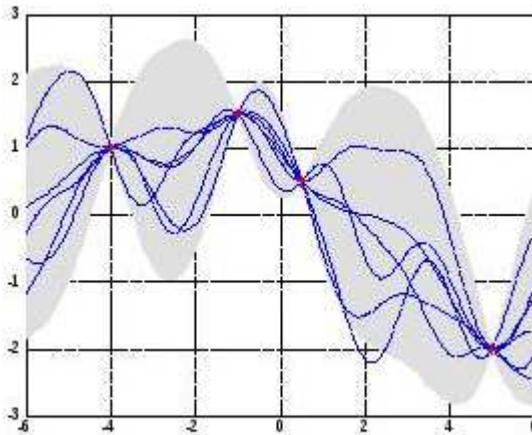


А.Б. Токарев

**ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ
В РАДИОТЕХНИКЕ**

Учебное пособие



Воронеж 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

А. Б. Токарев

**ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНО-
СТЕЙ И СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ
В РАДИОТЕХНИКЕ**

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2019

УДК 621.391

Токарев А.Б. Практикум по теории вероятностей и случайным процессам в радиотехнике. Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2019. 198 с.

Учебное пособие предназначено для освоения студентами радиотехнических специальностей заочной формы обучения курса «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике». Пособие содержит рабочую программу дисциплины, теоретические сведения, примеры решения задач и набор контрольных заданий для проведения проверочной работы по данному курсу.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 11.03.01 «Радиотехника», направленность «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов». Пособие предназначено для студентов 3 курса заочной формы обучения.

Табл. 6. Ил. 52. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: кафедра радиотехнических систем Воронежского института МВД РФ;
канд. физ.-мат. наук А. А. Жуков

© Токарев А. Б., 2019

© Оформление. Воронежский государственный технический университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	6
1.1. Цели и задачи изучения дисциплины	6
1.2. НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ, ИХ СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ.....	6
2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ	13
2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ	13
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	17
2.2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ.....	27
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	30
2.3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА О ГИПОТЕЗАХ	42
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	43
2.4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	52
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	55
2.5. Числовые характеристики случайных величин .	66
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	70
2.6. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	78
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	82
2.7. СВОЙСТВА СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	93
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	98
2.8. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	106
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	109
2.9 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	115
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	120

2.10 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ	129
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	131
2.11 ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ	141
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	141
2.12 ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ ПОМЕХ	146
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	147
3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	155
3.1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ	155
3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	158
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	196
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	197
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	197
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	198

ВВЕДЕНИЕ

При самостоятельном изучении учебной дисциплины, характерном для заочного обучения, эффективность усвоения нового материала определяется следующими факторами:

1) продуманной системой обозначений и удачной структурированностью материала;

2) возможностью четко выделить ключевые моменты, освоение которых безусловно необходимо для понимания дальнейших частей курса, а также наличием четкого плана изучения;

3) наличием различных по уровню сложности примеров практического применения изучаемой теории.

Настоящее пособие представляет собой путеводитель по наиболее важным разделам курса “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”. Теоретическая информация подается в нем в справочном ключе и представляет собой фактически тот минимум, который безусловно необходим для решения типовых вероятностных радиотехнических задач. Для более подробного изучения теории помимо настоящего пособия следует использовать и другие учебные источники, ссылки на которые вместе с перечнем изучаемых вопросов, приведены в первой части пособия.

Пособие состоит из трех частей. Первая часть содержит перечень вопросов, входящих в рабочую программу курса, и соответствующие им рекомендации по работе с учебной литературой. Во второй части приводятся краткие теоретические сведения по ключевым вопросам курса и примеры практического применения изучаемого материала. Третья часть пособия содержит набор контрольных заданий, используемых для проверки полноты освоения курса студентами, а также указания по выбору индивидуальных вариантов заданий.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Изучение дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике» опирается на понятия и методы, которые вводятся и развиваются в дисциплинах «Высшая математика», «Основы теории цепей» и (частично) «Радиотехнические цепи и сигналы». Преподавание дисциплины нацелено на формирование у студентов базового объема знаний, позволяющего подходить к решению инженерных радиотехнических задач со статистических позиций.

В рамках изучения дисциплины необходимо:

- ознакомиться со спецификой математического аппарата, применяемого при вероятностном описании явлений и процессов;
- развить умение подбирать соответствующие исследуемым радиотехническим цепям и сигналам статистические модели и оперировать с этими моделями;
- получить представления об базовых методах статистического анализа и синтеза радиотехнических устройств и систем, а также оптимального приема сигналов на фоне помех.

1.2. Наименование тем, их содержание и объем

1.2.1. Введение [1, с.15-20; 4, с.9-10; 6, с.6-7]

Предмет теории вероятностей. Опыт, событие. Понятие вероятности случайного события. Классификация случайных событий.

1.2.2. Алгебраический и геометрический методы расчета вероятностей [1, с.21-28, 48-50; 3, с.03-04; 4, с.11; 5, с.03-04]

Алгебраический (классический) метод расчета вероятности свершения случайного события в опыте с конечным числом

исходов. Основные формулы комбинаторики для расчета числа исходов опыта в классической формуле вероятности. Геометрический метод расчета вероятности случайного события.

1.2.3. Расчет вероятности сложных событий [1, с.37-47, 51-56; 3, с.03-04; 4, с.12-14; 5, с.03-04; 6, с.8-10]

Понятие сложного события. Произведение (пересечение) и сумма (объединение) случайных событий. Условная вероятность наступления случайного события. Расчет вероятности свершения произведения независимых и зависимых случайных событий. Расчет вероятности суммы несовместных и совместных событий.

1.2.4. Формула полной вероятности и теорема о гипотезах [1, с.69-81; 3, с.03-04; 4, с.16-17; 5, с.03-04; 6, с.11-13]

Понятие гипотезы. Формула полной вероятности. Априорные и апостериорные вероятности гипотез. Теорема о гипотезах.

1.2.5. Случайные величины и их вероятностное описание [1, с.82-104; 3, с.03-04; 4, с.19-21; 5, с.03-04; 6, с.30-32]

Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Понятие закона распределения вероятностей случайной величины.

Ряд распределения вероятностей дискретной случайной величины. Свойство нормировки ряда распределения. Функция распределения вероятностей случайной величины и ее свойства. Функции распределения вероятностей дискретной и непрерывной случайной величины. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины и ее свойства.

Примеры законов распределения дискретных случайных величин (равномерный, геометрический, биномиальный). Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа. Условия применимости приближений Муавра-Лапласа. Формула Пуассона и условия ее применимости. Примеры законов распределения непрерывных случайных величин (равномерный, показательный, нормальный).

1.2.6. Числовые характеристики случайных величин [1, с.107-123; 3, с.03-04; 4, с.44-49; 5, с.03-04; 6, с.32-37]

Начальные и центральные моменты распределения дискретной/непрерывной случайной величины. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия случайной величины и ее свойства.

1.2.7. Законы распределения вероятностей функций случайных величин [1, с.258-272, 336-346; 5, с.03-04; 6, с.47-48]

Функциональное преобразование при однозначной обратной функции преобразователя, при многозначной обратной функции преобразователя и при наличии горизонтальных участков в преобразующей функции. Расчет числовых характеристик функции случайной величины.

1.2.8. Вероятностное описание систем случайных величин [1, с.177-194, 213-219; 4, с.34-35; 6, с.51-53, 55-57]

Понятие системы из нескольких случайных величин (многомерной случайной величины). Матрица распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины. Функция и плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства. Зависимые и независимые случайные величины.

Числовые характеристики системы двух случайных величин: начальные и центральные моменты, ковариация, коэффициент корреляции.

1.2.9. Функциональное преобразование систем случайных величин [1, с.353-360; 5, с.03-04; 6, с.58-61]

Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины как функции двух случайных величин. Закон распределения вероятностей модуля и аргумента вектора, заданного в декартовой системе координат двумя независимыми нормально распределенными случайными величинами. Законы распределения вероятностей случайной величины, являющейся суммой, разностью, произведением и частным двух

случайных величин. Расчет числовых характеристик двумерной случайной величины как функции двух случайных величин.

1.2.10. Комплексные случайные величины [1, с.318-325; 3, с.03-04; 4, с.32-33; 5, с.03-04]

Комплексные случайные величины и их числовые характеристики. Характеристическая функция случайной величины и ее свойства.

1.2.11. Законы больших чисел [1, с.399-418; 3, с.03-04; 4, с.50-52, 64-65; 6, с.40-42]

Неравенство Чебышева. Правило «трех сигм». Первая и вторая теоремы Чебышева. Теорема Маркова. Центральная предельная теорема Ляпунова.

1.2.12. Основные понятия математической статистики [1, с.430-439, 451-459; 4, с.427-439; 6, с.67-71, 74-76]

Предмет и задачи математической статистики. Статистическая совокупность (выборка). Статистическая функция распределения вероятностей выборки; ее построение. Гистограмма плотности распределения вероятностей случайной величины.

Точечная оценка числовых характеристик случайных величин и требования к ней. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины. Точность и надежность оценок числовых характеристик случайных величин.

1.2.13. Случайные процессы и их вероятностное описание [1, с.03-04; 3, с.03-04; 4, с.94-98, 104-105; 6, с.78-86]

Понятие случайного процесса. Реализация случайного процесса. Одномерная, двумерная и многомерная функции и плотности распределения вероятностей случайных процессов и их свойства. Характеристики случайных процессов (среднее значение, дисперсия, мощность, корреляционная и ковариационная функции, коэффициент корреляции).

1.2.14. Классификация случайных процессов [3, с.03-04; 4, с.106-110, 116-118; 5, с.03-04]

Строго стационарные случайные процессы и процессы, стационарные в широком смысле. Условия стационарности случайного процесса. Эргодические случайные процессы. Физический смысл математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции эргодических случайных процессов. Экспериментальная оценка вероятностных и числовых характеристик эргодических случайных процессов.

1.2.15. Спектральное описание случайных процессов [3, с.03-04; 4, с.139-149; 6, с.91-96]

Спектральная плотность мощности реализации случайного процесса и ее свойства. Связь между спектральной плотностью мощности и корреляционной функцией эргодического случайного процесса. Теорема Винера-Хинчина и ее следствия.

Белый шум. Спектральная плотность мощности и корреляционная функция белого шума. Примеры радиотехнических случайных процессов, описываемых моделью белого шума. Ограниченный по полосе белый шум и его характеристики. Понятие эффективной ширины спектра и интервала корреляции случайного процесса.

1.2.16. Узкополосные эргодические случайные процессы [3, с.03-04; 6, с.96-97]

Огибающая и фаза узкополосного случайного процесса. Корреляционная функция узкополосного случайного процесса с равномерной спектральной плотностью мощности. Вероятностные и числовые характеристики огибающей и фазы узкополосного нормального случайного процесса. Вероятностные и числовые характеристики смеси детерминированного гармонического колебания и нормального узкополосного случайного процесса.

1.2.17. Воздействие стационарных случайных процессов на линейные цепи [3, с.03-04; 5, с.03-04]

Частотный метод определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного процесса

на выходе линейной цепи. Временной метод определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного процесса на выходе линейной цепи. Понятие шумовой полосы пропускания линейной цепи; ее связь с полосой пропускания по уровню 0.707 от максимума коэффициента передачи цепи. Шумовая полоса пропускания линейного резонансного усилителя. Проблема определения закона распределения вероятностей случайного процесса на выходе линейной цепи. Нормализация случайных процессов на выходе узкополосной линейной цепи.

1.2.18. Преобразование стационарных случайных процессов в нелинейных безынерционных цепях [3, с.03-04; 6, с.188-193]

Плотность распределения вероятностей случайного процесса на выходе нелинейной безынерционной цепи. Числовые характеристики случайных процессов на выходе нелинейной безынерционной цепи. Воздействие узкополосного нормального случайного процесса на линейный амплитудный детектор. Воздействие смеси детерминированного гармонического сигнала и узкополосного нормального случайного процесса на линейный амплитудный детектор.

1.2.19 Оптимальная фильтрация случайных сигналов [3, с.03-04; 4, с.600-605; 7, с.432-434]

Минимально достижимая среднеквадратическая ошибка фильтрации сигнала. Коэффициент передачи оптимального фильтра.

1.2.20. Обнаружение сигналов известной формы (оптимальная линейная фильтрация сигналов известной формы) [3, с.03-04; 7, с.419-431]

Оптимальная линейная фильтрация полностью известного сигнала в условиях действия белого шума. Предельно достижимое отношение сигнал/шум на выходе линейной цепи при оптимальном обнаружении сигнала известной формы. Согла-

сованный фильтр. Импульсная характеристика и комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра. Характеристики и практическая реализация фильтров, согласованных с прямоугольными видео- и радиоимпульсами.

Оптимальная линейная фильтрация известного сигнала на фоне небелого шума. Комплексный коэффициент передачи оптимального фильтра. Предельно достижимое отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра.

Квазиоптимальные фильтры. Преимущества и недостатки по сравнению с согласованными фильтрами.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ

2.1. Алгебраический и геометрический методы расчета вероятности случайных событий

Если при проведении n опытов со случайным исходом в n_A из них наблюдалось событие A , то говорят, что событие A наблюдалось с **частотой**

$$P^* \{A\} = \frac{n_A}{n}. \quad (1)$$

Эта частота $P^* \{A\}$, как и число n_A зарегистрированных событий A , вследствие фактора случайности может существенно изменяться даже при тщательном воспроизведении проведенной серии опытов. Однако при увеличении числа опытов n частота проявляет так называемую статистическую устойчивость и стремится к конкретному предельному значению.

Константа, к которой стремится частота $P^* \{A\}$ наблюдения события A , характеризует объективную меру возможности наступления A и называется **вероятностью** свершения этого события $P\{A\}$

$$P^* \{A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\{A\}. \quad (2)$$

Если все исходы, которыми может завершиться проводимый опыт, равновероятны, а их число конечно и равно m , то для определения вероятности произвольного события, являющегося результатом данного опыта, необходимо лишь подсчитать число m_A исходов, сопровождающихся появлением события A . Вероятность свершения случайного события A в такой ситуации определяется соотношением

$$P\{A\} = \frac{m_A}{m}. \quad (3)$$

Формула (3) и составляет суть алгебраического метода расчета вероятности.

Примечание: Использовать для обозначения вероятности A более короткую запись P_A не рекомендуется, т.к. она требует заранее строго определить суть события A и неудобна при работе с условными вероятностями.

Непосредственно определить общее число исходов m и число благоприятных исходов m_A удается не всегда. В подобных сложных случаях полезными являются комбинаторные подходы, позволяющие рассчитать количество допустимых комбинаций (различимых расстановок) применительно к многим различным вариантам выбора и комбинирования разнотипных элементов. Наиболее часто используемые типы расстановок представлены в табл. 1.

Примеры расстановок (комбинаций):

1. Если набор пронумерованных шариков ①, ②, ③ перепорядочивать различными способами, то можно получить комбинации

①, ②, ③; ①, ③, ②; ②, ①, ③; ②, ③, ①; ③, ①, ②; ③, ②, ①.

С позиций комбинаторики речь идет о наборе из трех разнотипных элементов, из которого для формирования комбинации каждый раз берут все n элементов, причем отличаются друг от друга комбинации порядком расположения элементов.

Таким образом, речь идет о различных перестановках набора из $n = 3$ элементов. Соответствующее число комбинаций равно

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

2. Если из того же набора шариков ①, ②, ③ для формирования комбинации выбирать лишь какие-то 2, то можно получить

①, ②; ②, ①; ①, ③; ③, ①; ②, ③; ③, ②.

Таблица 1

Число различных комбинаций, которые можно составить из n элементов различными способами

Типы комбинаций	Характеристики набора элементов	Число элементов, входящих в расстановку	Учет взаимного расположения элементов	Формула для расчета числа различных комбинаций (разных расстановок)
Перестановки	n разнотипных элементов (все n элементов – различные)	n	да	$P_n = n!$
Размещения		k	да	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Сочетания		k	нет	$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Перестановки с повторениями	n_1 эл-тов первого типа; n_2 эл-тов второго типа; ... n_m эл-тов m -го типа; $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$	n	да	$P_{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}$

Теперь из набора, включающего $n = 3$ разнотипных элемента для формирования комбинации каждый раз берут лишь $k = 2$ элемента и, по-прежнему, учитывается порядок расположения элементов. В результате речь идет о “размещениях по 2 элемента из 3 имеющихся”, а соответствующее число комбинаций равно

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

3. Наконец, если в предыдущем примере комбинации, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считать неразличимыми, то остается лишь три варианта выбора

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}; \quad \textcircled{1} + \textcircled{3} \quad \text{и} \quad \textcircled{2} + \textcircled{3}.$$

Указанные расстановки, не учитывающие взаимного расположения элементов, называются сочетаниями. Их число равно

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \times 1} = 3.$$

Пусть теперь число равновозможных исходов проводимого опыта m бесконечно велико. Вероятность события A при этом, по-прежнему, определяется долей благоприятствующих событию A вариантов в общем количестве возможных исходов, однако рассчитать эту долю на основе соотношения (3) уже невозможно. При использовании геометрического метода расчета вероятности каждому из равновозможных исходов опыта ставится в соответствие некоторая точка геометрического пространства, так что все возможные исходы занимают некоторую область пространства, а благоприятствующие событию A варианты – некоторую часть этой области. Установленное соответствие позволяет определить вероятность случайного события A как соотношение геометрических размеров указанных областей. Например, при использовании двумерного пространства для представления точек – исходов опыта, вероятность будет определяться соотношением площадей соответствующих фигур

$$P\{A\} = \frac{S_A}{S_{\text{общ}}}, \quad (4)$$

при работе в трехмерном пространстве придется оценивать соотношение объемов и т.д. Конкретные примеры, поясняющие практическое применение этого метода, будут приведены ниже.

Примеры решения задач

Задача 1. Слово «СТАТИСТИКА» разрезали на карточки, каждая из которых содержит по одной букве, и из этих карточек выбрали наугад 5 штук. Какова вероятность, что выбранные карточки содержат лишь несовпадающие буквы?

Решение

а) В соответствии с условиями задачи любой набор из пяти карточек может быть выбран с одинаковой вероятностью, а общее число способов выбора является конечным, поэтому данную задачу можно решать на основе алгебраического метода.

б) Так как порядок, в котором расположатся выбранные карточки, роли не играет, то в дальнейшем их взаимное расположение будем игнорировать. Это позволит при расчете числа исходов рассматривать различные комбинации карточек как сочетания (см. табл. 1).

в) Общее количество вариантов, которыми могут быть выбраны $k = 5$ карточек из $n = 10$ имеющихся составляет

$$m = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252.$$

Для подсчета же числа благоприятных вариантов учтем, что слово «СТАТИСТИКА» состоит из пяти букв, среди которых «С» встречается 2 раза, «Т» – 3 раза, «А» – 2 раза, «И» – 2 раза и «К» – однократно. Чтобы все выбранные карты содержали разные буквы, каждая из букв должна оказаться выбранной ровно один раз, причем неважно которая именно из карточек с буквой «С» окажется выбранной с какой-то из букв «Т».

Итак, «какая-то из букв “С” вместе с какой-то из букв “Т”, какой-то из букв “И” и т.д.» может быть выбрана

$$m_A = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ способами.}$$

В результате, согласно (3), вероятность получения набора лишь из различающихся карточек составляет

$$P = \frac{m_A}{m} = \frac{24}{252} = \frac{2}{21}.$$

Задача 2. 7 пронумерованных по порядку деталей одинакового размера и формы находятся в одной емкости. 7 раз детали поочередно (наугад) вынимают, записывая номер детали в протокол. Какова вероятность того, что протокол будет содержать строго убывающую последовательность номеров деталей, если

1) внесенные в протокол детали сразу используются в производстве;

2) после внесения в протокол детали возвращаются обратно в емкость (т.е. могут быть вынуты повторно еще несколько раз).

Решение

а) Как и в предыдущей задаче, однотипность деталей означает равновозможность выбора любой из деталей, находящихся в емкости, на каждом этапе опыта, а их конечное число – ограничение общего числа возможных исходов, поэтому для решения задачи вновь воспользуемся алгебраическим методом.

б) Для возникновения заданного условием события необходимо, чтобы каждая деталь была зарегистрирована только один раз (это становится важным при рассмотрении случая №2) и доставать детали нужно в строго определенном порядке, т.е. существует лишь единственный “благоприятный” протокол $m_A = 1$.

в) Так как в случае № 1 детали не возвращаются в емкость, то соответствующие этому случаю протоколы автоматически содержат каждую из деталей ровно один раз и отличаются друг от друга лишь порядком следования номеров деталей. Таким образом, общее количество протоколов определяется числом различных перестановок $n = 7$ деталей (см. табл. 1)

$$m = P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040,$$

а вероятность получить один конкретный протокол составляет

$$P_1 = 1 / 5040 \approx 1,98 \cdot 10^{-4}.$$

г) Если же детали возвращаются в емкость, то каждый раз, выбирая деталь, можно получить любой из семи номеров деталей, а значит общее число равновозможных протоколов увеличивается до

$$m = 7^7 = 823543.$$

Таким образом, в случае №2 вероятность получить строго убывающую последовательность номеров деталей уменьшается до

$$P_2 = 1 / 823543 \approx 1,21 \cdot 10^{-6}.$$

Задача 3. В 6-значном телефонном номере пропущены 2 цифры. Определить вероятность угадывания правильного номера с первой попытки, если

1) известно, что пропущенные цифры являются последними и отличаются друг от друга (хотя, возможно, совпадают с какими-то из начальных цифр номера);

2) известно, что пропущенные цифры не совпадают друг с другом и могут размещаться в любой части номера (в том числе начинать его), но значение и взаимное расположение других 4 цифр номера известно точно.

Решение

а) Правильный номер – единственный и угадать его надо за одну попытку, поэтому во всех перечисленных в условии случаях число благоприятных вариантов завершения опыта m_A

= 1. Отличаются эти случаи лишь общим количеством возможных исходов m .

б) В первом случае подлежащие перебору телефонные номера можно выразить шаблоном, например, “1609♦♦”, где знак “♦” соответствует неизвестной цифре. Номера, отличающиеся порядком следования последних цифр, являются различными, поэтому, подставляя на вакантные две позиции номера какие-то две из имеющихся десяти цифр, следует учитывать их взаимное расположение. В результате, число комбинаций (а значит и телефонных номеров, которые при этом образуются) определяется числом размещений из $n = 10$ по $k = 2$ (см. табл. 1)

$$m = A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 = 90.$$

В результате вероятность угадывания номера составляет

$$P_1 = \frac{1}{90}.$$

Примечание: Данный вариант задачи можно было бы решить и не используя комбинаторику, т.к. общее число двухзначных комбинаций, начиная с “00” и заканчивая “99” равно 100, а если из их числа исключить сочетания совпадающих цифр “00”, “11”... “99”, то останется как раз 90 чисел.

в) Во втором случае к уже рассмотренному выше добавляется еще целый ряд допустимых шаблонов, отличающихся расположением в номере забытых цифр, например “1♦609♦”, “16♦♦09”, “♦1♦609” и т.п. Чтобы выяснить, сколько всего существует различных шаблонов, следует учесть, что $k = 2$ позиции внутри номера, состоящего из $n = 6$ позиций, можно выбрать $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами.

В результате, общее число допустимых вариантов становится равным

$$m = C_6^2 \cdot A_{10}^2 = 15 \cdot 90 = 1350,$$

а вероятность угадывания одного конкретного из них

$$P_2 = 1 / 1350 \approx 7,4 \cdot 10^{-4}.$$

Примечание 1: При подсчете числа шаблонов было использовано число сочетаний, т.к. если воспользоваться числом размещений, то учет взаимного расположения позиций, содержащих пропущенные цифры, будет дублировать контроль взаимного расположения цифр, подставляемых в шаблон, что приведет к ошибке - удвоению расчетного числа вариантов.

Примечание 2: В приведенных выше рассуждениях есть маленькая неточность, т.к., например, при подстановке сочетания цифр “6, 9” в шаблоны “1♦60♦9” и “16♦09♦” получается один и тот же телефонный номер. Назовем условно шаблон, где позиции забытых цифр располагаются левее – первичным, а тот, где позиции смещены вправо – вторичным. Первичный шаблон не может содержать забытых цифр в последней позиции, поэтому общее число первичных шаблонов (а значит и дубликатов) равно

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \times 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ и подобная поправка}$$

практически не сказывается на найденной выше вероятности.

Задача 4. В некоторой емкости находится 10 конденсаторов разных номиналов, из которых 3 – бракованные. Из емкости наугад взято 6 конденсаторов. Какова вероятность того, что 2 из них – бракованные?

Решение

а) Различные варианты выбора конденсаторов из емкости отличаются друг от друга составом (т.е. наличием хотя бы одного конденсатора иного номинала, чем в предыдущих комбинациях), однако их взаимное расположение значения не имеет. В связи с этим общее количество вариантов, которыми можно выбрать $n = 6$ конденсаторов из $N = 10$ имеющихся, равно $m = C_N^n$.

б) В благоприятный для анализируемого события набор элементов должно войти ровно $k = 2$ бракованных конденсатора, а значит остальные $j = 4$ входящие туда же элементы должны быть из числа годных. Так как любая комбинация бракованных деталей может сочетаться с любым сочетанием годных элементов, то для оценки общего числа благоприятных вариантов необходимо перемножить число вариантов выбора $k = 2$ элементов из $K = 3$ бракованных и $j = 2$ элементов из $J = 10 - 3 = 7$ годных $m_A = C_K^k \cdot C_J^j$.

в) Итак, искомая вероятность

$$\begin{aligned}
 P\{\text{среди взятых конденсаторов ровно 2 бракованных}\} &= \\
 &= C_3^2 \cdot C_7^4 / C_{10}^6 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \times 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\
 &= 3 \cdot (7 \cdot 5) \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 3 \cdot (7 \cdot 5) \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Синхронизация двух передатчиков радиосигналов осуществляется в два этапа. Этап грубой синхронизации заключается в перестройке начальной фазы ведомого передатчика в диапазоне плюс-минус 15° от фазы ведущего, а этап тонкой синхронизации завершает обеспечение синфазности колебаний. Какова вероятность того, что при очередном выходе передатчиков в эфир грубая подстройка фазы не требуется.

Решение

а) Из физического смысла задачи ясно, что до синхронизации разность фаз между несущими передатчиков равномерно может принимать любые значения от минус 180° до плюс 180° . Этих значений бесконечно много, поэтому алгебраический метод, ориентированный на конечное число равновозможных исходов, здесь применить нельзя, а вот геометрический подход – вполне уместен.

б) Единственной независимой переменной, случайно принимающей значения из диапазона $-180^\circ \leq \varphi \leq +180^\circ$, является в данной задаче разность фаз. В связи с этим точки, соответствующие различным исходам опыта, можно разместить в одномерном пространстве, т.е. на прямой (см. рис. 1).

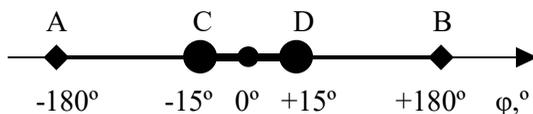


Рис. 1

Всем возможным исходам опыта соответствует совокупность точек, заполняющая отрезок AB, а благоприятной областью (при попадании в которую не требуется грубой синхронизации) является отрезок CD. Геометрические размеры отрезков определяются их длинами, поэтому для определения доли благоприятных исходов в составе всех исходов опыта достаточно сопоставить длины указанных отрезков

$$P\{\text{грубой синхронизации не требуется}\} = \frac{P_{CD}}{P_{AB}} = \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}.$$

Задача 6. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки M и L . Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M , чем к точке A .



Рис. 2

Решение

а) На любом отрезке содержится бесконечное множество точек, а все варианты расстановки M и L согласно условию равновозможны, поэтому решать данную задачу следует на основе геометрического метода расчета.

б) Обратите внимание, что хотя исходная задача геометрически привязана к отрезку (т.е. одномерному пространству), для оценки искомой вероятности нужно контролировать положение на отрезке АВ двух независимых друг по отношению к другу величин: координат точек М и L. Случайное положение этих точек на отрезке приводит к тому, что длины отрезков AL, BL, AM и BM могут равновозможно принимать любые значения от 0 до l. *Опираясь же в решении на длину отрезка ML нельзя, т.к. хотя она тоже может изменяться от 0 до l, но наибольшее значение наблюдается гораздо реже, чем значения малые (Длина ML равна l лишь если позиции обеих точек М и L совпадают с границами отрезка АВ).*

Итак, будем в дальнейшем опираться в решении на длины отрезков AL и AM, независимо друг от друга принимающих любые значения от 0 до l. Тогда отдельному элементарному исходу опыта будет соответствовать некоторая точка двумерного пространства, а всем возможным вариантам размещения точек М и L будут соответствовать точки, принадлежащие квадрату со стороной l, показанному на рис. 3.

в) Отметим, что если точка L лежит правее М, то требования условия выполняются автоматически. Если же, напротив, L находится левее М, то для выполнения поставленных требований необходимо, чтобы точка L лежала правее середины отрезка AM, т.е. выполнялось неравенство

$$AL \geq AM / 2.$$

Отобразив на рис. 3 линию $AL = AM/2$, нетрудно видеть, что требованиям условия удовлетворяют все точки, лежащие выше этой линии, что позволяет выделить штриховкой

ту часть общей (квадратной) области, которая соответствует благоприятным исходам опыта.

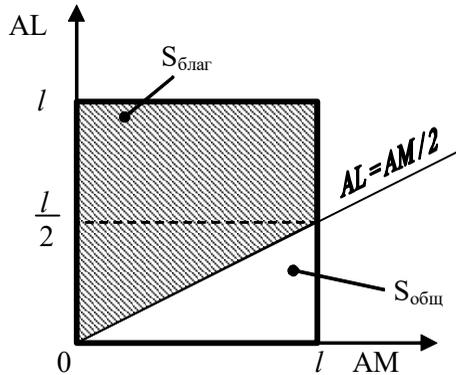


Рис. 3

г) Сопоставляя геометрические размеры благоприятной части с общими размерами области исходов, получаем

$$P\{L \text{ ближе к } M, \text{ чем к } A\} = \frac{S_{\text{благ}}}{S_{\text{общ}}} = \frac{l \cdot l - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2}}{l \cdot l} = \frac{3}{4}.$$

Задача 7. Два человека условились встретиться в определенном месте между 7 и 8 часами утра. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если моменты их прихода в точку встречи случайны, независимы и равновероятны в течение указанного часа?

Решение

а) Если описанный в условии опыт повторять многократно, то наблюдаемые ситуации будут отличаться друг от друга совокупностью моментов прихода в точку встречи первого и второго человека. Обозначим эти моменты прихода через x и y . Поскольку моменты x и y могут быть (в пределах отведенного часа) произвольными, то и равновозможных элементарных исходов опыта, определяемых конкретной парой чисел x и y , оказывается бесконечно много, поэтому для решения поставленной задачи придется воспользоваться геометрическим методом расчета вероятностей.

б) Отличие данной задачи от предыдущей заключается в том, что теперь существуют две независимые друг по отношению к другу величины x и y . Для отражения факта независимости каждую из величин придется откладывать на своей оси, а совокупность точек, отображающих элементарный исход конкретного опыта, будет заполнять квадратную область плоскости, показанную на рис. 4.

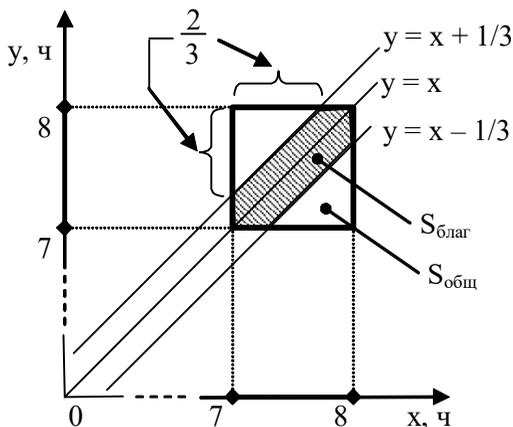


Рис. 4

в) Для того чтобы встреча состоялась, разница между моментами прихода x и y не должна превышать $1/3$ часа (20 минут), поэтому к благоприятным можно отнести все исходы, удовлетворяющие неравенству $|x - y| \leq 1/3$, которое можно переписать также в форме $-1/3 \leq x - y \leq 1/3$ или в виде совокупности неравенств

$$\begin{cases} y \leq x + 1/3, \\ y \geq x - 1/3. \end{cases} \quad (5)$$

Геометрическое место точек, соответствующих соотношению (5), показано на рис. 4 в виде заштрихованной области.

г) Геометрические размеры областей двумерного пространства определяются их площадями, поэтому для расчета

искомой вероятности осталось сопоставить площадь заштрихованной фигуры (квадрат за вычетом двух угловых треугольников) с площадью всего квадрата. В результате получаем

$$P\{\text{встреча состоится}\} = \frac{S_{\text{благ}}}{S_{\text{общ}}} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)}{1 \cdot 1} = \frac{5}{9}.$$

2.2. Расчет вероятности сложных событий

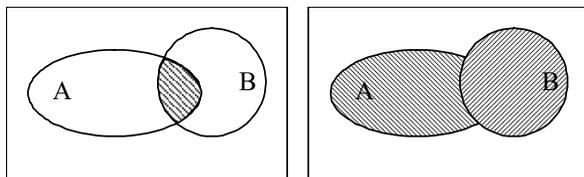
Пересечением $\prod_{j=1}^N A_j$ (логическим произведением) N

событий A_j называют событие, заключающееся в одновременном наблюдении всех событий A_j . В частности, пересечением событий A и B называют событие $A \cdot B$ (или “ $A \cap B$ ”), наблюдаемое, когда и A , и B наступают в одном и том же опыте (рис. 5а). Признаком пересечения в текстовых формулировках событий служит союз “**и**”.

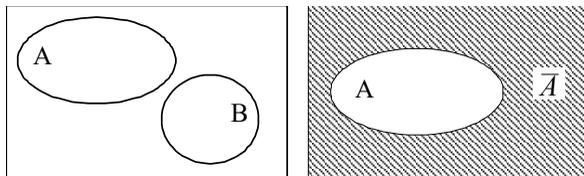
Объединением $\sum_{j=1}^N A_j$ (логической суммой) N событий

A_j ($1 \leq j \leq n$) называют событие, которое наблюдается каждый раз, когда наступает хотя бы одно из событий A_j . В частности, объединением событий A и B называют событие $A+B$ (или “ $A \cup B$ ”), которое наблюдается, когда наступает или A , или B или оба этих события одновременно (рис. 5б). Признаком пересечения в текстовых формулировках событий служит союз “**или**”.

События, наступление которых в одном опыте невозможно, называются **несовместными** (рис. 5в), а событие \bar{A} , возникающее в опыте всегда, когда не происходит событие A , называется ему **противоположным** (рис. 5г).



а) Пересечение событий $A \cdot B$; б) Объединение событий $A+B$;



в) Несовместные события; г) Противоположные события

Рис. 5

Вероятность пересечения событий A и B равна

$$P\{A \cdot B\} = P\{A\} \cdot P\{B|A\} = P\{B\} \cdot P\{A|B\}, \quad (6)$$

где $P\{B|A\}$ – условная вероятность события B , т.е. вероятность, вычисленная при условии, что событие A уже произошло; $P\{A|B\}$ – условная вероятность события A , определяющая возможность наступления этого события при уже свершившемся событии B .

События, для которых условная вероятность отличается от безусловной $P\{B|A\} \neq P\{B\}$, называются **зависимыми**, а те, у которых эти вероятности совпадают ($P\{B|A\} = P\{B\}$), – **независимыми**.

Вероятность объединения двух событий A и B равна

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\}, \quad (7)$$

где $P\{A \cdot B\}$ – вероятность того, что события A и B будут наблюдаться в одном и том же опыте совместно. Отсюда следует, что для несовместных событий вероятность наступления хотя бы одного из них определяется суммой их вероятностей

$$P\left\{\sum_{j=1}^N A_j\right\} = \sum_{j=1}^N P\{A_j\}. \quad (8)$$

Для противоположных событий (одно из которых в опыте обязательно происходит) справедливо

$$P\{A\} + P\{\bar{A}\} = 1. \quad (9)$$

Формулы (6)-(9) являются основой при расчете вероятностей сложных событий. На их основе можно получить важный частный случай расчета вероятностей для последовательности независимых испытаний. Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A может свершиться с одной и той же вероятностью p , то вероятность того, что за n опытов A произойдет ровно k раз равна

$$\begin{aligned} P\{\text{“ровно в } k \text{ опытах из } n \text{ произойдет событие } A\text{”}\} &= \\ &= C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Формула (10) является точной и удобна при небольшом числе производимых опытов n , однако при $n \gg 1$ ее вычислительная сложность стремительно нарастает. В связи с этим полезно рассмотреть два приближенных подхода к решению той же задачи.

Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа. Если число производимых опытов n велико ($n \gg 1$), вероятность свершения события A одинакова для всех опытов и равна p , а произведение $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 10$, то для расчёта вероятности многократного появления события A в n опытах можно использовать приближенные формулы Муавра-Лапласа:

$$P\{\text{событие } A \text{ произойдет ровно } k \text{ раз}\}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D}} \exp\left(-\frac{(k-n \cdot p)^2}{2 \cdot D}\right),$$

$$P\{\text{событие } A \text{ произойдет от } k_1 \text{ до } k_2 \text{ раз включительно}\} \approx$$

$$\approx F_{\text{ст}}\left(\frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{D}}\right) - F_{\text{ст}}\left(\frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{D}}\right), \quad (11)$$

где $D = n \cdot p \cdot (1 - p)$, а $F_{\text{ст}}(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, определяемая интегралом $F_{\text{ст}}(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz$. Таблица значений

этой функции приведена в приложении 1.

Формула Пуассона. Если число производимых опытов n велико ($n \gg 1$), вероятность p мала ($p < 0,1$), а произведение $n \cdot p \leq 10$, то

$$P\{\text{событие } A \text{ произойдет ровно } k \text{ раз}\} \approx \frac{(n \cdot p)^k e^{-n \cdot p}}{k!}. \quad (12)$$

Наконец, если поток наблюдаемых событий является пуассоновским (т.е. обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последействия), то вероятность наступления за время наблюдения τ ровно k событий равна

$$P\{\text{событие } A \text{ произойдет ровно } k \text{ раз}\} \approx \frac{(\lambda \cdot \tau)^k e^{-\lambda \cdot \tau}}{k!}, \quad (13)$$

где λ – интенсивность потока, определяемая средним числом событий, наблюдаемых в единицу времени.

Примеры решения задач

Задача 1. В двух партиях 85 и 60% доброкачественных деталей соответственно. Из каждой партии наугад выбирается по одному изделию. Какова вероятность того, что:

- 1) оба изделия окажутся бракованными;
- 2) одно изделие будет доброкачественным и одно бракованным;
- 3) хотя бы одно из изделий окажется бракованным?

Решение

а) Введем следующие обозначения для событий:

A_1 = “из первой партии выбрано качественное изделие”;

A_2 = “из второй партии выбрано качественное изделие”;
Исходя из условия, эти два события являются взаимно независимыми, а их вероятности равны $P\{A_1\} = 0,85$ и $P\{A_2\} = 0,6$.

б) Для того, чтобы оба выбранных изделия оказались бракованными, необходимо, чтобы в одном и том же опыте произошло и событие \bar{A}_1 , и событие \bar{A}_2 (черта сверху означает событие противоположное исходному). Таким образом, искомое событие является пересечением \bar{A}_1 и \bar{A}_2 , поэтому для расчета его вероятности следует опираться на (6) и (9)

$$\begin{aligned} P_1 &= P\{ \text{“оба изделия бракованные”} \} = P\{ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \} = \\ &= P\{ \bar{A}_1 \} \cdot P\{ \bar{A}_2 \} = (1 - P\{ A_1 \}) \cdot (1 - P\{ A_2 \}) = 0,15 \cdot 0,4 = \\ &0,06. \end{aligned}$$

Примечание: Обратите внимание, что как $P\{ \bar{A}_1 \} > P\{ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \}$, так и $P\{ \bar{A}_2 \} > P\{ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \}$. Это вполне логично, т.к. требование “и первое изделие бракованное, и второе бракованное” является более жестким, чем требование недоброкачества лишь одного из изделий, удовлетворить этому требованию труднее, поэтому и вероятность его выполнения меньше, чем у каждого из частных требований в отдельности.

в) Важно понимать, что рассматриваемое в случае №2 событие отличается от события “первое изделие доброкачественное, а второе – нет”, т.к. в его формулировке указано лишь общее число хороших и плохих изделий. Правильной формулировкой для рассматриваемого в случае №2 события является:

“(первое изделие доброкачественное, а второе бракованное)

ИЛИ (первое изделие бракованное, а второе доброкачественное)”.

Объединяемые здесь союзом “или” варианты не могут реализоваться в одном и том же опыте (являются несовместными), поэтому расчет вероятности данного события следует производить на основе (8) и (6)

$$P_2 = P\{ \text{“одно изделие доброкачественное и одно бракованное”} \} = \\ = P\{ (A_1 \cdot \bar{A}_2) + (\bar{A}_1 \cdot A_2) \} = P\{A_1\} \cdot (1 - P\{A_2\}) + \\ + (1 - P\{A_1\}) \cdot P\{A_2\} = 0,85 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,6 = 0,34 + 0,09 = 0,43.$$

г) По отношению к событиям \bar{A}_1 и \bar{A}_2 формулировка “хотя бы одно из изделий бракованное” означает, что должно выполниться **или** \bar{A}_1 , **или** \bar{A}_2 , **или** оба этих события одновременно. Таким образом, речь идет об объединении событий, вероятность которого определяется соотношением (7)

$$P_3 = P\{ \text{“хотя бы одно из изделий бракованное”} \} = P\{ \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \} = \\ = P\{ \bar{A}_1 \} + P\{ \bar{A}_2 \} - P\{ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \} = 0,15 + 0,4 - 0,15 \cdot 0,4 = 0,49.$$

Примечание: Последнее (отрицательное по знаку), слагаемое в предыдущей формуле является обязательным, так как события \bar{A}_1 и \bar{A}_2 являются совместными, и, следовательно

1) в состав события \bar{A}_1 входит $\bar{A}_1 \cdot A_2$ и $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$;

2) событие \bar{A}_2 включает в себя как $A_1 \cdot \bar{A}_2$, так и $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$.

В результате, без указанного слагаемого вероятность события $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ оказалась бы включенной в расчеты дважды.

д) При проведении вероятностных расчетов рекомендуется по возможности решать задачу разными способами и придумывать всевозможные способы косвенной проверки правдоподобности результата. В разобранный выше задаче это можно сделать несколькими способами. Например, перепроверим последний этап расчетов, решая ту же задачу через вероятность противоположного события

$$P\{ \text{“оба изделия доброкачественные”} \} = P\{ A_1 \cdot A_2 \} = P\{ A_1 \} \cdot P\{ A_2 \} = \\ = 0,85 \cdot 0,6 = 0,51.$$

Откуда $P\{ \text{“хотя бы одно из изделий бракованное”} \} = 1 - 0,51 = 0,49.$

Если же сопоставить события, рассматривавшиеся ранее, то видно, что события №1 и №2 являются несовместными, а их объединение (т.е. ситуация, когда **или** “оба изделия бракованные”,

или “одно изделие доброкачественное и одно бракованное”) эквивалентно событию “хотя бы одно из изделий бракованное”, которое рассматривалось в случае №3. Суммируя, в соответствии с (8), вероятности первых двух событий, получим

$$P_1 + P_2 = 0,06 + 0,43 = 0,49 = P_3$$

– вероятность события №3. Это является достаточно убедительной косвенной проверкой правильности проведенных расчетов.

Задача 2. Для освещения в помещении установлено 3 обычных лампы накаливания и одна лампа аварийного освещения, питающаяся от отдельного источника питания (см. рис. 6). Вероятность отключения сети “220 В” составляет 0,1; вероятность выхода из строя источника аварийного питания равна 0,02. Определить вероятность того, что помещение будет хотя бы частично освещено, если

- 1) вероятность выхода из строя лампы аварийного освещения пренебрежимо мала;
- 2) мощные лампы накаливания перегорают независимо по отношению друг к другу;
- 3) вероятность выхода из строя для каждой из ламп накаливания составляет 0,2.

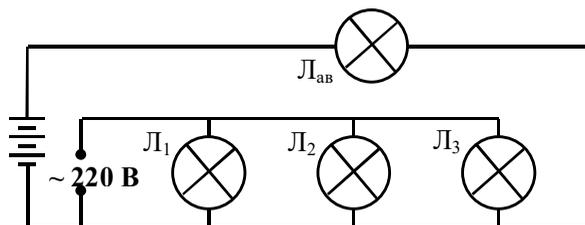


Рис. 6

Решение

а) Пусть событие А состоит в том, что “в помещении работает аварийное освещение” (из условия очевидно, что $P\{A\} = 1 - 0,02 = 0,98$), а событие В заключается в том, что “хотя бы одна из ламп L_1 – L_3 светится”. Тогда итоговое событие С, предполагающее “хотя бы частичную освещенность помещения” будет представлять собой объединение событий А и В.

б) Следует иметь в виду, что правило (7) рассчитано на объединение лишь двух событий, а при добавлении третьего существенно усложняется. А именно, пусть

$$\begin{aligned} P\{D_j\} &= P\{\text{“Лампа } L_j \text{ находится в рабочем состоянии”}\} = 1 - 0,2 = 0,8. \\ \text{Тогда } P\{\text{“хотя бы одна из ламп накаливания работоспособна”}\} &= \\ &= P\{D_1 + D_2 + D_3\} = P\{(D_1 + D_2) + D_3\} = P\{D_1 + D_2\} + P\{D_3\} - P\{(D_1 + D_2) \cdot D_3\} = \\ &= P\{D_1\} + P\{D_2\} + P\{D_3\} - P\{D_1 \cdot D_2\} - P\{D_1 \cdot D_3\} - \\ &P\{D_2 \cdot D_3\} + P\{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3\}. \end{aligned}$$

Так как события D_1 , D_2 и D_3 независимы (лампы выходят из строя независимо по отношению друг к другу), то вероятность их пересечения определяется произведением $P\{D_j\}$, поэтому

$$\begin{aligned} P\{\text{“хотя бы одна из ламп накаливания работоспособна”}\} &= \\ &= 0,8 + 0,8 + 0,8 - 0,8 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot 0,8 - 0,8 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,992. \end{aligned}$$

При расчете вероятности объединения более чем трех событий прямая расчетная формула становится уже чрезвычайно громоздкой, поэтому тот же результат гораздо выгоднее получить через вероятность противоположного события:

$$\begin{aligned} P\{\text{“все лампы накаливания – в неработоспособном состоянии”}\} &= \\ &= P\{\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_2 \cdot \bar{D}_3\} = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008. \end{aligned}$$

$$P\{\text{“хотя бы одна из ламп } L_1\text{–}L_3 \text{ работоспособна”}\} = 1 - 0,008 = 0,992.$$

в) Введенное выше событие В требует, чтобы хотя бы одна из ламп L_1 – L_3 была работоспособна и в сети “220 В” было напряжение, поэтому вероятность события В можно определить как пересечение этих двух составляющих

$$P\{B\} = 0,992 \cdot (1 - 0,1) = 0,8928.$$

г) Объединяя, наконец, события А и В, получим

$$P\{\text{“помещение будет хотя бы частично освещено”}\} = P\{C\} = \\ = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\} = 0,98 + 0,8928 - 0,98 \cdot 0,8928 = 0,9978.$$

Примечание: Обратите внимание на тот факт, что если в предыдущем выражении при расчете вероятности логической суммы событий пропустить последнее (отрицательное) слагаемое, то результат суммирования окажется заметно больше единицы. Но по своей физической сути вероятность не может превышать единицу. Поэтому, обнаружение подобного результата явно свидетельствовало бы, что допущена ошибка. Не забывайте на каждом этапе проверять (прямо или косвенно) достоверность получаемых сведений и не стесняйтесь помещать подтверждающие корректность рассуждений факты в оформление решения задач.

Задача 3. Проводится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых событие А может наблюдаться с одной и той же вероятностью $p > 0$. Какова вероятность того, что для достижения n успехов потребуется $(n + k)$ испытаний ($k=0,1,\dots$)?

Решение

а) Для завершения последовательности испытаний в условиях задачи необходимо совместное свершение двух событий:

S_1 = в совокупности опытов, предшествующих последнему, событие А наблюдалось ровно $(n - 1)$ раз;

S_2 = последний опыт завершился успешно, т.е. с наступлением события А.

Согласно (10) для первого из этих событий

$$P\{C_1\} = C_{n+k-1}^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^{(n+k-1)-(n-1)} = C_{n+k-1}^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^k,$$

а вероятность второго определяется вероятностью наступления самого события A , поэтому

$$\begin{aligned} P\{\text{“для достижения } n \text{ успехов потребуется } (n+k) \text{ испытаний”}\} &= \\ &= P\{C_1\} \cdot P\{C_2\} = C_{n+k-1}^{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^k. \end{aligned}$$

Примечание: Последнее соотношение иногда записывают в виде

$$P(n, n+k) = C_{-n}^k p^n (p-1)^k,$$

где
$$C_{-n}^k = \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k C_{n+k-1}^k$$

и называют отрицательным биномиальным распределением.

При $n=1$ оно превращается в геометрическое $P(1, k+1) = pq^k$.

Задача 4. Две артиллерийские установки, имеющие равную скорострельность, ведут артиллерийскую дуэль на предельной дальности. Вследствие этого, у установки, начавшей дуэль, вероятность попадания в противника составляет лишь $1/5$. Вероятность же того, что установка, вступившая в борьбу второй, попадет в инициатора дуэли составляет при каждом выстреле $1/4$. Полагая, что число снарядов неограниченно, а стрельба ведется строго поочередно, определить вероятность того, что победит в дуэли вторая установка.

Решение

а) Введем следующие обозначения для событий:

A = “удачный выстрел установки, начавшей дуэль”;

B = “попадание в цель установки, вступившей в борьбу второй”.

Исходя из условия, эти два события являются взаимно независимыми, а их вероятности равны $P\{A\} = 1/5$ и $P\{B\} = 1/4$.

б) По условию продолжительность дуэли не ограничена, важен лишь конечный результат, поэтому условие победы в

дуэли второй из установок можно сформулировать следующим образом:

“ (первая установка промахнулась, вторая – попала) **ИЛИ**
 (первая установка промахнулась, вторая – промахнулась,
 первая – промахнулась вторично, вторая – попала
 (своим вторым выстрелом)) **ИЛИ** (...) ”

Объединяемые здесь союзом “или” варианты не могут реализоваться в одном и том же опыте (являются несовместными), поэтому расчет вероятности данного события следует производить на основе (8). Особенность лишь в том, что количество слагаемых в сумме будет неограниченным

$$\begin{aligned}
 P\{ \text{“в дуэли победит вторая установка”} \} &= \\
 &= P\{ \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot A \cdot \bar{B} \cdot A \cdot B + \dots \} = \\
 &= (1 - P\{A\}) \cdot P\{B\} + (1 - P\{A\}) \cdot (1 - P\{B\}) \cdot (1 - P\{A\}) \cdot P\{B\} + \dots = \\
 &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Обратите внимание, что слагаемые, входящие в последнее найденное выражение, образуют бесконечную геометрическую прогрессию с начальным элементом $a_0 = 1/5$ и знаменателем прогрессии $q = 3/5$. Их сумма может быть получена в виде

$$P\{ \text{“в дуэли победит вторая установка”} \} = \frac{a_0}{1 - q} = \frac{1/5}{1 - 3/5} = \frac{1}{2}.$$

Итак, несмотря на бесконечно большое число исходов, которыми может закончиться дуэль, общая вероятность победы установки, вступившей в борьбу второй, ограничена и составляет 1/2, т.е. совпадает с вероятностью победы установки, начавшей дуэль. Подобное совпадение шансов оказалось возможным за счет того, что

- 1) первая установка имеет “фору” в один выстрел;
- 2) меткость стрельбы в среднем выше у второй установки.

Задача 5. Игровой автомат выдает выигрышные комбинации в среднем в 3 случаях из 10. Сколько нужно запланировать попыток, чтобы с вероятностью 99% можно было гарантировать наличие среди них по меньшей мере одной удачной? Какова вероятность, что из запланированного числа попыток какие-то три окажутся удачными?

Решение

а) Отметим, что все приведенные в теоретическом разделе формулы ориентированы лишь на расчет вероятностей, а число попыток и прочие параметры проводимых опытов можно найти лишь в правой части выражений. По этой причине для определения необходимого числа попыток придется составить и решить некоторое уравнение. Итак, пусть n – это число попыток, необходимое и достаточное для выполнения требований задания.

б) Событие $A =$ “хотя бы одна из n попыток является удачной” можно рассматривать как объединение n несовместных событий

$A_1 =$ “ровно 1 из n попыток – удачная”,

$A_2 =$ “ровно 2 из n попыток – удачные”,

...

$A_n =$ “все n попыток – удачные”,

однако такой подход приводит к весьма громоздкому уравнению. Гораздо проще решать данную задачу, анализируя событие противоположное A . Событие \bar{A} состоит в том, что “ни одна из n попыток не является удачной” и для соответствия условию должно выполняться

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} \leq 100\% - 99\% = 1\%.$$

в) Учитывая, что вероятность удачного исхода каждой отдельной попытки составляет $p_{\oplus} = 3/10 = 0,3$, а неудачного – $p_{\ominus} = 1 - p_{\oplus} = 0,7$ для $P\{\bar{A}\}$ получаем уравнение

$$P\{\bar{A}\} = (p_{\ominus})^n \leq 0,01,$$

откуда
$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} = 12,91.$$

Итак, наименьшим целочисленным n , удовлетворяющим условию задачи, является $n = 13$, т.е. нужно запланировать 13 попыток.

г) Для игрового автомата вероятность удачи при каждой из последующих попыток не зависит от того, каковы исходы предыдущих, поэтому проводимая серия из 13 попыток является с позиции теории вероятностей последовательностью независимых испытаний. Оценивая вероятность того, что ровно 3 попытки из 13 окажутся удачными, следует иметь в виду, что

1) удачные попытки можно выбрать из имеющихся C_{13}^3 способами,

2) каждый конкретный вариант расположения успешных попыток может реализоваться с вероятностью $(p_{\oplus})^3 \cdot (p_{\ominus})^{10}$.

В результате, итоговая вероятность возникновения ровно трех удачных попыток определится формулой (10)

$$\begin{aligned} P\{\text{“ровно 3 попытки из 13 будут удачными”}\} &= C_{13}^3 \cdot p_{\oplus}^3 \cdot p_{\ominus}^{10} = \\ &= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^{10} = 286 \cdot 0,027 \cdot 0,02825 = 0,218. \end{aligned}$$

Полученный результат показывает, что при намеченных тринадцати попытках почти наверняка несколько из них будут удачными, однако существует незначительная вероятность $p_0 = 0,7^{13} = 0,0097$ того, что все 13 попыток не дадут выигрыша. Близкая к 1% величина p_0 может служить косвенным подтверждением корректности решения задачи.

Задача 6. По радиоканалу в условиях действия помех передается сообщение из 100 символов. Вероятность искажения очередного символа не зависит от успешности передачи предыдущего и составляет 0,2. Какова вероятность, что в сообщении ровно 75 символов будут приняты верно (а остальные придут искаженными)?

Решение

а) Символы сообщения передаются независимо по отношению друг к другу, т.е. последовательно производится $n = 100$ опытов, в каждом из которых с вероятностью $p = 1 - 0,2 = 0,8$ может наблюдаться успешная передача символа, а с вероятностью $q = 0,2$ – противоположное событие (искажение символа). Итак, как и предыдущая, эта задача подходит под схему последовательности независимых испытаний, а значит вероятность того, что успешная передача символа будет наблюдаться ровно k раз должна удовлетворять соотношению (10).

б) К сожалению, произвести расчет непосредственно по (10) – затруднительно. Дело в том, что число C_{100}^{75} является огромным, а значения $0,8^{75}$ и $0,2^{25}$ – очень маленькими, а потому обеспечить достаточную точность при их подстановке в (10) практически невозможно. По указанной причине придется отказаться от непосредственного применения (10) и воспользоваться каким-либо из приближенных подходов.

в) Так как число проводимых опытов $n = 100$ достаточно велико $n \gg 1$, а произведение $D = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 16 > 10$, то для подсчета вероятности можно воспользоваться приближением Муавра-Лапласа. Вероятность того, что в серии из 100 опытов событие “успешная передача символа” произойдет ровно $k = 75$ раз равна

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 16}} \exp\left(-\frac{(75 - 100 \cdot 0,8)^2}{2 \cdot 16}\right) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left(-\frac{25}{32}\right) = 0,0456.$$

Задача 7. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов?

Решение

а) День рождения каждого из студентов может равновероятно приходиться на любой день года, поэтому вероятность попадания дня рождения конкретного студента именно на 1 сентября составляет

$$p = 1/365.$$

б) Для определения общего числа студентов, имеющих дни рождения 1 сентября, нужно последовательно проверить данные каждого из $n = 1825$ студентов. Тем самым, анализируемая задача оказывается подходящей под схему последовательности независимых испытаний, однако произвести точный расчет, опирающийся на (10), затруднительно из-за того, что $n \gg 1$.

в) Так как произведение $n \cdot p = 1825 / 365 = 5 < 10$, то приближенная формула Муавра-Лапласа здесь будет неприменима (даст слишком большую погрешность), а формула Пуассона вполне может быть использована. Итак, в соответствии с (12), где $k = 4$, запишем

$$P\{\text{день рождения придется на 1 сентября ровно 4 раза}\} \approx \frac{(1825/365)^4 \cdot e^{-1825/365}}{4!} = \frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 0,1755.$$

Задача 8. Изготавливаемая радиоаппаратура требует замены радиодеталей в среднем 10 раз за 10000 часов непрерывной работы. Какова вероятность возникновения отказов радиоаппаратуры за 100 часов непрерывной работы?

Решение

а) Исходя из физического смысла задачи поток отказов радиоаппаратуры является пуассоновским и характеризуется интенсивностью $\lambda = 10 / 10000 = 10^{-3}$ отказов/час.

Вероятность любого конкретного числа отказов за интервал времени будет определяться соотношением (13). Но в число исходов, удовлетворяющих условию задачи, входит произвольное положительное количество отказов, поэтому прямой подсчет является неоптимальным. Выгоднее определить вероятность безотказной работы ($k=0$) за контрольный интервал времени

$$P\{\text{нет отказов за 100 часов}\} \approx \frac{(10^{-3} \cdot 100)^0 \cdot e^{-10^{-3} \cdot 100}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-0,1}}{1} = 0,9048.$$

б) Наличие какого-либо числа отказов является событием противоположным к уже проанализированному, поэтому

$$P\{\text{за 100 часов возникали отказы}\} = 1 - 0,9048 = 0,0952.$$

2.3. Формула полной вероятности. Теорема о гипотезах

Если **условия** проведения некоторого опыта со случайным исходом представляют собой несколько взаимоисключающих случайных событий, то такие события принято называть **гипотезами** и обозначать $H_1, H_2 \dots H_N$. Любое событие A , которым может закончиться подобный опыт, будет, таким образом, всегда наблюдаться совместно с одной из этих гипотез. Если вероятности реализации всех гипотез $P\{H_i\}$ известны, и известны также условные вероятности события A при каждой из гипотез $P\{A|H_i\}$, то определить вероятность наступления события A можно по правилу

$$P\{A\} = \sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A | H_i\}, \quad (14)$$

где суммирование производится по всем возможным гипотезам. Правило (14) называют формулой полной вероятности.

Используемые в (14) вероятности $P\{H_i\}$ характеризуют возможность реализации каждой из гипотез по состоянию на момент до проведения опыта и называются **априорными** (доопытными). Однако в ходе проведения опыта одна из гипотез реально реализуется, и это, естественно, влияет на возможность возникновения события A . По этой причине и информация о том, чем завершился опыт, в свою очередь влияет на распределение вероятностей между гипотезами. Таким образом, после проведения опыта вероятность того, что в проведенном опыте реализовалась гипотеза H_i , оказывается отличающейся от исходной и называется **апостериорной** (послеопытной). При условии, что в проведенном опыте событие A произошло, эту апостериорную вероятность можно рассчитать по теореме о гипотезах:

$$P\{H_i | A\} = \frac{P\{H_i\} \cdot P\{A | H_i\}}{P\{A\}}, \quad (15)$$

где для расчета знаменателя может быть использована формула полной вероятности (14).

Примеры решения задач

Задача 1. Сообщение передаётся по каналу связи последовательностью двух символов: “0” и “1”. Известно, что символ “0” посылается в $5/3$ раза больше, чем “1”. Помехи искажают $2/5$ всех нулей (при этом “0” переходит в “1”) и $1/3$ всех единиц (при этом “1” переходит в “0”). Предполагается, что символы сообщения искажаются независимо друг от друга. По каналу связи послан один символ. Какова вероятность того, что на приёмной стороне будет получен “0”?

Решение

а) Обратите внимание на двухуровневый характер неопределенности, заложенный в данной задаче. С одной стороны, неизвестно, какой символ посылается в данный момент передатчиком. (Впрочем, если бы этот символ был известен, то его

уже и незачем было бы пересылать.) С другой стороны, даже если бы посылаемый символ стал известен, невозможно предсказать влияние помех на процесс приема данного символа приемником. В результате конечный результат и в этом случае остался бы неопределенным (неизвестным).

Итак, условия проведения опыта по пересылке информационного символа от передатчика на приемник являются случайными и включают две взаимоисключающие возможности: передавался “0” или передавалась “1”. Это позволяет рассматривать данные условия проведения опыта в качестве гипотез.

б) Введем следующие обозначения для гипотез:

H_0 = передатчик излучил радиоимпульс, соответствующий символу “0”;

H_1 = передатчиком была послана на приемную сторону логическая “1”.

В качестве конечного события в соответствии с вопросом задачи примем событие

A = принятый радиоимпульс воспринят приемником как символ “0”.

С учетом этих обозначений информация о соотношении числа “нулей” и “единиц” в сообщении, и о возможности их искажения может быть представлена в виде:

$$P\{H_1\} / P\{H_0\} = 5/3;$$

$P\{\bar{A}|H_0\} = 2/5$, т.к. прием “1” есть событие, противоположное A , откуда $P\{A|H_0\} = 1 - P\{\bar{A}|H_0\} = 3/5$;

и, наконец,

$$P\{A|H_1\} = 1/3.$$

в) Гипотезы всегда обязаны составлять полную группу событий, т.е. какая-то одна и только одна из них обязательно реализуется в проводимом опыте, а т.к. это события несовместные, то

$$\sum_i P\{H_i\} = 1. \quad (16)$$

Объединяя данное правило с соотношением вероятностей гипотез из предыдущего пункта, получаем несложную систему уравнений

$$\begin{cases} P\{H_0\} + P\{H_1\} = 1, \\ P\{H_0\}/P\{H_1\} = 5/3, \end{cases}$$

решив которую, получим априорные вероятности гипотез

$$P\{H_0\} = 5/8, \quad P\{H_1\} = 3/8.$$

г) Для определения итоговой вероятности получения на приемной стороне символа “0” остается лишь воспользоваться формулой полной вероятности (14)

$$P\{A\} = P\{H_0\} \cdot P\{A|H_0\} + P\{H_1\} \cdot P\{A|H_1\} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Обратите внимание, что хотя символов “0” в исходном сообщении было заметно больше, чем “1”, они чаще искажаются, в результате чего вероятности встретить на приемной стороне как “0”, так и “1” оказываются уже совпадающими.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи после передачи некоторого символа на приёмной стороне была зафиксирована “1”. Какова вероятность того, что и посылался символ “1”?

Решение

а) Принципиально важным является то, что вероятность передачи символа “1” требуется оценить не в произвольный момент времени, а применительно к тому опыту, когда на приемной стороне была зафиксирована “1”, т.е. не наблюдалось событие А. Эта вероятность рассчитывается после завершения опыта, т.е. является апостериорной. С учетом введенных в задаче 1 обозначений, искомая вероятность имеет вид $P\{H_1|\bar{A}\}$.

б) Для расчета апостериорных вероятностей гипотез предназначена теорема о гипотезах. Для ее применения осталось лишь учесть, что $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} = 1 - 1/2 = 1/2$,

и что $P\{\bar{A}|H_1\} = 1 - P\{A|H_1\} = 1 - 1/3 = 2/3$.

Подставляя эти вероятности в (15), получим

$$P\{H_1 | \bar{A}\} = \frac{P\{H_1\} \cdot P\{\bar{A} | H_1\}}{P\{\bar{A}\}} = \frac{3/8 \cdot 2/3}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Обратите внимание, что хотя как “нули”, так и “единицы” часто искажаются, но все же более чем в половине случаев прием этих символов осуществляется корректно, поэтому прием “1” повышает вероятность того, что в данном опыте именно этот символ и передавался. Действительно, априорная вероятность передачи “единицы” была $P\{H_1\} = 3/8$, а полученная только что апостериорная вероятность составляет уже $P\{H_1 | \bar{A}\} = 1/2$. Если бы вероятности искажения символов при передаче были ниже, то и наблюдаемое увеличение вероятности (т.е. уверенность в принятом символе) оказалось более высоким.

Задача 3. 2 автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

а) Описанная в условии задачи ситуация вновь характеризуется двухуровневой неопределенностью: качество находящихся на конвейере деталей является случайным, причем вероятность появления детали отличного качества зависит от того, каким автоматом выработана данная деталь, а это, в свою очередь, является неопределенным. Так как в отношении “происхождения” детали могут быть истинными лишь два взаимоисключающих предположения, то для вероятностного описания ситуации вновь разумно использовать гипотезы:

H_1 = взятая с конвейера деталь была изготовлена первым автоматом;

H_2 = взятая с конвейера деталь изготовлена автоматом №2.

Из разницы в производительности автоматов следует, что вероятности введенных гипотез составляют $P\{H_1\} = 2/3$ и $P\{H_2\} = 1/3$.

б) Если событие $A =$ “контролируемая деталь отличного качества”, то из условия задачи следует, что условные вероятности возникновения этого события при каждой из гипотез равны соответственно

$$P\{A | H_1\} = 0,60, \quad P\{A | H_2\} = 0,84,$$

поэтому полная (безусловная) вероятность того, что взятая с конвейера наугад деталь окажется отличного качества согласно (14) составит

$$P\{A\} = 2 \cdot 0,60 / 3 + 1 \cdot 0,84 / 3 = 0,68.$$

в) Поскольку вероятность того, что “изготовитель детали – первый автомат” требуется оценить именно для того опыта, когда взятая деталь обладала отличным качеством т.е. наблюдалось событие A , то исследуемая вероятность является апостериорной. Используя для ее расчета теорему о гипотезах (15), получаем

$$P\{H_1 | A\} = \frac{P\{H_1\} \cdot P\{A | H_1\}}{P\{A\}} = \frac{2/3 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}.$$

Задача 4. Первый стрелок поражает мишень с вероятностью 60%, второй – с вероятностью 50%, а для третьего стрелка вероятность попадания составляет 40%. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал третий стрелок в мишень или нет?

Решение

а) Здесь, как и в предыдущих задачах, можно выделить некоторое конечное событие $A =$ “при одном выстреле каждого из стрелков наблюдается ровно два попадания в мишень”. Вероятность выполнения этого события зависит от меткости стрелков, а вопрос задачи фактически касается апостериорных вероятностей событий, вычисляемых применительно к случаю, когда A уже реализовалось. Вычисление апостериор-

ных вероятностей событий опирается на теорему о гипотезах, поэтому решение задачи следует начать с определения совокупности возможных гипотез.

б) Гипотезы – это случайные взаимоисключающие ситуации, конкретизирующие условия проведения опыта. В анализируемой задаче конкретизацией события A является информация о том, кто именно попал в мишень. Соответственно, возникает следующий набор гипотез:

H_0 – все стрелки промахнулись;

H_1 – в мишень попал лишь первый стрелок;

H_2 – в мишень попал лишь стрелок №2;

H_3 – выстрел был удачным лишь у стрелка №3;

H_{12} – первые двое стрелков поразили мишень, а третий – промахнулся;

H_{23} – стрелок №1 промахнулся, а двое других – попали в мишень;

H_{13} – в мишень попали лишь первый и третий стрелок;

H_{123} – все стрелки попали в мишень.

Вероятности этих гипотез и условные вероятности введенного выше события A будут равны

$$P\{H_0\} = (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,5) \cdot (1 - 0,4) = 0,12 \quad P\{A | H_0\} = 0$$

$$P\{H_1\} = 0,6 \cdot (1 - 0,5) \cdot (1 - 0,4) = 0,18 \quad P\{A | H_1\} = 0$$

$$P\{H_2\} = (1 - 0,6) \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,4) = 0,12 \quad P\{A | H_2\} = 0$$

$$P\{H_3\} = (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,5) \cdot 0,4 = 0,08 \quad P\{A | H_3\} = 0$$

$$P\{H_{12}\} = 0,6 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,4) = 0,18 \quad P\{A | H_{12}\} = 1$$

$$P\{H_{23}\} = (1 - 0,6) \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,08 \quad P\{A | H_{23}\} = 1$$

$$P\{H_{13}\} = 0,6 \cdot (1 - 0,5) \cdot 0,4 = 0,12 \quad P\{A | H_{13}\} = 1$$

$$P\{H_{123}\} = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,12 \quad P\{A | H_{123}\} = 0$$

(Несложно убедиться, что сумма вероятностей всех гипотез равна 1)

в) На основе (14) рассчитаем полную вероятность того, что стрельба по мишени завершится ровно двумя попаданиями

$$P\{A\} = \sum_i P\{H_i\} \cdot P\{A | H_i\} = 0,18 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1 + 0,12 \cdot 1 = 0,38.$$

Апостериорные же вероятности гипотез составляют

$$P\{H_{12} | A\} = 0,18 \cdot 1 / 0,38 \approx 0,47.$$

$$P\{H_{23} | A\} = 0,08 \cdot 1 / 0,38 \approx 0,21.$$

$$P\{H_{13} | A\} = 0,12 \cdot 1 / 0,38 \approx 0,32.$$

Из полученных вероятностей можно сделать следующие выводы:

Вероятность $P\{H_{12}|A\}$, означающая, что промахнулся именно третий стрелок, существенно превышает вероятности $P\{H_{23}|A\}$ и $P\{H_{13}|A\}$. Это вполне логично, т.к. именно у стрелка №3 меткость самая низкая. Однако, попадание стрелка №3 в мишень может наступить в результате любого из несовместных событий H_{23} и H_{13} , поэтому

$$\begin{aligned} P\{\text{стрелок №3 попал в мишень} | A\} &= P\{H_{23}|A\} + P\{H_{13}|A\} \\ &= \\ &= 0,21 + 0,32 = 0,53, \end{aligned}$$

что превышает $P\{H_{12}|A\}$. В результате мы приходим к следующему, довольно любопытному заключению: “несмотря на низкую меткость третьего стрелка вероятность того, что он попал в мишень, оказывается выше, чем вероятность промаха”. (Объединение двух маловероятных несовместных событий имеет большую вероятность, чем одно, хотя бы и происходящее достаточно часто.)

Примечание: Большинство из перечисленных в п. ”б” гипотез в решении реально оказались неиспользованными, т.к. при них заданному событию не могло наблюдаться событие А. В связи с этим, в принципе, было необязательно тратить время на их перечисление и расчет их вероятностей. Но для самоконтроля логики рассуждений при решении подобных задач крайне важно хотя бы мысленно сформулировать полный комплект гипотез, чтобы убедиться в отсутствии внутренних противоречий и в том, что сумма вероятностей всех гипотез равна единице.

Задача 5. Имеется a черных и b белых шаров одинакового веса и размера. Эти шары каким-то образом распределены по двум урнам. В проводимых опытах наудачу выбирается урна, а из нее один шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность вынуть белый шар была максимальной?

Решение

а) Обозначим число черных шаров, положенных в первую урну, через x ($x \leq a$); тогда число тех же шаров, лежащих во второй урне, будет равно $(a - x)$. Аналогично, пусть y и $(b - y)$ – число белых шаров, лежащих в первой и второй урне.

б) Как и во всех предыдущих задачах при проведении описанного эксперимента можно отметить двухуровневую неопределенность, заключающуюся в том, что сначала наугад выбирается одна из двух урн (две взаимоисключающие возможности), а затем из выбранной урны наугад вытаскивается шар. В связи с этим введем гипотезы H_1 = выбрана первая урна, H_2 = выбрана вторая урна и конечное событие A = вытасчен белый шар.

Учитывая равную возможность выбора любой из урн, имеем

$$P\{H_1\} = P\{H_2\} = 0,5 ,$$

а условные вероятности вытаскивания белого шара составляют

$$P\{A|H_1\} = x/(x+y), \quad P\{A|H_2\} = (a-x)/(a-x+b-y).$$

Объединяя найденные значения, на основе формулы полной вероятности (3.1) для события – будет вытасчен белый шар – получаем

$$P\{A\} = \frac{x}{2(x+y)} + \frac{a-x}{2(a-x+b-y)}. \quad (17)$$

в) К сожалению, прямой анализ (17) как функции двух переменных приводит к излишне громоздким выражениям, поэтому рассмотрим сначала поведение производной от (17) по аргументу y

$$\frac{dP\{A\}}{dy} = -\frac{x}{2(x+y)^2} + \frac{a-x}{2(a-x+b-y)^2} \quad (18)$$

Несложно установить, что для каждого возможного x максимум (17) по переменной y может наблюдаться лишь на правой или левой границе допустимого диапазона значений y .

Действительно, при $x = 0$ производная (18) для всех y неотрицательна, а значит максимум (17) будет наблюдаться при $y = b$, когда $P\{A\} = 0,5$.

При $x = 1$ выражение (18) принимает вид

$$\left. \frac{dP\{A\}}{dy} \right|_{x=1} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{a-1}{(a-1+b-y)^2} - \frac{1}{(1+y)^2} \right\},$$

т.е. при $y = 0$ эта производная отрицательна (следовательно $P\{A\}$ убывает, а $y = 0$ – одна из возможных точек максимума), а затем знак производной сменяется на положительный и $P\{A\}$ начинает расти, что делает еще одной точкой потенциального максимума $y = b$. Аналогичное поведение функции (18) наблюдается и при всех иных x .

г) Проследим теперь зависимость $P\{A\}$ от x при $y = 0$ и $y = b$. Для этого проанализируем производную

$$\frac{dP\{A\}}{dx} = \frac{y}{2(x+y)^2} + \frac{y-b}{2(a+b-x-y)^2}. \quad (19)$$

При $y = 0$ для всех x (кроме $x = 0$, которое недопустимо по смыслу задачи, т.к. первая из урн окажется пустой) производная отрицательна и, следовательно, максимальное значение вероятности $P\{A\}$ соответствует $x = 1$ и равно $P\{A\} = 0,5 \cdot (1 + (a - 1) / (a + b - 1))$.

При $y = b$ для всех x (кроме $x = a$, которое недопустимо по смыслу задачи, т.к. вторая из урн окажется пустой) производная положительна и, следовательно, максимальное значение вероятности $P\{A\}$ соответствует $x = a - 1$ с такой же как и выше вероятностью $P\{A\} = 0,5 \cdot (1 + (b - 1) / (a + b - 1))$. Эта веро-

ятность превышает полученное в п."в" значение 0,5 и, таким образом, является максимально возможной.

Итак, для достижения максимальной вероятности вытаскивания белого шара следует в одной урне один белый шар, а в другой все остальные.

2.4. Вероятностные характеристики случайных величин

Функцией распределения вероятностей (ФРВ) случайной величины ξ называют функцию $F_{\xi}(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, не превосходящее x :

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}. \quad (20)$$

Для любой случайной величины эта функция является безразмерной неубывающей функцией аргумента x , принимающей значения от нуля до единицы. Она позволяет рассчитать вероятность попадания значений СВ ξ в любой интервал

$$P\{a < \xi \leq b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a). \quad (21)$$

Для оценки вероятности принятия случайной величиной единственного конкретного значения этот интервал следует сжать до точки

$$P\{\xi = c\} = \lim_{x \rightarrow c+0} F_{\xi}(x) - \lim_{x \rightarrow c-0} F_{\xi}(x). \quad (22)$$

Вероятностный смысл отдельных участков ФРВ СВ поясняется в табл. 2.

Плотностью распределения вероятностей (ПРВ) случайной величины ξ называют функцию $W_{\xi}(x)$, характеризующую вероятность попадания СВ в бесконечно малую окрестность аргумента x . Численно она определяется отношением вероятности попадания в бесконечно малый интервал, включающий точку x , к ширине этого интервала и связана с ФРВ соотношением

$$W_{\xi}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = F'_{\xi}(x). \quad (23)$$

Таблица 2

Вероятностный смысл отдельных участков
функции распределения вероятностей случайной величины

На данном участке ФРВ	Вероятностный смысл
постоянна	значения, относящиеся к данному участку, случайная величина принимать не может
плавно нарастает	любые значения из данного участка могут наблюдаться в опытах, но каждое из них имеет бесконечно малую вероятность появления
претерпевает разрыв I рода	соответствует разрешенному (наблюдаемому) значению СВ, причем само значение определяется координатой x точки разрыва, а вероятность его наблюдения – приращением $F_{\xi}(x)$ в точке разрыва

Плотность вероятности принимает лишь неотрицательные значения и имеет размерность, обратную размерности самой величины ξ . Она также позволяет рассчитать вероятность попадания значений СВ ξ в любой интервал

$$P\{a < \xi \leq b\} = \int_a^b W_{\xi}(x) dx. \quad (24)$$

Отсюда, в частности, следует, что обратная связь между ПРВ и ФРВ имеет вид

$$F_{\xi}(x_0) = P\{\xi \leq x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x) dx. \quad (25)$$

Другим очень полезным следствием (24) является свойство нормировки для плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx = 1, \quad (26)$$

которое должно выполняться для любых СВ. С геометрических позиций свойство (26) означает, что для любой СВ площадь фигуры под кривой ее плотности вероятности всегда равна единице (рис 7).

Вероятностный смысл отдельных участков ПРВ СВ поясняется в табл. 3.

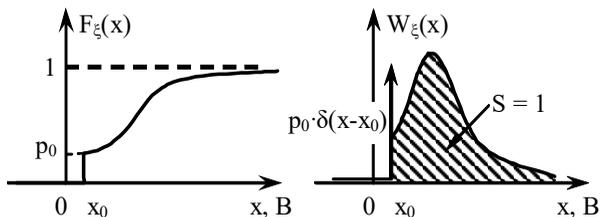


Рис. 7. Пример функции и плотности распределения вероятностей

Таблица 3

Вероятностный смысл отдельных участков плотности распределения вероятностей случайной величины

На данном участке ПРВ	Вероятностный смысл
равна нулю	значения, относящиеся к данному участку, случайная величина принимать не может
положительна	любые значения из данного участка могут наблюдаться в опытах, но каждое из них имеет бесконечно малую вероятность появления
определяется слагаемым $p_0 \cdot \delta(x-x_0)$	значение x_0 наблюдается с положительной вероятностью p_0

Случайная величина называется нормальной или гауссовской, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$W_{\text{норм}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (27)$$

где a и σ ($\sigma > 0$) – параметры распределения. Функция распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины не выражается в элементарных функциях. Ее значения для стандартной случайной величины, имеющей параметры $a = 0$ и $\sigma = 1$, приведены в таблице в приложении 1.

Учитывая, что плотность вероятности нормального распределения является четной функцией относительно точки $x = a$, для вероятности попадания в интервал значений, симметричный по отношению к этой точке (с учетом свойств из приложения 1), получаем

$$\begin{aligned} P\{a-\Delta \leq \xi \leq a+\Delta\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{a-\Delta}^{a+\Delta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta/\sigma}^{\Delta/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= F_{\text{ст}}(\Delta/\sigma) - F_{\text{ст}}(-\Delta/\sigma) = 2 \cdot F_{\text{ст}}(\Delta/\sigma) - 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Для освещения некоторого помещения установили две мощные лампы и три лампы аварийного освещения в соответствии со схемой, представленной на рис. 8. Для каждой из мощных ламп вероятность выхода из строя в течение месяца составляет 0,4, а каждая из аварийных ламп должна успешно прослужить тот же срок с вероятностью 90%. Случайная величина ξ – это число ламп, которые будут светиться в помещении через месяц после начала работы. Определить закон распределения случайной величины ξ .

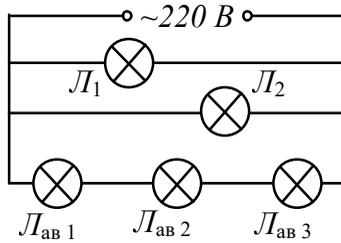


Рис. 8. Исследуемая схема освещения помещения

Решение

а) Из постановки задачи следует, что ξ – дискретная СВ, максимальное значение которой равно пяти (функционируют все лампы), а минимальное равно нулю (освещение отсутствует). Наиболее удобной формой записи дискретной СВ является ряд распределения, т.е. таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и вероятности, с которыми каждое конкретное значение может наблюдаться в опытах.

б) На количество освещающих помещение ламп будет существенно влиять состояние цепи ламп аварийного освещения, поэтому рассмотрим ее отдельно. При перегорании даже одной из ламп $L_{ав i}$ цепь питания остальных разрывается и они уже не могут светиться. В результате событие $A =$ “светятся все лампы аварийного освещения” и событие “цепь ламп аварийного освещения не работает” являются противоположными друг другу (составляют полную группу). Событие A фактически есть пересечение трех одинаковых, но независимых по отношению друг к другу событий, поэтому

$$P\{\text{“светятся все лампы аварийного освещения”}\} = P\{A\} = 0,9^3 \approx 0,73.$$

$$P\{\text{“аварийное освещение не работает”}\} = P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} \approx 0,27.$$

в) Относительно же мощных ламп несложно получить

$$P\{B_0\} = P\{\text{“обе мощные лампы вышли из строя”}\} = 0,4^2 = 0,16;$$

$$P\{B_2\} = P\{\text{“обе мощные лампы продолжают работать”}\} = 0,6^2 = 0,36;$$

$$P\{B_1\} = P\{\text{“работает ровно одна из мощных ламп”}\} = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48.$$

В последнем случае удвоение соответствует тому, что работающей (перегоревшей) может оказаться любая из двух мощных ламп.

г) Теперь последовательно рассмотрим вероятность принятия случайной величиной ξ различных целочисленных значений, начиная с нуля.

$$P\{\xi = 0\} = P\{\bar{A} \cdot B_0\} = P\{\bar{A}\} \cdot P\{B_0\} = 0,27 \cdot 0,16 = 0,0432.$$

$$P\{\xi = 1\} = P\{\bar{A} \cdot B_1\} = P\{\bar{A}\} \cdot P\{B_1\} = 0,27 \cdot 0,48 = 0,1296.$$

$$P\{\xi = 2\} = P\{\bar{A} \cdot B_2\} = P\{\bar{A}\} \cdot P\{B_2\} = 0,27 \cdot 0,36 = 0,0972.$$

$$P\{\xi = 3\} = P\{A \cdot B_0\} = P\{A\} \cdot P\{B_0\} = 0,73 \cdot 0,16 = 0,1168.$$

$$P\{\xi = 4\} = P\{A \cdot B_1\} = P\{A\} \cdot P\{B_1\} = 0,73 \cdot 0,48 = 0,3504.$$

$$P\{\xi = 5\} = P\{A \cdot B_2\} = P\{A\} \cdot P\{B_2\} = 0,73 \cdot 0,36 = 0,2628.$$

Сводя полученные значения в таблицу, получаем ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0432	0,1296	0,0972	0,1168	0,3504	0,2628

Обратите внимание, что если просуммировать все вероятности, стоящие в нижней строке таблицы, то получится ровно 1,0. Так и должно быть, поскольку в каждом конкретном опыте СВ ξ обязательно принимает какое-то одно (и только одно значение) из перечисленных в таблице. Факт равенства единице суммы вероятностей, составляющих ряд распределения СВ, называют свойством нормировки ряда распределения.

Задача 2. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} C \cdot \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти константу С и определить функцию распределения СВ ξ .

Решение

а) Хотя в условии и не указано, чему равна константа C , она может принимать лишь единственное значение. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C \cdot \cos(x) dx = C \cdot \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2 \cdot C,$$

но согласно свойству нормировки (26) этот интеграл обязан равняться единице, а потому $C = 0,5$.

б) Для расчета по ПРВ функции распределения вероятностей воспользуемся соотношением (25)

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x_0) &= \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x) dx = \int_{-\pi/2}^{x_0} 0,5 \cdot \cos(x) dx = \\ &= 0,5 \cdot \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{x_0} = 0,5 \cdot [\sin(x_0) + 1], \quad -\pi/2 \leq x_0 \leq +\pi/2. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что верхний предел интегрирования – это аргумент ФРВ, т.е. переменная величина. Именно в такой символической форме он входит и в конечное выражение, ведь отыскивая ФРВ, мы ищем именно функцию (т.е. зависимость от некоторого аргумента), а не какое-то отдельное значение (константу).

Исходная $W_{\xi}(x)$ и полученная $F_{\xi}(x)$ функции показаны на рис. 9.

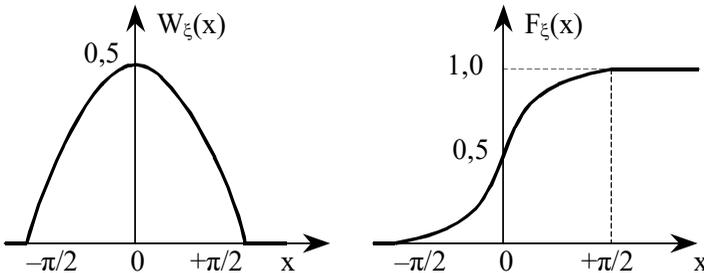


Рис. 9. Законы распределения СВ ξ из задачи 2

Задача 3. Баскетбольным мячом три раза бросают в корзину. Вероятность попадания не зависит от номера броска и составляет для каждого из них 0,6. Построить функцию распределения $F_{\xi}(x)$ для числа попаданий мячом в корзину.

Решение

а) Анализируемая СВ может принимать лишь одно из немногих целочисленных значений, т.е. является дискретной СВ. В связи с этим решение задачи целесообразно начать с построения ряда распределения этой СВ.

б) Поскольку вероятность попадания при очередном броске не зависит от результативности других попыток, то, бросая мяч три раза, мы фактически получаем последовательность независимых испытаний и, следовательно, величина ξ – число успешных бросков – будет подчиняться биномиальному закону распределения

$$P \{ \xi = k \} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n), \quad (29)$$

где n – число проводимых испытаний, p – вероятность возникновения нужного результата в отдельном испытании, q – вероятность противоположного события.

В анализируемом случае $n = 3$, $p = 0,6$, $q = 0,4$, поэтому ряд распределения ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

в) Соответствующая полученному ряду функция распределения показана на рис. 10. При ее построении было учтено следующее:

1) Так как наименьшее значение, принимаемое СВ ξ , равно нулю, то для любого отрицательного аргумента x наблюдать $\xi \leq x$ невозможно и, согласно (20), $F_{\xi}(x) = P \{ \xi \leq x \} = 0$.

2) Точка $x = 0$ отличается от любой, расположенной левее, тем, что получить $\xi = 0$ возможно, а потому $F_{\xi}(0) = P\{\xi \leq 0\} = P\{\xi = 0\} = 0,064$.

3) Для любой близкой к $x = 0$ точки, лежащей правее начала координат, неравенство $\xi \leq x$ также может оказаться справедливым, но лишь при том же самом условии $\xi = 0$, т.е. $F_{\xi}(x) = P\{\xi = 0\} = 0,064$.

В результате вплоть до точки $x = 1$ (не включая ее) ФРВ остается постоянной; на графике возникает горизонтальная ступенька.

4) В точке $x = 1$ для выполнения неравенства $\xi \leq x$ открываются уже две несовместные возможности: или $\xi = 0$, или $\xi = 1$. По этой причине в точке $x = 1$ ФРВ получает приращение на величину вероятности $P\{\xi = 1\} = 0,288$ и достигает значения $F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq 1\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 0,352$ и т.д.

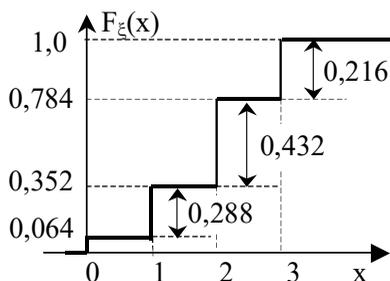


Рис. 10. Функция распределения числа попаданий баскетбольным мячом в корзину

Итак, у любой дискретной случайной величины функция распределения вероятностей имеет ступенчатый вид, причем ступеньки располагаются в тех точках оси x , которые совпадают с разрешенными (наблюдаемыми) значениями данной СВ, а высота каждой из ступенек равна вероятности принятия случайной величиной данного значения.

Задача 4. Случайное напряжение u , распределено по

закону Рэлея $W_u(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0$

с параметром $\sigma = 2$ В. Определить наиболее вероятное значение воздействующего на реле напряжения и вероятность его превышения.

Решение

а) Рассмотрим производную заданной в условии ПРВ:

$$\begin{aligned} \frac{dW_u(x)}{dx} &= \left(\frac{x}{\sigma^2} \right)' \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \frac{x}{\sigma^2} \cdot \left\{ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)' \right\} = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2 \cdot x^2}{2 \cdot \sigma^4} \right\} = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{\sigma^2 - x^2}{\sigma^4}, \quad \text{где } x \geq 0. \end{aligned}$$

Среди неотрицательных аргументов x есть лишь одна точка $x = \sigma$, обращающая эту производную в нуль, причем при меньших x производная положительна, а при больших – отрицательна. Таким образом, $W_u(\sigma) = 1/\sigma\sqrt{e}$ является максимумом зависимости $W_u(x)$, а сама координата $x = \sigma$ и является наиболее вероятным значением напряжения u .

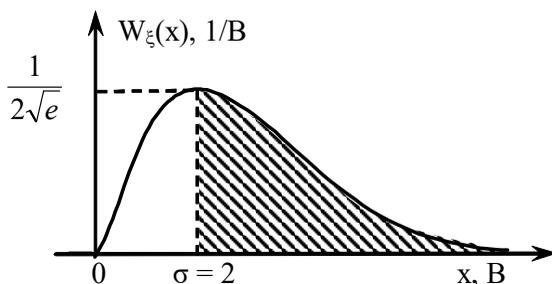


Рис. 11. Плотность распределения вероятностей напряжения u

б) Превышение наиболее вероятного значения соответствует попаданию напряжения u в интервал от σ до беско-

нечности. В соответствии с (24) эта вероятность определяется

интегралом

$$P\{u > \sigma\} = \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Для расчета данного интеграла удобно воспользоваться заменой переменных $y = x^2/2\sigma^2$. Изменению x от σ до бесконечности будет в таком случае соответствовать изменение новой переменной y от $y_{\min} = \sigma^2/2 \cdot \sigma^2 = 0,5$ до бесконечности, а $dy = (x/\sigma^2) \cdot dx$, поэтому

$$P\{u > \sigma\} = \int_{0,5}^{+\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_{0,5}^{+\infty} = 0 + e^{-0,5} = 0,607.$$

(Геометрически - это площадь заштрихованной фигуры на рис. 11).

Задача 5. Источник постоянного напряжения генерирует нестабильную ЭДС E , распределённую по *нормальному* закону с параметрами $a = 5$ В и $\sigma = 20$ мВ. Известна вероятность ($P = 0,97$) того, что напряжение, поданное в схему от источника питания, отличается от 5 В не более чем на ΔE . Определить величину ΔE .

Решение

а) Так как центр интервала значений, вероятность попадания в который в условии задана, совпадает с параметром a нормального распределения, то эта вероятность связана с величиной ΔE соотношением (28)

$$P = 2 \cdot F_{\text{ст}}(\Delta E / \sigma) - 1 = 0,97.$$

Из этого соотношения следует, что должно выполняться

$$F_{\text{ст}}(\Delta E / \sigma) = 0,985.$$

В свою очередь, последнее соотношение (согласно данным приложения 1) будет выполняться для аргумента

$$\Delta E / \sigma \approx 2,2.$$

Итак, $\Delta E \approx 2,2 \cdot \sigma \approx 44$ мВ.

Задача 6. Цикл работы установленного на некотором перекрестке светофора составляет одну минуту, причем и красный, и желтый, и зеленый сигналы занимают в среднем одинаковые интервалы времени. В некоторый (не синхронизированный с работой светофора) момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Построить плотность распределения вероятностей СВ τ – времени ожидания автомобилем возможности проехать перекресток, если движение разрешено лишь на зеленый свет.

Решение

а) Так как на зеленый свет проезд разрешен, то этот случай существенно отличается от ситуации, возникающей при красном или желтом свете светофора. В связи с этим выгодно ввести и рассмотреть подробнее две взаимоисключающие гипотезы:

H_0 = автомобиль подъезжает к перекрестку на зеленый свет;

H_1 = автомобиль подъезжает на желтый или красный свет.

Поскольку частота наблюдения каждого из сигналов светофора, в соответствии с условием, одинакова, а последняя гипотеза объединяет в себе сразу два случая, то вероятности введенных гипотез будут равны

$$P\{H_0\} = 1/3; \quad P\{H_1\} = 2/3.$$

б) На зеленый свет проезд разрешен, поэтому значение, принимаемое СВ τ при истинности гипотезы H_0 всегда равно нулю и, следовательно,

$$P\{\tau \leq x | H_0\} = 1 \quad \text{для всех } x \geq 0.$$

Для желто-красной части цикла, напротив, любые значения времени ожидания, начиная с нуля и до максимума, равного 40 секунд, являются равновероятными. В связи с этим вероятность выполнения неравенства $\tau \leq x$ будет нарастать пропорционально увеличению x , достигая единицы при $x = 40$ секунд

$$P\{\tau \leq x | H_1\} = x / 40 \quad \text{для всех } 0 \leq x \leq 40.$$

в) Объединяя полученные выше результаты на основе формулы полной вероятности, получим

$$F_{\tau}(x) = P\{H_0\} \cdot P\{\tau \leq x | H_0\} + P\{H_1\} \cdot P\{\tau \leq x | H_1\} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{для } x = 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{60} & \text{для } 0 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Для сокращения записи ФРВ и ПРВ принято упоминать лишь те участки оси частот, которые соответствуют наблюдаемым для данной СВ значениям. В связи с этим для приведенной выше строки “по умолчанию” предполагается, что $F_{\tau}(x) = 0$ при $x < 0$ и $F_{\tau}(x) = 1$ при $x > 40$.

г) Для получения плотности распределения вероятностей, согласно (23), полученный результат необходимо продифференцировать по x . В точке $x = 0$ дифференцируемая функция претерпевает разрыв первого рода – бесконечно малому приращению аргумента x соответствует увеличение функции на величину $1/3$ – поэтому производная $F_{\tau}(x)$ в этой точке бесконечно велика и может быть записана лишь посредством δ -функции. Для согласования масштабов функции и ее производной амплитудный коэффициент δ -функции должен совпадать с величиной приращения, т.е. быть равен $1/3$. Поскольку δ -функция отличается от нуля лишь в одной точке оси x , ее можно просто прибавить к производной, характеризующей свойства ПРВ для ненулевых аргументов. В результате для ПРВ СВ τ получаем

$$W_{\tau}(x) = \frac{1}{3} \cdot \delta(x) + \frac{1}{60} \quad \text{для } 0 \leq x \leq 40.$$

Найденные законы распределения для времени ожидания автомобилем возможности проехать перекресток показаны на рис. 12.

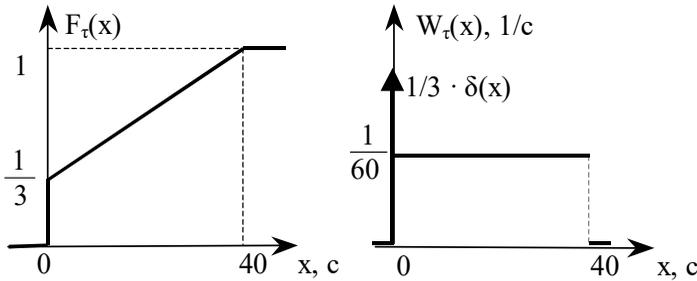


Рис. 12. Законы распределения СВ τ из задачи 6

Задача 7. Время безотказной работы некоторого прибора T распределено по показательному закону распределения

$$W_T(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

При выходе прибора из строя он сразу заменяется новым, аналогичным по свойствам старому. Определить вероятность того, что за время τ прибор придется заменить ровно 1 раз.

Решение

а) Необходимость единственной замены за интервал времени τ означает, что в проводимых опытах для первого прибора случайное время наработки на отказ T окажется меньшим, чем τ , а у прибора, использованного для замены, время T превысит остаток интервала τ .

Так как все используемые для замены приборы являются однотипными, то вероятность превышения величиной T некоторого значения t_0 для каждого из них составляет

$$P\{T > t_0\} = \int_{t_0}^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{+\infty} = 0 + e^{-\lambda t_0} = e^{-\lambda t_0}.$$

б) Если бы величина T принимала лишь дискретные значения, то можно было бы выдвинуть ряд конкретных гипотез о времени, которое проработает первый прибор до выхода из строя, поставить каждой из них в соответствие условную вероятность, определяющую способность второго прибора проработать после этого по меньшей мере до завершения интервала τ и

получить итоговую вероятность необходимости ровно одной замены прибора на основе формулы полной вероятности (14).

Реальная ситуация, когда время наработки на отказ T может принимать произвольные значения от 0 до бесконечности (а в интересующих нас случаях: от 0 до τ), отличается лишь тем, что число подобных гипотез становится бесконечно большим. Но самой логики рассуждений подобное отличие не изменяет и, следовательно, правило расчета итоговой вероятности оказывается аналогичным (14), где лишь необходимо дискретную сумму заменить интегральной. Итак, вероятность того, что за время τ потребуется ровно 1 замена, определяется выражением

$$P = \int_0^{\tau} \underbrace{e^{-\lambda(\tau-t_0)}}_{\text{второй прибор проработает по меньшей мере } (\tau - t_0)} \cdot \underbrace{(\lambda \cdot e^{-\lambda t_0}) dt_0}_{P\{H_1\} = \text{время замены первого прибора равно } t_0} = \lambda \cdot e^{-\lambda\tau} \cdot \int_0^{\tau} dt = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}.$$

Обратите внимание, что полученный нами результат представляет собой частный случай выражения (13) для $k = 1$. Это произошло потому, что определяемая условиями задачи последовательность моментов времени, в которые происходит замена вышедших из строя приборов новыми, является пуассоновским потоком событий.

2.5. Числовые характеристики случайных величин

Начальным моментом k -го порядка случайной величины ξ называется константа, к которой стремится среднее арифметическое k -тых степеней значений, принятых величиной ξ в бесконечно большой серии опытов. Для дискретной случайной величины (ДСВ), принимающей значения x_i с вероятностями p_i , этот начальный момент определяется формулой

$$m_k\{\xi\} = \sum_i x_i^k \cdot p_i, \quad (30)$$

где в суммировании участвуют все возможные значения СВ ξ .

Для непрерывной случайной величины (НСВ), характеризующейся плотностью вероятности $W_{\xi}(x)$, начальный момент k -го порядка рассчитывают по формуле

$$m_k \{ \xi \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot W_{\xi}(x) dx. \quad (31)$$

Особое место среди начальных моментов занимает начальный момент первого порядка, называемый математическим ожиданием. **Математическое ожидание** случайной величины ξ определяет константу, к которой стремится среднее арифметическое наблюдаемых значений этой СВ, и может быть рассчитано по правилу

$$M_{\xi} = m_1 \{ \xi \} = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot p_i & \text{- для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx & \text{- для НСВ.} \end{cases} \quad (32)$$

Примечание: Геометрически математическое ожидание соответствует горизонтальной координате центра масс фигуры, образуемой плотностью вероятностей анализируемой случайной величины. Это означает, что если под графиком ПРВ разместить в точке $x = M_{\xi}$ опору, то на данной опоре фигура, образуемая графиком ПРВ, будет находиться в равновесии. Из этого, в частности, следует, что для любой СВ, плотность вероятности которой оказывается четной относительно некоторой точки, эта точка и определяет математическое ожидание (рис. 13).

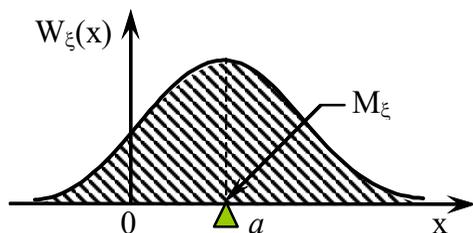


Рис. 13. Для СВ с симметричной плотностью вероятности математическое ожидание находится в центре симметрии

Центральный момент k -го порядка определяется аналогично (30)-(31), но отличается от начального тем, что усреднению подвергаются k -е степени отклонений наблюдаемых значений СВ ξ от ее математического ожидания. Соответственно, расчетная формула для k -го центрального момента имеет вид

$$\mu_k \{ \xi \} = \begin{cases} \sum_i (x_i - M_\xi)^k \cdot p_i & \text{- для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^k \cdot W_\xi(x) dx & \text{- для НСВ.} \end{cases} \quad (33)$$

Важнейшим центральным моментом случайной величины является её второй центральный момент, называемый дисперсией. **Дисперсия** D_ξ характеризует степень разброса значений, принимаемых случайной величиной, относительно ее математического ожидания. Она рассчитывается по правилу

$$D_\xi = \mu_2 \{ \xi \} = \begin{cases} \sum_i (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i & \text{- для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 \cdot W_\xi(x) dx & \text{- для НСВ.} \end{cases} \quad (34)$$

Если раскрыть квадраты, входящие в состав (34), и проанализировать возникающие при этом слагаемые, то несложно получить следующее, полезное во многих практических ситуациях, соотношение

$$D_\xi = m_2 \{ \xi \} - M_\xi^2, \quad (35)$$

гласящее: “дисперсия – это матожидание квадрата минус квадрат матожидания случайной величины ξ ”.

Часто вместо дисперсии в расчетах используют **средне-квадратическое отклонение (СКО)** или, иначе, **эффективное значение** случайной величины

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}. \quad (36)$$

Эффективное значение, как и дисперсия, характеризует степень разброса значений, принимаемых случайной величиной, и отличается от нее единицей измерения.

Полезные для использования в практических расчетах свойства наиболее важных числовых характеристик приведены в табл. 4.

Таблица 4

Свойства числовых характеристик случайной величины

Свойство	Матожидание M_η	Дисперсия D_η	СКО σ_η
Размерность	$[\eta]$	$[\eta]^2$	$[\eta]$
Для константы $\eta = c$	c	0	0
После умножения на константу $\eta = c \cdot \xi$	$c \cdot M_\xi$	$c^2 \cdot D_\xi$	$ c \cdot \sigma_\xi$
Для линейного преобразования $\eta = \sum_i a_i \cdot \xi_i$ некоррелированных ξ_i	$\sum_i a_i \cdot M_i$	$\sum_i a_i^2 \cdot D_i$	$\sqrt{\sum_i a_i^2 \cdot D_i}$

Примечание: обозначение $[\eta]$ соответствует размерности случайной величины η .

Помимо перечисленных выше в теории вероятностей используются и другие числовые характеристики, например, мода и медиана распределения. **Модой распределения** называют наивероятнейшее значение случайной величины $x_{\text{мод}}$, определяемое максимумом ее плотности распределения вероятностей

$$x_{\text{мод}} = \arg \max W_\xi(x). \quad (37)$$

Медианой $x_{0,5}$ называют значение СВ, для которого справедливо

$$F_\xi(x_{0,5}) = P\{\xi \leq x_{0,5}\} = P\{\xi > x_{0,5}\} = 0,5. \quad (38)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Баскетбольным мячом три раза бросают в корзину. Вероятность попадания не зависит от номера броска и составляет для каждого из них 0,6. Определить математическое ожидание и дисперсию числа попаданий мячом в корзину.

Решение

а) Случайная величина ξ – число попаданий мячом в корзину в изложенных выше условиях – уже анализировалась выше в задаче 3 подраздела 2.4 (см. с. 59) и характеризуется рядом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

б) Применяя к этому ряду формулы (32) и (34), получаем

$$M_{\xi} = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,064 + 1 \cdot 0,288 + 2 \cdot 0,432 + 3 \cdot 0,216 = 1,8.$$

$$D_{\xi} = \sum_i (x_i - M_{\xi})^2 \cdot p_i = (0-1,8)^2 \cdot 0,064 + (1-1,8)^2 \cdot 0,288 + (2-1,8)^2 \cdot 0,432 + (3-1,8)^2 \cdot 0,216 = 0,20736 + 0,18432 + 0,01728 + 0,31104 = 0,72.$$

в) Для проверки полученных результатов можно воспользоваться тем фактом, что для биномиально распределенных СВ, числовые характеристики подчиняются соотношениям

$$M_{\xi} = n \cdot p, \quad D_{\xi} = n \cdot p \cdot q, \quad (39)$$

где n – число проводимых испытаний, p – вероятность возникновения нужного результата в отдельном испытании, q – вероятность противоположного события.

Для $n = 3$, $p = 0,6$, $q = 0,4$ в соответствии с (39) получаем

$$M_{\xi} = 3 \cdot 0,6 = 1,8; \quad D_{\xi} = 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,72$$

что совпадает с результатами произведенных выше вычислений.

Задача 2. Зенитная установка, обладающая неограниченным запасом снарядов, обстреливает самолёт до тех пор, пока

он не будет поражен. Вероятность попадания для каждого из выстрелов сохраняется одной и той же и составляет 0,2. Каково среднее число снарядов η , затрачиваемых зениткой “впустую” (без поражения цели)? Какова вероятность, что при обстреле очередной цели впустую будет потрачено больше снарядов, чем тратится на то же самое в среднем?

Решение

а) Анализируемая СВ может принимать лишь целочисленные неотрицательные значения, поэтому в первую очередь определим ряд распределения этой величины.

Для получения результата в общем виде обозначим заданную в условии вероятность попадания при каждом отдельном выстреле через p_1 . Наименьшее значение СВ η , равное нулю, наблюдается лишь если первый же сделанный зениткой выстрел является удачным. Вероятность этого составляет $P\{\eta = 0\} = p_1$. Следующее возможное значение $\eta = 1$ возникает, если первый выстрел по цели завершился промахом и сразу после него произошло попадание. Таким образом, речь идет о пересечении двух независимых событий, а потому соответствующая вероятность $P\{\eta = 1\} = (1 - p_1) \cdot p_1$. Рассуждая аналогично, получаем ряд распределения

x_i	0	1	...	k	...
p_i	p_1	$(1 - p_1) \cdot p_1$...	$(1 - p_1)^k \cdot p_1$...

б) Непосредственное применение к этому ряду формулы (32) не дает возможности получить компактный ответ, т.к. число слагаемых в сумме бесконечно велико, и они не образуют ни арифметической, ни геометрической прогрессии, ни какой-либо иной удобной для суммирования последовательности

$$M_{\xi} = \sum_i x_i \cdot p_i = p_1 + 2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1 + \dots + k \cdot (1 - p_1)^k \cdot p_1 + \dots$$

В связи с этим для выполнения вычислений необходимо использовать какой-либо иной косвенный метод расчета, например, метод производящих функций.

в) Метод производящих функций оказывается полезным в случаях, когда дискретная СВ принимает лишь целочисленные значения и опирается на использование свойств функции

$$\varphi_{\xi}(z) = \sum_k p_k \cdot z^k, \quad (40)$$

где p_k – вероятность принятия случайной величиной ξ значения k . Взяв производную от обеих частей (40) по переменной z , получаем

$$\varphi'_{\xi}(z) = \sum_k k \cdot p_k \cdot z^{k-1}.$$

Если теперь принять $z = 1$, то для принимающей лишь целочисленные значения СВ стоящая справа сумма совпадёт с выражением, получаемым на основе (32), т.е. будет представлять собой математическое ожидание этой СВ. Итак,

$$M_{\xi} = \varphi'_{\xi}(z)|_{z=1}. \quad (41)$$

г) Применяя метод производящих функций к рассматриваемой задаче, в качестве функции $\varphi_{\xi}(z)$ имеем

$$\varphi_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_1 \cdot (1-p_1)^k \cdot z^k = p_1 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p_1) \cdot z]^k = \frac{p_1}{1 - (1-p_1) \cdot z}.$$

Замена представленной выше суммы дробью оказывается возможной в силу того, что слагаемые $[(1-p_1) \cdot z]^k$ образуют бесконечную геометрическую прогрессию, а, как известно, $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots = a_1 / (1 - q)$.

Используя теперь соотношение (41) получаем

$$M_{\xi} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{p_1}{1 - (1-p_1) \cdot z} \right\} \Big|_{z=1} = \frac{(1-p_1) \cdot p_1}{[1 - (1-p_1) \cdot z]^2} \Big|_{z=1} = \frac{(1-p_1) \cdot p_1}{p_1^2} = \frac{(1-p_1)}{p_1}.$$

д) Учитывая окончательно, что по условию задачи вероятность p_1 составляла $p_1 = 0,2$ для среднего числа снарядов, расходуемых зенитной установкой “впустую” (т.е. до попадания в цель), имеем

$$M_{\xi} = (1 - p_1) / p_1 = 0,8 / 0,2 = 4.$$

е) Для ответа на второй вопрос задачи остается выяснить, сколь часто число затрачиваемых снарядов оказывается равным пяти, шести или более. С учетом уже найденного в подпункте “а” ряда распределения для расчета этой вероятности необходимо лишь вычислить сумму

$$P\{ \text{“будет потрачено более 4 снарядов”} \} = \sum_{k=5}^{+\infty} p_1 \cdot (1-p_1)^k .$$

Эта сумма вновь образует бесконечную геометрическую прогрессию с начальным членом $a_1 = p_1 \cdot (1-p_1)^5$, поэтому

$$P\{ \xi > 4 \} = \frac{p_1 \cdot (1-p_1)^5}{1-(1-p_1)} = (1-p_1)^5 = 0,8^5 \approx 0,328.$$

Задача 3. Некоторое напряжение равновероятно принимает любые значения от 2 вольт до неизвестной константы U_{\max} . Определить значение константы U_{\max} , при котором дисперсия напряжения составит 3 В^2 .

Решение

а) Анализируемое напряжение характеризуется равномерным законом распределения, поэтому для решения поставленной задачи предварительно определим числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины.

б) Если некоторая СВ ξ подчиняется равномерному распределению с границами a и b , то плотность вероятности этой СВ будет иметь прямоугольный вид, показанный на рис. 14. Относительно точки $x = (a + b)/2$ этот прямоугольник является

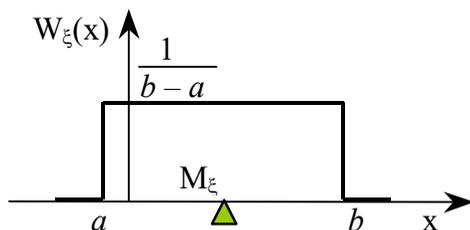


Рис.14 Плотность вероятности равномерно распределенной СВ ξ

четной функцией, поэтому математическое ожидание величины ξ составляет

$$M_{\text{равн}} = \frac{a+b}{2}. \quad (42)$$

Для расчета дисперсии воспользуемся соотношением (35) и предварительно определим второй начальный момент распределения. В соответствии со свойством нормировки (36) в пределах от a до b высота плотности вероятности составляет $1/(b-a)$, поэтому

$$m_2\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3 \cdot (b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

В соответствии с (35) для дисперсии СВ ξ получаем

$$D_{\text{равн}} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (43)$$

в) Возвращаясь к исходной задаче, где нижняя граница распределения $a = 2$ В, а верхняя – неизвестна $b = U_{\text{max}}$, на основе (43) получаем уравнение

$$(U_{\text{max}} - 2)^2 / 12 = 3,$$

откуда окончательно получаем $U_{\text{max}} = 8$ В.

Задача 4. Найти дисперсию нормальной случайной величины ξ , подчиняющейся закону распределения

$$W_{\text{норм}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right).$$

Решение

а) Соответствующая анализируемой СВ плотность вероятности фактически уже была показана выше на рис. 13. Она оказывается симметричной относительно линии $x = a$, поэтому эта координата и служит математическим ожиданием данной случайной величины

$$M_{\text{норм}} = a. \quad (44)$$

б) Дисперсия СВ ξ определяется соотношением (34)

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 W_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dx.$$

Воспользуемся заменой переменных $z = (x - a) / \sigma$. При изменении переменной x от минус бесконечности до плюс бесконечности новая переменная z также будет изменяться в бесконечных пределах. Учитывая дополнительно, что $(x - a) = \sigma \cdot z$ и $dx = \sigma \cdot dz$, получаем

$$D_{\xi} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \sigma^2 \cdot \left[\frac{-z}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \Big|.$$

Во втором выражении в строке выше применено интегрирование по частям, где $u = z$, $dv = z \cdot \exp(-z^2/2)$ и соответственно $du = 1$, $v = -\exp(-z^2/2)$.

Учитывая, что линейная функция z нарастает медленнее, чем уменьшается экспонента $\exp(-z^2/2)$, первое слагаемое в полученной сумме как при верхнем, так и при нижнем пределе равно нулю. Второе же слагаемое представляет собой интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения вероятностей нормальной СВ с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, который в соответствии со свойством нормировки (26) всегда равен единице, а потому содержимое всей квадратной скобки в представленном выше выражении равно единице и, следовательно,

$$D_{\text{норм}} = \sigma^2. \quad (45)$$

Итак, параметры, входящие в выражение ПРВ нормальной СВ $W_{\text{норм}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$ определяют математическое ожидание (a) и среднее квадратическое отклонение ($\sigma = \sqrt{D_{\text{норм}}}$) этой СВ.

Задача 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, обладающей ФРВ $F_{\xi}(x) = \sin(2 \cdot x)$ при $0 \leq x \leq \pi/4$.

Решение

а) Анализируемая СВ может принимать любые значения из промежутка $[0; \pi/4]$ и, следовательно, является непрерывной случайной величиной. Для расчета матожидания и дисперсии подобных СВ необходимо знать их плотность распределения вероятностей. Найти ПРВ можно, применив к заданной в условии ФРВ, правило (23)

$$W_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = 2 \cdot \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$$

б) Так как значения плотности вероятностей СВ ξ отличаются от нуля лишь на интервале $x \in [0; \pi/4]$, заменим бесконечные пределы интегрирования в (42) конечными

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x) dx.$$

Используя табличный интеграл (П2) из приложения 2, окончательно имеем $M_{\xi} = 2 \cdot \left(\frac{\cos 2x}{4} + \frac{x \sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi - 2}{4} \approx 0,285$.

Для перепроверки полученного результата разместим в точке $x = M_{\xi}$ “подпорку” для функции $W_{\xi}(x)$. Такая “подпорка”, судя по рис. 15, может обеспечить равновесие фигуры, определяемой графиком функции $W_{\xi}(x)$ (является горизонтальной координатой центра масс этой фигуры), что является косвенным подтверждением корректности произведенных расчетов.

в) Для определения дисперсии воспользуемся соотношением (35) и интегралом (П3) из приложения 2. Получим

$$D_{\xi} = m_2 \{ \xi \} - M_{\xi}^2 = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} x^2 \cdot \cos(2x) dx - \left(\frac{\pi - 2}{4} \right)^2.$$

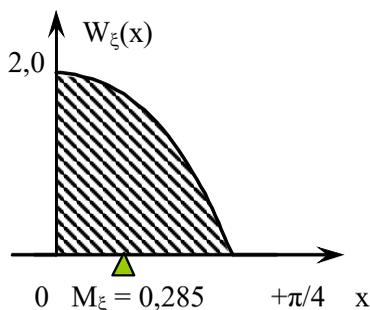


Рис. 15. Плотность вероятностей СВ ξ из задачи 3

Задача 6. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R . Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти среднеквадратическое отклонение для расстояния от точки до центра круга.

Решение

а) Обозначим расстояние между точкой и центром круга через ξ . Среднеквадратическое отклонение СВ ξ определяется формулой (36), в которой фигурирует дисперсия ξ , а для ее расчета необходима плотность распределения вероятностей этой СВ.

б) Для любого кольца с внутренним радиусом r и шириной Δr площадь составляет (см. рис. 16)

$$S_{\text{кольца}} = \pi \cdot (r + \Delta r)^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2 \cdot r \cdot \Delta r + \Delta r^2).$$

Поскольку точка обязательно лежит где-то внутри заданного круга, то площади $\pi \cdot R^2$ соответствует единичная вероятность попадания, а кольцу шириной Δr соответствует вероятность

$$P\{\text{точка принадлежит кольцу}\} = \frac{S_{\text{кольца}}}{S_{\text{круга}}} = \left(2 \cdot \frac{r}{R} + \frac{\Delta r}{R}\right) \cdot \frac{\Delta r}{R}.$$

в) Плотность вероятностей, согласно (23), есть вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал значений, отнесенная к ширине интервала при условии, что

эта ширина стремится к нулю. Для величины ξ вероятность попасть в интервал от r до $r + \Delta r$ совпадает с вероятностью попадания точки в показанное на рис. 16 кольцо, поэтому

$$W_{\xi}(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \cdot \left(2 \cdot \frac{r}{R} + \frac{\Delta r}{R} \right) \cdot \frac{\Delta r}{R} = 2 \cdot \frac{r}{R^2}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

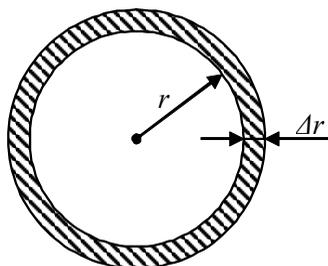


Рис. 16. Кольцевая область радиуса r с шириной dr

г) Математическое ожидание СВ ξ согласно (32) равно

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot W_{\xi}(r) dr = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R r^2 dr = \frac{2 \cdot r^3}{3 \cdot R^2} \Big|_0^R = \frac{2}{3} \cdot R.$$

Вычислять дисперсию выгоднее на основе (35), что дает

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 \cdot W_{\xi}(r) dr - M_{\xi}^2 = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R r^3 dr - \left(\frac{2}{3} R \right)^2 = \frac{1}{2} R^2 - \frac{4}{9} R^2 = \frac{R^2}{18}.$$

В итоге среднеквадратическое отклонение для СВ ξ составляет

$$\sigma = \sqrt{D_{\xi}} = \frac{R}{3\sqrt{2}}.$$

2.6. Функциональное преобразование случайных величин

Если каждое значение y случайной величины η возникает как реакция на соответствующее значение x воздействия ξ : $y = f(x)$, то говорят, что случайные величины ξ и η связаны функциональной зависимостью $\eta = f(\xi)$. Следствием зави-

симости между наблюдаемыми значениями СВ является жесткая взаимосвязь между их законами распределения. Характер этой взаимосвязи существенно зависит от типа СВ ξ (дискретная/ непрерывная) и от вида обратной функции $x = \varphi(y)$, позволяющей определить воздействие x , необходимое для получения реакции y .

2.6.1. При функциональном преобразовании дискретной СВ ξ возникающая СВ η тоже оказывается дискретной, а преобразование закона распределения сводится, фактически, к изменению набора наблюдаемых значений. Никакой специальной методики для анализа подобного случая не требуется, поэтому для освоения этого типа функционального преобразования достаточно разобрать приведенную ниже задачу 1.

2.6.2. Пусть теперь ξ является непрерывной СВ, а функция $y = f(x)$ не содержит горизонтальных участков (пример подобной функции показан на рис. 17). Тогда каждое выходное значение y может быть получено из конечного числа аргументов x , т.е. существует *конечнозначная* обратная функция

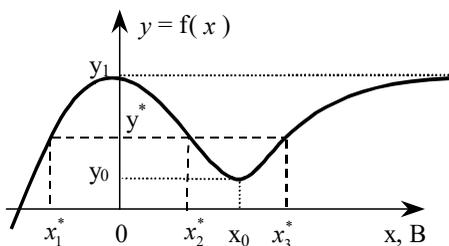


Рис. 17. Пример функциональной зависимости с конечнозначной обратной функцией

$x = \varphi_i(y)$, где i – номер ветви обратной функции $\varphi(\cdot)$. В частности, для случая, представленного на рис. 17, обратная функция является однозначной для $y \in (-\infty; y_0]$ и трехзначной – для

$y \in [y_0; y_1]$ (три разных значения $x_1^* = \varphi_1(y^*)$, $x_2^* = \varphi_2(y^*)$ и $x_3^* = \varphi_3(y^*)$ соответствуют одному и тому же y^*).

Если для каждого возможного значения выходной СВ η обратная функция оказывается конечнозначной, то закон распределения η определяется соотношением

$$W_{\eta}(y) = \sum_i W_{\xi}(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right|, \quad (46)$$

где сумма берётся по всем ветвям обратной функции.

2.6.3. Если функция $y = f(x)$, преобразующая непрерывную СВ ξ в СВ η , напротив, состоит лишь из горизонтальных участков (как показано на рис. 18), то получаемая СВ η оказывается дискретной, т.к. возможными (наблюдаемыми) для нее будут лишь отдельные значения y_m (на рис. 18 подобных значений четыре – от y_1 до y_4). Провести в этом случае расчет по формуле (46) уже невозможно, т.к. каждому из значений y_m соответствует бесконечно много аргументов x . Так, значению y_1 соответствуют любые аргументы x , удовлетворяющие неравенству $x < x_1$; значению y_2 – любые аргументы, принадлежащие интервалу $x \in [x_1; 0]$, и т.д. В результате оказывается неопределенным (бесконечным) число ветвей, которые нужно суммировать в (46).

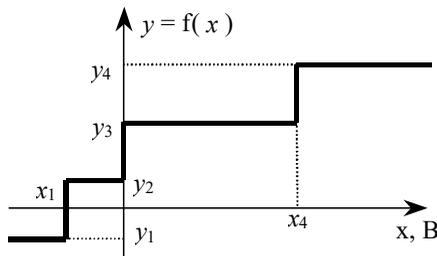


Рис. 18. Пример преобразования непрерывной СВ в дискретную

Учтем, однако, что возникающая в результате преобразования СВ η является дискретной. Закон распределения подобной величины определяется лишь вероятностями, с которыми наблюдаются ее отдельные значения y_m . Вместе с тем СВ η

принимает значение y_m в тех и только тех случаях, когда значение исходной СВ ξ лежит в пределах соответствующего этому y_m интервала оси x . Так, применительно к рис. 18 вероятность появления значения y_1

$$P\{\eta = y_1\} = P\{\xi \leq x_1\} = \int_{-\infty}^{x_1} W_\xi(x) dx.$$

Аналогично, для уровня y_2 имеем

$$P\{\eta = y_2\} = P\{x_1 < \xi \leq 0\} = \int_{x_1}^0 W_\xi(x) dx$$

и т.д. Поскольку записанные выше вероятности приходится на отдельные точки оси x плотность вероятности в этих точках оказывается бесконечно большой и может быть записана посредством дельта-функции

$$W_\eta(y) = \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (47)$$

где число слагаемых определяется количеством горизонтальных участков зависимости $y = f(x)$.

2.6.4. Объединяя воедино два случая, рассмотренных в п. 2.6.2-2.6.3, получаем следующую универсальную формулу, определяющую вероятностные свойства результата функционального преобразования случайной величины

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| + \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (48)$$

где первая сумма включает все ветви обратных функций по всем наклонным участкам зависимости $y = f(x)$, а вторая сумма – все горизонтальные участки той же самой зависимости.

2.6.5. Числовые характеристики функционально преобразованной случайной величины η могут быть рассчитаны по стандартным правилам (на основе найденной $W_\eta(y)$), а могут быть получены, минуя этап нахождения её закона распределения вероятностей:

$$M_{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_{\xi}(x) dx, \quad (49)$$

$$D_{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_{\eta}]^2 \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \cdot W_{\xi}(x) dx - M_{\eta}^2. \quad (50)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Дискретная СВ ξ равновероятно может принимать любые целочисленные значения от 0 до 7 (включительно). Величина Θ связана с ξ функциональной зависимостью $\Theta = \cos(\pi \cdot \xi/3)$. Рассчитать ряд распределения случайной величины Θ .

Решение

а) Запишем ряд распределения СВ ξ и дополним его строкой, в которой отобразим значения СВ Θ , получаемые из соответствующих значений СВ ξ .

ξ :	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
	p_i	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
Θ :	φ_i	1,0	0,5	-0,5	-1,0	-0,5	0,5	1,0	0,5

б) Из полученной таблицы следует, в частности, что $\Theta = -1,0$ лишь тогда, когда $\xi = 3$, т.е. с вероятностью 1/8. Значение $\Theta = -0,5$ возникает как при $\xi = 2$, так и при $\xi = 4$, а поскольку события “ $\xi = 2$ ” и “ $\xi = 4$ ” несовместны, то вероятность наблюдения хотя бы одного из них определяется суммой вероятностей и равна $2 \cdot 1/8 = 1/4$. Упорядочивая значения, принимаемые СВ Θ , по возрастанию и объединяя аналогично рассмотренному вероятности появления тех или иных “необходимых” значений СВ ξ , получаем итоговый ряд распределения

Θ :	φ_i	-1,0	-0,5	0,5	1,0
	p_i	1/8	2/8	3/8	2/8

Задача 2. Непрерывная СВ ξ распределена равномерно на интервале от 0 до 1, а СВ η связана с ней формулой $\eta = [(n+1) \cdot \xi]$, где $[\cdot]$ – знак взятия целой части числа, а n – целочисленная константа. Определить закон распределения случайной величины η .

Решение

а) Для наглядности имеет смысл построить график зависимости значений y , принимаемых выходной величиной η , от значений x исходной СВ ξ . Подобный график для $n = 4$ изображен на рис. 19.

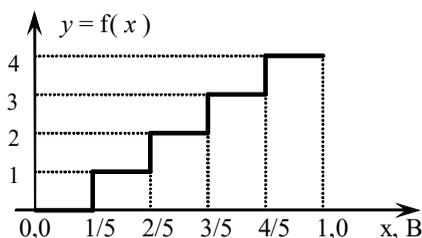


Рис. 19. Преобразование $y = f(x)$ из задачи 2 при $n = 4$

Действительно, для аргументов $x \in [0; 1/5)$ значение $5 \cdot x$ лежит между нулем и единицей (не достигая ее) и, следовательно, целая часть этого значения оказывается равной нулю; для $1/5 \leq x < 2/5$ величина $5 \cdot x$ лежит в диапазоне от 1 до величины чуть меньшей, чем 2, поэтому целая часть этого числа дает единичный результат и т.д.

б) Для расчета закона распределения выходной СВ η наиболее важно, что график на рис. 19 не содержит наклонных участков, а состоит лишь из горизонтальных отрезков, так что в результате преобразования допустимыми для СВ η оказываются лишь целочисленные значения 0, 1, 2, 3 и 4. Анализируя саму зависимость $y = [(n+1) \cdot x]$, несложно установить, что подобный результат является закономерным и в результате преобразования появляется дискретная величина η , принимающая значения от 0 до n .

в) Значение $\eta = k$ наблюдается тогда, когда значение x исходной СВ лежит в интервале $k/(n+1) \leq x < (k+1)/(n+1)$. Исходная же величина, имеющая равномерное распределение, характеризуется плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при прочих } x. \end{cases}$$

В результате вероятность наблюдения $\eta = k$ составляет

$$P\{\eta = k\} = \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} 1 \cdot dx = \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

т.е. не зависит от k , а определяется лишь константой n .

Итак, функциональная взаимосвязь $\eta = [(n+1) \cdot \xi]$ преобразует СВ ξ с непрерывным равномерным распределением в дискретную СВ η , имеющую дискретное равномерное распределение $P\{\eta = k\} = 1 / (n+1)$ для всех целочисленных k из диапазона $0 \leq k \leq n$.

Задача 3. Показать, что для получения из равномерно распределенной на отрезке от 0 до 1 СВ ξ величины η , обладающей некоторой функцией распределения $F_{\eta}(y)$, необходимо в качестве функции преобразования использовать функциональную зависимость, обратную требуемой функции распределения $y = F_{\eta}^{-1}(x)$. (*Примечание: обратной называется функция, позволяющая выразить аргумент исходной функции через ее результат; соответственно зависимость $F^{-1}(\cdot)$ позволяет по результату $x = F_{\eta}(y)$ найти необходимый аргумент y .*)

Решение

а) Согласно теории, изложенной в п. 2.6.2, начинать анализ функционального преобразования следует с поиска функции, обратной соотношению, связывающему y и x , но так как используемая в задаче функциональная взаимосвязь сама является обратной к $F_{\eta}(y)$, то именно эта зависимость и будет являться необходимой для расчетов функцией $x = \varphi(y) = F_{\eta}(y)$.

б) Исходная СВ распределена равномерно на интервале от 0 до 1, т.е. имеет плотность вероятности

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при прочих } x. \end{cases}$$

Вместе с тем функция $x = F_{\eta}(y)$ при любых аргументах y принимает значение, лежащее между нулем и единицей, поэтому для всех без исключения y справедливо

$$W_{\xi}(F_{\eta}(y)) = 1.$$

в) Наконец, функция $\varphi(y) = F_{\eta}(y)$ является однозначной для всех своих аргументов y и, следовательно, в универсальной формуле (6.3) сумма “по m ”, ориентированная на бесконечнозначную $\varphi(y)$, сейчас в принципе не нужна, а сумма “по i ” будет содержать лишь единственное слагаемое

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = W_{\xi}(F_{\eta}(y)) \cdot \left| \frac{dF_{\eta}(y)}{dy} \right| = W_{\eta}(y),$$

т.к. первый множитель в выражении выше (как показано в пп. ‘б’) всегда равен единице, а производная от функции распределения – это и есть плотность распределения вероятности.

Задача 4. Равномерно распределенная на интервале от a до b ($0 \leq a \leq b$) величина ξ преобразуется в новую случайную величину η по правилу $\eta = \ln(\xi)$. Определить закон распределения величины η и ее математическое ожидание.

Решение

а) Обратной к функции $y = f(x) = \ln(x)$ является функция $x = \varphi(y) = \exp(y)$ однозначная для всех своих возможных аргументов. Это означает (как и в предыдущей задаче), что в универсальной формуле (48) сумма “по m ”, ориентированная на бесконечнозначную $\varphi(y)$, в анализируемом преобразовании отсутствует, а сумма “по i ” будет содержать лишь единственное слагаемое

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = W_{\xi}(e^y) \cdot e^y. \quad (51)$$

б) Важной особенностью решаемой задачи является тот факт, что плотность вероятности исходной СВ отличается от нуля лишь на промежутке от a до b , а потому входящий в правую часть выражения (51) сомножитель $W_{\xi}(e^y)$ будет отличен от нуля лишь при выполнении неравенства $a \leq e^y \leq b$, т.е. для $y \in [\ln a; \ln b]$. Учитывая, что для $x \in [a; b]$ исходная плотность вероятности равна $1/(b-a)$, запишем окончательно

$$W_{\eta}(y) = e^y / (b-a) \quad \text{при } \ln a \leq y \leq \ln b. \quad (52)$$

в) Обратите внимание, что без указания допустимого диапазона аргументов y предыдущая формула становится явно некорректной. Действительно, если никаких ограничений на y наложено не будет, то при любых аргументах от минус бесконечности до плюс бесконечности формула (52) будет выдавать положительное значение плотности вероятности, означающее, что подобное значение y СВ η может наблюдаться в каком-то из опытов. Вместе с тем значения исходной СВ, лежащие в диапазоне от a до b , преобразователем $y = \ln x$ могут быть преобразованы лишь в интервал значений от $\ln a$ до $\ln b$, и никаких иных значений в результате анализируемого преобразования физически наблюдаться не может.

Во-вторых, именно при указанных в (52) ограничениях выполняется свойство нормировки. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\eta}(y) dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{e^y}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \cdot e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = \frac{e^{\ln b} - e^{\ln a}}{b-a} = 1.$$

Без установленных ограничений на аргумент y пределы интегрирования оказались бы иными и выполнение свойства нормировки было нарушено. В связи с этим очень полезно после нахождения закона распределения, характеризующего результат функционального преобразования, проверять полученную

формулу на соответствие свойству нормировки, что позволяет выявлять многие потенциально возможные ошибки в расчетах.

г) Наконец, для расчета математического ожидания можно воспользоваться двумя подходами. Во-первых, поскольку плотность вероятности СВ η уже найдена можно использовать стандартное выражение (32)

$$M_{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot W_{\eta}(y) dy = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{y \cdot e^y}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \cdot [y \cdot e^y - e^y]_{\ln a}^{\ln b}$$

(в последнем выражении было использовано интегрирование по частям), в результате чего окончательно получим

$$M_{\eta} = \frac{b \cdot \ln b - a \cdot \ln a}{b-a} - 1.$$

Альтернативный подход к расчету математического ожидания заключается в использовании формулы (49)

$$M_{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) W_{\xi}(x) dx = \int_a^b \frac{\ln x}{b-a} dx = \frac{x \cdot (\ln x - 1)}{b-a} \Big|_a^b = \frac{b \cdot \ln b - a \cdot \ln a}{b-a} - 1.$$

Естественно, результаты, полученные как первым, так и вторым способом, совпадают между собой.

Задача 5. Случайная величина ξ , обладающая плотностью вероятности $W_{\xi}(x) = e^x$ при $x \leq 0$, подвергается функцио-

нальному преобразованию $\eta = \begin{cases} 16, & \text{при } \xi \leq -6, \\ (\xi + 2)^2, & \text{при иных } \xi. \end{cases}$

Определить закон распределения и математическое ожидание СВ η .

Решение

а) Если в предыдущей задаче функция $\varphi()$, обратная анализируемому функциональному преобразованию, была очевидной, то в данном случае зависимость $x = \varphi(y)$ будет сравнительно сложной, поэтому начать решение задачи полезно с построения и анализа графика функциональной взаимосвязи

$$y = f(x) = \begin{cases} 16, & \text{при } x \leq -6, \\ (x+2)^2, & \text{при иных } x. \end{cases} \quad (53)$$

Соответствующий (53) график представлен на рис. 20. Из графика следует, что при $x \leq 0$ значения, получаемые в результате преобразования, лежат в диапазоне от 0 до 16, однако различными частям этого диапазона соответствует разное число ветвей в обратной функции.

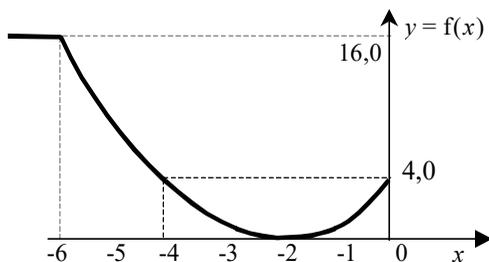


Рис. 20. Функциональная зависимость, анализируемая в задаче 5

б) Значениям $y \in [0; 4]$ соответствует по два возможных аргумента x , определяемых ветвями обратной функции $x_1 = \varphi_1(y) = +\sqrt{y} - 2$ и $x_2 = \varphi_2(y) = -\sqrt{y} - 2$. На данном участке слагаемые, входящие в “сумму по m ” формулы (48) не потребуются, а первая сумма (по ветвям обратной функции) будет

$$\begin{aligned} \text{содержать два слагаемых} \quad W_\eta(y) &= \sum_{i=1}^2 W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| = \\ &= W_\xi(+\sqrt{y} - 2) \cdot \left| +\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + W_\xi(-\sqrt{y} - 2) \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{e^{-2+\sqrt{y}} + e^{-2-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

в) Значениям y , удовлетворяющим неравенству $4 < y < 16$, соответствует единственный аргумент $x = \varphi(y) = -\sqrt{y} - 2$, поэтому вместо полученных в п.’б’ двух слагаемых теперь там останется лишь одно

$$W_\eta(y) = W_\xi(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| = \frac{e^{-2-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

г) И, наконец, горизонтальному участку $y = 16$ соответствует бесконечный по протяженности интервал $x \leq -6$, вероятность попадания в который для СВ ξ определяется интегралом

$$P\{\eta = 16\} = P\{\xi \leq -6\} = \int_{-\infty}^{-6} e^x dx = e^{-6} \approx 0,0025.$$

д) Объединяя результаты, полученные в пп. 'б'-'г', воедино плотность вероятности СВ η можно записать окончательно в виде

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} e^{-2} \left(e^{+\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}} \right) / 2\sqrt{y} & \text{при } 0 \leq y \leq 4 \\ e^{-2-\sqrt{y}} / 2\sqrt{y} + 0,0025 \cdot \delta(y-16) & \text{при } 4 < y \leq 16 \\ 0 & \text{при прочих } y \end{cases}$$

Соответствующий этому выражению график плотности распределения вероятностей представлен на рис. 21.

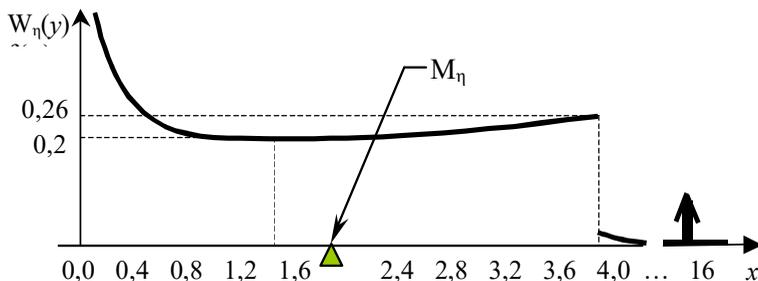


Рис. 21. Плотность вероятности, соответствующая СВ η

е) Следует отметить, что на этот раз вычислять числовые характеристики, руководствуясь соотношением (32), нецелесообразно, т.к. получаемые интегралы оказываются весьма громоздкими (неудобными). Напротив, при использовании формулы (49), дважды применив интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
 M_{\eta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{-6} 16 \cdot e^x dx + \int_{-6}^0 (x+2)^2 \cdot e^x dx = 16 \cdot e^{-6} + (x+2)^2 \cdot e^x \Big|_{-6}^0 \\
 &- \int_{-6}^0 2(x+2) \cdot e^x dx = 16 \cdot e^{-6} + 4 - 16e^{-6} - 2(x+2) \cdot e^x \Big|_{-6}^0 + \int_{-6}^0 2 \cdot e^x dx = \\
 &= 4 - (4 + 8e^{-6}) + 2 \cdot e^x \Big|_{-6}^0 = -8 \cdot e^{-6} + 2 - 2 \cdot e^{-6} = 2 - 10 \cdot e^{-6}.
 \end{aligned}$$

Полученный результат хорошо согласуется с полученной выше плотностью вероятности СВ η , так как согласно рис. 21 координата $y = M_{\eta} \approx 2$ близка к центру масс отображаемой фигуры.

Задача 6. Случайное напряжение, распределенное нормально с параметрами $M_u = 0$ В, $\sigma_u = 1,25$ В, воздействует на нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой (ВАХ), представленной на рис. 22. Определить закон распределения тока, который будет протекать через этот нелинейный элемент.

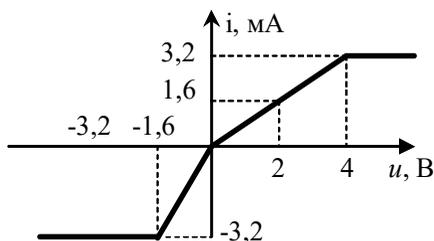


Рис. 22. ВАХ нелинейного элемента из задачи 6

Решение

а) Определим аналитическое выражение для ВАХ нелинейного элемента. Характеристика имеет несколько точек излома, в которых свойства ВАХ скачкообразно изменяются, поэтому каждый кусочно-линейный участок придется проанализировать отдельно.

В соответствии с классическим уравнением прямой для каждого из наклонных участков связь между током и напряжением будет выражаться формулой $i = k \cdot u + b$. Так как оба наклонных участка проходят через начало координат, то для них коэффициент b оказывается нулевым. Угловой же коэффициент

k для участка $0 \leq u \leq 4$ В будет равен $k_+ = 3,2 \text{ мА} / 4 \text{ В} = 0,8 \text{ мА/В}$, а для участка $-1,6 \leq u \leq 0$ В получаем $k_- = -3,2 \text{ мА} / -1,6 \text{ В} = 2 \text{ мА/В}$. Объединяя полученную информацию, ВАХ нелинейного элемента можно представить в виде

$$i = f(u) = \begin{cases} -3,2 & \text{при } u \leq -1,6, \\ 2 \cdot u & \text{при } -1,6 < u \leq 0, \\ 0,8 \cdot u & \text{при } 0 < u \leq 4, \\ +3,2 & \text{при } u > 4. \end{cases} \quad (54)$$

б) Рис. 22, как впрочем и выражение (54), показывает, что ток, который под воздействием случайного напряжения будет протекать через нелинейный элемент, будет принимать значения из интервала от минус 3,2 В до плюс 3,2 В. Верхний и нижний граничные уровни тока по абсолютному значению совпадают, однако вероятности их наблюдения будут отличаться друг от друга

$$\begin{aligned} P\{i = -3,2\} &= P\{u \leq -1,6\} = \int_{-\infty}^{-1,6} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_u^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1,6/\sigma_u} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = F_{\text{ст}}\left(-\frac{1,6}{1,25}\right) \approx 1 - F_{\text{ст}}(1,3) \approx 0,1. \\ P\{i = +3,2\} &= P\{u \geq +4\} = \int_{+4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_u^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+4/\sigma_u}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 1 - F_{\text{ст}}\left(\frac{4}{1,25}\right) \approx 1 - F_{\text{ст}}(3,2) \approx 0,0007. \end{aligned}$$

в) Для значений, лежащих между граничными уровнями, обратная к (54) функция может быть записана в следующем виде:

$$u = f(i) = \begin{cases} i/2 & \text{при } -3,2 < i \leq 0, \\ 1,25 \cdot i & \text{при } 0 \leq i < +3,2. \end{cases} \quad (55)$$

Важно понимать, что кусочно-линейная форма представления выражения (55) указывает лишь на то, что для разных аргументов i значение напряжения u следует рассчитывать по разным правилам. При этом для любого из своих допустимых аргументов эта функция оказывается *однозначной* (существует *единственная*, хотя и представленная двумя отдельными выражениями, ветвь).

В связи со сказанным, для аргументов $y \in (-3,2; +3,2)$ универсальная формула (48) будет представлена лишь единственным слагаемым первого типа

$$\text{для } -3,2 < i \leq 0: W_i(y) = W_u\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{(y/2)^2}{2\sigma_u^2}\right),$$

$$\text{для } 0 \leq i < +3,2: W_i(y) = W_u(1,25 \cdot y) \cdot |1,25| = \frac{1,25}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left(-\frac{(1,25 \cdot y)^2}{2\sigma_u^2}\right).$$

г) Объединяя полученные выше данные, закон распределения тока, наблюдаемого в нелинейном элементе, можно записать в виде

$$W_i(y) = \begin{cases} \frac{1}{2,5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{12,5}\right) + 0,1 \cdot \delta(y + 3,2) & \text{при } -3,2 \leq i \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + 0,0007 \cdot \delta(y - 3,2) & \text{при } 0 \leq i \leq +3,2. \end{cases}$$

2.7. Свойства систем случайных величин

2.7.1. Вероятностные характеристики

Функцией распределения вероятностей (ФРВ) системы случайных величин ξ и η называют функцию $F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$, определяющую вероятность одновременного выполнения двух неравенств

$$F_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P\{\xi \leq x_0, \eta \leq y_0\} \quad (56)$$

(на месте запятой в правой части выражения следует подразумевать союз “и”). С геометрических позиций $F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$ определяет вероятность того, что точка со случайными координатами ξ и η попадет на плоскости в нижнюю левую четверть относительно границ $x = x_0, y = y_0$.

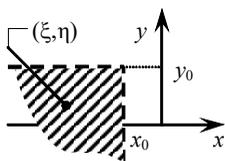


Рис. 23. Геометрический смысл функции распределения вероятностей системы СВ

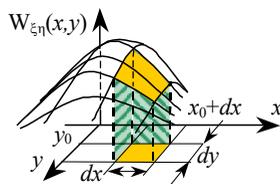


Рис. 24. Плотность распределения вероятностей системы СВ

Как и для отдельных случайных величин, функция распределения вероятностей системы СВ является безразмерной неубывающей функцией всех своих аргументов и принимает значения от нуля до единицы.

Вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в произвольную прямоугольную область может быть рассчитана по формуле

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2; y_1 < \eta \leq y_2\} = F_{\xi\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi\eta}(x_2, y_1) - F_{\xi\eta}(x_1, y_2) + F_{\xi\eta}(x_1, y_1). \quad (57)$$

Плотностью распределения вероятностей (ПРВ) системы случайных величин ξ и η называют функцию $W_{\xi\eta}(x, y)$,

характеризующую вероятность принятия в одном и том же опыте величиной ξ значений, близких к аргументу x , а величиной η значений, близких к аргументу y . Численно она определяется отношением вероятности попадания точек с координатами (ξ, η) в бесконечно малый прямоугольник, лежащий около точки (x, y) (см. выше рис. 24), к площади этого прямоугольника и связана с ФРВ соотношением

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\{x < \xi \leq x + \Delta x, y < \eta \leq y + \Delta y\}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (58)$$

Эта функция неотрицательна и имеет размерность, обратную произведению размерностей величин ξ и η . С ее помощью вероятность попадания точек (ξ, η) в произвольную прямоугольную область может быть рассчитана по правилу

$$P\{a < \xi \leq b, c < \eta \leq d\} = \int_a^b \int_c^d W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (59)$$

Отсюда, в частности, следует, что обратная связь между плотностью и функцией распределения вероятностей имеет вид

$$F_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P\{\xi \leq x_0, \eta \leq y_0\} = \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (60)$$

Свойство нормировки для плотности распределения вероятностей системы случайных величин приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1 \quad (61)$$

и означает, что для любой СВ объем тела под поверхностью ее плотности вероятности всегда равен единице (см. выше рис. 24).

2.7.2. Числовые характеристики

Двумя основными классами числовых характеристик систем СВ являются, во-первых, “смешанный начальный момент порядка k, r ”

$$m_{kr} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^r \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dx dy, \quad (62)$$

а, во-вторых, “смешанный центральный момент порядка k, r ”

$$\mu_{kr} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^k (y - M_\eta)^r \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (63)$$

При $k = 0$ или $r = 0$ формулы (62), (63) преобразуются фактически в (32), (34) и отражают числовые характеристики СВ ξ и η в отдельности. Первой из специфичных именно для систем СВ числовых характеристик является “смешанный момент порядка 1, 1”. Этот момент называют еще корреляцией величин ξ и η

$$B_{\xi\eta} = m_{11} \{ \xi, \eta \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (64)$$

Нормированным аналогом этой характеристики является коэффициент корреляции между величинами ξ и η , определяемый соотношением

$$r_{\xi\eta} = \frac{m_{11} \{ \xi, \eta \} - M_\xi \cdot M_\eta}{\sqrt{D_\xi \cdot D_\eta}}. \quad (65)$$

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной взаимосвязи между величинами ξ и η , входящими в систему. Для любых СВ

$$|r_{\xi\eta}| \leq 1, \quad (66)$$

причем $r_{\xi\eta} = \pm 1$ соответствует жесткой функциональной связи $\eta = k \cdot \xi + b$ (при $k > 0$ $r_{\xi\eta}$ положителен, а при $k < 0$ – отрицателен), значение $0 \leq |r_{\xi\eta}| \leq 1$ свидетельствует о наличии мягкой

вероятностной взаимосвязи между величинами, а $r_{\xi\eta} = 0$ говорит о том, что линейная взаимосвязь между величинами ξ и η отсутствует. Подобные величины называют некоррелированными.

Случайные величины, для которых вероятностные характеристики допускают представление

$$F_{\xi\eta}(x_0, y_0) = F_{\xi}(x_0) \cdot F_{\eta}(y_0) = P\{\xi \leq x_0\} \cdot P\{\eta \leq y_0\}$$

или $W_{\xi\eta}(x_0, y_0) = W_{\xi}(x_0) \cdot W_{\eta}(y_0)$

называют *независимыми*, поскольку значение, принятое в данном опыте одной из случайных величин, никак не влияет на возможность (способность) принятия конкретных значений другой СВ. Для независимых СВ смешанные начальные моменты любых порядков

$$m_{kr}\{\xi, \eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot W_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^r \cdot W_{\eta}(y) dy = m_k\{\xi\} \cdot m_r\{\eta\}. \quad (67)$$

Из (65) и (67) следует, в частности, что независимые случайные величины всегда являются некоррелированными, однако обратное утверждение справедливо далеко не во всех случаях.

2.7.3. Функциональное преобразование систем СВ.

При функциональном преобразовании одной системы СВ $\{\xi_1, \xi_2\}$ в другую $\{\eta_1, \eta_2\}$ правило, определяющее взаимосвязь между их законами распределения, оказывается аналогичным (46), (48) и имеет вид

$$W_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \sum_i W_{\xi_1\xi_2}(\varphi_{i1}(y_1, y_2), \varphi_{i2}(y_1, y_2)) \cdot |J_i|, \quad (68)$$

где $x_1 = \varphi_{i1}(y_1, y_2)$, $x_2 = \varphi_{i2}(y_1, y_2)$ – это обратные к зависимостям $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ функции, позволяющие рассчитать их аргументы по заданным результатам y_1 и y_2 , а последний множитель – это модуль якобиана обратного преобразования, задаваемый определителем

$$J_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial y_2} \end{vmatrix}. \quad (69)$$

Наиболее часто применяемые случаи функционального преобразования системы случайных величин в новую случайную величину приведены в табл. 5.

Таблица 5

Вероятностный смысл отдельных участков плотности распределения вероятностей случайной величины

Вид функциональной связи	Взаимосвязь законов распределения
$\eta = \xi_2 + \xi_1$	$W_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(u, y-u) du$
$\eta = \xi_2 - \xi_1$	$W_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(u, y+u) du$
$\eta = \xi_2 \cdot \xi_1$	$W_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}\left(u, \frac{y}{u}\right) \frac{du}{ u }$
$\eta = \xi_2 / \xi_1$	$W_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(u, y \cdot u) \cdot u du$
$\eta = \min(\xi_2, \xi_1)$	$F_\eta(y) = F_{\xi_1}(y) + F_{\xi_2}(y) - F_{\xi_1 \xi_2}(y, y) \quad (70)$ $W_\eta(y) = \int_y^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(y, x_2) dx_2 + \int_y^{+\infty} W_{\xi_1 \xi_2}(x_1, y) dx_1$
$\eta = \max(\xi_2, \xi_1)$	$F_\eta(y) = F_{\xi_1 \xi_2}(y, y) \quad (71)$ $W_\eta(y) = \int_{-\infty}^y W_{\xi_1 \xi_2}(y, x_2) dx_2 + \int_{-\infty}^y W_{\xi_1 \xi_2}(x_1, y) dx_1$

Примеры решения задач

Задача 1. Функция распределения вероятностей для системы случайных величин $\{\xi, \eta\}$ имеет вид

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y & \text{при } 0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2, \\ 0 & \text{при прочих } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины в прямоугольник, ограниченный прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/4$, $y_1 = \pi/6$, $y_2 = \pi/3$.

Решение

а) Данная задача очень проста и требует лишь непосредственного применения формулы (57)

$$P\{0 < \xi \leq \pi/4, \pi/6 < \eta \leq \pi/3\} = \sin(\pi/4) \cdot \sin(\pi/3) - \sin(\pi/4) \cdot \sin(\pi/6) -$$

$$- \sin(0) \cdot \sin(\pi/3) + \sin(0) \cdot \sin(\pi/6) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 \approx 0,26.$$

Задача 2. Система случайных величин $\{\xi, \eta\}$ характеризуется плотностью вероятности

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}. \quad (72)$$

Определить величину A , функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ и вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$.

Решение

а) С геометрических позиций плотность вероятности системы двух случайных величин представляет собой некоторую поверхность над плоскостью своих аргументов x и y . Стоящая в числителе дроби (72) константа A регулирует высоту этой поверхности. Вместе с тем свойство нормировки плотности вероятности (61) утверждает, что объем тела, заключенного под поверхностью плотности вероятности не может

быть произвольным, но обязан равняться единице. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)} dx dy = \frac{A}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(3+x^2)} = \\ &= \frac{A}{\pi^2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A}{\pi^2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \pi \cdot \pi = \frac{A}{\sqrt{3}} = 1, \end{aligned}$$

в результате чего для константы A получаем $A = \sqrt{3}$.

б) Функцию распределения системы $\{\xi, \eta\}$ по ее плотности можно определить на основании (60)

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(x_0, y_0) &= \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{(1+y^2)} \cdot \int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(3+x^2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(y) \Big|_{-\infty}^{y_0} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{-\infty}^{x_0} = \left(\frac{\operatorname{arctg}(y_0)}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg}(x_0/\sqrt{3})}{\pi} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

в) Наконец, вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в квадрат, ограниченный прямыми $x=0, y=0, x=1, y=1$, определяем на основании (59)

$$\begin{aligned} P\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\} &= \int_0^1 \int_0^1 W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2)} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{(3+x^2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(y) \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{arctg}(1)}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})}{\pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = 0,0417. \end{aligned}$$

Задача 3. Дискретные независимые случайные величины ξ и η заданы своими рядами распределения

 $\xi:$

x_i	1	3
$p(x_i)$	0,3	0,7

 $\eta:$

y_j	2	4
$p(y_j)$	0,6	0,4

Найти распределение величины $\zeta = \xi + \eta$.

Решение

а) Запишем возможные значения СВ ζ :

$$z_1 = x_1 + y_1 = 3; \quad z_2 = x_1 + y_2 = 5; \quad z_3 = x_2 + y_1 = 5; \quad z_4 = x_2 + y_2 = 7.$$

Вероятности появления каждого из перечисленных значений, с учетом взаимной независимости величин ξ и η , подчиняются соотношениям

$$P\{\zeta = z_1\} = P\{\xi = x_1\} \cdot P\{\eta = y_1 \mid \xi = x_1\} = P\{\xi = x_1\} \cdot P\{\eta = y_1\} = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18.$$

$$P\{\zeta = z_2\} = P\{\xi = x_1\} \cdot P\{\eta = y_2\} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12.$$

$$P\{\zeta = z_3\} = P\{\xi = x_2\} \cdot P\{\eta = y_1\} = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42.$$

$$P\{\zeta = z_4\} = P\{\xi = x_2\} \cdot P\{\eta = y_2\} = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

б) Принятие случайной величиной ζ значений z_2 и z_3 – это два несовместных события, однако поскольку $z_2 = z_3 = 5$, то величина ζ принимает значение “5” **или** когда наблюдаются “ x_1 вместе с y_2 ”, **или** когда наблюдаются “ x_2 вместе с y_1 ”. В соответствии с (8) получаем

$$P\{\zeta = 5\} = P\{\zeta = z_2\} + P\{\zeta = z_3\} = 0,12 + 0,42 = 0,54.$$

в) Объединяя полученные вероятности в ряд распределения случайной величины ζ , получаем:

$\zeta:$	z_i	3	5	7
	$p(z_i)$	0,18	0,54	0,28

Задача 4. Случайные величины ξ и η распределены по закону Пуассона

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda_\xi^k}{k!} \exp(-\lambda_\xi),$$

$$P\{\eta = m\} = \frac{\lambda_\eta^m}{m!} \exp(-\lambda_\eta).$$

Найти закон распределения их суммы $\zeta = \xi + \eta$.

Решение

а) Будем рассуждать по аналогии с предыдущей задачей. Каждому целочисленному значению n выходной СВ ζ можно поставить в соответствие $n+1$ вариант его получения, а именно: “ $\xi = 0$ и $\eta = n$ ” или “ $\xi = 1$ и $\eta = n - 1$ ” и т.д. вплоть до “ $\xi = n$ и $\eta = 0$ ”. Все перечисленные варианты представляют собой несовместные события, поэтому для расчета вероятности появления значения $\zeta = n$ можно вновь воспользоваться (8)

$$\begin{aligned} P\{\zeta = n\} &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{\xi}^k}{k!} \exp(-\lambda_{\xi}) \cdot \frac{\lambda_{\eta}^{n-k}}{(n-k)!} \exp(-\lambda_{\eta}) = \\ &= \frac{\exp(-\lambda_{\xi}) \cdot \exp(-\lambda_{\eta})}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \cdot \frac{\lambda_{\xi}^k \cdot \lambda_{\eta}^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\exp(-(\lambda_{\xi} + \lambda_{\eta}))}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \lambda_{\xi}^k \cdot \lambda_{\eta}^{n-k}. \end{aligned}$$

Учитывая, что образовавшаяся сумма есть не что иное, как бином Ньютона, окончательно получаем

$$P\{\zeta = n\} = \frac{(\lambda_{\xi} + \lambda_{\eta})^n}{n!} \cdot e^{-(\lambda_{\xi} + \lambda_{\eta})}.$$

Таким образом, СВ ζ имеет также пуассоновское распределение, но с интенсивностью потока событий $\lambda_{\zeta} = \lambda_{\xi} + \lambda_{\eta}$.

Задача 5. Функция распределения вероятностей для системы случайных величин $\{\xi, \eta\}$ имеет вид

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} x \cdot \sin(\pi y / 6) + y \cdot \sin(\pi x / 6) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{при прочих } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции между величинами ξ и η , плотности вероятности для максимальной и минимальной из них, а также законы распределения суммы и разности этих величин.

Решение

а) Определим плотности вероятности для системы случайных величин $\{\xi, \eta\}$ в целом и для каждой из величин, входящих в систему, по отдельности

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}}{\partial x \cdot \partial y} = [\cos(\pi x / 6) + \cos(\pi y / 6)] \cdot \pi / 6 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(x, 1) = x / 2 + \sin(\pi x / 6), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$W_{\xi}(x) = \frac{\partial F_{\xi}(x)}{\partial x} = 1/2 + \cos(\pi x / 6) \cdot \pi / 6, \quad 0 \leq x \leq 1$$

и, по аналогии,

$$F_{\eta}(y) = y / 2 + \sin(\pi y / 6), \quad W_{\eta}(y) = 1/2 + \cos(\pi y / 6) \cdot \pi / 6, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

б) Чтобы в дальнейшем воспользоваться формулой (65), рассчитаем предварительно числовые характеристики для каждой из величин, входящих в систему

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx + \frac{\pi}{6} \cdot \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x / 6) dx.$$

Последний интеграл в этой сумме несложен, но можно и не тратить на его расчет лишнее время, взяв готовый результат в справочнике или, например, в приложении 2 (П2). В результате получим

$$M_{\xi} = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{\cos(\pi x / 6)}{(\pi / 6)^2} + \frac{x \cdot \sin(\pi x / 6)}{(\pi / 6)} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{6}{\pi} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \approx 0,494.$$

Аналогично, используя (П3) из приложения 2, для дисперсии имеем

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= m_2 \{ \xi \} - M_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot W_{\xi}(x) dx - M_{\xi}^2 = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \frac{\pi}{6} \cdot \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx - \\ &- M_{\xi}^2 = \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos(\pi x / 6)}{(\pi / 6)^2} + \left[\frac{x^2}{(\pi / 6)} - \frac{2}{(\pi / 6)^3} \right] \cdot \sin(\pi x / 6) \right) \Big|_0^1 - M_{\xi}^2 = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{6}{\pi} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{2}{(\pi / 6)^2} \right] - 0,494^2 = \frac{1}{6} + 3,308 - 3,1476 - 0,244 = 0,083. \end{aligned}$$

Так как распределение величины η отличается от распределения ξ лишь формальным обозначением аргумента плотно-

сти вероятности, то, очевидно, ее числовые характеристики будут точно такими же

$$M_{\eta} = 0,494, \quad D_{\eta} = 0,083.$$

в) Корреляция случайных величин ξ и η определяется (64), что можно записать в виде

$$m_{11}\{\xi, \eta\} = \frac{\pi}{6} \cdot \left\{ \int_0^1 y \, dy \cdot \int_0^1 x \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx + \int_0^1 x \, dx \cdot \int_0^1 y \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{6}\right) dy \right\}.$$

Учитывая схожесть слагаемых в этой сумме, будем учитывать лишь одно из них, удваивая результат

$$m_{11}\{\xi, \eta\} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \left(\frac{\cos(\pi x / 6)}{(\pi / 6)^2} + \frac{x \cdot \sin(\pi x / 6)}{(\pi / 6)} \right) \Big|_0^1 = \frac{6}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \approx 0,244.$$

Применяя к полученному результату (65), получим

$$r_{\xi\eta} = \frac{0,494 - 0,244^2}{0,083} \approx 4,3 \cdot 10^{-4},$$

откуда следует, что входящие в систему величины практически некоррелированы.

г) Закон распределения максимальной из величин ξ и η следует искать на основе соотношения (71), которое принимает вид

$$W_{\eta}(y) = \frac{\pi}{6} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^y \left[\cos\left(\frac{\pi y}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{6}\right) \right] dx_2 + \int_{-\infty}^y \left[\cos\left(\frac{\pi x_1}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{6}\right) \right] dx_1 \right\}.$$

И вновь, опираясь на схожесть слагаемых в этой сумме, получаем

$$W_{\max}(y) = \frac{\pi}{3} \cdot y \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{6}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{6}\right), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Аналогично, на основе (70) несложно показать, что минимальная из анализируемых величин, обладает плотностью вероятности

$$W_{\min}(y) = \frac{\pi}{3} \cdot (1 - y) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{6}\right) + \left[1 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{6}\right) \right], \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Полученные плотности вероятности вместе с характеристиками самих величин ξ и η представлены на рис. 25.

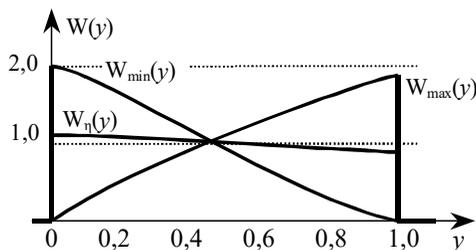


Рис. 25. ПРВ для величин, входящих в систему СВ из задачи 5, а также для максимальной и минимальной из них

Задача 6. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены равномерно на интервале $[0; 1]$. Случайные величины η_1 и η_2 образуются из ξ_1 и ξ_2 путем функциональных преобразований

$$\eta_1 = a + \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_2} \cdot \cos(2\pi \xi_1), \quad \eta_2 = a + \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_2} \cdot \sin(2\pi \xi_1). \quad (73)$$

Показать, что случайные величины η_1 и η_2 являются независимыми нормально распределенными с математическим ожиданием a и эффективным значением σ .

Решение

а) Поставив в соответствие случайным величинам ξ_i и η_i принимаемые ими значения x_i и y_i , соотношения (73) можно переписать в виде

$$\sigma \sqrt{-2 \ln x_2} \cdot \cos(2\pi x_1) = y_1 - a, \quad \sigma \sqrt{-2 \ln x_2} \cdot \sin(2\pi x_1) = y_2 - a,$$

откуда несложно найти правила $x_1 = \varphi(y_1, y_2)$ и $x_2 = \psi(y_1, y_2)$, позволяющие по значениям y_i результатов преобразования (73) найти соответствующие им значения аргументов x_i

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \arctg\left(\frac{y_2 - a}{y_1 - a}\right), \quad x_2 = \varphi_2(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{(y_2 - a)^2 + (y_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

б) Для применения формулы (69) вычислим предварительно частные производные от найденных функций φ_i по каждому из аргументов y_i

$$\frac{\partial \varphi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(y_2 - a)}{(y_1 - a)^2} \Bigg/ \frac{1 + \left(\frac{y_2 - a}{y_1 - a}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(y_2 - a)}{(y_1 - a)^2 + (y_2 - a)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} = -\frac{(y_1 - a)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(y_2 - a)^2 + (y_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(y_1 - a)} \Bigg/ \frac{1 + \left(\frac{y_2 - a}{y_1 - a}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(y_1 - a)}{(y_1 - a)^2 + (y_2 - a)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} = -\frac{(y_2 - a)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(y_2 - a)^2 + (y_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Полученный ряд выражений позволяет записать якобиан исследуемого преобразования в виде

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(y_2 - a)^2 + (y_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{(y_1 - a)^2 + (y_2 - a)^2}{(y_1 - a)^2 + (y_2 - a)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(y_2 - a)^2 + (y_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

в) Найденные в п.(а) выражения $x_1 = \varphi(y_1, y_2)$ и $x_2 = \varphi(y_1, y_2)$ являются однозначными (т.е. обратное к (73) преобразование включает единственную ветвь), а получаемые при любых y_1 и y_2 значения x_1 и x_2 лежат между нулем и едини-

цей, поэтому для произвольных y_1 и y_2 справедливо $W_{\xi_1 \xi_2}(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) = 1$. В итоге, применяя (68), получаем

$$W_{\eta_1 \eta_2}(y_1, y_2) = W_{\xi_1 \xi_2}(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) \cdot |J| = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(y_2 - a)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(y_1 - a)^2}{2\sigma^2}\right) = W_{\eta_1}(y_1) \cdot W_{\eta_2}(y_2).$$

Итак, совместная плотность вероятности для величин η_1 и η_2 может быть записана в виде произведения их частных плотностей вероятности (что доказывает взаимную независимость данных СВ), каждая из которых соответствует нормальной СВ с математическим ожиданием a и эффективным значением σ .

2.8. Классификация случайных процессов

Случайный процесс (СП) – это численное выражение некоторого явления, протекающего во времени случайным образом. Детерминированные функции, отражающие развитие процесса в отдельном конкретном опыте, называются его реализациями. Таким образом, случайный процесс $\xi(t)$ можно представлять себе как совокупность всех его возможных реализаций $\xi^{(1)}(t), \xi^{(2)}(t), \dots, \xi^{(n)}(t)$.

Случайные процессы, свойства которых изменяются во времени произвольным образом, называются нестационарными. Процессы, свойства которых не зависят от момента начала отсчета времени и остаются неизменными вдоль всей временной оси, называются стационарными. Наконец, стационарные процессы, состоящие лишь из однотипных реализаций, называются эргодическими. (Более строгие определения различных классов СП можно найти в [3, 4], но для решения практических задач важнее обратить внимание на особенности “поведения” характеристик процессов различных классов).

2.8.1. Одномерная функция распределения СП

Для процессов общего вида (нестационарных) одномерная функция распределения характеризует вероятность наблюдения реализаций СП, проходящих в заданный момент времени t ниже заданного порога x

$$F_{\xi}(x; t) = P \{ \xi(t) \leq x \}. \quad (74)$$

У стационарных процессов подобная вероятность остается неизменной вдоль всей временной оси, а потому аргумент t оказывается избыточным

$$F_{\xi}(x; t) = F_{\xi}(x). \quad (75)$$

И, наконец, для процессов эргодических эта вероятность проявляет себя в виде среднего времени, которое каждая из реализаций данного СП проводит ниже уровня x

$$F_{\xi}(x; t) = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{T_{\left[\xi^{(i)}(t) \leq x \right]}}{T_{\text{набл}}}. \quad (76)$$

Следует иметь в виду, что по отношению к аргументу x остаются справедливыми все свойства функция распределения, разобранные в разделе 2.4. Что же касается аргумента t , то в расчетных формулах он не участвует, выступая лишь как “внешний” параметр, определяющий к какому моменту времени относятся анализируемые характеристики.

2.8.2. Одномерная плотность вероятностей СП

Одномерная плотность вероятностей характеризует возможность наблюдения реализаций СП, в заданный момент времени t принимающих значения близкие к аргументу x и определяется отношением вероятности попадания значений реализации процесса $\xi(t)$ в бесконечно малую окрестность аргумента x к ширине этой окрестности

$$W_{\xi}(x;t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi(t) \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{\partial W_{\xi}(x;t)}{\partial x}. \quad (77)$$

И вновь для стационарных процессов аргумент t в (77) может быть опущен, а для каждой реализации эргодического СП плотность вероятности будет показывать отношение частоты наблюдения значений из интервала $[x; x + \Delta x]$ к ширине этого интервала Δx

$$W_{\xi}(x;t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T_{\text{набл}} \rightarrow \infty}} \frac{T[x \leq \xi^{(i)}(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x \cdot T_{\text{набл}}}. \quad (78)$$

2.8.3. Математическое ожидание СП

Для процессов общего вида характеризует зависимость от времени среднего арифметического значений разных реализаций, наблюдаемых в момент t ,

$$M_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x;t) dx. \quad (79)$$

Среднее значение определяется применительно ко всей совокупности возможных реализаций.

Свойства стационарных процессов остаются неизменными вдоль всей временной оси, поэтому математическое ожидание таких процессов является константой по отношению к аргументу t . Для эргодических процессов эта константа совпадает со средним по времени значением – постоянной составляющей – любой из реализаций

$$M_{\xi}(t) = M_{\xi} = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)}. \quad (80)$$

2.8.4. Дисперсия случайного процесса

Характеризует разброс значений, принадлежащих различным реализациям, относительно математического ожидания

$$D_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi}(t))^2 \cdot W_{\xi}(x;t) dx. \quad (81)$$

Для стационарных СП дисперсия от времени не зависит, а для процессов эргодических она совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций СП

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi} = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} (\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)})^2 dt = P_{\sim \xi^{(i)}}. \quad (82)$$

Полезно иметь в виду, что определяемые (76), (78), (80), (82) свойства являются проявлением единого принципа: любая характеристика эргодического СП может быть получена путем соответствующего усреднения по времени (на интервале бесконечной протяженности) произвольной реализации этого процесса. Тот же самый принцип можно выразить и иначе: для эргодических процессов “среднее по времени” любой из реализаций совпадает со “средним по ансамблю реализаций процесса”.

Примеры решения задач

Задача 1. Случайное напряжение характеризуется плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x;t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-2 \cdot t)^2}{4}\right\}, \quad 1/V. \quad (83)$$

Каковы возможные реализации данного случайного процесса?

Решение

а) Отметим сразу, что имеющейся в данной задаче информации о процессе $\xi(t)$ недостаточно для прогнозирова-

ния формы его реализаций, т.к. одномерная плотность вероятности (83) характеризует ситуацию лишь в отдельных временных сечениях, но не содержит сведений о динамичности изменения процесса во времени. Таким образом, может существовать огромное множество процессов с существенно отличающимися реализациями, соответствующих (83).

б) Определяемый (83) закон распределения соответствует нормальной (гауссовской) плотности вероятности

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}. \quad (84)$$

с параметрами $a = 2 \cdot t$ (В), $\sigma = 2$ (В). Параметр a изменяется во времени, что указывает на нестационарный характер исследуемого процесса. Так как параметр a определяет математическое ожидание нормального распределения, то характерной особенностью реализаций исследуемого СП будет линейное

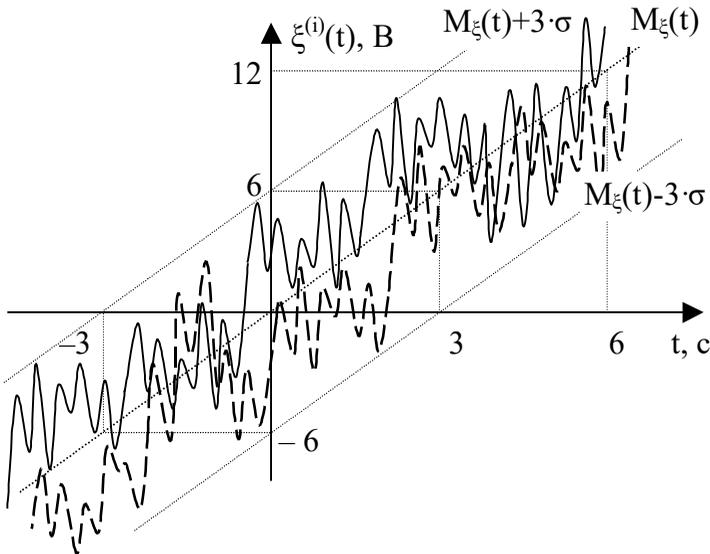


Рис. 26. Возможные реализации СП из задачи 1

нарастание их среднего значения с течением времени $M_{\xi}(t) = 2 \cdot t$ (В). Несколько подобных функций – возможных реализаций процесса $\xi(t)$ – показано на рис. 26. При их построении было учтено правило “3 сигм”, утверждающее, что для подавляющего большинства случайных величин (процессов) мгновенные значения могут отклоняться от математического ожидания не более чем на три эффективных значения σ .

Задача 2. Реализации эргодического СП, представляют собой последовательность однополярных импульсов напряжения с амплитудой $U = 3$ В (рис. 27). Ширина и положение импульсов на оси времени изменяются хаотично, но среднее время, суммарно занимаемое импульсами каждой реализации, составляет 40 %. Какой дисперсией будет характеризоваться данный СП в момент времени $t = 5$ мс?

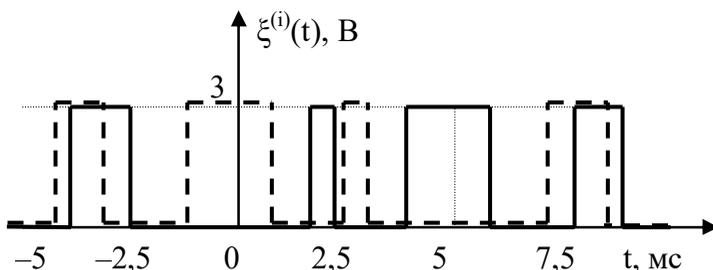


Рис. 27. Возможные реализации СП из задачи 2

Решение

а) Особенностью данной задачи является тот факт, что существует всего 2 возможных (наблюдаемых) значения СП: нулевое и амплитудное. Среднее время, занимаемое импульсами, определяет вероятность появления амплитудного значения $P\{\xi(t) = U\} = 0,40$. Соответственно, вероятность пребывания процесса на нулевом уровне составляет $P\{\xi(t) = 0\} = 0,60$.

б) Эргодичность случайного процесса $\xi(t)$ гарантирует его стационарность, т.е. неизменность свойств СП вдоль временной оси. Таким образом, в каждом своем сечении анали-

зируемый СП ведет себя как дискретная случайная величина, характеризуемая рядом распределения

$$\xi(t) :$$

x_i	0	3
p_i	0,6	0,4

Вследствие этого формулы, определяющие числовые характеристики анализируемого СП, оказываются идентичными аналогичным выражениям для дискретной случайной величины

$$M_\xi = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ (В)}$$

$$D_\xi = \sum_i (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i = (0-1,2)^2 \cdot 0,6 + (3-1,2)^2 \cdot 0,4 = 2,16 \text{ (В}^2\text{)}$$

Величина $D_\xi = 2,16 \text{ В}^2$ и будет дисперсией анализируемого СП.

Задача 3. Эргодический случайный процесс $u(t)$ состоит из реализаций, которые в случайные моменты времени перепрыгивают с уровня $u(t) = +A$ на уровень $u(t) = -A$, а затем – обратно. Среднее время пребывания на высоком и низком уровнях – совпадают, а средняя мощность реализаций составляет 16 В^2 . Записать аналитическое выражение для одномерной плотности вероятности данного процесса.

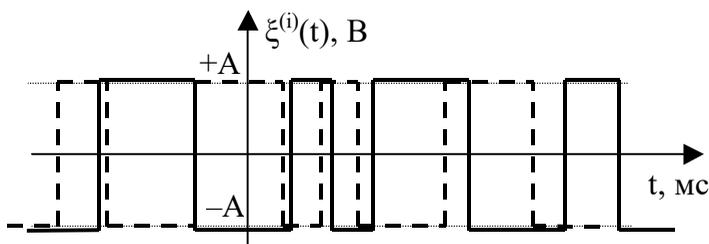


Рис. 28. Возможные реализации СП из задачи 3

Решение

а) Как и в предыдущей задаче, крайне важным оказывается то, что существует всего 2 возможных (наблюдаемых) зна-

чения СП: положительное и отрицательное. Это делает единственно возможной плотность вероятности вида (рис. 29)

$$W_{\xi}(x) = 0,5 \cdot \delta(x + A) + 0,5 \cdot \delta(x - A). \quad (85)$$

Два коэффициента по 0,5 соответствуют здесь вероятностям пребывания процесса на высоком и низком уровнях.

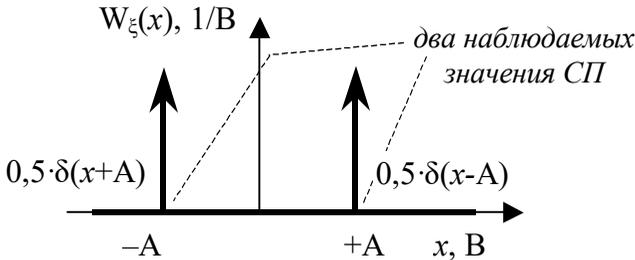


Рис. 29. Плотность вероятности СП из задачи 3

б) Так как процесс $\xi(t)$ – эргодический, то его математическое ожидание не может зависеть от времени, а симметричность полученной выше плотности вероятности относительно точки $x = 0$ указывает на то, что это математическое ожидание является нулевым $M_{\xi} = 0$ (В).

в) Для эргодических СП дисперсия совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций. Т.к. $M_{\xi} = 0$, то постоянная составляющая любой из реализаций исследуемого СП равна нулю, поэтому средняя мощность всего процесса совпадает с мощностью его переменной составляющей. Итак, $D_{\xi} = 16$ (В²).

С другой стороны, выражая дисперсию через полученную выше плотность вероятности, имеем

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^2 \cdot W_{\xi}(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5 \cdot \delta(x + A) \cdot dx + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5 \cdot \delta(x - A) \cdot dx = 0,5 \cdot (-A)^2 + 0,5 \cdot (-A)^2 = A^2.$$

Таким образом, неизвестная ранее амплитуда A обязана равняться 4 (В).

г) Итак, плотность вероятности исследуемого СП имеет вид $W_{\xi}(x) = 0,5 \cdot \delta(x + 4) + 0,5 \cdot \delta(x - 4)$, (1/В).

Задача 4. Реализации нормального эргодического случайного процесса обладают постоянной составляющей $U_{-} = -3$ (В) и полной средней мощностью $P_{\xi(t)} = 13$ (В²). Какова частота наблюдения положительных мгновенных значений этого случайного напряжения?

Решение

а) Упомянутый в условии нормальный характер случайного процесса означает, что его плотность вероятности имеет вид (27) и характеризуется двумя параметрами a и σ . Эргодичность же процесса означает, что его постоянная составляющая $U_{-} = M_{\xi} = a$, а полная средняя мощность $P_{\xi(t)} = m_2\{\xi\} = \sigma^2_{\xi} + M^2_{\xi}$. Подставляя численные значения из условия, имеем

$$a = -3 \text{ (В)}, \quad \sigma = 2 \text{ (В)}.$$

б) Из эргодичности процесса следует также и что частота наблюдения каких-либо напряжений определяется вероятностью их попадания в соответствующий интервал значений

$$P\{\xi(t) > 0\} = 1 - P\{\xi(t) \leq 0\} = 1 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x+3)^2}{8}} dx.$$

Интеграл от нормальной плотности вероятности в элементарных функциях не выражается, поэтому для расчета вероятности появления положительных напряжений вновь воспользуемся таблицей из приложения 1

$$P\{\xi(t) > 0\} = 1 - \int_{-\infty}^{1,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - F_{CT}(1,5) = 1 - 0,9331 \approx 0,067.$$

2.9 Энергетические характеристики случайных процессов

Двумя наиболее часто используемыми энергетическими характеристиками случайного процесса являются корреляционная функция и спектральная плотность мощности.

2.9.1. Корреляционная функция численно определяется величиной взаимной корреляции значений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int x_1 \cdot x_2 \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (86)$$

Для стационарных случайных процессов, свойства которых не изменяются вдоль оси времени, она зависит лишь от продолжительности временного интервала между контролируемыми моментами времени $\tau = t_2 - t_1$ и характеризует степень линейной взаимосвязи между двумя значениями, разнесенными во времени на интервал τ . Как следствие,

Ниже перечислены наиболее важные свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса.

1. $B_{\xi}(\tau)$ является четной функцией аргумента τ .
2. $B_{\xi}(\tau)$ имеет размерность квадрата случайной величины, т.е., в частности, V^2 - для напряжения и A^2 - для тока.
3. Значение, принимаемое корреляционной функцией в начале координат равно второму начальному моменту процесса $\xi(t)$,

$$B_{\xi}(0) = m_2 \{ \xi(t) \} \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t)]^2 dt, \quad (87)$$

что для эргодических случайных процессов соответствует полной средней мощности любой из реализаций процесса.

4. Для процессов с нулевым математическим ожиданием

$$B_{\xi}(0) = D_{\xi} \rightarrow P_{\xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)}]^2 dt, \quad (88)$$

и характеризует мощность переменной составляющей реализаций.

5. Так как взаимозависимость значений в разные моменты времени не может быть больше, чем в совпадающие, то значения, принимаемые при $\tau \neq 0$, не могут превышать $B_{\xi}(0)$

$$B_{\xi}(0) \geq |B_{\xi}(\tau)|, \quad \tau \neq 0. \quad (89)$$

6. Корреляционные функции СП подчиняются теореме Винера-Хинчина, о которой будет говориться в п. 2.9.3.

2.9.2. Спектральная плотность мощности случайного процесса определяется выражением

$$S_{\xi}(f) = m_1 \left\{ \lim_i \frac{1}{T} \left| \dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) \right|^2 \right\}, \quad (90)$$

где $\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(i)}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$ - комплексные спек-

тральные плотности отдельных реализаций процесса $\xi(t)$.

Спектральная плотность мощности характеризует среднее распределение мощности реализаций вдоль оси частот.

Наиболее важные свойства спектральной плотности мощности состоят в следующем.

1. $S_{\xi}(f)$ является четной (двухсторонней) функцией частоты f и принимает неотрицательные действительные значения.

2. $S_{\xi}(f)$ характеризует мощность, приходящуюся на каждый герц оси частот, и для напряжений имеет размерность $V^2/\text{Гц}$, а для токов - $A^2/\text{Гц}$.

3. Если реализации процесса $\xi(t)$ обладают дискретными спектральными составляющими, то спектральная плотность мощности на этих частотах выражается δ -функциями. В частности, для процессов с ненулевым математическим ожиданием

$$\begin{aligned} S_{\xi}(f) &= S_{\xi_{\sim}}(f) + M_{\xi}^2 \cdot \delta(f), \\ S_{\xi}(\omega) &= S_{\xi_{\sim}}(\omega) + 2\pi \cdot M_{\xi}^2 \cdot \delta(\omega). \end{aligned} \quad (91)$$

4. Полная средняя мощность реализаций случайного процесса $\xi(t)$ может быть определена путем интегрирования спектральной плотности мощности вдоль всей оси частот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = m_2 \{\xi(t)\} = D_{\xi} + M_{\xi}^2 \rightarrow P_{\text{полн}\xi^{(i)}}. \quad (92)$$

5. Спектральная плотность мощности подчиняется теореме Винера-Хинчина.

2.9.3. Теорема Винера-Хинчина утверждает: “Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса связаны интегральным преобразованием Фурье”

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau, \quad (93)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} df. \quad (94)$$

Выражения (93), (94) являются лишь одним из многих возможных вариантов записи теоремы Винера-Хинчина. Так, с учетом четности обеих функций, оказываются справедливыми варианты записи приведенные ниже

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau, \quad (95)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega. \quad (96)$$

Следствием теоремы Винера-Хинчина является свойство положительной определенности корреляционной функции случайного процесса. Положительная определенность означает, что корреляционной функцией может быть лишь такая четная функция аргумента τ , преобразование Фурье от которой неотрицательно на всех частотах.

2.9.4. Ширина спектра и интервал корреляции случайного процесса

Практической шириной спектра случайного процесса $\xi(t)$ называют величину

$$\text{Ш}_f = \frac{1}{\max_f S_\xi(f)} \cdot \int_0^{+\infty} S_\xi(f) df. \quad (97)$$

Смысл этого определения состоит в том, что если взять процесс $\eta(t)$ с прямоугольным спектром, ширина которого в области положительных частот равна Ш_f , а максимальное значение совпадает с максимумом $S_\xi(f)$, то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будут обладать одинаковыми средними мощностями (рис. 30).

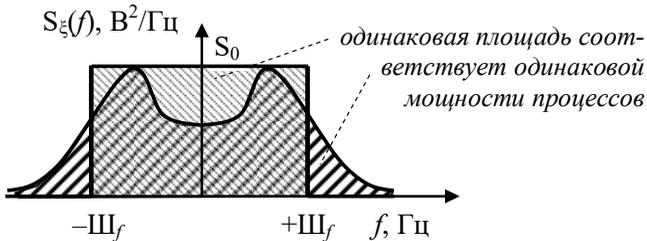


Рис. 30. Определение практической ширины спектра СП

Интервалом корреляции случайного процесса $\xi(t)$ называют величину

$$\tau_k = \frac{1}{B_\xi(0)} \cdot \int_0^{+\infty} |B_\xi(\tau)| d\tau. \quad (98)$$

За счет наличия модуля в подынтегральном выражении интервал корреляции определяется скоростью убывания абсолютных значений корреляционной функции и характеризует временной интервал предсказуемости значений случайного процесса. В соответствии со свойствами преобразования Фурье малый интервал корреляции соответствует процессам с широким спектром и быстро изменяющимися реализациями. Напротив, процессы с большим интервалом корреляции име-

ют узкий спектр и изменяются медленно, оставаясь достаточно предсказуемыми на протяжении значительного интервала времени. Наконец, периодические процессы обладают периодическими корреляционными функциями и бесконечным интервалом корреляции, т.к. их значения (формально) точно воспроизводятся и через бесконечное число периодов.

Для процессов с неотрицательной (при всех τ) корреляционной функцией и максимумом спектра на нулевой частоте между шириной спектра и интервалом корреляции существует жесткое соответствие

$$\text{Ш}_f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_\xi(f)}{S_\xi(0)} df = \frac{m_2\{\xi\}}{2 \cdot S_\xi(0)} = \frac{B_\xi(0)}{2 \cdot \left(2 \cdot \int_0^{+\infty} B_\xi(\tau) d\tau \right)} = \frac{1}{4 \cdot \tau_k}. \quad (99)$$

2.9.5. Понятие белого шума и его практическое применение

Белым шумом называется случайный процесс, спектральная плотность мощности которого остается постоянной на всех частотах $S_\xi(f) = N_0$. Корреляционная функция такого

процесса имеет вид $B_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega = N_0 \cdot \delta(\tau)$, т.е.

его сколь угодно близко расположенные отсчеты не коррелированы. Иначе говоря, значение белого шума невозможно предсказать в момент t_2 , даже сколь угодно близкий к отсчету $\xi(t_1)$. Следует иметь в виду, что белый шум – это абстрактная математическая модель и в реальности не встречается, т.к. он должен был бы обладать бесконечной средней мощностью.

Полезность понятия белого шума заключается в том, что для наблюдения и обработки случайных процессов в радиотехнике используются реальные цепи, обладающие конечной полосой пропускания, а ширина спектра многих реально существующих шумов существенно превышает эту полосу пропускания, так что по отношению к используемым устройствам обработки реальные шумы вполне допустимо считать белыми.

Подобная ситуация характерна, например, для дробового и теплового шума.

Дробовой шум обусловлен дискретной структурой тока (произвольным количеством зарядов, смещающихся в сечении проводника в конкретный момент времени). Более всего дробовой шум проявляется в усилительных приборах (электронной лампе, транзисторах), где ток образуется относительно небольшим числом заряженных частиц. Ширина спектра дробового шума определяется геометрией усилительного элемента, временем пролета электронов и обычно многократно превышает пропускание реальных устройств.

$$S_j(\omega) = e \cdot I_0 \quad \text{при } |\omega| < \tau_e, \quad (100)$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ К (заряд электрона), I_0 - постоянная составляющая тока, τ_e - длительность броска тока, обусловленного переносом заряда одного электрода.

Тепловой шум порождается хаотическим движением электронного газа в проводящих средах и проявляется в форме случайного изменения разности потенциалов на зажимах резистивных элементов. Это случайное напряжение характеризуется спектральной плотностью мощности

$$S_u(\omega) = 2 \cdot k \cdot T \cdot R, \quad (101)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/(Гц*Град) - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура по Кельвину, R - сопротивление резистивного элемента в омах.

Примеры решения задач

Задача 1. Реализации эргодического случайного процесса $\xi(t)$ были записаны на магнитофонную ленту. В результате воспроизведения записей с удвоенной скоростью образовался новый процесс $\eta(t)$. Сопоставить энергетические характеристики процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Решение

а) Исходя из способа получения СП $\eta(t)$ можно прийти к выводу, что все его реализации обязаны быть однотипными,

а сам процесс – относиться к классу эргодических. Корреляционную функцию эргодического СП можно искать как среднюю по времени величину произведения двух разнесенных по времени на интервал τ значений этого процесса

$$B_{\eta}(\tau) = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \eta^{(i)}(t) \cdot \eta^{(i)}(t - \tau) dt. \quad (102)$$

Вместе с тем, реализации СП $\eta(t)$ образуются из реализаций процесса $\xi(t)$ по правилу $\eta(t) = \xi(2 \cdot t)$. Подставляя это соотношение в (102) несложно получить

$$\begin{aligned} B_{\eta}(\tau) &= \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \eta^{(i)}(2 \cdot t) \cdot \eta^{(i)}(2 \cdot t - 2 \cdot \tau) dt = \\ &= \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}}^{+T_{\text{набл}}} \xi^{(i)}(z) \cdot \xi^{(i)}(z - 2 \cdot \tau) dz = B_{\xi}(2 \cdot \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционные функции анализируемых процессов отличаются лишь горизонтальным масштабом – функция $B_{\eta}(\tau)$ вдвое сжата вдоль оси времени по отношению к $B_{\xi}(\tau)$. Подобный результат вполне закономерен: воспроизводимые записи изменяются вдвое быстрее, а значит интервал их предсказуемости вдвое меньше. Средняя же мощность от скорости изменения не зависит, а потому вертикальный масштаб (значение корреляционной функции в нуле) изменяться не должен.

б) В соответствии с теоремой Винера-Хинчина и свойствами преобразования Фурье сжатие корреляционной функции вдоль оси времени соответствует в спектральной области соотношению

$$S_{\eta}(f) = 0,5 \cdot S_{\xi}(0,5 \cdot f).$$

Полученные соотношения проиллюстрированы на рис. 31. Ускоренное воспроизведение привело к расширению спектра процесса и подобное распределение мощности по большему диапазону частот привело к снижению в 2 раза мощности, приходящейся на каждый герц оси частот.

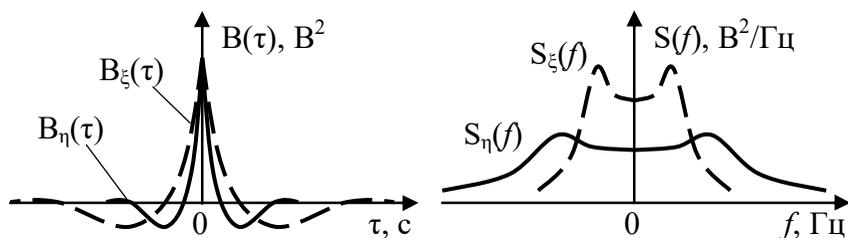


Рис. 31. Соотношение энергетических характеристик процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ из задачи 1

Задача 2. Проанализируйте, может ли случайный процесс иметь корреляционную функцию прямоугольной формы?

Решение

а) Если корреляционная функция некоторого процесса может иметь прямоугольную форму, то в соответствии с первым свойством корреляционных функций ее форма должна соответствовать рис. 32 – функция должна быть четной. Как следствие, спектральная плотность мощности (СПМ) такого процесса будет определяться соотношением

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\tau_k}^{+\tau_k} B_0 \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau = 2 \cdot B_0 \tau_k \cdot \text{sin c}(2\pi \cdot f \cdot \tau_k) .$$

а) Sinc-образная функция частоты показана на рис. 32 справа, однако она не может служить спектральной плотностью мощности какого-либо процесса, т.к. является знакопере-

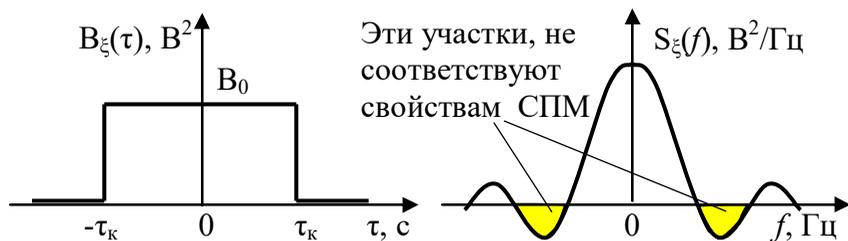


Рис. 32. Энергетические характеристики из задачи 2

менной, а СПМ случайных процессов обязана быть неотрицательной для всех частот. Полученное противоречие свидетельствует, что функция прямоугольной формы не является положительно определенной, а потому не может служить корреляционной функцией никакого случайного процесса (см. следствие из теоремы Винера-Хинчина на стр. 117).

Задача 3. Спектральная плотность мощности нормального случайного процесса $\xi(t)$ определяется выражением

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot 10^{-3} / (10^6 + \omega^2), \quad \text{В}^2/\text{Гц}.$$

Определить интервал корреляции этого процесса, а также вероятность наблюдения значений процесса $\xi(t)$, превышающих +1 милливольт.

Решение

а) Интервал корреляции случайного процесса встречается выше в соотношениях (98), (99), однако последнее из них рассчитано на неотрицательную корреляционную функцию, а для анализируемого процесса характер зависимости $V_{\xi}(\tau)$ пока не установлен. В связи с этим начать решение задачи необходимо с определения корреляционной функции процесса $V_{\xi}(\tau)$.

В соответствии с (96)

$$V_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega \cdot \tau)}{10^6 + \omega^2} d\omega$$

Для сокращения выкладок воспользуемся табличным интегралом

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega \cdot \tau)}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot e^{-|a \cdot \tau|} \quad (103)$$

При $a = 10^3$ и с учетом поправочного коэффициента $2 \cdot 10^{-3}$ корреляционная функция процесса $V_{\xi}(\tau)$ равна

$$V_{\xi}(\tau) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} \cdot e^{-|10^3 \cdot \tau|} = 10^{-6} \cdot e^{-|10^3 \cdot \tau|}, \quad \text{В}^2.$$

б) Итак, корреляционная функция анализируемого процесса неотрицательна, а потому (см. также (99))

$$\tau_k = \int_0^{+\infty} \frac{|B_\xi(\tau)|}{B_\xi(0)} d\tau = \frac{1}{B_\xi(0)} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(\tau) d\tau = \frac{S_\xi(0)}{2 \cdot B_\xi(0)} \quad (104)$$

и, в результате, $\tau_k = 2 \cdot 10^{-9} / (2 \cdot 10^{-6}) = 10^{-3}$, т.е. интервал корреляции равен 1 миллисекунде.

в) Спектральная плотность мощности на нулевой частоте конечна и, следовательно, приходящаяся на постоянную составляющую мощность бесконечно мала, т.е. процесс $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание (см. также (91)). В результате, значение $B_\xi(0) = 10^{-6}$ определяет мощность переменной составляющей реализаций или, иначе, дисперсию процесса. Учитывая, что по условию процесс $\xi(t)$ обладает нормальным распределением его плотность вероятности может быть записана в виде

$$W_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 10^{-6}}}, \quad 1/B.$$

г) По полученной плотности вероятности в соответствии с (24) определяем вероятность попадания значений СП $\xi(t)$ в объявленный в условии диапазон

$$P\{\xi(t) > 10^{-3}\} = \int_{10^{-3}}^{+\infty} W_\xi(x) dx. \text{ Поскольку применительно к нор-}$$

мальному распределению записанный интеграл в элементарных функциях не выражается, то для его расчета воспользуемся вспомогательным (противоположным) событием “ $\xi(t) \leq 10^{-3}$ “, а также заменой переменных $z = x / 10^{-3}$. С учетом таблицы нормального распределения из прил. 1, получаем

$$P\{\xi(t) > 10^{-3}\} = 1 - \int_{-\infty}^{10^{-3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 10^{-6}}} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= 1 - F_{\text{CT}}(1) = 1 - 0,8413 \approx 0,16.$$

Итак, вероятность наблюдения значений, превышающих +1 милливольт, для процесса $\xi(t)$ составляет примерно 16%.

Задача 4. Случайный процесс $\xi(t)$ состоит из периодической последовательности прямоугольных импульсов со скважностью 2 (см. рис. 33), отличающихся друг от друга случайной задержкой во времени. Задержка может равновероятно принимать любые значения в пределах периода сигнала. Определить корреляционную функцию этого случайного процесса.

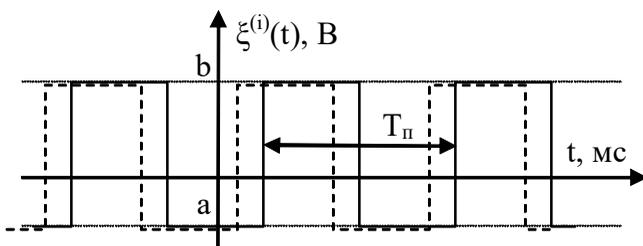


Рис. 33. Возможные реализации СП из задачи 4

Решение

а) Решение задачи целесообразно начать с определения того, к какому классу относится анализируемый СП.

Так как анализируемый сигнал – периодический, а задержка реализаций равновероятна в пределах периода, то совокупность значений, которую можно наблюдать в одной контрольной точке, обязательно будет наблюдаться и в любой другой точке (возможно, лишь, для иных “номеров” реализаций) и с теми же самыми вероятностями. А это означает, что во всех временных сечениях анализируемый процесс обладает одинаковыми свойствами и, следовательно, является стационарным.

б) Кроме того, из рис. 33 видно, что все реализации процесса являются схожими, “однотипными”, что указывает на эргодичность этого процесса. Эргодическое свойство процесса $\xi(t)$ позволяет существенно упростить решение задачи.

Действительно, без учета эргодичности расчет $B_{\xi}(\tau)$ пришлось бы производить на основе ее определения

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 . \quad (105)$$

Это, естественно, потребовало бы предварительно определить двумерную плотность вероятности процесса, что является не слишком простой задачей.

Используя же эргодическое свойство процесса $\xi(t)$, его корреляционную функцию можно искать как среднюю по времени величину произведения двух разнесенных по времени на интервал τ значений этого процесса (см. (102)). Учитывая периодичность реализаций процесса $\xi(t)$, выражение (102) может быть преобразовано к виду

$$B_{\xi}(\tau) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot R \cdot T_{\Pi}} \cdot \sum_{r=-R}^{R-1} \int_{r \cdot T_{\Pi}}^{(r+1) \cdot T_{\Pi}} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t - \tau) dt$$

или, окончательно, для $|\tau| < T_{\Pi}/2$

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + T_{\Pi}} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t - \tau) dt , \quad (106)$$

а для больших τ повторяется периодически с периодом T_{Π} .

в) В (106) для вычислений может быть использована произвольная реализация анализируемого процесса – та, которая наиболее удобна при выполнении расчетов. Так, на рис. 34 представлена одна из возможных реализаций процесса $\xi(t)$ и ее задержанная на интервал τ копия для значений τ из интервала $0 \dots T_{\Pi}/2$.

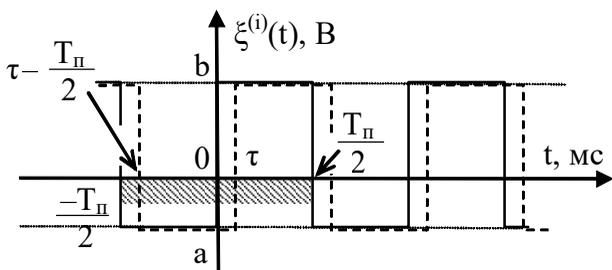


Рис. 34. Рекомендуемая для расчета реализация процесса $\xi(t)$ и ее задержанная на интервал τ копия

На подлежащем интегрированию интервале (отмечен на рис. 34 штриховкой) как сама реализация, так и ее копия скачкообразно изменяют свои свойства, поэтому интеграл (106) придется рассчитывать как сумму интегралов по 4 интервалам

$$\begin{aligned}
 B_{\xi}(\tau) &= \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{-T_{\Pi}/2}^{+T_{\Pi}/2} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t-\tau) dt = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \left\{ \int_{-T_{\Pi}/2}^{\tau-T_{\Pi}/2} a \cdot b dt + \int_{\tau-T_{\Pi}/2}^0 a \cdot a dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\tau} b \cdot a dt + \int_{\tau}^{T_{\Pi}/2} b \cdot b dt \right\} = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \left\{ 2 \cdot a \cdot b \cdot \tau + (b^2 + a^2) \cdot \left(\frac{T_{\Pi}}{2} - \tau \right) \right\} = \\
 &= \frac{b^2 + a^2}{2} - (b-a)^2 \cdot \frac{\tau}{T_{\Pi}}, \quad 0 \leq \tau \leq T_{\Pi}/2.
 \end{aligned}$$

г) Если сдвинутая по времени копия реализации не отстает, а опережает ее (т.е. $\tau < 0$), то суть расчетов остается неизменной; но изменяется разбиение диапазона значений $-T_{\Pi}/2 \dots +T_{\Pi}/2$ на интервалы (см. рис. 35)

$$\begin{aligned}
 B_{\xi}(\tau) &= \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \left\{ \int_{-T_{\Pi}/2}^{\tau} a \cdot a dt + \int_{\tau}^0 a \cdot b dt + \int_0^{\tau+T_{\Pi}/2} b \cdot b dt + \int_{\tau+T_{\Pi}/2}^{T_{\Pi}/2} b \cdot a dt \right\} = \\
 &= \frac{b^2 + a^2}{2} + (b-a)^2 \cdot \frac{\tau}{T_{\Pi}}, \quad -T_{\Pi}/2 \leq \tau \leq 0.
 \end{aligned}$$

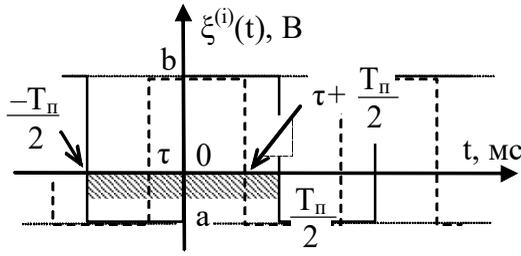


Рис. 35. Разбиение области интегрирования на интервалы при $\tau < 0$

д) Итак, результат может быть выражен рисунком 36.

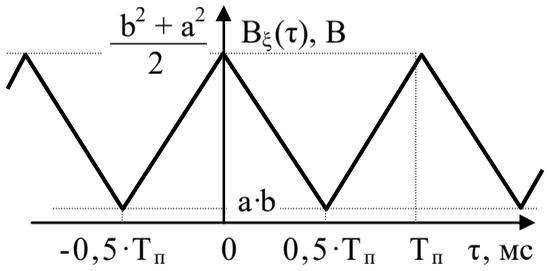


Рис. 36. Корреляционная функция процесса из задачи 4

2.10 Преобразование случайных процессов в линейных цепях

Случайный процесс $\xi(t)$, поступающий на вход линейного устройства порождает на его выходе реакцию $\eta(t)$, которая, естественно, также является случайной. Теоретически, все характеристики процесса $\eta(t)$ однозначно определяются свойствами воздействия $\xi(t)$ и преобразующей его цепи, однако имеется существенное отличие в сложности расчета энергетических и вероятностных характеристик $\eta(t)$.

2.10.1. *Оценка вероятностных характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие*

Большинство линейных цепей являются цепями инерционными, поэтому текущее значение на выходе цепи определяется не только значением, воздействующим на вход в данный момент времени, но и всей бесконечной совокупностью значений воздействия, поступавших на вход ранее. Поскольку расчет закона распределения даже для суммы двух случайных величин требует выполнения свертки плотностей вероятности слагаемых, а в рассматриваемых случаях таких слагаемых бесконечно много, то общего способа расчета закона распределения реакции линейной цепи на случайное воздействие не существует. Вместе с тем, есть два случая, когда вероятностные свойства реакции цепи можно предсказать:

1. Если на линейную цепь воздействует нормальный СП, то и процесс на выходе цепи будет обладать нормальным распределением.

2. При воздействии на узкополосную цепь широкополосного СП наблюдается “эффект нормализации”, заключающийся в том, что закон распределения реакции цепи неограниченно приближается к нормальному. Причиной эффекта нормализации служит центральная предельная теорема Ляпунова.

В отличие от законов распределения предсказать изменение энергетических характеристик СП при их прохождении через линейную цепь относительно несложно.

2.10.2. Частотный метод расчета энергетических характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

Частотный метод предполагает известной амплитудно-частотную характеристику цепи и устанавливает соответствие между спектральными плотностями мощности процессов на входе и выходе цепи

$$S_{\eta}(f) = S_{\xi}(f) \cdot \left| \dot{K}(f) \right|^2. \quad (107)$$

Корреляционные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по $S_{\eta}(f)$ в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (94).

2.10.3. Временной метод расчета энергетических характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

При использовании временного метода анализа свойства цепи определяются корреляционной функцией ее импульсной характеристики

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dot{K}(\omega) \right|^2 \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot g(x - \tau) dx, \quad (108)$$

где $\left| \dot{K}(\omega) \right|$ – АЧХ, а $g(\tau)$ – импульсная характеристика цепи.

Согласно временному методу соответствие между корреляционными функциями воздействия и реакции цепи имеет вид

$$B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(x) \cdot R_g(\tau - x) dx. \quad (109)$$

Спектральные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по $B_{\eta}(\tau)$ в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (93).

2.10.4. Понятие шумовой полосы пропускания цепи

Шумовая полоса пропускания линейной цепи используется при воздействии на цепь белого шума или процесса, спектр которого существенно шире величины полосы пропускания цепи. Она представляет собой полосу пропускания идеального фильтра, который обладает коэффициентом передачи равным максимальному коэффициенту передачи анализируемой цепи и обеспечивает на выходе ту же мощность реакции, что и анализируемая цепь. Выражение для расчета шумовой полосы имеет вид

$$\Pi_{\text{шф}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\dot{K}(f)|^2}{\max_f \{|\dot{K}(f)|^2\}} df. \quad (110)$$

Ширина шумовой полосы линейной цепи, как правило, пропорциональна полосе пропускания по уровню 0,707. Для RC-цепочек и колебательных контуров, в частности, соотношение между этими двумя параметрами составляет

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f,0,707}. \quad (111)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Источник постоянного напряжения обеспечивает протекание через резистор с сопротивлением $R = 5 \text{ кОм}$ (см. рис. 37) постоянного тока силой $I_0 = 2 \text{ мА}$. Каково эффективное значение шумового напряжения на этом резисторе, вызываемого действием дробового тока, если паразитная емкость электронной лампы составляет 20 пФ ?

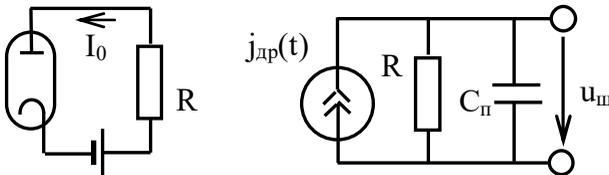


Рис. 37. Цепь и её схема замещения для задачи 1

Решение

а) Выше в п. 2.9.5 мы уже отмечали, что в радиотехнических цепях даже при (формально) постоянных воздействиях возникают флуктуации напряжения и тока, вызываемые реально хаотическим движением заряженных частиц. Точно также и в рассматриваемой цепи наряду с упорядоченным движением зарядов, порождаемых подключенным источником постоянного напряжения, существует флуктуационная составляющая тока. Обнаружить эту составляющую можно, например, измеряя чувствительным прибором переменную составляющую напряжения на резисторе R .

б) Для оценки интенсивности шумового напряжения следует вспомнить, что дробовой ток (который и является в данном случае основным источником шума) представляет собой стационарный широкополосный случайный процесс со спектральной плотностью мощности, определяемой (100). Дробовой ток содержит составляющие бесконечного числа частот, поэтому для расчета наблюдаемого на резисторе R напряжения необходимо воспользоваться схемой замещения по переменной составляющей. Учитывая, что используемая в схеме электронная лампа обладает паразитной емкостью $C_{\text{п}}$ эта схема замещения будет иметь вид, показанный на рис. 37 справа.

в) При воздействии на параллельную RC -цепочку тока и выходном сигнале в форме напряжения в роли коэффициента передачи цепи выступает ее комплексное сопротивление

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC},$$

а АЧХ цепи задается выражением

$$|\dot{K}(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}}.$$

г) Стандартным методом дальнейшего решения задачи является использование частотного метода анализа (такой вариант будет использован, например, в следующей задаче). Вместе с тем, есть и альтернативный (более компактный) путь решения задачи, основанный на понятии шумовой полосы пропускания цепи. Действительно, для RC-цепочки в соответствии с (111)

$$\Pi_{\text{ш}f} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot RC} = \frac{1}{4 \cdot RC} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ (Гц)},$$

максимум коэффициента передачи определяется

$$K_0 = \max_{\omega} |\dot{K}(\omega)| = R$$

и, следовательно, мощность шума на выходе исследуемой цепи должна совпадать с мощностью шума на выходе идеального ФНЧ, на вход которого поступает дробовой ток. Применительно к идеальному ФНЧ спектральные плотности мощности на входе и на выходе показаны на рис. 38, а мощность (дисперсия) выходного процесса определяется площадью под кривой $S_{\text{вых}}(f)$ (см. (92)), что с учетом прямоугольной формы графика приводит нас к результату

$$D_{\text{ш вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{ш}f} \cdot e \cdot I_0 \cdot R^2 = 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5000^2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2.$$

Итак, эффективное значение шумового напряжения на выходе цепи составит $\sigma_{\text{ш вых}} = \sqrt{D_{\text{ш вых}}} = 2 \cdot 10^{-4} = 0,2 \text{ мВ}$.

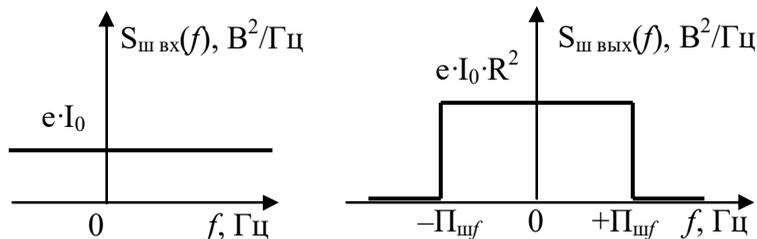


Рис. 38. Спектральная плотность мощности шума на входе и на выходе идеального ФНЧ

Задача 2. На последовательную RC-цепь с номиналами элементов $R = 2$ кОм, $C = 0,5$ мкФ действует нормальный случайный процесс с математическим ожиданием $M_{u_1} = +1$ (В) и корреляционной функцией $B_{u_1}(\tau) = 1 + 10 \cdot e^{-10^3 \cdot |\tau|}$ (В²). Найти плотность вероятности напряжения на емкости.

Решение

а) В пункте 2.10.1 отмечалось, что хотя общего решения задача о нахождении закона распределения процесса на выходе линейной цепи не имеет, но при воздействии на цепь нормального процесса реакция обязана иметь нормальное распределение. Таким образом, поставленная задача фактически сводится к поиску параметров a_2 и σ_2 выходного процесса.

б) Комплексный коэффициент передачи последовательной RC-цепи (рис. 39) определяется выражением

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \tau_u}, \quad \text{где } \tau_u = R \cdot C = 10^{-3} \text{ (с)},$$

а ее АЧХ $|\dot{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_u)^2}}$ представлена на рис. 39 справа.

в) Для оценки математического ожидания напряжения $u_2(t)$ целесообразно учесть, что физически математическому ожиданию соответствует постоянная составляющая случайного процесса. Но, как следует из физических свойств и АЧХ цепи, RC-цепь передает постоянную составляющую на выход без изменений и, следовательно, оцениваемое матожидание просто совпадает с исходным $M_{u_2} = M_{u_1} = a_2 = +1$ (В).

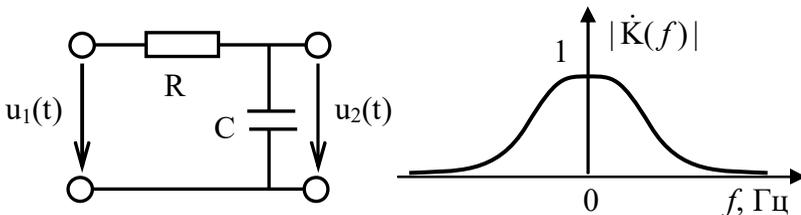


Рис. 39. Исследуемая цепь из задачи 2

г) Последующая часть решения требует учета корреляционной функции воздействующего напряжения, однако использовать в расчетах непосредственно заданное в условии численное выражение допустимо, но не целесообразно. Переписав $V_{u1}(\tau)$ в символьной форме, мы не только сможем получить более универсальное решение, но и контролировать корректность промежуточных величин, на основе анализа их размерностей. Значение $V_{u1}(0)$ характеризует полную мощность реализаций случайного процесса, состоящую из мощности постоянной M_{u1}^2 и флуктуационной D_{u1} составляющих. Но $M_{u1}^2 = 1$ (B^2), поэтому амплитуда “10” второго слагаемого $V_{u1}(\tau)$ однозначно соответствует дисперсии воздействия $D_{u1} = 10$ (B^2). Кроме того, можно учесть, что $10^3 = 1/\tau_{ц}$ (введено выше), а потому корреляционную функцию воздействия можно переписать в виде

$$V_{u1}(\tau) = 1 + D_{u1} \cdot e^{-|\tau|/\tau_{ц}} \quad (B^2). \quad (112)$$

д) Корреляционная функция (112) не является δ -образной, поэтому мощность этого процесса распределена вдоль оси частот неравномерно, воздействие не является белым шумом и воспользоваться для поиска эффективного значения выходного напряжения понятием шумовой полосы невозможно. Будем рассчитывать величину σ_2 на основе частотного метода анализа, изложенного в п. 2.10.2, для чего, воспользовавшись теоремой Винера-Хинчина (95), определим спектральную плотность мощности воздействующего напряжения.

Учитывая, что при интегрировании лишь по неотрицательным значениям τ знак модуля в выражении корреляционной функции оказывается избыточным, запишем (95) в виде

$$S_{u1}(\omega) = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} (1 + D_{u1} \cdot e^{-\tau/\tau_{ц}}) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2\pi \cdot \delta(\omega) +$$

$$\begin{aligned}
+ 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ D_{u1} \cdot \frac{e^{-\tau(1/\tau_u + j\omega)}}{-(1/\tau_u + j\omega)} \Big|_0^{+\infty} \right\} &= 2\pi \cdot \delta(\omega) + 2 \cdot D_{u1} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1/\tau_u + j\omega} \right\} = \\
&= 2\pi \cdot \delta(\omega) + D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{1 + (\omega\tau_u)^2} \quad (\text{В}^2/\text{Гц}).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое полученного выражения отражает факт наличия у воздействия постоянной составляющей, вследствие чего на нулевой частоте (в одной точке оси частот) сосредоточена мощность $M_{u1}^2 = 1$ (В²), а спектральная плотность мощности бесконечно велика. Влияние этого слагаемого на реакцию, наблюдаемую на выходе цепи, мы уже реально оценили выше, когда получили $M_{u2} = a_2 = +1$ (В), поэтому в дальнейших расчетах, направленных на анализ переменной составляющей выходного напряжения, будем учитывать лишь второе слагаемое $S_{u1}(\omega)$.

е) В соответствии с (107) спектральная плотность мощности переменной составляющей напряжения, снимаемого с емкости RC-цепи, определяется соотношением

$$S_{u2\sim}(\omega) = D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{1 + (\omega\tau_u)^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_u)^2}} \right)^2 = D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{[1 + (\omega\tau_u)^2]^2}.$$

Это выражение, в принципе, позволяет определить и корреляционную функцию выходного напряжения, но нас интересует лишь его интенсивность. Соотношение (92) позволяет определить полную среднюю мощность реализаций случайного процесса. Если же в (92) подставить полученное выше выражение для спектральной плотности мощности переменной составляющей процесса, то результатом расчета будет соответственно *дисперсия* выходного напряжения

$$D_{u2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{[1 + (\omega\tau_u)^2]^2} d\omega = \frac{D_{u1} \cdot \tau_u}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{dx / (\tau_u \cdot \cos^2(x))}{[1 / \cos^2(x)]^2}$$

Здесь использована подстановка $\omega\tau_u = \text{tg}(x)$, где x изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, $[1 + (\omega\tau_u)^2] = 1 / \cos^2(x)$ и $d\omega = dx / (\tau_u \cdot \cos^2(x))$. Продолжая преобразование, получаем

$$D_{u2} = \frac{D_{u1}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{D_{u1}}{\pi} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{D_{u1}}{2}.$$

ж) Итак, поскольку на низких частотах коэффициент передачи RC-цепи близок к единице, а на высоких – снижается, то интенсивность процесса на выходе цепи оказывается ниже, чем на входе. В рассматриваемой задаче это уменьшение оказалось двукратным $D_{u2} = \sigma_2^2 = D_{u1} / 2 = 5 \text{ (В}^2\text{)}$. Найденное таким образом значение σ_2 позволяет завершить решение и записать итоговую плотность вероятности выходного напряжения

$$W_{u2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot 5}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{10}}, \quad (1/\text{В}).$$

Задача 3. Показанный на рис. 40 резонансный усилитель обеспечивает на частоте резонанса контура $f_{\text{рез}} = 2 \text{ МГц}$ коэффициент усиления $K_0 = 25$ и обладает полосой пропускания $\text{П}_{f0,707} = 50 \text{ кГц}$. Усилитель работает при температуре $t^\circ\text{C} = 17^\circ\text{C}$ и потому тепловой шум резисторов $R_1 = 36 \text{ кОм}$ и $R_2 = 7,5 \text{ кОм}$,

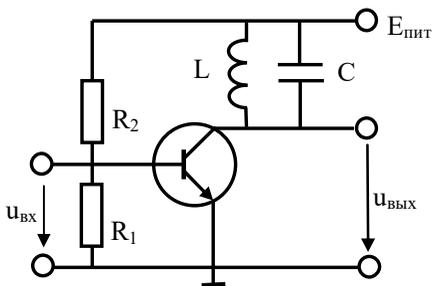


Рис. 40. Резонансный усилитель из задачи 3

усиливаясь, проходит на выход. Если на вход усилителя подать слабое гармоническое напряжение частоты $f_c = 2$ МГц, то при какой амплитуде воздействия на выходе будет наблюдаться отношение сигнал/шум $h = 1$?

Решение

а) Если исследуемому усилителю поставить в соответствие его схему замещения, то по отношению к переменной составляющей резисторы R_1 и R_2 окажутся включенными параллельно и их можно будет заменить эквивалентным сопротивлением

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{36 \cdot 7,5}{36 + 7,5} = 6,2 \text{ кОм}.$$

б) Ширина спектра теплового шума многократно превосходит полосу пропускания усилителя, так что по отношению к нему этот шум можно считать белым. Как следствие, для расчета интенсивности отклика усилителя на это шум можно использовать понятие шумовой полосы, которая согласно (111) будет равна

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f 0,707} = 78,54 \text{ кГц}.$$

в) С использованием понятия шумовой полосы мощность процесса на выходе линейной цепи определяется соотношением

$$D_{\text{вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot N_0, \quad (113)$$

где N_0 – спектральная плотность мощности процесса на входе цепи, для теплового шума определяемая (101). Учитывая также, что абсолютная температура отличается от температуры в градусах Цельсия на 273° , получаем окончательно

$$\begin{aligned} D_{\text{вых}} &= 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot 2 \cdot k \cdot (t_C^\circ + 273^\circ) \cdot R_3 = \\ &= 2 \cdot 78540 \cdot 25^2 \cdot 2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 6200 = 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ (В}^2\text{)}. \end{aligned}$$

г) Соотношение сигнал/шум равно единице, если мощности полезного сигнала и шума совпадают. Таким образом, для выполнения требований условия задачи на вход усилителя следует подать гармонический сигнал такой амплитуды, чтобы мощность отклика на него на выходе составляла $P_{\text{вых}} = 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ (В}^2\text{)}$.

Вместе с тем, учитывая совпадение частоты воздействия с частотой настройки усилителя, можно записать

$$P_{\text{вых}} = (U_0 \cdot K_0)^2 / 2,$$

откуда
$$U_0 = \frac{\sqrt{2 \cdot P_{\text{вых}}}}{K_0} = \frac{\sqrt{9,74 \cdot 10^{-9}}}{25} = 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ (В)}.$$

Итак, тепловой шум оказывает на анализируемый усилитель (по мощности) такое же влияние, как и полезный гармонический сигнал с амплитудой $U_0 = 4 \text{ мкВ}$.

Задача 4. На фильтр, амплитудно-частотная характеристика которого показана на рис. 41 (слева), воздействует случайный процесс, спектральная плотность мощности которого отображена на рис. 41 (справа). Найти граничную частоту полосы пропускания фильтра, если известно, что средние мощности реализаций процессов на входе и выходе фильтра совпадают.

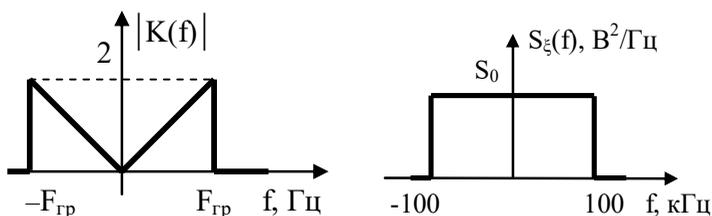


Рис. 41. Характеристики фильтра и воздействия из задачи 4

Решение

а) Учитывая прямоугольную форму спектральной плотности мощности воздействия, среднюю мощность реализаций процесса на входе фильтр можно определить из соотношения

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) df = 2 \cdot \text{Ш}_{f_{\xi}} \cdot S_0,$$

где $\text{Ш}_{f_{\xi}} = 100$ кГц – ширина спектра воздействия.

б) Рассчитать аналогично (*из геометрических соображений*) среднюю мощность реализаций на выходе фильтра весьма проблематично, поскольку спектральная плотность мощности выходного процесса пропорциональна квадрату АЧХ (см. (107)) и имеет параболическую форму. Более того, существует два различных и удовлетворяющих требованиям условия значения $F_{\text{гр}}$, одно из которых заметно меньше, а другое – заметно больше $\text{Ш}_{f_{\xi}}$ и способы расчета каждого из них имеют свои особенности.

в) Для варианта $F_{\text{гр}} < \text{Ш}_{f_{\xi}}$ на основании (92) записываем

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2 df = S_0 \cdot \int_{-F_{\text{гр}}}^{+F_{\text{гр}}} (2 \cdot f / F_{\text{гр}})^2 df = \frac{4 \cdot S_0}{F_{\text{гр}}^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_{-F_{\text{гр}}}^{+F_{\text{гр}}} =$$

$$= \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot F_{\text{гр}} \quad \text{и, приравнявая} \quad \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot F_{\text{гр}} = 2 \cdot \text{Ш}_{f_{\xi}} \cdot S_0, \quad \text{получаем}$$

$$F_{\text{гр}} = \frac{3}{4} \cdot \text{Ш}_{f_{\xi}} = 75 \text{ кГц}.$$

г) Для варианта $F_{\text{гр}} > \text{Ш}_{f_{\xi}}$ на основании (92) записываем

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2 df = S_0 \cdot \int_{-\text{Ш}_{f_{\xi}}}^{+\text{Ш}_{f_{\xi}}} (2 \cdot f / F_{\text{гр}})^2 df = \frac{4 \cdot S_0}{F_{\text{гр}}^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_{-\text{Ш}_{f_{\xi}}}^{+\text{Ш}_{f_{\xi}}} =$$

$$= \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot \frac{\text{Ш}_{f_{\xi}}^3}{F_{\text{гр}}^2} \quad \text{и, приравнявая} \quad \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot \frac{\text{Ш}_{f_{\xi}}^3}{F_{\text{гр}}^2} = 2 \cdot \text{Ш}_{f_{\xi}} \cdot S_0, \quad \text{получаем}$$

ем

$$F_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \text{Ш}_{f_{\xi}} = 115,47 \text{ кГц}.$$

2.11 Оптимальная линейная фильтрация сигналов неизвестной формы

Пусть на вход устройства обработки на фоне аддитивного шума поступает сигнал неизвестной формы несущий полезную информацию. Обработку смеси сигнала и шума, направленную на максимально точное восстановление формы этого полезного сигнала, называют оптимальной фильтрацией сигналов неизвестной формы. Ограничивая поиск классом линейных устройств, можно показать, что минимальную среднеквадратическую погрешность выделения полезного сигнала из смеси с аддитивным шумом обеспечивает фильтр с нулевой фазо-частотной характеристикой и АЧХ, определяемой выражением

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \frac{S(f)}{S(f) + N(f)} = \frac{1}{1 + N(f)/S(f)}. \quad (114)$$

где $S(f)$ – спектральная плотность мощности полезного сигнала; $N(f)$ – спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой поступает полезный сигнал.

Обеспечиваемая оптимальным фильтром минимальная среднеквадратическая погрешность характеризуется средней мощностью сигнала ошибки, рассчитываемой по формуле

$$P_{\Delta \text{cp}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(f) \cdot N(f)}{S(f) + N(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{N(f)} + \frac{1}{S(f)}} df. \quad (115)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Спектральные плотности мощности случайного полезного сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, на фоне которой принимается этот сигнал, показаны на рис. 42. Определить амплитудно-частотную характеристику фильтра, обеспечивающего выделение сигнала из шума с наименьшей среднеквадратической погрешностью.

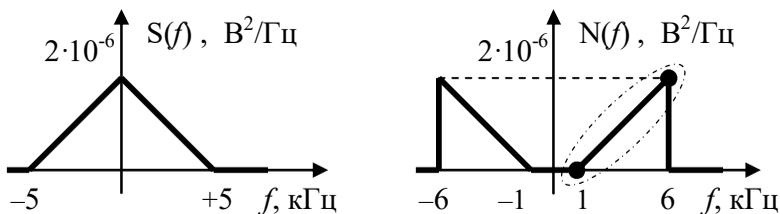


Рис. 42. Спектральные характеристики сигнала и помехи из задачи 1

Решение

а) Согласно рис. 42 спектральные плотности мощности фигурирующих в данной задаче СП представляют собой четные кусочно-линейные функции и потому могут быть записаны в виде совокупности выражений вида $y = k \cdot |f| + b$, где коэффициенты k и b можно определить, в частности, по паре контрольных точек анализируемого линейного участка. Например, линия, выделенная на рис. 42 овалом, должна проходить через точки (*частоты подставляются в герцах*)

$$N(10^3) = k \cdot 10^3 + b = 0$$

$$N(6 \cdot 10^3) = k \cdot 6 \cdot 10^3 + b = 2 \cdot 10^{-6}$$

Рассматривая эти два соотношения как систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, несложно установить, что для анализируемого участка коэффициенты k и b должны равняться

$$k = 4 \cdot 10^{-10}; \quad b = -4 \cdot 10^{-7}.$$

Анализируя подобным образом прочие участки графиков $S(f)$ и $N(f)$, нетрудно установить, что спектральным плотностям мощности полезного сигнала и шума соответствуют выражения

$$S(f) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|, & \text{при } |f| \leq 5 \cdot 10^3 \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

$$N(f) = \begin{cases} -4 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|, & \text{при } 1 \cdot 10^3 \leq |f| \leq 5 \cdot 10^3 \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

б) Согласно правилу (114), коэффициент передачи оптимального фильтра принимает отличающиеся от нуля значения лишь для совокупности частот, где $S(f) > 0$, т.е. имеются спектральные составляющие полезного сигнала. Более того, для всех частот, где сигнал наблюдается без шума, коэффициент передачи следует брать равным единице и лишь там, где действует смесь сигнала с шумом, АЧХ цепи обязана быть меньше единицы.

В соответствии со сказанным, расчет АЧХ фильтра требуется лишь для совокупности частот от 1 до 5 кГц. Подставляя в (114) полученные выше аналитические выражения, получаем

$$\begin{aligned} |\dot{K}_{\text{опт}}(f)| &= \frac{2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|}{(2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|) + (-4 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|)} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|}{1,6 \cdot 10^{-6}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} \cdot |f|. \end{aligned}$$

Итак, коэффициент передачи оптимального по критерию минимума среднеквадратической погрешности фильтра имеет вид

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \begin{cases} 1, & \text{при } |f| \leq 1 \text{ кГц} \\ 1,25 - 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot |f|, & \text{при } 1 < |f| \leq 5 \text{ кГц} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

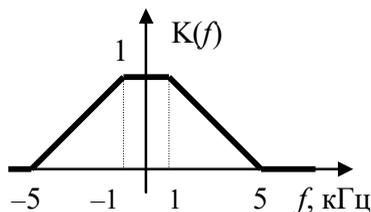


Рис. 43. Коэффициент передачи фильтра из задачи 1

Задача 2. Случайный сигнал $s(t)$ с корреляционной функцией $B_s(\tau) = \sigma_s^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}$ (B^2) принимается на фоне помехи $n(t)$ с корреляционной функцией $B_n(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|}$ (B^2), где α и β – некоторые положительные константы. Найти коэффициент передачи фильтра, выделяющего сигнал из смеси с наименьшей среднеквадратической погрешностью, и получить выражение для оценки самой этой погрешности.

Решение

а) Так как основные расчетные формулы, относящиеся к оптимальной фильтрации сигналов неизвестной формы, опираются на спектральные характеристики обрабатываемых случайных процессов, то решение задачи следует начать с поиска спектральной плотности мощности процессов $s(t)$ и $n(t)$.

Входящий в выражения корреляционных функций знак модуля несколько затрудняет интегрирование, но от него легко избавиться, если в качестве математической записи теоремы Винера-Хинчина использовать выражение (95). Оно предполагает интегрирование лишь по области $\tau \geq 0$, применительно к которой $|\tau| \equiv \tau$, поэтому в подынтегральном выражении знак модуля может быть “опущен”

$$S(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma_s^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \sigma_s^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-\tau \cdot (\alpha + j\omega)} \Big|_0^{+\infty}}{- (\alpha + j\omega)} \Big|_0^{+\infty} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \sigma_s^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha + j\omega} \right\} = \sigma_s^2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (B^2/\Gamma\omega).$$

По аналогии, $N(\omega) = \sigma_n^2 \cdot \frac{2 \cdot \beta}{\beta^2 + \omega^2}$ ($B^2/\Gamma\omega$).

б) В соответствии с (114) для АЧХ оптимального фильтра получаем

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{N(\omega)}{S(\omega)}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\beta^2 + \omega^2}}.$$

В качестве оценки погрешности имеет смысл использовать среднюю мощность сигнала ошибки, рассчитываемую в соответствии с (115) как

$$P_{\Delta cp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{N(\omega)} + \frac{1}{S(\omega)}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{\beta^2 + \omega^2}{2\beta \cdot \sigma_n^2}} d\omega$$

Введем вспомогательные обозначения

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{\beta^2}{2\beta \cdot \sigma_n^2} = c^2; \quad \frac{1}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{1}{2\beta \cdot \sigma_n^2} = q^2.$$

С их использованием предыдущий интеграл принимает вид

$$P_{\Delta cp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2 + (q \cdot \omega)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi \cdot cq} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{1}{2 \cdot c \cdot q}.$$

После подстановки ранее введенных значений c и q для средней мощности сигнала ошибки получаем выражение

$$P_{\Delta cp} = \left(\frac{\alpha}{\sigma_s^2} + \frac{\beta}{\sigma_n^2} \right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{1}{\beta \cdot \sigma_n^2} \right)^{-0,5}.$$

2.12 Обнаружение сигналов известной формы на фоне помех

При обнаружении сигналов известной формы на фоне помех оптимальным является фильтр, обеспечивающий на выходе фильтра при приходе обнаруживаемого сигнала наибольшее соотношение сигнал/шум в заранее выбранный момент времени. Применительно к белому шуму подобным оптимальным устройством является согласованный фильтр, представляющий собой линейное аналоговое устройство с импульсной характеристикой

$$g_{сф}(t) = A \cdot s(t_0 - t), \quad (116)$$

где $s(t)$ - обнаруживаемый сигнал; t_0 - момент времени, в который обеспечивается максимум отношения сигнал/шум (должен совпадать с моментом окончания сигнала или выбираться позже него); A - произвольная константа (свойства фильтра не зависят от A , так как изменение этого коэффициента одинаково увеличивает как интенсивность полезного сигнала, так и среднеквадратическое значение шума на выходе фильтра).

Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра должен, очевидно, соответствовать (116) и может быть рассчитан по формуле

$$\dot{K}_{сф}(\omega) = A \cdot G_s^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}, \quad (117)$$

где $G_s^*(\omega)$ - величина, комплексно-сопряженная спектральной плотности обнаруживаемого сигнала.

Обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал/шум не зависит от формы обнаруживаемого сигнала, а определяется лишь его энергией и спектральной плотностью мощности помехи. Квадрат отношения сигнал/шум (отношение сигнал/шум по мощности) на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0 равен

$$q_{сф}^2 = \mathcal{E}_s / N_0, \quad (118)$$

где N_0 - спектральная плотность мощности шума, а \mathcal{E}_s - энергия полезного сигнала определяемая соотношением

$$\Theta_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (119)$$

Если шум, на фоне которого производится обнаружение, не является белым, то согласованный фильтр уже не обеспечивает максимально возможного отношения сигнал/шум. Оптимальным для обнаружения сигналов в подобной ситуации оказывается фильтр с комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{opt}(\omega) = A \cdot \frac{G_s^*(\omega)}{S_\xi(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (120)$$

Обеспечиваемое им отношение сигнал/шум составляет

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\dot{G}_s(\omega)|^2}{S_\xi(\omega)} d\omega. \quad (121)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Предложить структурную схему фильтра, согласованного с видеоимпульсом, показанным на рис. 44, и определить форму отклика этого фильтра на сигнал $s_1(t)$.

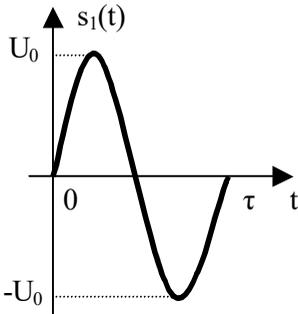


Рис. 44. Обнаруживаемый видеоимпульс из задачи 1.

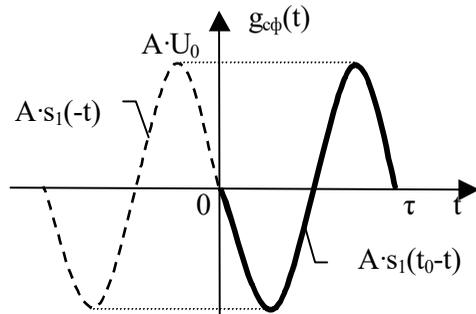


Рис. 45. Импульсная характеристика фильтра, согласованного с $s_1(t)$

Решение

а) На основании (116) импульсная характеристика фильтра, согласованного с сигналом $s_1(t)$ должна иметь вид, показанный на рис. 45, чему соответствует аналитическое выражение

$$g_{\text{сф}}(t) = -A \cdot U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot t / \tau).$$

Один из возможных способов реализации подобной импульсной характеристики предложен на рис. 46.

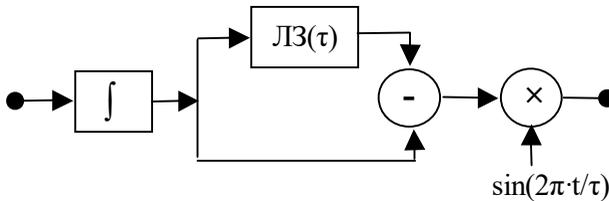


Рис. 46. Структурная схема фильтра, согласованного с сигналом $s_1(t)$

б) Так как согласованный фильтр - это линейное устройство и его импульсная характеристика известна, то наиболее простым способом расчета отклика такого фильтра на любой сигнал является интеграл Дюамеля

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) \cdot g_{\text{сф}}(t-x) dx. \quad (122)$$

Для уточнения пределов интегрирования проанализируем графики функций, входящих в интеграл Дюамеля, в отдельности для случаев $0 \leq t \leq \tau$ (см. рис. 47а) и $\tau \leq t \leq 2\tau$ (см. рис. 47б). В соответствии с первым из них при $0 \leq t \leq \tau$ интеграл принимает вид

$$s_2(t) = \int_0^t U_0 \cdot \sin(2\pi x / \tau) \cdot A \cdot U_0 \cdot \sin(2\pi(t-x) / \tau) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot \int_0^t \{ \cos(2\pi t / \tau) - \cos(2\pi(2x-t) / \tau) \} dx = \\
&= \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot t \cdot \cos(2\pi \cdot t / \tau) - \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot \frac{\tau}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot t / \tau)
\end{aligned}$$

).

Если заменить пределы интегрирования на показанные на рис. 47б и повторить расчет для моментов времени из интервала $\tau \leq t \leq 2\tau$, то нетрудно получить выражение аналогичное полученному выше.

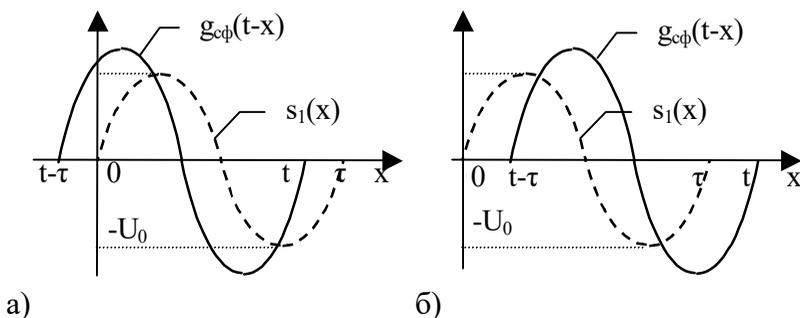


Рис. 47. Компоненты интеграла Дюамеля из задачи 1.

Объединяя эти результаты искомый сигнал можно записать в виде

$$s_2(t) = \begin{cases} \frac{AU_0^2}{2} \cdot t \cdot \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) - \text{sinc}\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{AU_0^2}{2} \cdot \left[(2\tau - t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) + t \cdot \text{sinc}\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right], & \text{при } \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases}$$

где функция $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.

Соответствующая найденному выражению реакция фильтра показана на рис. 48. Обратите внимание, что отклик достигает максимума в момент окончания входного сигнала и этот максимум равен $A \cdot \mathcal{E}_s$, где \mathcal{E}_s - энергия обрабатываемого сигнала.

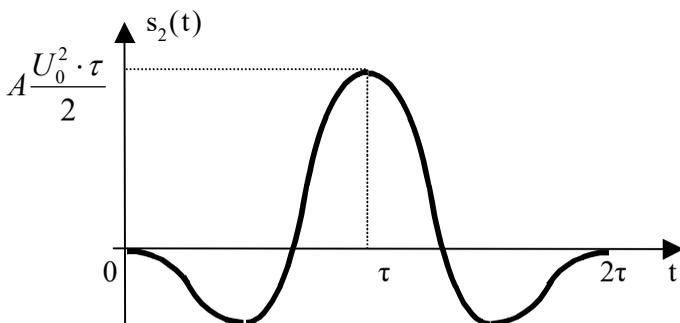


Рис. 48. Отклик согласованного фильтра на сигнал $s_1(t)$.

Задача 2. Существует ли сигнал, с которым согласован фильтр, имеющий комплексный коэффициент передачи

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j \cdot \omega} \quad ? \quad (123)$$

Решение

а) Ограничение, связанное с вопросами согласованной фильтрации, может относиться лишь к практической реализуемости фильтра, однако любому фильтру можно поставить в соответствие сигнал, с которым этот фильтр согласован

$$s_{\text{согл}}(t) = g_{\text{сф}}(t_0 - t) / A, \quad (124)$$

где t_0 и A - произвольные по величине константы.

б) Импульсная характеристика анализируемого фильтра, определяемая обратным преобразованием Фурье от (123), имеет вид

$$g_{\text{сф}}(t) = \exp(-\alpha \cdot t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом, согласованными с данным фильтром являются любые сигналы, удовлетворяющие соотношению

$$s_{\text{согл}}(t) = \exp(\alpha \cdot (t - t_0)) / A, \quad t \leq t_0.$$

Несколько возможных вариантов подобных сигналов показаны на рис. 49.

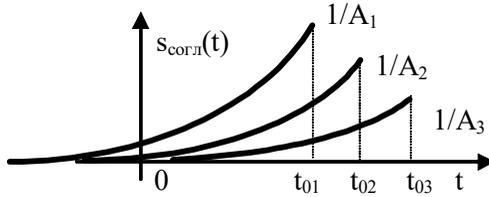


Рис. 49. Сигналы, согласованные с фильтром из задачи 2

Задача 3. Как изменятся требования к фильтру, рассмотренному в задаче 2, если согласованные с ним сигналы необходимо принимать на фоне помехи с корреляционной функцией

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \quad ? \quad (125)$$

Решение

а) Согласно теореме Винера-Хинчина (95) спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой производится теперь обнаружение сигналов, показанных на рис. 49, может быть найдена из выражения

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma_{\xi}^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = \frac{2 \cdot \sigma_{\xi}^2 \cdot \beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

б) Из (120) следует, что коэффициент передачи фильтра, обеспечивающего максимальное соотношение сигнал/шум при обнаружении сигналов на фоне шума с неравномерной спектральной мощности, связан с коэффициентом передачи согласованного фильтра соотношением

$$\dot{K}_{opt}(\omega) = \frac{\dot{K}_{\text{сф}}(\omega)}{S_{\xi}(\omega)}.$$

Таким образом, оптимальный фильтр должен обладать коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{opt}(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2 \cdot \beta} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha + j \cdot \omega} = K_0 \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha + j \cdot \omega}$$

где, в принципе, K_0 может быть произвольным по величине.

Задача 4. Полезный сигнал – импульс с линейной частотной модуляцией – имеет длительность $\tau = 5$ мкс и неизвестную амплитуду U . Этот полезный сигнал поступает на вход согласованного с ним фильтра. Источником шума на входе фильтра служит резистор $R = 100$ кОм, находящийся при температуре $T = 300$ К. При какой амплитуде сигнала отношение сигнал/шум на выходе фильтра будет удовлетворять соотношению

$$q_{сф}^2 \geq 5 ?$$

Решение

а) В соответствии с (118) обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал/шум определяется энергией \mathcal{E}_s полезного сигнала и спектральной плотностью мощности шума N_0 , на фоне которого производится обнаружение. Примерный вид обнаруживаемого сигнала показан на рис. 50. Поскольку средняя мощность гармонического сигнала не зависит от его частоты, то средняя за “период” мощность обнаруживаемого сигнала равна $U^2 / 2$, а энергия радиоимпульса продолжительности τ составляет

$$\mathcal{E}_s = \tau \cdot U^2 / 2.$$

б) Помехой, на фоне которой происходит обнаружение сигнала $s_{лчм}(t)$, служит тепловой шум, спектральная плотность мощности которого (в соответствии с (101)) равна

$$N_0 = 2 \cdot k \cdot T \cdot R,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/(Гц*Град) - постоянная Больцмана.

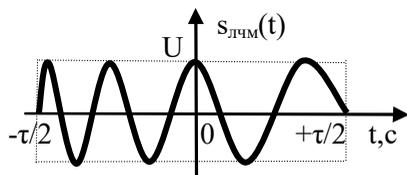


Рис. 50. Импульс с линейной частотной модуляцией из задачи 4

в) Итак, для выполнения требований задания необходимо,

$$\text{чтобы выполнялось неравенство } \frac{\tau \cdot U^2}{4 \cdot k \cdot T \cdot R} \geq 5,$$

откуда для амплитуды обнаруживаемого сигнала получаем

$$U \geq \sqrt{5 \cdot \frac{4 \cdot k \cdot T \cdot R}{\tau}} = \sqrt{5 \cdot \frac{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^{-6}}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ (В)}.$$

Т.е. заданные условием требования к соотношению сигнал/шум на выходе устройства обработки обеспечиваются при амплитуде обнаруживаемых сигналов, превышающей 40 мкВ.

Задача 5. Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала $s(t)$ показана на рис. 51. Если на вход фильтра, согласованного с этим сигналом, подать белый шум (без полезного сигнала), то какова будет спектральная плотность мощности отклика фильтра?

Решение

а) В соответствии с частотным методом анализа случайных процессов в линейных цепях для оценки спектральных характеристик процесса на выходе цепи необходимо знать квадрат ее амплитудно-частотной характеристики. Вместе с тем, формула (117) полностью определяет комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра и согласно ей

$$|\dot{K}_{сф}(\omega)| = A \cdot |G_s^*(\omega)|.$$

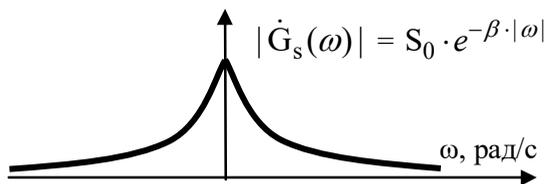


Рис. 51. Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала из задачи 5

б) Исходя из соотношения (107) спектральная плотность мощности на выходе цепи может быть представлена в виде

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = S_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot |\dot{K}_{\text{сф}}(\omega)|^2.$$

При воздействии на вход фильтра белого шума, имеющего равномерную по частоте спектральную плотность мощности, форма $S_{\text{ВЫХ}}(\omega)$ будет определяться коэффициентом передачи фильтра. В рассматриваемом случае, очевидно, $S_{\text{ВЫХ}}(\omega)$ будет максимальна на нулевой частоте. Вместе с тем, входящий в (117) коэффициент A произволен по величине, поэтому мы принципиально не можем определить точное значение $S_{\text{ВЫХ}}(0)$.

Итак, без уточнения величины параметра A , входящего в коэффициент передачи согласованного фильтра, может быть определена лишь форма спектральной плотности мощности шума на выходе фильтра, которая показана на рис. 52.

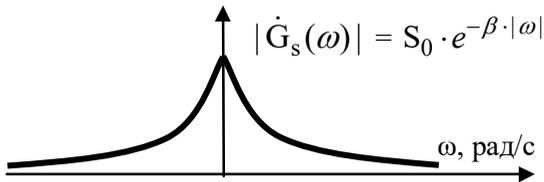


Рис. 52. Спектральная плотность мощности шума, наблюдаемого на выходе согласованного фильтра из задачи 5

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

3.1. Общие рекомендации по выполнению контрольного задания

Индивидуальный вариант задания определяется по трем последним цифрам в номере зачетной книжки «***АБВ». Первые из этих цифр («АБ» или, иначе говоря, сотни и десятки в составе номера зачетки) определяют номер строки в табл. 6 и 7, содержащих номера задач, входящих в Ваш вариант задания. Последняя цифра «В» в номере зачетки определяет для каждой задачи подвариант, смысл которого определяется непосредственно текстом задачи (см. 10-строковую табличку к каждой из далее приведенных задач).

Таблица 6

Набор задач, входящих в контрольную работу
к первому семестру изучения курса «ТВиСП»

Вариант «***АБ*»	Перечень номеров задач из раздела 3.2					
	1	2	3	4	5	6
00, 25, 50, 75	1	6	8	14	17	21
01, 26, 51, 76	4	9	7	15	18	24
02, 27, 52, 77	2	5	6	13	19	21
03, 28, 53, 78	2	8	9	12	20	27
04, 29, 54, 79	3	8	10	11	16	21
05, 30, 55, 80	1	7	8	15	17	24
06, 31, 56, 81	3	6	9	11	18	21
07, 32, 57, 82	6	7	10	12	19	24
08, 33, 58, 83	4	7	8	13	20	21
09, 34, 59, 84	2	6	9	14	16	24
10, 35, 60, 85	5	7	8	15	18	21

Продолжение табл. 6

<i>11, 36, 61, 86</i>	1	8	9	11	20	21
<i>12, 37, 62, 87</i>	4	6	9	12	19	24
<i>13, 38, 63, 88</i>	6	7	8	13	18	21
<i>14, 39, 64, 89</i>	2	9	10	14	20	24
<i>15, 40, 65, 90</i>	2	6	7	12	16	21
<i>16, 41, 66, 91</i>	1	5	8	15	20	24
<i>17, 42, 67, 92</i>	3	8	9	11	19	21
<i>18, 43, 68, 93</i>	6	7	10	11	17	24
<i>19, 44, 69, 94</i>	2	7	9	15	17	21
<i>20, 45, 70, 95</i>	2	5	8	13	16	21
<i>21, 46, 71, 96</i>	1	4	9	12	17	24
<i>22, 47, 72, 97</i>	5	6	7	11	20	21
<i>23, 48, 73, 98</i>	4	7	8	15	19	24
<i>24, 49, 74, 99</i>	5	8	10	12	20	21

Таблица 7

Набор задач, входящих в контрольную работу
к второму семестру изучения курса «ТВиСП»

Вариант «***АБ*»	Перечень номеров задач из раздела 3.2				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>00, 25, 50, 75</i>	25	28	32	34	35
<i>01, 26, 51, 76</i>	25	26	29	32	34
<i>02, 27, 52, 77</i>	26	27	30	32	33
<i>03, 28, 53, 78</i>	27	28	32	34	35

Продолжение табл. 7

<i>04, 29, 54, 79</i>	26	27	29	31	32
<i>05, 30, 55, 80</i>	25	26	30	34	35
<i>06, 31, 56, 81</i>	27	28	32	34	35
<i>07, 32, 57, 82</i>	24	27	29	33	34
<i>08, 33, 58, 83</i>	25	26	30	32	34
<i>09, 34, 59, 84</i>	26	27	28	31	32
<i>10, 35, 60, 85</i>	27	28	29	32	35
<i>11, 36, 61, 86</i>	25	27	30	32	34
<i>12, 37, 62, 87</i>	26	27	28	33	35
<i>13, 38, 63, 88</i>	26	28	29	32	34
<i>14, 39, 64, 89</i>	24	27	30	34	35
<i>15, 40, 65, 90</i>	25	27	28	32	34
<i>16, 41, 66, 91</i>	26	27	29	32	33
<i>17, 42, 67, 92</i>	27	28	30	32	35
<i>18, 43, 68, 93</i>	26	27	28	30	31
<i>19, 44, 69, 94</i>	27	29	32	34	35
<i>20, 45, 70, 95</i>	25	26	27	30	34
<i>21, 46, 71, 96</i>	24	26	28	32	33
<i>22, 47, 72, 97</i>	25	26	27	29	32
<i>23, 48, 73, 98</i>	26	27	30	31	32
<i>24, 49, 74, 99</i>	25	27	28	32	35

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли N человек. Предполагая, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго, найти вероятность того, что...

Но-мер	N	Событие
1	3	все пассажиры выйдут на разных этажах
2	3	двое выйдут на одном этаже, а остальные на разных
3	3	хотя бы один из них выйдет на 5-м этаже или выше
4	4	все пассажиры выйдут на разных этажах
5	4	двое выйдут на одном этаже, а остальные на разных
6	4	по меньшей мере двое выйдут на 6-м этаже или выше
7	5	все пассажиры выйдут на разных этажах
8	5	двое выйдут на одном этаже, а остальные на разных
9	5	по меньшей мере трое выйдут на 7-м этаже или выше
10	6	все пассажиры выйдут на разных этажах

2. В касе сопротивлений имеется пять резисторов номиналом 1 кОм, три резистора номиналом 3 кОм и два – по 5 кОм. Взятые наугад три резистора соединяются последовательно. Какова вероятность того, что получившееся соединение будет...

Но-мер	Событие
1	состоять лишь из резисторов разных номиналов?
2	состоять лишь из резисторов одного номинала?
3	включать по меньшей мере пару совпадающих резисторов?
4	иметь сопротивление ровно 3 кОм?

5	иметь сопротивление ровно 5 кОм?
6	иметь сопротивление ровно 7 кОм?
7	иметь сопротивление более 12 кОм?
8	иметь сопротивление более 10 кОм?
9	иметь сопротивление менее 8 кОм?
10	иметь сопротивление менее 6 кОм?

3. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Пусть (ξ, η) - ее координаты. Найти вероятность того, что...

Но- мер	Событие
1	будет выполняться неравенство $e^{\xi} - 1 \leq \eta$
2	одновременно выполняются неравенства $\xi + \eta \leq 1$ и $\xi \cdot \eta \leq 2/9$
3	одновременно выполняются неравенства $\xi + \eta > 1$ и $\xi \cdot \eta \leq 2/9$
4	удаление точки от начала координат не превысит 1
5	точка (ξ, η) попадет внутрь круга, вписанного в данный квадрат
6	точка (ξ, η) будет лежать вне круга, вписанного в данный квадрат
7	корни уравнения $x^2 - \xi \cdot x + \eta = 0$ будут действительными числами
8	произведение корней уравнения $x^2 + \xi \cdot x + \eta = 0$ будет меньше $\xi/3$
9	уравнение $x^2 + \xi \cdot x + \eta = 0$ будет иметь совпадающие корни
10	сумма корней уравнения $x^2 - \xi \cdot x + \eta = 0$ будет меньше $\eta/3$

4. Из 10 имеющихся в наличии светодиодов, 4 из которых бракованные, случайным образом произведён выбор N приборов. Какова вероятность того, что среди выбранных...

Но-мер	N	Событие
1	2	будет один годный и один бракованный прибор?
2	2	будет по меньшей мере один годный прибор?
3	2	будет по меньшей мере один бракованный прибор?
4	3	будет не более двух годных светодиодов?
5	3	будет не более двух бракованных светодиодов?
6	3	будет нечетное число бракованных светодиодов?
7	4	будут лишь бракованные приборы?
8	4	будет ровно 3 бракованных светодиода?
9	5	будет ровно 2 бракованных прибора?
10	5	будут лишь годные светодиоды?

5. На ограничитель поступает последовательность из N случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом $P_{\text{прев}}$ указана во втором столбце таблицы. Сколько импульсов (N) должно входить в последовательность, чтобы вероятность того, что из них...

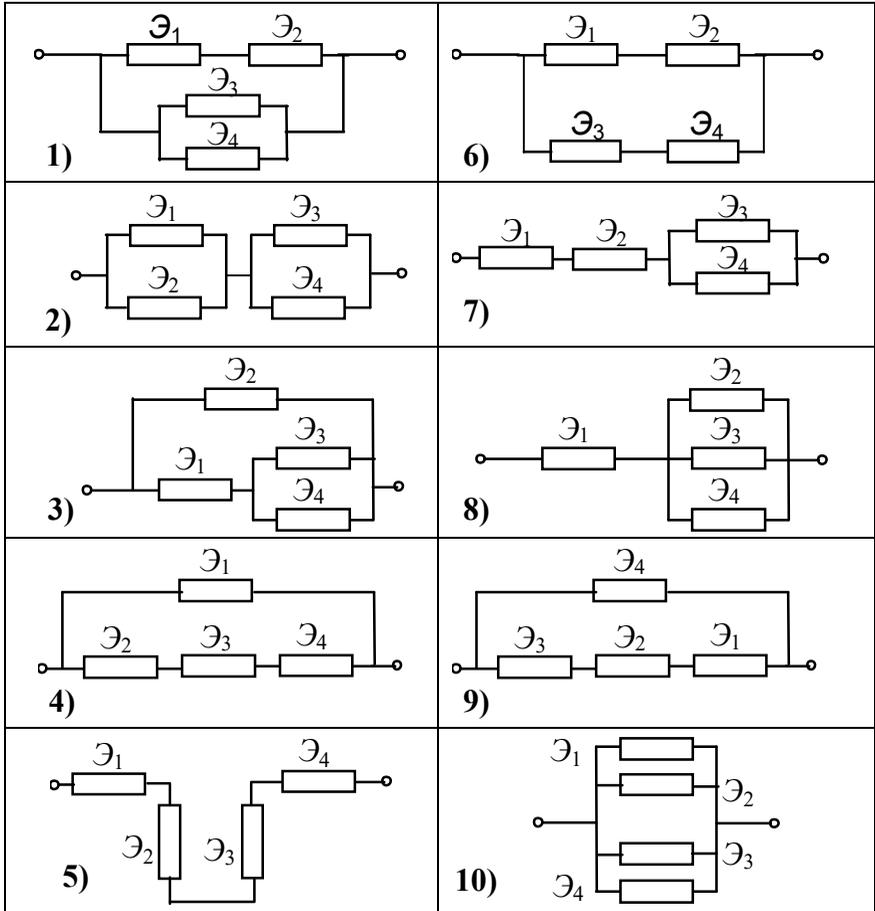
Но-мер	$P_{\text{прев}}$	Событие
1	0,2	хотя бы один превысит порог составила не менее 0,8?
2	0,25	хотя бы один превысит порог составила не более 0,6?
3	0,3	все будут ниже порога была не меньше 0,4?
4	0,4	все будут ниже порога была не больше 0,2?
5	1/2	ровно 2 будут ниже порога была равна 3/8? (<i>перебором</i>)
6	1/3	ровно 1 будет ниже порога была равна 8/81? (<i>перебором</i>)

7	0,25	хотя бы один будет ниже порога составила не менее 0,99?
8	0,3	хотя бы один будет ниже порога составила не более 0,95?
9	0,4	все будут выше порога была не меньше 0,1?
10	0,5	все будут выше порога была не больше 0,2?

6. Радиолокационная станция ведет наблюдение за группой из N объектов (второй столбец таблицы). Каждый объект за время наблюдения может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что за время наблюдения...

Но-мер	N	Событие
1	4	все объекты будут потеряны
2	4	хотя бы один объект будет потерян
3	5	не менее двух объектов будет потеряно
4	5	ни один из объектов не будет потерян
5	6	по меньшей мере 3 объекта будет потеряно
6	6	будет потеряно нечетное число объектов
7	7	будет потеряно четное положительное число объектов
8	7	будет потеряно ровно 3 объекта
9	8	будет потеряно ровно 2 объекта
10	8	будет потеряно не более одного объекта

7. Цепь, структура которой в соответствии с индивидуальными подвариантами заданий представлена в таблице на следующей странице, состоит из четырех элементов $\mathcal{E}_{1,2,3,4}$. Вероятности безотказной работы элементов в течение года соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Выходы из строя элементов цепи – независимые события. Какова вероятность разрыва цепи в течение года?



8. Информационная система использует для передачи сообщений три отличающихся по характеристикам радиоканала, причем по первому каналу отправляется 50% сообщений, по второму – 30%, а остальные передаются по третьему каналу. Руководствуясь вероятностями ошибочной передачи информации, приведенными в таблице на следующей странице, определите вероятность события, помеченную знаком (?)

Но- мер	Вероятность возникновения ошибки (%)			
	безусловная (без учета канала)	в первом канале	во втором канале	в третьем канале
1	15	10	20	Ⓚ
2	15	12	Ⓚ	15
3	4	Ⓚ	5	7,5
4	Ⓚ	2	10	5
5	5	Ⓚ	10	5
6	3	2	Ⓚ	4
7	4	1	5	Ⓚ
8	6	8	Ⓚ	2,5
9	5	Ⓚ	5	2,5
10	Ⓚ	4	6	1

9. Некоторое сообщение закодировано двоичным кодом, причем вероятность появления на очередной позиции “0” или “1” не зависит от предыдущих символов сообщения. Вероятности искажения информационных символов при передаче представлены в таблице ниже. Определить соотношение числа нулей и единиц в сообщении, если известно, что общая вероятность...

Но- мер	$P\{“0” \rightarrow “1”\}$	$P\{“1” \rightarrow “0”\}$	Дополнительная информация
1	10%	30%	ошибки составляет 16%
2	20%	25%	приема “0” составляет 69%
3	25%	20%	правильного приема составляет 78%
4	30%	10%	приема “1” составляет 66%
5	10%	30%	ошибки составляет 13%
6	20%	25%	приема “0” составляет 58%

7	20%	10%	правильного приема составляет 84%
8	30%	10%	приема “1” составляет 60%
9	20%	40%	ошибки составляет 30%
10	10%	20%	приема “0” составляет 62%

10. Показатели качества радиоаппаратуры, собираемой разными по квалификации радиомонтажниками, представлены в таблице

Радиомонтажник	Процент аппаратуры, начинающей работать...			
	сразу	после подстройки	после 2-3 доработок	никогда
Опытный	70	20	10	0
Выпускник – отличник	40	50	10	0
Выпускник – хорошист	10	40	40	10
Выпускник – троечник	0	10	40	50

Количество радиомонтажников каждой квалификации, работающих на некоторой фирме, показано в средних четырех столбцах таблицы ниже. Какова вероятность, что очередное изделие было изготовлено выпускником вуза – хорошистом, если оно...

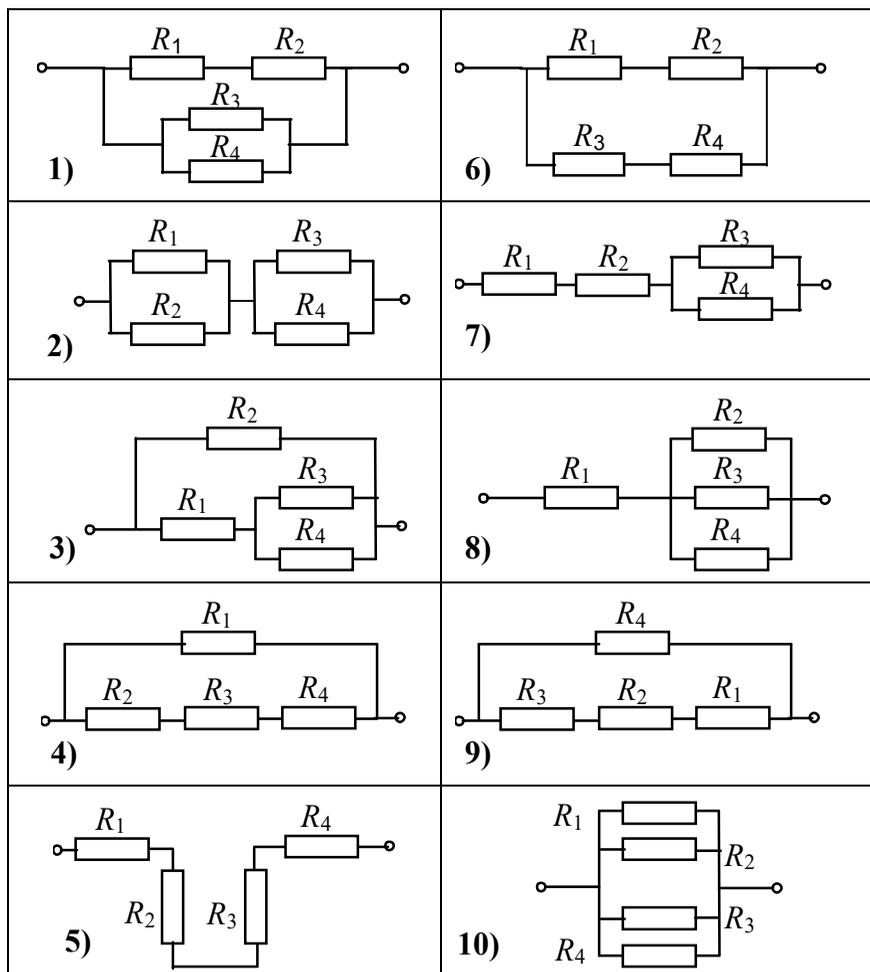
Номер	Опытных	Отличников	Хорошистов	Троечников	Событие
1	2	5	2	1	заработало после подстройки
2	4	4	2	0	заработало сразу
3	3	2	2	3	заработало после 3 доработок
4	1	4	4	1	не заработало

5	0	5	5	0	заработало после подстройки
6	0	6	3	1	заработало сразу
7	1	2	3	4	заработало после 3 доработок
8	0	3	5	2	не заработало
9	2	3	3	2	заработало после подстройки
10	3	1	2	4	заработало сразу

11. Два радиомонтажника параллельно друг с другом изготавливают одинаковые устройства. Изделия, изготавливаемые первым радиомонтажником, оказываются работоспособными сразу после сборки с вероятностью 80%. Вероятность готовности к работе для изделий второго радиомонтажника составляет лишь 0,5. Построить функцию распределения вероятностей числа годных к работе изделий, изготовленных за рабочий день, если за это время...

Но- мер	первым радиомонтажни- ком изготовлено	вторым радиомонтажни- ком изготовлено
1	2 изделия	3 изделия
2	4 изделия	1 изделие
3	5 изделий	0 изделий
4	2 изделия	2 изделия
5	3 изделия	1 изделие
6	0 изделий	4 изделия
7	1 изделие	4 изделия
8	2 изделия	1 изделие
9	3 изделия	0 изделий
10	4 изделия	0 изделий

12. Цепь, структура которой в соответствии с индивидуальными подвариантами заданий представлена в таблице, состоит из четырёх резисторов $R_{1,2,3,4}$. Резисторы R_3 и R_4 имеют сопротивление 4 кОм, а резисторы R_1 и R_2 могут равновероятно принимать значения 2 или 4 кОм. Построить график функции распределения сопротивления цепи.



13. Определить неизвестный параметр(ы) функции распределения случайной величины ξ и определить вероятность попадания этой величины в интервал от нуля до двух $P\{0 \leq \xi \leq 2\}$, если...

Но- мер	Функция распределения СВ ξ имеет вид	Диапазон допустимых значений аргумента x
1	$A + B \cdot \arctg(x)$	$-\infty < x < +\infty$
2	$A \cdot x^2 - 1$	$\sqrt{2} \leq x \leq 2$
3	$A - B / x^2$	$1 < x < +\infty$
4	$A \cdot x + B$	$-1 \leq x \leq 3$
5	$A - B \cdot \exp(-x / 2)$	$0 \leq x < +\infty$
6	$(A \cdot x)^2$	$0 \leq x \leq 4$
7	$A + B \cdot \sin(\pi \cdot x / 2)$	$-1 \leq x \leq 1$
8	$A + B \cdot \sin(\pi \cdot x / 6)$	$-1 \leq x \leq 1$
9	$A \cdot (x - 0,5 \cdot x^2)$	$0 \leq x \leq 1$
10	$A \cdot x^3 + B$	$-1 \leq x \leq 2$

14. Непрерывная случайная величина ξ задана своей плотностью распределения вероятностей, приведенной в таблице ниже. Определить значение входящего в выражение для $W_{\xi}(x)$ неизвестного параметра A и определить вероятность попадания этой величины в интервал, указанный в правой колонке таблицы.

Но- мер	Плотность распределения СВ ξ	Искомая вероят- ность
1	$A \cdot x$ при $0 \leq x \leq 4$	$P\{\xi < +1,5\}$
2	$A \cdot (1 - x / 2)$ при $-2 \leq x \leq 2$	$P\{ \xi < 1,0\}$
3	$A \cdot (x - 0,5)$ при $1 \leq x \leq 2$	$P\{\xi > 1,0\}$

4	$A \cdot \sin(x)$ при $0 \leq x \leq \pi$	$P\{\xi < \pi/2\}$
5	A/x^4 при $1 \leq x < +\infty$	$P\{\xi > 2,0\}$
6	$2 \cdot \cos^2(x)/A$ при $-\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$	$P\{-\pi/3 < \xi < 0,0\}$
7	$A \cdot \exp(x)$ при $0 \leq x \leq 2$	$P\{\xi > 1,0\}$
8	$A \cdot \sin(\pi \cdot x/2)$ при $0 \leq x \leq 1$	$P\{0,5 < \xi < 1,0\}$
9	$A/(1+x^2)$ при $1 \leq x < +\infty$	$P\{\xi < \sqrt{3}\}$
10	$A \cdot \exp(-2 \cdot x)$ при $-\infty < x < +\infty$	$P\{ \xi < 1,0\}$

15. Случайная величина ξ характеризуется представленной в таблице ниже функцией распределения. Найти вероятность попадания этой СВ в интервал от А до В и построить плотность вероятности $W_{\xi}(x)$, если...

Но- мер	Функция распределения СВ ξ	А	В
1	$(x-2)^2$, при $2 \leq x \leq 3$	1,0	2,5
2	x^2 , при $0 \leq x \leq 1$	0,1	0,8
3	$1 - 1/x$, при $1 \leq x < +\infty$	4,0	$+\infty$
4	$1 + x$, при $-1 \leq x \leq 0$	-0,5	+0,5
5	$\begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0,3, & 2 < x \leq 3 \\ 0,5, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$	2,5	3,5
6	$\begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0,25, & x = 1 \\ 0,125 + x/8, & 1 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$	0,0	3,0
7	$\sin(\pi \cdot x/4)$, при $0 \leq x \leq 2$	1,5	2,0

8	$\exp(2 \cdot x), x \leq 0$	$-\infty$	-0,5
9	$1 / (1 + x^2), x \leq 0$	-0,5	0,0
10	$\cos(\pi \cdot x / 4), \text{ при } -2 \leq x \leq 0$	-1,0	0,0

Примечание: если в формулах, приведенных выше, не учтены какие-либо интервалы, то это означает, что функция распределения принимает для подобных аргументов вырожденное значение (0 или 1)

16. По приведенному в таблице ряду распределения вероятностей дискретной случайной величины ξ рассчитать для нее вероятность свершения события, указанного в последней колонке таблицы

Но- мер	Характеристики анализируе- мой случайной величины					Событие, вероятность которого надо рассчитать
	x_i					
1	x_i	0,2	0,5	1,0	1,5	$\xi \leq M_\xi$
	p_i	0,20	⊙	0,25	0,35	
2	x_i	-5	-2	3	5	$\xi > M_\xi$
	p_i	⊙	0,1	0,4	0,1	
3	x_i	-2	0	2	3	$\xi \leq D_\xi$
	p_i	0,2	⊙	0,1	0,4	
4	x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	$\xi > D_\xi$
	p_i	0,4	0,3	0,2	⊙	
5	x_i	12	15	20	22	$\xi \leq M_\xi$
	p_i	0,1	0,2	⊙	0,4	
6	x_i	0,0	1,0	1,2	1,5	$\xi > M_\xi$
	p_i	0,38	0,27	0,16	⊙	
7	x_i	-20	-15	-10	-5	$\xi \leq -D_\xi$
	p_i	⊙	0,2	0,4	0,2	

8	x_i	2	4	7	10	$\xi > D_\xi$
	p_i	0,3	0,2	0,3	⊙	
9	x_i	-3	-1	2,6	4	$\xi > \sigma_\xi$ (σ_ξ - среднее квадратическое отклонение)
	p_i	0,1	⊙	0,5	0,1	
10	x_i	0,1	0,3	0,5	1,0	$\xi \leq \sigma_\xi$ (σ_ξ - среднее квадратическое отклонение)
	p_i	0,5	0,3	⊙	0,1	

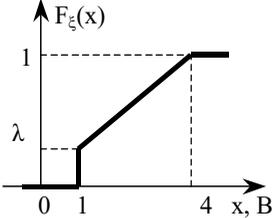
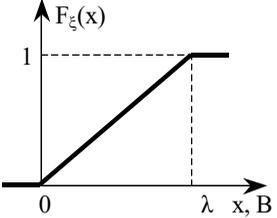
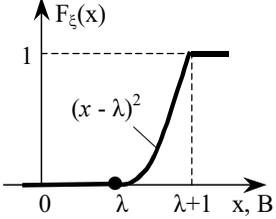
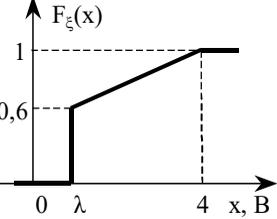
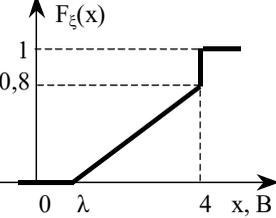
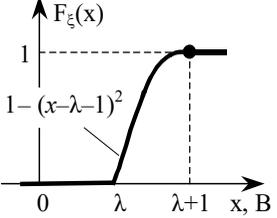
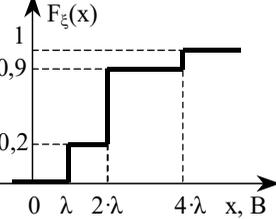
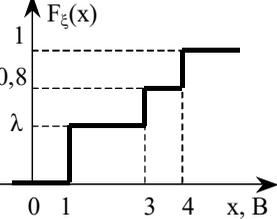
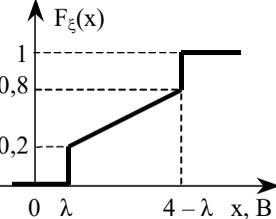
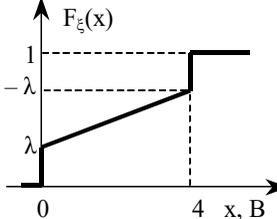
17. По заданным в таблице ниже математическому ожиданию и дисперсии дискретной случайной величины ξ , принимающей лишь указанные в той же таблице значения А, В и С, определить ее ряд распределения вероятностей.

Но- мер	Математическое ожидание M_ξ	Дисперсия D_ξ	А	В	С
1	-6	12	-10	-4	0
2	-2	3	-5	-3	0
3	-1,5	2,25	-4	-2	0
4	0	6	-4	0	+2
5	0	4,8	-4	0	+4
6	0,4	1,84	-1	0	+2
7	1	0,6	0	+1	+2
8	2	2,8	0	+1	+4
9	2	3	0	+2	+5
10	5	7	+3	+5	+10

18. Форма плотности распределения вероятностей случайного напряжения ξ определяется представленным ниже рисунком, где параметр λ – некоторая неизвестная константа. Определить значение данной константы, если среднее квадратическое отклонение этого напряжения составляет $\sigma_\xi = 2$ В.

Но- мер	Плотность распределе- ния вероятностей СВ ξ	Но- мер	Плотность распределе- ния вероятностей СВ ξ
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

19. Функция распределения вероятностей случайного напряжения ξ соответствует представленному ниже рисунку, где параметр λ – некоторая неизвестная константа. Определить значение данной константы, если математическое ожидание напряжения составляет $M_\xi = 2$ В.

Но- мер	Функция распределения вероятностей СВ ξ	Но- мер	Функция распределе- ния вероятностей СВ ξ
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

20. Рассчитать математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , характеристики которой определяются функцией распределения вероятностей

Но-мер	Функция распределения вероятностей СВ ξ	Но-мер	Функция распределе-ния вероятностей СВ ξ
1	$\begin{cases} 0,5 \cdot e^{\lambda x}, & \text{при } x < 0 \\ 1 - 0,5 \cdot e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 1,5 \cdot x, & \text{при } 0 < x < 0,5 \\ 2 \cdot x - x^2, & \text{при } 0,5 < x < 1 \end{cases}$
2	$\cos^2(\pi \cdot x / 8), -4 \leq x \leq 0$	7	$0,5 + x / 4, -2 \leq x \leq 2$
3	$\begin{cases} 0,5 + x, & \text{при } -0,5 < x < 0 \\ \frac{4 + 4x - x^2}{8}, & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 0,5 + x, & \text{при } -0,5 < x < 0 \\ 1 - 0,5 \cdot e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$
4	$1 / (1 + x^2), -\infty < x \leq 0$	9	$\frac{\sin^2(\pi \cdot x / 16), 0 \leq x \leq 8}{8}$
5	$\ln(x), 1 \leq x \leq e$	10	$0,5 \cdot (1 + x), 0 \leq x \leq 1$

21. Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1

Определить закон распределения и математическое ожидание величины η , получаемой из ξ функциональным преобразованием...

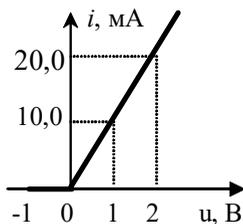
Но-мер	$\eta = f(\xi)$	Но-мер	$\eta = f(\xi)$
1	$\eta = \sin(\pi \cdot \xi / 2)$	6	$\eta = \cos(\pi \cdot \xi / 2)$
2	$\eta = (\xi - 4)^2$	7	$\eta = (\xi - 2)^2$
3	$\eta = 3 \cdot \xi - 2 $	8	$\eta = 2 \cdot \xi - 4 $
4	$\eta = \xi - 3 $	9	$\eta = (\xi - 3)^3$

5	$\eta = 25 - \xi^2$	10	$\eta = \sin^2(\pi \cdot \xi / 2)$
---	---------------------	----	------------------------------------

22. Случайная величина ξ подчиняется нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и параметром σ , представленным в центральной колонке таблицы ниже. Определить закон распределения случайной величины η , связанной с СВ ξ функцией...

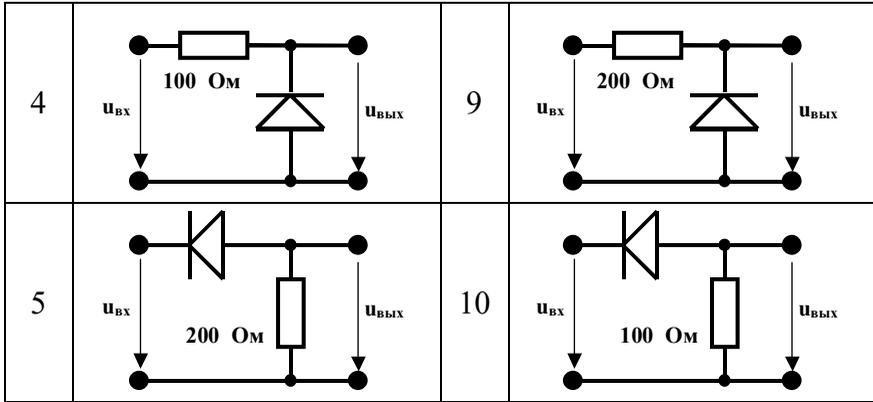
Номер	Параметр распределения σ_ξ	Функциональная зависимость $\eta = f(\xi)$
1	2	$\eta = \begin{cases} -2 & \text{при } \xi \leq -4 \\ 0,5 \cdot \xi & \text{при } -4 \leq \xi \leq 0 \\ 2 \cdot \xi & \text{при } \xi \geq 0 \end{cases}$
2	3	$\eta = \exp(\xi^2)$
3	2	$\eta = \begin{cases} -2 \cdot \xi & \text{при } \xi \leq -2 \\ 4 & \text{при } -2 \leq \xi \leq 0 \\ 4 + 0,5 \cdot \xi & \text{при } \xi \geq 0 \end{cases}$
4	1	$\eta = \sqrt{ \xi }$
5	2	$\eta = \begin{cases} \xi^2 & \text{при } \xi > 2 \\ 4 & \text{при } \xi \leq 2 \end{cases}$
6	3	$\eta = \xi / 3 $
7	2	$\eta = \begin{cases} \exp(\xi^2) & \text{при } x < 0 \\ -\exp(\xi^2) & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$
8	1	$\eta = 1 - \xi^2$
9	2	$\eta = \begin{cases} -2 & \text{при } \xi \leq -2 \\ 0 & \text{при } -2 \leq \xi \leq 2 \\ 2 & \text{при } \xi \geq 2 \end{cases}$
10	3	$\eta = 1 + \xi^2$

23. Вольт-амперная характеристика диода аппроксимирована кусочно-линейной зависимостью, представленной на рисунке



Определить закон распределения и математическое ожидание напряжения на выходе цепи, представленной в таблице ниже, если на ее вход воздействует случайное воздействие с плотностью вероятности $W_{u_{вх}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$, 1/B

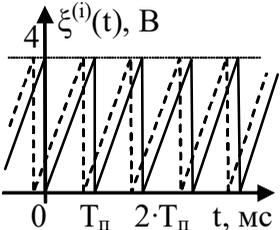
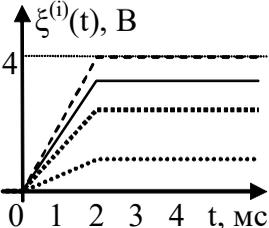
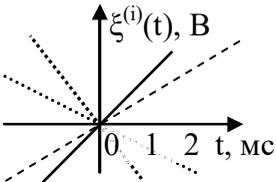
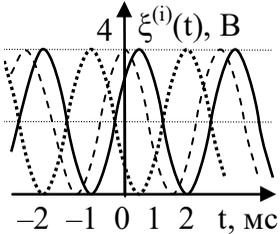
Но-мер	Цепь	Но-мер	Цепь
1		6	
2		7	
3		8	



24. Напряжение η , наблюдаемое на выходе квадратичного детектора, связано со случайным сигналом ξ , поступающим на вход, соотношением $\eta = 2 \cdot \xi^2$. Определить закон распределения и математическое ожидание величины η , если распределение СВ ξ ...

Но- мер	$W_{\xi}(x)$	Но- мер	$W_{\xi}(x)$
1	соответствует равномерному распределению с пределами $a = -2, b = +2$	6	соответствует нормальному распределению с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1,5$
2	$\begin{cases} 0,2 \cdot x & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 0,1 & \text{при } -6 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0,2 & \text{при } -2 \leq x \leq 0 \\ 0,6 & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{при прочих } x \end{cases}$
3	$0,3 + 0,4 \cdot \delta(x-1)$ при $-1 \leq x \leq 1$	8	$1/\pi \cdot (1+x^2)$ при любых x
4	$\frac{1 + \sin(x)}{\pi}$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2}$	9	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$ при $-1 \leq x \leq 1$
5	$0,5 \cdot \exp(- x)$ при любых x	10	$0,4 \cdot (1 - x)$ при $ x \leq 2,5$

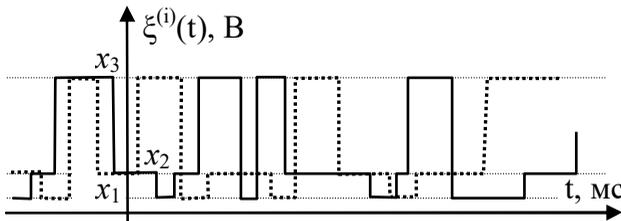
25. Пользуясь описанием случайного процесса из последнего столбца таблицы, приведенной ниже, определить его дисперсию для указанного во втором столбце таблицы момента времени t_1 .

Но- мер	t_1 , (мс)	Характеристика / типовые реализации случайного процесса
1	$T_{\pi}/2$	<p>периодический эргодический СП со случайной начальной фазой</p> 
2	4	<p>на участке $0 \dots 2$ (мс) процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 2$ мс равномерно принимает любые значения между 1 и 4 вольтами</p> 
3	1	<p>совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равномерно принимает любые значения между $-4 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4$ В/сек</p> 
4	0	<p>периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой</p> 

5	2	<p>на участке $0 \dots 4$ (мс) процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 4$ мс равновероятно принимает любые значения между 1 и 4 вольтами</p>	
6	T_{Π}	<p>периодический эргодический СП со случайной начальной фазой</p>	
7	0	<p>периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой</p>	
8	$T_{\Pi}/3$	<p>периодический эргодический СП со случайной начальной фазой</p>	
9	1	<p>совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равновероятно принимает любые значения между 0 и $4 \cdot 10^4$ В/сек</p>	

7	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 99,74% значений шума лежат в диапазоне от минус 6 до плюс 6 вольт.
8	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +8$ (В) составляет 2,27%.
9	эффективное значение процесса составляет 3 вольт, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 15,87%.
10	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_{\sim} = 9$ (В ²), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +1,5$ (В) составляет 30,85%.

27. Эргодический случайный процесс в каждый момент времени принимает какое-то одно из 3 разрешенных значений. Форма реализаций этого процесса приближенно показана на рисунке, а постоянные составляющие всех реализаций одинаковы и равны +4 (В). Вычислить все неизвестные константы и записать аналитическое выражение для плотности вероятности процесса $\xi(t)$, если...

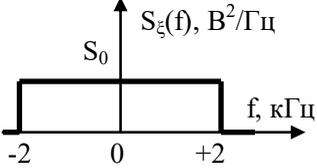
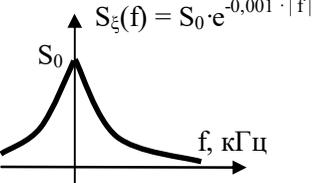
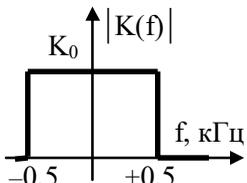
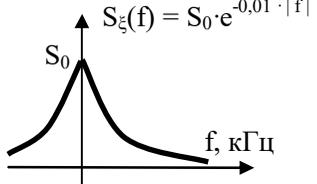
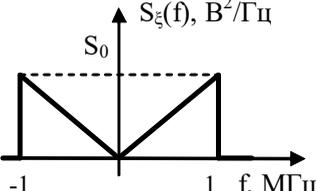
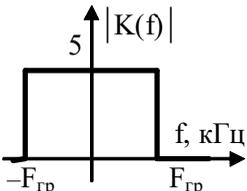
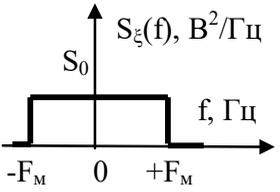
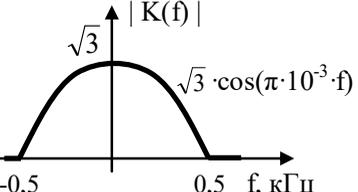
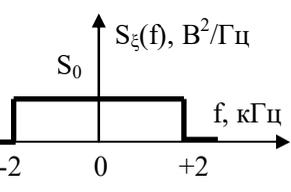
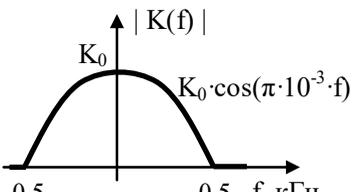


Но- мер	Дополнительное условие
1	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 10$ (В), а средняя мощность реализаций процесса равна 25,5 (В ²).

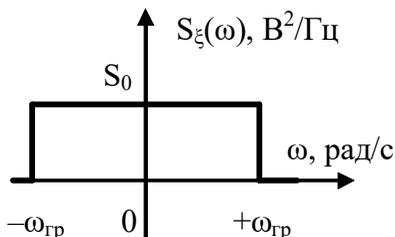
2	все уровни $x_1 \dots x_3$ больше нуля, каждый последующий разрешенный уровень в 3 раза больше предыдущего, а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
3	среднее время пребывания на уровне $x_1 = 2$ (В) совпадает со средним время пребывания на уровне $x_3 = 8$ (В), а продолжительность пребывания на уровне x_2 вдвое больше.
4	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 10$ (В), а средняя мощность переменной составляющей этих реализаций равна 12 (В ²).
5	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 3$ (В), а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
6	среднее время пребывания на уровне $x_1 = 1$ (В) совпадает со средним время пребывания на уровне $x_3 = 8$ (В), а продолжительность пребывания на уровне x_2 вдвое меньше.
7	все уровни $x_1 \dots x_3$ больше нуля, каждый последующий разрешенный уровень вдвое больше предыдущего, а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
8	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 2$ (В), а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
9	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = -2$, $x_2 = +1$, $x_3 = +8$ (В), а средняя мощность переменной составляющей этих реализаций равна 17 (В ²).
10	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 3$ (В), а среднее время пребывания реализаций на уровне x_1 в 1,5 раза меньше времени пребывания на уровне x_2 и в 2,5 раза меньше, чем время пребывания на уровне x_3 .

28. Случайный процесс с показанной в левом столбце таблицы ниже спектральной плотностью мощности воздействует на вход фильтра, определяемого центральным столбцом той же таблицы. После прохождения через фильтр мощность случайного процесса не изменяется. Определить значение параметра, приведенного в последнем столбце таблицы.

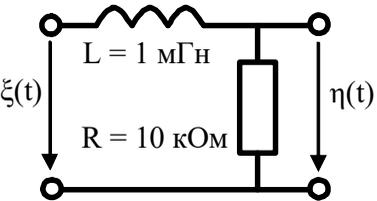
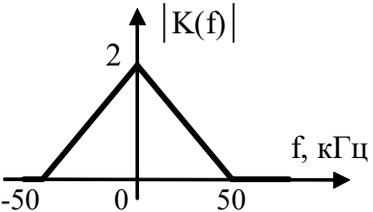
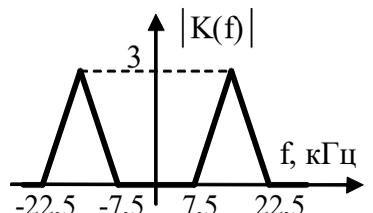
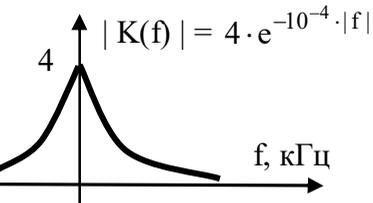
Но- мер	Спектральная плотность мощности воздействия	Фильтр / схема фильтра	Ис- кать
1			$F_{гр}$
2			F_M
3			K_0
4			$F_{гр}$

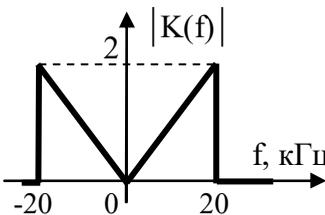
5		$ K(f) = 2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot f }$	α
6			K_0
7		$ K(f) = 1,1 \cdot e^{-\alpha \cdot f }$	α
8			$F_{гр}$
9			F_M
10			K_0

29. На фильтр, схема которого приведена в таблице ниже, действует нормальный случайный процесс, имеющий прямоугольную спектральную плотность мощности

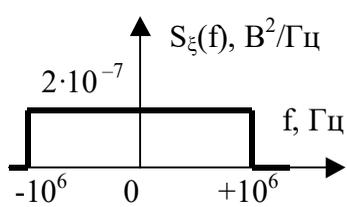
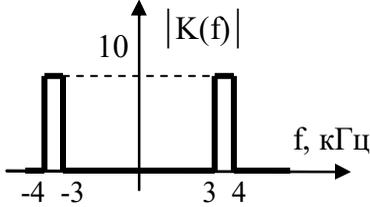
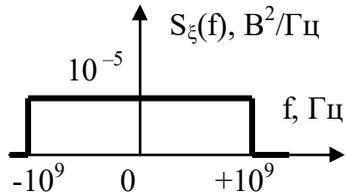


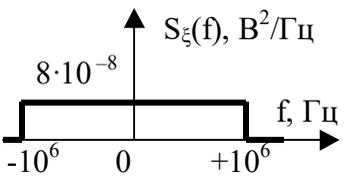
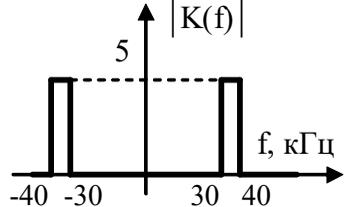
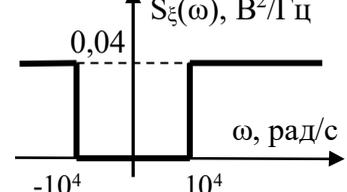
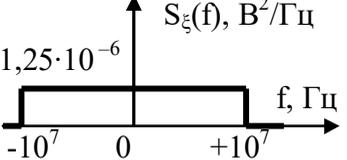
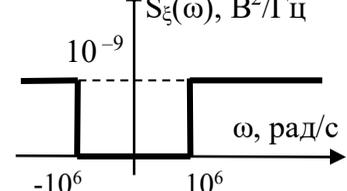
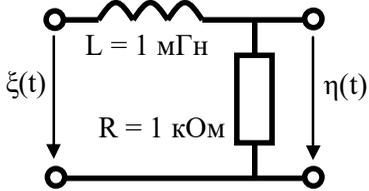
Но- мер	$\omega_{гр}$, рад/с	Схема или АЧХ фильтра	Определить...
1	10^4		константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 1 мВ.
2	10^8		константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 10 мВ.
3	10^4		эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-6}$ (В²/Гц)

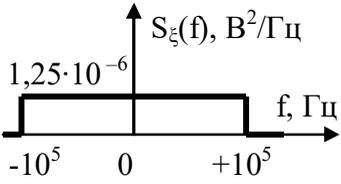
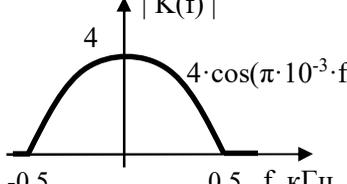
4	10^7	 <p style="text-align: center;">$L = 1 \text{ мГн}$ $R = 10 \text{ кОм}$</p>	<p>эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-7} \text{ (В}^2/\text{Гц)}$</p>
5	$\pi \cdot 10^5$		<p>во сколько раз мощность переменной составляющей процесса на выходе усилителя больше чем на входе</p>
6	10^{10}	<p>резонансный усилитель с максимальным коэффициентом усиления $K_0 = 20$ и частотой резонанса $\omega_p = 10^6 \text{ рад/с}$</p>	<p>добротность контура усилителя, если $S_0 = 10^{-16} \text{ (В}^2/\text{Гц)}$, а эффективное значение выходного напряжения $\sigma_{\text{ц вых}} = 2 \text{ мВ}$.</p>
7	10^7		<p>эффективное значение выходного напряжения, если $S_0 = 10^{-8} \text{ (В}^2/\text{Гц)}$</p>
8	$\pi \cdot 10^6$	 <p style="text-align: center;">$K(f) = 4 \cdot e^{-10^{-4} \cdot f }$</p>	<p>во сколько раз мощность переменной составляющей процесса на выходе усилителя больше чем на входе</p>

9	10^{10}	резонансный усилитель с максимальным коэффициентом усиления $K_0 = 20$ и частотой резонанса $\omega_p = 10^6$ рад/с	константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи 4 мВ, а добротность контура усилителя $Q = 100$
10	10^7		эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-7}$ ($\text{В}^2/\text{Гц}$)

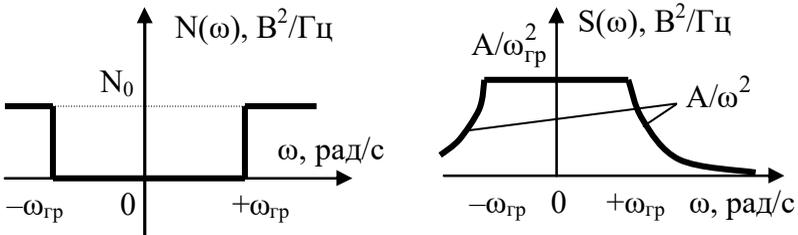
30. Шум с показанной в левом столбце таблицы, приведенной ниже, спектральной плотностью мощности воздействует на усилитель, амплитудно-частотная характеристика которого представлена в правом столбце той же таблицы. Используя эффект нормализации широкополосных процессов в узкополосных цепях, определить вероятность наблюдения на выходе усилителя отрицательных мгновенных значений, меньших чем $-0,2$ В.

Номер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Характеристика фильтра
1		
2		интегрирующая RC-цепь с постоянной времени $\tau_c = 5 \cdot 10^{-4}$ с

3	<p>нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $S_{\text{вх}}(f) = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ A}^2/\text{Гц}$</p>	<p>параллельный колебательный контур с полосой пропускания $\Pi_{\omega 0,707} = 2 \cdot 10^5 \text{ рад/с}$ и резонансным сопротивлением $R_k = 2 \text{ кОм}$</p>
4		
5		<p>интегрирующая RC-цепь с номиналами элементов $R = 20 \text{ кОм}$, $C = 5 \text{ нФ}$</p>
6		$ K(f) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f - 10^4 }, & f > 0 \\ 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f + 10^4 }, & f < 0 \end{cases}$
7	<p>нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $S_{\text{вх}}(f) = 8 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$</p>	<p>интегрирующая RC-цепь с номиналами элементов $R = 20 \text{ кОм}$, $C = 5 \text{ нФ}$</p>
8		

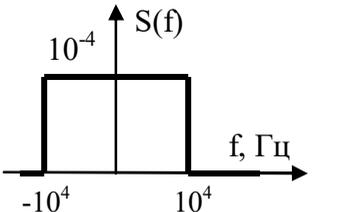
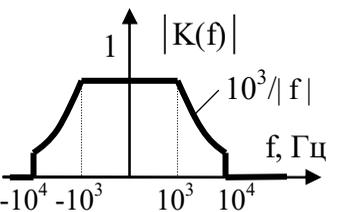
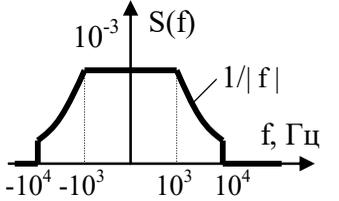
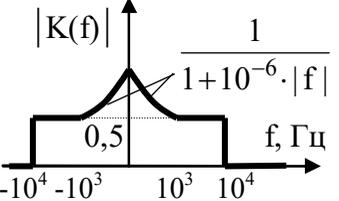
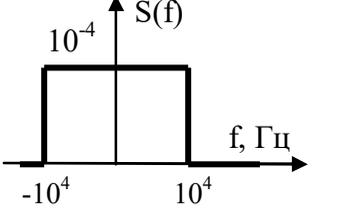
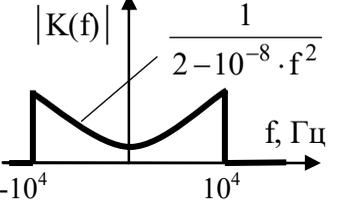
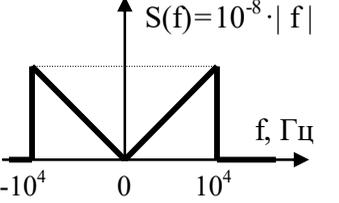
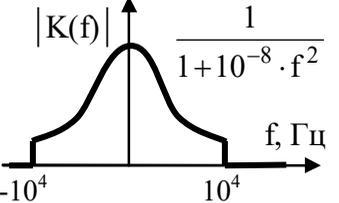
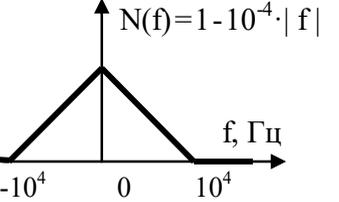
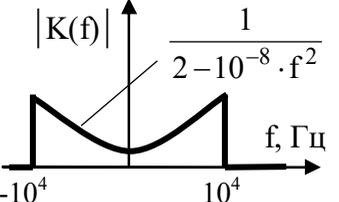
9		
10	<p>нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $S_{\text{вх}}(f) = 5 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$</p>	$ K(f) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f - 10^4 }, & f > 0 \\ 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f + 10^4 }, & f < 0 \end{cases}$

31. Полезный сигнал $s(t)$ представляет собой стационарный нормальный случайный процесс с показанной на рисунке ниже (слева) спектральной плотностью мощности (СПМ) $S(\omega)$. Смесь этого сигнала и нормального шума с СПМ $N(\omega)$ поступает на вход фильтра, обеспечивающего минимальную возможную среднеквадратическую ошибку фильтрации сигнала. Величина P_ϵ – это вероятность того, что отклик, наблюдаемый на выходе фильтра, будет отклоняться от истинного значения сигнала $s(t)$ по абсолютной величине более чем на ϵ милливольт. Руководствуясь представленными в таблице ниже значениями, определить величину, помеченную в этой таблице значком (?).



Но- мер	$N_0,$ $B^2/\Gamma_{\text{ц}}$	$A,$ $B^2 \cdot c$	$\omega_{\text{гр}},$ рад/с	$\varepsilon,$ мВ	P_{ε}
1	10^{-6}	3	$3 \cdot 10^3$	50	⊙
2	$3 \cdot 10^{-7}$	0,1	10^3	⊙	0,005
3	$3 \cdot 10^{-7}$	0,3	⊙	7	0,424
4	10^{-8}	10^{-2}	10^3	⊙	0,230
5	10^{-8}	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^3$	5	⊙
6	$3 \cdot 10^{-9}$	10^{-3}	10^3	⊙	0,005
7	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-3}$	⊙	0,7	0,424
8	$2 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-5}$	10^3	⊙	0,072
9	10^{-10}	10^{-4}	10^3	0,19	⊙
10	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	⊙	0,004

32. Случайный полезный сигнал, характеризуемый спектральной плотностью мощности (СПМ) $S(f)$, в смеси с помехой, обладающей СПМ $N(f)$, воздействует на вход оптимального линейного фильтра. Фильтр обладает коэффициентом передачи $K(f)$ и обеспечивает на своем выходе минимальную возможную среднеквадратическую ошибку фильтрации полезного сигнала из смеси с помехой. По представленным в таблице ниже данным определить недостающую характеристику (из упомянутых в задаче)

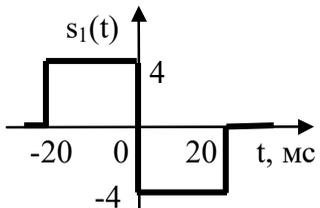
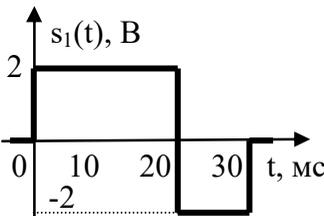
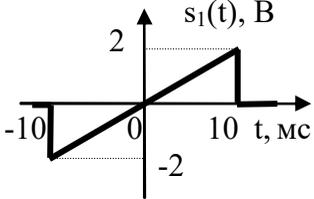
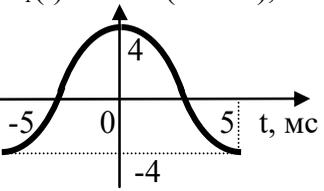
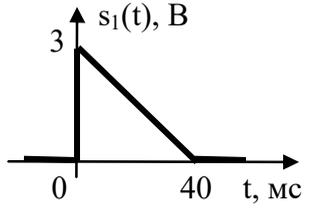
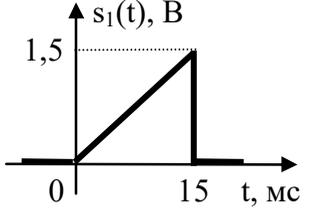
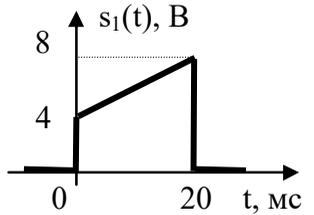
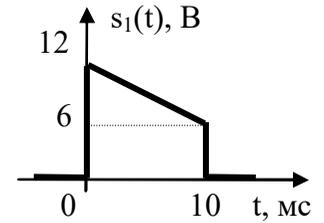
Но- мер	Известные характеристики		Иск. хар- ка
1			N(f)
2			N(f)
3			N(f)
4			N(f)
5			S(f)

6			S(f)
7			S(f)
8			K(f)
9			K(f)
10			K(f)

33. Определите импульсную характеристику фильтра, согласованного с приведенным ниже сигналом $s_1(t)$. Рассчитайте также отклик, наблюдаемый на выходе этого фильтра в ответ на воздействие сигнала $s_1(t)$.

Но-мер	Сигнал $s_1(t)$	Но-мер	Сигнал $s_1(t)$
1		6	
2		7	
3		8	
4	$s_1(t) = 4 \cdot \cos(200\pi \cdot t), \text{ В}$	9	
5	$s_1(t) = 10 \cdot \exp(10^3 \cdot t), \text{ В}$	10	

34. Найдите соотношение сигнал/шум, наблюдаемое на выходе фильтра, согласованного с приведенным ниже сигналом $s_1(t)$, если помимо этого сигнала на вход фильтра поступает белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0=10^{-4}$ В²/Гц.

Но- мер	Сигнал $s_1(t)$	Но- мер	Сигнал $s_1(t)$
1		6	
2		7	$s_1(t) = 4 \cdot \cos(200\pi \cdot t)$, В 
3		8	
4		9	

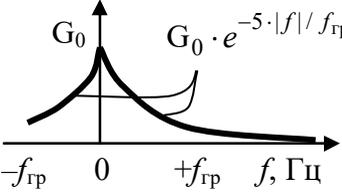
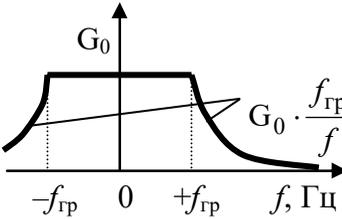
5		10	$s_1(t) = 10 \cdot \exp(10^3 \cdot t), \text{ В}$
---	--	----	---

35. Детерминированный полезный сигнал $s(t)$, с представленной в таблице ниже спектральной плотностью амплитуд, поступает на вход согласованного с ним фильтра вместе с шумом, имеющим спектральную плотность мощности $N_0 = 10^{-4} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Руководствуясь представленными в таблице ниже значениями, определить величину, помеченную в этой таблице значком (?).

Но- мер	Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала $ G_s(f) $, В / Гц	G_0 , В/Гц	$f_{\text{гр}}$, Гц	q^2
1		$\sqrt{6} \cdot 10^{-4}$	10^4	(?)
2		(?)	$4 \cdot 10^4$	6

Примечание: величина q^2 , приведенная в последнем столбце таблицы, представляет собой соотношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра.

3		10^{-4}	⊙	8
4		$2 \cdot 10^{-4}$	10^5	⊙
5		⊙	$5 \cdot 10^5$	10
6		10^{-3}	⊙	9
7		10^{-4}	$6 \cdot 10^4$	⊙
8		⊙	$3 \cdot 10^5$	5

9		$\sqrt{5} \cdot 10^{-3}$	⊙	4
10		$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	⊙

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии теоретические сведения и примеры решения практических задач составляют, по мнению автора, минимальный законченный объем материала, необходимый для ознакомления с курсом “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”. В данное пособие сознательно не включались задания повышенной сложности, а также примеры, лежащие в стороне от “магистральных” тем курса. Как следствие, студентам, заинтересованным в углубленном изучении данной дисциплины, будет полезно рассмотреть примеры и задачи, приведенные в других изданиях. Некоторые из подобных рекомендуемых книг приведены ниже в библиографическом списке литературы. Курс теории вероятностей является достаточно устоявшимся, поэтому издания, выпущенные 20-30 лет назад, не потеряли своей актуальности и могут быть успешно использованы и сегодня. Автор будет благодарен за любую информацию о найденных неточностях и опечатках, а также за идеи по расширению и дополнению данного учебного пособия.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Функция распределения стандартной нормальной

случайной величины $F_{ст}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$F_{ст}(x)$	x	$F_{ст}(x)$	x	$F_{ст}(x)$	x	$F_{ст}(x)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9773	3,0	0,9987
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821	3,1	0,9990
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861	3,2	0,9993
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893	3,3	0,9995
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918	3,4	0,9997
0,5	0,6915	1,5	0,9331	2,5	0,9938	3,5	0,9998
0,6	0,7258	1,6	0,9452	2,6	0,9953	3,6	0,9998
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965	3,7	0,9999
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974	3,8	0,9999
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981	3,9	0,9999

Для отрицательных аргументов x значения можно получить из соотношения $F_{ст}(x)_{|x<0} = 1 - F_{ст}(-x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые неопределенные и определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(a), \quad \text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (\text{П1})$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}, \quad (\text{П2})$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax), \quad (\text{П3})$$

$$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}, \quad (\text{П4})$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax) dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \cos(ax). \quad (\text{П5})$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988. 480 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. - М.: Высшая школа, 2000. 366 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Радио и связь, 1989. 653 с.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов. радио, 1982. 624 с.
5. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. - М.: Сов. радио, 1980. 543 с.
6. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. - М.: Связь, 1969. 448 с.
7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2000. 462 с.
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1999. 479 с.
9. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. шк., 1999. 400 с.

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

**ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ
В РАДИОТЕХНИКЕ**

В авторской редакции

Компьютерный набор А.Б. Токарева

Подписано к изданию 11.01.2019.

Объем данных 5,9 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14