ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения

Часть 2

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Е.М. Васильев

Sam- rab2.PDF	0,9 Мбайт	26.09.2016	уч.-изд. 3.2 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет »

(Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения

Часть 2

Воронеж 2016

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, доц. Е.М. Васильев.

УДК 517

Методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»),27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения.Ч.2/ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Е.М. Васильев. Воронеж, 2016. 51 с.

Методические указания содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены в эдекронном виде и содержатся вфайле «Sam- rab2.PDF»

Ил. 8. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих инженеров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности. И главное при этом, чтобы с самого начала и на всем протяжении курса изучение высшей математики проходило студентами целенаправленно во взаимосвязи с другими дисциплинами и ориентацией на конкретное практическое приложение изученного материала. Это возможно только при условии эффективного сочетания обязательных учебных занятий и продуктивной самостоятельной работы студентов.

При организации изучения курса высшей математики ряд тем выделяется студентам на самостоятельное изучение

ЗАНЯТИЕ № 15

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ БИНОМОВ. ПОДСТАНОВКИ ЧЕБЫШЕВА. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Литература: [1], с. 361-364, 369-370, [7], с. 138.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое выражение называется дифференциальным биномом?
2. В каких случаях интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции (является берущимся)?
3. С помощью каких подстановок интегрируются такие дифференциальные биномы?
4. Приведите пример интеграла от дифференциального бинома, не выражающегося через элементарные функции.

5. Какие интегралы берутся с помощью подстановок Эйлера?

6. Какова первая подстановка Эйлера и когда она применяется?

7. Какова вторая подстановка Эйлера и когда она применяется?

8. Какова третья подстановка Эйлера и когда она применяется?

9. Каким еще методом берутся те же интегралы, в которых применяются подстановки Эйлера?

10. Как и какие тригонометрические подстановки используются для вычисления интегралов?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решение. Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+3x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином, при этом $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}$. Так как p - не целое число, то данный интеграл не относится к первому случаю. $\frac{m+1}{n}=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}}=2$ - целое число, поэтому данный интеграл относится ко второму случаю и соответствующая подстановка:

$1+3x^{\frac{2}{3}}=t^3$. Выражаем отсюда $x=\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ и находим $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}t^2dt$. Таким образом,

$$\int\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int\frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}t\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}t^2dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t^3-1\right)t^3dt=\frac{1}{2}\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{возвращаемся}\\ \textit{к исходной}\\ \textit{переменной}\end{matrix}\right|=\frac{1}{14}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^3}\right)^4}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином, при этом $m=-11$, $n=4$, $p=-\frac{1}{2}$. Так как p - не целое число, то данный интеграл не относится к первому случаю. $\frac{m+1}{n}=\frac{-11+1}{4}=-\frac{5}{2}$ - не целое число, значит данный интеграл не относится ко второму случаю. $\frac{m+1}{n}+p=-3$ -

целое число, поэтому данный интеграл относится к третьему случаю и соответствующая подстановка: $\frac{1+x^4}{x^4}=x^{-4}+1=t^2$.

Выражаем отсюда $x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}$ и находим $dx=-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}}t\,dt$. Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}}t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{возвращаемся к исходной переменной}\\ \textit{с помощью обратной замены } t=\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{10}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Это интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. В нашем случае $a=1>0$, поэтому применим первую подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $x^2+x+1=x^2+2xt+t^2$. Выражаем отсюда $x=\dfrac{t^2-1}{1-2t}$ и находим $dx=-2\dfrac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt$. Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=-2\int\frac{\left(t^2-t+1\right)dt}{\left(\dfrac{t^2-1}{1-2t}+1\right)\left(\dfrac{t^2-1}{1-2t}+t\right)(1-2t)^2}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-2t}=2\int\frac{dt}{t^2-2t+1-1}=2\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2-1}=\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|+C=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{возвращаемся к исходной переменной}\\ \textit{с помощью обратной замены } t=\sqrt{x^2+x+1}-x\end{array}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right|+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

Решение. Это интеграл вида $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. В нашем случае квадратный трехчлен $2+x-x^2$ имеет действительные корни $x_1=-1$ и $x_2=2$, поэтому применим третью подстановку Эйлера: $\sqrt{2+x-x^2}=(x+1)t$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $-(x+1)(x-2)=(x+1)^2 t^2$. Выражаем отсюда $x=\dfrac{2-t^2}{t^2+1}$ и находим $dx=\dfrac{-6t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=-6\int \frac{t\,dt}{\dfrac{2-t^2}{t^2+1}\left(\dfrac{2-t^2}{t^2+1}+1\right)t\left(t^2+1\right)^2}=2\int \frac{dt}{t^2-2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\left|\begin{matrix}\textit{возвращаемся к исходной переменной}\\ \textit{с помощью обратной замены}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x+1}-\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x+1}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [3], 2076, 2078, 2080;

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЯ № 16

НЕСОБСТВЕННЫЕ МНТЕГРАЛЫ.
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Литература: [1], с. 429-448, [7], с. 141-146.

Контрольные вопросы и задания

1. Как вычисляются несобственные интегралы 1 рода (с бесконечными пределами) ?

2. Сформулируйте признаки сходимости несобственны-хинтегралов 1 рода ?
3. Как вычисляются несобственные интегралы 2 рода (от неограниченной функции) ?
4. Сформулируйте признаки сходимости несобственны-хинтегралов 2 рода.

5. Как вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры в случае задания ее границы в явном виде, в полярных координатах, параметрическими уравнениями?

6. Вычислите с помощью определенного интеграла длину дуги кривой в случае задания ее уравнением в явном виде, параметрическом виде, в полярных координатах?

7. Как вычислить объем тела по площадям поперечных сечений; объем тела вращения вокруг оси Ox, оси Oy ?

8. Как вычислить поверхность тела вращения?

9. Как найти величину работы с помощью определенного интеграла?

10. Найдите координаты центра тяжести плоской линии, плоской фигуры?

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Так как подынтегральная дробь разлагается на простейшие дроби вида

$\frac{1}{x^2+x+2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$, то

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x^2-x+2} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_2^b\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\bigg|_2^b = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}|\ln\frac{b-1}{b+2} - \ln\frac{1}{4}| = \frac{2}{3}\ln 2.$$

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости для несобственных интегралов 1-го рода в виде неравенства. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\frac{1}{x}$, при $x>2$. Вычислим $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln x\Big|_2^{\infty}=\infty$ - расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. При $x\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}:\ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Так как $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$. Это несобственный интеграл от неограниченной функции (2-го рода). По определению

$$\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2}+\lim_{\delta\to0}\int\limits_{1+\delta}^2\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}(\frac{1}{\varepsilon}-1)+\lim_{\varepsilon\to0}(\frac{1}{\delta}-1)=\infty.$$

Значит данный интеграл расходится.

Пример 5. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$. воспользуемся признаком сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для сравнения возьмем функцию $\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Очевидно, что $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$,

при $x\in[0,1]$. Найдем

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=-2\lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2.$$

Так как $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и $\int_0^1\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.;

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями

$$\begin{cases}x=8\cos^3 t,\\ y=3\sin^3 t,\end{cases}\quad x=-1\ (x\le-1).$$

Решение. Изобразим данные линии и заштрихуем искомую площадь (рис. 1). Найдем значения параметра t, соответствующие точкам пересечения данных кривых. Для этого решаем уравнение $8\cos^3 t=-1$ или $\cos t=-1/2$ и получаем $t_1=2\pi/3$ (соответствует точке *B*) и $t_2=4\pi/3$ (соответствует точке *C*). Точке *A*соответствует значение параметра$t_0=\pi$ так как $x(t_0)=-8$ и $y(t_0)=0$.

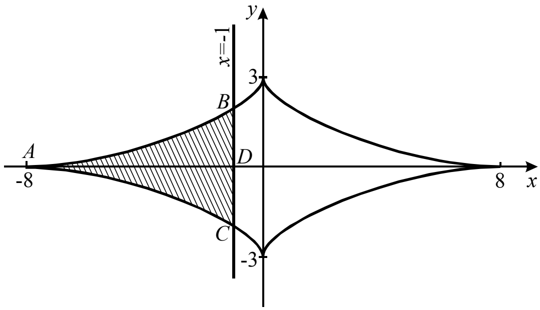

Рис. 1

Площадь фигуры ABC находим как удвоенную площадь верхней половины ABD, интегрируя при этом в направлении возрастания x от точки A до точки B:

$$S_{ABC} = 2\int_{\pi}^{2\pi/3} 3\sin^3 t\left(-8\cdot 3\cos^2 t\cdot \sin t\right)dt = 144\int_{2\pi/3}^{\pi}\sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= 18\int_{2\pi/3}^{\pi}(1-\cos 2t)^2(1+\cos 2t)dt =$$

$$= 18\int_{2\pi/3}^{\pi}\left(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt = 18\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi} -$$

$$-9\int_{2\pi/3}^{\pi}(1+\cos 4t)dt + 9\int_{2\pi/3}^{\pi}\left(1-\sin^2 2t\right)d\sin 2t =$$

$$= 18\left(\pi-\frac{2\pi}{3}-0-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-9\left(t+\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi}+9\left(\sin 2t-\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi} =$$

$$= 6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}-9\left(\pi-\frac{2\pi}{3}+0-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=3\pi .$$

Пример 7. Найти площадь фигуры, лежащей вне окружности $r=1$ и ограниченной кривой $r=2\cos 2\varphi$.

Решение. Так как функция $r = 2\cos 2\varphi$ имеет период $T = \pi$, то при изменении φ от 0 до 2π радиус-вектор описывает два равных лепестка кривой. При этом допустимыми для φ являются те значения, при которых $\cos 2\varphi \geq 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно, один из лепестков описывается при изменении φ от $-\pi/4$ до $\pi/4$. Второй лепесток получается при изменении φ от $3\pi/4$ до $5\pi/4$ (рис. 1). Вырезая из лепестков части, принадлежащие кругу $r \leq 1$, мы получим фигуру, площадь которой нужно определить. Ясно, что искомая площадь $S = 4S_{ABC}$. В свою очередь $S_{ABC} = S_{OAB} - S_{OAC}$. Точкам B и C соответствует значение полярного угла $\varphi_1 = 0$. Найдем полярные координаты точки A пересечения данных кривых. Для этого решим уравнение $2\cos 2\varphi = 1$ т.е. $\cos 2\varphi = 1/2$. Между 0 и $\pi/4$ находится только корень $\pi/6$. Таким образом, точке A соответствует полярный угол $\varphi_2 = \pi/6$.

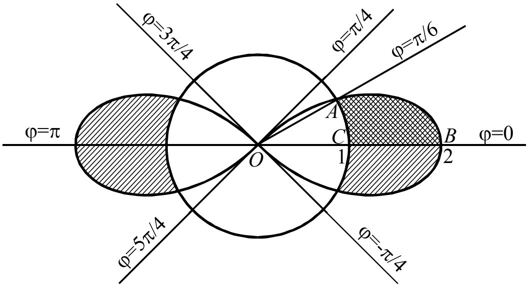

Рис. 2

Далее определяем искомую площадь:

$$S = 4S_{ABC} = 4(S_{OAB} - S_{OAC}) = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 4\cos^2 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 1^2 d\varphi\right) =$$

$$= 4\int_0^{\pi/6}(1+\cos 4\varphi)d\varphi - 2\varphi\Big|_0^{\pi/6} = 4\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = \sin\varphi$ и $r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)$.

Решение. Так как $\sin\varphi \ge 0$ при $0 \le \varphi \le \pi$, то первая кривая лежит в верхней полуплоскости и проходит через полюс $r = 0$. Чтобы построить ее перейдем в декартовые координаты, пользуясь соотношениями $r^2 = x^2 + y^2$ и $\sin\varphi = y/r$. Получаем $x^2 + y^2 = y$. Приведя это уравнение к каноническому виду, будем иметь $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$. Это уравнение окружности с центром $(0,\ 1/2)$ и радиусом равным $1/2$ (рис. 2). Вторая кривая определена при $\sin(\varphi - \pi/4) \ge 0$ т.е. при $\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4$ и также проходит через полюс $r = 0$. Преобразуем уравнение второй кривой

$$r = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right) = \sin\varphi - \cos\varphi$$

и перейдем в декартовые координаты

$$r = \sin\varphi - \cos\varphi = y/r - x/r \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = y - x\,.$$

Приведем полученное уравнение к каноническому виду: $(x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2$. Видно, что это уравнение окружности с центром $(-1/2,\ 1/2)$ и радиусом равным $1/\sqrt{2}$ (рис. 2).

Из вышесказанного следует, что полюс есть точка пересечения окружностей. Другая точка пересечения окружностей находится из решения уравнения $\sin\varphi = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)$ или $\sin\varphi = \sin\varphi - \cos\varphi$, откуда $\varphi = \pi/2$. Из рис.3 видно, что искомая площадь S равна сумме площадей сегментов S_1 и S_2, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi/2$. Дуга первого сегмента описывается концом полярного радиуса второй окружности при $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$, поэтому его площадь

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1 - \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin(2\varphi - \pi/2)}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

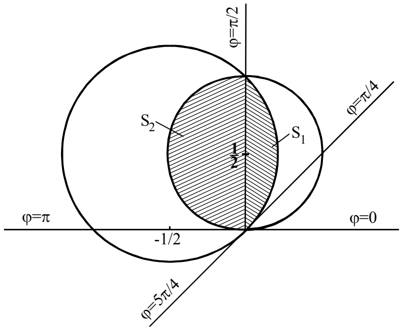

Рис. 3

Дуга второго сегмента описывается концом полярного радиуса первой окружности при $\pi/2 \le \varphi \le \pi$, поэтому его площадь

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, искомая площадь $S = S_1 + S_2 = \dfrac{\pi - 1}{4}$.

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = \cos\varphi$ и $r = 1/\sqrt{2} + \sin\varphi$.

Решение. Определим область, в которой расположена первая кривая. Для этого решим неравенство $\cos\varphi \ge 0$. Получаем

$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Так как $\cos\varphi = x/r$, то в декартовых координатах уравнение первой кривой запишется следующим образом $x^2 + y^2 = x$ или в каноническом виде $(x-1/2)^2 + y^2 = 1/4$ – это уравнение окружности с центром $(1/2,\, 0)$ и радиусом равным $1/2$. Окружность расположена в правой полуплоскости и проходит через полюс $r = 0$ (рис. 4).

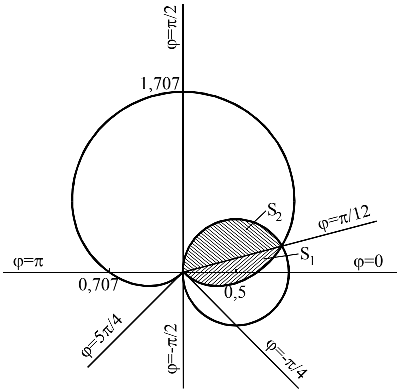

Рис. 4

Для построения второй кривой решаем неравенство $1/\sqrt{2} + \sin\varphi \ge 0$. Получаем $-\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4$. Видно, что при граничных значениях полярного угла $r = 0$, а при $\varphi = \pi/2$ достигает максимального значения $r = 1/\sqrt{2} + 1 \approx 1{,}707$ (рис. 4).

Из вышеизложенного следует, что одной точкой пересечения данных кривых является полюс. Найдем остальные точки пересечения кривых. Для этого решим систему

$$\begin{cases} r = \cos\varphi, \\ r = 1/\sqrt{2} + \sin\varphi, \end{cases} \left(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Здесь указан диапазон углов, общих для обеих кривых. Приравнивая правые части уравнений, получаем

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 1/\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1/\sqrt{2}$$

,

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{12}.$$

Из рис. 4 видно, что искомая площадь равна сумме площадей S_1 и S_2 двух сегментов, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi/12$. Дуга первого сегмента описывается концом полярного радиуса $r = 1/\sqrt{2} + \sin\varphi$ при изменении полярного угла φ от $-\pi/4$ до $\pi/12$, поэтому

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/12}\left(1/\sqrt{2} + \sin\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/12}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\sin\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\cos\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/12} + \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/12}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + 1\right) + \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/12} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{16} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}}.$$

Дуга второго сегмента описывается концом полярного радиуса $r = \cos\varphi$ при изменении полярного угла φ от $\pi/12$ до $\pi/2$, поэтому

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/12}^{\pi/2}(1 + \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/12}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi}{48} - \frac{1}{16}.$$

Таким образом, искомая площадь равна

$$S = S_1 + S_2 = \frac{13\pi}{48} + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}}\ .$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 6.456, 6.470, 6.478, 6.480, 6.485, 6.494, 6.502, 6.509, 6.512, 6.521, 6.534, 6.535, 6.537, 6.562, 6.575.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ № 17

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА.НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ.ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Литература: [1], с. 272-276; [3], с. 434-437;[7], с. 172-174, с. 183-189.

Контрольные вопросы и задания

1. Как находить производные неявных функций (случай функции одной переменной) ?
2. Как находить произволные неявных функций (случай функции нескольки переменных) ?
3. Дать определение касательной и нормали к поверхности и вычислить их уравнения.
4. Какова постановка задачи на нахождение условного экстремума функции нескольких переменных?
5. Каковы необходимые условия условного экстремума? Докажите их.
6. В чем состоит метод множителей Лагранжа? Что такое функция Лагранжа?

7. Каковы достаточные условия условного экстремума?

8. Как по знаку второго дифференциала вспомогательной функции определить характер условного экстремума?

9. Как найти наибольшее или наименьшее значение функции нескольких переменных в замкнутой области?

10. Какие точки функции называются стационарными?

11. Как исследуются функции на границе области?

12. Как задача на нахождение наибольшего, наименьшего значения в замкнутой области связана с задачей на условный экстремум?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=-10xy^2+x^2+10x+1$ на отрезке AB, если координаты точек $A(-7,0)$, $B(0,2)$.

Решение. Уравнение прямой AB в отрезках $\frac{x}{-7}+\frac{y}{2}=1$. Таким образом, получаем задачу на условный экстремум: найти экстремум функции $z=-10xy^2+x^2+10x+1$ при условии $\frac{x}{-7}+\frac{y}{2}=1$. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=-10xy^2+x^2+10x+1+\lambda\left(-\frac{x}{7}+\frac{y}{2}-1\right).$$

Ищем стационарные точки этой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=-10y^2+x+10-\dfrac{\lambda}{7}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-20xy+\dfrac{\lambda}{2}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{2}-1=0 \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 7, второе на 2 и сложим их. Этим исключим параметр λ из системы:

$$\begin{cases} -70y^2-40xy+14x+70=0 \\ x=\dfrac{7y}{2}-7 \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой приходим к уравнению, которое после сокращений имеет вид $30y^2-47y+4=0$. Отсюда находим $y_1=1{,}5$, $y_2=0{,}1$ и из системы получаем точки $M_1(-1{,}75;1{,}5\ )$, $M_2(-6{,}65;0{,}1)$, принадлежащие отрезку AB .Вычисляем значения функции в стационарных точках

$$z(M_1)=z(-1{,}75;1{,}5)\approx-25{,}9,$$

$$z(M_2)=z(-6{,}65;0{,}1)\approx-22{,}9$$

и на концах отрезка

$$z(A)=z(-7;0)=20, \quad z(B)=z(0;2)=1.$$

Сравнивая все полученные величины, приходим к выводу: наибольшее значение функции на отрезке достигается в точке A, а наименьшее в точке M_1.

Пример 2.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью Oy, прямой $y=2$ и параболой $y=x^2/2$ при $x\geq 0$ (рис. 5).

Решение.

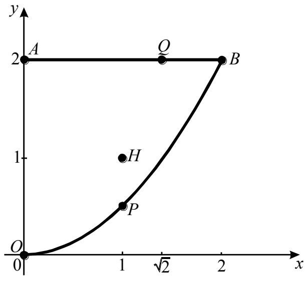

Рис. 5

1) Находим стационарные точки функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases},$$

получим две стационарные точки $O(0,0)$ и $H(1,1)$. Первая из них принадлежит границе области. Следовательно, если функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то это может быть только в точке $H(1,1)$. Найдем $z(H) = z(1;1) = -1$.

2) Исследуем функцию на границе области

а) на отрезке OA имеем $x = 0$, поэтому $z = 3y^2$ $(0 \le y \le 2)$ - возрастающая функция одной переменой y; наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA. Найдем

$$z(O) = z(0;0) = 0; \qquad z(A) = z(0;2) = 12;$$

б) на отрезке AB имеем $y = 2$, следовательно, $z = 2x^3 - 12x + 12$ $(0 \le x \le 2)$ представляет функцию одной переменной x; ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка. Решая уравнение $z' = 6x^2 - 12 = 0$, находим $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $0 \le x \le 2$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$; соответствующей точкой отрезка AB является точка $Q(\sqrt{2};2)$. Итак, наибольшее и наименьшее значения функции z на отрезке AB находятся среди ее значений в точках A, Q и B. Найдем

$$z(Q) = z(\sqrt{2};2) = 12 - 8\sqrt{2}; \qquad z(B) = z(2;2) = 4;$$

в) на дуге OB параболы $y = x^2/2$ имеем $z = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \left(0 \le x \le 2\right)$. Решая уравнение $z' = 3x^3 - 3x^2 = 0$, получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$; соответствующими точками параболы являются точки $O(0,0)$ и $P(1;1/2)$. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции z на дуге OB находятся среди ее значений в точках O, P и B. Найдем

$$z(P) = z(1;1/2) = -1/4.$$

3) Сравнивая значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в точках H, O, A, Q, B и P, получим решение задачи

$$z_{\text{наиб}} = z(A) = 12, \qquad z_{\text{наим}} = z(H) = -1.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.35, 3.36, 3.37, 3.38.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 18

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ

Литература: [1], с. 25-30; [3], с. 113-114; [7], с. 190-192

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения первого порядка называются однородными?
2. Как решаются такие уравнения?
3. Укажите вид уравнений, приводящихся к однородным.
4. Какие два случая различают при решении таких уравнений? Каков алгоритм решения в каждом из этих случаев?

Пример решения задач

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(y+2)dx-(2x+y+6)dy=0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду $y'=\dfrac{y+2}{2x+y+6}$. Это уравнение можно привести к однородному. Сделаем подстановку $x=u+x_0$, $y=v+y_0$. Подберем x_0 и y_0 так, чтобы $\begin{cases} y_0+2=0 \\ 2x_0+y_0+6=0 \end{cases}$. Решая систему, находим $x_0=-2$, $y_0=-2$. Тогда исходное уравнение принимает вид $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{v}{2u+v}$, т.е. является однородным. Совершая подстановку $v=ut(u)$, получим $t+u\dfrac{dt}{du}=\dfrac{ut}{2u+ut}$. Далее, разделив переменные, получим уравнение $\dfrac{t+2}{t(t+1)}dt=-\dfrac{du}{u}$, проинтегрировав которое будем иметь $\dfrac{t^2}{t+1}=\dfrac{C}{u}$. Учитывая, что $t=\dfrac{v}{u}=\dfrac{y+2}{x+2}$ записываем общий интеграл исходного дифференциального уравнения $\dfrac{(y+2)^2}{x+y+4}=C$.

Разберите также решения примеров № 552, 553 [3].

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$; 2) $(x+y-2)dx-(3x-y-2)dy=0$;

3) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$; 4) $y'=\dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$

.5) Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью Ox равен отрезку, отсекаемому касательной от оси Ox.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 19

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Литература: [1], с. 30-35; [7], с. 192-194.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения первого порядка называются линейными?
2. Какими методами решаются линейные дифференциальные уравнения?
3. В чем состоит метод Бернулли?
4. В чем состоит метод Лагранжа?
5. Какой вид имеет уравнение Бернулли?
6. Приведение уравнения Бернулли к линейным уравнениям?
7. Можно ли решать уравнение Бернулли, не приводя его к линейному виду?

Пример решения задач

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y} .$$

Решение. Это уравнение Бернулли с $n = 1/2$. Полагаем $y(x) = u(x)v(x)$. Получаем уравнение $u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$ или $u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv}$. Подберем такую функцию $v(x)$, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение $v' - \frac{4}{x} v = 0$. Находим $v = x^4$. Решаем затем уравнение $u' x^4 = x\sqrt{u x^4}$ и получаем его общее решение $u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|$. Следовательно, общее решение исходного уравнения $y = uv = \frac{1}{4} x^4 \ln^2|Cx|$. Нетрудно заметить, что $y = 0$ является особым решение исходного уравнения.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи №№ 4038, 4039, 4041, 4043, 4044 [2].

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 20

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ (КЛЕРО, ЛАГРАНЖА)

Литература: [1], с. 47-50.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения называются уравнениями Клеро?
2. Какая вспомогательная замена вводится при решении уравнений Клеро?
3. Что такое особое решение уравнения Клеро и каким свойством оно обладает?
4. Каков общий вид уравнений Лагранжа?
5. Какой вид уравнений более общий Клеро или Лагранжа?
6. Какой заменой решается уравнение Лагранжа?
7. Что такое особое решение уравнения Лагранжа?
8. Как ищется общее решение уравнения Лагранжа?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить уравнение $y = xy' - (y')^2$.

Решение. Уравнение имеет вид (5.2), т.е. это уравнение Клеро. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид $y = px - p^2$. Продифференцировав его по x, имеем $y' = p'x + p - 2pp'$, или $p'(x - 2p) = 0$ с учетом $y' = p$. Если $p' = 0$, то $p = C$ и общее решение данного уравнения есть $y = Cx - C^2$. Если $x - 2p = 0$, то получаем $y = p \cdot 2p - p^2$. Особое решение данного уравнения $\begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases}$. Исключая параметр p, находим особое решение в явном виде $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $y = x(1 + y') + (y')^2$.

Решение. Уравнение имеет вид (5.1), т.е. это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид $y = x(1 + p) + p^2$. Продифференцировав его по x, имеем $y' = (1 + p) + xp' + 2pp'$, откуда $(x + 2p)\dfrac{dp}{dx} + 1 = 0$. Из этого уравнения получаем $\dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ – линейное относительное x и $\dfrac{dx}{dp}$ уравнение. Решим его методом Бернулли. Полагая $x(p) = u(p)v(p)$, получаем $u'v + uv' + uv = -2p$ или $u'v + u(v' + v) = -2p$. Находим v, приравнивая скобку к нулю, разделяя переменные и интегрируя: $v' + v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = -dp$,

$\ln|v| = -p$, $v = e^{-p}$. Тогда уравнение примет вид $u'e^{-p} = -2p$. Отсюда $u = -2\int pe^{p}dp = -2e^{p}(p-1) + C$. Учитывая, что $y = x(1+p) + p^{2}$, получим $y = \left(2 - 2p + Ce^{-p}\right)(1+p) + p^{2}$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид (в параметрической форме)

$$\begin{cases} x = 2 - 2p + Ce^{-p} \\ y = \left(2 - 2p + Ce^{-p}\right)(1+p) + p^{2} \end{cases}.$$

Особого решения данное уравнение не имеет.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) $y = xy' + y' - (y')^{2}$;   2) $y = xy' - 3(y')^{3}$;

3) $y = x(y')^{2} + (y')^{2}$;   4) $y = x(1+y') + (y')^{2}$.

Форма отчетности: устный опрос, самостоятельная работа.

ЗАНЯТИЕ № 21

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

Литература: [1], с. 56-66; [7], с. 196-198

Указание. Перед изучением этой темы повторите все виды уравнений первого порядка и способы их решения.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения второго порядка приводятся к уравнениям первого порядка?
2. Как решаются уравнения вида $y'' = f(x)$?
3. Как решаются уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$?
4. Как решаются уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$?

5. Как решаются уравнения вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0$?

6. Как решаются уравнения вида $F(y, y', y'')=0$?

7. Можно ли понизить порядок дифференциального уравнения вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0$?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=xe^{2x}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решение. Интегрируя левую и правую части, находим $y'=\int xe^{2x}dx=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C_1$. Повторное интегрирование приводит к общему решению $y=\frac{1}{4}e^{2x}(x-1)+C_1x+C_2$. Учитывая начальные условия, записываем систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0)=\frac{1}{4}\cdot(-1)+C_2=1 \\ y'(0)=\frac{1}{4}\cdot(-1)+C_1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=\frac{5}{4} \\ C_1=\frac{9}{4} \end{cases}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение уравнения, получаем искомое частное решение

$$y_ч=\frac{1}{4}e^{2x}(x-1)+\frac{9}{4}x+\frac{5}{4}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y''-y'\operatorname{ctg}x=2x\sin x$.

Решение. Данное уравнение имеет вид $F\left(x,y',y''\right)=0$**.** Положим $y'=p\left(x\right)$. Тогда $y''=p'\left(x\right)$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $p'-p\operatorname{ctg}x=2x\sin x$ – линейное относительно неизвестной функции $p\left(x\right)$. Его общее решение $p=\left(x^2+C_1\right)\sin x$, т.е. $y'=\left(x^2+C_1\right)\sin x$. Интегрируя это равенство, найдем общее решение исходного уравнения $y=-\left(x^2+C_1\right)\cos x+2x\sin+2\cos x+C_2$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+yy')\,y''=\left(1+\left(y'\right)^2\right)y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1$.

Решение. Данное уравнение имеет вид $F\left(y,y',y''\right)=0$**.** Подстановка $y'=p\left(y\right)$, $y''=\dfrac{dp}{dy}p$ приводит его к виду $(1+py)\,p\dfrac{dp}{dy}=\left(1+p^2\right)p$, откуда $p=0$, т.е. $y=C$ (это решение не удовлетворяет начальным условиям), или
$\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1+p^2}{1+py}$.
Полученное дифференциальное уравнение первого порядка не относится к уравнениям известного нам типа. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1+py}{1+p^2}=\frac{p}{1+p^2}y+\frac{1}{1+p^2}.$$

Это линейное уравнение относительно функции $y\left(p\right)$. Его общее решение имеет вид $y=p+C_1\sqrt{1+p^2}$.

Теперь необходимо решить дифференциальное уравнение $y=\frac{dy}{dx}+C_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Но в общем виде решить его достаточно сложно. Так как нам нужно найти частное решение исходного уравнения, то воспользуемся начальными условиями для определения постоянной C_1, полагая в последнем равенстве $y=1$ и $y'=1$. Приходим к равенству $1=1+C_1\sqrt{2}$, из которого $C_1=0$. Таким образом, нам достаточно решить уравнение $y=\frac{dy}{dx}$, откуда $y=C_2e^x$.Учитывая начальное условие $y(0)=1$, находим $C_2=1$ и записываем искомое частное решение $y_ч=e^x$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения
Решить задачи: №№ 4155, 4156, 4160, 4161, 4165, 4166, 6470, 4178 [2].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 22

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯВЫСШИХ ПОРЯДКОВС ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИСО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 2- ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Литература: [1], с.79-80, 92-94; [3], с.135; [7], с. 198-204.

Указание. Перед изучением этой темы повторить тему "Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка".

Контрольные вопросы и задания

1. Какова структура общего решения неоднородного уравнения?
2. Что такое характеристическое уравнение и как оно составляется для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
3. Как строится общее решение однородного уравнения в зависимости от характера корней характеристического уравнения?
4. Какой вид правой части неоднородного уравнения называют специальным?
5. Как по виду правой части записывается частное решение неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами?
6. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного уравнения?
7. В чем состоит методметод Лагранжа для уравнений 2 - го порядка с переменными коэффициентами ?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' = f(x)$, где а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, б) $f(x) = 2xe^x$, в) $f(x) = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0$ и $k_3 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Найдем частные решения неоднородного уравнения для случаев а) – в).

а) Контрольное число $\alpha + i\beta = 0$ – корень характеристического уравнения кратности 2 и в правой части стоит многочлен второй степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 3x^2 - 2x + 5$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^2 & -12A = 3 \\ x^1 & 24A - 6B = -2 \\ x^0 & 6B - 2C = 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/4 \\ B = -2/3 \\ C = -9/2 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = x^2\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{9}{2}\right)$.

б) Контрольное число $\alpha + i\beta = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1 и в правой части стоит произведение экспоненты на многочлен первой степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = x(Ax + B)e^x$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $\left[Ax^2 + (6A + B)x + 6A + 3B\right]e^x - \left[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right]e^x = 2xe^x$ или $2Ax + (4A + B) = 2x$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 2A = 2 \\ x^0 & 4A + B = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = x(x - 4)e^x$.

в) Контрольное число $\alpha + i\beta = 2i$ не является корнем характеристического уравнения и в правой части стоят произведения синуса и косинуса на многочлены, старшая степень которых равна 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = (Ax+B)\cos 2x + +(Cx+D)\sin 2x$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C, D вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $(-8Cx-8D-12A)\cos 2x+$ $+(8Ax+8B-12C)\sin 2x-(-4Ax-4B+4C)\cos 2x-(-4Cx-4D-$ $-4A)\sin 2x = 3\sin 2x+5x\cos 2x$ или $(4A-8C)x\cos 2x+$ $+(8A+4C)x\sin 2x+(-12A+4B-4C-8D)\cos 2x+(4A+8B-$ $-12C+4D)\sin 2x = 3\sin 2x+5x\cos 2x$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{r|c} x\cos 2x & 4A-8C=5 \\ x\sin 2x & 8A+4C=0 \\ \cos 2x & -12A+4B-4C-8D=0 \\ \sin 2x & 4A+8B-12C+4D=3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B=-3/4 \\ C=-1/2 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = \left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\sin 2x$.

Таким образом, общие решения неоднородного уравнения для случаев а) – в) имеют вид:

а) $y = C_1+C_2x+C_3e^x - x^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{9}{2}\right)$;

б) $y = C_1+C_2x+C_3e^x+\left(x^2-4x\right)e^x$;

в) $y = C_1+C_2x+C_3e^x+\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)\cos 2x-\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x$.

Пример 2.Даноуравнение$y''' - y' = 0$. Составляют ли фундаментальную систему решений функции e^x,e^x, ch x, являющиеся решениями этого уравнения?

Решение.Вычислим определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^{x} & -e^{-x} & \operatorname{sh} x \\ e^{x} & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix}.$$

Он равен нулю. Следовательно функции e^x,e^x, ch x линейно зависимы и общее решение по этим функциям составить нельзя.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4314–4321 [2].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 23

РЕШЕНИЕ СИСТЕМДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ(МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ)

Литература: [1], с. 103-107, [7], с. 204-206.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
2. В чем состоит метод исключения неизвестных в нормальной системе?
3. Каков алгоритм метода исключения?
4. Какой метод решения систем более общий: метод характеристического уравнения или метод исключения неизвестных?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}$.

Решение. В данной системе $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – неизвестные функции. Дифференцируем первое уравнение системы по t: $x'' = -2x' - 2y' - 4z'$. Вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы. Тогда $x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z$. Полученное уравнение дифференцируем по t, а вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы: $x''' = -2x'' - 16x' -$ $- 10y' - 24z' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z$. Составим новую систему:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z \\ x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z \end{cases} .(*)$$

Из этой системы исключим неизвестные y и z. Для этого используем первые два уравнения системы , из которых, после преобразований, находим

$$\begin{cases} 2y = x'' - 4x' + 4x \\ 4z = -x'' + 3x' - 6x \end{cases}$$

и эти выражения подставим в третье уравнение основной системы и получим однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $x(t)$: $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Решаем соответствующее характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$ и находим $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Следовательно, общее решение $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$. Далее находим производные $x' =$ $= C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$, $x'' = C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 9C_3 e^{3t}$ и подставляем $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ в систему(*). Получаем $2y = C_1 e^t + + C_3 e^{3t}$, $4z = -4C_1 e^t - 4C_2 e^{2t} - 6C_3 e^{3t}$. В итоге, общее решение исходной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ y(t) = \dfrac{1}{2} C_1 e^t + \dfrac{1}{2} C_3 e^{3t} \\ z(t) = -C_1 e^t - C_2 e^{2t} - \dfrac{3}{2} C_3 e^{3t} \end{cases}.$$

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$ при данных начальных условиях: $t_0 = 0$, $x_0 = -\dfrac{3}{17}$, $y_0 = \dfrac{4}{17}$.

Решение. Сначала приводим систему к нормальному виду

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t \end{cases}.$$

Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо y' подставим выражение из второго уравнения системы: $x'' = -3y' - \sin t - e^t = -12y + 3\cos t - \sin t - 7e^t$. Из этого уравнения и первого уравнения исходной системы составим новую систему

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t \\ x'' = -12y + 3\cos t - \sin t - 7e^t \end{cases},$$

из первого уравнения которой выражаем $3y = -x' + \cos t - e^t$ и, подставляя во второе, получаем $x'' - 4x' = -3e^t - \cos t - \sin t$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 4 \Rightarrow x_{oo} = C_1 + C_2 e^{4t}$. Частное решение ищем в виде $x_{чн} = Ae^t + B\cos t + C\sin t$. После определения коэффициентов получаем $x_{чн} = e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Следовательно $x = x_{оо} + x_{чн} = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Найдя производную $x' = 4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t$, получаем $3y = -\left(4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t\right) + \cos t - e^t$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y = -\frac{4}{3}C_2 e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Подставляя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -\frac{3}{17} = C_1 + C_2 + 1 - \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} = -\frac{4}{3}C_2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Итак, частное решение исходной системы, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4324.1–4324.4 [2], а также задачи:

1) $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x \\ x' = \cos t - y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' + 5x + y = t \\ y' - x - 3y = e^{2t} \end{cases}$.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 24

ПОНЯТИЕ О ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

Литература: [1], с. 113-127,

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение устойчивости по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений.
2. Дайте определение асимптотической устойчивости решения системы дифференциальных уравнений.
3. Какое решение называется неустойчивым?
4. Какая система называется автономной?
5. Какая система называется динамической?
6. Что такое фазовая плоскость?
7. Что такое фазовые кривые?
8. Что такое положение равновесия?
9. Чем определяется качественное поведение фазовых траекторий вблизи положения равновесия?
10. Какими должны быть корни характеристического уравнения для системы вида (7.2), чтобы решение было устойчивым (неустойчивым)?
11. На примере системы вида (7.2) исследуйте вопрос о том каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы, чтобы решение было устойчивым (неустойчивым).
12. Что значит решение системы (7.2) устойчиво (неустойчиво)? Поясните на примере.
13. В каком случае особая точка называется устойчивым (неустойчивым) узлом?
14. Какая особая точка называется седлом?
15. Когда особая точка называется устойчивым (неустойчивым) фокусом?

16. В каком случае особая точка является центром?

17. В каких случаях фазовыми траекториями являются параллельные прямые?

18. Исследуйте вопрос о соответствии случая $ad-cb\neq 0$ ($ad-cb=0$) различным видам фазовых траекторий.

19. Каков порядок исследования системы (7.3)?

20. В чем состоит глобальная задача качественной теории систем дифференциальных уравнений?

Примеры решения задач

Пример 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=\frac{a}{t}x$ с начальным условием $x(1)=0$.

Решение. Разделяем переменные $\frac{dx}{x}=a\frac{dt}{t}$ и получаем общее решение $x=Ct^{a}$. Частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию, есть $x_{ч}\equiv 0$. Нетрудно установить, что любое другое частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x(1)=x_0\neq 0$, имеет вид $\tilde{x}_{ч}=x_0t^{a}$. Разность произвольного частного решения и частного решения при данном начальном условии равна $\tilde{x}_{ч}-x_{ч}=x_0t^{a}-0=x_0t^{a}$. Рассмотрим различные случаи постоянной a:

1) Если $a=0$, то $\left|\tilde{x}_{ч}-x_{ч}\right|=\left|x_0t^{a}\right|=\left|x_0\right|<\varepsilon$, а модуль разности начальных условий $\left|x_0-0\right|=\left|x_0\right|<\delta$. Следовательно, при $\delta=\varepsilon$ по определению решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

2) Если $a<0$, то $\left|\tilde{x}_{ч}-x_{ч}\right|=\left|x_0t^{a}\right|=t^{a}\left|x_0\right|\to 0$ при $t\to+\infty$. Следовательно, решение асимптотически устойчиво.

3) Если $a > 0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^a\right| = t^a \left|x_0\right| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, решение неустойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$.

Решение. Положения равновесия данной системы определяются из системы уравнений $\begin{cases} -2x + y + x^3 = 0 \\ -x - 2y + 3x^5 = 0 \end{cases}$. Отсюда находим три положения равновесия $O(0,0)$, $A(1,1)$ и $B(-1,-1)$. Исследуем вопрос устойчивости каждого из них, для чего определяем производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-2x + y + x^3\right) = -2 + 3x^2$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-2x + y + x^3\right) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-x - 2y + 3x^5\right) = -1 + 15x^4,$$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-x - 2y + 3x^5\right) = -2$.

1) Для точки $O(0,0)$ получаем $a = -2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = -2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Корни этого уравнения

$\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Значит, положение равновесия $O(0,0)$ является устойчивым фокусом.

2) Для точки $A(1,1)$ получаем $a=1$, $b=1$, $c=14$, $d=-2$.

Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{d(x-1)}{dt} = (x-1)+(y-1) \\ \dfrac{d(y-1)}{dt} = 14(x-1)-2(y-1) \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{65}}{2} < 0$ и $\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{65}}{2} > 0$. Значит, положение равновесия $A(1,1)$ неустойчиво и является седлом.

3) Для точки $B(-1,-1)$ получаем $a=1$, $b=1$, $c=14$, $d=-2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{d(x+1)}{dt} = (x+1)+(y+1) \\ \dfrac{d(y+1)}{dt} = 14(x+1)-2(y+1) \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{65}}{2} < 0$ и $\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{65}}{2} > 0$. Значит, положение равновесия $B(-1,-1)$ неустойчиво и является седлом.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

В задачах №№ 1, 2 исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ с начальным условием $x(0)=0$.

$$1)\ \frac{dx}{dt}=1+t-x. \qquad 2)\ \frac{dx}{dt}=\sin^2 x.$$

В задачах №№ 3–10 исследовать тип положения равновесия систем и построить фазовые траектории.

$$3)\ \frac{dx}{dt}=-3x+2y,\quad \frac{dy}{dt}=x-4y. \qquad 4)\ \frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=x+2y.$$

$$5)\ \frac{dx}{dt}=2y,\quad \frac{dy}{dt}=2x+3y. \qquad 6)\ \frac{dx}{dt}=\alpha x+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\alpha y.$$

$$7)\ \frac{dx}{dt}=-4x+2y,\quad \frac{dy}{dt}=2x-y. \qquad 8)\ \frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=x+y.$$

$$9)\ \frac{dx}{dt}=x+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-y. \qquad 10)\ \frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=y.$$

В задачах №№ 11, 12 исследовать на устойчивость все положения равновесия систем.

$$11)\ \begin{cases} \frac{dx}{dt}=x(x+y-2) \\ \frac{dy}{dt}=y(1-x) \end{cases}, \qquad 12)\ \begin{cases} \frac{dx}{dt}=\sin y \\ \frac{dy}{dt}=-\sin x \end{cases}.$$

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 25.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При изучении этой темы воспользуйтесь методическими указаниями к выполнению лабораторных работ на языках программирования высокого уровня .

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$? Опишите алгоритм метода?

2. Что такое ломаная Эйлера? Как она соотносится с интегральной кривой?

3. Каков алгоритм метода Адамса приближенного решения дифференциальных уравнений?

4. Как выводится формула Адамса? Как при этом используется формула Тейлора?

5. Какой метод более точный: метод Эйлера или метод Адамса?

6. В чем заключается метод Рунге-Кутта приближенного решения дифференциальных уравнений?

7. Какие Вы еще знаете методы численного решения дифференциальных уравнений?

8. Как ищется приближенное решение систем дифференциальных уравнений первого порядка?

9. Составить программу для приближенного решения уравнений или систем одним из перечисленных методов.

Форма отчета: программа и результаты счета.

ЗАНЯТИЕ № 26

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГЛОВ И ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [1], с. 290-294

.

Контрольные вопросы и задания

1. При каких условиях степенной ряд можно почленноинтегрировать и интеграл от суммы равен сумме интегралов?

2. Как используются степенные ряды для приближенных вычислений определенных интегралов?

3. Когда степенной ряд можно почленнодифференцировать и производная суммы равна сумме производных?

4. Как найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда?

5. Если решение представимо в виде ряда Тейлора, как находится приближенное решение?

6. В чем состоит метод решения дифференциального уравнения с помощью степенных рядов?

Примеры решения задач

Пример 1. С помощью разложения в степенной ряд вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$, полагая в нем $x=t^4$, $m=-\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}=1-\frac{1}{2}t^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}t^8-\ldots$. Этот ряд сходится при $|t|<1$. Интегрируя его, найдем

$$I=\int\limits_0^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{8}t^8-\ldots\right)dt=\left(t-\frac{t^5}{10}+\frac{t^9}{24}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10\cdot 2^5}+\frac{1}{24\cdot 2^9}-\ldots\approx 0,50000-0,00313+0,00008-\ldots$$

.

Полученный результат представляет знакочередующийся сходящийся числовой ряд. Взяв сумму первых двух его членов, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью: $I \approx 0,50000 - 0,00313 = 0,49687 \approx 0,4969$, так как абсолютное значение третьего члена меньше 0,0001. Заметим здесь, что промежуточные вычисления проводятся с одним лишним знаком после запятой.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + \dfrac{y'}{x} + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Решение. Полагая, что искомое решение представляет сходящийся степенной ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k ,$$

найдем ряды для y' и y'' его почленным дифференцированием

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (k+1) a_{k+1} x^k + (k+2) a_{k+2} x^{k+1} + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots + (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \ldots .$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов: $y(0) = a_0 = 1,\ \ y'(0) = a_1 = 0$. Подставляя ряды для y, y' и y'' в исходное уравнение и сделав приведение подобных слагаемых, получим

$$1 + 4a_2 + 9a_3 x + (a_2 + 16a_4) x^2 + (a_3 + 25a_5) x^3 +$$
$$+ \ldots + \left(a_k + \left(k^2 + 4k + 4\right) a_{k+2}\right) x^k + \ldots = 0 .$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты ряда, стоящего в левой части этого равенства, получаем систему уравнений

$$
\begin{array}{c|l}
x^0 & 1+2^2 a_2 = 0 \\
x^1 & 3^2 a_3 = 0 \\
x^2 & a_2 + 4^2 a_4 = 0 \\
x^3 & a_3 + 5^2 a_5 = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^k & a_k + (k+2)^2 a_{k+2} = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

из которой определяем значения остальных коэффициентов:

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2m+1} = \ldots = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2^2}, \quad a_4 = \frac{1}{2^2 4^2},$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2 4^2 6^2}, \quad \ldots, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^2 4^2 6^2 \ldots (2m)^2} = \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2},$$

$$\ldots.$$

Таким образом, искомое частное решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = 1 - \frac{x^2}{4(1!)^2} + \frac{x^4}{4^2 (2!)^2} - \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}.$$

Пример 3. Найти первые шесть членов разложения в ряд решения уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде ряда Тейлора: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$. Подставляя в исходное уравнение $x_0 = 1$ и $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$, находим $y''(1) = 1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. Далее, последовательно дифференцируя уравнение, имеем

$$y''' = \sin y' + xy'' \cos y', \qquad y'''(1) = 1,$$

$$y^{IV} = y'' \cos y' + y'' \cos y' + xy''' \cos y' - xy''y'' \sin y' =$$

$$= 2y'' \cos y' + xy''' \cos y' - x(y'')^2 \sin y', \qquad y^{IV}(1) = -1,$$

$$y^{V} = 2y''' \cos y' - 2(y'')^2 \sin y' + y''' \cos y' + xy^{IV} \cos y' -$$

$$-xy'''y'' \sin y' - (y'')^2 \sin y' - 2xy''y''' \sin y' - x(y'')^3 \cos y' =$$

$$= 3y''' \cos y' - 3(y'')^2 \sin y' - 3xy''y''' \sin y' + xy^{IV} \cos y' -$$

$$-x(y'')^3 \cos y', \qquad y^{V}(1) = -3 - 3 = -6.$$

Так как первое слагаемое ряда $y(1) = 0$, то вычислим еще

$$y^{VI} = 3y^{IV} \cos y' - 3y'''y'' \sin y' - 6y''y''' \sin y' - 3(y'')^3 \cos y' -$$

$$-3y''y''' \sin y' - 3x(y''')^2 \sin y' - 3xy''y^{IV} \sin y' - 3x(y'')^2 y''' \cos y' +$$

$$+y^{IV} \cos y' + xy^{V} \cos y' - xy^{IV} y'' \sin y' - (y'')^3 \cos y' -$$

$$-3x(y'')^2 y''' \cos y' + x(y'')^4 \sin y',$$

$$y^{VI}(1) = -3 - 6 - 3 - 3 + 3 + 1 + 1 = -10.$$

Таким образом, первые шесть членов разложения в ряд частного решения уравнения имеют вид

$$y(x) = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{24}(x-1)^4 -$$

$$-\frac{1}{20}(x-1)^5 - \frac{1}{72}(x-1)^6 + \ldots .$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

№№ 2930, 2931, 2935, 2936 [3]; 12.325, 12.326, 12.327, 12.329, 12.332 [6].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 27

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ (0, *l*)

Литература: [1], 331-333; [7], 257-259.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой ряд называется тригонометрическим?
2. Сформулируйте достаточный признак разложимости функций в ряд Фурье.
3. Как разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π?
4. Выведите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье, если функция имеет период $2l$.
5. Как разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(0,\ l)$?
6. Что означает: "продолжить функцию четным образом", "нечетным образом"?
7. Как будет выглядеть график функции, продолженной четным или нечетным образом?
8. Как при таких продолжениях определяются коэффициенты разложения в ряд Фурье?

Примеры решения задач

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(0,\ 2)$: $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x, & 1<x<2\end{cases}$.

Решение. Продолжаем периодически данную функцию на всю числовую ось (рис. 6).

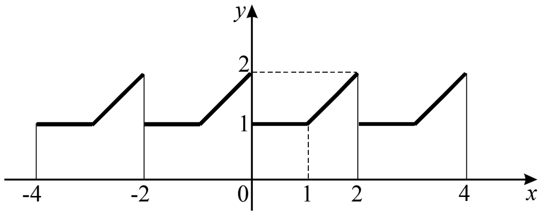

Рис. 6

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам , учитывая, что $T = l = 2$:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 xdx = x\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{5}{2},$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos k\pi x\,dx = \int_0^1 \cos k\pi x\,dx + \int_1^2 x\cos k\pi x\,dx =$$

$$= \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \left(x\frac{\sin k\pi x}{k\pi} + \frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \int_0^2 f(x)\sin k\pi x\,dx = \int_0^1 \sin k\pi x\,dx + \int_1^2 x\sin k\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + \left(-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{k\pi}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд , окончательно получим

$$f(x) = \frac{5}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\cos k\pi x - \sin k\pi x\right).$$

Пример 2. Функцию из примера 1 разложить в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-2,0]$ четным образом, а получившуюся функцию, в свою очередь, продолжим периодически (период $T=2l=4$) на всю числовую ось (рис.7).

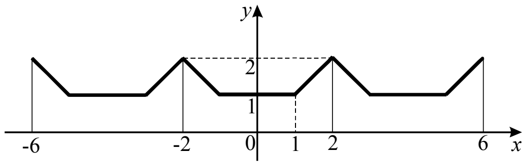

Рис. 7

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 dx+\int_1^2 xdx=\frac{5}{2},$$

$$a_k=\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^1\cos\frac{k\pi x}{2}dx+\int_1^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^1+\left(\frac{2x}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}+\frac{4}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\bigg|_1^2=$$

$$=\frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-\cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд , окончательно получим

$$f(x)=\frac{5}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k-\cos\frac{k\pi}{2}\right)\cos\frac{k\pi x}{2}.$$

Пример 3. Функцию из примера 1 разложить в ряд Фурье по синусам.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-2,0]$ нечетным образом, а получившуюся функцию, в свою очередь, продолжим периодически (период $T=2l=4$) на всю числовую ось (рис. 8).

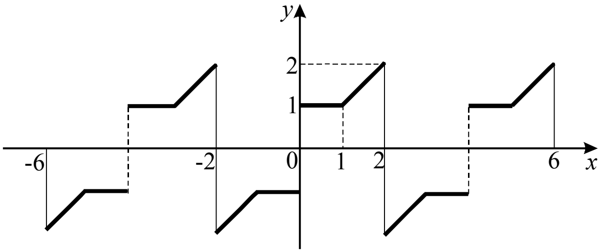

Рис. 8

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$b_k=\int_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^1 \sin\frac{k\pi x}{2}dx+\int_1^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^1+\left(-\frac{2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}+\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2}{k\pi}-\frac{4}{k\pi}(-1)^k-\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (10.5), окончательно получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-2(-1)^k-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

№№ 12.495, 12.497, 12.500 [6].

Форма отчетности: устный опрос, контрольна

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1.,2. - М.:Наука, 1985.
2. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991.
3. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. - М.: Наука, 1985.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.,2. - М.: Высш. шк., 1980.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. - М.:Наука, 1986.
7. КатраховаА.А., Купцов В.С.,Курс лекций по дисциплине «Математика».Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 2015. 302 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлениям 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (профили: «Электромеханика», «Электропривод и автоматика», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика робототехнических систем»), 27.03.04 «Управление в технических системах» (профиль: «Управление и информатика в технических системах»), очной формы обучения

Часть 2

Составители: КатраховаАлла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Васильев Евгений Михайлович

В авторской редакции

Подписано к изданию 26.09. 2016.
Уч.-изд. л. 3,2.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный техническийуниверситет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14