Z = \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$

## 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИЙ

Для более эффективной работы с функциями, к которым было применено Z-преобразование, необходимо знать его основные свойства и уметь ими пользоваться. Этими свойствами являются следующие:

– свойство линейности. Изображение линейной комбинации решетчатых функций равно такой же линейной комбинации их изображений. То есть, если решетчатая функция имеет вид

$$f[i] = \sum_{k=1}^N C_k f_k[i],$$

то её изображение будет в следующем виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^N C_k F_k(z).$$

– запаздывание или опережение по времени на целое число периодов дискретизации. Для решетчатой функции, запаздывающей (сдвинутой вправо) по временной шкале на целое число периодов дискретизации, можно записать

$$Z\{f[i - n]\} = F(z)z^{-n},$$

в случае опережения

$$Z\{f[i + n]\} = F(z)z^n - f[0]z^n - f[1]z^{n-1} - \dots - zf[n - 1].$$

– умножение оригинала на экспоненту будет соответствовать следующему изображению

$$Z\{f[i]e^{\alpha iT}\} = F(z/e^{\alpha T}).$$

– дифференцирование изображения:

$$Z\{if[i]\} = -z \frac{dF(z)}{dz}.$$

– умножений изображений. Свертка оригиналов соответствует произведению изображений:

$$Z\{\sum_{i=0}^k f[i]g[k - i]\} = F(z)G(z),$$

### 3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕТЧАТОЙ ФУНКЦИИ

**Условие.** По известному Z-преобразованию функции дискретизированного сигнала

$$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 0.7z + 0.1} \quad (3.1)$$

определить выражение соответствующей решетчатой функции и построить его.

**Решение.** Определим корни характеристического уравнения, соответствующего данному выражению, то есть корни уравнения:

$$z^2 - 0.7z + 0.1 = 0$$

Корни будут равны  $z_1 = 0.5$  и  $z_2 = 0.2$ . Так как корни – действительные числа, то имеется возможность упростить выражение (3.1), для этого применим метод неопределенных коэффициентов и разложим рациональную дробь на простейшие

$$Y(z) = \frac{3z}{(z-0.5)(z-0.2)} = \frac{A_1}{(z-0.5)} + \frac{A_2}{(z-0.2)} = \frac{A_1(z-0.2) + A_2(z-0.5)}{(z-0.5)(z-0.2)},$$

где  $A_1, A_2$  – неопределенные коэффициенты.

Далее

$$\frac{A_1(z-0.2) + A_2(z-0.5)}{(z-0.5)(z-0.2)} = \frac{A_1z - 0.2A_1 + A_2z - 0.5A_2}{(z-0.5)(z-0.2)} = \frac{(A_1 + A_2)z - (0.2A_1 + 0.5A_2)}{(z-0.5)(z-0.2)}$$

или

$$\frac{3z}{(z-0.5)(z-0.2)} = \frac{(A_1 + A_2)z - (0.2A_1 + 0.5A_2)}{(z-0.5)(z-0.2)}$$

Составим систему уравнений, сократив знаменатели и приравняв коэффициенты при переменной  $z$ , получим

$$\left. \begin{aligned} 3 &= (A_1 + A_2) \\ 0 &= -(0.2A_1 + 0.5A_2) \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$A_1 = 5, A_2 = -2.$$

Выражение (3.2) примет вид

$$Y(z) = \left( \frac{5.0}{z - 0.5} - \frac{2.0}{z - 0.2} \right). \quad (3.2)$$

Воспользуемся табл. 3.1 и выберем изображение вида  $\frac{a}{z - b}$ . Тогда для него оригинал функции будет  $\frac{a \cdot \delta(n,0) - a \cdot b^n}{b}$ , и выражение (3.3) примет вид

$$y[n] = \left( \frac{5 \cdot \delta(n,0) - 5 \cdot 0.5^n}{0.5} - \frac{2 \cdot \delta(n,0) - 2 \cdot 0.2^n}{0.2} \right) \quad (3.3)$$

или

$$y[n] = \frac{1}{0.1} (1 \cdot \delta(n,0) - 1 \cdot 0.5^n - 1 \cdot \delta(n,0) + 1 \cdot 0.2^n).$$

В результате получаем решетчатую функцию

$$y[n] = 10 \cdot (0.2^n - 0.5^n), \quad (3.4)$$

где  $n$  – порядковый номер элемента решетчатой функции.

Для построения решетчатой функции определим ряд значений на основании выражения (3.4), которые представлены в табл. 3.1. На рис. 3.1 показан график решетчатой функции.

Таблица 3.1

Значения решетчатой функции

$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$y[3]$	$y[4]$	$y[5]$	$y[6]$	$y[\infty]$
0	-3	-2.1	-1.17	-0.609	-0.309	-0.156	0

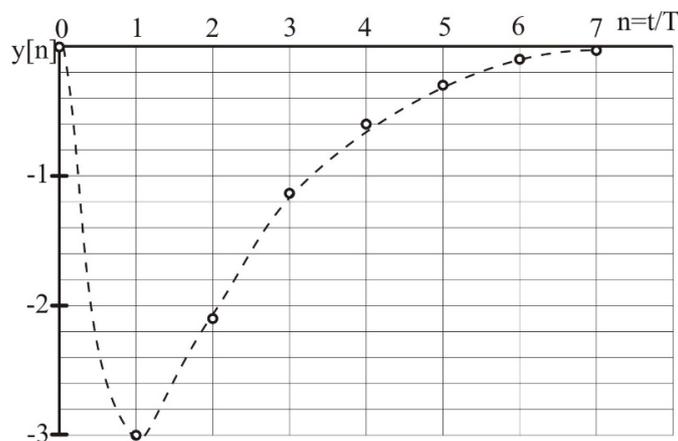


Рис. 3.1. График решетчатой функции

#### 4. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Студент выбирает вариант задания из табл. 4.1. Номер варианта задания соответствует номеру студента в списке группы.

Отчет должен содержать:

1. Название и цель работы;
2. Результаты выполнения примера и задания и их анализа;
3. Выводы по проведенным исследованиям.

Таблица 4.1

Варианты исходных данных

№ варианта	Z-преобразование	№ варианта	Z-преобразование
0	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 0.7z + 0.1}$	1	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$
2	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$	3	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 0.7z + 0.1}$
4	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 2.2z + 0.4}$	5	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 2.2z + 0.4}$
6	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 4.2z + 0.8}$	7	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 8.2z + 1.6}$
8	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 8.2z + 1.6}$	9	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 6.2z + 1.2}$
10	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 6.2z + 1.2}$	11	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 6.2z + 1.2}$
12	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$	13	$Y(z) = \frac{16z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$
14	$Y(z) = \frac{16z}{z^2 - 2.4z + 0.8}$	15	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.3, n = [0, 15]$
16	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.4, n = [0, 12]$	17	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.5, n = [0, 9]$
18	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.2, n = [0, 25]$	19	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$
20	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$	21	$Y(z) = \frac{6z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$
22	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$	23	$Y(z) = \frac{5z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$
24	$Y(z) = \frac{6z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$	25	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$

Для проверки правильности выполненного задания в табл. 4.2 представлены правильные ответы.

Таблица 4.2

Правильные ответы для вариантов задания из табл. 4.1

№ варианта	Z-преобразование	Решетчатая функция Оригинал
0	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 0.7z + 0.1}$	$y[n] = 10 \cdot (0.2^n - 0.5^n)$
1	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$	$y[n] = 3.75(1 - 0.2^n)$
2	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$	$y[n] = 5(1 - 0.2^n)$
3	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 0.7z + 0.1}$	$y[n] = 26.7 \cdot (0.2^n - 0.5^n)$
4	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 2.2z + 0.4}$	$y[n] = 2.22 \cdot (2.0^n - 0.2^n)$
5	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 2.2z + 0.4}$	$y[n] = 4.44 \cdot (2.0^n - 0.2^n)$
6	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 4.2z + 0.8}$	$y[n] = 0.53 \cdot (4.0^n - 0.2^n)$
7	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 8.2z + 1.6}$	$y[n] = 0.256 \cdot (8.0^n - 0.2^n)$
8	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 8.2z + 1.6}$	$y[n] = 0.513 \cdot (8.0^n - 0.2^n)$
9	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 6.2z + 1.2}$	$y[n] = 0.69 \cdot (6.0^n - 0.2^n)$
10	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 6.2z + 1.2}$	$y[n] = 0.345 \cdot (6.0^n - 0.2^n)$
11	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 6.2z + 1.2}$	$y[n] = 1.379 \cdot (6.0^n - 0.2^n)$
12	$Y(z) = \frac{4z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$	$y[n] = 10(1 - 0.2^n)$
13	$Y(z) = \frac{16z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$	$y[n] = 20(1 - 0.2^n)$
14	$Y(z) = \frac{16z}{z^2 - 2.4z + 0.8}$	$y[n] = 10 \left( 2.0^n - \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)$

15	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.3, n = [0, 15]$	$\sin(\alpha) \frac{(\cos(\alpha) + \sqrt{Z})^n - (\cos(\alpha) - \sqrt{Z})^n}{\sqrt{Z}}$ где $Z = \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}$
16	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.4, n = [0, 12]$	$\sin(\alpha) \frac{(\cos(\alpha) + \sqrt{Z})^n - (\cos(\alpha) - \sqrt{Z})^n}{\sqrt{Z}}$ где $Z = \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}$
17	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.5, n = [0, 9]$	$\sin(\alpha) \frac{(\cos(\alpha) + \sqrt{Z})^n - (\cos(\alpha) - \sqrt{Z})^n}{\sqrt{Z}}$ где $Z = \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}$
18	$\frac{z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$ $\alpha = 0.2, n = [0, 25]$	$\sin(\alpha) \frac{(\cos(\alpha) + \sqrt{Z})^n - (\cos(\alpha) - \sqrt{Z})^n}{\sqrt{Z}}$ где $Z = \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}$
19	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$	$y[n] = 6(1 - 0.5^n)$
20	$Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$	$y[n] = 4(1 - 0.5^n)$
21	$Y(z) = \frac{6z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$	$y[n] = 12(1 - 0.5^n)$
22	$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$	$y[n] = 15 \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^n \right)$
23	$Y(z) = \frac{5z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$	$y[n] = 25 \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^n \right)$
24	$Y(z) = \frac{6z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$	$y[n] = 30 \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^n \right)$
25	$Y(z) = \frac{8z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$	$y[n] = 40 \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^n \right)$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шамриков Б. Н. Основы теории цифровых систем управления / Б. Н. Шамриков. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
2. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ / К. Остром, Б. Виттенмарк. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
3. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления / А. А. Первозванский. – М.: Наука, 1980. – 615 с.
4. Реклейтис Г. и др. Оптимизация в технике. – М.: Мир, 1986. – 349 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Теоретическое обоснование. Вычисление дискретного преобразование Лапласа и $Z$ -преобразования функции.....	3
2. Основные свойства $Z$ -преобразований функций.....	4
3. Пример решения задачи по построению решетчатой функции.....	5
4. Самостоятельная работа.....	7
Библиографический список.....	10

# **ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

*к выполнению лабораторной работы «Построение решетчатой функции»  
для студентов направления 27.03.04 «Управление в технических системах»  
(профиль «Управление и информатика в технических системах»)*

### **Составители:**

**Мурзинов Валерий Леонидович**

**Мурзинов Юрий Валериевич**

Издается в авторской редакции

Компьютерный набор В. Л. Мурзинов

Подписано к изданию 30.01.2023.

Уч.-изд. л. 0,7.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84