МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

С. А. ОЛЕЙНИКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Воронеж 2021

УДК
ББК
О

Рецензенты:
кафедра информационной безопасности и систем связи Международного института компьютерных технологий
(зав. кафедрой
канд. техн. наук, доцент О.С. Хорпяков);

д-р техн. наук, профессор В. Ф. Барабанов

Олейникова С. А.

О532 **Математическое моделирование и системы массового обслуживания** / С. А. Олейникова. - ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет». - Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. - 90 с.

ISBN 978-5

Учебное пособие содержит необходимые теоретические сведения для освоения курса «Системы массового обслуживания». Излагаются основные факты о системах массового обслуживания, а также математических и имитационных моделях, позволяющих получить их вероятностно-временные характеристики.
Предназначено для студентов направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети») очной и заочной форм обучения.

Ил. 68. Табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 519.6(075.8
ББК 22.193я7

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ISBN 978-

ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни можно постоянно встретить ситуации, связанные с необходимостью обслуживания в некоторых системах, которые располагают ограниченным количеством обслуживающих единиц (или каналов обслуживания), что может привести к возникновению очередей, отказов и т.д. Поэтому возникают задачи установления зависимости между основными параметрами такой системы (числом каналов обслуживания, временем обслуживания, возможным числом мест в очереди и т.д.) и качеством обслуживания (например, вероятностью отказа, средним временем ожидания и т.д.). Подобные задачи являются предметом исследования теории массового обслуживания.

Теория массового обслуживания возникла относительно недавно (начало XX в.). Первые задачи, которые обусловили развитие данной теории, были посвящены упорядочению и оптимизации работы телефонных станций. В частности, требовалось рассчитать качество обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств. В результате появилась математическая теория, которая в настоящее время называется теорией телетрафика и является одной из ветвей теории массового обслуживания. Первые работы в данной теории принадлежат датскому математику Агнеру Краруп Эрлангу (1878-1929). Его исследования связаны с оценкой пропускной способности полнодоступного пучка линий, обслуживающего простейший поток вызовов с потерями и с ожиданием. В 40 годах XX в. Его именем была названа единица измерения трафика в сетях, а его формулы до сих пор используются при расчетах пропускной способности.

Однако основные понятия теории массового обслуживания принадлежат советскому математику Александру Яковлевичу Хинчину (1894-1959). Именно его принято считать основоположником данной теории. А.Я. Хинчин совместно с Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903-1987) является также основоположником теории случайных процессов, лежащий в основе теории массового обслуживания. Кроме того, А.Я. Хинчину принадлежит одна из важнейших формул в данной теории – формула Поллачека – Хинчина, которая позволяет определить число требований в системе для любого закона распределения длительности обслуживания.

В 50 г. XX в. Борис Владимирович Гнеденко (1912-1995) обобщил формулы Эрланга, а также рассмотрел случаи потери заявок при отказе канала обслуживания.

В настоящее время множество областей, в которых используется аппарат теории массового обслуживания, весьма разнообразен. Для каждой области могут возникать свои специфические особенности, что отражается на соответствующем математическом аппарате. Но, в связи с постоянным усложнением и усовершенствованием обслуживающих систем (вместо обычных телефонных сетей в настоящее время используются мобильные сети, трафик которых за последние годы кардинально изменился и т.д.)

математических моделей для оценок числовых характеристик бывает недостаточно. В этих случаях наряду с математическим интенсивно используется аппарат имитационного моделирования, который, несмотря на свой более молодой возраст, также интенсивно развивается. Появляются все новые приложения, упрощающие процесс моделирования и совершенствующие аппарат вывода статистических оценок.

Среди данных программных средств хотелось бы в первую очередь выделить среду AnyLogic. Данное приложение является мощным инструментом как для традиционных обслуживающих систем, так и их разновидностей, требующих таких современных средств, как агентное моделирование или системную динамику. Кроме того, существует возможность самостоятельной доработки моделей и написание собственного кода средствами Java. В связи с этим, кроме аналитического аппарата в пособии уделяется внимание особенностям получения вероятностно-временных характеристик с помощью средств имитационного моделирования AnyLogic.

Таким образом, целью данного учебного пособия является освещение приемов и методов, позволяющих определять необходимые показатели систем массового обслуживания с помощью разнообразных средств. Введение в системы массового обслуживания приведены в первой части пособия. Анализ разнообразных потоков событий освящены во второй части. Третья часть содержит анализ и получение аналитических характеристик разнообразных систем массового обслуживания. В заключительной части содержатся сведения о возможностях среды имитационного моделирования AnyLogic применительно к анализу обслуживающих систем.

1. ВВЕДЕНИЕ В СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В главе излагается материал, являющийся основой для изучения систем массового обслуживания. В первой части главы приведены общие сведения о случайных процессах. Особенности марковских случайных процессов и цепей Маркова изложены во второй части. В третьей части описаны уравнений Колмогорова – Чепмена, а в четвертой – специфика описания систем с помощью графа состояний, позволяющая по графу получить характеристики системы и наоборот. Пятая часть посвящена освещению вопросов, связанных с потоками событий (стационарный и нестационарный потоки, поток Эрланга и поток Пальма).

1.1. Случайные процессы и их классификация

Процессы, протекающие в системах массового обслуживания, носят случайный характер. В связи с этим, теория массового обслуживания базируется на теории случайных процессов.

Случайным называется процесс, течение которого может быть различным в зависимости от случая и для которого определена вероятность того или иного течения. Его можно определить как функцию от двух переменных $\xi = \xi(w, t)$, первая из которых (w) носит случайный характер, а вторая (t) чаще всего имеет смысл времени. При фиксированном значении t случайный процесс представляет собой случайную величину. При фиксированном элементарном событии w получаем реализацию (траекторию) случайного процесса.

Классификация случайных процессов

Множество значений, которые может принимать случайная составляющая случайного процесса, назовем *пространством состояний*. В зависимости от характера этого множества, а также от специфики времени T различают следующие виды случайных процессов

1. Случайный процесс с дискретным временем и дискретными состояниями (дискретный временной ряд). Графически такой процесс представлен на *рис. 1.1*.

По оси абсцисс на данном графике отложено время, а по оси ординат – появляющиеся события, которые изменяют состояния системы.

В качестве примера такого процесса может выступать сигнал, передающийся в фиксированные моменты времени.

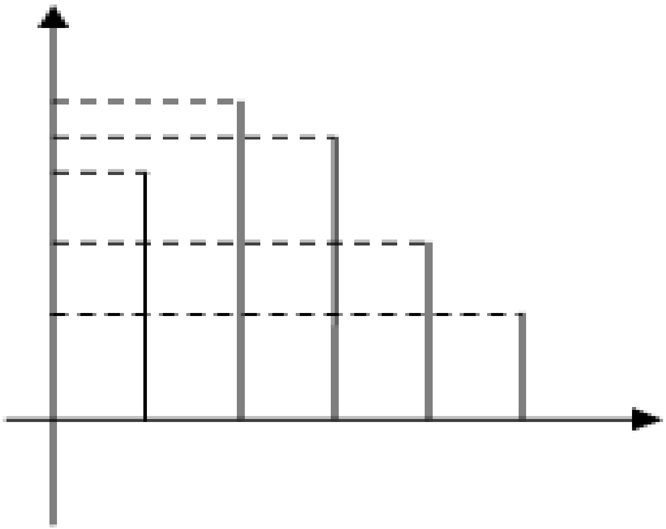


Рис. 1.1. Случайный процесс с дискретным временем и дискретными состояниями

2. Случайный процесс с дискретным временем и непрерывными состояниями (непрерывный временной ряд). Иллюстрация данного случайного процесса приведена на *рис. 1.2*.

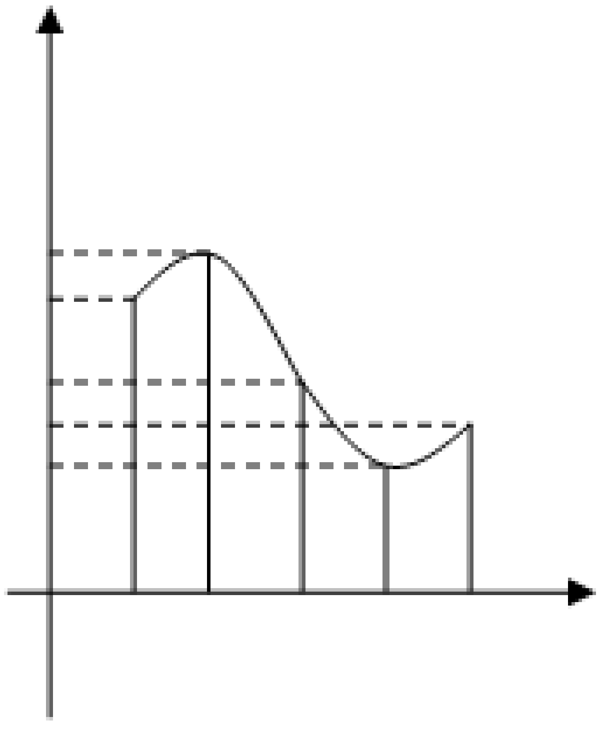


Рис. 1.2. Случайный процесс с дискретным временем и непрерывными состояниями

По оси абсцисс и ординат также откладывается время и состояния системы, однако, в отличие от предыдущего случая, множество таких состояний теперь несчетно.

Примером могут служить любые метеорологические наблюдения.

3) Случайный процесс с непрерывным временем и дискретными состояниями (дискретный случайный процесс). Такой процесс графически можно представить следующим образом (*рис. 1.3.*).

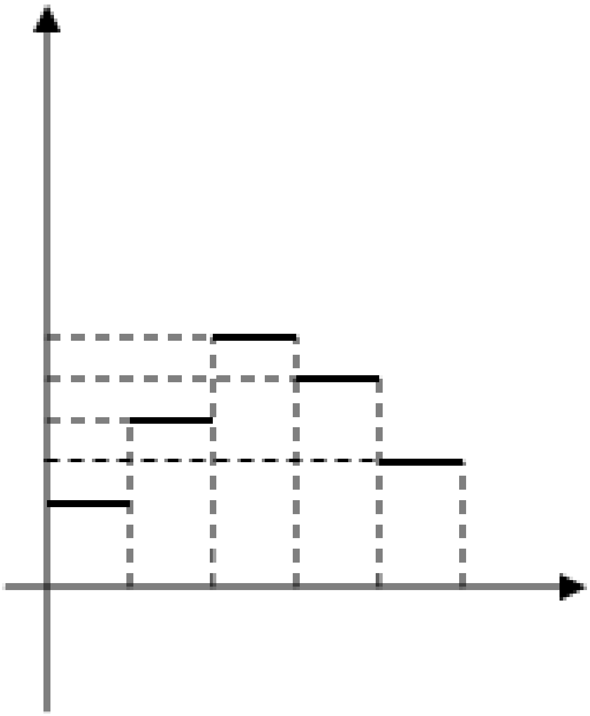


Рис. 1.3. Случайный процесс непрерывным временем и дискретными состояниями

Примерами таких процессов являются число вызовов на телефонной станции; число абонентов компьютерной сети и т.д.

4) Случайный процесс с непрерывным временем и непрерывными состояниями (непрерывнозначный случайный процесс). Он представлен на *рис. 1.4*.

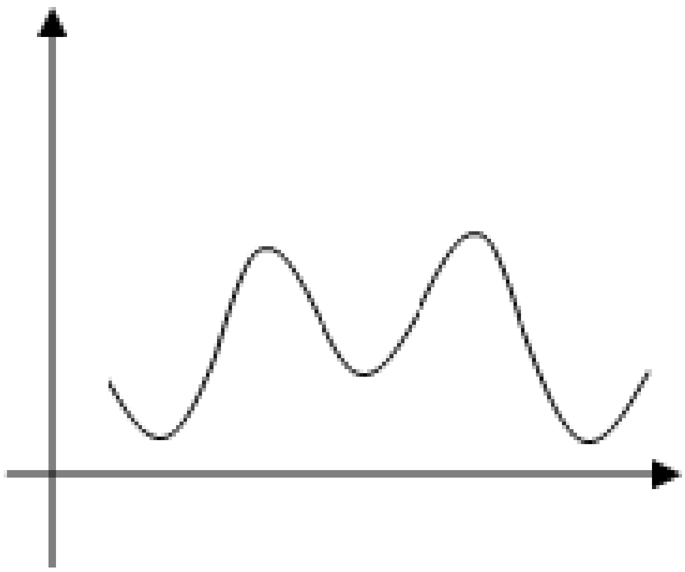


Рис. 1.4. Случайный процесс с непрерывным временем и непрерывными состояниями

Примером является броуновское движение.

1.2. Марковские случайные процессы. Цепи Маркова

Случайный процесс x(t) называется Марковским, если для любых моментов времени $t_i<t_j<t_k$ имеет место следующее равенство:

$$P\big(x(t_k)=x_k, x(t_i)=x_i|x(t_j)=x_j\big)=$$
$$=P\big(x(t_k)=x_k|x(t_j)=x_j\big)\cdot P\big(x(t_i)=x_i|x(t_j)=x_j\big) \quad (1.1)$$

Марковский процесс обладает следующим важным *свойством*: при известном его значении в настоящий момент времени вероятность наступления определенного значения в будущем не зависит от того, в каком состоянии процесс находился в предыдущий момент.

Цепь Маркова – это марковский случайный процесс, множество возможных состояний которого дискретно, а время принимает целочисленные значения.

Обозначим через $E=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ множество возможных состояний процесса.

Цепь Маркова задается множеством возможных состояний и следующими вероятностями:

1) начальными вероятностями:

$$p_i^0=P(x(0)=i). \quad (1.2)$$

Если цепь конечна, то все начальные вероятности можно записать в виде вектора:

$\Pi=\left(p_1^0,\ldots,p_m^0\right)$, где m- число состояний марковской цепи.

Для начальных вероятностей справедливо условие нормировки:

$$\sum_i p_i^0=1. \quad (1.3)$$

2) условными вероятностями или вероятностями перехода за один шаг

$$P(x(n+1)=j|x(n)=i)=P_{ij}(n). \quad (1.4)$$

Если вероятность перехода не зависит от n, то такая цепь называется однородной.

Для условных вероятностей также справедливы условия нормировки:

$$\sum_j P_{ij}(n)=1 \text{ или } \sum_j P_{ij}=1. \quad (1.5)$$

3) вероятностями перехода за k шагов:

$$P(x(n+k) = j | x(n) = i) = P_{ij}(n,k). \quad (1.6)$$

Для *однородных* марковских цепей эта вероятность не будет зависеть от времени.

$$P_{ij}(n,k) = P_{ij}(k). \quad (1.7)$$

Условие нормировки в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_j P_{ij}(k) = 1. \quad (1.8)$$

Для конечной марковской цепи все вероятности перехода (как за 1, так и за k шагов) можно записать в виде матриц:

$$P = \{P_{ij}\}; P(k) = P_{ij}(k). \quad (1.9)$$

4) безусловными вероятностями (вероятностями нахождения случайного процесса в состоянии i в момент времени n):

$$P_i(n) = P(x(n) = i). \quad (1.10)$$

Рассмотрим далее особенности применения данных формул для вычисления некоторых характеристик марковских цепей и систем.

1.3. Уравнения Колмогорова-Чепмена

Важнейшей характеристикой для любых (в том числе, марковских) цепей и случайных процессов является вероятность пребывания в каждом из состояний в любой момент времени, а также вероятности перехода за некоторое число шагов. Возможность получения данных характеристик с помощью некоторых известных начальных сведений можно с использованием теорем, полученных независимо друг от друга А.Н. Колмогоровым и С. Чепменом.

Теорема 1.1. Для однородной марковской цепи вероятности перехода удовлетворяют следующему уравнению:

$$P_{ij}(n+k) = \sum_\alpha P_{i\alpha}(n) \cdot P_{\alpha j}(k). \quad (1.11)$$

Теорема 1.2. Для однородной марковской цепи безусловные вероятности удовлетворяют следующему уравнению:

$$P_i(n+k) = \sum_\alpha P_\alpha(n) \cdot P_{\alpha j}(k). \quad (1.12)$$

Если число состояний в марковской цепи конечно, то уравнения (1.11) и (1.12) можно переписать следующим образом:

$$P(n+k) = P(n) \cdot P(k). \quad (1.13)$$

и

$$\Pi(n+k) = \Pi(n) \cdot \Pi(k). \qquad (1.14)$$

Если учесть, что $P(1) = P$ и $\Pi(0) = \Pi$, то из формул(1.13) и (1.14) следуют равенства:

$$P(n) = P^n; \qquad (1.15)$$

$$\Pi(n) = \Pi \cdot P^n = \Pi(n-1) \cdot P. \qquad (1.16)$$

Таким образом, зная начальные вероятности и вероятности перехода за 1 шаг, можно рассчитать вероятности пребывания в любых состояниях в произвольный момент времени.

Пример 1.1. Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний, которые условно обозначаются цифрами 1,2 и 3. Известно, что в начальный момент времени устройство находится в состоянии 1. Известна также матрица перехода из одного состояния в другое:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Найти вероятности пребывания системы в каждом из состояний после трех шагов.

Решение. Воспользовавшись формулой (1.16), получим:

$$\Pi(1) = \Pi(0) \cdot P = (1 \;\; 0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.8 \;\; 0.1 \;\; 0.1).$$

$$\Pi(2) = \Pi(1) \cdot P = (0.8 \;\; 0.1 \;\; 0.1) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.68 \;\; 0.18 \;\; 0.14).$$

$$\Pi(3) = \Pi(1) \cdot P = (0.68 \;\; 0.18 \;\; 0.14) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.608 \;\; 0.236 \;\; 0.156)$$

1.4. Граф состояний

Конечные марковские цепи удобно представить в виде размеченного графа, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги обозначают возможные направления перехода с весами, равными вероятностям перехода за один шаг (для дискретных последовательностей) или интенсивностям перехода (для дискретных процессов). Если в системе возможна задержка в том или ином состоянии, то в графе это обозначается стрелкой, ведущей из данного состояния в него же.

Пример 1.2. Построим граф состояний для примера 1.1. Поскольку система может находиться в одном из трех состояний, граф будет иметь три вершины. Как видно из матрицы вероятностей перехода, в любой момент времени система из каждого состояния может перейти в любое другое состояние. Таким образом, граф состояний будет иметь вид, представленный на рис. 1.5.

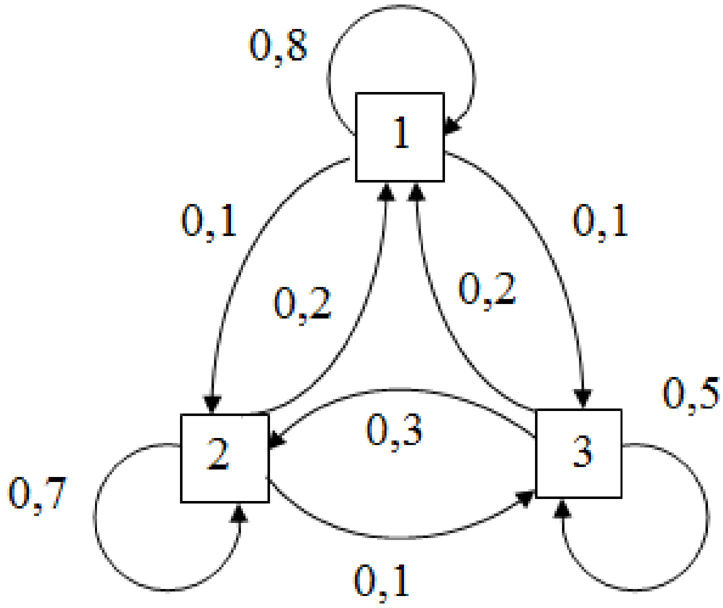


Рис. 1.5. Граф состояний

1.5. Дискретные марковские процессы. Дифференциальные уравнения Колмогорова-Чепмена для условных и безусловных вероятностей

Будем рассматривать дискретный случайный процесс, множество значений которого перенумеруем цифрами 1,2,… Значения случайного процесса будем называть состояниями. Переход из одного состояний в другое происходит случайно в произвольные моменты времени.

Как и дискретные последовательности, дискретные марковские процессы задаются множеством состояний и следующими вероятностями:

1) начальными вероятностями:

$$p_i^0 = P(x(0) = i). \tag{1.17}$$

Для них справедливо условие нормировки:

$$\sum_i p_i^0 = 1. \tag{1.18}$$

2) безусловными вероятностями (вероятностями нахождения случайного процесса в состоянии i в момент времени t):

$$P_i(t) = P(x(t) = i). \tag{1.19}$$

Для данных вероятностей условие нормировки будет следующим:

$$\sum_i P_i\,(t) = 1. \tag{1.20}$$

3) условными вероятностями или вероятностями перехода за один шаг

$$P(x(t+s) = j | x(s) = i) = P_{ij}(s, t+s). \tag{1.21}$$

Если марковский процесс является однородным, то данные вероятности будут зависеть лишь от разности моментов времени:

$$P_{ij}(s, t+s) = P_{ij}(t). \tag{1.22}$$

Для вероятностей перехода также справедливо условие нормировки:

$$\sum_j P_{ij}\,(t) = 1. \tag{1.23}$$

Дифференциальные уравнения для условных и безусловных вероятностей

Пусть выполнены следующие условия.

1) P_{ij}(t) – дифференцируемая функция. (1.24)

$$2)\ P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases} \tag{1.25}$$

Данное предположение означает, что мгновенно перейти из одного состояния в другое нельзя.

$$3)\ P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 1 - \lambda_{ii}\Delta t;\ \ i = j; \\ \lambda_{ii}\Delta t;\ i \neq j. \end{cases} \tag{1.26}$$

Предположение означает, что вероятность перехода из одного состояние в другое за бесконечно малый интервал времени прямопропорциональна длине временного интервала и значительно меньше вероятности сохранения системы в данном состоянии.

Теорема 1.3. Для однородного дискретного марковского процесса, вероятности перехода которого удовлетворяют условиям (1.24), (1.25), (1.26), справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj}\,; \tag{1.27}$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k \lambda_{ik} \cdot P_{kj}(t). \qquad (1.28)$$

Система (1.27) называется системой прямых уравнений Колмогорова, а (1.28) – системой обратных уравнений Колмогорова.

Доказательство.

Воспользуемся уравнениями Колмогорова-Чепмена:

$$P_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj}(\Delta t). \qquad (1.29)$$

Воспользовавшись равенством (1.26), получим:

$$P_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj} \cdot \Delta t + P_{ij}(t) \cdot (1 - \lambda_i \cdot \Delta t). \qquad (1.30)$$

Вычтем из обеих частей $P_{ij}(t)$:

$$P_{ij}(t + \Delta t) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj} \cdot \Delta t - \lambda_i \cdot \Delta t \cdot P_{ij}(t). \qquad (1.31)$$

В соответствии с условием нормировки:

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = 1. \qquad (1.32)$$

С учетом равенства (1.24), это условие перепишется в виде:

$$\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \cdot \Delta t + 1 - \lambda_i \cdot \Delta t = 1. \qquad (1.33)$$

Таким образом,

$$\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \cdot \Delta t - \lambda_i \cdot \Delta t = 0$$

Или

$$\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i. \qquad (1.34)$$

С учетом (1.34), будем иметь:

$$P_{ij}(t + \Delta t) - P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj} \cdot \Delta t. \qquad (1.35)$$

Таким образом:

$$\frac{P_{ij}(t + \Delta t) - P_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_k P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj}. \qquad (1.36)$$

Устремив в формуле (1.36) $\Delta t \to 0$, получим:

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k P_{ik}(t) \cdot \lambda_{kj}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.4. Для однородного дискретного марковского процесса, вероятности перехода которого удовлетворяют условиям (1.24), (1.25), (1.26), справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_k P_k(t) \cdot \lambda_{kj}. \tag{1.37}$$

Доказывается аналогично предыдущей теореме.

Система уравнений (1.37) называется системой уравнений Колмогорова.

Системы уравнений Колмогорова решают при заданных начальных условиях. В качестве начальных условий для вероятностей перехода следует взять условие 1.25.

Перепишем уравнения Колмогорова с учетом условия (1.34):

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_k P_k(t) \cdot \lambda_{kj} = \sum_{k \neq j} P_k(t) \cdot \lambda_{kj} + P_j(t) \cdot \lambda_{jj} =$$
$$= \sum_{k \neq j} P_k(t) \cdot \lambda_{kj} - P_j(t) \sum_{k \neq j} \lambda_{jk}. \tag{1.38}$$

Уравнения Колмогорова удобно представлять в виде графа состояний. Его вершины обозначают состояния, дуги указывают возможные направления перехода, а веса соответствуют интенсивностям перехода.

Пример 1.3. Составить систему дифференциальных уравнений для безусловных вероятностей по графу состояний, представленному на рис. 1.6.

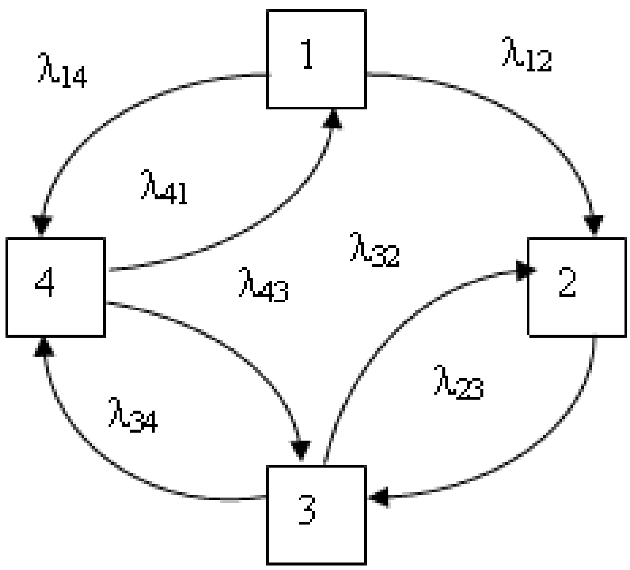


Рис. 1.6. Пример графа состояний

Решение. Воспользуемся теоремой 4. Поскольку на рисунке отмечены 4 состояния, в системе будут присутствовать 4 уравнения. Согласно равенству (1.38), для каждого состояния необходимо выделить исходящие из данного состояния ребра (соответствующие слагаемые будут взяты со знаком «минус») и все входящие в исследуемое состояние дуги (эти слагаемые будут взяты со знаком «плюс»). Состояние 1 связано с состояниями 2 и 4, причем из первого состояния можем перейти как во второе, так и в четвертое, а войти в первое состояние можем лишь из четвертого. Поэтому уравнение для данного состояния будет следующим:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = P_4(t)\cdot\lambda_{41} - P_1(t)\cdot(\lambda_{14}+\lambda_{12}).$$

Проанализируем второе состояние. Из него можно попасть лишь в третье, однако во второе состояние можно попасть как из третьего, так и из первого. В связи с этим, дифференциальное уравнение для второго состояния примет следующий вид:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = P_1(t)\cdot\lambda_{12} + P_3(t)\cdot\lambda_{32} - P_2(t)\cdot\lambda_{23}.$$

Аналогичным образом составляются уравнения для третьего и четвертого состояний. Таким образом, окончательно получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = P_4(t)\cdot\lambda_{41} - P_1(t)\cdot(\lambda_{14}+\lambda_{12}) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = P_1(t)\cdot\lambda_{12} + P_3(t)\cdot\lambda_{32} - P_2(t)\cdot\lambda_{23} \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = P_2(t)\cdot\lambda_{23} + P_4(t)\cdot\lambda_{43} - P_3(t)\cdot(\lambda_{32}+\lambda_{34}) \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = P_1(t)\cdot\lambda_{14} + P_4(t)\cdot\lambda_{43} - P_3(t)\cdot(\lambda_{32}+\lambda_{34}) \end{cases}$$

Стационарное распределение вероятностей

Стационарное распределение вероятностей (если оно существует) можно получить при $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j^*. \tag{1.39}$$

Стационарное распределение вероятностей можно получить, не решая систему дифференциальных уравнений Колмогорова, а решая систему алгебраических уравнений, потому что:

$$\frac{dP_j^*}{dt} = 0. \quad (1.40)$$

Таким образом, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_\alpha P_\alpha^* \cdot \lambda_{kj} = 0; \\ \sum_j P_j^* = 1. \end{cases} \quad (1.40)$$

1.5. Потоки событий

Под потоком событий будем понимать последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Примерами потоков событий могут служить поток вызовов на телефонной станции, поток пациентов, поступающих в лечебные учреждения, поток каких-либо заказов, требующих своего выполнения на предприятиях и т.д.

Поток событий называется *простейшим*, если он удовлетворяет трем условиям:

1) стационарность;

2) отсутствие последствия;

3) ординарность.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий на некоторый временной интервал зависит только от длины данного интервала и не зависит от его расположения на временной оси.

Поток событий называется потоком *без последействия*, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания во временной интервал Δt двух или более событий есть величина порядка $O(\Delta t)$, т.е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (1.41)$$

При этом вероятность появления одного события прямопропорциональна длине этого интервала, т.е. определяется как $\lambda \cdot \Delta t$, где λ - интенсивность потока (среднее число событий, появляющихся в единицу времени).

Условию стационарности удовлетворяет поток, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. В частности, для стационарного потока характерна постоянная плотность (число заявок в единицу времени). На практике часто встречаются потоки заявок, которые (по крайней мере на ограниченном отрезке времени) могут рассматриваться как стационарные. Во многих задачах теории массового обслуживания представляет интерес проанализировать работу системы при постоянных условиях. Тогда решается задача для стационарного потока заявок.

Отсутствие последствия означает, что заявки поступают в систему независимо друг от друга.

Условие ординарности означает, что поток заявок является достаточно редким, т.е. заявки поступают в систему по одной, а не парами, тройками и т.д.

Простейший поток играет важную роль в теории массового обслуживания. В частности, на его основе определяется пуассоновский случайный процесс, который, как правило, описывает входящий поток заявок.

Под пуассоновским случайным процессом будем понимать процесс $\xi(t)$, представляющий число событий из простейшего потока событий, наступивших в интервале $(0,t)$.

Очевидно, что это неубывающий случайный процесс. Закон распределения временного интервала между двумя последовательно наступившими событиями определяется формулой

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{1.42}$$

где λ - интенсивность потока. Таким образом, эта величина имеет показательный закон распределения. Показательным законом хорошо описываются те случаи, когда плотность распределения по тем или иным причинам убывает при возрастании времени t. В частности, при описании систем массового обслуживания чаще всего пользуются допущением, что время обслуживания распределено экспоненциально. Эта гипотеза позволяет сильно упростить математический аппарат, применяемый для решения задач и получить простые аналитические формулы для основных характеристик системы.

Простейший поток среди произвольных потоков событий играет важную роль, поскольку при взаимном наложении большого числа ординарных, стационарных потоков с любым последствием получается поток, близкий к простейшему. Однако, очевидно, что в реальных условиях такой поток встречается крайне редко. В связи с этим, необходимо рассмотреть особенности и обобщения данного потока.

1. Нестационарный поток

Поток однородных событий, ординарный и без последствий, но с переменной плотностью $\lambda(t)$ называется нестационарным пуассоновским потоком. Для стационарного потока событий математическое ожидание числа событий на любом участке длиной τ будет одинаковым. В данном случае оно уже будет зависеть и от самого промежутка. В частности, математическое ожидание числа событий на участке $[t_0, t_0+\tau]$ будет определяться формулой:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt. \tag{1.43}$$

Распределение между двумя соседними событиями для нестационарного потока будет следующим:

$$F_{t_0}(t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt}. \tag{1.44}$$

Как можно видеть из формулы (2.3), этот закон уже не будет показательным, поскольку его вид зависит от параметра t_0.

Ординарный поток однородных событий называется потоком с ограниченным последствием или *потоком Пальма*, если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой случайные величины. Отличием от простейшего потока событий является отсутствие требования показательного закона распределения данных случайных величин.

Потоки Пальма часто получаются в виде выходных потоков систем массового обслуживания. В теории массового обслуживания важную роль играет теорема Пальма.

Теорема. Пусть в систему массового обслуживания без очереди с отказами поступает поток заявок типа Пальма, а время их обслуживания распределено по экспоненциальному закону. Тогда поток заявок, получивших отказ, также образует поток Пальма.

Одним из важных видов потока с ограниченным последствием является *поток Эрланга*. Он образуется «просеиванием» простейшего потока.

Потоком Эрланга k-го порядка называется поток, получаемый из простейшего, если каждую k+1-ю точку (событие) в нем сохранить, а остальные удалить. Таким образом, простейшим является поток Эрланга нулевого порядка.

При неординарном потоке предполагается, что заявки могут поступать в систему не по одной, а партиями или группами. В случае, если неординарный поток удовлетворяет двум остальным требованиям простейшего потока, для его исследования целесообразно различать поток вызывающих моментов (т.е. поток моментов времени, когда в систему поступают заявки) и поток самих заявок. Очевидно, что поток вызывающих моментов в этом случае будет являться простейшим.

Для неординарного потока важной характеристикой является характеристика неординарности. m называется характеристикой неординарности, если в каждый вызывающий момент с вероятностью p_i поступает группа из m заявок. Величина m может быть как постоянной, так и переменной. В первом случае общее число вызовов, поступающих за время t с вероятностью $p_i(t)$ составляет $k = m \cdot i$. В случае переменного характера величины m число вызовов в данном временном интервале носит вероятностный характер.

1.6. Контрольные вопросы

1. Что такое случайный процесс?
2. Приведите классификацию случайных процессов.
3. Какой процесс называется марковским?
4. Какими вероятностями задается цепь Маркова?
5. Приведите уравнение Колмогорова-Чепмена для безусловных вероятностей.
6. Напишите уравнение Колмогорова-Чепмена для вероятностей перехода.
7. Как задается граф состояний? Приведите пример.
8. Приведите дифференциальные уравнения для безусловных вероятностей дискретного марковского процесса.
9. Напишите дифференциальные уравнения для вероятностей перехода дискретного марковского процесса.
10. Что такое стационарное распределение вероятностей?
11. Какой поток событий называется простейшим?
12. В чем заключается свойство стационарности?
13. Какой поток называется потоком без последствия?
14. Что означает условие ординарности?
15. Какой случайный процесс называется пуассоновским?
16. Какой поток называется потоком Пальма и каково его место в теории массового обслуживания?
17. Приведите формулировку теоремы Пальма и поясните ее назначение.

1. Какой поток называется потоком Эрланга?
2. Какой поток называется неординарным? Приведите пример неординарного потока.
3. Что такое характеристика неординарности?

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И КЛАССИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В данной главе излагаются математические основы для получения вероятностно-временных характеристик для классических обслуживающих систем. Понятие системы массового обслуживания описано в первой части главы. Во второй части приводится классификация систем массового обслуживания. Основные показателя систем массового обслуживания описаны в третьей части главы. Остальные части посвящены математическому моделированию и аналитическому аппарату для получения характеристик классических обслуживающих систем: систем с отказами, с очередью ограниченной и неограниченной длины, а также с очередью, ограниченной временем ожидания.

2.1. Предмет теории массового обслуживания

Под системами массового обслуживания будем понимать совокупность обслуживающих единиц (каналов обслуживания). Работа таких систем заключается в выполнении поступающего потока требований (заявок). В общем случае заявки поступают в систему в случайные моменты времени. При принятии заявки к обслуживанию занимается некоторый (как правило, произвольный) канал обслуживания. Выполнение заявки длится некоторое время (длительность, как правило, является случайной величиной), после чего занимаемый канал освобождается. Предмет теории массового обслуживания – это установление зависимости между эффективностью обслуживания и исходными данными (количеством каналов, интенсивностью поступления и обслуживания заявок, числом мест в очереди и т.д.). Характеристики эффективности функционирования систем массового обслуживания будут рассмотрены в п. 2.3.

Первые задачи теории массового обслуживания были рассмотрены А. Эрлангом в связи с необходимостью оптимизации работы телефонных станций и расчета качества обслуживания в зависимости от числа обслуживающих устройств. Дальнейшее совершенствование данной теории обусловлено развитием экономики, а также средств связи, науки и техники и ряда других областей. В настоящее время область применения систем массового обслуживания непрерывно расширяется. В частности, задачи массового обслуживания, а также близкие и родственные им задачи возникают в теории надежности, автоматизации производства, военном деле и множестве других областей практики. Это обуславливает непрерывное развитие математического аппарата, требует разработки все новых моделей и методов их решения, что стимулирует совершенствование всей теории массового обслуживания.

2.2. Классификация систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания включают в себя:

- входной поток требований или заявок;
- приборы (или каналы) обслуживания;
- очередь требований, ожидающих обслуживания;
- выходной поток обслуженных заявок (или заявок, получивших отказ в обслуживании).

Системы массового обслуживания можно классифицировать по следующим признакам:

1) по потокам заявок

Поток заявок носит случайный характер и может иметь различные законы распределения. Наиболее простой поток – пуассоновский. Под пуассоновским потоком понимается случайный процесс ξ(t), представляющий из себя число событий из простейшего потока событий, наступивших в интервале (0,t).

2) по времени обслуживания заявки

Время обслуживания – случайная величина, которая может иметь различные законы распределения (чаще всего, показательный). Показательный закон распределения – это закон распределения с полностью $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. При таком законе распределения если в какой-то момент времени t_0 происходит обслуживание заявки, то закон распределения оставшегося времени не зависит от того, сколько времени обслуживание уже продолжалось.

3) по числу каналов обслуживания

Все системы массового обслуживания делятся на одноканальные и многоканальные.

4) по наличию или отсутствию очереди

Согласно этому признаку, все системы массового обслуживания делятся на системы с отказами (когда заявка, пришедшая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, покидает системы не обслуженной) и системы с ожиданием. В этих системах заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не покидает систему, а становится в очередь и ждёт, пока не освободится какой-нибудь канал. Время ожидания и число мест в очереди могут быть как неограниченными, так и ограниченными.

5) по дисциплине (порядку) ожидания и обслуживания заявок

Она задаёт порядок выбора требований из очереди для обслуживания. Примерами стационарных дисциплин обслуживания являются обслуживание в порядке поступления (Fifo – первым пришёл, первым ушёл), обслуживание в обратном порядке (lifo – последним пришёл, первым ушёл) и случайный выбор требования для обслуживания. Если поступающие требования различаются по группам, и устанавливается некоторый приоритет обслуживания групп, то говорят о приоритетной дисциплине обслуживания.

6) по ограниченности потока заявок (замкнутые и разомкнутые системы)

В замкнутых системах источник заявок находится в самой СМО, и поток заявок зависит от состояния системы. Если поступает заявка от технического устройства, то объект начинает обслуживаться и в данный момент времени не подаёт новой заявки. Таким образом, интенсивность поступления заявок зависит от количества устройств, которые в данный момент времени не обслуживаются или не ожидают обслуживания.

2.3. Основные показатели систем массового обслуживания

Для анализа работы различных систем можно с помощью аналитических формул получить некоторые расчётные характеристики, показывающие, насколько оптимально работает данная система. Например, если вероятность простоя системы велика, это означает, что имеющееся число каналов обслуживания является избыточным, а если велико среднее число мест в очереди, то наоборот недостаточным. Приведём основные показатели эффективности систем.

1. *Вероятность отказа.* Отказ возникает в системах без очереди (заявка получает отказ, если все места в очереди заняты) или в системах с очередью ограниченной длины (заявка получает отказ, если заняты все каналы обслуживания и все места в очереди). Кроме того, отказ может возникнуть в системах с ограничением на время ожидания (в случае, если превышена допустимая величина). В любом случае, специфика расчета вероятности отказа зависит от конкретной системы.

2. *Вероятность обслуживания одной заявки*. Эта характеристика также называется относительной пропускной способностью Q. Как правило, данную характеристику находят по формуле:

$$Q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}}\,, \tag{2.1}$$

а вероятность отказа уже зависит от специфики исследуемой системы.

3. *Абсолютная пропускная способность системы*

$$A = \lambda \cdot Q. \tag{2.2}$$

4. *Среднее число занятых обслуживанием приборов или каналов обслуживания*. Это число определяется по следующей формуле:

$$\bar{J} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_{\text{обсл}}\,, \tag{2.3}$$

где λ- интенсивность входного потока заявок, а μ- интенсивность обслуживания.

5. *Среднее время занятости одного прибора* (или среднее время обслуживания одной заявки). Это время определяется следующим образом

$$t_{\text{обсл}} = \frac{1}{\mu}; \tag{2.4}$$

где μ- интенсивность обслуживания.

6. *Вероятность занятости канала*. Данная величина рассчитывается по формуле

$$P_{\text{з.к.}} = \frac{\bar{J}}{n}; \tag{2.5}$$

где n – число каналов обслуживания, а $\bar{J}$ определено с помощью формулы (2.3).

7. *Вероятность наличия очереди.* Данную характеристику можно определить двумя способами:

$$P_{\text{н.о.}} = \sum_{i=1}^{m} P_{n+i} = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i. \qquad (2.6)$$

Здесь n – число каналов обслуживания; m- число мест в очереди; $P_0,\ldots,\ P_n$ – вероятности пребывания системы в состояниях с отсутствием очереди, а P_{n+i}, i=1,…,m - вероятности пребывания системы в состояниях «заняты все каналы и одно место в очереди»,…, «заняты все каналы и все места в очереди».

8. *Среднее число заявок, стоящих в очереди*

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} i \cdot P_{n+i}, \qquad (2.7)$$

где P_{n+i}, i=1,…,m - вероятности пребывания системы в состояниях «заняты все каналы и одно место в очереди»,…, «заняты все каналы и все места в очереди».

9. *Среднее время пребывания заявки в очереди* определяется следующей формулой

$$t_{\text{очер}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \qquad (2.8)$$

10. *Вероятность полной загрузки системы*

$$P_{\text{п.з.}} = 1 - P_{\text{обсл}}. \qquad (2.9)$$

Как можно видеть из данной формулы, данная вероятность фактически совпадает с вероятностью отказа, поскольку и в том и в другом случае рассматривается вариант, когда все каналы заняты.

11. *Среднее время полной загрузки системы*

$$\bar{t}_{\text{п.з.}} = \frac{1}{n\mu}. \qquad (2.10)$$

12. *Вероятность простоя системы*

$$P_{\text{п.с.}} = P_0^*, \qquad (2.11)$$

где P_0^* - вероятность нахождения системы в состоянии «свободна».

13. *Среднее время простоя системы*

$$t_{\text{прост}} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.12)$$

2.4. Системы массового обслуживания с отказами

2.4.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Пусть на вход системы, состоящей из одного канала обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент прихода некоторой заявки канал обслуживания свободен, то заявка принимается к обслуживанию, в противном случае получает отказ. Интенсивность обслуживания - μ..

Найдём основные характеристики данной системы.

Данная система может находиться в одном из двух состояний:

«0» - канал свободен;

«1» - канал занят.

Граф состояний для данной системы будет выглядеть следующим образом.

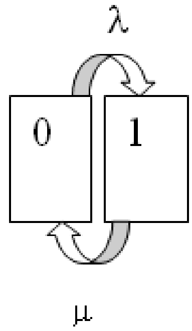


Рис. 2.1. Одноканальная система массового обслуживания

Вероятности пребывания системы в каждом из состояний могут быть найдёны с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t); \\ P_0(t) + P_1(t) = 1; \\ P_0(0) = 1; \\ P_1(0) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решив систему (2.13), получим:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \tag{2.14}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right). \tag{2.15}$$

Очевидно, что при неограниченном возрастании времени система будем иметь стационарный режим, причём вероятности пребывания в каждом из состояний будут определяться формулами:

$$P_0^* = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \tag{2.16}$$

$$P_1^* = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{2.17}$$

Вероятность отказа такой системы будет определяться как вероятность пребывания системы в состоянии «канал занят», поскольку, как видно из условия, именно в этом случае заявка получит отказ:

$$P_{\text{отк}} = P_1^* = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{2.18}$$

Тогда вероятность обслуживания будет рассчитываться следующим образом:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_1^* = P_0^* = \frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим пример функционирования одноканальной системы, когда заявки поступают в среднем через временной интервал, равный 90 с, а среднее время обслуживания составляет 80 с. Найдем вероятности обслуживания и отказа. Согласно исходным данным задачи $\lambda = \frac{1}{t_{\text{пост}}} = \frac{1}{90}$;

$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{80}$.

Подставим эти значения в формулы (2.19) и (2.18). Получим:

$P_{\text{обсл}} = P_0^* = \frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{90}+\frac{1}{80}} = 0.5294.$

$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обсл}} = 1 - 0.5294 = 0.4706.$

2.4.2. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Основное отличие рассматриваемой системы от предыдущей заключается в том, что она может параллельно обслуживать n заявок, где n – число каналов обслуживания.

На вход системы поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент прихода некоторой заявки хотя бы один из каналов обслуживания свободен, то заявка принимается к обслуживанию, в противном случае получает отказ. Интенсивность обслуживания каждого канала - μ..

Исследуем стационарный режим такой системы.

Данная система может находиться в одном из следующих состояний:

«0» - канал свободен;
«1» - занят один канал;
…
«j» - занято j каналов;
…
«n» - заняты все каналы.
Граф состояний такой системы приведён на рис. 2.2.

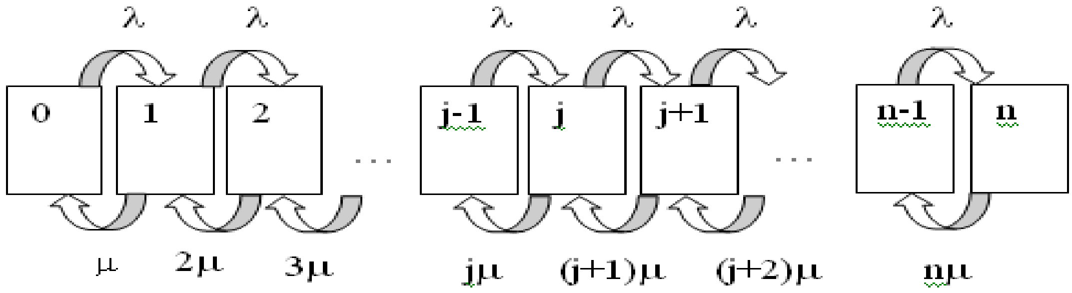


Рис. 2.2. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Составим по данному графу систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dots \\ \dfrac{dP_j(t)}{dt} = \lambda P_{j-1}(t) + (j+1)\mu P_{j+1}(t) - \\ -P_j(t)(\lambda + j \cdot \mu), \qquad j = 1, \dots, n-1; \\ \dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - n\mu P_n(t). \end{cases} \tag{2.20}$$

Рассмотрим поведение системы в установившемся режиме. Это означает, что с течением времени вероятности остаются неизменными и вместо дифференциальных уравнений Колмогорова можно перейти к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda P_0^* + \mu P_1^* = 0; \\ \dots \\ \lambda P_{j-1}^* + (j+1)\mu P_{j+1}^* - \\ -P_j^*(\lambda + j \cdot \mu) = 0, \qquad j = 1, \dots, n-1; \\ \dots \\ \lambda P_{n-1}^* - n\mu P_n^* = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Последнее уравнение можно заменить условием нормировки:

$$\sum_{j=0}^{n} P_j^* = 1 . \quad (2.22)$$

Для решения системы сделаем следующую замену:

$$u_j = -\lambda P_{j-1}^* + j\mu P_j^*, j = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

Тогда исходная система перепишется в виде:

$$\begin{cases} u_1 = 0; \\ u_2 - u_1 = 0; \\ \dots \\ u_n - u_{n-1} = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Очевидно, что все $u_j = 0$. Тогда

$$P_j^* = \frac{\lambda}{j\mu} P_{j-1}^*, j = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Найдём P_{j-1}^* из этой же формулы. Очевидно, что

$$P_{j-1}^* = \frac{\lambda}{j\mu} P_{j-2}^*$$

.

Продолжая таким образом выражать вероятности всех состояний от j до 1 и подставив эту значения в формулу (2.6), получим:

$$P_j^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \cdot \frac{1}{j!} \cdot P_0^*, j = 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

Обозначим через

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} . \quad (2.27)$$

и найдём P_0^* из условия нормировки:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} \cdot P_0^* = P_0^* \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} = 1 . \quad (2.28)$$

Отсюда

$$P_0^* = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}} . \quad (2.29)$$

Формулы (2.26) и (2.29) называются формулами Эрлагна.

Подставив это значение в формулу (2.26), получим

$$P_j^* = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}, j = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

Характеристики системы

1. Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P_n^* = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}. \quad (2.31)$$

2. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_n^* = 1 - \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}. \quad (2.32)$$

Эту характеристику также называют относительной пропускной способностью системы Q.

3. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{j} = \alpha \cdot P_{\text{обсл}} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}\right). \quad (2.33)$$

Для данной системы эту характеристику можно также найти по формуле

$$\bar{j} = \sum_{j=0}^{n} j \cdot P_j^*. \quad (2.34)$$

Пример 2.1. Рассмотрим пример многоканальной системы с отказами. Пусть на шестиканальную систему поступает поток заявок с интервалом времени между заявками в среднем 1,5 мин. Время обслуживания одной заявки составляет 500 с. Необходимо найти основные характеристики системы.

Чтобы воспользоваться указанными выше формулами для расчета вероятности обслуживания, отказа, а также других характеристик многоканальной СМО, требуется в первую очередь определить интенсивность поступления заявок и интенсивность обслуживания. Они определяются по формулам:

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{пост}}}$$

и

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}}.$$

соответственно. Приведя представленные временные значения к единым единицам времени (секундам) и воспользовавшись представленными выше формулами, будем иметь:

$\lambda = \frac{1}{90}; \mu = \frac{1}{500}.$

$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{500}{90} = 5{,}5556.$

Как видно из характеристик, все они основываются на формулах (2.30), где α=5.5556; n=6. Рассчитаем вероятности пребывания системы в состояниях 0,1,2,3,4,5,6. Для этого найдем значения $\frac{\alpha^j}{j!}$, где j=0,…,6. Получим:

$\frac{\alpha^0}{0!} = \frac{5.5556^0}{0!} = 1.$

$\frac{\alpha^1}{1!} = \frac{5.5556^1}{1!} = 5.5556;$ $\frac{\alpha^2}{2!} = 15.4321;$ $\frac{\alpha^3}{3!} = 28.57796;$ $\frac{\alpha^4}{4!} = 39.69161;$ $\frac{\alpha^5}{5!} = 44.10179;$ $\frac{\alpha^6}{6!} = 40.83499.$

Сложив данные значения, получим:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} = 175.197.$$

Воспользовавшись формулами (2.29) и (2.30), будем иметь:

$$P_0^* = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}} = \frac{1}{175.197} = 0.005708\ ;$$

$$P_1^* = \frac{\frac{\alpha^1}{1!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}} = \frac{5.5556}{175.197} = 0.031711;$$

$$P_2^* = \frac{\frac{\alpha^2}{2!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}} = \frac{15.4321}{175.197} = 0.088086;$$

P_3^*=0.163122; P_4^*=0.226558; P_5^*=0.251731; P_6^*=0.233084.

Исходя из этих значений, основные характеристики исследуемой СМО будут следующими:

1). Вероятность отказа $P_{\text{отк}} = P_6^* \approx 0.2331$.

2). Вероятность обслуживания $P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} \approx 0.7669$.

3). среднее число занятых каналов $\bar{j} = \alpha \cdot P_{\text{обсл}} = 4.2606.$

4). вероятность занятости отдельного канала: $P_{з.к.} = \frac{\bar{J}}{n} = 0.0701$.

Процесс вычислений данных характеристик можно значительно упростить, используя существующие приложения для автоматизации расчетов. К ним, в частности, можно отнести табличный редактор Excel.

Введем в новый рабочий лист следующие исходные данные (рис. 2.3).

	A	B
1	lambda	0,011111
2	mu	0,002
3	alpha	5,555556
4	n	6
5		

Рис. 2.3 . Исходные данные для многоканальной СМО

Для автоматизации расчета знаменателя в формуле (2.31) заполним столбец А (ячейки с 7 по 13) цифрами от 0 до 6 (поскольку число каналов равно 6), а в 7 ячейке столбца В введем формулу: $\alpha^i / i!$ (*рис*. 2.4).

СУММ ▾ × ✓ f_x

	A	B	C
1	lambda	0,011111	
2	mu	0,002	
3	alpha	5,555556	
4	n	6	
5			
6	i	alpha^i	
7	0	=$B$3^A7/ФАКТР(A7)	
8	1		
9	2		
10	3		
11	4		
12	5		
13	6		

Рис. 2.4. Формула $\alpha^i / i!$

Ячейка B3 (значение α) обрамлено знаками $ (кнопка F4) для того, чтобы сделать эту ячейку абсолютной. Это означает, что при протягивании формулы вниз значения i будут меняться (от 0 до 6), а значение α останется неизменным. Символ «^» означает степень, функция фактр() – факториал числа. Таким образом, протянув эту формулу до ячейки B13, будем иметь автоматически рассчитанные значения $\alpha^i / i!$ (*рис*. 2.5).

	A	B
1	lambda	0,011111
2	mu	0,002
3	alpha	5,555556
4	n	6
5		
6	i	alpha^i
7	0	1
8	1	5,555556
9	2	15,4321
10	3	28,57796
11	4	39,69161
12	5	44,10179
13	6	40,83499

Рис. 2.5. Результаты расчета слагаемых знаменателя

Просуммировав полученные значения (функция сумм()), получим $\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} = 175.197$.

Найдем вероятности пребывания системы во всех состояниях. Для этого в столбце D в ячейку D7 введем формулу (*рис. 2.6*):

СУММ =B7/$B$15

	A	B	C	D
1	lambda	0,011111		
2	mu	0,002		
3	alpha	5,555556		
4	n	6		
5				
6	i	alpha^i		Pi
7	0	1		=B7/$B$15
8	1	5,555556		
9	2	15,4321		
10	3	28,57796		
11	4	39,69161		
12	5	44,10179		
13	6	40,83499		
14				
15		175,194		

Рис. 2.6. Формула для расчета вероятностей для многоканальной СМО

Протянув ее до ячейки D13, получим вероятности пребывания системы во всех состояниях (*рис. 2.7*). Несложно проверить, что сумма этих вероятностей будет равна 1.

	A	B	C	D
1	lambda	0,011111		
2	mu	0,002		
3	alpha	5,555556		
4	n	6		
5				
6	i	alpha^i		Pi
7	0	1		0,005708
8	1	5,555556		0,031711
9	2	15,4321		0,088086
10	3	28,57796		0,163122
11	4	39,69161		0,226558
12	5	44,10179		0,251731
13	6	40,83499		0,233084
14				
15		175,194		1

Рис. 2.7. Расчет вероятностей пребывания системы во всех состояниях

Исходные данные для получения необходимых характеристик получены. Вероятность отказа – это вероятность пребывания системы в состоянии 6. В данном случае это значение ячейки D13. Остальные характеристики рассчитываются по аналогии с указанными выше формулами. В результате получили следующие числовые значения (*рис. 2.8*).

A	B	C	D	E	F	G	H
lambda	0,011111						
mu	0,002						
alpha	5,555556						
n	6						
i	alpha^i		Pi		**характеристики**		
0	1		0,005708		вероятность отказа		0,233084
1	5,555556		0,031711		вероятность обслуж		0,766916
2	15,4321		0,088086		среднее число з. кан		4,260642
3	28,57796		0,163122		вер. зан. отд. кан.		0,710107
4	39,69161		0,226558				
5	44,10179		0,251731				
6	40,83499		0,233084				
	175,194		1				

Рис. 2.8. Числовые характеристики многоканальной СМО с отказами

Таким образом, при аналитическом расчете использование табличных редакторов (например, Excel) существенно упрощает поиск необходимых характеристик.

2.5. Системы массового обслуживания с ожиданием

В системах с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не покидает систему, а становится в очередь и ждёт, пока не освободится какой-нибудь канал. Система массового обслуживания называется пуассоновской, если все потоки событий, переводящие её из состояния в состояние, являются пуассоновскими.

2.5.1. Системы с очередью ограниченной длины

Работа системы массового обслуживания с очередью определяется следующими параметрами:

- числом каналов обслуживания – n;
- интенсивностью (или плотностью) потока заявок - λ;
- интенсивностью обслуживания одного канала - μ (плотность потока заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом);
- числом мест в очереди – m.

Задачу можно сформулировать следующим образом. На вход систему поступает пуассоновский проток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания каждым каналом - μ. Если в момент прихода заявки все n каналов заняты, она ставится в очередь. Число мест в очереди – m. В случае занятости всех каналов обслуживания и всех мест в очереди заявка получает отказ.

На *рис. 2*.9 показан размеченный граф состояний n-канальной системы массового обслуживания с очередью, ограниченной m местами.

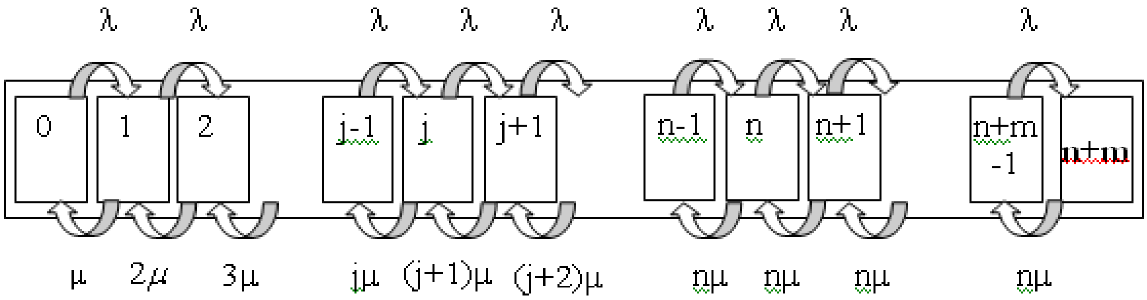


Рис. 2.9. Система массового обслуживания с очередью

Перечислим состояния системы:

0 - все каналы свободны, очереди нет;

1 - занят один канал, очереди нет;

…

k- занято k каналов, очереди нет;

…

n-заняты все n каналов, очереди нет;

n+1 – заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

…

n+m - заняты все n каналов, m заявок стоит в очереди;

С помощью графа состояний можно получить следующую систему дифференциальных уравнений для вероятностей нахождения системы в каждом из выше состояний $p_1(t),\dots,p_n(t),p_{n+1}(t),\dots,p_{n+m}(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dots \\ \dfrac{dP_j(t)}{dt} = \lambda P_{j-1}(t) + (j+1)\mu P_{j+1}(t) - \\ -P_j(t)(\lambda + j\cdot\mu), \qquad j = 1,\dots,n-1; \\ \dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + n\mu P_{n+1}(t) - P_n(t)(\lambda + n\cdot\mu); \\ \dots \\ \dfrac{dP_{n+s}(t)}{dt} = \lambda P_{n+s-1}(t) + n\mu P_{n+s+1}(t) - \\ -P_{n+s}(t)(\lambda + n\cdot\mu), \qquad s = 1,\dots,m; \\ \dots \\ \dfrac{dP_{n+m}(t)}{dt} = \lambda P_{n+m-1}(t) - n\mu P_{n+m}(t) \end{cases} \qquad (2.35)$$

Рассматривая предельный случай при t→∞, т.е. приравняв все производные к нулю, а все вероятности считая постоянными, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda P_0^* + \mu P_1^* = 0; \\ \dots \\ \lambda P_{j-1}^* + (j+1)\mu P_{j+1}^* - \\ -P_j^*(\lambda + j \cdot \mu) = 0, \qquad j = 1, \dots, n-1; \\ \dots \\ \lambda P_{n-1}^* + n\mu P_{n+1}^* - P_j^*(\lambda + n \cdot \mu) = 0; \\ \dots \\ \lambda P_{n+s-1}^* + n\mu P_{n+s+1}^* - \\ -P_{n+s}^*(\lambda + n \cdot \mu) = 0, \qquad s = 1, \dots, m; \\ \dots \\ \lambda P_{n+m-1}^* - n\mu P_{n+m}^* = 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Условие нормировки для данной системы примет следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{n+m} P_j^* = 1. \tag{2.37}$$

Заменим в данной системе условием нормировки следующее уравнение:

$$\lambda P_{n-1}^* + n\mu P_{n+1}^* - P_j^*(\lambda + n \cdot \mu) = 0.$$

В этом случае решение системы получается путем решения двух независимых подсистем. Одна из них содержит первые n уравнений, а другая – все уравнения, начиная с n+2. Конечный результат получится путем использования условия нормировки.

Несложно видеть, что первая подсистема полностью совпадает с уже рассмотренным ранее случаем для систем с отказами. Следовательно, для состояний 1,2,…, n будут справедливы формулы (2.26).

Аналогичным образом можно решить вторую подсистему. Несложно показать, что

$$P_{n+s}^* = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^s \cdot P_n^*, s = 1, \dots, m. \tag{2.38}$$

Обозначим через

$$\gamma = \frac{\lambda}{n\mu}. \quad (2.39)$$

Выразим вероятности пребывания системы во всех состояниях через P_0^*. Тогда формулы (2.38) перепишутся в виде:

$$P_{n+s}^* = \gamma^s \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \cdot P_0^*, s = 1, \dots, m. \quad (2.40)$$

Для нахождения P_0^* воспользуемся условием нормировки:

$$\sum_{j=0}^{n+m} P_j^* = \sum_{j=0}^{n} P_j^* + \sum_{s=1}^{m} P_{n+s}^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} \cdot P_0^* + \sum_{j=0}^{n+m} \gamma^s \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \cdot P_0^* =$$
$$= P_0^* \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n+m} \gamma^s \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \right) = 1.$$

Таким образом,

$$P_0^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n+m} \gamma^s \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}. \quad (2.41)$$

Упростим вторую сумму в знаменателе в зависимости от значения γ.

Если γ=1, то вторая сумма превратится в значение m. Если γ≠1, то результат суммирования можно получить, воспользовавшись формулой геометрической прогрессии:

$$\sum_{j=0}^{m} \gamma^s = \frac{\gamma \cdot (1 - \gamma^m)}{1 - \gamma}. \quad (2.42)$$

Таким образом, получим следующую формулу для вычисления вероятности пребывания в начальном состоянии:

$$P_0^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot m}, \gamma = 1; \\ \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\gamma \cdot (1 - \gamma^m)}{1 - \gamma}}, \quad \gamma \neq 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

Используя формулы (2.26) и (2.40), выпишем математические выражения для случая, когда $\gamma=1$ и $\gamma\neq1$.

1. $\gamma=1$.

$$P_0^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot m}\ ; \tag{2.44}$$

$$P_j^* = \frac{\alpha^j}{j!}\cdot\frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot m}, j = 1, \dots, n; \tag{2.45}$$

$$P_{n+s}^* = \gamma^s\cdot\frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot m}, s = 1, \dots, m\ . \tag{2.46}$$

2. $\gamma\neq1$

$$P_0^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{\gamma\cdot(1-\gamma^m)}{1-\gamma}}; \tag{2.47}$$

$$P_j^* = \frac{\alpha^j}{j!}\cdot\frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{\gamma\cdot(1-\gamma^m)}{1-\gamma}}, j = 1, \dots, n; \tag{2.48}$$

$$P_{n+s}^* = \gamma^s\cdot\frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{1}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{\gamma\cdot(1-\gamma^m)}{1-\gamma}}, s = 1, \dots, m\ . \tag{2.49}$$

На основании данных формул можно рассчитать основные характеристики системы. Выпишем их в общем виде.

Характеристики системы

1. Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m}^* = \gamma^s\cdot\frac{\alpha^n}{n!}\cdot P_0^*. \tag{2.50}$$

2. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{n+m}^*\ . \tag{2.51}$$

3. Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{н.о.}} = \sum_{i=1}^{m} P_{n+i} = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i \ . \qquad (2.52)$$

4. Средняя длина очереди:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} i \cdot P_{n+i} \ , \qquad (2.53)$$

5. Среднее время ожидания:

$$t_{\text{очер}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \ . \qquad (2.54)$$

Остальные характеристики были определены ранее.

Пример 2.2. Рассмотрим двухканальную систему массового обслуживания с очередью, ограниченной 4 местами. На вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью 5 заявок в минуту; среднее время обслуживания одной заявки 30 секунд. Найти основные характеристики системы.

Решение.

Поскольку интенсивность входного потока заявок задана в минутах, необходимо время обслуживания также выразить в минутах: $t_{\text{обсл}}$= 0.5 мин (можно было интенсивность поступления рассчитывать не через минуты, а через секунды, главное, чтобы поступление и обслуживание измерялись в одних и тех же временных единицах).

$$\lambda = 5; \ \mu = \frac{1}{0.5} = 2;$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2.5; \ \gamma = \frac{\alpha}{\mu} = 1.25$$

Как и в примере 2.1, рассчитаем вначале значения $\frac{\alpha^j}{j!}$, где j=0,1,2. Автоматизировав данный процесс в Excel по аналогии с рис. 2.5, получим следующие значения (*рис. 2.10*).

	A	B	C	D
1	lambda	5		
2	mu	2		
3	alpha	2,5		
4	gamma	1,25		
5	n	2		
6	m	4		
7				
8	i	a^i/i!	Pi	
9	0	1		
10	1	2,5		
11	2	3,125		
12				
13	сумм1	6,625		
14	сумм2	=B11*B4*(1-B4^B6)/(1-B4)		

Рис. 2.10. Расчет двух слагаемых знаменателя

Поскольку $\gamma \neq 1$, для вычисления P_0 будем использовать формулу (2.47). Автоматизация расчета второго слагаемого знаменателя для формулы (2.47) также представлена на рис. 2.10. Сложив обе суммы, получим, что знаменатель для всех слагаемых равен 29.14697.

Рассчитаем выражения, описывающие состояния, связанные с каналами обслуживания, с помощью формулы (2.48). по аналогии с предыдущим примером, разделим соответствующие значения столбца B на найденную сумму. Пример автоматизации расчетов приведен на *рис. 2.11*.

Далее будем искать вероятности пребывания в состояниях, описывающих места в очереди. Для этого в столбце E будем описывать последовательно текущие длины очередей от 1 до m, а столбец а будет предназначен для вероятностей. Вероятность пребывания в состоянии n+1 (заняты все места и одно место в очереди) будет рассчитываться с учетом формулы (2.38) следующим образом:

$$P^*_{n+1} = \gamma \cdot P^*_n. \tag{2.55}$$

	A	B	C	D
1	lambda	5		
2	mu	2		
3	alpha	2,5		
4	gamma	1,25		
5	n	2		
6	m	4		
7				
8	i	a^i/i!	Pi	
9	0	1	=B9/$D$14	
10	1	2,5		
11	2	3,125		
12				
13	сумм1	6,625		
14	сумм2	22,52197	знам	29,14697

Рис. 2.11. Автоматизация расчетов вероятностей для состояний, описывающих каналы обслуживания

Введем данную формулу в ячейку F7 (*рис. 2.12*).

	A	B	C	D	E	F
1	lambda	5				
2	mu	2				
3	alpha	2,5				
4	gamma	1,25				
5	n	2				
6	m	4			m	
7					1	=B4*C11
8	i	a^i/i!	Pi		2	
9	0	1	0,034309		3	
10	1	2,5	0,085772		4	
11	2	3,125	0,107215			
12						
13	сумм1	6,625				
14	сумм2	22,52197	знам	29,14697		

Рис. 2.12. Расчет вероятности для состояния n+1

Для остальных состояний, описывающих очередь, будем использовать формулу:

$$P^*_{n+s} = \gamma \cdot P^*_{n+s-1} \,. \qquad (2.56)$$

Автоматизация вычислений для состояния n+2 представлена на **рис. 2.13.** Протянув формулу, получим автоматический перерасчет для остальных состояний.

	A	B	C	D	E	F
1	lambda	5				
2	mu	2				
3	alpha	2,5				
4	gamma	1,25				
5	n	2				
6	m	4			m	
7					1	0,134019
8	i	a^i/i!	Pi		2	=F7*$B$4
9	0	1	0,034309		3	
10	1	2,5	0,085772		4	
11	2	3,125	0,107215			
12						
13	сумм1	6,625				
14	сумм2	22,52197	знам	29,14697		

Рис. 2.13. Расчет вероятности для состояния n+2

Если расчеты проведены верно, то сумма вероятностей пребывания во всех состояниях будет равна 1 (т.е. будет выполнено условие нормировки). Проверка данного условия приведена на *рис. 2.14*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	lambda	5						
2	mu	2						
3	alpha	2,5						
4	gamma	1,25						
5	n	2						
6	m	4			s	Pn+s		
7					1	0,134019		
8	i	a^i/i!	Pi		2	0,167524		
9	0	1	0,034309		3	0,209405		
10	1	2,5	0,085772		4	0,261756		
11	2	3,125	0,107215					
12						=сумм(C9:C11)+сумм(F7:F10)		
13	сумм1	6,625						
14	сумм2	22,52197	знам	29,14697				

Рис. 2.14. Проверка условия нормировки

Теперь найдем характеристики системы.

1) Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P^*_{2+4} = 0.261756\,.$$

2) Вероятность обслуживания или относительная пропускная способность:

$$Q = P_{\text{обсл}} = 1 - P^*_{2+4} = 0.738244\,.$$

3) $A = \lambda \cdot Q$ =3.69122;

4) среднее число занятых каналов $\bar{J} = \alpha \cdot P_{\text{обсл}} = 1.84561$;

5) вероятность наличия очереди

$P_{\text{н.о.}} = \sum_{i=1}^{m} P_{n+i} = 0.722704.$

В табличном редакторе суммируются ячейки F7:F11.

6) средняя длина очереди

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} i \cdot P_{n+i} = 1 \cdot 0.134019 + 2 \cdot 0.167524 + 3 \cdot 0.209405 + 4 \cdot 0.261756$$
$$= 2.144305$$

В табличном редакторе Excel используется функция суммпроизв() (рис. 2.15).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	lambda	5					Характеристики			
2	mu	2					1. Вер. Отк	0,261756		
3	alpha	2,5					2. Вер. обсл. (Q)	0,738244		
4	gamma	1,25					3. Абс. Прос. Спос.	3,69122		
5	n	2					4. ср. число з.к.	1,84561		
6	m	4			s	Pn+s	5. вер. нал. Очер	0,772704		
7					1	0,134019	6. средняя длина оч	=суммпроизв(E7:E10;F7:F10)		
8	i	a^i/i!	Pi		2	0,167524				
9	0	1	0,034309		3	0,209405				
10	1	2,5	0,085772		4	0,261756				
11	2	3,125	0,107215							
12						1				
13	сумм1	6,625								
14	сумм2	22,52197	знам	29,14697						

Рис. 2.15. Расчет средней длины очереди

7) среднее время ожидания:

$$t_{\text{очер}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 0.428861\,.$$

Результаты расчетов всех характеристик в редакторе Excel приведены на рис. 2.16.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	lambda	5					**Характеристики**	
2	mu	2					1. Вер. Отк	0,261756
3	alpha	2,5					2. Вер. обсл. (Q)	0,738244
4	gamma	1,25					3. Абс. Прос. Спос.	3,69122
5	n	2					4. ср. число з.к.	1,84561
6	m	4			s	Pn+s	5. вер. нал. Очер	0,772704
7					1	0,134019	6. средняя длина оч	2,144305
8	i	a^i/i!	Pi		2	0,167524	7. среднее вр ож	0,428861
9	0	1	0,034309		3	0,209405		
10	1	2,5	0,085772		4	0,261756		
11	2	3,125	0,107215					
12						1		
13	сумм1	6,625						
14	сумм2	22,52197	знам	29,14697				

Рис. 2.15. Расчет всех характеристик для СМО с очередью ограниченной длины

В случае, если γ=1, изменится лишь вычисление для второго слагаемого суммы в знаменателе (т.е. значение сумм2 на рис. 2.10). Все остальное будет определено аналогичным образом.

2.5.2. Системы с неограниченной очередью

Система массового обслуживания называется чистой системой с ожиданием, если ни время пребывания заявки в очереди, ни число заявок ничем не ограничено. Для данной системы установившийся предельный режим существует только в случае

$$\frac{\alpha}{n} < 1. \tag{2.57}$$

В этом случае чистая система с ожиданием получается из только что рассматриваемой системы с ограничением по числу мест в очереди, путем устремления количества мест в очереди в бесконечность ($m \to \infty$). Тогда формулы (2.16) и (2.17) с учётом ограничения (2.57) преобразуются в следующие:

$$\begin{cases} P_k^* = \dfrac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{n}\dfrac{\alpha^j}{j!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\dfrac{\gamma}{1-\gamma}}, k = 0,1,\dots,n; \\ P_{n+s}^* = \dfrac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot(\gamma)^s}{\sum_{j=0}^{n}\dfrac{\alpha^j}{j!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\dfrac{\gamma}{1-\gamma}}, s = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{2.58}$$

Здесь γ определяется формулой (2.39).

Характеристики системы

1. Вероятность отказа для систем с неограниченной очередью равна нулю.

2. Средняя длина очереди:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot P_{n+i} = \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot(\gamma)^i\cdot P_n^* = \gamma\cdot P_n^* \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot(\gamma)^{i-1}.$$

Анализируя слагаемое под знаком суммы, можно сделать вывод о том, что оно является производной от $(\gamma)^i$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot(\gamma)^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(\gamma)^i\right)'.$$

Найдем сумму ряда, представленного в правой части равенства (как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии), а после возьмем производную от получившегося выражения:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\gamma)^i = \frac{\gamma}{1-\gamma};$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\gamma)^i\right)' = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)' = \frac{1\cdot(1-\gamma)-(-1)\cdot\gamma}{(1-\gamma)^2}.$$

Таким образом,

$$\bar{r} = \gamma\cdot P_n^* \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot(\gamma)^{i-1} = \gamma\cdot P_n^*\cdot\frac{1}{(1-\gamma)^2}. \tag{2.59}$$

3. Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{н.о.}} = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i. \quad (2.60)$$

Пример 2.3. Рассмотреть возможность использования математического аппарата для анализа характеристик СМО, описанной в примере 3.2, в случае наличия очереди бесконечной длины. Если это невозможно, внести минимальные изменения в число каналов обслуживания и получить характеристики данной системы.

Решение. Очевидно, что для примера 2.2 неравенство (2.18) не будет иметь место. В связи с этим, применения математического аппарата для данной системы в предположении о бесконечной длине очереди невозможно. Чтобы левая часть неравенства стала меньше единицы, ее необходимо уменьшить и, как следствие, увеличить знаменатель, то есть n. Рассмотрим выполнение (2.18) при n=3.

$$\gamma = \frac{\alpha}{n} = \frac{2.5}{3} = 0.8333.$$

Поскольку полученное значение меньше 1, то к системе с тремя каналами уже можно применить математический аппарат для получения ее характеристик. Выполним это. Пересчитаем формулы с учетом нового появившегося канала.

$\frac{\alpha^3}{3!} = 2.6042.$

В этом случае расчеты будут выглядеть следующим образом (*рис. 2.16*).

	A	B	C
1	lambda	5	
2	mu	2	
3	alpha	2,5	
4	gamma	0,833333	
5	n	3	
6			
7			
8	i	a^i/i!	Pi
9	0	1	0,044944
10	1	2,5	0,11236
11	2	3,125	0,140449
12	3	2,604167	0,117041
13			
14	сумм1	9,229167	
15	сумм2	=B12*B4/(1-B4)	

Рис. 2.16. Расчет вероятностей пребывания в состояниях, характеризующих обслуживание

Как можно видеть из рис. 2.16, $P_n^* = P_3^* = 0.117041$.

У данной системы будут следующие характеристики:

1) вероятность отказа равна 0;
2) вероятность обслуживания (или Q) равна 1
3) абсолютная пропускная способность равна λ=5
4) среднее число каналов обслуживания равно α=2.5
5) средняя длина очереди:

$$\bar{r} = P_n^* \cdot \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2} = 0.117041 \cdot \frac{0.8333}{(1-0.8333)^2} = 3.5112.$$

6) вероятность наличия очереди

$$P_{\text{н.о.}} = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 - 0.044944 - 0.11236 - 0.140449 = 0.5852.$$

2.5.3. Системы с очередью, ограниченной временем ожидания

Рассмотрим многоканальную систему с очередью, ограниченной временем ожидания. Пусть на n-канальную систему поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявки одним каналом - μ. Если хотя бы один из каналов свободен, заявка принимается к обслуживанию, в противном случае – ставится в очередь. Число мест в очереди неограниченно. Однако, время пребывания заявки в такой очереди ограничено случайным сроком $t_{ож}$, по истечении которого заявка покидает систему. Введем в рассмотрение интенсивность ν, отвечающую за интенсивность «ухода заявок из очереди». Очевидно, что

$$\nu = \frac{1}{t_{ож}}. \qquad (2.61)$$

Очевидно, что при ν→∞ система превращается в систему с отказами, а при ν→0 – в систему с очередью неограниченной длины.

Возможные состояния системы будут следующие:

0- все каналы свободны, очереди нет;

1- занят один канал, очереди нет;

…

k- занято k каналов, очереди нет;

…

n-заняты все n каналов, очереди нет;

n+1 – заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

…

n+m - заняты все n каналов, m заявок стоит в очереди;

…

Количество состояний (а, следовательно, и число уравнений в системе) неограниченно.

Как и в других системах с ожиданием, первые n уравнений абсолютно идентичны уравнениям для чистой системы с отказами. Поэтому решение этих уравнений будет определячться формулами (2.26). В связи с этим, составим систему уравнений лишь для состояний, n, n+1, n+2, …

$$\begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + (n\mu + \nu)P_{n+1}(t) - P_n(t)(\lambda + n\cdot\mu); \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ \dfrac{dP_{n+s}(t)}{dt} = \lambda P_{n+s-1}(t) + (n\mu + (s+1)\,\nu)P_{n+s+1}(t) - \\ \qquad\qquad -P_{n+s}(t)(\lambda + n\cdot\mu), \qquad s = 1,2,\dots; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \end{cases} \qquad (2.62)$$

В установившемся режиме получим следующий аналог системы (2.62):

$$\begin{cases} \lambda P_{n-1}^* + (n\mu + \nu)P_{n+1}^* - P_n^*(\lambda + n\cdot\mu) = 0; \\ \qquad\qquad \dots \\ \lambda P_{n+s-1}^* + (n\mu + (s+1)\,\nu)P_{n+s+1}^* - \\ \qquad -P_{n+s}^*(\lambda + n\cdot\mu) = 0,\ s = 1,2,\dots; \\ \qquad\qquad \dots \end{cases} \qquad (2.63)$$

Для решения данной системы (как и в предыдущих случаях) целесообразно перейти к новым переменным:

$$u_s = -\lambda P^*_{n+s-1} + (n\mu + s \cdot \nu)P^*_{n+s}, s = 1,2,\ldots \quad (2.64)$$

Также при решении системы (2.21) известно, что:

$$-\lambda P^*_{n-1} + n\mu P^*_n = 0. \quad (2.65)$$

В связи с этим, получим следующую систему:

$$\begin{cases} u_1 = 0; \\ u_2 - u_1 = 0; \\ u_3 - u_2 = 0; \\ \ldots \end{cases} \quad (2.66)$$

Откуда очевидно, все u_s=0*;* s=1,2,…

Таким образом,

$$P^*_{n+s} = \frac{\lambda}{n\mu + s \cdot \nu} P^*_{n+s-1}, \qquad s = 1,2,\ldots \quad (2.67)$$

Последовательно подставляя в формулу (2.67) значения s=1,2,…, будем иметь:

$$P^*_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu + \nu} \cdot P^*_n\,;$$

$$P^*_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu + 2\nu} \cdot P^*_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu + 2\nu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu + \nu} \cdot P^*_n;$$

$$P^*_{n+3} = \frac{\lambda}{n\mu + 3\nu} \cdot P^*_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu + 3\nu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu + 2\nu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu + \nu} \cdot P^*_n.$$

Обобщая на случай произвольного s, получим:

$$P^*_{n+s} = \frac{\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot P^*_n, \qquad s = 1,2,\ldots \quad (2.68)$$

Подставим формулы (2.26) и (2.67) в условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P^*_i = 1. \quad (2.69)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P^*_i = \sum_{i=0}^{n} P^*_i + \sum_{s=1}^{\infty} P^*_{n+s} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} P^*_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot P^*_n =$$

$$P_0^* \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + P_0^* \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = 1.$$

Отсюда:

$$P_0^* = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}. \quad (2.70)$$

С учетом формулы (2.70) вероятности пребывания системы в первых n состояниях рассчитываются по формуле (2.26), а в остальных состояниях – по формуле (2.68).

Характеристики системы:

1. Средняя длина очереди:

$$\bar{r} = \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot P_{n+s} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \cdot \lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}. \quad (2.71)$$

2. Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\nu}{\lambda} \cdot \bar{r} = \frac{\nu}{\lambda} \cdot \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \cdot \lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m \cdot \nu)} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}. \quad (2.72)$$

3. Вероятность наличия очереди можно рассчитать, как и в предыдущем примере: $P_{\text{но}} = 1 - \sum_{i=0}^{n} P_i$.

Остальные вероятности аналогичны обычной СМО с очередью.

Пример 2.4. На одноканальное устройство в среднем через 20 с поступают заявки. Среднее время обслуживания каналом составляет 20 с. В случае, если в момент поступления заявки канал занят, она ожидает в очереди. Максимальное время ожидания составляет в среднем 10 с. Если в течение данного времени канал не освободился, то заявка покидает систему необслуженной. Найти основные характеристики системы.

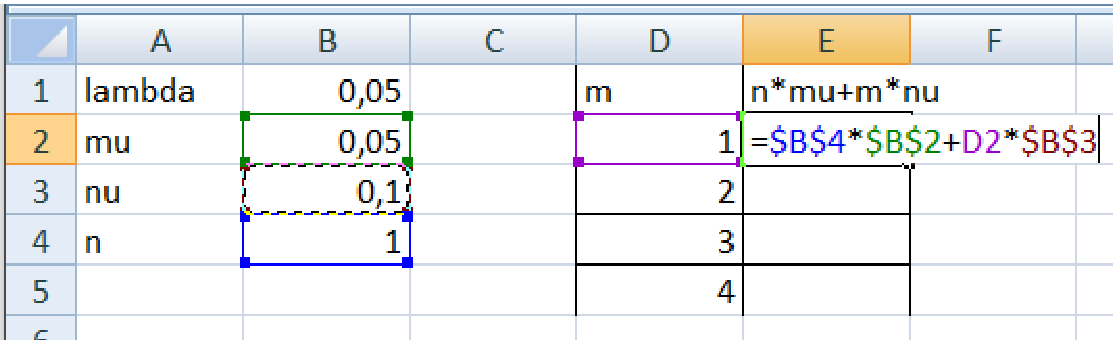
Решение. $\lambda = \frac{1}{20}$; $\mu = \frac{1}{20}$; $\nu = \frac{1}{10}$.

Для нахождения P_0 необходимо рассчитать бесконечную сумму. Будем рассчитывать ее до тех пор, пока очередное слагаемое не окажется меньше, чем 0.005.

Рассчитаем выражение $\prod_{m=1}^{s}(n\mu + m\cdot\nu)$. Для этого рассчитаем сначала отдельные множители.

m=1. $1\cdot\mu + 1\cdot\nu = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0.15$;
m=2. $1\cdot\mu + 2\cdot\nu = \frac{1}{20} + \frac{2}{10} = 0.25$;
m=3. $1\cdot\mu + 3\cdot\nu = \frac{1}{20} + \frac{3}{10} = 0.35$;
m=4. $1\cdot\mu + 4\cdot\nu = \frac{1}{20} + \frac{4}{10} = 0.45$;
и т.д.

Автоматизация этих расчетов выглядит следующим образом (*рис. 2.17*).

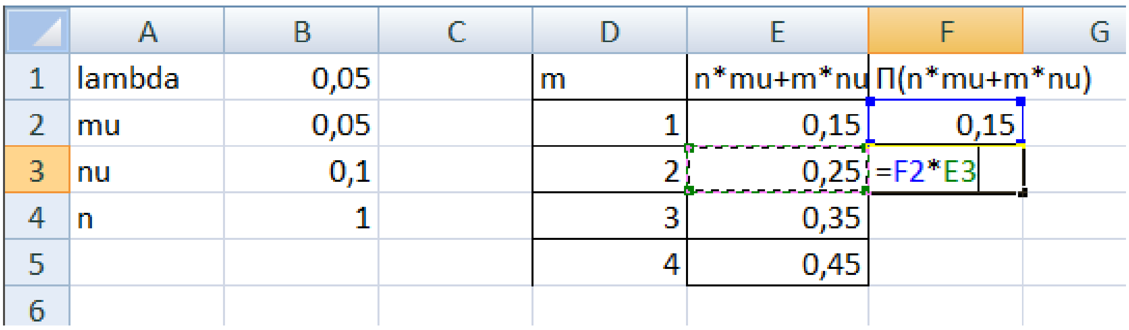


	A	B	C	D	E	F
1	lambda	0,05		m	n*mu+m*nu	
2	mu	0,05		1	=$B$4*$B$2+D2*$B$3	
3	nu	0,1		2		
4	n	1		3		
5				4		

Рис. 2.17. Автоматизация расчета множителей

Протянув формулу в ячейке E2 вниз, получим значения отдельных множителей для разных m.

Далее найдем произведение данных множителей. Для автоматизации будем последовательно умножать произведение, полученное на предыдущем шаге, на текущий множитель. Данный процесс показан на *рис. 2.18*.



	A	B	C	D	E	F	G
1	lambda	0,05		m	n*mu+m*nu	П(n*mu+m*nu)	
2	mu	0,05		1	0,15	0,15	
3	nu	0,1		2	0,25	=F2*E3	
4	n	1		3	0,35		
5				4	0,45		
6							

Рис. 2.18. Автоматизация произведения

Далее будем отдельно находить слагаемые для числителя и знаменателя формул (2.71) и (2.72). Опишем слагаемые для вычисления следующей части формулы числителя:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\cdot\lambda^s}{\prod_{m=1}^{s}(n\mu+m\cdot\nu)}\cdot\frac{\alpha^n}{n!}. \tag{2.73}$$

s=1.

$$\text{slag}=\frac{1\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{10}}=0.333.$$

s=2.

$$\text{slag}=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^2}{\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{2}{10}\right)}=0.1334.$$

s=3.

$$\text{slag}=\frac{3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^3}{\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{2}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{3}{10}\right)}=0.02857.$$

s=4.

$$\text{slag}=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^4}{\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{2}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{4}{10}\right)}=0.004232.$$

В данном случае тоже оказалось достаточно четырех итераций, поскольку четвертое слагаемое оказалось меньше 0.005.

Тогда числитель формулы, позволяющей вычислить среднюю длину очереди, будет определяться следующим образом:

$$ch=1\cdot(0.333+0.1334+0.02857+0.004232)=0.4992$$

Автоматизируем данные расчеты в Excel. Поскольку столбец F уже хранит необходимое произведение, для расчетов требуется посчитать на каждом шаге числитель и разделить на ячейку с соответствующим произведением. Автоматизация формулы, которую необходимо протянуть в Excel, приведена на *рис. 2.19*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	lambda	0,05		m	n*mu+m*nu	П(n*mu+m*nu)		s	слаг.числ.	
2	mu	0,05		1	0,15	0,15		1	=H2*$B$1^H2/F2	
3	nu	0,1		2	0,25	0,0375		2		
4	n	1		3	0,35	0,013125		3		
5				4	0,45	0,005906		4		

Рис. 2.19. Автоматизация расчета числителя

Аналогичным способом можно рассчитать знаменатель. Его отличие от формулы (2.73) заключается в отсутствии в числителе формулы множителя s.

s=1.

$$\text{slag} = \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{10}} = 0.333.$$

s=2.

$$\text{slag} = \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^2}{\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{10}\right)} = 0.0667.$$

s=3.

$$\text{slag} = \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^3}{\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{3}{10}\right)} = 0.009524.$$

s=4.

$$\text{slag} = \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^4}{\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{4}{10}\right)} = 0.001058.$$

Как можно видеть, очередное выражение оказалось меньше 0.005. В связи с этим, ограничимся четырьмя итерациями. Как можно увидеть из данных расчетов, последовательность, которую образуют слагаемые, достаточно быстро убывает. Для нахождения P_0 рассчитаем общую сумму:

$$znam = \sum_{i=0}^{1} \frac{\alpha^i}{i!} + slag1 + slag2 + slag3 + slag4 =$$

$$= 1 + 1 + 0.333 + 0.0667 + 0.009524 + 0.001058 = 2.41058$$

В данном случае тоже оказалось достаточно четырех итераций, поскольку четвертое слагаемое оказалось меньше 0.005.

Тогда числитель формулы, позволяющей вычислить среднюю длину очереди, будет определяться следующим образом:

$$ch = 1 \cdot (0.333 + 0.1334 + 0.02857 + 0.004232) = 0.4992$$

Подставим отдельные слагаемые в формулу для вычисления средней длины очереди:

$$\bar{r} = \frac{0.4992}{2.41058} = 0.2071$$

Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\nu}{\lambda} \cdot \bar{r} = \frac{0.1}{0.05} \cdot 0.2071 = 0.4142$$

$$P_0 = \frac{1}{2.41} = 0.4148\ ;$$

$$P_1 = \alpha \cdot P_0 = 0.4148\ .$$

Исходя из этого, вероятность наличия очереди будет определена следующим образом:

$$P_{\text{но}} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - 0.4148 - 0.4148 = 0.1704\ .$$

Таким образом, получим следующие характеристики системы:

1) средняя длина очереди $\bar{r} = 0.2071$

2) вероятность отказа $P_{\text{отк}} = 0.4142$

3) вероятность наличия очереди $P_{\text{но}} = 0.1704$

2.6. Контрольные вопросы

1. Приведите классификацию систем массового обслуживания.
2. Напишите формулы, с помощью которых рассчитываются вероятности обслуживания и отказа для одноканальной системы с отказами.
3. Нарисуйте граф состояний, описывающий многоканальную систему с отказами, и выпишите по нему систему дифференциальных или алгебраических уравнений.
4. Каковы основные характеристики таких систем?
5. Выпишите формулы Эрланга.
6. Приведите основные характеристики многоканальной СМО с отказами.
7. Какими параметрами определяется СМО с очередью ограниченной длины?
8. Приведите граф состояний описывающий системы с очередью ограниченной длины, и выпишите по нему систему дифференциальных или алгебраических уравнений.
9. Выпишите формулы, определяющие вероятности пребывания во всех состояниях для данной системы.
10. Приведите основные характеристики данной системы.
11. В каком случае существует установившийся режим для системы с очередью неограниченной длины?
12. Выпишите вероятности пребывания системы во всех состояниях.
13. Приведите основные характеристики данной системы.
14. Сформулируйте задачу для системы с очередью, ограниченной временем.
15. Приведите систему дифференциальных или алгебраических уравнений для СМО с очередью, ограниченной временем ожидания.
16. Как определяются вероятности пребывания СМО с очередью, ограниченной временем ожидания, во всех состояниях?
17. Приведите основные характеристики для данной системы.

3 АППАРАТ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНОК ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Математический аппарат, предложенный в предыдущей главе может быть применим лишь к системам, удовлетворяющим целому ряду ограничений. В связи с этим, для анализа более сложных систем и получения их характеристик зачастую применяют аппарат имитационного моделирования. Среди многообразия систем имитационного моделирования можно, несомненно, выделить среду AnyLogic, позволяющую не только имитировать процессы, протекающие в обслуживающих системах, но и получить дополнительные возможности для анализа статистических результатов (гистограммы, графики, вероятностно-временные характеристики и т.д.), а также оптимизировать функционирования обслуживающих систем с помощью подсистем, позволяющих проводить различные, в том числе, оптимизационные, эксперименты.

Данная глава будет посвящена возможностям среды AnyLogic применительно к анализу обслуживающих систем. В первой части главы

3.1 Основные блоки для имитации моделирования классических систем массового обслуживания

Проанализируем системы массового обслуживания с точки зрения возможности имитации последовательность действий, необходимых для обеспечения системой обслуживания заявок. В систему в некоторые моменты времени поступают заявки согласно некоторому закону. Далее осуществляется непосредственно процесс обслуживания. Как было отмечено ранее, системы могут быть с отказами или с очередью, причем очередь может иметь как ограниченную, так и неограниченную длину.

В настоящее время существует целый систем имитационного моделирования, позволяющих на основании многократного прогона модели, описывающей системы массового обслуживания, получить оценку основных ее характеристик. В данном пособии будут рассматриваться особенности среды anyLogic, сочетающей, по мнению автора, наиболее удобные инструменты не только для моделирования, но и для получения результатов и их дальнейшего анализа.

В среде AnyLogic для работы с системами массового обслуживания существует библиотека моделирования процессов. В частности, чтобы создать поток заявок имеется объект Source, основные свойства которого представлены на рис. 3.1.

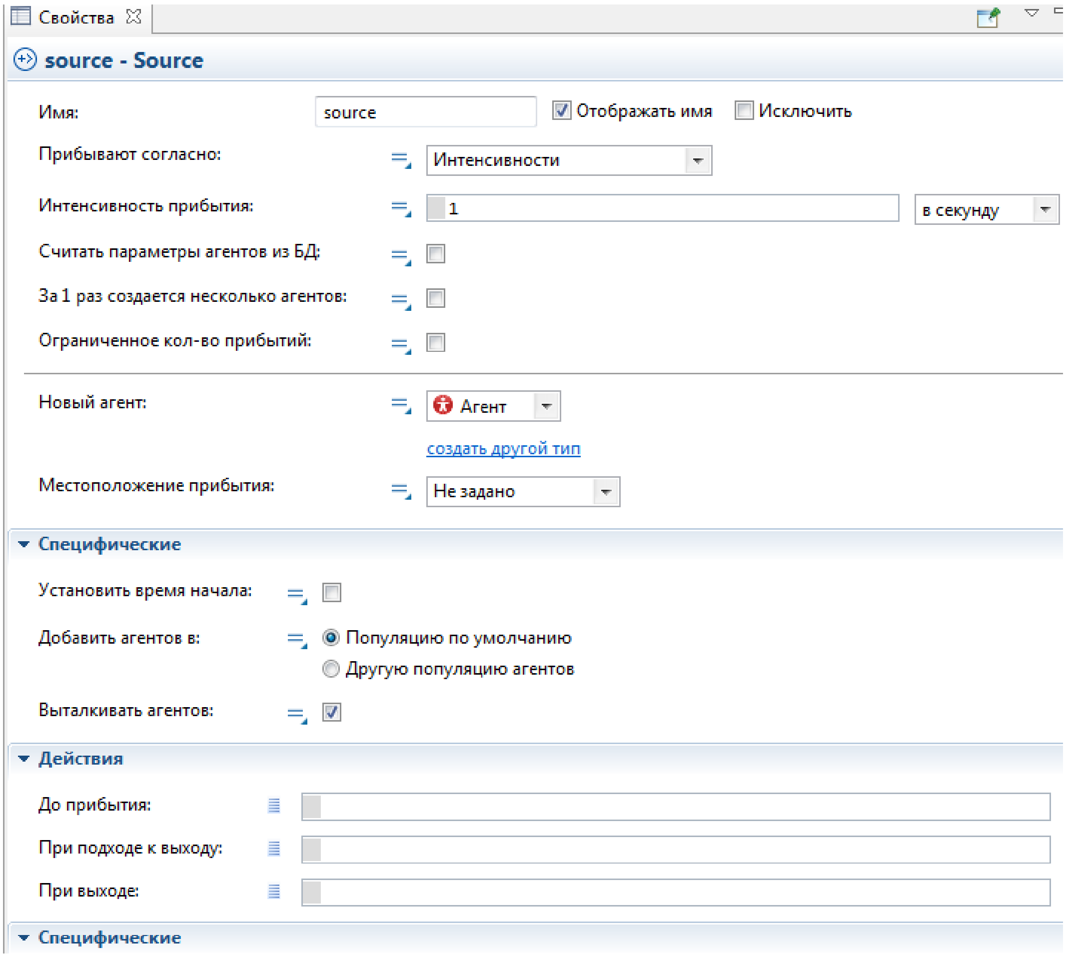


Рис. 3.1. Свойства объекта Source

С помощью свойства «Прибывают согласно:» можно обеспечить разные возможности поступления заявок. AnyLogic предоставляет следующие возможности моделирования.

1. Задать прибытие с помощью интенсивностей. В этом случае появится дополнительное поле «Интенсивность прибытия», в которое можно записать константу, если заявки прибывают через строго определенные моменты, или случайную величину, подчиненную одному из законов распределения, для которых в AnyLogic предусмотрено множество соответствующих функций.

2. Задать прибытие с помощью времени, прошедшего между двумя последвоательно поступающими в модель заявками. Как и интенсивность, это время может быть константой или случайной величиной, распределенной по одному из имеющихся законов.

3. Задать прибытие с помощью расписаний. Расписание может быть представлено в базе данных или описано с помощью объекта Schedule.

Кроме того, возможно задать неординарный поток, задав количество агентов (заявок), которое создается за один раз. Также можно задать нестационарный поток (специфика этой особенности будет исследована в п.3.2).

Имитация процесса обслуживания в среде AnyLogic осуществляется с помощью блока Delay. Данный объект задерживает поступившую заявку на заданное время. Свойства delay представлены на рис. 3.2.

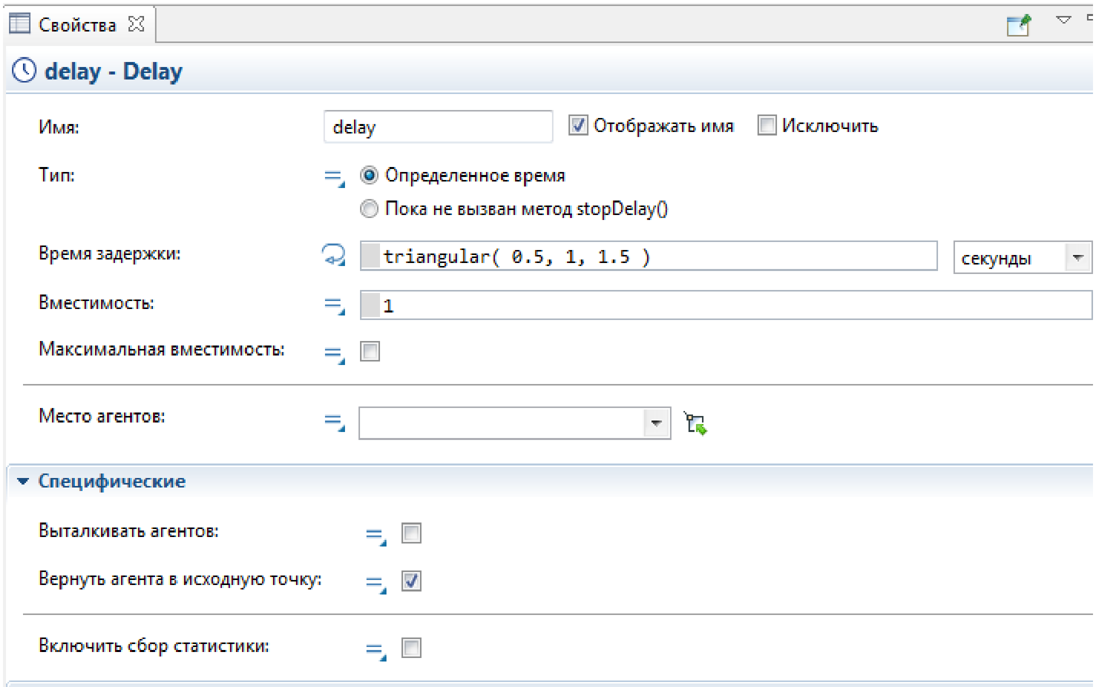


Рис. 3.2. Свойства Delay

Как и для объекта Source, время задержки может быть как постоянной, так и случайной величиной. Многоканальные системы массового обслуживания моделируются с учетом указания нужной вместимости. В случае, если в момент прихода заявок объект Delay полностью заполнен, возникает ошибка.

Как было отмечено в предыдущей главе, все системы массового обслуживания делятся на системы с отказами и системы с очередью. Поэтому чтобы избежать данной ошибки для систем с отказами необходимо поставить условие, которое будет проверять, есть ли свободный канал обслуживания. Для этого в среде anyLogic предусмотрен блок SelectOutput. Этот объект позволяет перенаправить заявки по одному из двух маршрутов или с некоторой вероятностью (по умолчанию с вероятностью 0.5) или при выполнении некоторого условия. В случае выполнения условия заявка будет направлена на порт true; в случае невыполнения – на порт false. Свойства SelectOutput приведены на *рис. 3.3*.

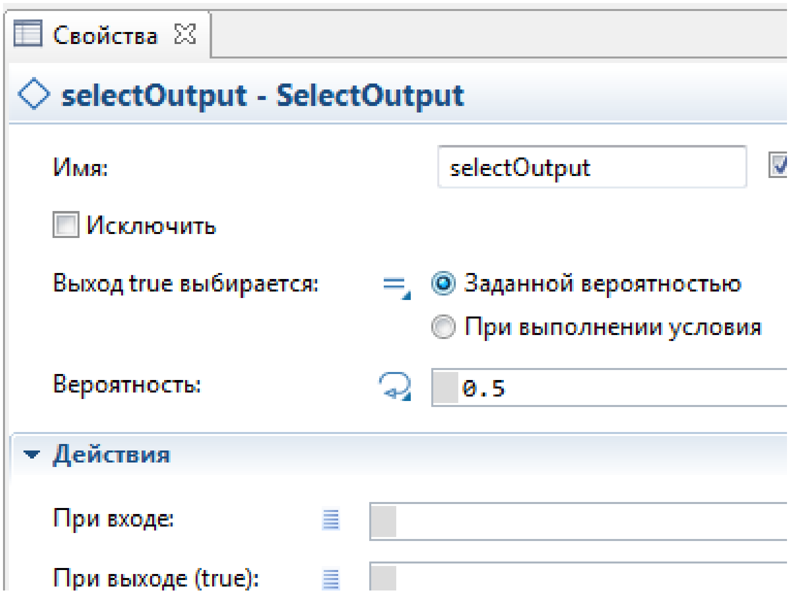


Рис. 3.3. Свойства объекта SelectOutput

В частности, чтобы пропустить заявку на обслуживания в блок Delay лишь в том случае, если канал свободен, необходимо осуществить следующую проверку:

delay.Size()>0

В этом случае, если есть хотя бы один свободный канал, заявка будет направлена в блок Delay, в противном случае – на порт false.

Для реализации ожидания в AnyLogic предусмотрен объект Queue. Его порты приведены на рис. 3.4.

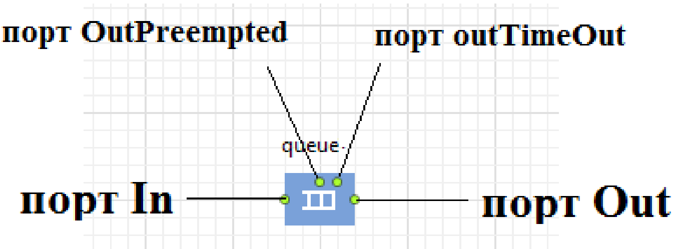


Рис. 3.4. Порты объекта Queue

Как видно из данного рисунка, помимо входящего и исходящего портов, присущих большинству объектов AnyLogic, у объекта Queue есть два дополнительных порта: OutPreemmted OutTimeOut. Порт OutPreemmted предназначен для вытеснения из моделей заявок в случае, если превышена допустимая длина очереди. Порт OutTimeOut используется для вытеснения из моделей заявок, когда превышено время ожидания.

Свойства объекта Queue представлены ниже (рис. 3.5).

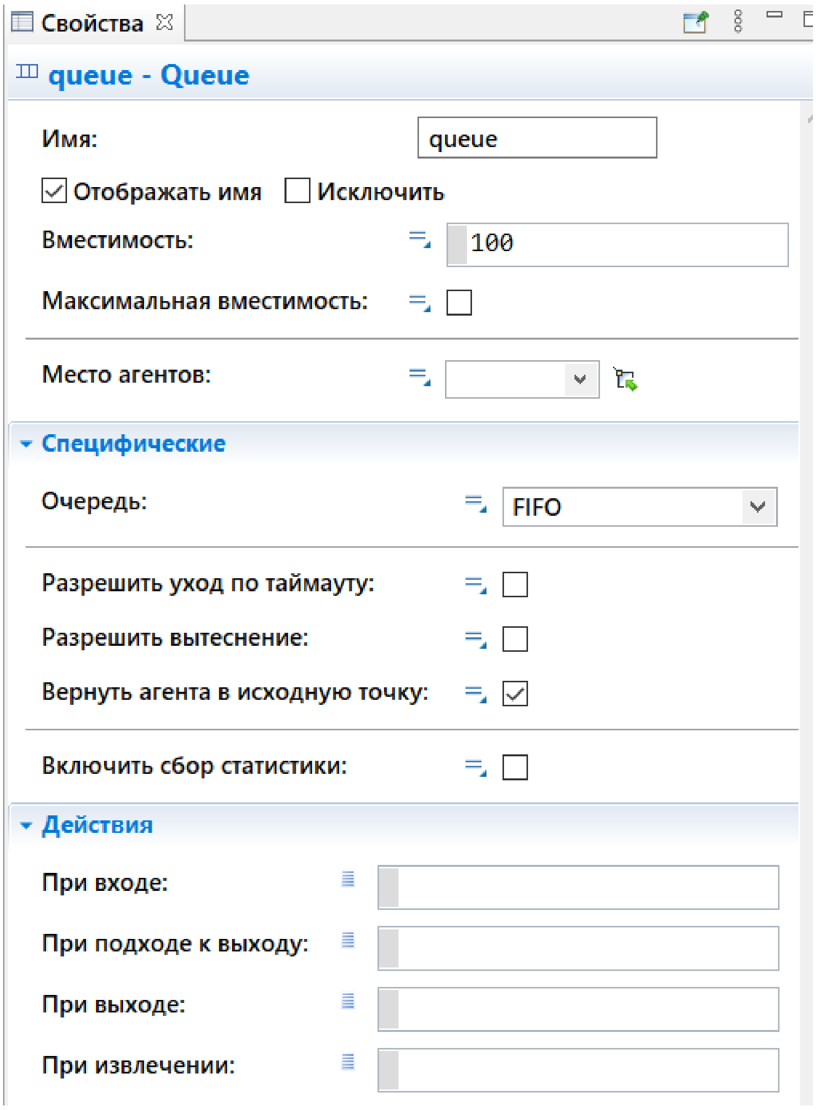


Рис. 3.5. Свойства Queue

Поле вместимость определяет размер очереди (если поставить галочку напротив поля «максимальная вместимость», то получим неограниченную очередь. Далее следует поле выбора дисциплины ожидания. В AnyLogic предусмотрены следующие дисциплины ожидания (рис. 3.6).

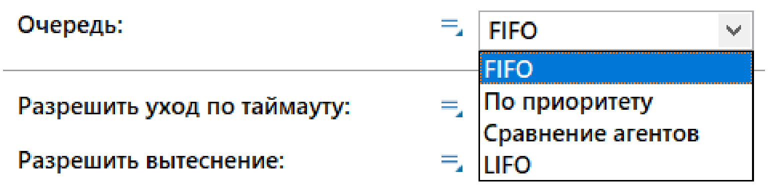


Рис. 3.6. Дисциплины ожидания

По умолчанию используется стандартная дисциплина ожидания FIFO. Во многих случаях в качестве режима ожидания используется не менее известная дисциплина LIFO. Если выбрана дисциплина ожидания по приоритету, то предполагается, что ранее для всех заявок определен приоритет. В этом случае если в момент прихода заявки все места в очереди заняты, то очередь покинет заявка с наименьшим приоритетом. Если выбрана дисциплина «Сравнение агентов», то предполагается наличие некоторого выражения, которое вычисляется для всех агентов. В этом случае в момент прихода заявки для нее определяется необходимое место в отсортированной очереди согласно данному выражению.

С точки зрения использования ресурсов системы при обслуживании необходимо выполнить следующие действия:

- занять один из свободных каналов обслуживания (или занять некоторый ресурс для обслуживания);
- выполнить имитацию обслуживания;
- освободить канал обслуживания или ресурс.

В среде AnyLogic существуют объекты, предназначенные для работы с ресурсами. Это, в частности, объект RecourcePool для описания ресурсов, а также объекты Seize и Release для занятия и освобождения ресурсов.

Перед использованием ресурсов системе необходимо указать, какие ресурсы и в каком количестве могут быть использованы. Для этого используется объект ResourcePool, свойства которого приведены на рис. 3.6.

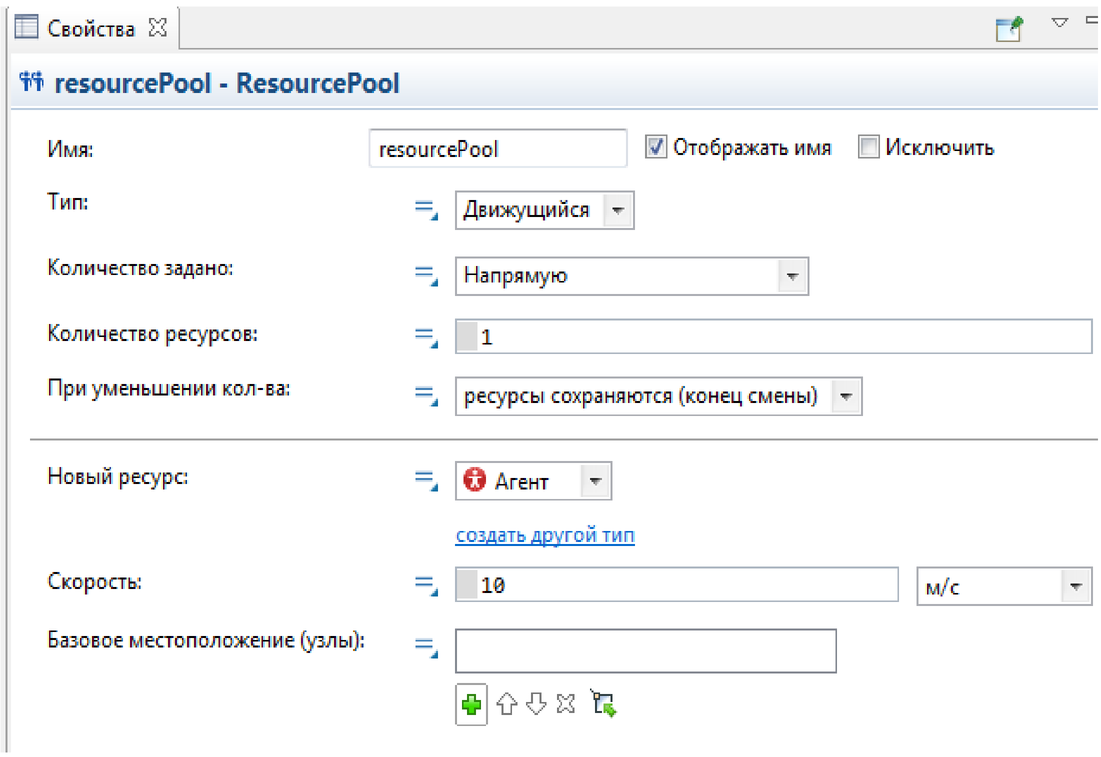


Рис. 3.6. Свойства ResourcePool

При использовании ресурсов перед имитацией обслуживания заявка должна занять некоторый ресурс, а после обслуживания – освободить. Это осуществляется с помощью объектов Seize и Release соответственно.

Объект Seize фактически сочетает в себе возможность занятия ресурса и ожидания его освобождения. Часть свойств данного объекта представлена на рис. 3.7.

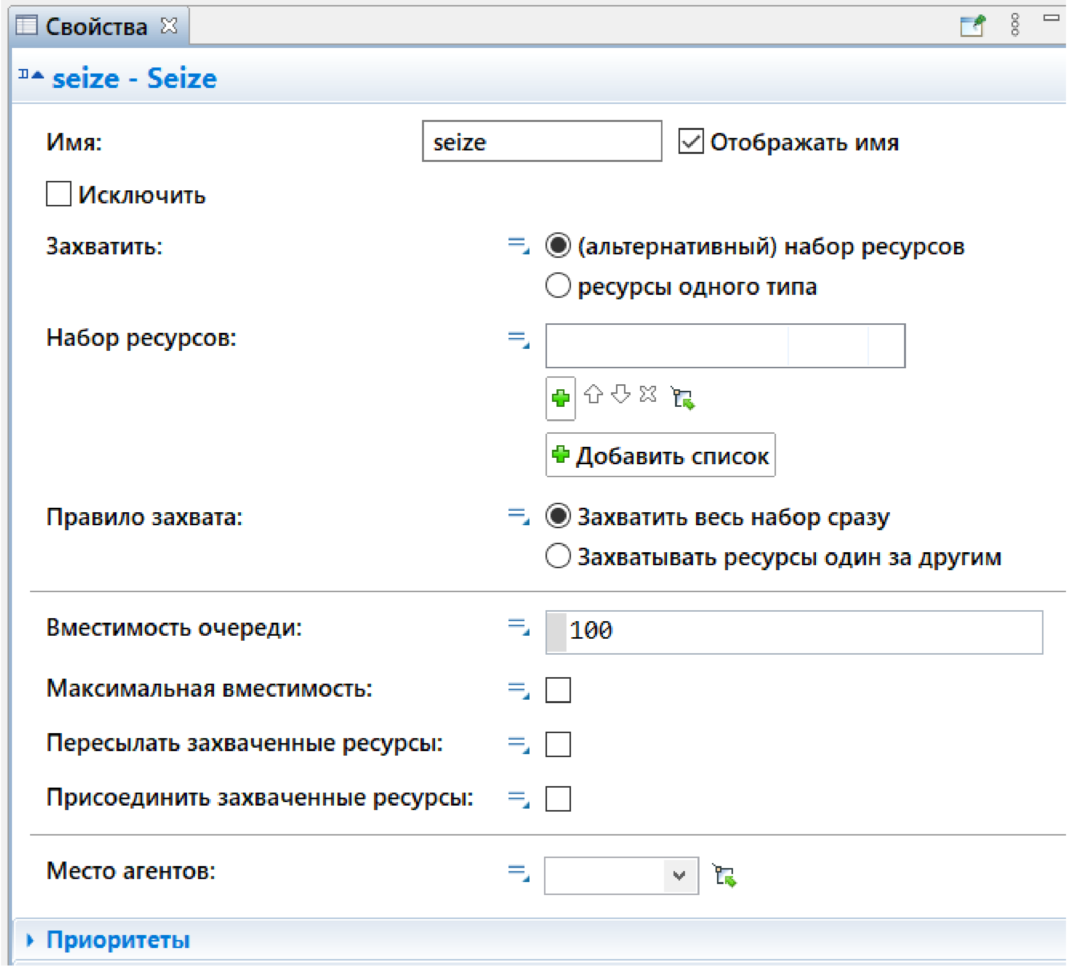


Рис. 3.7. Свойства объекта Seize. Часть 1

В частности, на рис. 3.7. видно, что при занятии ресурсов необходимо указать, какие именно будут использоваться ресурсы (т.е. выбрать необходимый объект типа resourcePool), задать число мест в очереди и определить специфику использования захваченных ресурсов.

Кроме того, объект Seize содержит механизмы, аналогичные объекту Queue для формирования очереди (*рис. 3.8*).

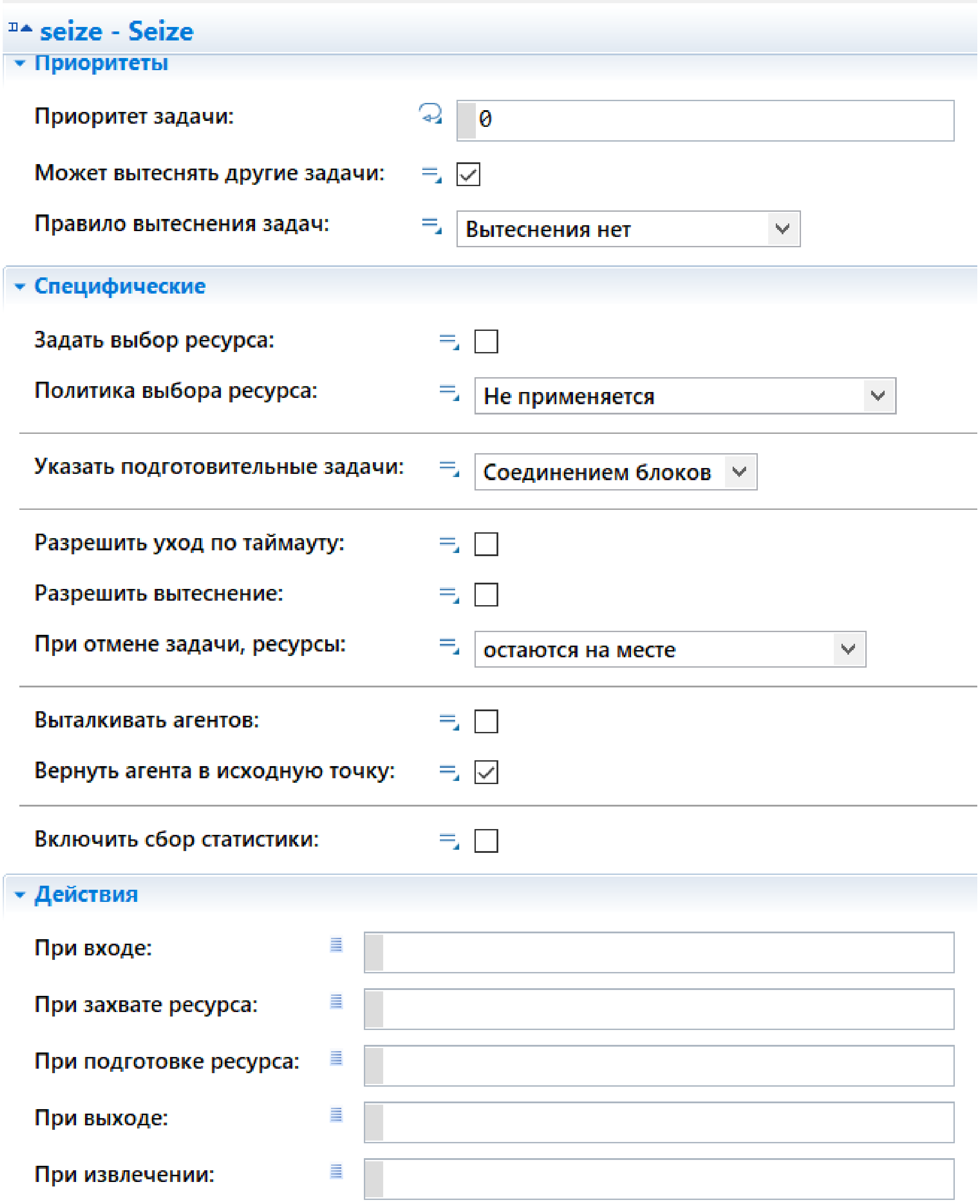


Рис. 3.8. Свойства объекта Seize. Часть 2

Освобождение занятых ресурсов осуществляется объектом Release. Его свойства представлены на рис. 3.9. В качестве основного свойства следует отметить необходимость выбора ресурсов для освобождения. Возможные варианты также приведены на рис. 3.9.

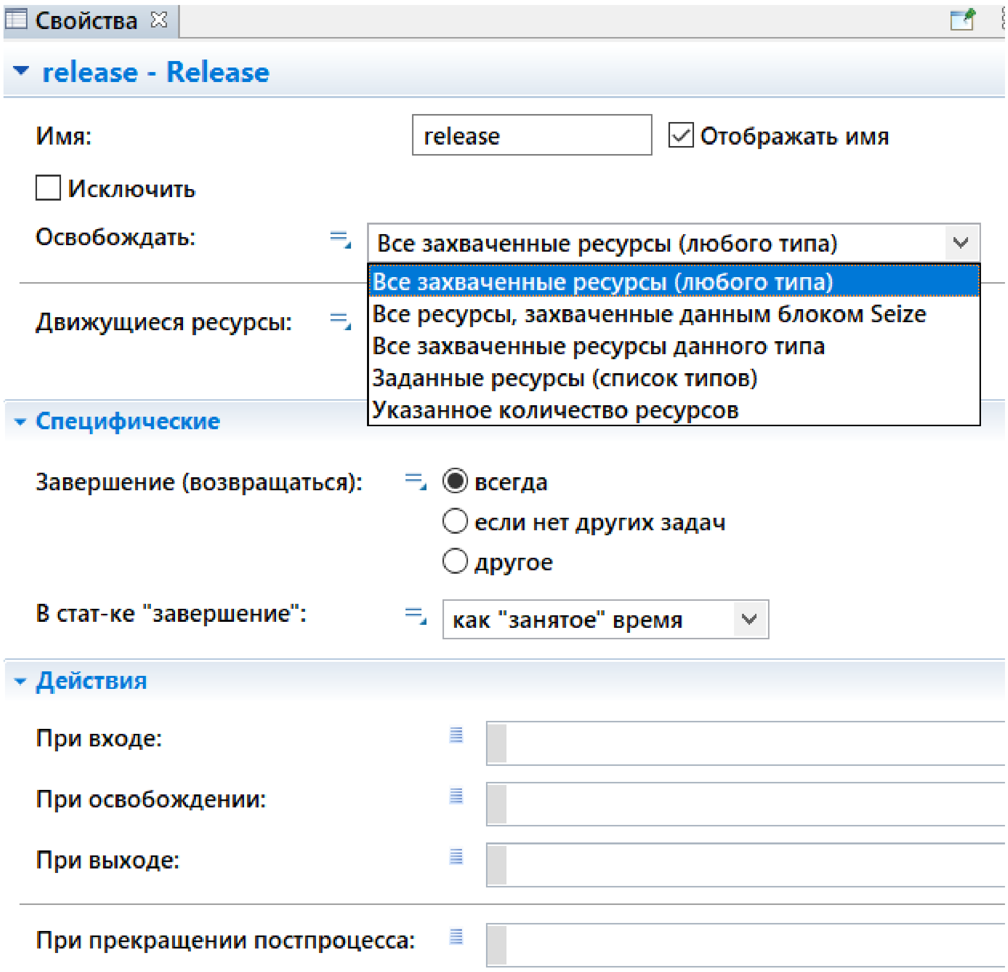


Рис. 3.9. Свойства Release

Если в промежутке между занятием и освобождением устройства необходимо выполнить лишь имитацию обслуживания, то множество объектов типа Seize-Advance-Release заменит один объект Service. Поскольку для данного блока очевидно, какие ресурсы должны быть освобожлдены по окончании обслуживания, свойства Service фактически дублируют свойства Seize.

Приведем пример имитационной модели для системы массового обслуживания, пример которой приведен на стр. 34. Она будет иметь следующий вид (рис. 3.10).

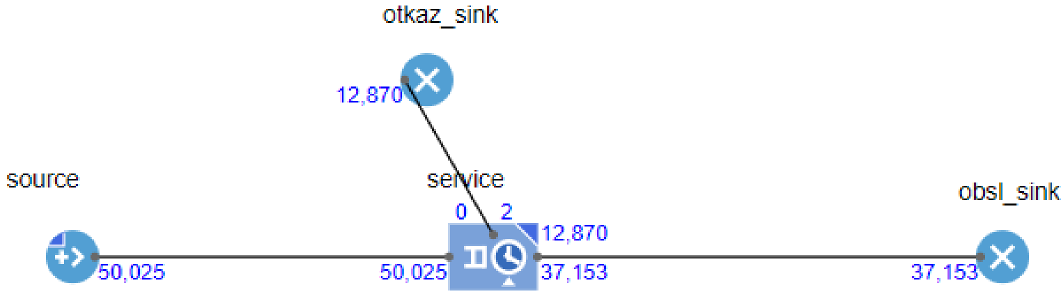


Рис. 3.10. Имитационная модель системы с ограниченной очередью

Как видно из этой модели, основным блоком является блок Service. Настройка его свойств приведена на рис. 3.11.

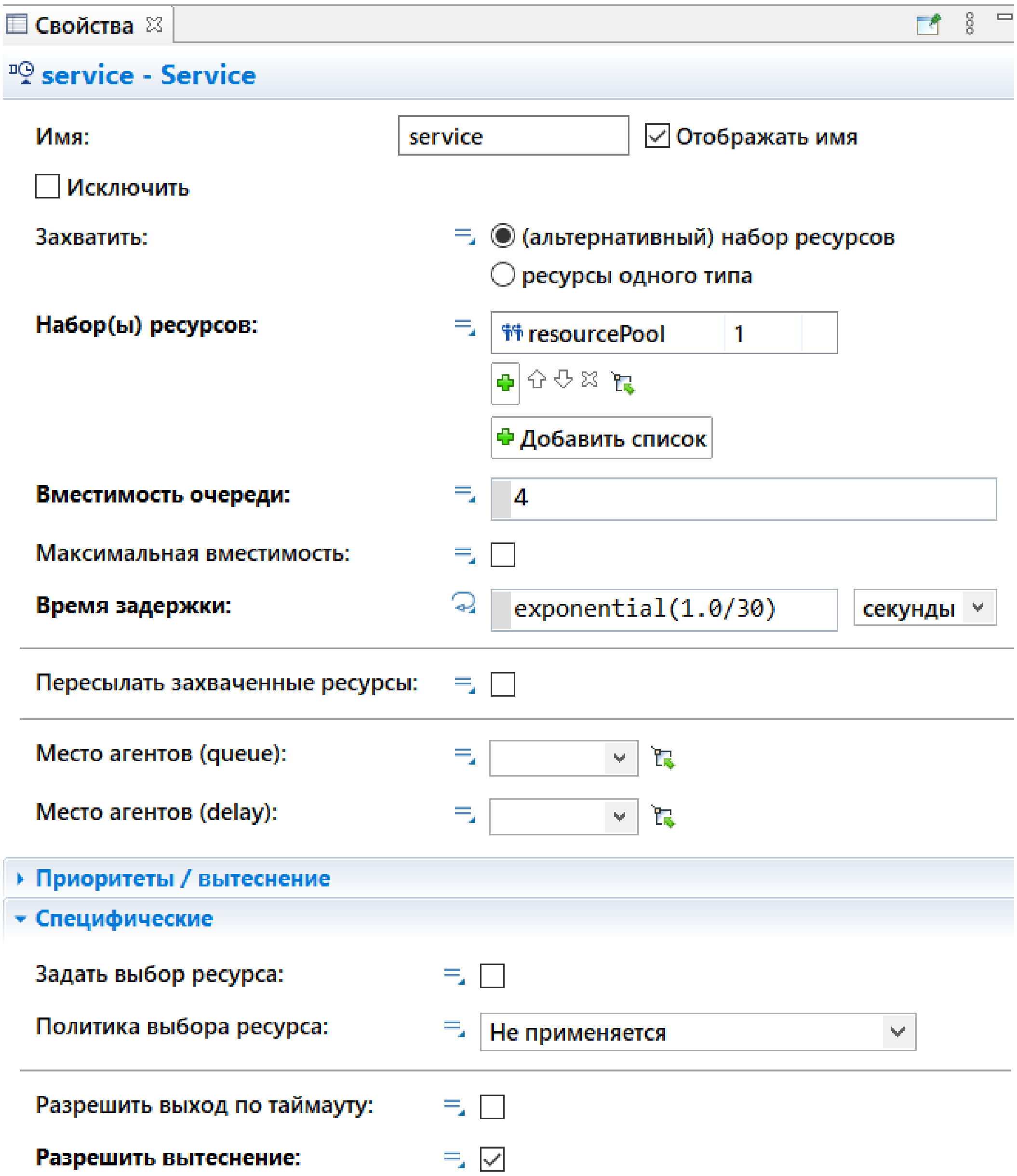


Рис. 3.11. Настройка свойств Service

На основании полученных данных можно сделать вывод о том, что вероятность отказа равна 12870/50025=0.257. Это значение очень близко к аналитическому значению вероятности, полученному на стр. 38. Для определения остальных характеристик рассмотрим возможности среды AnyLogic для сбора статистики.

3.2. Сбор статистики и получение характеристик систем массового обслуживания

Одним из несомненных достоинств приложения AnyLogic является богатый арсенал для сбора статистики и визуализации результатов моделирования. Все соответствующие объекты собраны на вкладке «Статистика», вид которой представлен на рис. 3.12.

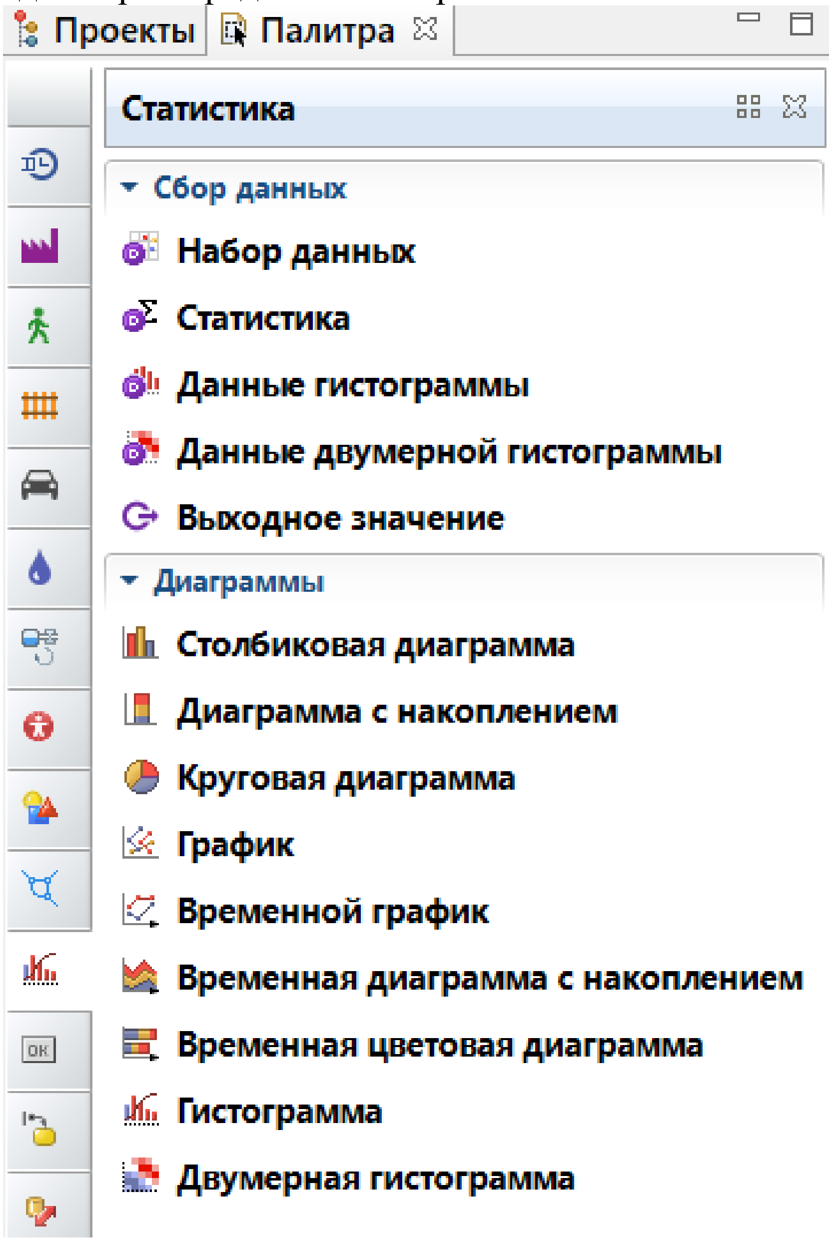


Рис. 3.12. Вкладка «Статистика»

Как видно из данного рисунка, данная вкладка состоит из двух частей. Верхняя часть содержит объекты, позволяющие получить числовые статистические значения; нижняя – графики и гистограммы, полученные на основании прогона модели.

Основным объектом для сбора числовых статистических данных является «Статистика».

Для объекта Delay для сбора статистики существует метод statsUtilization. Он позволяет получить целый ряд статистических характеристик устройства, которые приведены на *рис. 3.13*.

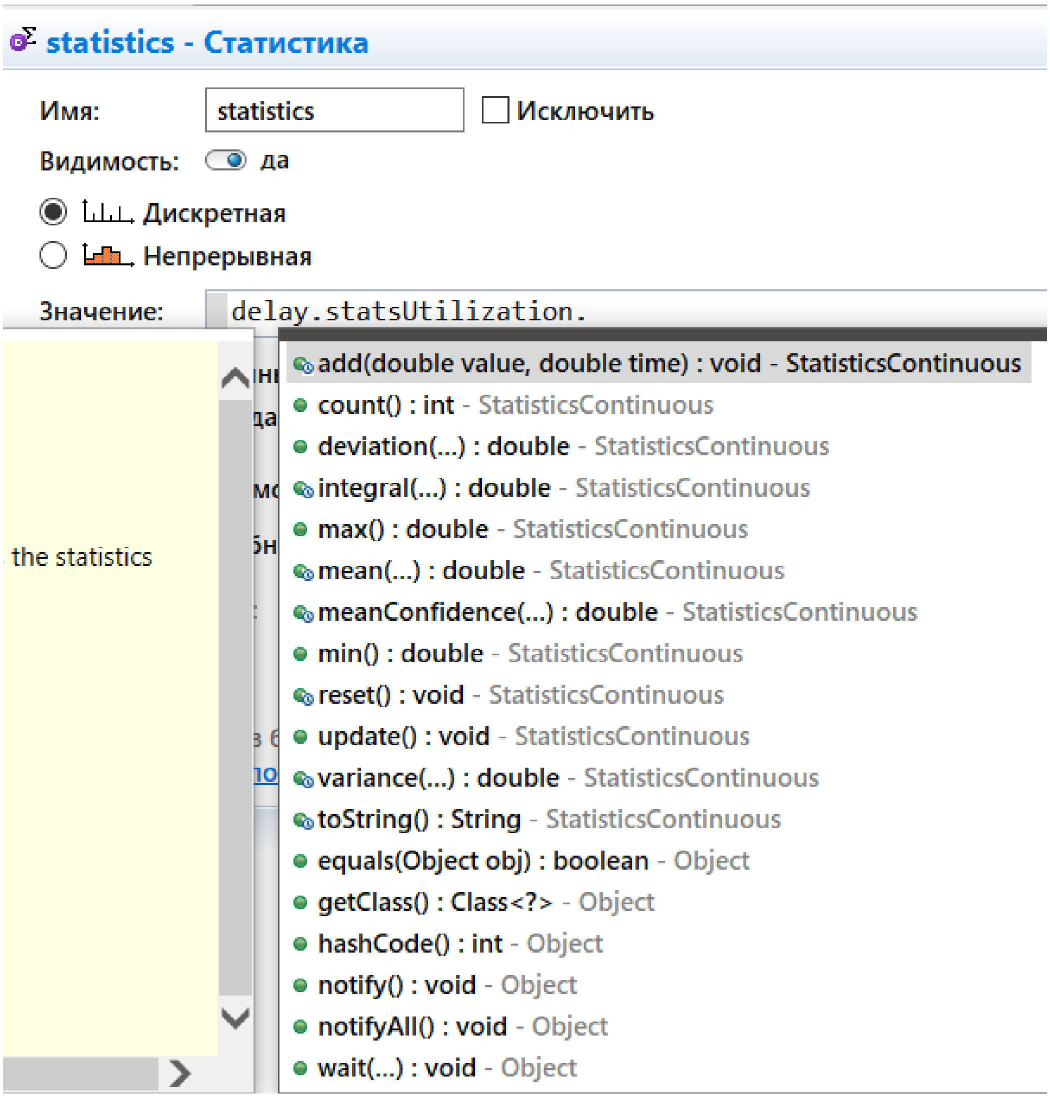


Рис. 3.13. Статистика для объекта Delay

Самыми распространенными характеристиками у данного объекта являются:

- mean() – коэффициент загрузки устройства от 0 до 1 (вероятность занятости отдельного канала);
- variance() – дисперсия загрузки устройства;
- deviation() – среднеквадратическое отклонение загрузки.

Для сбора статистики у объекта queue имеется метод statsSize. Все методы для данного объекта приведены на *рис. 3.14*. Как и в предыдущем случае, к основным методам относятся:

- mean() – средняя длина очереди;
- variance() – дисперсия;
- deviation() – среднеквадратическое отклонение.

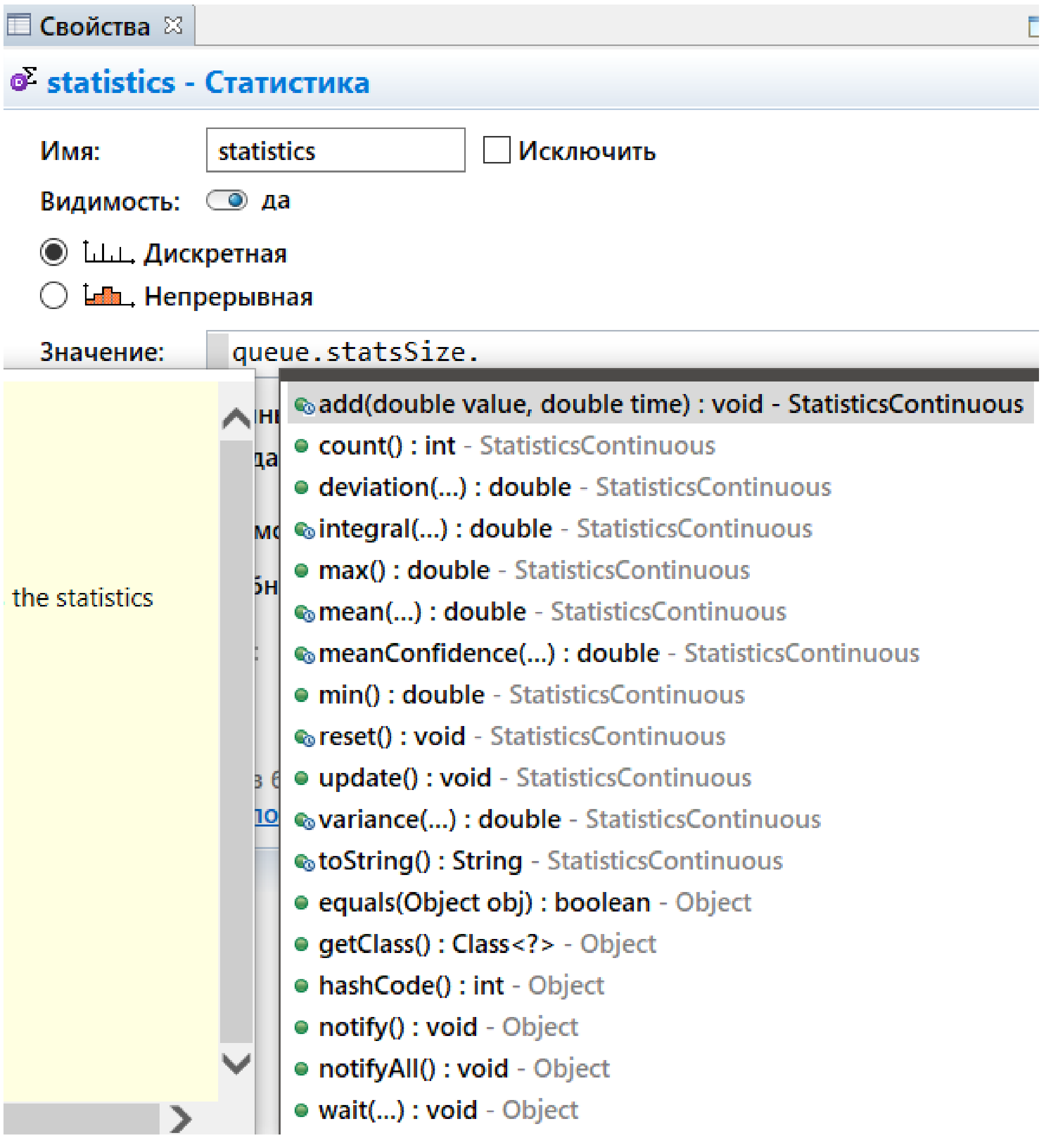


Рис. 3.14. Статистика для объекта Queue

У объекта service есть два основных свойства, которые можно определить с помощью statistics:

- queuesize() – длина очереди;
- delaysize() – число занятых каналов.

Кроме числовых характеристик существует возможность вывода графиков и гистограмм. Графики отображают изменение некоторой величины во времени (например, текущего числа занятых каналов, текущей длины очереди); гистограммы собирают статистику о поведении данной величины (например, распределении средней длины очереди). Для сбора статистики предназначены два объекта: TimeMeasureStart и TimeMeasureEnd. Первый объект фиксирует начало временного отсчета для сбора статистики; второй – момент сбора статистики. Например, если собирается статистика о длительности обслуживании в некотором устройстве, объект TimeMeasureStart ставится перед устройством; объект TimeMeasureEnd - сразу после имитации обслуживания, чтобы зафиксировать время завершения обслуживания.

Данные два объекта должны появляться в модели обязательно попарно. У объекта TimeMeasureEnd есть свойство «Объекты TimeMeasureStart», в котором необходимо указать тот объект TimeMeasureStart, который ему соответствует.

Приведем пример построения графика и гистограммы с использованием этих объектов. Пусть, без ограничения общности, необходимо оценить время пребывания заявки в системе. Рассмотрим элементарную обслуживающую систему, модель которой приведена на *рис. 3.15*.

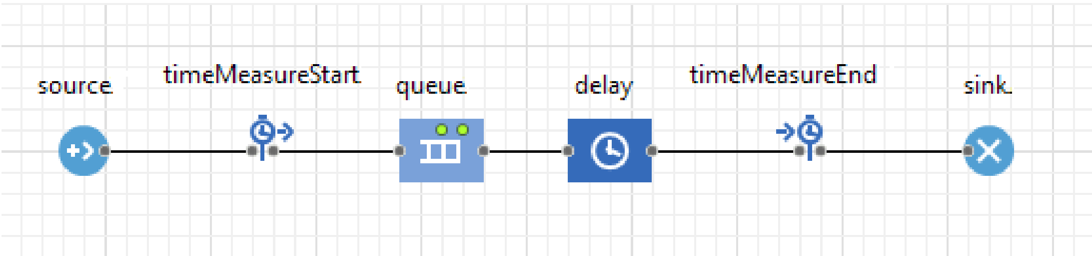


Рис. 3.15. Модель исследуемой системы

Если объект TimeMeasureEnd использовать для графика plot, то получим зависимость, каждая точка которой показывает длительность обслуживания данной заявки. По оси абсцисс будут откладываться заявки; по оси ординат – время обслуживания. Настройка свойств графика приведена на *рис. 3.16*.

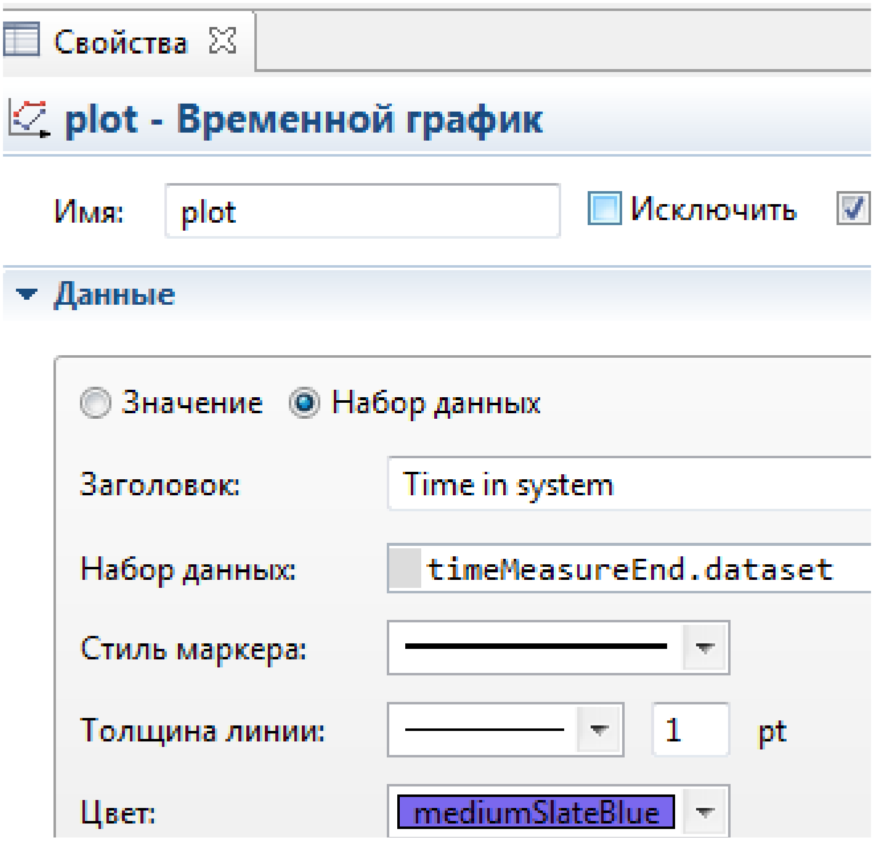


Рис. 3.16. Настройка свойств графика plot

Результат приведен на *рис. 3.17*.

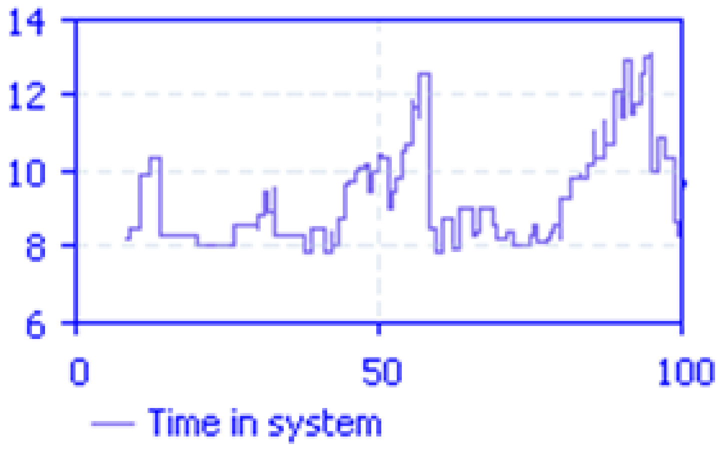


Рис. 3.17. Результат построения графика средствами plot

Если использовать статистический объект «гистограмму», то получим распределение времени пребывания заявки в модели. В этом случае по оси абсцисс будет откладываться время, которое будет разбито на интервалы, а по оси ординат – число заявок, которые обслуживались в пределах заданного временного интервала. Настройка свойств объекта chart приведено на *рис. 3.18*.

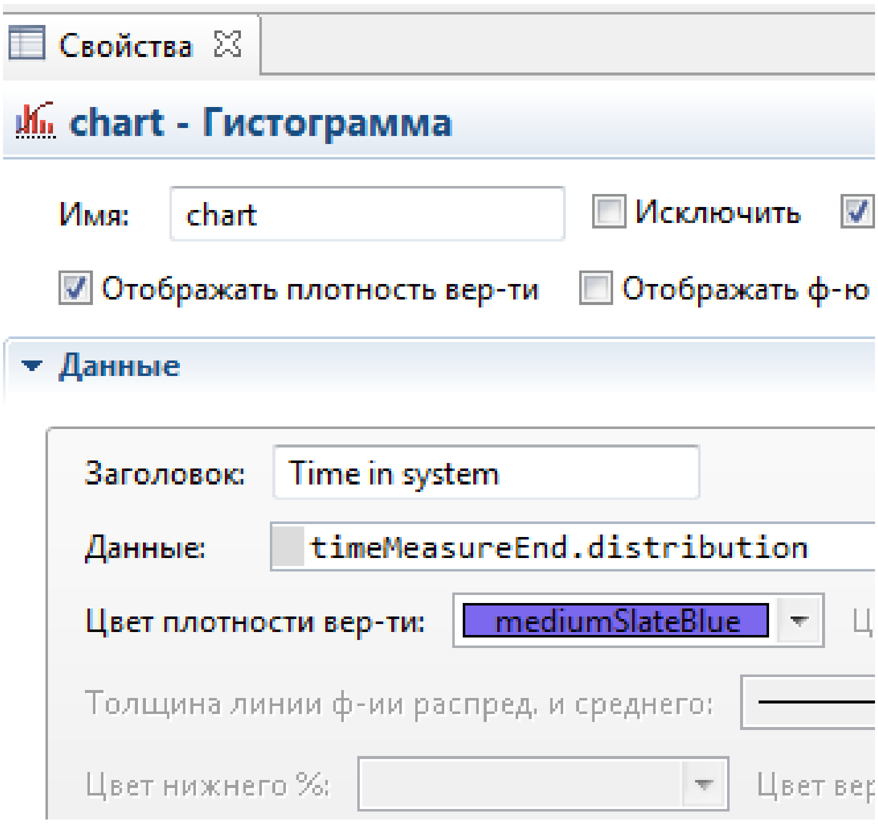


Рис. 3.18. Настройка свойств гистограммы

Результат использования данного объекта представлен на *рис. 3.19*.

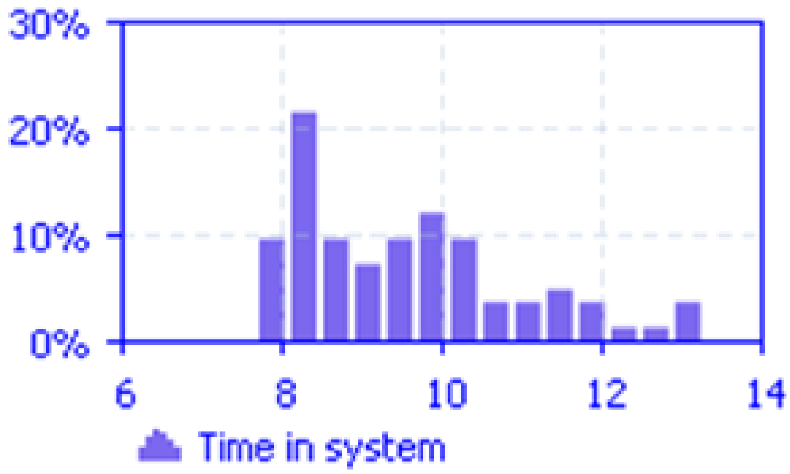


Рис. 3.19. Результат построения гистограммы

Для гистограмм и графиков существует другой способ определения данных. Для него используется объект «Данные гистограммы», а также агенты (заявки) специального типа, содержащего по сравнению со стандартной заявкой дополнительные параметры, фиксирующие начальный и конечный момент сбора вместо объектов TimeMeasureStart и TimeMeasureEnd. Без ограничения общности, создадим новый тип агента «Clients», у которого будет свойство StartWaiting типа time или double. В момент фиксации сбора статистики (вместо TimeMeasureStart) будем в данном свойстве запоминать текущее время, которое может быть определено с помощью метода time(). В момент фиксации результатов измерения из текущего момента вычтем значение свойства StartWaiting. Например, если необходимо собрать распределение времени ожидания заявок в очереди, то данные операторы необходимо вызвать в момент поступления и выхода заявки из очереди (*рис. 3.20*).

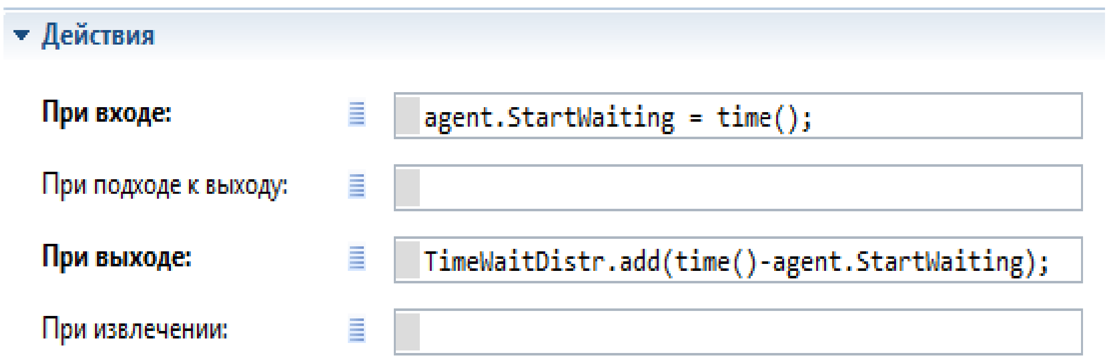


Рис. 3.20. Действия при входе и выходе из очереди

Здесь TimeWaitDistr – это объект «Данные гистограммы». При этом у объекта source необходимо в поле «Новый агент» выбрать «Clients», поскольку необходимо, чтобы в модель поступали заявки, имеющие свойство StartWaiting, что есть именно у агентов созданного типа Clients.

3.3. Особенности реализации нестационарного потока

Для практического определения и моделирования нестационарных потоков необходимо, в первую очередь, задать функцию λ(t). Очевидно, что при решении практических задач данная функция должна быть предварительно получена. Наиболее логичный способ ее получения по статистическим данным заключается в ориентировочном подсчете числа появлений заявок во времени. Наиболее удобным способом представления данной статистики является следующая таблица.

Табл.

Таблица для получения функции интенсивности входящего потока

Начало временного интервала	Конец временного интервала	Число заявок

4.3.1Моделирование входного потока, согласно расписанию интенсивностей

Рассмотрим возможности AnyLogic, позволяющие моделировать нестационарные потоки. У источника заявок Source есть следующие возможности задания прибытий (*рис. 3.21*).

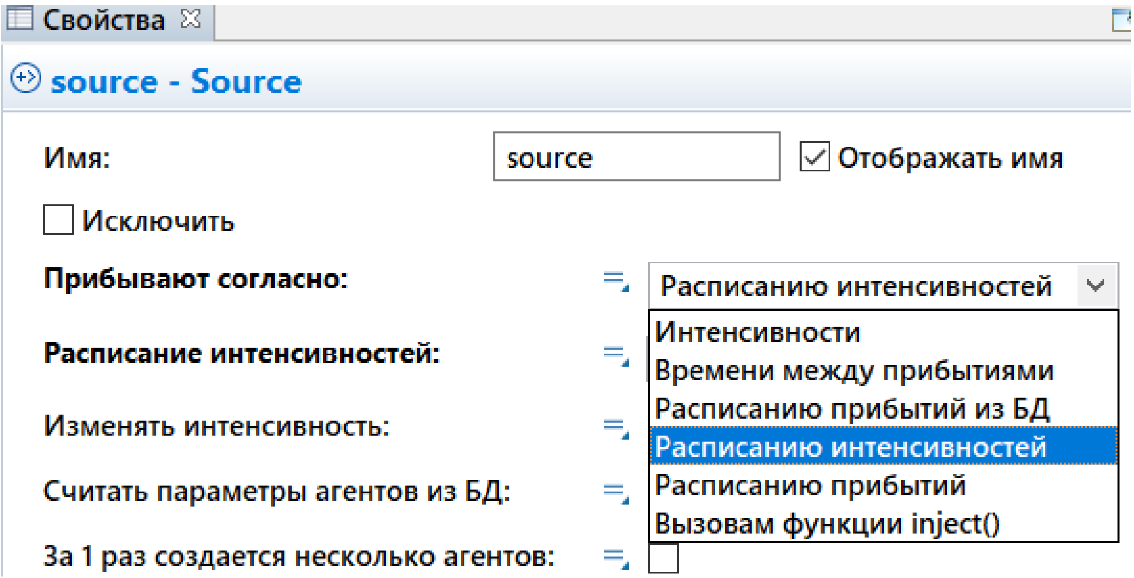


Рис. 3.21. Возможности Source для моделирования прибытия заявок

Наиболее удобной в данном случае является расписание интенсивностей. Рассмотрим объект **Schedule (**библиотека моделирования процессов**)**, позволяющий моделировать расписание. Расписание можно моделировать на неделю (например, пары у студентов, меняющиеся в разные дни недели), дни/недели (когда изменять значения надо в течение дня) и «другая», когда нет жесткой привязки к календарю. Выберем возможность задания интервалов в дни/недели и зададим начало и конец интервала и интенсивность на данном интервале (*рис. 2*). Также выберем, что на данном интервале это число заявок в минуту (свойство «единица измерения», *рис. 3.22*).

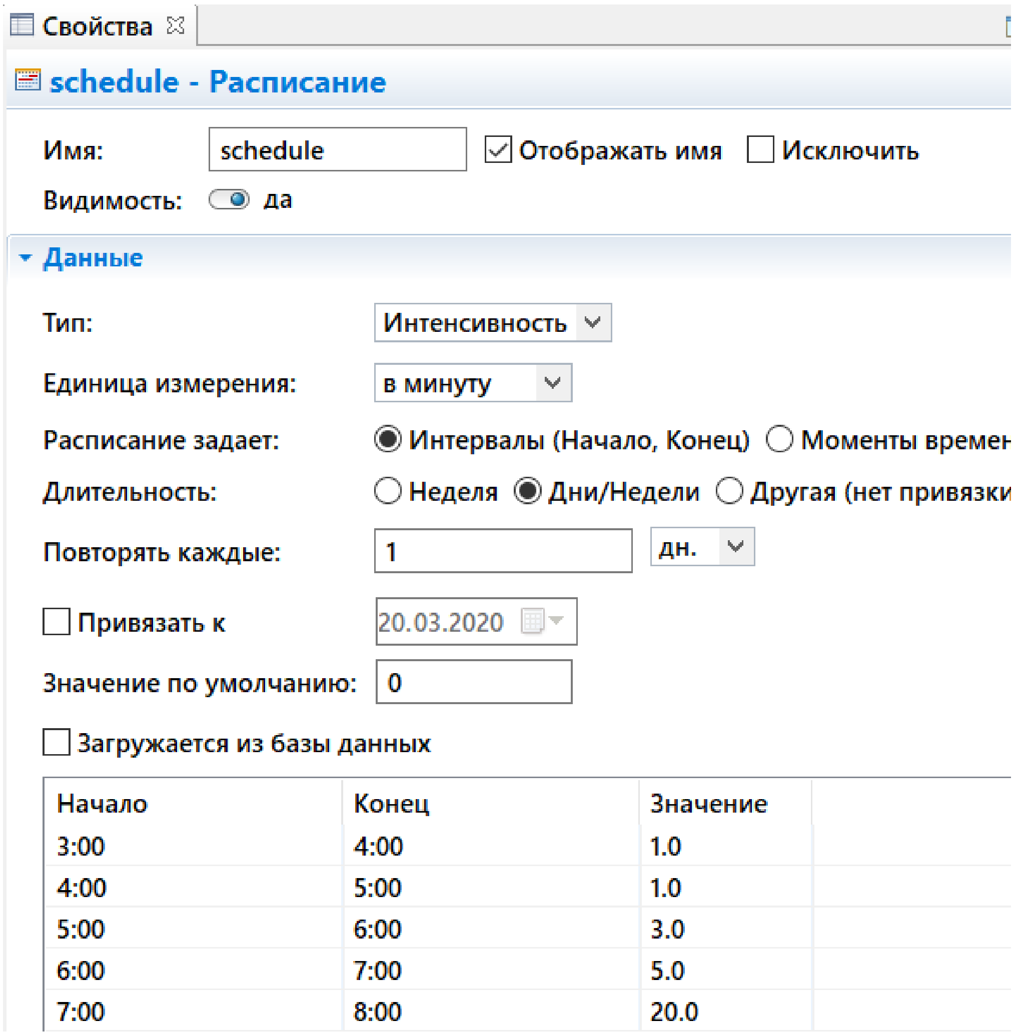


Рис. 3.22. Задание расписания

<u>Пример</u>. Смоделировать нестационарный поток, который будет обслуживаться 20 канальным устройством (с очередью).

<u>Решение</u>. Поместим на рабочую область из библиотеки моделирования процессов объект **Schedule** и зададим значения интенсивностей согласно рис. 2. Зададим значения для 24 часов. В случае, если интенсивность не меняется, можно расширить временной интервал, например, от 0:00 до 5:00 интенсивность 1.

У блока Source в свойстве прибывают согласно… выбрать «Расписанию интенсивностей», и в появившемся поле «Расписание интенсивностей» выбрать элемент Schedule.

Поскольку объект Delay обрабатывает заявки со случайной, но неизменной во временной шкале длительностью, очевидно, что загрузка устройство во время, когда интенсивность будет увеличиваться, также будет увеличиваться. Продемонстрируем это.

Возьмем с палитры «Статистика» временной график plot, в поле данных которого поместим загрузку устройства delay.

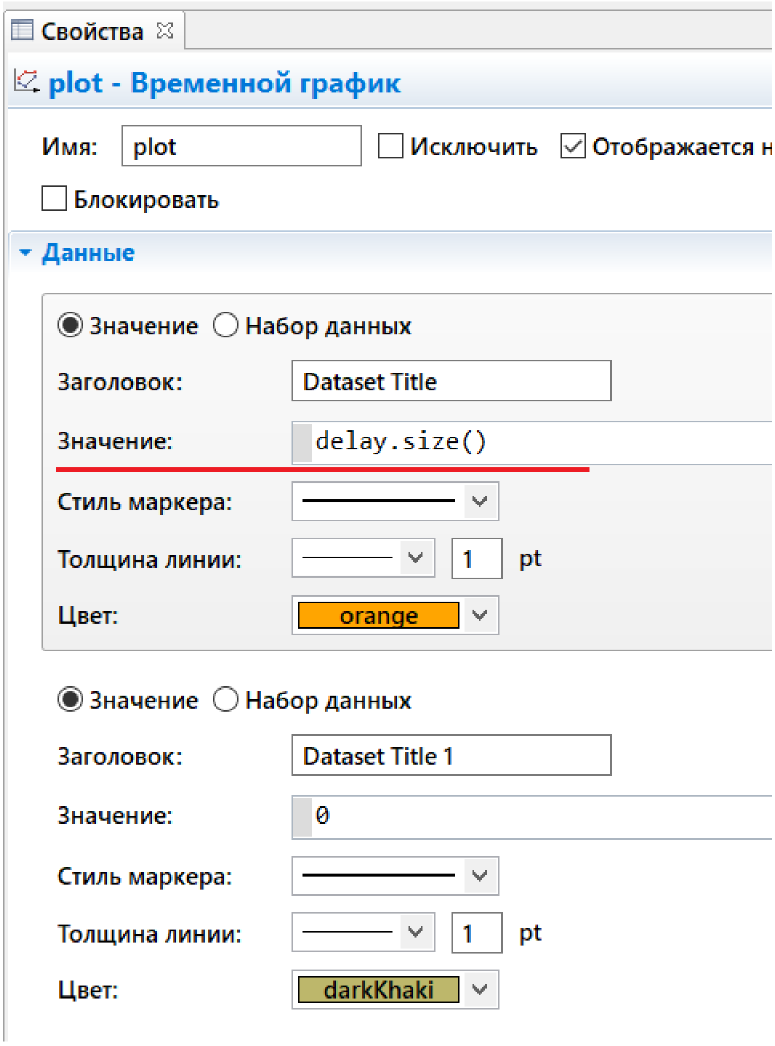


Рис. 3.23. Задание свойств временного графика

Зададим модельное время «минуты» (на вкладке «Проекты» щелчок на модель и в свойствах изменяем «Единицы модельного времени»).

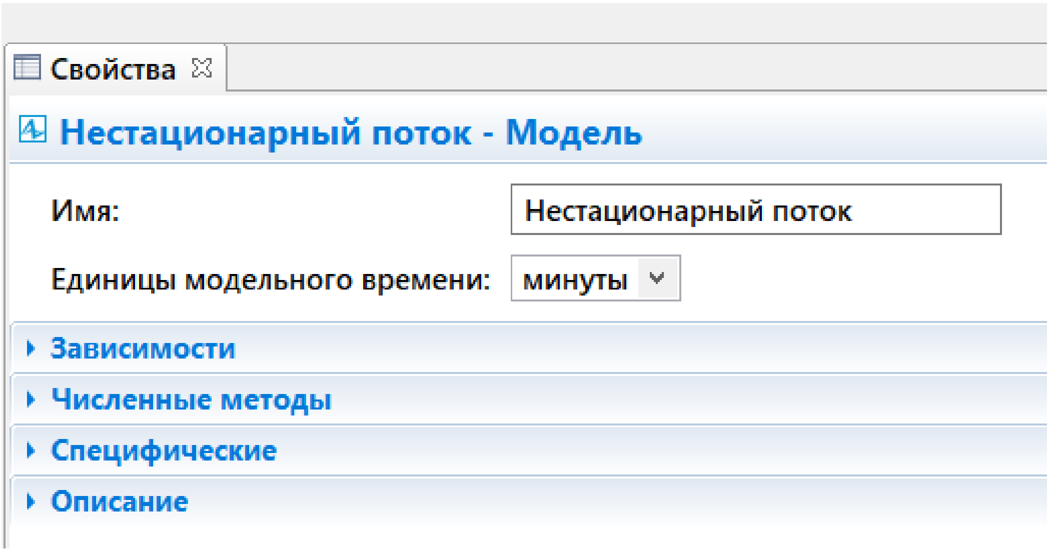


Рис. 24 – Задание единиц модельного времени

Запустим модель и будем исследовать процесс изменения загрузки устройства на графике. Из *рис. 3.22* видно, что впервые интенсивность поменяется с 5:00 до 6:00. В минутах это, начиная от 300 до 360 мин. На рис. 6 видно, что в момент времени 300 загрузка устройства изменилась (поскольку в единицу времени стало поступать больше заявок).

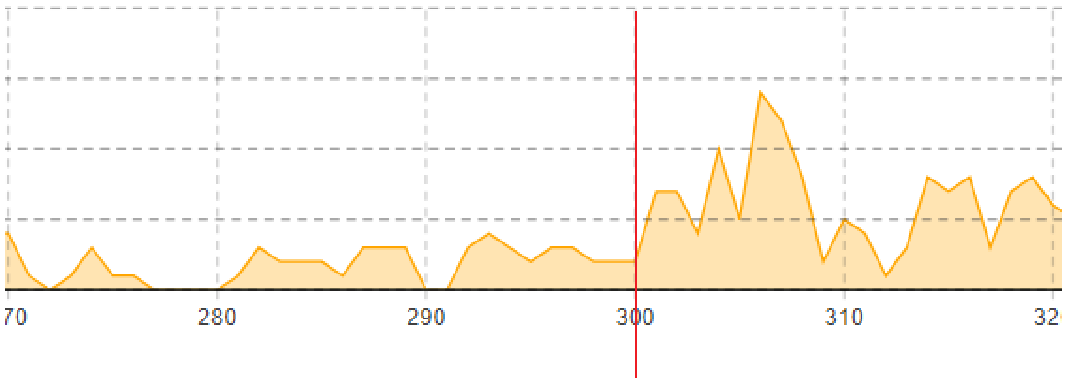


Рис. 3.25. Изменение загрузки устройства во времени. Часть 1

Следующее изменение интенсивности можно наблюдать в момент 360 мин. (*рис. 3.26*).

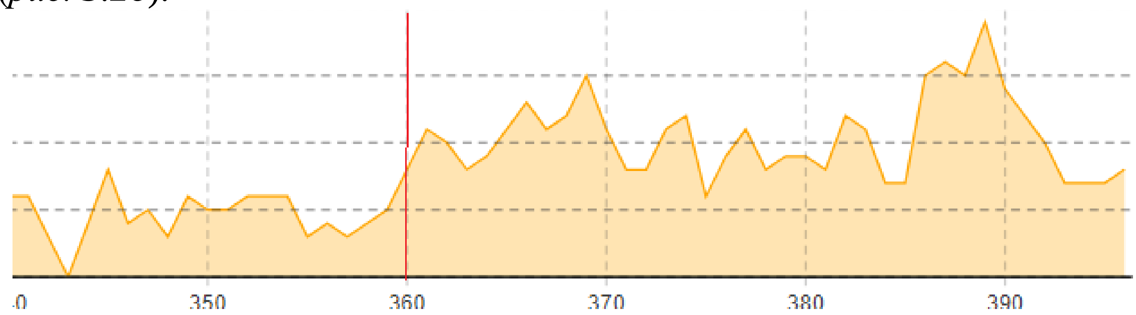


Рис. 3.26. Изменение загрузки устройства во времени. Часть 2

3.3.2 Моделирование входного потока, согласно функции интенсивности

В целом, предыдущий способ является одним из наиболее оптимальных для задания входящего потока с переменной интенсивностью. Однако, если возникает необходимость использовать данное значение интенсивности не только в свойствах Source, а где-то еще (например, для подсчета каких-либо статистических результатов), или возможности применения переменных значений не для объекта Source, а для каких-либо других объектов AnyLogic (например, в системной динамике), возможно задать переменную интенсивность с помощью функций.

На палитре «Агент» есть объекты функция и табличная функция (*рис. 3.27*).

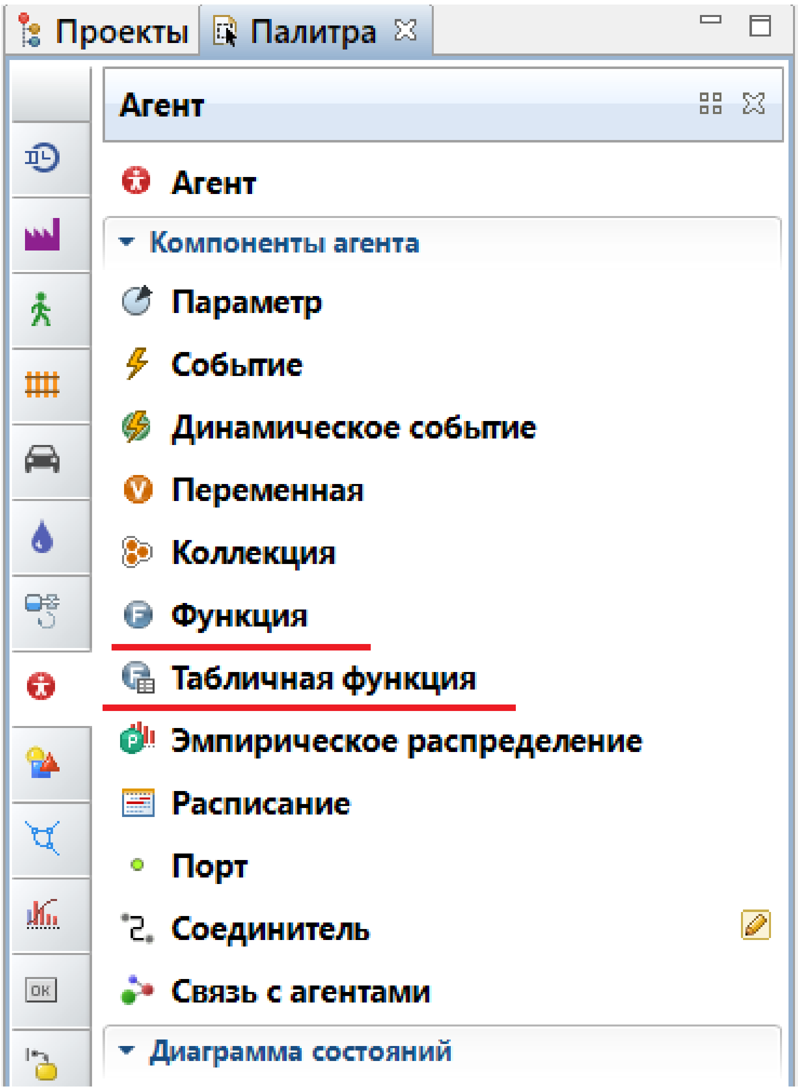


Рис. 3.27. Палитра агент

В свойствах «Табличная функция» зададим ее имя (например, fix_col), выберем тип интерполяции «ступенчатая», если аргумент выходит за пределы – ближайший. После этого зафиксируем число появлений заявок в каждый момент времени (*рис. 3.28*).

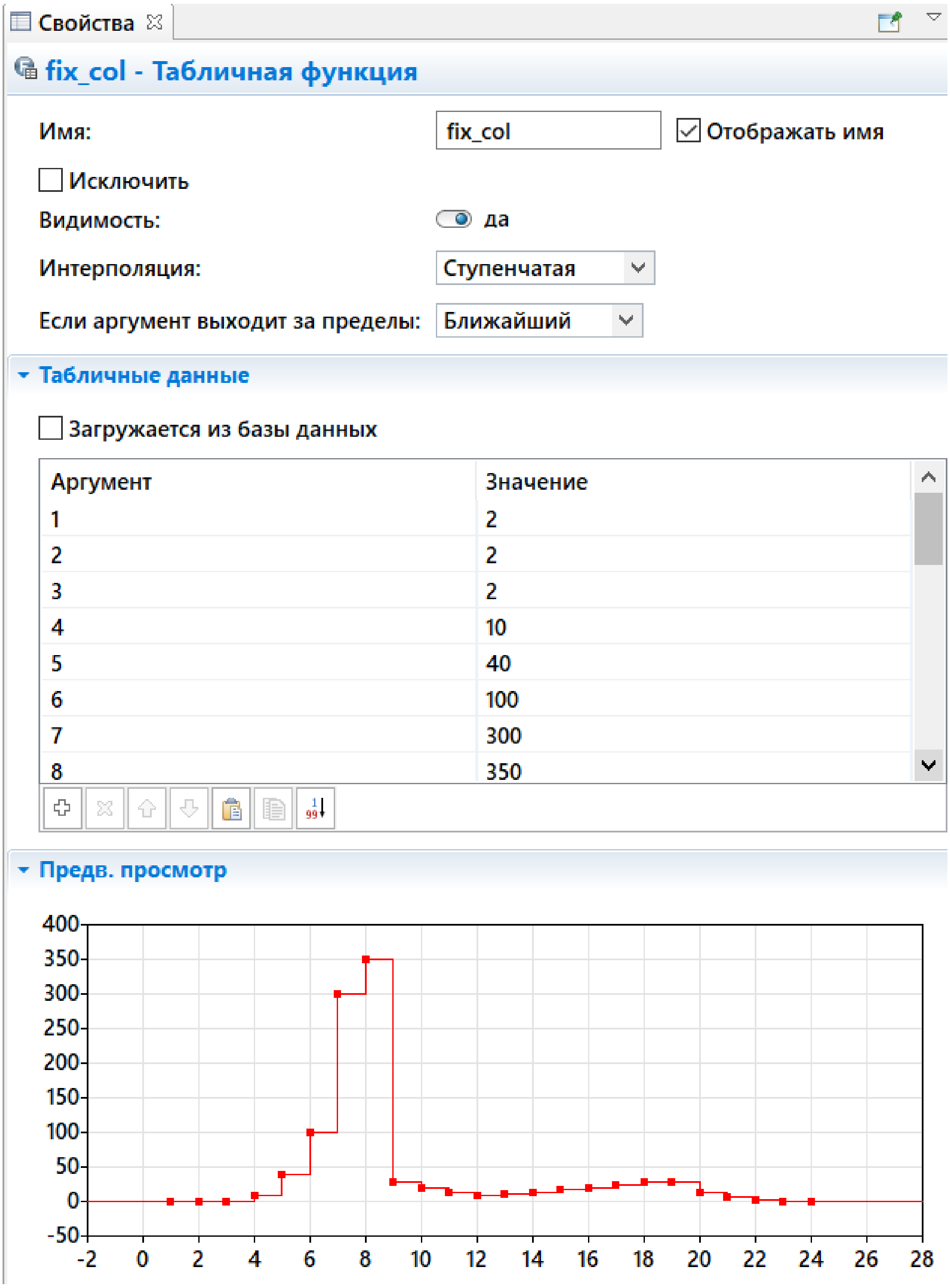


Рис. 3.28. Настройка свойств табличной функции

Далее опишем обычную функцию, которая будет считать интенсивность потока. Назовем ее int_flow. У данной функции будет единственный аргумент, который она будет брать из табличной функции. Назовем данный аргумент time, тип – double. В качестве результата выдадим значение табличной функции fix_col, в зависимости от часа. Текущий час суток (модельного времени) можно узнать с помощью функции getHourOfDay(). Таким образом, Свойства функции int_flow будут следующими (*рис. 3.29*).

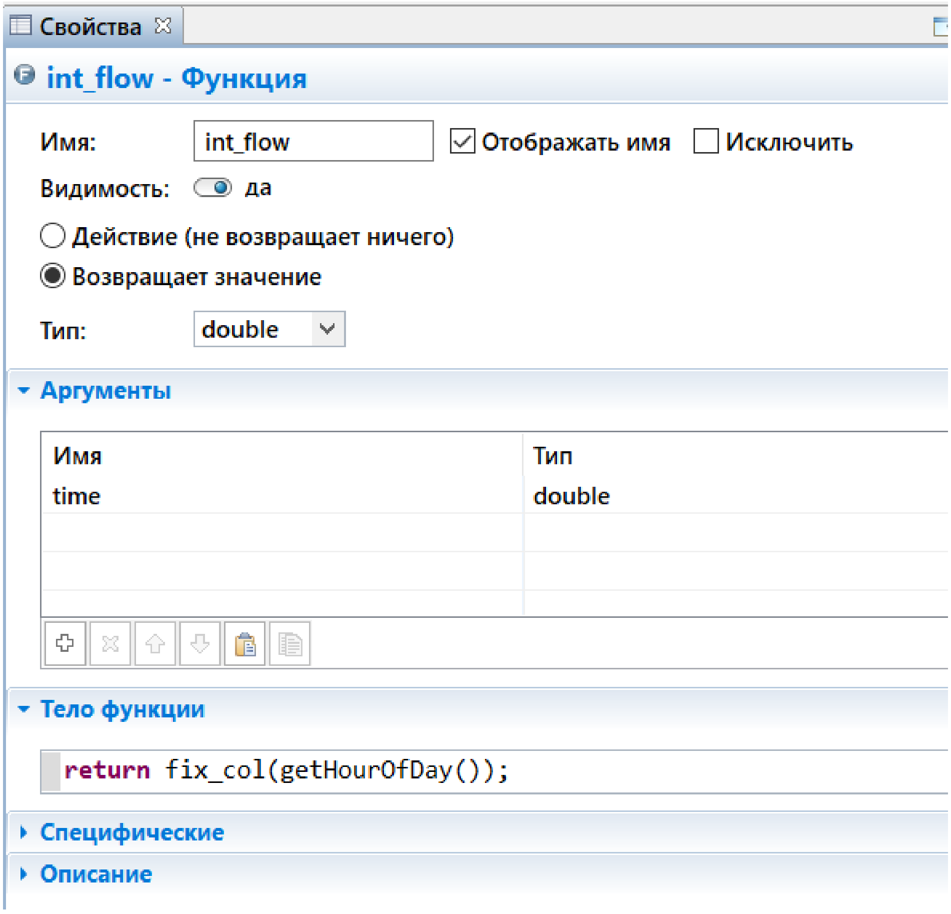


Рис. 3.29. Настройка свойств функции int_flow

После этого данную функцию можно вызвать в качестве аргумента интенсивности у объекта Source (*рис. 3.30*).

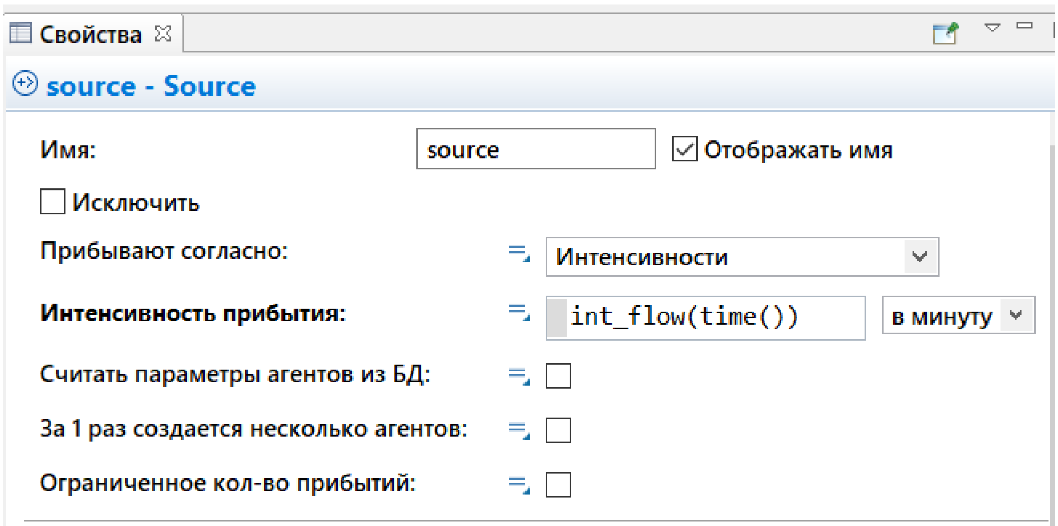


Рис. 3.30. Настройка свойства Source

3.4. Оптимизация систем массового обслуживания

Характеристики систем массового обслуживания рассчитываются для анализа ее функционирования, а также для возможной оптимизации ее работы.

Оптимизация работы СМО может производиться с точки зрения ее владельцев или с точки зрения обслуживаемых клиентов. В первом случае желательно добиться максимальной загрузки системы. В данном случае главным критерием будет являться стоимостной.

В качестве стоимостного критерия оптимизации применяют:

- максимум прибыли от эксплуатации СМО;

- минимум суммарных потерь, связанных с простоем каналов, простоем заявок в очереди и уходом необслуженных заявок.

Варьируемыми параметрами обычно являются: количество каналов, их производительность, длина и дисциплина очереди, приоритетность обслуживания.

С точки зрения клиентов желательно, наоборот, иметь свободные каналы обслуживания и уменьшение очередей. Кроме минимизации вышеперечисленных характеристик может использоваться критерий обеспечения заданной пропускной способности.

Таким образом, оптимизация СМО с точки зрения клиентов и владельцев системы приведет к прямопротивоположным результатам. В связи с этим, необходим учет всех заинтересованных сторон, а также полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов СМО желательно увеличение числа каналов обслуживания; но работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание. Поэтому при оптимизации систем, как правило, не выделяется какой-либо один показатель эффективности, а решается многокритериальная задача.

Для автоматизации нахождения оптимального значения каких-либо модельных данных можно использовать среду AnyLogic. Она содержит встроенный оптимизатор решений, который позволяет подобрать параметры модели, максимизирующие или минимизирующие значение целевой функции. Для того, чтобы его использовать, необходимо предварительно сформировать модель, которая будет содержать параметры, оптимальные значения которых требуется найти. После этого с помощью команды меню Файл/Создать/ Эксперимент и в открывшемся диалоговом окне выбрать «Оптимизация». В результате появится вспомогательное окно с настройками свойств эксперимента, представленное на рис. 3.31.

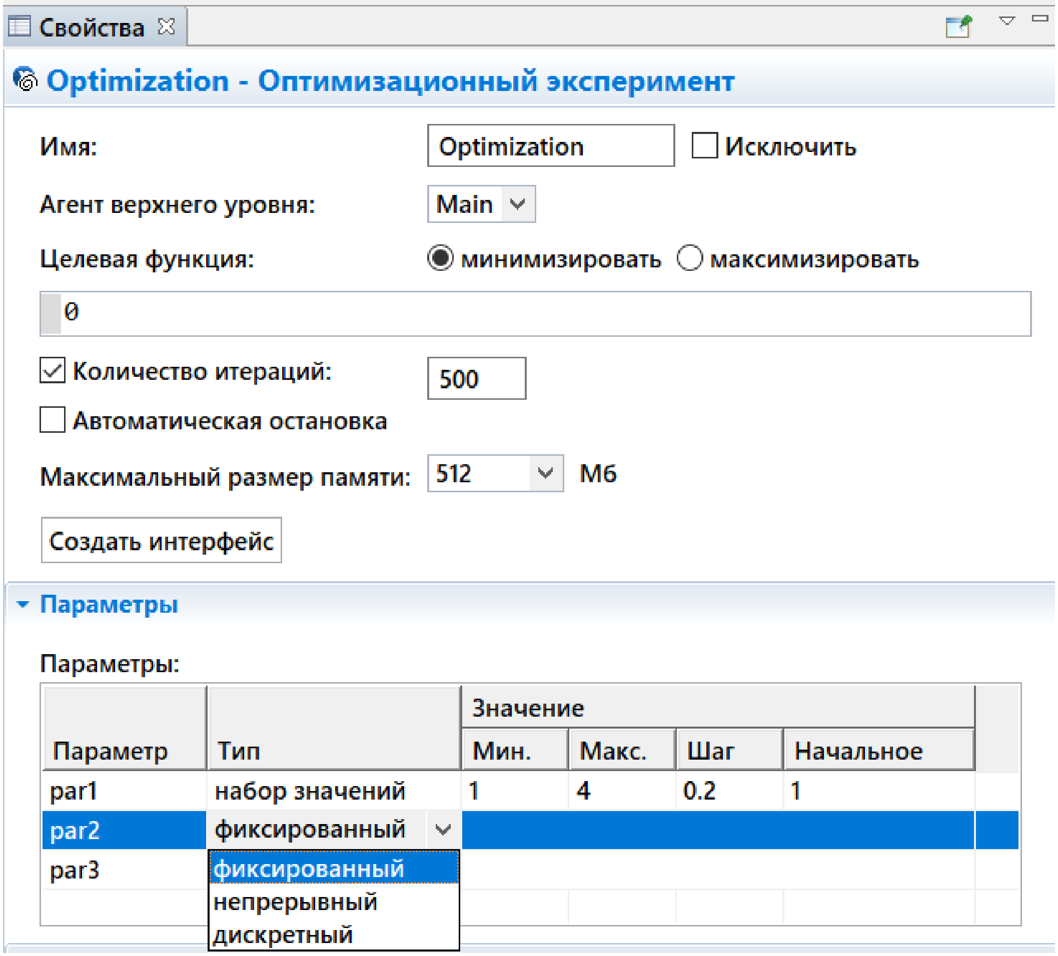


Рис. 3.31. Настройка свойств эксперимента

В данных свойствах необходимо обязательно указать целевую функцию. Уравнение для нее можно написать в соответствующем поле в явном вида, а можно сделать ссылку на некоторую функцию, описанную в модели. При этом ссылка любой объект из главного окна модели должна осуществляться через префикс «root», например:

root.par1-root.par2+5*root.par3

Следует также отметить, что, поскольку целью оптимизации является нахождение параметров, доставляющих целевой функции наилучшее значение, данная функция обязательно должна содержать в своем описании искомые параметры.

Оптимизационная задача может решаться без ограничений (задача на безусловный экстремум) или с ограничениями. В последнем случае необходимо наложить некоторые условия на выражения, связанные с объектами или параметрами модели. В AnyLogic различают ограничения и требования. Разница между ними заключается в том, что ограничения проверяются перед прогоном модели, а требования – после.

На вкладке «Параметры» будут отражены все параметры модели. Среди них необходимо выделить изменяемые (искомые) параметры, задать им тип «набор значений», указать наименьшее и наибольшее значение, а также шаг. После этого требуется нажать на кнопку «Создать интерфейс» и запустить эксперимент.

Рассмотрим примеры решения оптимизационных задач.

Пример 1. Объектом исследования является АТС, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ=1.5. Интенсивность обслуживания одним каналом в среднем равна μ=0.5 (время обслуживания распределено экспоненциально). Необходимо определить оптимальное число каналов обслуживания, чтобы итоговая прибыль была бы максимальна.

Данная прибыль рассчитывается по формуле:

$$\text{Прибыль} = \text{Доход} - \text{Штраф} - \text{Эксплуатация}. \quad (3.1)$$

Здесь Доход – это доход, полученный от содержания АТС, т.е. величина денежных средств, получаемых от абонентов за разговоры. Он будет рассчитываться по формуле:

$$\text{Доход} = \text{Стоим\_мин} * \text{время}. \quad (3.2)$$

Здесь Стоим_мин – стоимость минуты разговора; время – длительность разговора. Штраф начисляется за каждый несостоявшийся по вине АТС вызов. С точки зрения модели штраф каждый раз начисляется в случае, если заявка получает отказ в обслуживании.

Эксплуатация в формуле (3.1) представляет собой табличную функцию, зависящую от количества каналов обслуживания, которая описывает затраты, связанные с использованием заданного числа каналов в заданный временной интервал.

Построим модель в соответствии с данным описанием. Она будет представлять собой простейшую многоканальную обслуживающую систему с отказами (без очереди). Ее вид представлен на рис. 3.32.

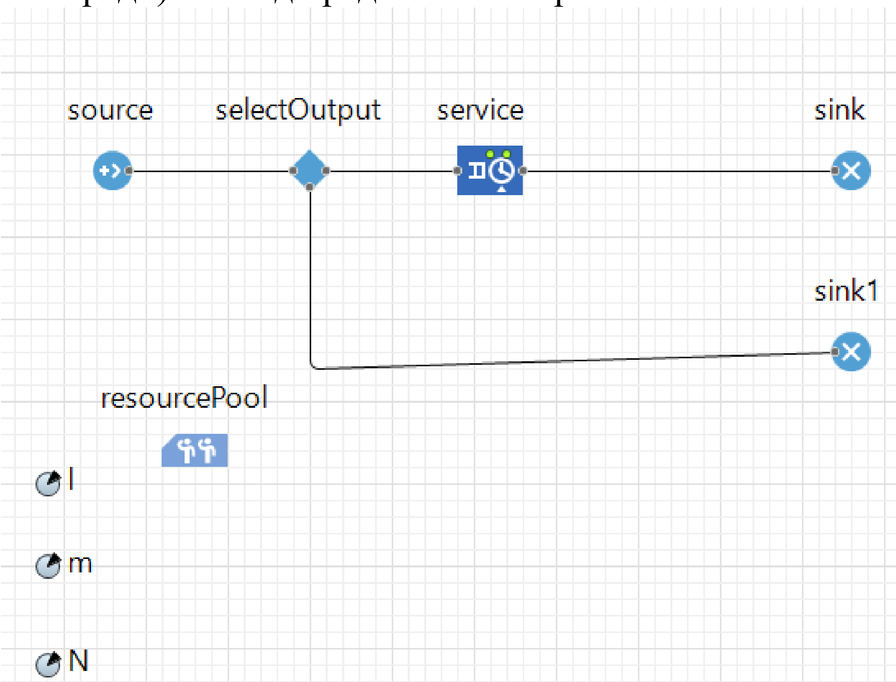


Рис. 3.32. Модель оптимизируемой системы

Поскольку очередь в системе должна отсутствовать, в блоке SelectOutput зададим следующее условие (*рис. 3.33*).

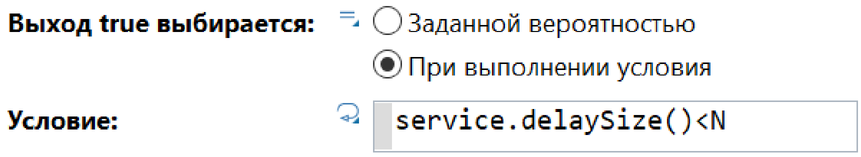


Рис. 3.33. Условие в блоке SelectOutput

В объекте ResourcePool зададим параметрически число ресурсов – N.

Для определения функции прибыли введем в рассмотрение динамическую переменную Itog. Доход и штраф будем описывать с помощью переменных income и penal соответственно. Связь между переменными представлена на рис. 3.34.

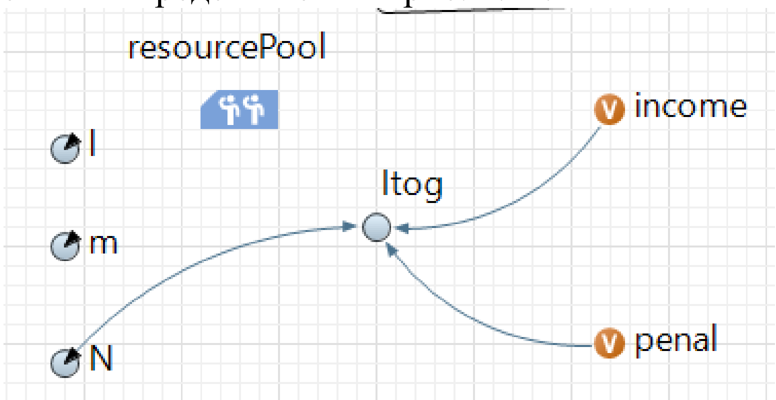


Рис 3.34. Определение итоговой прибыли

Переменная income определена для прибыли, а penal – для штрафа. Кроме того, в модель будет введена функция equipment для подсчета стоимости оборудования.

Рассмотрим более подробно определение каждой из составляющих. Для определения прибыли введем в рассмотрение функцию call_price, которая будет зависеть от аргумента t (времени). Данная функция будет определяться следующим образом (рис. 3.35).

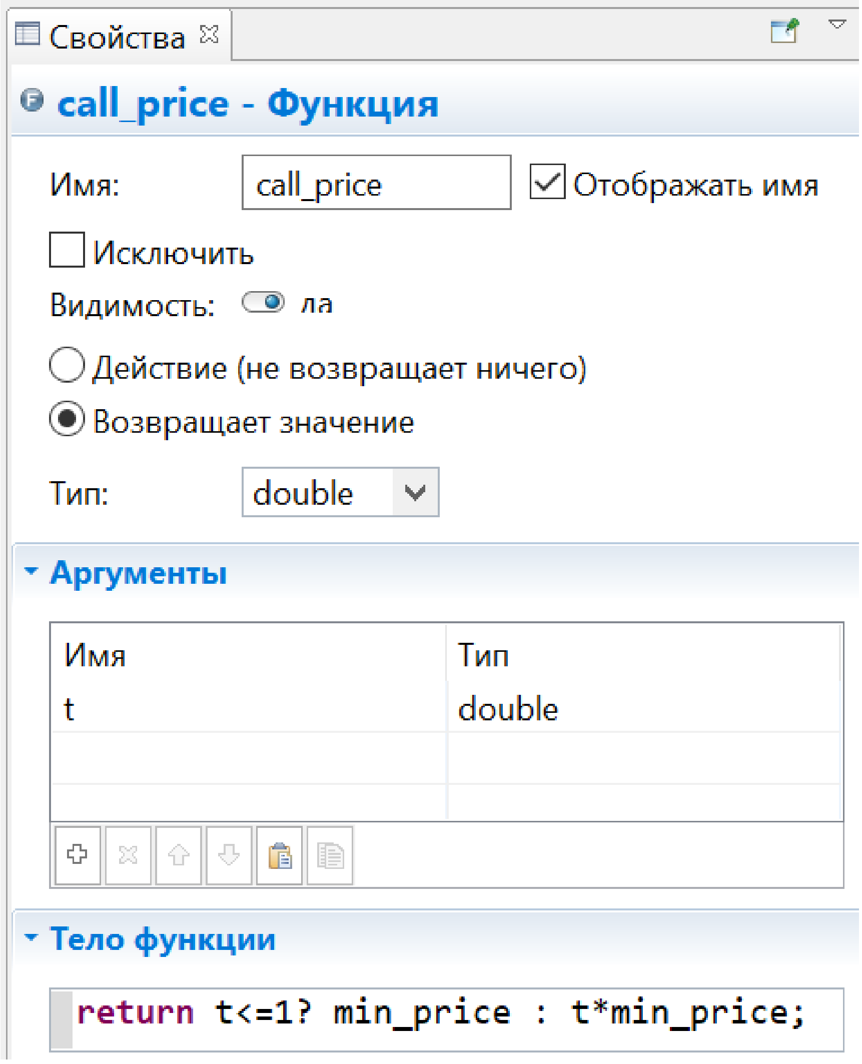


Рис 3.35. Определение функции call_price

Следующей задачей является измерение длительности разговора. Для этого введем в рассмотрение новый тип заявок Calls, отличающийся от стандартного типа Agent наличием двух параметров:

- ts – параметр, в который должно быть записано время начала соединения;

- tf – параметр, в который записывается время окончания соединения.

Значение параметра ts будет определяться как текущее время при входе в блок имитации обслуживания Service, а значение параметра tf как разница между текущим моментом м моментомб хранящимся в параметре ts при выходе из данного блока, т.е. при окончании разговора. Соответствующие операторы приведены на *рис. 3.36*.

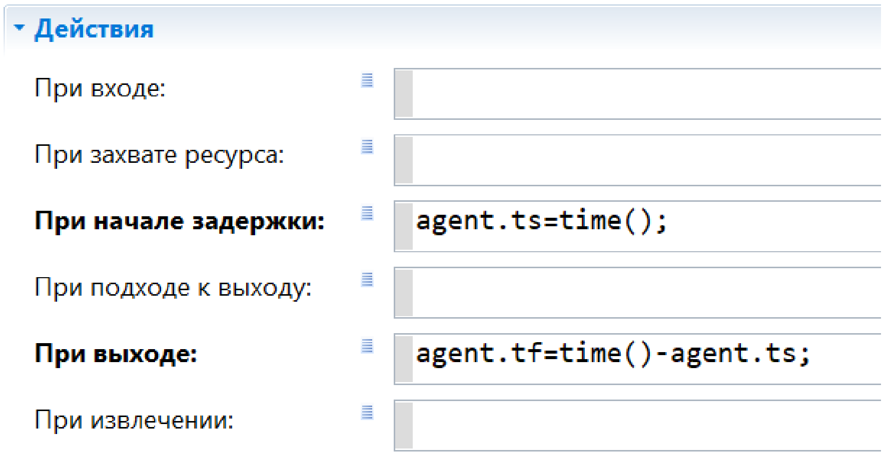


Рис. 3.36. Настройка свойств блока Service

Тогда при входе в блок sink, который соответствует успешному завершению разговора, необходимо вызвать функцию call_price и увеличить на соответствующее значение прибыль income (рис. 3.47).

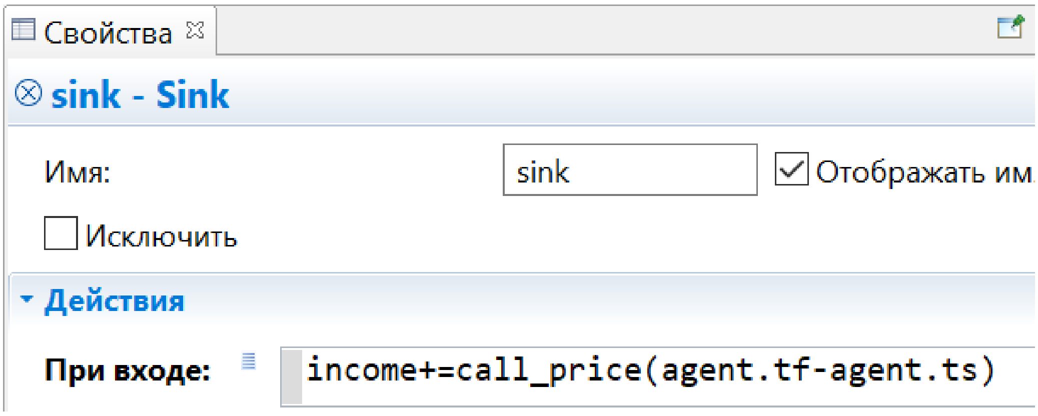


Рис. 3.37. Определение прибыли при завершении разговора

При каждом несостоявшемся вызове (т.е. отказе заявки в обслуживании) будет увеличивать функцию штрафа на заданное значение penalty (рис. 3.38).

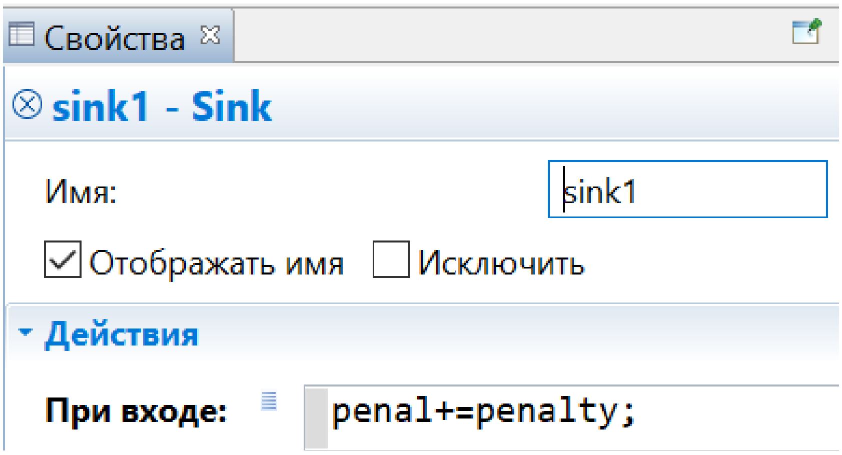


Рис 3.38. Увеличение штрафа при отказе в обслуживании

Теперь опишем зависимость, которая будет определять стоимость эксплуатацию заданного числа каналов связи. Определим эту зависимость с помощью табличной функции equipment, которая может быть определена, например, следующим образом (*рис. 3.39*).

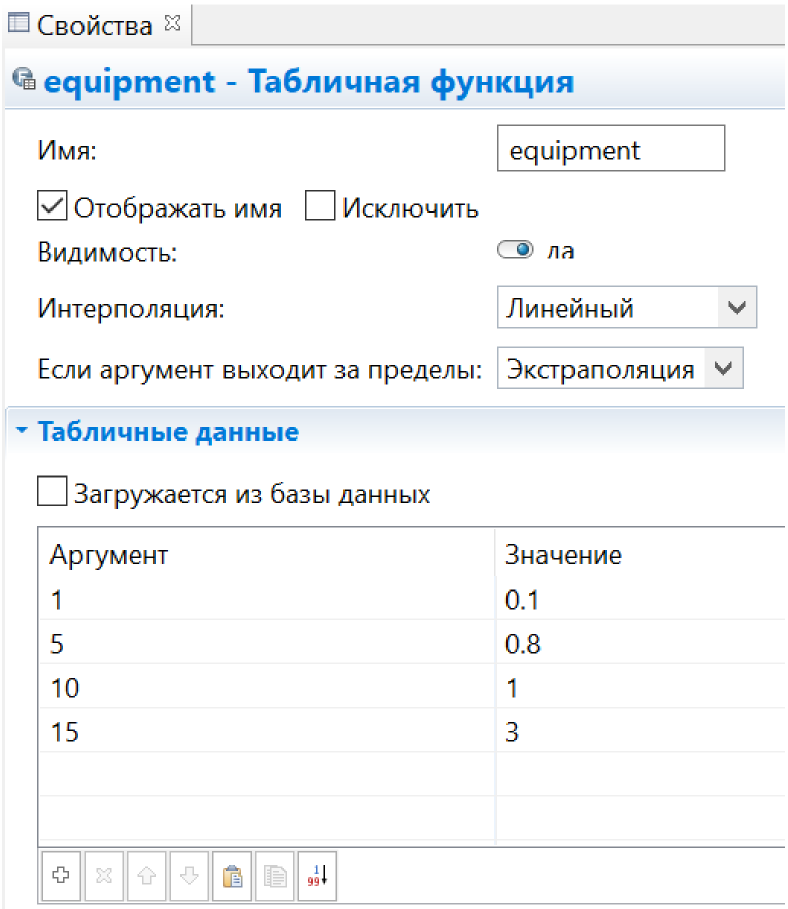


Рис 3.39. Определение функции equipment

На основании введенных ранее функций и переменных, определим динамическую переменную Itog (*рис. 3.40*).

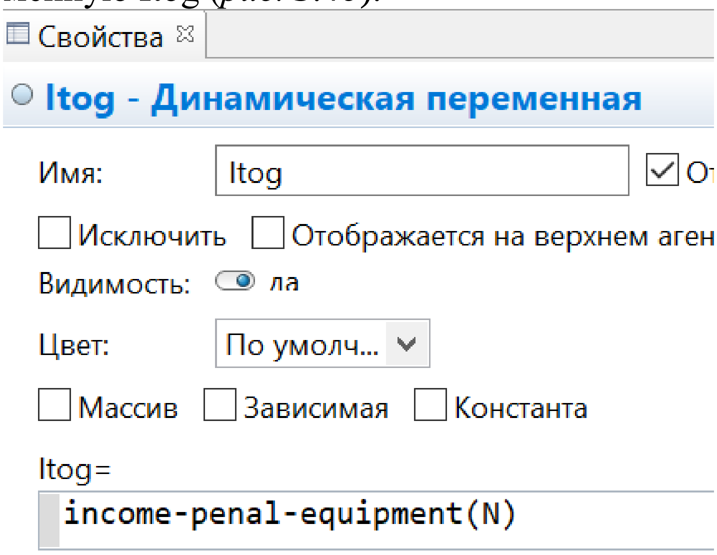


Рис. 3.40 Функция Itog

Создадим новый эксперимент. В качестве целевой функции выберем максимизацию переменной Itog, к которой обратимся через root.

В области «Параметры» будут отражены все параметры, участвующие в модели. Выберем параметр N и изменим его тип на Дискретный. Пусть значение данного параметра изменяется с 1 до 15 с шагом 1. После завершения описания эксперимента нажмем на кнопку «Создать интерфейс». Результат приведен на *рис. 3.41*.

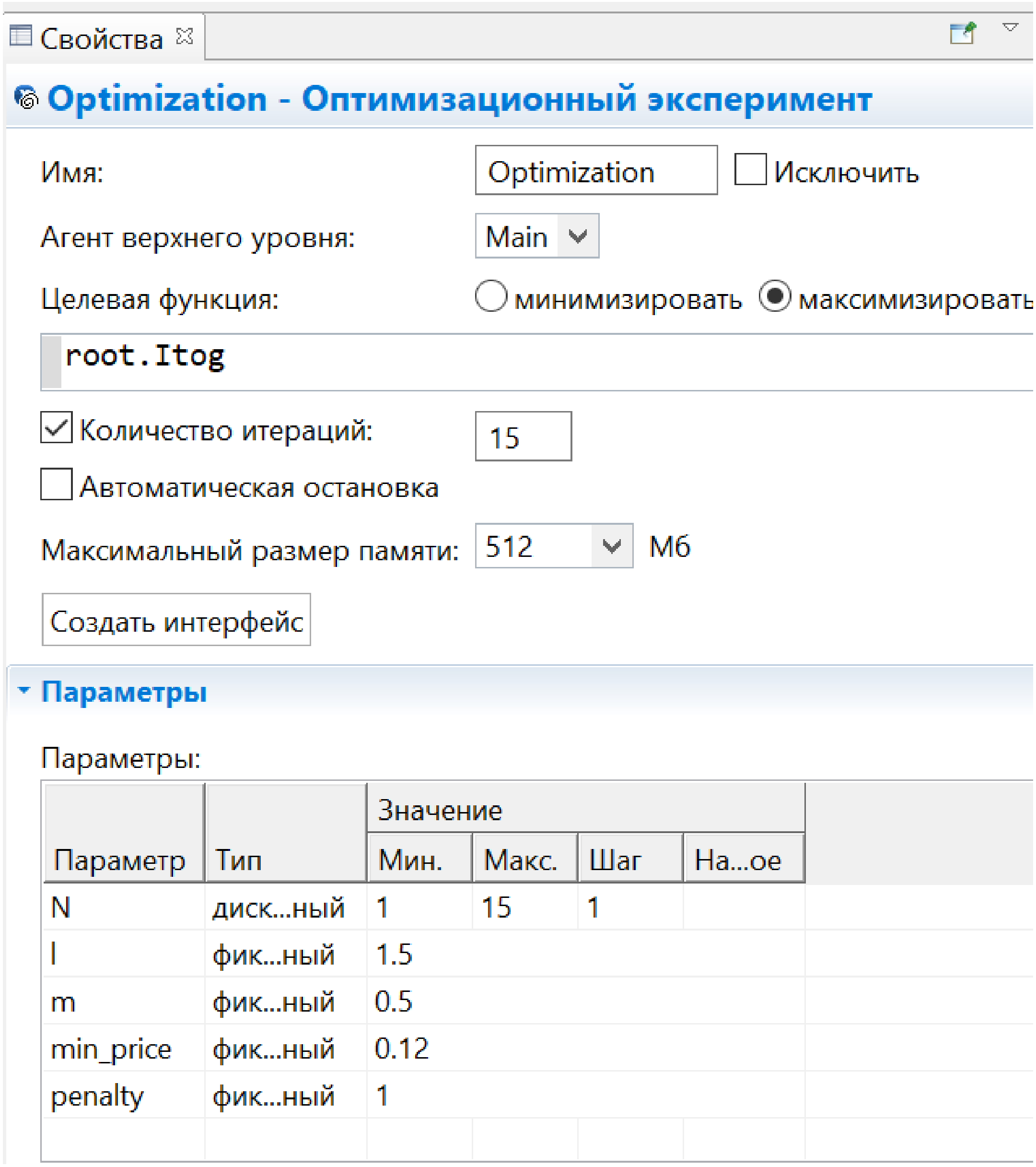


Рис. 3.41. Описание эксперимента

Запустим эксперимент. Получим следующий результат (*рис. 3.42*).

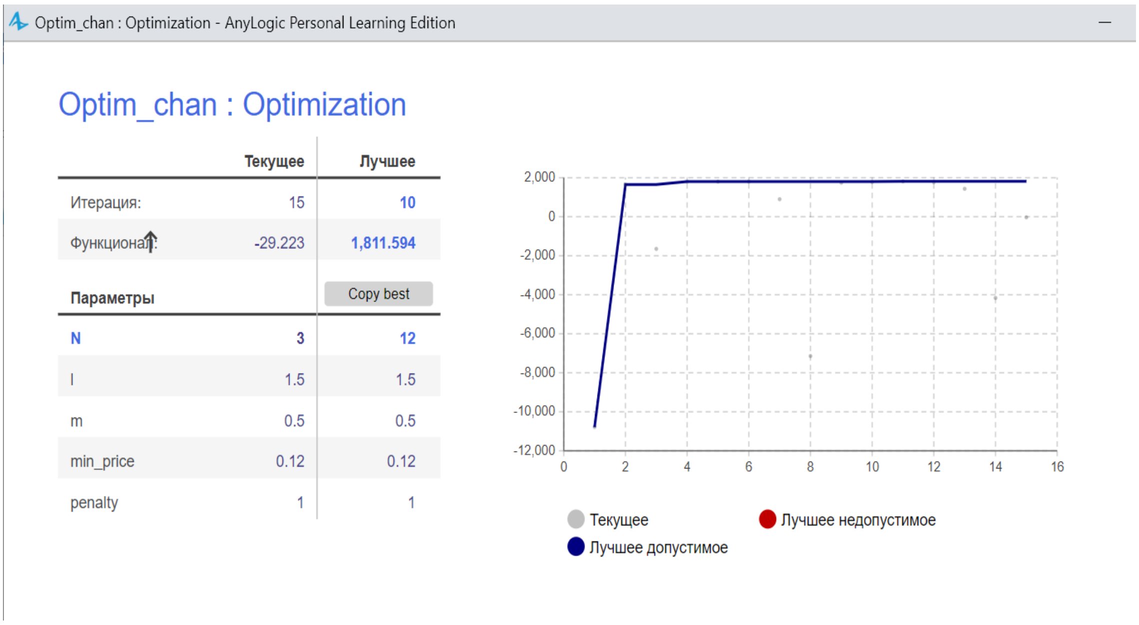


Рис. 3.42. Результаты эксперимента

Прокомментируем результаты эксперимента. Исходя из полученных данных, оптимальным значением будет являться 12 каналов обслуживания. Это, по всей видимости, связано с тем, что уже при 12 каналов получаем безотказную систему (т.е. количество переменной penalty перестает изменяться), а затраты на содержание оборудование возрастают.

Пример 2. Модифицируем предыдущую задачу следующим образом. Пусть, в условиях предыдущей задачи, требуется, чтобы мощности были задействованы не менее, чем на 30%.

Решение.

Добавим к сформированному эксперименту требование:

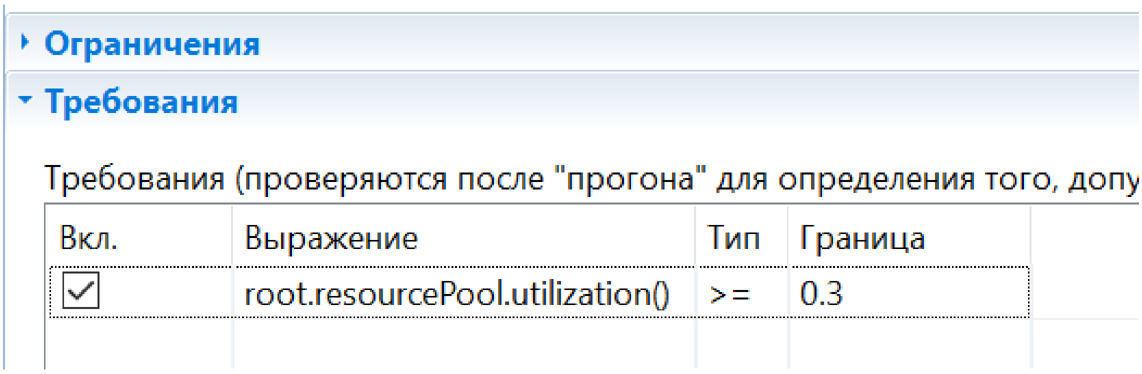


Рис. 3.43. Требование для эксперимента

Оно означает, что среднее число занятых каналов обслуживания (resourcePoll.utilization()) будет больше или равно 0.3. В результате получим уже следующие значения (*рис. 3.44*).

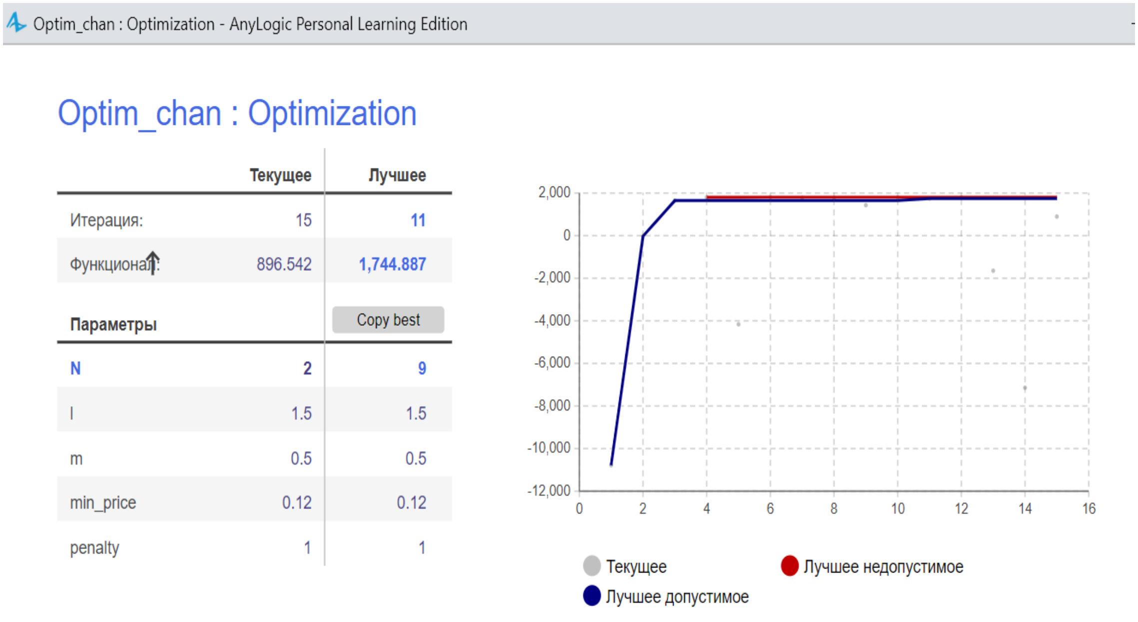


Рис. 3.44. Результаты моделирования

Анализируя результаты, видим, что в данном случае оптимальное значение уже 9, а не 12. Очевидно, что, начиная со следующего значения, будут нарушаться ограничения на ресурсы.

3.5. Контрольные вопросы

1. Какие средства AnyLogic используются для моделирования работы устройств?
2. Какие средства AnyLogic используются для моделирован очередей?
3. Каким образом необходимо настроить свойства объекта queue, чтобы смоделировать очередь ограниченной длины?
4. Каким образом необходимо настроить свойства объекта queue, чтобы смоделировать очередь, ограниченной временем ожидания?
5. Для чего необходимо объект SelectOutput?
6. Для чего необходимы объекты Seize и Release?
7. Назовите основные свойства этих объектов?
8. Можно ли заменить объекты Seize и Release единственным объектом? В каких случаях это возможно?
9. Какой метод у объекта delay используется в объекте «Статистика» для сбора каких-либо статистических значений?
10. Какой метод у объекта queue используется в объекте «Статистика» для сбора каких-либо статистических значений?
11. Для чего можно использовать объект plot?
12. Для чего можно использовать объект chart?
13. Поясните назначение объектов TimeMeasureStart и TimeMeasure End.
14. Каким образом можно задать интенсивности поступления заявок с помощью объекта schedule?

15. Каким образом можно задать интенсивности поступления заявок с помощью табличной функции?
16. Перечислите действия, с помощью которых можно создать оптимизационный эксперимент.
17. С помощью какого префикса из полей, находящихся в свойствах эксперимента, можно обращаться к объектам модели?
18. Чем ограничения отличаются от требований?
19. От каких объектов модели должна обязательно зависеть целевая функция, описанная в свойствах эксперимента?
20. У каких параметров в свойствах оптимизационного эксперимента необходимо обязательно изменить тип?
21. Какую еще дополнительную информацию необходимо внести в свойства данных параметров в окне эксперимента?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие содержит материал, посвященный специфике получения характеристик систем массового обслуживания с помощью аппарата математического и имитационного моделирования. В первую очередь рассматриваются классические системы массового обслуживания, для которых разработан математический аппарат, и на основании имеющихся математических моделей получены формулы для всех основных характеристик.

Кроме того, в пособии рассматриваются особенности получения характеристик систем массового обслуживания с помощью среды имитационного моделирования AnyLogic. В частности, описаны основные объекты AnyLogic, имитирующие процесс функционирования систем, блоки, необходимые для сбора статистики, а также особенности формирования нестационарного потока заявок. Кроме того приведены особенности реализации оптимизационного эксперимента.

На сегодняшний день аналитический аппарат, позволяющий исследовать характеристики обслуживающих систем, значительно шире, чем тот, что приведен в данном лабораторном практикуме. Получены результаты для исследования нерамковских обслуживающих систем, а также марковских сетей массового обслуживания. Однако, такие исследования выходят за рамки данного курса и, в связи с этим, могу быть рекомендованы желающим для самостоятельного изучения (см. библиографический список).

Что касается системы имитационного моделирования AnyLogic, целью данного пособия являлось освещение лишь тех его особенностей, которые могут потребоваться для получения и дальнейшего анализа вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания. Очевидно, что возможности данной среды намного шире, поэтому, если есть необходимость изучения объектов AnyLogic, выходящих за рамки курса «Системы массового обслуживания», следует перейти к электронному ресурсу [1], где можно найти не только обширный вспомогательный материал по данной тематике, но и множество вебинаров и других обучающих видео, а также демонстрацию решения ряда задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. AnyLogic [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.anylogic.ru/
2. Боев, Д. В. Компьютерное моделирование: Пособие для практических занятий, курсового и дипломного проектирования в AnyLogic [Текст] / Д.В, Боев - СПб: ВАС, 2014 – 432 с.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. - М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 564 с.
4. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие для втузов. 2-е изд., стер. / Е. С. Вентцель, Л. А.Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 383 с.
5. Григорьев И. AnyLogic за три дня [Электронный ресурс] // AnyLogic.ru. Режим доступа: https://www.anylogic.ru/resources/books/free-simulation-book-and-modeling-tutorials/
6. Карпов, Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 [Текст] / Ю.Г.Карпов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005 – 400 с.
7. Каталевский, Д.Ю. Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении: учебное пособие; 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / Д.Ю. Каталевский. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. — 496 с., ил.
8. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания [Текст] / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
9. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания [Текст] / Т. Л. Саати; пер. с англ. Е. Г. Коваленко. – М. : Советское радио, 1965. – 510 с.
10. Советов, Б.Я. Моделирование систем: Учеб. Для ВУЗов – 3-е изд., перераб. и доп. [Текст] / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
11. Феррари, Д. Оценка производительности вычислительных систем [Текст] : пер. с англ. / Д. Феррари. – М. : Мир, 1981. – 576 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ