

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный архитектурно–строительный университет»

М.Е. Семенов, Н.Н. Некрасова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Воронеж 2016

УДК 51.001.57:53(07)

ББК 22.1В6:22.3я73

С302

Рецензенты:

*кафедра прикладной математики и механики
Воронежского государственного технического университета;
С.А. Шабров, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры
математического анализа математического факультета
Воронежского государственного университета*

Семенов, М.Е.

С302 Математическое моделирование физических процессов :
учеб. пособие/ М.Е. Семенов, Н.Н. Некрасова; Воронежский
ГАСУ. – Воронеж, 2016. – 94 с.

Даются фундаментальные основы теории моделирования, рассматриваются основные подходы к моделированию физических процессов, особое внимание уделяется математическому аппарату формализации процессов в сложных системах. Имеется большое количество примеров и геометрических иллюстраций.

Предназначено для обеспечения учебного процесса магистрантов всех направлений подготовки по дисциплине «Математическое моделирование». Предлагаемое пособие может быть полезным специалистам в области моделирования сложных систем.

Ил. 31. Библиогр.: 18 назв.

УДК 51.001.57:53(07)

ББК 22.1В6:22.3я73

Печатается по решению учебно-методического совета

Воронежского ГАСУ

ISBN 978-5-89040-628-6

© Семенов М.Е., Некрасова Н.Н., 2016

© Воронежский ГАСУ, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Введение.....	5
1. Общие принципы математического моделирования.....	6
2. Классификация уравнений математической физики как моделей атмосферных процессов. Уравнение волновых движений.....	15
3. Методы решения волновых уравнений.....	21
4. Уравнение теплопроводности.....	27
5. Хаос в дискретных моделях.....	37
6. Система Лоренца.....	54
7. Динамика системы Лоренца.....	62
8. Неподвижные точки. Устойчивость. Бифуркация.....	66
9. Обобщенные размерности.....	74
10. Обработка реализаций. Характеристики хаотической динамики.....	86
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	92
Библиографический список.....	93

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном обществе происходит активное внедрение новых информационных технологий во все сферы деятельности человека. Нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы моделирования.

Моделирование является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемых для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. С помощью новейших информационных технологий и математических моделей можно эффективно исследовать существующие и проектируемые системы. Совершенствование вычислительной техники ведет к дальнейшему развитию методов машинного моделирования, без которых невозможно изучение процессов и явлений, а также построение сложных систем. Поэтому изучение численных методов и построение математических моделей стало базовым в структуре подготовки бакалавров, магистров и специалистов по ряду направлений высшего профессионального образования. Среди этих направлений следует отметить 09.04.03 – «Прикладная информатика», 09.04.02 – «Информационные системы и технологии», 27.04.04 – «Управление в технических системах», 15.04.04 – «Автоматизация технологических процессов и производств» и ряд других специальностей.

Авторы стремились изложить материал по возможности наиболее простым и доступным образом. Пособие содержит довольно много примеров, иллюстрирующих особенности вычислительных методов. При написании пособия авторы использовали многолетний опыт преподавания курса «Математическое моделирование» учебного плана подготовки магистров всех направлений.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии даются фундаментальные основы теории моделирования, рассматриваются основные подходы к моделированию физических процессов, особое внимание уделяется математическому аппарату формализации процессов в сложных системах. Имеется большое количество примеров и геометрических иллюстраций.

Учебное пособие состоит из 10 разделов, начитанных в рамках учебной нагрузки. В первом разделе даются общие принципы математического моделирования. Второй содержит изложение основных особенностей уравнений математической физики и уравнения волнового движения. Методы решения волновых уравнений обсуждаются в разделе 3, где подробно излагаются метод Даламбера и метод Фурье. В разделе 4 приводится вывод уравнения теплопроводности и описывается метод Фурье, решения данного уравнения. В пятом разделе дается представление о понятии динамической системы как теоретической абстракции. В разделе 6 приводится подробный вывод уравнений Лоренца для задачи о конвекции в слое. Обсуждению динамики модели Лоренца посвящен раздел 7. Стационарным решениям и бифуркациям в модели Лоренца посвящен следующий раздел. Раздел 9 посвящен классификации динамических систем по сигнатуре спектров ляпуновских показателей. Последний раздел достаточно подробно объясняет характеристики хаотической динамики в динамических системах.

Пособие предназначается для магистрантов и аспирантов технических вузов, применяющих вычислительные методы. Окажется полезным для специалистов в области моделирования сложных систем.

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой методологии пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено, по крайней мере, двумя причинами. Первая из них – появление ЭВМ (компьютеров), хотя и скромных по нынешним меркам, но, тем не менее, избавивших ученых от огромной по объему рутинной вычислительной работы. Вторая – беспрецедентный социальный заказ на выполнение национальных программ РФ и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» в недрах ЭВМ с помощью математических модулей и лишь затем претворены на практике. Этот успех во многом определил дальнейшие достижения методологии, без применения которой в развитых странах ни один крупномасштабный технологический, экологический или экономический

проект теперь всерьез не рассматривается (сказанное справедливо и по отношению к некоторым социально-политическим проектам).

Сейчас математическое моделирование вступает в третий, принципиально важный этап своего развития, «встраиваясь» в структуры так называемого информационного общества. Впечатляющий прогресс средств переработки, передачи и хранения информации отвечает мировым тенденциям к усложнению и взаимному проникновению различных сфер человеческой деятельности. Без владения информационными «ресурсами» нельзя и думать о решении все более укрупняющихся и все более разнообразных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако информация как таковая зачастую мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля их исполнения. Нужны надежные способы переработки информационного «сырья» в готовый «продукт», т. е. в точное знание. История методологии математического моделирования убеждает: она может и должна быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Технические, экологические, экономические и иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому *математическое (шире — информационное) моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.*

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: *модель – алгоритм – программа* (рис. 1.1).

На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства и законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить предварительные знания об объекте. Второй этап – выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью.

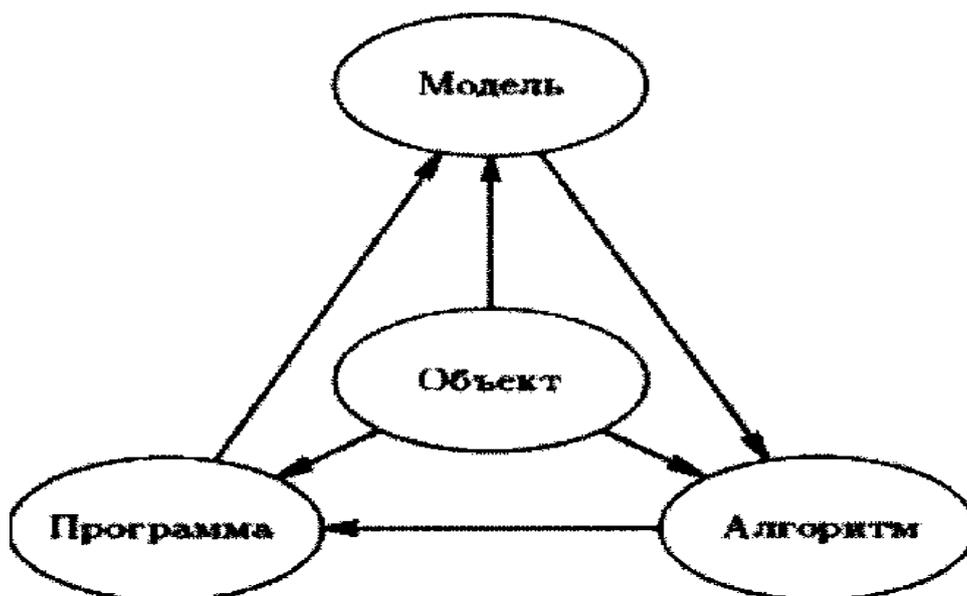


Рис. 1.1. Принципиальная схема математического моделирования объекта

Вычислительные алгоритмы должны не исказить основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, а быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» – компьютере.

Создав *триаду* «модель – алгоритм – программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

Математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы

от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования. Оно дает новые дополнительные стимулы самым разным направлениям науки.

Рассматривая вопрос шире, напомним, что моделирование присутствует почти во всех видах творческой активности людей различных специальностей, исследователей и предпринимателей, политиков и военачальников. Привнесение в эти сферы точного знания помогает ограничить интуитивное умозрительное «моделирование», расширяет поле приложений рациональных методов. Конечно же, математическое моделирование плодотворно лишь при выполнении хорошо известных профессиональных требований. К ним относятся четкая формулировка основных понятий и предположений, апостериорный анализ адекватности используемых моделей, гарантированная точность вычислительных алгоритмов и т. д. Если же говорить о моделировании систем с участием «человеческого фактора», т. е. трудноформализуемых объектов, то к этим требованиям необходимо добавить аккуратное разграничение математических и житейских терминов (звучащих одинаково, но имеющих разный смысл), осторожное применение уже готового математического аппарата к изучению явлений и процессов (предпочтителен путь «от задачи к методу», а не наоборот) и ряд других.

Решая проблемы информационного общества, было бы наивно уповать только на мощь компьютеров и иных средств информатики. Постоянное совершенствование триады математического моделирования и ее внедрение в современные информационно-моделирующие системы дает возможность получать высокотехнологичную, конкурентоспособную и разнообразную материальную и интеллектуальную продукцию.

1.1. Математическое моделирование на основе фундаментальных законов природы

Движение шарика, присоединенного к пружине. В получении моделей главную роль играют фундаментальные законы, определяющие происхождение и величину сил, действующих на объект, а второй закон Ньютона является как бы вспомогательным и применяется на последней стадии построения модели. Конечно же, такое деление чисто условно. Ведь если речь идет о задачах динамики, то можно использовать и другую схему – сначала связать с помощью закона Ньютона проекции ускорения тела с проекциями действующих на него сил, а затем, исходя из тех или иных

соображений, вычислить эти силы как функции координат, получив замкнутую систему. Продемонстрируем этот подход на примере модели движения шарика, присоединенного к пружине с жестко закрепленным концом (рис. 1.2).

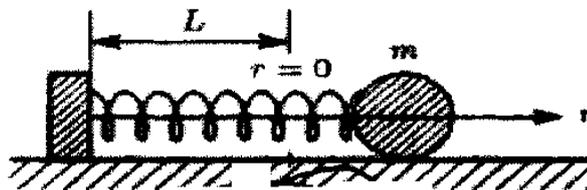


Рис. 1.2. Физическая модель

Пусть r – координата шарика вдоль оси пружины, лежащей на горизонтальной плоскости, и направление движения шарика с ее осью. Тогда по второму закону динамики

$$F = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (1.1)$$

где m – масса шарика, a – его ускорение.

Будем считать плоскость идеально гладкой (т. е. движение происходит без трения), пренебрежем также сопротивлением воздуха и примем во внимание то, что вес шарика уравновешивается реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси r , – сила упругости пружины. Определим ее, используя закон Гука, гласящий, что для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу

$$F = -kr,$$

где коэффициент $k > 0$ характеризует упругие свойства пружины, а r – величину ее растяжения (сжатия) относительно нейтрального ненагруженного положения $r = 0$.

Уравнение движения шарика принимает вид (уравнение элементарного осциллятора)

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr, \quad k > 0. \quad (1.2)$$

Оно описывает его гармонические колебания и имеет общее решение:

$$r = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (1.3)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний системы «пружина – шарик».

Значения A и B легко определяются из начального состояния объекта, т. е. через величины $r(t=0) = r_0$ и $v(t=0) = v_0$ ($v(t)$ – скорость шарика), причем $r(t) \equiv 0$ при $r_0 = v_0 = 0$.

Подходы, с помощью которых строятся соответствующие модели, не должны, разумеется, противоречить другим фундаментальным законам природы. Соответствующая проверка непротиворечивости (если она возможна) весьма полезна для установления правильности моделей. Поясним это, используя для вывода уравнения не закон Ньютона, а закон сохранения энергии. Поскольку точка крепления пружины неподвижна, то стенка не совершает работу над системой «пружина – шарик» (и наоборот), и ее полная механическая энергия E остается постоянной. Вычислим ее. Кинетическая энергия определяется движением шарика (пружина считается невесомой):

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(dr/dt)^2}{2}. \quad (1.4)$$

Потенциальная энергия системы «содержится» в пружине, ее нетрудно найти, определив работу, необходимую для растяжения (сжатия) пружины на величину r :

$$E_{II} = -\int_0^r F dr' = \int_0^r kr' dr' = k \frac{r^2}{2}.$$

Для неизменной со временем величины $E = E_k + E_{II}$ (интеграла энергии) получаем

$$E = \frac{m(dr/dt)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}. \quad (1.5)$$

Так как $dE/dt \equiv 0$, то, продифференцировав интеграл энергии по t , приходим к выражению

$$m \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + k \frac{dr}{dt} r = \frac{dr}{dt} \left(m \frac{d^2r}{dt^2} + kr \right) = 0, \quad (1.6)$$

которое аналогично полученному с использованием закона Ньютона. Подобную процедуру нетрудно провести и для других примеров.

1.2. Вариационные принципы и математические модели

Дадим упрощенную формулировку вариационного принципа Гамильтона для механической системы. На его основе выведем уравнения движения шарика на пружине и маятника, в поле сил тяжести. Сопоставим результаты

получения моделей из фундаментальных законов и из вариационного принципа.

Общая схема принципа Гамильтона. Пусть имеется механическая система, формального и строгого определения которой пока давать не будем, имея в виду, однако, что все взаимодействия между элементами такой системы определяются законами механики. Введем понятие обобщенных координат $Q(t)$, полностью определяющих положение механической системы в пространстве. Величина $Q(t)$ может быть декартовой координатой (например, координата r в системе «шарик пружина»), радиусом-вектором, «угловой координатой», набором координат материальных точек, составляющих систему, и т. д. Величину dQ/dt естественно назвать обобщенной скоростью механической системы в момент времени t . Набор величин $Q(t)$ и dQ/dt определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Для описания механической системы вводится функция Лагранжа, построение которой – отдельный вопрос, более подробно рассматриваемый.

В простейших случаях функция Лагранжа имеет ясный смысл и записывается в виде

$$L(Q, dQ/dt) = E = E_K + E_{II},$$

где E_K, E_{II} – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно. Для целей данного раздела нет необходимости давать общее определение величин E_K, E_{II} , поскольку в рассматриваемых примерах они вычисляются очевидным образом.

Введем далее величину $S[Q]$, называемую действием:

$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (1.7)$$

Интеграл, очевидно, является функционалом от обобщенной координаты функции $Q(t)$, т.е. функции $Q(t)$, заданной на отрезке $[t_1, t_2]$, он ставит в соответствие некоторое число S (действие).

Принцип Гамильтона для механической системы гласит: если система движется по законам механики, то $Q(t)$ – стационарная для $S[Q]$ функция или

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.8)$$

Фигурирующая в принципе наименьшего действия функция $\varphi(t)$ –

некоторая пробная функция, обращающаяся в нуль в моменты t_1, t_2 и удовлетворяющая тому условию, что $Q(t) + \varepsilon\varphi(t)$ – возможная координата данной системы (в остальном $\varphi(t)$ произвольна).

Смысл принципа в том, что из всех априори мыслимых (допускаемых) траекторий (движений) системы между моментами t_1, t_2 выбирается (реализуется) движение, доставляющее минимум функционалу действия (отсюда происходит и название принципа). Функция $\varepsilon\varphi(t)$ называется вариацией величины $Q(t)$.

Итак, схема применения принципа Гамильтона для построения моделей механических систем состоит в следующем: определяются обобщенные координаты $Q(t)$ и обобщенные скорости dQ/dt системы, строятся функция Лагранжа $L(Q, dQ/dt)$ и функционал действия $S[Q]$, минимизация которого на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $Q(t)$ и дает искомую модель.

Способ получения модели системы «шарик – пружина»

Воспользуемся принципом Гамильтона для построения модели движения шарика, соединенного с пружиной. В качестве обобщенной координаты системы естественно выбрать обычную эйлерову координату шарика $r(t)$. Тогда обобщенная скорость $dr/dt = v(t)$ – обычная скорость шарика. Функция Лагранжа, равная $L = E_K - E_{II}$, записывается через значения кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = \frac{m(dr/dt)^2}{2} - k \frac{r^2}{2}. \quad (1.9)$$

Для величины действия получаем выражение

$$S[r] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(r, \frac{dr}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2} r^2 \right] dt. \quad (1.10)$$

Теперь в соответствии со схемой вычислим действие на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $r(t)$:

$$S[r + \varepsilon\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d(r + \varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2} (r + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt. \quad (1.11)$$

Последнюю формулу необходимо продифференцировать по ε (учитывая, что функции $r, \varphi, dr/dt, d\varphi/dt$ от ε не зависят):

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi] = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - \right. \\ \left. - k \left\{ r^2 + 2\varepsilon r\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \right\} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - k \left\{ r\varphi + \varepsilon\varphi^2 \right\} \right] dt$$

и положить в ней $\varepsilon = 0$;

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi \right] dt = 0. \quad (1.12)$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, последнее соотношение преобразуется к виду

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi] \right|_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right] dt = 0. \quad (1.13)$$

Поскольку пробная функция $\varphi(t)$, фигурирующая в формулировании принципа наименьшего действия, произвольна, то часть выражения, стоящая под знаком интеграла в квадратных скобках, должна быть равна нулю во все моменты времени $t_1 < t < t_2$:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr. \quad (1.14)$$

Таким образом, полученное уравнение совпадает с уравнением (1.1).

Контрольные вопросы и задания

- 1.1. Какие существуют этапы математического моделирования какого-либо объекта?
- 1.2. Что представляют собой объекты в моделируемой системе?
- 1.3. В чем заключается достоинство имитационного моделирования как метода исследования сложных систем?
- 1.4. В чем заключается принцип Гамильтона?

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ КАК МОДЕЛЕЙ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ. УРАВНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

Подавляющее количество моделей атмосферных процессов формализуется в виде уравнений с распределенными параметрами. Поэтому в настоящем разделе будут рассмотрены основные понятия уравнений математической физики.

2.1. Понятие об общем решении уравнений в частных производных

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:

1) при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.1)$$

где c — скорость распространения волн в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле так же, как и явления диффузии, описываются уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.2)$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле приходим к уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z). \quad (2.3)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (2.3) переходит в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.4)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и,

соответственно, электрические заряды.

Уравнения (2.1) – (2.4) называют основными уравнениями математической физики. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Функция $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющая какому-либо из уравнений (2.1) – (2.4), называется его решением.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Найдем его решение, т.е. функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.5). Для этого запишем это уравнение в виде: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$.

Поскольку производная по переменной x от величины, стоящей в скобках, равна нулю, то последняя является некоторой произвольной функцией от y :

$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$. Поэтому $u(x, y) = \int f(y) dy$. Но, интегрируя произвольную

функцию $f(y)$, получим новую, также произвольную функцию, скажем $F(y)$, плюс произвольная функция $\varphi(x)$, которая играет роль произвольной постоянной интегрирования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, общий интеграл уравнения второго порядка (2.5)

$$u(x, y) = F(y) + \varphi(x)$$

содержит две произвольные функции.

Чтобы теперь из общего решения $u(x, y)$ найти определенное частное решение, нужно найти конкретный вид функций $\varphi(x)$ и $F(y)$.

Однако в этом и состоит причина существенного различия методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных. Из-за чрезвычайной общности общего решения уравнения в частных производных, как правило, очень трудно из него выделить нужное конкретное решение.

2.2. Классификация уравнений

С помощью замены переменных уравнение второго порядка

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

сводится к одному из простейших уравнений. Полагая, что коэффициент $c \neq 0$, введем новые независимые переменные: $\xi = x + \lambda_1 y$, $\eta = x + \lambda_2 y$, где λ_1 и λ_2 – произвольные, но различные числа (иначе ξ и η не будут взаимно независимые функции). Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

то имеет место соответствие $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta}$, поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \cdot \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Умножим эти вторые производные соответственно на a , $2b$ и c , а затем их сложим, тогда левая часть уравнения (2.6) примет вид

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

где $A = a + 2b\lambda_1 + c\lambda_1^2$, $B = a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\lambda_1 \cdot \lambda_2$, $C = a + 2b\lambda_2 + c\lambda_2^2$.

Рассмотрим вспомогательное квадратное уравнение $c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0$.

Его корнями являются $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$. В зависимости от значений

дискриминанта $D = b^2 - ac$ возможны три случая:

1) $D > 0$ – уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z'_x, z'_y), \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\alpha, \beta, z, \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \beta} \right),$$

где $\alpha = \frac{x-y}{2}$, $\beta = \frac{x+y}{2}$;

2) $D = 0$ – уравнение параболического типа $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z'_x, z'_y)$;

3) $D < 0$ – уравнение эллиптического типа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z'_x, z'_y)$.

В общем случае вводятся новые переменные – дважды непрерывно дифференцируемые функции $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ и $\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0$.

Дифференциальное уравнение $ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0$ называется уравнением характеристик уравнения

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}).$$

2.3. Волновые уравнения

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Натяжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси от 0 до l . Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя положение, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения — говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Рассмотрим малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси ОХ и в одной плоскости (рис. 2.1). При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x, t)$, которая дает величину перемещения точек струны с абсциссой x в момент t .

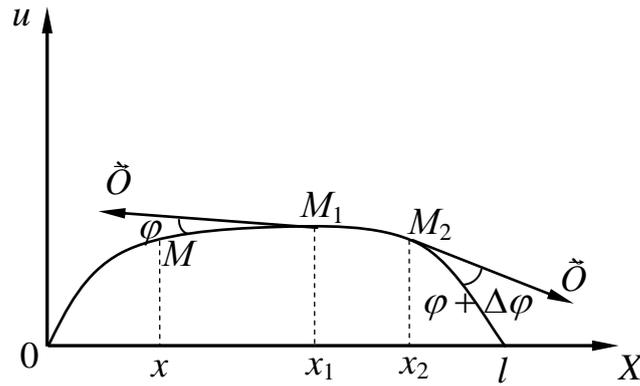


Рис. 2.1. Малые отклонения струны в плоскости (x, u)

Так как рассматриваются малые отклонения струны в плоскости (x, u) , то будем предполагать, что длина элемента струны $\cup M_1 M_2$ равняется ее проекции на ось OX , т.е. $\cup M_1 M_2 = x_2 - x_1$. Также предполагается, что натяжение T во всех точках струны одинаковое. На концах этого элемента, по касательным к струне, действует сила \vec{O} .

Касательные образуют с осью OX углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда проекция на ось OX сил, действующих на элемент $\cup M_1 M_2$, будет равна $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$. Так как угол φ мал, можно положить $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, тогда имеем, что

$$\begin{aligned} T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi &\approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg} \varphi = T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= T \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$ – параметр согласно формуле приращений конечных разностей Лагранжа.

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть ρ – линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho \Delta x$. Ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x. \text{ Сокращая на } \Delta x \text{ и обозначая } \frac{T}{\rho} = a^2, \text{ получаем уравнение}$$

движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (2.7)$$

Это и есть волновое уравнение – уравнение колебаний струны. Для полного определения движения струны одного уравнения (2.7) недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны ($x=0$ и $x=l$), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ($t=0$).

2.4. Продольные колебания стержня

Рассмотрим однородный стержень длины l , для изгибания которого надо приложить усилие (рис. 2.2). Ограничимся исследованием только таких усилий, при которых поперечные колебания, перемещаясь вдоль оси стержня, остаются плоскими и параллельными друг другу. Это допущение оправдано, если поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной.

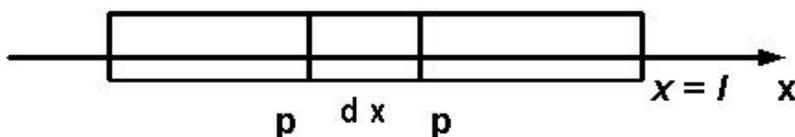


Рис. 2.2. Однородный стержень длины l

Если стержень несколько растянуть или сжать вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут продольные колебания. Направим ось OX вдоль оси стержня. Будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках $x=0$ и $x=l$. Пусть x – абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое. Обозначим через $u(x,t)$ смещение этого сечения в момент времени t ; тогда смещенное сечение с абсциссой $x+dx$ будет равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, а относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой x выражается производной $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Считая, что стержень совершает малые колебания, можно вычислить в этом сечении натяжение T . Применяя закон Гука, находим $T = ES \frac{\partial u}{\partial x}$, где E – модуль упругости материала стержня, S – площадь поперечного сечения. На элемент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами x и $x+dx$, действуют силы

натяжения T_x и T_{x+dx} , направленные вдоль оси OX , их результирующая $T_{x+dx} - T_x = ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \approx ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ также направлена вдоль оси OX . С

другой стороны ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Согласно второму закону

Ньютона $\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$, где ρ – объемная плотность стержня. Положив

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, получим дифференциальное уравнение продольных колебаний

стержня $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Форма этого уравнения показывает, что продольные колебания стержня носят волновой характер, причем скорость распространения продольных волн

равна $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Контрольные вопросы и задания

- 2.1. Назовите основные уравнения математической физики.
- 2.2. Какие типы уравнений математической физики вам известны?
- 2.3. Каким уравнением описывается движение струны?
- 2.4. Чему равна скорость распространения продольных волн струны?

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Метод Даламбера

Рассматривая свободные колебания струны, необходимо решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=0} = F(x), \quad (3.2)$$

где функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши. Эту задачу можно решить методом бегущих волн. Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (3.3)$$

где φ и ψ предполагаются дважды дифференцируемыми.

Подобрав функции φ и ψ так, чтобы функция $u = u(x, t)$ удовлетворяла условиям (3.2), находим решение исходного дифференциального уравнения:

$$u = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz. \quad (3.4)$$

3.2. Собственные колебания

Рассмотрим решения уравнения колебаний, гармонически зависящие от времени, то есть такие, которые можно представить в виде

$$u = u(x) \sin \omega t + \theta,$$

где ω – круговая частота колебания, а θ – его фаза. Подставляя это выражение в уравнение колебаний, получим

$$u'' = \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 u = 0.$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, его общим решением является

$$u = C_1 \sin \frac{\omega}{a} x + C_2 \cos \frac{\omega}{a} x,$$

это и есть в точности формула, найденная Мерсенном (Mersenne, 1636) опытным путем для частоты колебания струны.

Прежде чем выяснить физический смысл старших мод, посмотрим на математическую сторону рассмотренной только что задачи.

Краевая задача

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(l) = 0 \quad (3.5)$$

имеет нетривиальные решения u только при дискретном наборе значений параметра λ , именуемых *собственными значениями* этой задачи, а именно

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 2^2, \dots$$

Каждому собственному значению λ_n отвечает решение, $u = C \cdot \sin \pi n x$ определенное с точностью до мультипликативной константы, это решение, в котором обычно опускают константу, называют *собственной функцией*. Наконец, задача об отыскании тех значений λ , при которых имеются нетривиальные решения u у системы (3.5), называется *задачей на собственные значения*.

Контрольные вопросы и задания

3.1. Проверьте, что изложенный метод годится и для решения задач, в которых вместо граничных условий $u(0) = u(l) = 0$ используются:

1) $u(0) = u'(l) = 0$ или 2) $u'(0) = u'(l) = 0$. Обратите внимание на то, что в последнем случае появляется нулевое собственное значение.

3.3. Метод Фурье

При возбуждении колебаний в начальный момент времени либо отклоняют струну от положения равновесия, либо придают ей начальную скорость при помощи удара. Поэтому естественно попытаться найти по заданному начальному профилю струны $u|_{t=0} = \varphi(x)$ и начальному распределению скоростей $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ мгновенный профиль струны $y = u(x, t)$ при всех $t > 0$.

Еще в начале XIX века возникла идея искать u как суперпозицию нормальных мод:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где A_n и B_n – подлежащие определению константы. В те времена с бесконечными суммами работали так, как будто они конечные, не беспокоясь о сходимости. Заметив же, что нормальные моды

$$(A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}$$

по отдельности удовлетворяют волновому уравнению, считали очевидным, что то же верно и для их суммы. Подставив эту же сумму в начальные условия,

получили, что константы A_n и B_n следует подобрать так, чтобы при всех $0 \leq x \leq l$ выполнялись равенства

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^x B_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

В те времена это выглядело очень странно, ведь здесь написано, что произвольную функцию φ можно представить в виде суммы синусов. Возникшая дискуссия вокруг возможности разложения произвольной функции в ряд привела к созданию теории рядов Фурье. Теорема о разложении в ряд Фурье, которая в курсе анализа излагается применительно к периодическим функциям, может быть приспособлена к разложению функций, заданных на отрезке, следующим образом.

Произвольную функцию f , заданную и непрерывную на отрезке $0 \leq x \leq l$, всегда можно продолжить нечетно на отрезок $-l \leq x \leq 0$. Если к тому же эта функция обращается в нуль при $x=0$, то продолжение не будет иметь разрыва в точке $x=0$. Зная функцию на отрезке $-l \leq x \leq l$, её можно продолжить до функции, имеющей период $2l$. Эта функция не будет иметь разрывов при $x = \pm l$, если $f(l) = 0$, а следовательно, и $f(-l) = 0$. По известной теореме из теории рядов Фурье произвольную $2l$ -периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. При этом приходится накладывать некоторые мало чувствительные для задач математической физики ограничения на функции. Достаточно просто потребовать, чтобы на отрезке $0 \leq x \leq l$ функция имела ограниченную производную. В итоге получается следующая теорема:

Теорема (о разложении в ряд Фурье). Произвольную функцию $f(x)$, имеющую непрерывную первую производную на отрезке $0 \leq x \leq l$ и удовлетворяющую граничным условиям $f(0) = f(l) = 0$ можно разложить в ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (0 \leq x \leq l),$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Остается заметить, что струна закреплена в точках $x=0$ и $x=l$, и следовательно, начальные отклонения, как и начальные скорости в этих точках,

равны нулю:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Поэтому функции φ и ψ можно представить в виде рядов по синусам:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

а искомые коэффициенты A_n и B_n выражаются через их коэффициенты

Фурье $B_n = \varphi_n, \quad A_n = \frac{\psi_n}{\omega_n}.$

Итак, для того, чтобы по заданному начальному профилю струны и начальному распределению ее скоростей $u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{t=0} = \psi(x)$ найти мгновенный профиль струны $y = u(x, t)$ при всех $t > 0$, следует вычислить коэффициенты Фурье функций для φ и ψ по формулам

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

и собственные частоты: $\omega_n = \frac{\pi a n}{l}$, а затем записать ответ в виде ряда по нормальным модам:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \varphi_n \cos \omega_n t \right] \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.6)$$

Сам способ, при котором решение ищут в виде суперпозиции нормальных мод, называют методом Фурье.

Контрольные вопросы и задания

3.2. Определить тип и найти общее решение $z = z(x, y)$ уравнений:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5; \quad \text{б) } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \quad \text{в) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1.$$

3.3. Найти общее решение уравнения: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$

3.4. Используя замены $\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$, упростить следующие уравнения (привести к каноническому виду):

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8u = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2x;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \xi = x^2 + y, \quad \eta = y;$$

$$\text{в) } (1 + x^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x(1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \xi = y, \quad \eta = \operatorname{arctg} x.$$

3.5. Найти общее решение уравнения: $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Указание. Перейти к характеристическим переменным $\xi = x + y, \quad \eta = 3x + 2y.$

3.6. Используя формулу Даламбера, найти решение уравнений:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = x^2, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = x;$$

$$\text{в) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = x, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = -x;$$

$$\text{г) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \cos x;$$

$$\text{д) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = x, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \cos x.$$

3.7. Найти в области $0 < x < l, \quad t > 0$ решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

удовлетворяющее однородным краевым условиям: $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$

и следующим начальным условиям:

$$\text{а) } u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin \frac{2\pi}{l} x; \quad \text{б) } u(x, 0) = x(l - x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0;$$

$$\text{в) } u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2u_0 x}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}; \\ -\frac{2u_0 x}{l} + 2u_0, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0;$$

$$z) u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, & \left| x - \frac{l}{2} \right| < \frac{h}{2}, \\ 0, & \left| x - \frac{l}{2} \right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

3.8. Найти решение уравнения $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в области $0 < x < \infty, 0 < t < \infty$, удовлетворяющее краевому условию $u(0,t) = 0$ и начальным условиям:

$$u(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Указание. Использовать преобразование Фурье (косинус или синус).

4. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

4.1. Вывод уравнения теплопроводности. Первая краевая задача

Рассмотрим однородный теплоизолированный с боков стержень конечной длины l , имеющий постоянную по длине толщину, и настолько тонкий, чтобы в любой момент времени температуру тела во всех точках поперечного сечения можно было бы считать одинаковой.

Выберем ось x (направив ее по оси стержня) так, чтобы стержень совпадал с отрезком $[0; l]$ оси x (рис. 4.1).

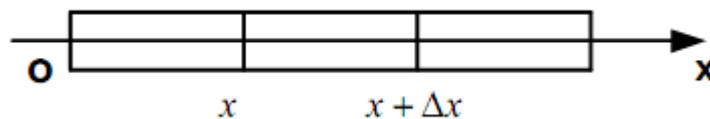


Рис.4.1. Однородный теплоизолированный с боков стержень

Обозначим температуру стержня в сечении x в момент t через $T(x,t)$. Тогда функция $T = T(x,t)$ задает закон распределения температуры в стержне. Выведем дифференциальное уравнение для этой функции.

Выделим элемент стержня $[x, x + \Delta x]$ и составим для него уравнение теплового баланса, согласно которому скорость изменения количества тепла в рассматриваемом объеме (изменение количества тепла в единицу времени),

обусловленная теплоемкостью материала, равна количеству тепла, поступившему в этот объем в единицу времени вследствие теплопроводности.

Скорость изменения тепла в выделенном элементе стержня равна

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho s \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx,$$

где c – теплоемкость материала стержня, ρ – плотность, s – площадь поперечного сечения стержня.

По теореме о среднем

$$\int_x^{x+\Delta x} c\rho s \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx = c\rho s \frac{\partial T(x + \theta_1 \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x, \quad \text{где } 0 < \theta_1 < 1.$$

Найдем количество тепла, поступившее в выделенный элемент стержня за единицу времени. Так как стержень теплоизолирован с боков, то тепло может поступать только через сечения, ограничивающие выделенный элемент стержня. Известно, что количество тепла, протекающее через сечение с абсциссой x за единицу времени, равно $-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} s$, где k – коэффициент теплопроводности, s – площадь сечения.

Поэтому искомое количество тепла равно

$$\begin{aligned} & -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} s - \left(-k \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} s \right) = ks \left(\frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) = \\ & = ks \frac{\partial^2 T(x + \theta_2 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned}$$

где $0 < \theta_2 < 1$. (Согласно формуле конечных приращений Лагранжа к функции $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$).

Тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$c\rho s \frac{\partial T(x + \theta_1 \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x = ks \frac{\partial^2 T(x + \theta_2 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Разделим обе части этого уравнения на $s\Delta x$ (объем выделенного элемента стержня) и устремим Δx к нулю (стягивая выделенный элемент стержня к сечению). Получим уравнение теплопроводности для однородного стержня

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{cp}}$ – коэффициент температуропроводности.

Искомая функция $T(x, t)$ должна удовлетворять уравнению (4.1), начальному условию $T(x, t)|_{t=0} = T(x, 0) = f(x)$ ($0 \leq x \leq l$), где $f(x)$ – заданная функция от координат (это условие выражает закон распределения температуры по длине стержня в начальный момент времени) и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} T(x, t)|_{x=0} &= T(0, t) = \varphi_1(t) \\ T(x, t)|_{x=l} &= T(l, t) = \varphi_2(t) \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq +\infty),$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – заданные функции от времени. Они определяют температуру, поддерживаемую на конце стержня. Данное уравнение не учитывает тепловой обмен между поверхностью стержня и окружающим пространством.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Пусть Ω – конечная область трехмерного пространства, S – граница области Ω , Q – цилиндр с основанием Ω в пространстве переменных (x, y, z, t) , образующие которого параллельны оси $0t$. Q_T – часть этого цилиндра, ограниченная плоскостями $t = 0$ и $t = T$ ($T > 0$), часть границы цилиндра Q_T , состоящую из его нижнего основания и боковой поверхности, обозначим через Γ .

Найдем в цилиндре Q_T решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (4.2)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (4.3)$$

и граничному условию

$$T|_{x=0} = \psi(P, t) \quad (t \in [0, T]), \quad (4.4)$$

где P – точка поверхности S . Функции φ и ψ непрерывны, причем значения ψ при $t = 0$ совпадают со значениями φ на границе S .

Задача нахождения решения уравнения (4.2) при условиях (4.3), (4.4) называется первой краевой задачей для уравнения теплопроводности.

Теорема. Функция $T(x, y, z, t)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности (4.2) внутри цилиндра Q_T и непрерывная вплоть до его границы, принимает наибольшее и наименьшее значение на Γ , т. е. или

при $t = 0$, или на боковой поверхности цилиндра Q_T .

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что:

- 1) решение первой краевой задачи единственно;
- 2) решение первой краевой задачи непрерывно зависит от правых частей начального и граничных условий;
- 3) если функция T , непрерывная на замыкании Q_T и удовлетворяющая первой краевой задаче, равна нулю на Γ , то она тождественно равна нулю в замыкании Q_T .

4.2. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье

Задача о распространении тепла в теплоизолированном с боков стержне длины l сводится к нахождению решения уравнения (4.1) с удовлетворяющего начальному условию

$$T(x,0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (4.5)$$

и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} T(0,t) &= \varphi_1(t) \\ T(l,t) &= \varphi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура, т.е. когда граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} T(0,t) &= T_0 = const \\ T(l,t) &= T_1 = const \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < +\infty). \quad (4.6)$$

Не умаляя общности, можно считать, что $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, ибо в противном случае этого всегда можно добиться при помощи замены искомой функции $T(x,t)$ по формуле

$$F(x,t) = T(x,t) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{l} x, \quad (4.7)$$

где F – новая неизвестная функция. Действительно, так как

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

то функция F удовлетворяет тому же уравнению, что и функция T :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad \text{Далее из (4.7) и (4.6) следует, что}$$

$$\left. \begin{aligned} F(0,t) &= 0 \\ F(l,t) &= 0 \end{aligned} \right\} (0 \leq t < +\infty). \quad (4.6^*)$$

Таким образом, достаточно найти решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальному условию (4.5) и граничным условиям (4.6^{*}).

Как и в случае волнового уравнения, будем искать решение уравнения (4.1) в виде произведения двух функций

$$T = X(x) \cdot Y(t), \quad (4.8)$$

одна из которых зависит только от x , а другая – только от t ; причем $X(x) \neq 0$ и $Y(t) \neq 0$, ибо в противном случае $T(x,t) \equiv 0$, что невозможно, т.к. функция $T \equiv 0$ не удовлетворяет начальному условию (4.5), поскольку предполагается, что $f(x) \neq 0$.

В силу граничных условий функция $X(x)$ должна обращаться в нуль на концах интервала $[0; l]$: $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$. Подставляя (4.8) в (4.1), получим

$$X(x) \cdot Y'(t) = a^2 X''(x) \cdot Y(t) \quad \text{или} \quad \frac{Y'(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда заключаем, что функции $X(x)$ и $Y(t)$ должны быть решениями однородных линейных дифференциальных уравнений

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (4.9)$$

$$Y' + a^2 \lambda Y = 0. \quad (4.10)$$

Ненулевые решения уравнения (4.9) существуют только при $\lambda = \lambda_k$, где

$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$), причем в качестве этих решений можно взять

функции $X_k = \sin \frac{\pi k}{l} x$ ($k = 1, 2, \dots$). Заменяя в уравнении (4.10) λ на λ_k ,

получаем уравнение $Y'_k = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 Y_k = 0$. Его общим решением будет

$Y_k = c_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} = 0$, где c_k – произвольная постоянная, соответствующая взятому значению k .

Подставляя найденные значения $X = X_k$ и $Y = Y_k$ в (4.8), получим решение уравнения (4.1) в виде

$$T_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.11)$$

Каждая из функций (4.11) удовлетворяет граничным условиям. Можно показать, что функция

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (4.12)$$

тоже является решением уравнения (4.1), удовлетворяющим граничным условиям.

Выберем коэффициенты c_k таким образом, чтобы функция (4.12) удовлетворяла и начальному условию (4.5). Полагая в (4.12) $t = 0$, получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (4.13)$$

Предположим, что функция $f(x)$ разложима в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (4.14)$$

Тогда $b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx$. Сравнивая (4.13), (4.14), видим, что $c_k = b_k$, т.е.

$c_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx$, чем и завершается решение задачи.

4.3. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$T|_{t=0} = f(x). \quad (4.15)$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени $t > 0$. Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции $T(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

(где $\tau = \frac{k}{c\rho} t$) и начальному условию (4.15).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в предыдущем разделе с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Поэтому, разделяя переменные по методу Фурье, можно представить решение

уравнения (4.15) в виде

$$T(x, \tau) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (4.17)$$

В случае стержня конечной длины l определено из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ : $\lambda_n = n \frac{\pi}{l}$, где каждому значению индекса n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n . Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\frac{\pi}{l}$ и стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞ .

Таким образом, каждому значению λ соответствует частное решение:

$$T_\lambda(x, \tau) = (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (4.18)$$

Общее решение получается из частных решений не суммированием, а интегрированием по параметру λ :

$$T_\lambda(x, \tau) = \int_0^\infty T_\lambda d\lambda = \int_0^\infty (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda. \quad (4.19)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье.

В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx < \infty$, может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_0^\infty (f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda, \quad (4.20)$$

$$\text{где } f_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad f_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\lambda) \sin \lambda x d\lambda. \quad (4.21)$$

Подставляя значения Фурье-преобразований $f_c(x)$ и $f_s(x)$ в интеграл (4.20), получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\cos \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right) d\lambda \quad \text{или}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi) (\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi) d\xi.$$

Учитывая, что выражение в скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (4.22)$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (4.19) выбрать соответственно $A(\lambda) = f_c(x)$ и $B(\lambda) = f_s(x)$, то интеграл

$$T_\lambda(x, \tau) = \frac{1}{\pi} (f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (4.23)$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения, получается из (4.22):

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad \text{Преобразуем этот интеграл, меняя}$$

порядок интегрирования:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda. \quad (4.24)$$

Обозначив $q = \xi - x$, можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу:

$$K(\tau, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda q d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \quad (4.25)$$

Заменяя обратно q через $\xi - x$ и подставляя (4.25) в (4.24), получим окончательно:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (4.26)$$

Чтобы понять физический смысл полученного решения, допустим, что в начальный момент времени ($t = 0$) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки $x = 0$, где $T = T_0$.

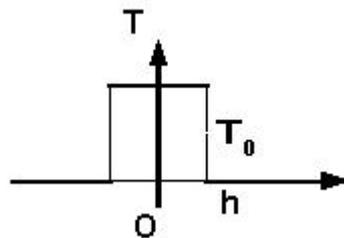


Рис. 4.2. Температура стержня в начальный момент времени

Можно себе представить, что в момент $t = 0$ элементу длины $2h$ стержня сообщили некоторое количество тепла $Q_0 = 2hc\rho T_0$, которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения T_0 . Следовательно, формула (4.6) принимает вид

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \frac{Q_0}{4h\sqrt{\pi\tau c\rho}} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Будем теперь уменьшать h , устремляя его к нулю, считая количество тепла неизменным, т.е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла мощностью Q_0 , помещенного в момент $t = 0$ в точке $x = 0$. При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\tau c\rho}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi$$

или по теореме о среднем

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\tau c\rho}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}.$$

В частности, если $Q_0 = c\rho$, то температура в любой точке стержня в произвольный момент времени $t = \frac{\tau}{a}$ (a – коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}.$$

Заметим, что величина $c\rho \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx$ есть общее количество тепла, полученное стержнем к моменту времени t :

$$Q(t) = c\rho \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx.$$

Но последний (справа) интеграл есть интеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Поэтому получаем, что $Q(t) = c\rho = Q_0 = const$, что согласуется с законом сохранения энергии.

Контрольные вопросы и задания

4.1. В полуполосе $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ найти решение уравнения теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при однородных краевых условиях: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ и начальном условии:

а) $u(x,0) = T_0$; б) $u(x,0) = \sin \frac{\pi}{l} x$;

в) $u(x,0) = \frac{x(l-x)}{l^2}$; г) $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq l/2 \\ l-x, & l/2 < x < l. \end{cases}$

4.2. В полуполосе $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

а) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = A(l-x)$;

б) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = U$;

в) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$.

4.3. Найти в полуполосе $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ решение уравнения теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при краевых условиях: $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, $u(l,t) = 0$ и начальном условии: $u(x,0) = A(l-x)$.

Указание. Использовать метод разделения переменных.

4.4. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня $u(0,t) = T_1$, $u(l,t) = T_2$.

4.5. Найти стационарное распределение температуры $u(r)$ в толстом круговом цилиндре, если $u|_{r=R_1} = T_1$, $u|_{r=R_2} = T_2$, где R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндра.

Указание. Искать решение в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , считая, что температура и не зависит от φ и z .

4.6. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ в круге радиуса $r = a$, при условии, что $u(r, \varphi)|_{r=a} = B \sin^3 \varphi$.

4.7. В прямоугольнике $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ найти решения $u = u(x, y)$ уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, удовлетворяющие условиям:

$$u(0, y) = \frac{\partial u(l, y)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad \text{где}$$

а) $f(x) = x(x - a)$; б) $f(x) = A$; в) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{a}$.

4.8. Найти гармонические функции $u(r, \varphi)$ внутри кольца $a < r < b$, удовлетворяющие краевым условиям:

а) $u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = \cos \varphi$;

б) $u(a, \varphi) = A, \quad u(b, \varphi) = B \sin 2\varphi$;

в) $u(a, \varphi) = A \cos \varphi, \quad u(b, \varphi) = B + T \sin 2\varphi$.

4.9. Найти решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в полуполосе $0 < x < \infty, 0 < y < l$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, l)}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad u(\infty, y) = 0.$$

5. ХАОС В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

Одно из фундаментальных понятий в математическом моделировании – это понятие *динамической системы*.

О динамической системе говорят в том случае, если можно указать такой набор величин, называемых *динамическими переменными* и характеризующих *состояние* системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает *оператор эволюции* системы. Если состояние системы задается набором N величин, то изменение

состояния во времени, или динамику системы, можно представить как движение точки по траектории в N -мерном фазовом пространстве, которую называют *фазовой траекторией*.

Когда-то в понятие динамической системы вкладывали чисто механическое содержание, имея в виду набор тел, связанных силовыми взаимодействиями и подчиняющихся системе дифференциальных уравнений, вытекающих из законов Ньютона. По мере развития науки понятие динамической системы становилось шире, охватывая объекты разной природы. Современное понятие динамической системы – это результат длительной эволюции научных представлений и синтеза достижений многих дисциплин. Оно подразумевает возможность задания оператора эволюции любым способом, не обязательно дифференциальным уравнением. В частности, в последнее время и в теоретических исследованиях, и в работах прикладного характера очень часто рассматривают системы с дискретным временем, которые описываются рекуррентными отображениями. В этом случае под фазовой траекторией следует понимать некоторую дискретную последовательность точек в фазовом пространстве.

Довольно часто в литературе, особенно математической, динамические системы с непрерывным временем называют *потоками*, а с дискретным временем – *каскадами*. С точки зрения физика, эти термины представляются не очень удачными, поскольку они «заняты», несут иную смысловую нагрузку.

Выделяют два класса динамических систем – консервативные и диссипативные. В физике свойство консервативности понимается как сохранение энергии. В частности, механические колебательные системы в отсутствие трения относятся к консервативным системам. В присутствии трения механическая энергия не сохраняется, а постепенно рассеивается (диссипирует) и переходит в тепло, т.е. в энергию микроскопического движения молекул, составляющих систему и ее окружение. Строго говоря, в этом случае временная эволюция должна определяться не только состоянием самой системы, но и окружением. Все же и в этой ситуации описание в рамках концепции динамических систем, заданных, например, дифференциальными уравнениями, очень часто оказывается разумным и достаточно точным. Это будет уже диссипативная динамическая система.

Будем ассоциировать консервативность и диссипативность с исходными понятиями теории динамических систем, а не апеллировать к частному классу объектов конкретной природы.

Пусть мы имеем некоторую динамическую систему, т.е. задано фазовое

пространство и указан оператор эволюции. Вместо одной системы рассмотрим *ансамбль*, состоящий из большого количества ее идентичных копий, причем все представители ансамбля могут отличаться друг от друга только лишь начальными условиями. В фазовом пространстве ансамбль представляется облаком изображающих точек. С течением времени каждая изображающая точка перемещается в фазовом пространстве, как предписано динамическими уравнениями системы, так что форма облака и его размеры будут меняться.

Может случиться, что объем облака в процессе временной эволюции будет оставаться постоянным (рис. 5.1, а). Это характерно для консервативных систем, к которым относятся, в частности, рассматриваемые в классической механике *гамильтоновы системы*.

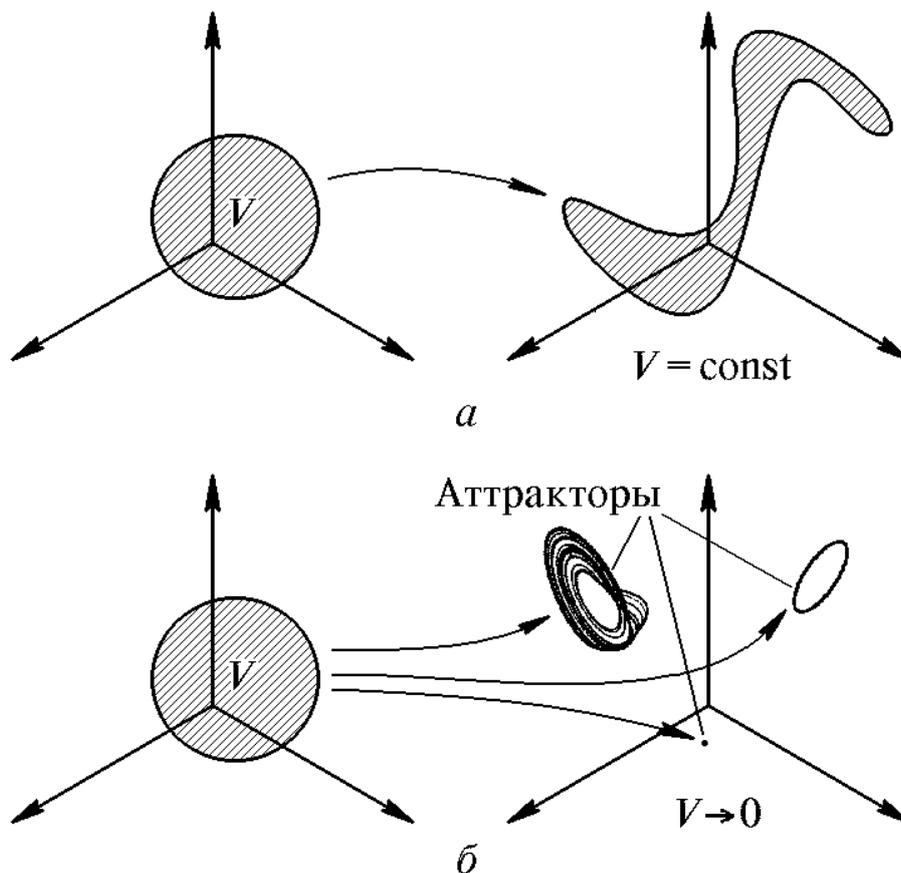


Рис. 5.1. Консервативная (а) и диссипативная (б) динамические системы

Что касается диссипативных систем, то для них характерно, что с течением времени облако изображающих точек «сжеживается» и концентрируется в итоге на одном или нескольких *аттракторах* — подмножествах фазового пространства, обладающих обычно нулевым фазовым

объемом (рис. 5.1, б). С точки зрения динамики во времени это означает, что режим, возникающий в системе, предоставленной самой себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах).

Простые примеры аттракторов – устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл – замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся с течением времени все близкие траектории. Предельный цикл отвечает, как известно, режиму периодических автоколебаний.

При наличии в фазовом пространстве двух или более аттракторов говорят, что имеет место, соответственно, *бистабильность* или *мультистабильность*. Множество точек фазового пространства, из которых траектории приходят в конце концов к какому-то одному аттрактору, называется *бассейном* этого аттрактора.

Одним из важных понятий теории динамических систем является понятие *инвариантного множества*. Множество точек фазового пространства называют инвариантным в том случае, если фазовая траектория, стартующая из любой его точки, целиком принадлежит этому множеству.

Любой аттрактор есть инвариантное множество, но не наоборот. Неустойчивые неподвижные точки, неустойчивые замкнутые орбиты – это тоже инвариантные множества. В дальнейшем будем рассматривать и другие, более сложные примеры инвариантных множеств.

В отличие от аттракторов, которые имеют место только в диссипативных системах, инвариантные множества встречаются и в диссипативных, и в консервативных динамических системах.

5.1. Одномерные отображения

Рассмотрим модельные системы, состояние которых характеризуется одной-единственной переменной x , т. е. фазовое пространство одномерно, а оператор эволюции задается рекуррентным отображением вида $x_{n+1} = f(x_n)$, где n – дискретное время. Это очень специфический класс динамических систем, но их анализ оказывается полезным и важным, проливая свет на многие феномены, встречающиеся в более сложных ситуациях.

Отображение «зуб пилы». Рассмотрим систему, оператор эволюции которой задан следующим правилом определения нового состояния по предыдущему:

$$x_{n+1} = \{2x_n\}, \quad (5.1)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. В другой общепотребительной форме это соотношение записывают как

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}. \quad (5.2)$$

Используя (5.1) или (5.2), можем, в принципе, определить состояние в любой последующий момент, если точно знаем исходное состояние x_0 . Это динамическая система, заданная одномерным рекуррентным отображением. На рис. 5.2 показан график отображения и построена итерационная диаграмма, иллюстрирующая несколько первых шагов динамики, начиная с некоторого начального состояния.

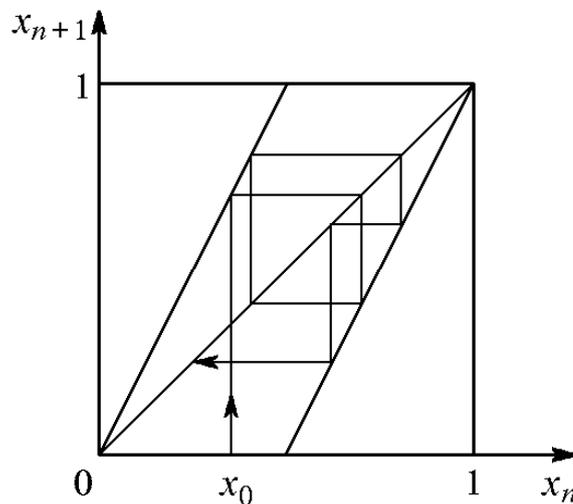


Рис. 5.2. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая несколько первых шагов динамики

Пусть в качестве начального состояния выбрано некоторое число x_0 , принадлежащее интервалу от 0 до 1. Запишем это число в двоичной системе счисления:

$$x_0 = 0,01011010001010011001010...$$

Теперь один шаг эволюции во времени согласно уравнению (5.1) или (5.2) состоит в том, что последовательность нулей и единиц сдвигается влево на одну позицию и цифра, оказавшаяся, по левую сторону от запятой отбрасывается. Имеем:

$$x_1 = 0,1011010001010011001010\dots$$

$$x_2 = 0,011010001010011001010\dots$$

$$x_3 = 0,11010001010011001010\dots$$

и т. д. Ясно, что присутствие цифры 0 или 1 на первой позиции после запятой показывает, в какой половине единичного интервала – левой или правой пребывает динамическая переменная x_n в данный момент.

Предположим, что двоичная дробь периодическая, это будет так, если x_0 рациональное число. Ясно, что состояние системы будет периодически повторять исходное через число временных шагов, равное периоду двоичного кода x_0 . Такой характер движения будет соответствовать любому рациональному числу, а эти числа, как известно, образуют на единичном интервале бесконечное счетное множество. Следовательно, система обладает бесконечным счетным множеством периодических орбит (циклов).

Непериодические двоичные дроби, отвечающие иррациональным числам x_0 , образуют множество с мощностью континуума. Соответственно, можно сказать, что наша система имеет континуум непериодических траекторий.

Мы вправе задать начальное условие числом, имеющим *произвольную последовательность нулей и единиц* в своей двоичной записи. Возьмем случайную последовательность, которую можно получить подбрасыванием монеты, записывая результаты испытаний по правилу орел – 0, решка – 1: 010010... Тогда при задании начального состояния $x_0 = 0,010010\dots$ динамическая система (5.1) в процессе своей эволюции *будет посещать левую и правую половину единичного интервала, следуя нашей случайной последовательности*. То есть наблюдаем хаос в системе, описываемой *детерминированным уравнением* (5.1).

Преобразование двоичной последовательности, состоящее в сдвиге всех ее символов на одну позицию, называют *сдвигом Бернулли*. (По ассоциации с известной в теории вероятности схемой Бернулли, которая заключается в последовательности независимых испытаний, когда каждое испытание имеет два возможных исхода с вероятностями p и $1 - p$.)

Предположи, что мы взяли очень близкое, но другое начальное значение x_0 . Очень близкое – это значит, что достаточно большое количество цифр двоичной записи до некоторой позиции, например 25-й, совпадает, а дальнейшие цифры («хвост») какие-то совсем иные. Тогда после 25 временных шагов, т. е. сдвигов Бернулли, начало хвоста как раз придвинется к разделительной запятой. Дальнейшая динамика и последовательность посещений левой и правой половины единичного интервала будет определяться

структурой хвоста и, следовательно, будет совершенно другой, нежели это имело место для исходного начального условия. Таким образом, имея возможность контролировать точность задания начального условия до 25-го двоичного знака, мы можем правильно предсказывать попадание x_n в левую или правую половину единичного интервала лишь на протяжении первых 25 временных шагов.

Если динамическая система, подобная по своим свойствам рассматриваемой модели, привлекается для описания какой-либо физически реалистичной ситуации, то попытка предсказания состояния на N шагов вперед сталкивается при увеличении N с необходимостью столь точного задания начальных условий, что это становится в конце концов принципиально невозможным.

Известный популяризатор науки Мартин Гарднер в своей книге приводит такую притчу. Инопланетянин, желая ознакомить своих соплеменников с Британской энциклопедией, записывает ее содержание с помощью двоичного кода и сопоставляет этому коду число между нулем и единицей. Далее, на стержне из особого материала наносится риска, отмечающая найденное число. Инопланетянин берет с собой этот стержень с тем, чтобы дома измерить точно координату риски, получить записанное число в двоичном коде и восстановить тем самым содержание энциклопедии. Нелепость ситуации с физической точки зрения совершенно очевидна, и ее не спасают никакие допущения о всемогуществе инопланетной технологии: при попытке реализовать указанный способ записи информации пришлось бы иметь дело с масштабами длины на много порядков меньшими, чем размеры атомов.

Логистическое отображение. Обратимся к следующему примеру – логистическому отображению

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (5.3)$$

где x_n – динамическая переменная, а λ – параметр, от величины которого зависит характер динамики. Это тоже искусственно сконструированная модель динамической системы, но она имеет достаточно реалистичную интерпретацию в биологии для описания динамики численности некоторых биологических популяций. На рис. 5.3 показан график отображения (5.3).

В общем случае логистическое отображение представляется в виде

$$y_{n+1} = R(y_n - y_n^2).$$

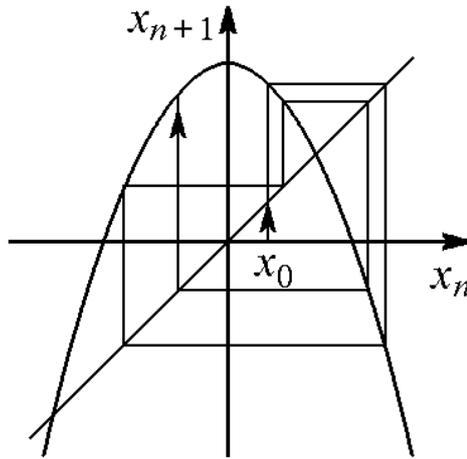


Рис. 5.3. Логистическое отображение при значении параметра $\lambda = 2$

На самом деле обе формы записи эквивалентны и совпадают при перемене параметра:

$$x = \frac{y - 1/2}{R/4 - 1/2}, \quad \lambda = R \left(\frac{R}{4} - \frac{1}{2} \right).$$

Рассмотрим хаос в логистическом отображении, следуя замечательно простой идее, развитой в конце 40-х годов Уламом и фон Нейманом. Их подход применим при частном значении параметра в уравнении (5.3), а именно, при $\lambda = 2$. В отображении, которое принимает вид

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2, \quad (5.4)$$

выполним замену переменной

$$x_n = \cos^2 2\pi y_n; \quad x_{n+1} = \cos^2 2\pi y_{n+1}. \quad (5.5)$$

После подстановки выражения указанного вида для x_{n+1} и x_n в правую и левую часть уравнения получаем

$$\cos^2 2\pi y_{n+1} = 1 - 2\cos^2 2\pi y_n.$$

$2\cos^2 \varphi - 1 = \cos 2\varphi$ – известная формула из тригонометрии, тогда получим $-\cos 2\pi y_{n+1} = -\cos 4\pi y_n$. Это соотношение будет справедливо для всех n , если потребовать, чтобы переменная y_n удовлетворяла рекуррентному уравнению

$$y_{n+1} = 2y_n \pmod{1}. \quad (5.6)$$

Последовательность $x_n = \cos^2 2\pi y_n$ будет подчиняться исходному уравнению (5.4). В соотношении (5.6) узнаем отображение «зуб пилы», для которого было установлено присутствие хаоса. Следовательно, хаос имеет

место и в логистическом отображении. Зададим y_0 двоичной дробью в виде случайной последовательности нулей и единиц. Тогда динамика y_n будет хаотической; в терминах двоичного кода она представляется сдвигом Бернулли. Соответственно, хаотической будет и динамика x_n при старте из начальной $x_0 = -\cos 2\pi y_0$. Интересно, что это хаотическое решение рекуррентного уравнения (5.4) можно записать в явном виде с помощью формулы

$$x_n = -\cos(2_{n+1} \pi \arccos(x_0)).$$

Рассмотрим другой подход к обоснованию хаотической динамики логистического отображения при $\lambda = 2$. Можно ли итерировать отображение (5.4) назад во времени? Выражая с помощью (5.4) x_n через x_{n+1} , получим

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{1 - x_{n+1}}{2}}, \quad (5.7)$$

т.е. заданному x_{n+1} может предшествовать одно из двух значений x_n , отвечающих разному выбору знака перед квадратным корнем. Обеспечить однозначность при итерациях в обратном времени можно только указав на каждом шаге, какой знак квадратного корня выбрать. Зададим произвольную бесконечную последовательность из двух символов R и L , например,

RLRLRLRLRLRLRLRL...

и будем на каждом очередном шаге выбирать знак «+», если очередной символ R , и «-», если очередной символ L . Соответственно этому получаемое значение x_n будет располагаться на правом (*Right*) или на левом (*Left*) склоне параболы. Заметим, что какой бы ни была RL -последовательность, начав итерации, мы никогда не встретимся с появлением под корнем отрицательного числа. Действительно, из формулы (5.7) видно, что из неравенства $|x_{n+1}| < 1$ следует $|x_n| < 1$. Поэтому ничто не мешает взять в качестве RL -кода последовательность, полученную посредством случайных испытаний. Возьмем теперь точку x , в которую мы попали в результате многократных итераций в обратном времени, за начальное условие для уравнения (5.4). Система будет эволюционировать хаотически, посещая левый и правый склоны параболы в точном соответствии с символами R и L нашей случайной последовательности, читаемой в обратном порядке.

Подчеркнем, что все сказанное справедливо благодаря специальному выбору значения параметра $\lambda = 2$. Если провести аналогичные рассуждения для $\lambda < 2$, то окажется, что, стартовав от некоторого определенного x , при

итерациях в обратном времени можно использовать *не все* возможные RL -последовательности, а лишь некоторое их подмножество. Причем это подмножество становится все более и более тощим с уменьшением λ . Два рассмотренных подхода отвечают *разным* правилам кодирования траекторий логистического отображения последовательностями двух символов.

Отображение «тент». Следующий пример – отображение «тент» (рис. 5.4, *a*), которое получило название за форму своего графика, напоминающую палатку–тент. Итерационная диаграмма иллюстрирует динамику на нескольких первых шагах при старте из начального состояния x_0 .

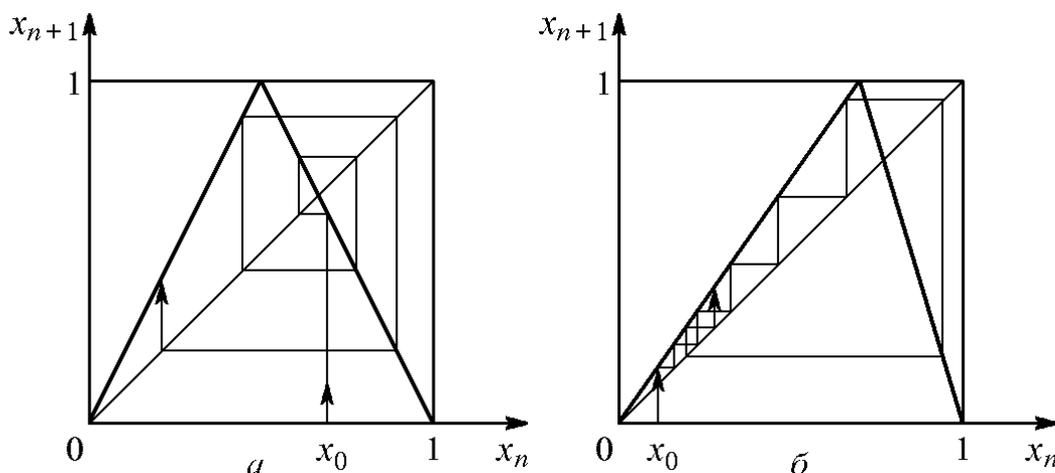


Рис. 5.4. Отображение «тент» при значениях параметра α соответственно 0,5 и 0,7

На рис. 5.4, *б* показана модификация этого отображения, «косой тент». Его можно определить формулой

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{\alpha}, & 0 < x_n < \alpha, \\ \frac{1-x_n}{1-\alpha}, & \alpha < x_n \leq 1, \end{cases} \quad (5.8)$$

где α – положительный параметр, меньший 1. Частный случай симметричного тента получается при $\alpha = 1/2$.

Как и для логистического отображения, можно легко построить траекторию, посещающую левую (L) и правую (R) ветвь графика в любой произвольной наперед заданной последовательности. Для этого итерируем отображение в обратном времени, выбирая точку-прообраз каждый раз на той

ветви, которая предписана заданным RL -кодом. Теперь примем полученную после большого числа итераций точку за исходную. Тогда при итерациях отображения (5.8) в прямом времени левая и правая ветви будут посещаться в предписанном порядке.

5.2. Теорема Шарковского

Американские математики Ли и Йорке опубликовали ставшую широко известной работу «Period three implies chaos». Оказывается, что если у одномерного отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ есть цикл периода три, то оно имеет континуум непериодических траекторий. Единственное требование к функции $f(x)$ состоит в том, что она должна быть непрерывной.

Пусть a, b, c – три элемента цикла: $b = f(a)$, $c = f(b)$, $a = f(c)$ и a – минимальный из них. (Заметим, что никакие два элемента не могут совпадать, так как в этом случае цикл выродился бы в неподвижную точку.) Возможны два случая: $b < c$ и $b > c$, из которых обсудим только первый (второй анализируется аналогично). Рассмотрим специальный пример – кусочно-линейное отображение, показанное на рис. 5.5.

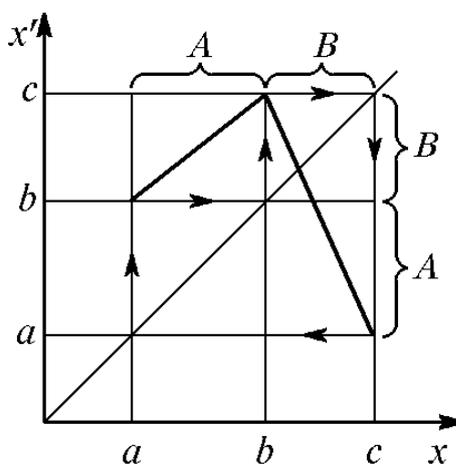


Рис. 5.5. Кусочно-линейное отображение

Правило, определяющее его динамику в обратном времени, можно сформулировать так:

а) если $a \leq x' \leq b$, то положить

$$x = b + \frac{(x' - c)(c - b)}{a - c};$$

б) если $b \leq x' \leq c$, то выбрать один из двух вариантов,

$$\text{б}_1) \quad x = b + \frac{(x' - c)(c - b)}{a - c}$$

или

$$\text{б}_2) \quad x = a + \frac{(x' - b)(b - a)}{c - b}. \quad (5.9)$$

Будем строить траекторию в обратном времени по этим правилам. Заметим, что если на некотором шаге возникла ситуация (а), то на следующем шаге обязательно реализуется ситуация (б). Каждый раз, встретившись с ситуацией (б), будем делать выбор с помощью случайных испытаний, скажем, бросанием монеты: орел – (б₁), решка – (б₂). Получится хаотическая траектория. Ясно, что ее можно наблюдать и при динамике в прямом времени при задании некоторого вполне определенного начального условия.

А теперь заметим, что на самом деле конкретный вид отображения (5.9) непринципиален, важно лишь то, что точки интервала $A = [a, b]$ имеют прообразы в интервале $B = [b, c]$, а точки интервала B имеют прообразы и в A , и в B . Этого достаточно, чтобы у отображения наличествовало подмножество траекторий, кодируемых по тем же правилам, что и траектории отображения (5.9).

Наряду с континуумом хаотических траекторий непрерывное одномерное отображение, у которого есть цикл периода три, имеет также циклы всевозможных периодов. Это частный случай *теоремы Шарковского*, содержание которой состоит в следующем:

Если непрерывное отображение одномерного интервала в себя имеет цикл периода m , то оно имеет также и циклы со всевозможными периодами m' , предшествующими числу m в перечне всех целых чисел, выписанных в так называемом порядке Шарковского:

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^4 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \cdot 9 \triangleleft 2^3 \cdot 7 \triangleleft 2^3 \cdot 5 \triangleleft 2^3 \cdot 3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2^2 \cdot 9 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 9 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3 \triangleleft .$$

5.3. Двумерные отображения, сохраняющие площадь

Отображение пекаря. Попытаемся построить отображение, отправляясь от рассмотрения динамики типа сдвига Бернулли на множестве

последовательностей бесконечных в обе стороны. Запишем такую последовательность в виде

$$(\dots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, s_3, \dots), \quad (5.10)$$

где каждое s_i есть либо 0, либо 1. Обратите внимание на особый разделительный символ – точку с запятой, который встречается в единственном месте; его присутствие позволяет соотносить положение символов с некоторым «началом отсчета». Введем две динамические переменные – действительные числа x и y , принадлежащие единичному интервалу, определив их через символы s_i следующим образом:

$$x = \frac{s_0}{2} + \frac{s_{-1}}{4} + \frac{s_{-2}}{8} + \dots, \quad y = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_3}{8} + \dots \quad (5.11)$$

Пусть трансформация последовательности (5.10) за один временной шаг состоит в том, что все символы сдвигаются на одну позицию вправо, так что результатом окажется

$$(\dots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, s_3, \dots). \quad (5.12)$$

Тогда новые значения x и y будут

$$x' = \frac{s_{-1}}{2} + \frac{s_{-2}}{4} + \frac{s_{-3}}{8} + \dots, \quad y' = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{4} + \frac{s_2}{8} + \dots \quad (5.13)$$

Их можно выразить через старые значения x и y следующим образом:

$$x = \{2x\}, \quad y' = \frac{y + [2x]}{2}, \quad (5.14)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа, а квадратные – целую часть. Другая форма записи тех же соотношений:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases} \quad \text{для } x \leq \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = \frac{1+y}{2} \end{cases} \quad \text{для } x > \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

По самому своему построению наша система может демонстрировать хаотическую динамику: чтобы получить хаос, нужно взять в качестве последовательности (5.10) случайный набор символов. Система имеет также бесконечное множество периодических орбит (циклов) – им отвечают периодические последовательности.

В отличие от примеров, приведенных в предыдущем разделе, мы пришли к *двумерному отображению*, описывающему динамику в терминах переменных x и y . Мгновенное состояние нашей системы определяется заданием этих двух величин, причем обе они необходимы для того, чтобы иметь возможность находить последующие состояния по известному начальному. Можно ли представить себе действие двумерного отображения в наглядной геометрической форме? Такое представление существует, и именно оно послужило основанием назвать данную модель *отображением пекаря*. Рассмотрим единичный квадрат на плоскости (x, y) . Разрезаем его пополам, как кусок теста, накладываем одну половинку на другую и раскатываем так, чтобы восстановить исходную форму (рис. 5.6). Для наглядности «тесто», оказавшееся слева при первом разрезе, изображено темным, а справа – светлым. В верхней части рисунка показаны три шага последовательных итераций отображения, а внизу – состояние, возникшее после некоторого достаточно большого числа итераций.

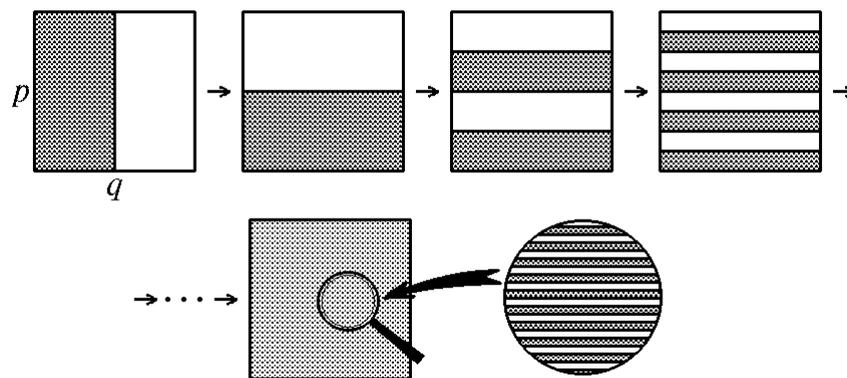


Рис. 5.6. Геометрическая иллюстрация отображения пекаря (5.15)

Из рисунка видно, как выглядит распределение темного и светлого теста на нескольких последовательных шагах. При большом числе итераций это распределение принимает вид набора тонких и длинных чередующихся темных и светлых полосок. При многократном повторении процедуры в конце концов получаем кусок теста, который выглядит однородным. Взяв для пробы небольшой кусочек, мы обнаружим в нем присутствующие в равных долях темную и светлую составляющие. Описанное свойство отображения пекаря называется именно так, как мы его и назвали бы на «бытовом» языке, – *перемешивание*.

Отображение пекаря является консервативной системой или, используя терминологию, специфическую для двумерных отображений, это *отображение, сохраняющее площадь*. Если взять некоторую область на плоскости (x, y) и подвергнуть каждую ее точку действию отображения пекаря, то она перейдет в некоторую другую по форме область, но площадь новой области останется той же самой. Формальное правило для проверки этого свойства состоит в том, что определитель, составленный из производных (якобиан), должен равняться единице. Для отображения пекаря имеем:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1. \quad (5.16)$$

В более широком контексте вместо «площадь» говорят «мера». В случае двумерного фазового пространства мера – это площадь, в случае одномерного – длина, в случае трехмерного – объем.

Мы уже интерпретировали представленную на рис. 5.6 динамику как перемешивание слоев двух сортов теста или, если угодно, двух жидкостей – темной и светлой. Сохранение меры отвечает тому, что эти жидкости являются несжимаемыми.

Аттрактор Смейла-Вильямса. Пример хаотического аттрактора, получивший наименование *соленоид Смейла-Вильямса*, реализуется в трехмерном отображении, которое строится следующим образом. Рассмотрим трехмерную область в форме тора (рис. 5.7).

Представляя аттрактор для наглядности как резиновый бублик, растянем его в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор. Чтобы он там поместился, приходится предположить, что в ходе процедуры общий объем «бублика» уменьшается – площадь поперечного сечения должна уменьшиться более чем в два раза.

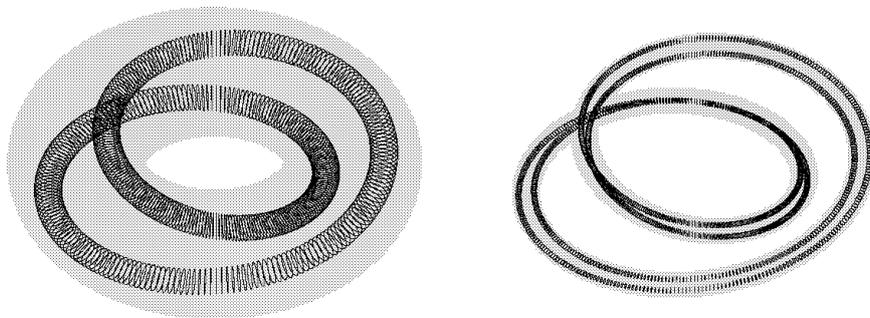


Рис. 5.7. Первые два шага построения аттрактора Смейла-Вильямса

На рис. 5.8 показано, как выглядит поперечное сечение исходного тора после однократного и двукратного применения отображения.

Это похоже на процедуру построения множества Кантора: на каждом шаге в сечении имеется некоторое число дисков. Очередной шаг построения состоит в том, что внутри каждого диска выделяются две меньшие области в форме дисков, которые оставляются для следующего шага, а все остальное множество исключается. То, что останется в итоге, и есть сечение аттрактора Смейла-Вильямса. Имея в виду описанную геометрическую конструкцию, можно предложить аналитическую форму отображения.

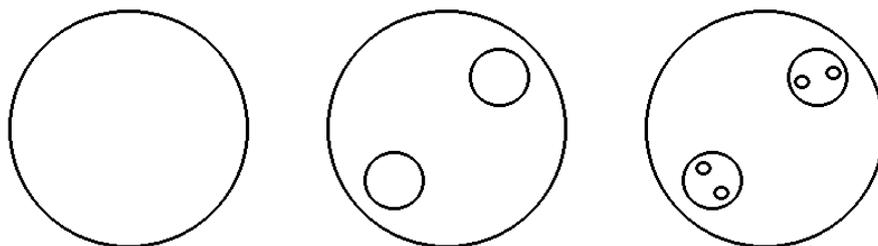


Рис. 5.8. Вид сечения аттрактора Смейла-Вильямса на первых шагах его построения

Ее удобно представить в цилиндрических координатах (r, φ, ζ) , которые связаны с обычными декартовыми координатами (x, y, z) как

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \zeta. \quad (5.17)$$

Тогда подходящей формой отображения будет

$$r' = 1 + \alpha(r - 1) + \varepsilon \cos \varphi, \quad \varphi' = 2\varphi, \quad z' = \alpha z + \varepsilon \sin \varphi, \quad (5.18)$$

где $\alpha = 0,2$, $\varepsilon = 0,3$. Поверхность исходного тора в параметрической форме задается уравнениями

$$r' = 1 + \frac{1}{2} \cos u, \quad \varphi = v, \quad z = \frac{1}{2} \sin u, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi. \quad (5.19)$$

На рис. 5.9 показан портрет аттрактора, построенный путем многократных итераций отображения (5.18). Приведенные примеры

аттракторов Плыкина и Смейла-Вильямса сконструированы так, чтобы они обладали свойством, называемым *гиперболичностью*.

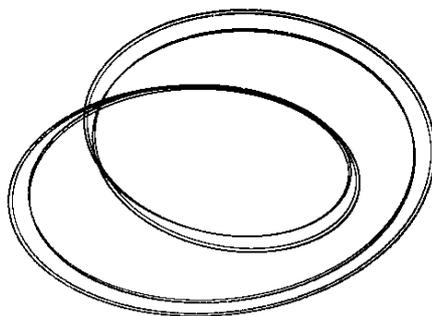


Рис. 5.9. Аттрактора отображения (5.18)

Когда говорят, что аттрактор какой-либо динамической системы гиперболический, то имеют в виду, что все принадлежащие ему траектории гиперболические (седловые), т.е. их окрестность устроена так, как показано на рис. 5.10.

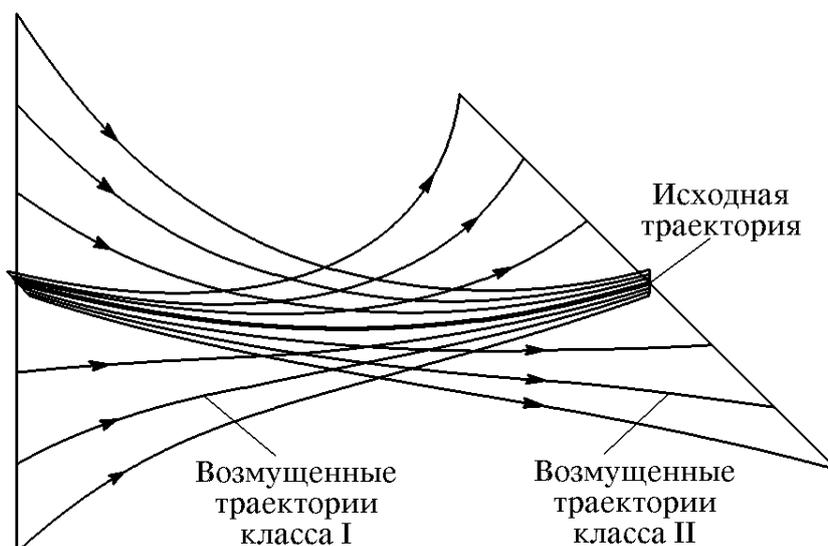


Рис. 5.10. Пояснение устройства окрестности гиперболической (седловой) траектории

Возьмем любую траекторию на аттракторе и рассмотрим всевозможные близкие к ней возмущенные траектории. В линейном приближении среди них выделяется класс траекторий (I), которые приближаются к исходной, причем в среднем по экспоненте, и класс траекторий (II), приближающихся к исходной в обратном времени, тоже в среднем по экспоненте. Поскольку речь идет о рассмотрении динамики около исходной траектории в линейном приближении, то любой из множества инфинитезимально возмущенных траекторий сопоставляется элемент линейного векторного пространства (математики называют его *касательным пространством*), причем все множество исчерпывается всевозможными суперпозициями векторов, ассоциирующихся с упомянутыми выше возмущениями класса I и II. Подчеркнем еще раз, что так должна быть устроена окрестность у *всех* принадлежащих аттрактору траекторий.

Доказано, что системы, обладающие свойством гиперболичности, структурно устойчивы, иными словами, это свойство грубое. Если некоторая система имеет гиперболический аттрактор, то это будет справедливо и для систем, полученных произвольным достаточно малым непрерывным возмущением исходной системы. Исходя из предположения о гиперболичности аттрактора, можно строго доказать присутствие всех других свойств, являющихся существенными атрибутами хаоса.

Контрольные вопросы и задания

- 5.1. Какие динамические системы называются потоками, какие каскадами?
- 5.2. Чем отличаются консервативные и диссипативные динамические системы?
- 5.3. Что является основным понятием динамической системы?
- 5.4. В чем состоят особенности одномерных и двумерных отображений?
- 5.5. Приведите примеры динамических систем с хаотическим поведением.

6. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

В предыдущем разделе были рассмотрены примеры динамических систем с хаотическим поведением, сконструированных искусственно. Теперь естественно спросить: может ли возникать хаос в физических системах или их реалистичных моделях, например, при описании привычными большинству

физиков дифференциальными уравнениями? В качестве первого примера, ставшего классическим, обратимся к знаменитой *модели Лоренца*.

В 1963 г. американский исследователь Эдвард Лоренц, занимавшийся проблемами прогноза погоды, опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение». Эта работа была посвящена исследованию модельной нелинейной системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая получалась как результат определенных приближений при анализе задачи о конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости. При численном решении задачи на компьютере обнаруживалось установление в системе хаотического режима, который характеризовался сложным, непериодическим изменением динамических переменных во времени. Тем не менее, этот режим можно рассматривать в определенном смысле как стационарный, поскольку его статистические характеристики, усредненные за достаточно большой интервал времени, остаются постоянными. Интересно, что система уравнений Лоренца оказывается применимой не только к задаче о конвекции в слое (где она служит довольно грубым, не очень точным приближением), но и к другим системам. К ним относятся одномодовая модель лазера, конвекция в трубке, модель водяного колеса, диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением. Указанное обстоятельство служит замечательной иллюстрацией одного из принципов Л.И. Мандельштама, а именно, теоретико-колебательной общности систем различной физической природы и колебательной взаимопомощи различных дисциплин при описании нелинейных явлений.

Чтобы продемонстрировать различные по стилю подходы к получению уравнений динамики реальных систем, сначала рассмотрим подробный вывод уравнений Лоренца для задачи о конвекции в слое.

6.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое

Рассмотрим слой жидкости глубиной h , находящийся в поле тяжести. Пусть на верхней границе поддерживается постоянная температура T_0 , а на нижней границе $T_0 + \Delta T$ (рис. 6.1). Из-за того что нагретая жидкость легче холодной, при достаточно большой разности температур возникает конвекционное течение жидкости, описание которого и составляет предмет исследования.

В исходной постановке задачи мы имеем дело с *распределенной системой* – ее состояние характеризуется эволюционирующими во времени полями

распределения скорости $V(x, y, z, t)$, плотности $\rho(x, y, z, t)$ и температуры $T(x, y, z, t)$.

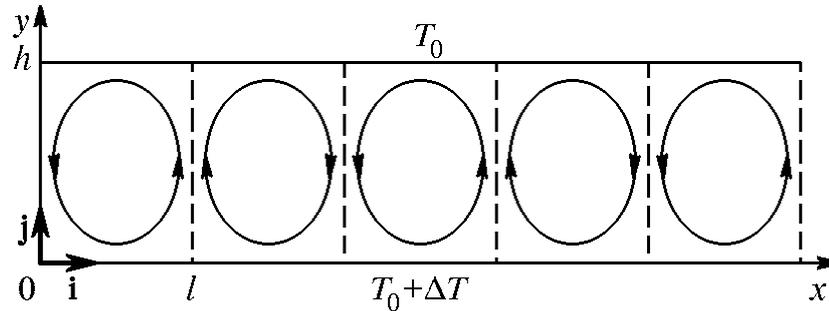


Рис. 6.1. Конфигурация течения, возникающего при конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости

Изменение этих полей во времени описывается системой уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \vec{V}) &= \kappa \nabla^2 T, \\ \rho &= \rho_0 (1 - \gamma(T - T_0)), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ – векторный оператор Гамильтона ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты прямоугольной системы координат), член g обусловлен присутствием силы тяжести, $p(x, y, z)$ – поле давлений, ν – коэффициент кинематической вязкости, κ – коэффициент температуропроводности, γ – коэффициент теплового расширения.

Мгновенное распределение поля скорости и температуры можно интерпретировать как точку в бесконечномерном пространстве, так что распределенная система выступает как динамическая система с бесконечномерным фазовым пространством.

Для получения приближенного описания, в рамках которого можно было бы работать с конечномерной динамической системой, необходимо:

во-первых, считать систему протяженной вдоль оси z , перпендикулярной к плоскости рисунка. Пусть все переменные величины не зависят от z , и z -компонента скорости отсутствует;

во-вторых, использовать так называемое *приближение Буссинеска*. Оно состоит в том, что жидкость предполагается слабо сжимаемой и зависимость плотности от температуры учитывается в уравнениях только в одном месте – в правой части уравнения для скорости.

Положим

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \rho_0 g [1 - \gamma(T - T_0)]y + \tilde{p}(x, y, t), \\ T &= T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} y + \theta(x, y, t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\tilde{p}(x, y, t)$ – отклонение поля давлений от гидростатического давления $p_0 - \rho_0 g y$, а $\theta(x, y, t)$ – отклонение температуры от линейного профиля, и используем в правой части первого уравнения (6.1) следующее представление:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{-\rho_0 g \vec{j} + \nabla \tilde{p}}{\rho_0 (1 - \gamma(T - T_0))} \approx -g \vec{j} - \gamma g (T - T_0) \vec{j} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p}. \quad (6.3)$$

Учитывая, что $g = -g \vec{j}$, перепишем уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} &= \gamma g \vec{j} \theta - \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \vec{V}, \\ \nabla \vec{V} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(\theta \vec{V}) - \frac{\Delta T}{h} \nabla(y \vec{V}) &= \kappa \nabla^2 \theta. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Полезно заметить, что $\nabla(y \vec{V}) = \vec{V} \vec{j}$, поскольку в силу второго уравнения (6.4) $\nabla \vec{V} = 0$. На верхний и нижний края слоя наложим граничные условия, выражающие постоянство температуры и отсутствие потока жидкости через границу:

$$\theta|_{y=0} = 0, \quad \theta|_{y=h} = 0, \quad \vec{V} \vec{j}|_{y=0} = 0, \quad \vec{V} \vec{j}|_{y=h} = 0. \quad (6.5)$$

Распишем векторные уравнения в координатах, обозначая x и компоненты скорости через u и v :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \gamma g \theta - \frac{1}{\rho_0} \nabla \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\theta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\theta v)}{\partial y} - \frac{1}{h} \Delta T v &= \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

6.2. Вывод уравнений Лоренца

Для вывода уравнений Лоренца в системе (6.6) исключим поле давлений, для чего продифференцируем первое уравнение по y , а второе – по x и вычтем одно из другого. В результате система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \gamma g \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\
&+ \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right), \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\partial(\theta u)}{\partial x} - \frac{\partial(\theta v)}{\partial y} + \frac{1}{h} \Delta T v + \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы представить искомые поля в виде разложения в ряды по некоторой полной системе базисных функций; после этого предметом рассмотрения станет зависимость от времени коэффициентов разложения. Такой подход известен как *метод Галеркина*. Будем строить разложение по базису тригонометрических функций вида

$$\begin{aligned}
&\sin m\alpha x \sin n\beta y, \quad \sin m\alpha x \cos n\beta y, \\
&\cos m\alpha x \sin n\beta y, \quad \cos m\alpha x \cos n\beta y,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

где $\beta = \pi/h$, $\alpha = \pi/l - \pi\alpha/h$, m и n – целые.

На этом этапе желательно четко представлять себе конфигурацию течения, что позволит конкретизировать структуру разложения.

Примем как известный из эксперимента факт наличие режима конвекции в виде валов (рис. 6.2).

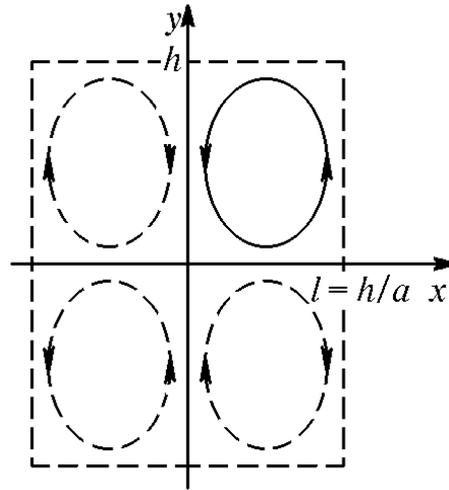


Рис. 6.2. К выбору структуры разложения решения в ряд по базисным функциям

Взяв одну ячейку, расположенную в области $0 < x < 1$, $0 < y < H$, можно считать течение периодически продолженным, как на рис. 6. 2. В таком течении температура должна быть четной функцией x и нечетной функцией y , т. е. мы должны положить

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \cos m\alpha x \sin n\beta y. \quad (6.9)$$

Чтобы записать соотношение для компонент скорости, полезно заметить, что из условия нулевой дивергенции $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ следует, что u и v должны выражаться через производные от одной и той же функции $\psi(x, y, t)$, называемой *функцией тока*: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Как видно из рис. 6.2, компонента u должна быть нечетной по x и четной по y , а компонента v , наоборот, четной по x и нечетной по y . Эти условия будут выполнены, если функцию тока представить в виде

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \sin m\alpha x \sin n\beta y, \quad (6.10)$$

тогда для компонент скорости имеем

$$u(x, y, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) n \beta \sin m \alpha x \cos n \beta y, \quad (6.11)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) m \alpha \cos m \alpha x \sin n \beta y.$$

Далее можно подставить выражения (6.9) и (6.11) в уравнения (6.7) и, используя соотношения ортогональности для базисных функций, получить систему уравнений (бесконечную) для коэффициентов U_{mn} и V_{mn} . Работать с бесконечной системой трудно, если вообще возможно, поэтому ряды нужно каким-то разумным способом обрезать. Модель Лоренца получается, если считать существенными и отличными от нуля члены U_{11} , V_{11} , V_{02} . Эти амплитуды обозначим через X , Y и Z соответственно. Итак, полагаем

$$\begin{aligned} u &= -X \beta \sin \alpha x \cos \beta y, & v &= X \alpha \cos \alpha x \sin \beta y, \\ \theta &= Y \cos \alpha x \sin \beta y - Z \sin 2 \beta y. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Подставим эти выражения в первое уравнение (6.7). В полученном соотношении все возникающие комбинации синусов и косинусов нужно привести с помощью тригонометрических формул к суммам членов вида (6.8), а затем отбросить члены, отличные по структуре от единственной присутствующей в левой части комбинации вида $\sin \alpha x \sin \beta y$. Приравнявая коэффициенты в левой и правой части, получаем

$$\dot{X} = \frac{\alpha \gamma}{\alpha^2 + \beta^2} Y - \nu(\alpha^2 + \beta^2) X. \quad (6.13)$$

Со вторым уравнением поступаем аналогично. Разница, однако, в том, что в левой части теперь присутствуют две пространственные моды – комбинации вида $\cos \alpha x \sin \beta y$ и $\sin 2 \beta y$. Приравнявая коэффициенты перед членами такого вида в левой и правой частях, получаем два уравнения:

$$\dot{Y} = \frac{\alpha \Delta T}{h} X - \kappa(\alpha^2 + \beta^2) Y - \beta \alpha X Z, \quad (6.14)$$

$$\dot{Z} = -4 \kappa \beta^2 Z + \frac{1}{2} \alpha \beta X Y. \quad (6.15)$$

Итак, мы нашли систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для динамических переменных X , Y , Z . Чтобы с ней было удобно работать, полезно привести уравнения к безразмерному виду посредством некоторой замены переменных и параметров. Подставим в (6.13) – (6.15)

$X = Ax$, $Y = By$, $Z = Cz$, $t = D\tau$, где A , B , C , D – некоторые постоянные коэффициенты. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} y - D\nu(\alpha^2 + \beta^2)x, \\ \dot{y} &= \frac{\alpha\Delta T}{h} \frac{AD}{B} x - D\kappa(\alpha^2 + \beta^2)y - \frac{ACD}{B} \beta\alpha xz, \\ \dot{z} &= -4\kappa\beta^2 Dz + \frac{ABD}{2C} \alpha\beta xy, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где точка означает теперь производную по τ . Попробуем подобрать коэффициенты так, чтобы вид уравнений максимально упростился. Положим

$$\begin{aligned} D &= \kappa^{-1}(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}, \quad \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} = \frac{\nu}{\kappa}, \\ \frac{ACD}{B} \beta\alpha &= 1, \quad \frac{ABD}{2C} \alpha\beta = 1. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Отсюда можно найти

$$A = \frac{\sqrt{2}\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}, \quad B = \frac{\sqrt{2}\kappa\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}, \quad C = \frac{\kappa\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}. \quad (6.18)$$

Кроме того, введем безразмерные параметры

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad b = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{4}{1 + a^2}, \quad r = \frac{\alpha^2\gamma g\Delta T}{\kappa\nu h(\alpha^2 + \beta^2)^3}. \quad (6.19)$$

Тогда уравнения (6.16) принимают вид

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (6.20)$$

Это и есть *модель Лоренца*. Она представляет собой динамическую систему с трехмерным фазовым пространством. Мгновенное состояние определяется набором трех переменных (x, y, z) , а оператор эволюции определен конкретным видом уравнений (6.20). (Согласно теореме существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений, если задано начальное состояние (x, y, z) , то однозначно определено и состояние в любой последующий момент.)

Физический смысл переменных, фигурирующих в уравнениях Лоренца, можно проинтерпретировать на основании соотношений (6.9) и (6.11). Переменная x характеризует скорость вращения конвекционных валов,

величины y и z отвечают за распределение температуры соответственно по горизонтали и по вертикали. Параметр b определяется геометрией конвекционной ячейки, а именно, отношением ее вертикального и горизонтального размеров a . Параметр σ есть отношение коэффициента кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности $\frac{\nu}{\kappa}$. Его

называют *числом Прандтля*. Комбинацию $R = \frac{\gamma g h^3 \Delta T}{\kappa \nu}$ называют *числом Рэлея*.

В свое время Рэлей показал, что условию возникновения конвекционного течения в виде валов отвечает определенное критическое значение этого числа, а именно, $R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$. Из формулы (6.19) видно, что параметр r представляет собой отношение R/R_c .

Контрольные вопросы и задания

- 6.1. Может ли возникать хаос в реалистических моделях?
- 6.2. Что представляет собой модель Лоренца?
- 6.3. В каких задачах возможно применение системы уравнений Лоренца?
- 6.4. Что называют числом Прандтля и числом Рэлея?

7. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Система трех нелинейных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), & \dot{y} &= rx - y - xz, & \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (7.1)$$

описывает динамику нескольких физических систем – конвекцию в слое, конвекцию в кольцевой трубке и др. Ее называют *моделью Лоренца* по имени исследователя, обнаружившего в численных расчетах возможность хаотического поведения, а также глубоко и проницательно интерпретировавшего наблюдаемый режим неперiodических колебаний. Данный раздел посвящен обсуждению динамики модели Лоренца.

7.1. Результаты численного моделирования уравнений Лоренца

Если взять выбранные Лоренцем в исходной работе значения параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ и провести численное решение уравнений (7.1) на

компьютере, то обнаруживается, что в системе устанавливается хаотический автоколебательный режим. На рис. 7.1 приводятся зависимости динамических переменных x , y , z от времени. Показанную на верхней диаграмме зависимость $x(t)$ можно интерпретировать наглядно, имея в виду модель водяного колеса. Именно участки процесса, отвечающие осцилляциям в области $x > 0$, отвечают вращению колеса в одну сторону, а участки $x < 0$ – в другую. Видно, что направление вращения время от времени меняется на противоположное, причем число оборотов (осцилляций) в определенном направлении от раза к разу меняется хаотически.

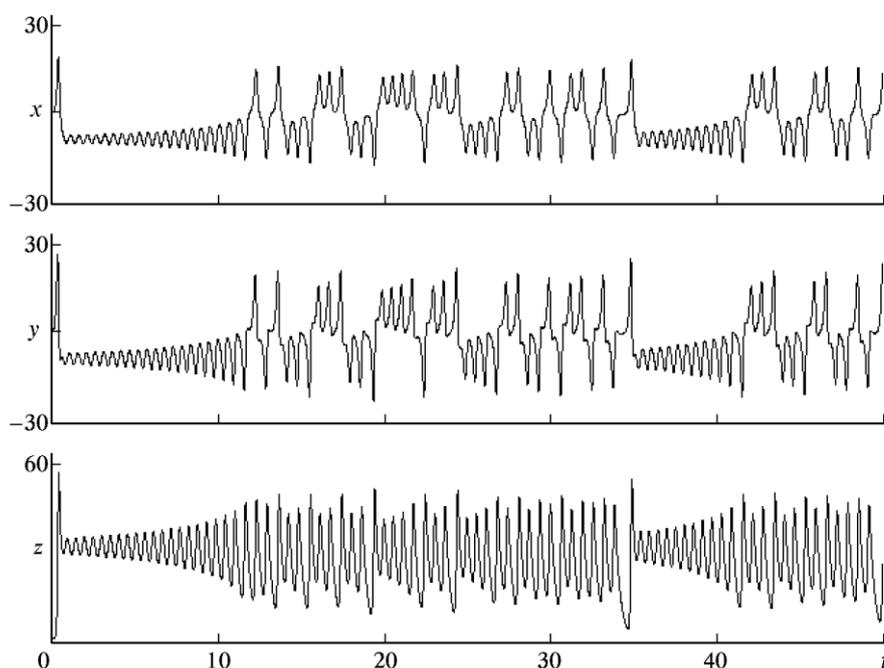


Рис. 7.1. Зависимости динамических переменных x , y , z от времени, полученные численным интегрированием уравнений Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

На рис. 7.2 показан фазовый портрет системы Лоренца. Как можно видеть, фазовая траектория вырисовывает в пространстве состояний (x, y, z) некий объект сложной структуры, который похож на моток ниток, причем не перепутанных, а аккуратно уложенных одна вдоль другой. Это образование называют *странным аттрактором* или, в контексте данной конкретной системы, *аттрактором Лоренца*.

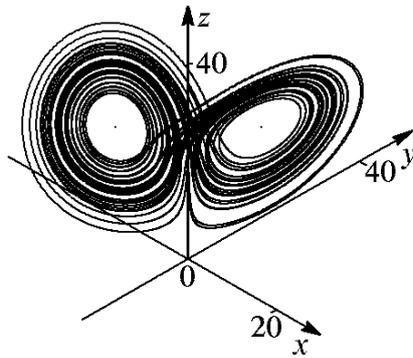


Рис. 7.2. Фазовый портрет аттрактора Лоренца для «классического» набора параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

Как можно проверить, при указанных «классических» значениях параметров σ , b , r один и тот же установившийся режим (по крайней мере, в смысле усредненных статистических характеристик и в смысле стационарности внешнего вида аттрактора) возникает в системе Лоренца независимо от выбора начальных условий.

В своей работе Лоренц вскрывает динамическую природу наблюдаемого хаотического поведения при помощи замечательно простого и эффектного приема. Рассмотрим зависимость переменной z от времени и занумеруем ее максимумы в порядке следования во времени. Далее обработаем результаты численного решения уравнений, построив график зависимости величины очередного максимума от предыдущего, $z_{k+1} = f(x_k)$ (рис. 7.3, а).

Совсем не очевидно, что эта процедура приведет к какому-то разумному результату, но это так! Оказывается, что точки хорошо ложатся на определенную кривую с острой вершиной. Но тогда мы можем заменить исследование динамики исходных уравнений Лоренца гораздо более простой задачей – анализом динамики одномерного отображения $z_{k+1} = f(x_k)$!

Это отображение очень похоже на отображение «тент» (рис. 7.3, б), которое демонстрирует хаотическую динамику и для которого множество возможных траекторий допускает кодирование всевозможными последовательностями двух символов.

Можно показать, что такими же свойствами обладает и отображение $z_{k+1} = f(x_k)$. Это веский довод в пользу динамической природы хаоса, наблюдаемого в модели Лоренца. Оговоримся, однако, что отсюда еще довольно далеко до строгого математического доказательства, поскольку связь между исходной системой и одномерным отображением более тонка, чем это может показаться на первый взгляд.

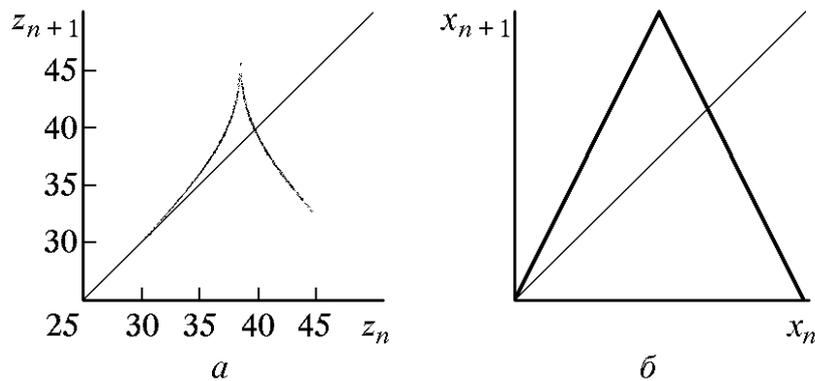


Рис. 7.3. Отображение, полученное численно для системы Лоренца (*a*), и показанное для сравнения отображение «тент» (*б*)

К диаграмме рис. 7.3 можно прийти из следующих рассуждений. Условие появления экстремума переменной $z(t)$ отвечает равенству нулю ее производной, которая, согласно третьему уравнению (7.1), равна $xy - bz$. Уравнение $xy - bz = 0$ определяет в фазовом пространстве некоторую поверхность H (гиперболический параболоид). Выделим на этой поверхности область N такую, что выполняется дополнительное условие наличия именно максимума: $\ddot{z} < 0$. Поток фазовых траекторий системы Лоренца задает на этой части поверхности отображение Пуанкаре. Выпустив траекторию из произвольной точки A области N , дождемся ее следующего пересечения с N – это и будет образ точки A . Говоря формально, отображение Пуанкаре двумерное и к одномерному отнюдь не сводится. Более тщательный анализ показывает, однако, что точки на графике в действительности не ложатся на определенную кривую, а имеют некоторый разброс, связанный с присущей аттрактору Лоренца фрактальной поперечной структурой.

7.2. Ограниченность и диссипативность системы Лоренца

Чтобы достигнуть по возможности полного понимания особенностей системы Лоренца, обратимся к рассмотрению тех аспектов динамики, которые можно выявить посредством аналитического исследования.

Симметрия. Прежде всего отметим симметрию уравнений Лоренца – их вид не изменится, если одновременно сменить знак x и y . Это значит, что любое образование в фазовом пространстве либо обладает той же симметрией, т. е. превращается само в себя при замене переменных $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, либо имеет

такое же образование в качестве симметричного партнера. Из рис. 7.2 можно увидеть, что аттрактор Лоренца обладает указанной симметрией.

Ограниченность области, где может располагаться аттрактор. В фазовом пространстве системы Лоренца можно указать такую ограниченную замкнутую область, в которую фазовые траектории могут только входить и никогда ее не покидают. Для упрощения выкладок нам будет удобно здесь использовать следующую форму уравнений Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -y + xw, \quad \dot{z} = -bw + br - xy, \quad (7.2)$$

где $w = r - z$.

Умножив первое уравнение на x/σ , второе на y , третье на w и сложив, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2 / \sigma + y^2 + w^2}{2} \right) &= xy - x^2 - y^2 + xyw - bw^2 - xyw + brw = \\ &= - \left(x - \frac{1}{2}y \right)^2 - \frac{3}{4}y^2 - b \left(w - \frac{1}{2}r \right)^2 + \frac{1}{4}br^2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Рассмотрим в трехмерном пространстве (x, y, w) область E , заданную неравенством $-\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{3}{4}y^2 - b\left(w - \frac{1}{2}r\right)^2 + \frac{1}{4}br^2 \geq 0$. Она

ограничена поверхностью эллипсоида с центром, смещенным относительно начала координат. Вне этой области правая часть уравнения (7.3) отрицательна. Кроме того, определим семейство эллипсоидов уравнением $x^2 / \sigma + y^2 + w^2 = const$, где присутствует комбинация, фигурирующая под знаком производной в левой части уравнения (7.3). Выберем значение константы таким большим, чтобы получился эллипсоид S , целиком заключающий в себя область E . Тогда на поверхности S имеем всюду $\frac{d}{dt}(x^2 / \sigma + y^2 + w^2) < 0$, т. е. величина $(x^2 / \sigma + y^2 + w^2)$ убывает с течением времени. Это значит, что все траектории, пересекающие поверхность S , ведут только внутрь ограниченной ею области. Следовательно, каким бы ни был аттрактор уравнений Лоренца, он обязан располагаться внутри S .

Диссипативность системы Лоренца. Рассмотрим векторное поле в трехмерном фазовом пространстве, зависимость трех компонент которого от координат x, y, z дается правыми частями трех уравнений Лоренца:

$$\mathbf{L}(x, y, z) = \{ \sigma(y - x), rx - y - xz, -bz + xy \}. \quad (7.4)$$

В силу уравнений (7.1) оно имеет смысл поля скоростей в фазовом пространстве: мгновенная скорость движения изображающей точки в момент, когда она имеет координаты (x, y, z) , дается вектором \mathbf{L} . Вычислим дивергенцию этого поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{L} = \nabla \mathbf{L} = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = -\sigma - 1 - b. \quad (7.5)$$

Если параметры σ и b положительны, как это всегда предполагается, то дивергенция постоянна и отрицательна.

Смысл этого результата состоит в следующем. Рассмотрим ансамбль одинаковых систем, каждая из которых описывается уравнениями Лоренца, и пусть они отличаются только начальными условиями. Представим себе, что в начальный момент облако точек, изображающих состояния систем ансамбля в фазовом пространстве, занимает некоторый объем ΔV . Тогда в процессе эволюции систем ансамбля во времени объем облака будет уменьшаться по закону $\Delta V = \Delta V_0 \exp(Dt)$, где $D = -\sigma - 1 - b$. С течением времени все они должны сконцентрироваться на некотором множестве нулевого объема – аттракторе. В соответствии с рассуждениями предыдущего пункта, аттрактор обязан располагаться в ограниченной области фазового пространства. (Проведенные рассуждения не исключают возможности существования в упомянутой ограниченной области нескольких аттракторов.)

Контрольные вопросы и задания

7.1. В чем состоят результаты численного моделирования уравнений Лоренца?

7.2. В чем особенность ограниченности системы Лоренца?

7.3. Поясните диссипативность системы Лоренца.

8. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ. УСТОЙЧИВОСТЬ. БИФУРКАЦИЯ

8.1. неподвижные точки

Найдем *неподвижные точки* системы уравнений Лоренца. Это состояния, не меняющиеся во времени, т. е. производные динамических переменных по времени надо приравнять нулю. Следовательно, правые части

уравнений тоже должны обращаться в нуль. Это дает три алгебраических уравнения для трех неизвестных:

$$\sigma(y - x) = 0, \quad rx - y - xz = 0, \quad -bz + xy = 0. \quad (8.1)$$

Из первого уравнения имеем $y = x$, тогда второе переписывается в виде $x(r - 1 - z) = 0$ и видно, что есть две возможности $x = 0$ и $z = r - 1$. Из третьего уравнения получаем для первого случая $z = 0$, а для второго $x = \pm\sqrt{bz} = \pm\sqrt{r-1}$, так что это решение существует лишь при $r \geq 1$. Таким образом, при $r < 1$ имеется одно состояние равновесия, расположенное в начале координат, а при $r \geq 1$ – три состояния равновесия:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad (8.2)$$

$$x = \sqrt{r-1}, \quad y = \sqrt{r-1}, \quad z = r-1, \quad (8.3)$$

$$x = -\sqrt{r-1}, \quad y = -\sqrt{r-1}, \quad z = r-1, \quad (8.4)$$

которые в дальнейшем будем обозначать соответственно O , O_1 и O_2 .

С точки зрения физической интерпретации, в задаче о конвекции первая неподвижная точка отвечает состоянию равновесия и отсутствию конвекционных потоков. Водяное колесо неподвижно. Второе и третье решения соответствуют наличию конвекционного потока – вращению жидкости соответственно против или по часовой стрелке. Водяное колесо вращается в одну или другую сторону с постоянной скоростью. Заметим, что вторая и третья неподвижные точки уравнений Лоренца могут служить примером пары симметричных партнеров – они переходят друг в друга при одновременном изменении знаков x и y .

8.2. Устойчивость неподвижных точек

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких значениях параметров найденные неподвижные точки являются устойчивыми или неустойчивыми. Пусть (x_0, y_0, z_0) – интересующая неподвижная точка. Будем искать решение уравнений Лоренца в виде

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \tilde{z}(t), \quad (8.5)$$

где добавки, отмеченные тильдой, считаются малыми. Пренебрегая квадратами и произведениями малых добавок, из уравнений Лоренца получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}} &= \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}), \\
\dot{\tilde{y}} &= r\tilde{x} - \tilde{y} - x_0\tilde{z} - \tilde{x}z_0, \\
\dot{\tilde{z}} &= -b\tilde{z} + x_0\tilde{y} + \tilde{x}y_0,
\end{aligned} \tag{8.6}$$

где члены нулевого порядка исчезают благодаря условию, что (x_0, y_0, z_0) есть неподвижная точка. Как обычно в линейном анализе на устойчивость, предполагаем, что зависимость возмущения от времени экспоненциальная, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \sim \exp(\lambda t)$. Тогда уравнения принимают вид задачи на собственные числа матрицы 3×3 :

$$\begin{aligned}
\lambda\tilde{x} &= \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}) \\
\lambda\tilde{y} &= r\tilde{x} - \tilde{y} - x_0\tilde{z} - \tilde{x}z_0, \\
\lambda\tilde{z} &= -b\tilde{z} + x_0\tilde{y} + \tilde{x}y_0
\end{aligned} \quad \text{или} \quad \lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Условием существования нетривиального решения является равенство нулю детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r + z_0 & \lambda + 1 & x_0 \\ -y_0 & -x_0 & \lambda + b \end{vmatrix} = 0 \tag{8.8}$$

$$\text{или } (\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + b) + x_0^2] + \sigma[(\lambda + b)(z_0 - r) + x_0y_0] = 0.$$

Для неподвижной точки O , расположенной в начале координат, имеем $(\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + b) - \sigma r(\lambda + b) = 0$ или $(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$, (8.9) откуда находим три корня:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}. \tag{8.10}$$

Первое собственное число всегда отрицательно. Второе и третье являются отрицательными лишь при $r < 1$; если же $r > 1$, одно из них становится положительным. Следовательно, точка O устойчива при $r < 1$ и неустойчива при $r > 1$. С точки зрения классификации неподвижных точек, при $r < 1$ это устойчивый узел, а при $r > 1$ – седло-узел. Как указывалось при обсуждении смысла параметров в уравнении Лоренца, r есть отношение числа Рэлея к его критическому значению. Мы показали, что стационарное состояние, отвечающее отсутствию конвекционных токов, становится неустойчивым при

превышении критического значения $r = 1$. Тем самым мы воспроизвели результат Рэля.

Обратимся теперь к точкам O_1 и O_2 , которые существуют, как было показано, при $r > 1$. Подставляя в (8.8)

$$x_0 = y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z_0 = r-1, \quad (8.11)$$

после алгебраических преобразований получаем кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0. \quad (8.12)$$

Исследование уравнения (8.12) показывает, что при r , лишь немного превышающих 1, все три собственных числа λ отрицательны. Следовательно, неподвижные точки O_1 и O_2 являются *устойчивыми узлами*. При увеличении r с некоторого момента они становятся *устойчивыми фокусами* – одно собственное число действительное и отрицательное, а два других комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. При дальнейшем увеличении r действительная часть меняет знак, и это момент потери устойчивости состояниями O_1 и O_2 (в силу симметрии это происходит одновременно).

Найдем порог потери устойчивости для исследуемой неподвижной точки, которому отвечает обращение действительной части корня в ноль. Подставим в формулу (8.12) $\lambda = i\omega$:

$$-i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + ib(\sigma + r)\omega + 2\sigma b(r-1) = 0, \quad (8.13)$$

и отделим действительные и мнимые части:

$$-(\sigma + b + 1)\omega^2 + 2\sigma b(r-1) = 0, \quad [-\omega^2 + b(\sigma + r)]\omega = 0. \quad (8.14)$$

Из первого уравнения имеем $\omega^2 = 2\sigma b(r-1) / (\sigma + b + 1)$. Подстановка последнего во второе уравнение дает следующее выражения:

$$(-2\sigma b(r-1) / (\sigma + b + 1) + b(\sigma + r)) = 0.$$

Выражая отсюда r , находим порог устойчивости:

$$r_{cr} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (8.15)$$

8.3. Бифуркации в системе Лоренца

Обсудим, как изменяется динамика системы Лоренца, если поддерживать постоянными параметры $\sigma = 10$ и $b = 8/3$ и увеличивать, начиная от нуля, параметр r . С точки зрения физической интерпретации, это

соответствует увеличению степени подогрева, или числа Рэлея, в задачах конвекции, интенсивности падающего сверху потока в модели водяного колеса, интенсивности накачки в лазере.

Как мы видели, при $r < 1$ система Лоренца имеет устойчивую неподвижную точку в начале координат, точку O . Это единственный аттрактор системы.

При $r > 1$ состояние равновесия O становится неустойчивым – одно из трех собственных чисел оказывается положительным, тогда как два других остаются отрицательными. Если ввести малое возмущение, то изображающая точка будет уходить от состояния равновесия вдоль некоторой специальной траектории, которую называют *неустойчивой сепаратрисой* или *неустойчивым многообразием*. Это неустойчивое многообразие *одномерное* (некоторая кривая линия), поскольку только *одно* собственное число ответственно за неустойчивость. Из свойства симметрии ясно, что имеется две ветви неустойчивой сепаратрисы, Γ_1 и Γ_2 , идущие от состояния равновесия O в разные стороны (рис. 8.1, *a*).

Точка O имеет также *устойчивое многообразие*. Оно *двумерное*, поскольку *два* собственных числа отрицательны и отвечают затуханию возмущений. Устойчивое многообразие представляет собой некоторую кривую поверхность, при старте с которой траектории идут в состояние равновесия O .

При переходе r через 1 точка O перестает быть аттрактором и аттракторами становятся вновь возникшие неподвижные точки O_1 и O_2 (см. (8.3), (8.4)). Согласно соотношению (8.15), они остаются устойчивыми до довольно больших значений r . В задачах конвекции эти два аттрактора соответствуют состояниям с равномерным вращением жидкости соответственно против или по часовой стрелке. Заметим, что скорость возрастает с увеличением параметра r : $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$.

Присутствие двух аттракторов означает наличие *бистабильности* – в зависимости от начальных условий система приходит в конце концов в один из двух возможных устойчивых режимов. (В более общем случае, когда аттракторов более одного, говорят о *мультистабильности*. Это одно из характерных и распространенных свойств нелинейных динамических систем.)

На рис. 8.1, *б* показано, как выглядят сепаратрисы и Γ_2 в той области значений r , где неподвижные точки O_1 и O_2 являются устойчивыми фокусами. Фазовые траектории приближаются к неподвижной точке по спирали, что соответствует затухающим осцилляциям.

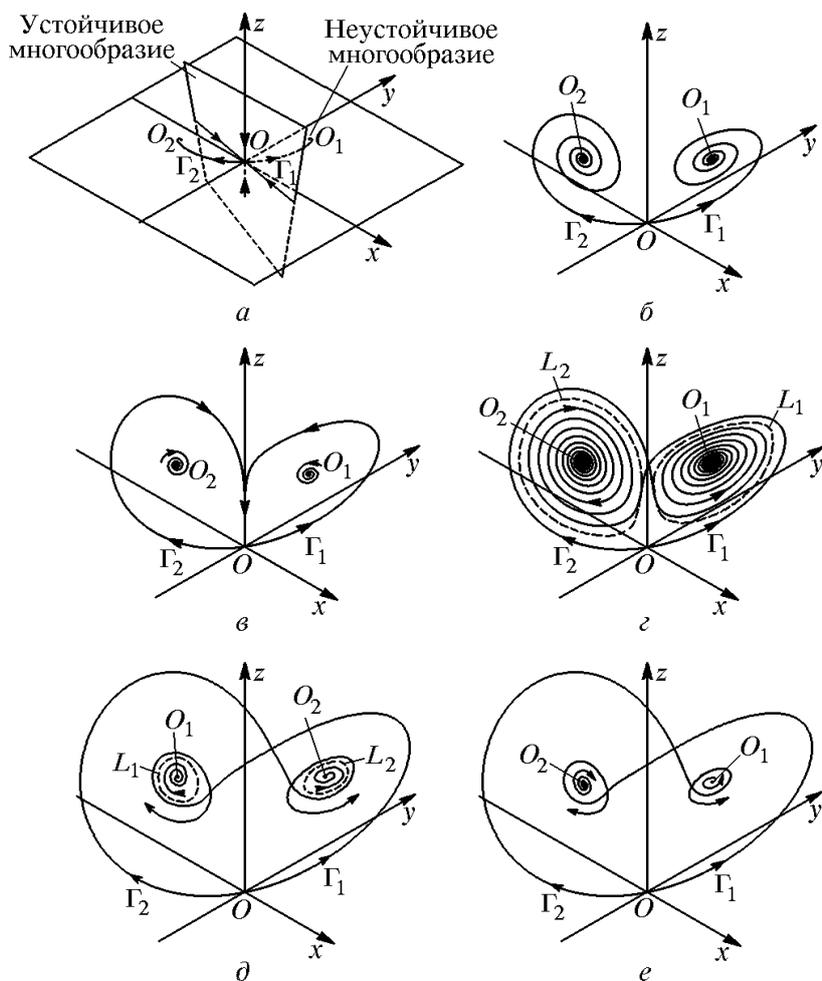


Рис. 8.1. Бифуркации в системе Лоренца

Чем больше параметр r , тем больше начальный размах этих осцилляций. При некотором значении $r = 13,927$ оказывается, что сепаратриса, совершив один оборот, возвращается в точку O вдоль оси z (рис. 8.1, в). Об этой ситуации говорят как о *петле сепаратрисы*. Это момент *нелокальной бифуркации*, когда имеет место перестройка структуры потока фазовых траекторий, которая не сводится к локальным изменениям в окрестности какой-то одной точки фазового пространства.

Переход параметра r через указанное значение никак не отражается на свойствах стационарных режимов, отвечающих аттракторам O_1 и O_2 , за тем исключением, что после него сепаратриса Γ_1 ведет в точку O_2 , а сепаратриса Γ_2 – в точку O_1 . (Это значит, что при установлении режима конвекции, начиная от ситуации вращения с малой скоростью, направление движения жидкости в итоге меняется на противоположное.) Однако в глобальной структуре фазового пространства происходят существенные изменения. Во-первых, из каждой петли сепаратрисы рождается замкнутая траектория – неустойчивый

предельный цикл (штриховые кривые L_1 и L_2 на рис. 8.1, *з*). Во-вторых, появляется инвариантное множество Ω_1 – сложно устроенное множество траекторий, допускающих кодирование всевозможными бесконечными в обе стороны последовательностями двух символов. Это множество Ω_1 , однако, не является притягивающим, образуя, как иногда говорят, «странный репеллер». Следующая существенная нелокальная бифуркация происходит при $r = 24,06$. Если до этого момента сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 вели в неподвижные точки O_2 и O_1 , то после бифуркации они асимптотически приближаются к неустойчивым орбитам (рис. 8.1, *д*). С этого момента на месте множества Ω_1 возникает уже притягивающее множество сложной структуры. Это и есть странный аттрактор Лоренца, отвечающий хаотическому режиму колебаний. Отметим, однако, что состояния O_1 и O_2 все еще остаются устойчивыми, до достижения значения $r = 24,74$ (см. (8.15)). Таким образом, в интервале r от 24,06 до 24,74 в системе сосуществуют три аттрактора – две неподвижные точки O_1 и O_2 и аттрактор Лоренца. Наконец, начиная с $r = 24,74$ неподвижные точки теряют устойчивость и аттрактор Лоренца остается единственным притягивающим множеством (рис. 8.1, *е*). Рисунок 8.1, *е* отвечает наличию петли сепаратрисы.

Изложенная картина, которая опирается на результаты Шильникова (1980) и Каплана и Йорке (1979), не исчерпывает всего многообразия феноменов, возможных в модели Лоренца. Оказывается, что при очень больших r система демонстрирует простой регулярный режим автоколебаний, которому в фазовом пространстве соответствует предельный цикл. При уменьшении параметра r можно наблюдать переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. В определенных областях по параметру r реализуется переход от периодических к хаотическим режимам через перемежаемость. Поэтому система Лоренца еще неоднократно будет привлекаться нами в качестве иллюстрации различных аспектов нелинейной динамики.

Чего в системе Лоренца быть не может, так это квазипериодических автоколебаний. Таким колебаниям должен был бы соответствовать аттрактор в виде тора. Предположим, что такой аттрактор существует. Фазовые траектории не могут пересекать поверхность тора, они могут только приближаться к нему. Рассмотрим ансамбль систем, изображающие точки которых заполняют внутренность тора. Любой элемент объема должен уменьшаться в силу того, что в системе Лоренца дивергенция векторного поля постоянна и отрицательна. С другой стороны, объем внутренности тора должен оставаться постоянным.

Эти два вывода несовместимы – мы пришли к противоречию, и, следовательно, предположение о наличии аттрактора в виде тора не может быть верным

Контрольные вопросы и задания

8.1. Сколько неподвижных точек имеет система Лоренца?

8.2. При каких значениях параметров неподвижные точки являются устойчивыми?

8.3. Как изменится динамика системы Лоренца при постоянных параметрах σ и b ?

9. ОБОБЩЕННЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

9.1. Информационные размерности

Фрактальная размерность – емкость. Известен простой прибор – палетка, который служит для измерения площади областей на плане или карте. Это прозрачная пластинка, на которой нанесена квадратная сетка с заданным шагом, скажем, 1 см. Наложив палетку на карту, можно подсчитать число квадратиков, попавших внутрь области, и получить оценку площади снизу, или подсчитать количество квадратиков, полностью покрывающих область, и получить оценку площади сверху. Чем меньше размер квадратиков сетки, тем точнее будет оценка.

Как будет зависеть количество ячеек сетки, покрывающих область, от размера ячейки ε ? Ясно, что при уменьшении ε это число будет возрастать (рис. 9.1, а). Если же мы рассмотрим покрытие не области, а отрезка линии, то получим $N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon^2$ (рис. 9.1, б).

Оба соотношения имеют вид $N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon^D$, причем показатель D следует интерпретировать как размерность рассмотренных множеств: для области $D=2$, а для отрезка линии $D=1$. Размерность выступает как число, характеризующее скорость роста числа ячеек покрытия данного множества при уменьшении размера ячеек. Логарифмируя соотношение $N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon^D$ и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, можно записать

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (9.1)$$

где основание логарифма произвольное.

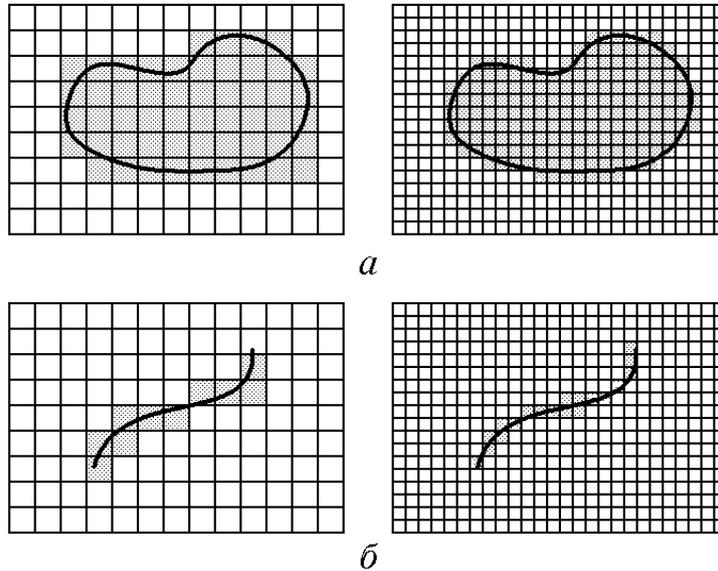


Рис. 9.1. Покрытие двумерной области (а) и отрезка кривой (б) ячейками квадратной сетки

Если применить аналогичный подход к таким объектам, как канторово множество или ковер Серпиньского, то величина D оказывается дробной. Это дало основание для термина *фрактал* и для того, чтобы именовать величину D *фрактальной размерностью* (от слова *fraction* – дробь). Найдем размерность ковра Серпиньского. Если размер ячейки $\varepsilon = 1/3$, то число ячеек покрытия $N = 8$, при уменьшении ячеек в три раза получаем $\varepsilon = 1/9$ и $N = 64$ ячейки, и так далее: k -й уровень построения ассоциируется с покрытием ячейками размера $\varepsilon = (1/3)^k$ в количестве $N(\varepsilon) = 8^k$. Применяя формулу (9.1), получаем

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \varepsilon} = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 8^k}{\log 3^{-k}} = \log_3 8 = 1,8927\dots$$

Рассмотренная процедура легко обобщается для объектов, представляющих собой подмножества n -мерного евклидова пространства. В этом случае сетка для построения покрытия образована n -мерными кубиками со стороной ε . В англоязычной литературе размерность, определенную с помощью

покрытия такой сеткой, называют *box-counting dimension* (буквально – размерность, полученная подсчетом ящиков, т. е. кубиков).

В частности, при $n = 1$ роль ячеек покрытия выполняют интервалы длиной ε . Например, как видно из процедуры построения множества Кантора, покрытие интервалами размером $\varepsilon = 1/3$ содержит два элемента, при $\varepsilon = 1/9$ – четыре, а при $\varepsilon = (1/3)^k$ количество элементов покрытия будет 2^k . Отсюда следует, что размерность равна

$$D = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{-k}} = \log_3 2 = 0,6309\dots$$

(снова дробное число).

Работать с квадратной сеткой не всегда удобно. Например, при вычислении размерности салфетки Серпиньского лучше взять треугольную сетку, что, очевидно, не должно влиять на показатель степени зависимости числа элементов покрытия от размера ε . Обозначая через ε сторону треугольной ячейки, можно заключить, что k -му уровню построения отвечает покрытие из 3^k ячеек размером $\varepsilon = (1/2)^k$. Формула (9.1) дает

$$D = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log 2^{-k}} = \log_2 3 = 1,5849\dots$$

Фрактальную размерность, определенную с помощью покрытия множества ячейками фиксированной формы и размера, математики называют *емкостью множества*.

Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью. Следующий шаг в разработке понятия фрактальной размерности состоит в том, чтобы разрешить использовать для ее определения элементы покрытия произвольной формы и размера. Эта идея приводит к важному понятию *размерности Хаусдорфа*.

Пусть мы имеем множество F , являющееся подмножеством n -мерного евклидова пространства. Рассмотрим его покрытие элементами произвольной формы и размера с тем ограничением, что диаметр множества, отвечающего любому элементу покрытия, не превышает заданной величины δ . Диаметр i -го элемента покрытия E_i определяется как верхняя грань расстояния между двумя точками, ему принадлежащими:

$$\varepsilon_i = \text{diam} E_i = \sup_{x, y \in E_i} \|x - y\|.$$

Введем зависящую от параметра d и от δ сумму по всем элементам покрытия

$$\Gamma_d(\delta) = \sum \varepsilon_i^d \tag{9.2}$$

и определим нижнюю грань этой суммы по всевозможным покрытиям:

$$\gamma_d(\delta) = \inf \sum \varepsilon_i^d. \quad (9.3)$$

Если d велико, то, очевидно, $\gamma_d(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Если же d мало (близко к нулю), то $\gamma_d(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty$.

Промежуточное, критическое значение d_H , такое, что при уменьшении δ величина γ_d стремится к нулю для $d > d_H$ и к бесконечности для $d < d_H$, есть размерность Хаусдорфа множества F .

Рассмотрим вопрос о соотношении между емкостью и размерностью Хаусдорфа. Пусть мы имеем покрытие множества F ячейками фиксированной формы и размера ε , причем число элементов покрытия есть $N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D}$, где D – емкость множества F . Вычисляя сумму (9.2), получаем

$$\Gamma_d(\delta) = \sum \varepsilon^d = N(\varepsilon)\varepsilon^d \cong \varepsilon^{d-D}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина стремится к нулю, если $d > D$, и к бесконечности, если $d < D$. Ее и надо было бы принять за размерность Хаусдорфа, если забыть об операции взятия нижней грани по всевозможным покрытиям.

В самом общем случае, однако, $\Gamma_d(\delta) \geq \gamma_d(\delta)$, поскольку $\gamma_d(\delta)$ есть нижняя грань. Взаимное расположение графиков зависимости величин Γ_d и γ_d от параметра d обязано поэтому выглядеть так, как это показано на рис. 9.2. Отсюда видно, что справедливо соотношение $D \geq d_H$.

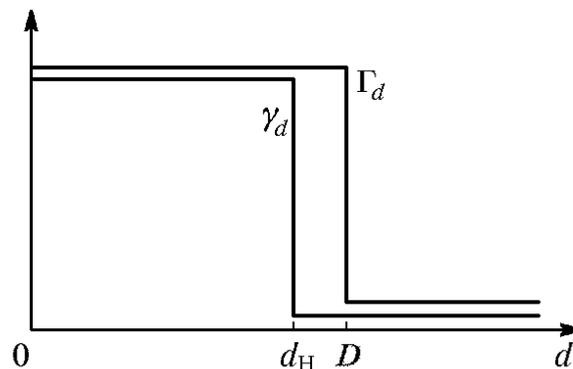


Рис. 9.2. К пояснению соотношения между емкостью и размерностью Хаусдорфа

Те же соображения позволяют прийти к более общему утверждению. Если при каком-то конкретном выборе последовательности покрытий с уменьшающимся разрешенным диаметром ячейки d имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma_d(\delta) = \begin{cases} 0, & d > d', \\ \infty, & d < d', \end{cases} \quad (9.4)$$

то d' есть оценка размерности Хаусдорфа сверху, т. е. $d' > d_H$.

Наиболее трудный момент в математически строгом вычислении размерности Хаусдорфа состоит в том, чтобы найти нижнюю грань сумм (9.2). Однако для фракталов, встречающихся в задачах нелинейной динамики, в большинстве случаев размерность Хаусдорфа, емкость и другие величины d' , получаемые при различном выборе покрытий, совпадают. Поэтому терминологически их часто не различают и говорят просто о фрактальной размерности объекта.

Фрактальная размерность двухмасштабного канторова множества и странного аттрактора. В качестве конкретного примера вычислим фрактальную размерность аттрактора в обобщенном отображении пекаря:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\alpha} & \text{для } x \leq \alpha, \\ y' = \mu y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x - \alpha}{\beta} & \text{для } x > \alpha, \\ y' = 1 + \nu(y - 1) \end{cases} \quad (9.5)$$

здесь α, β, μ, ν – положительные параметры, причем $\alpha + \beta = 1$ и $\mu + \nu < 1$. Аттрактор этого отображения есть фрактальный объект, сечение которого вертикальной прямой представляет собой двухмасштабное канторово множество. Естественно полагать, что размерность аттрактора $D_B = D_C + 1$, где D_C – размерность упомянутого канторова множества. Сначала найдем величину D_C .

Вспомним процедуру построения двухмасштабного канторова множества. Набор интервалов, отвечающих k -му уровню построения, задает, очевидно, покрытие множества, и можно определить сумму $\Gamma_d(k) = \sum \varepsilon_i^d$.

На следующем уровне построения получаем новое покрытие. Каким будет новое значение суммы? При переходе с k -го на $k + 1$ -й уровень каждый интервал ε_i заменяется двумя интервалами: $\mu\varepsilon_i$ и $\nu\varepsilon_i$. Соответственно каждый член суммы $\Gamma_d(k)$ заменяется двумя членами: $(\mu\varepsilon_i)^d$ и $(\nu\varepsilon_i)^d$. Но тогда новое значение суммы выражается через старое:

$$\Gamma_d(k+1) = \sum [(\mu\varepsilon_i)^d + (v\varepsilon_i)^d] = (\mu^d + v^d) \sum \varepsilon_i^d = (\mu^d + v^d) \Gamma_d(k). \quad (9.6)$$

Если $\mu^d + v^d < 1$, то при $k \rightarrow \infty$ величина $\Gamma_d(k)$ будет стремиться к нулю, а если $\mu^d + v^d > 1$, то к бесконечности. Пограничная критическая ситуация определяется условием

$$\mu^d + v^d = 1. \quad (9.7)$$

При $\mu^d + v^d < 1$ величина d , являющаяся решением этого уравнения, лежит в интервале между 0 и 1. Это и есть размерность двухмасштабного канторова множества D_C .

На рис. 9.3 показаны линии равных значений размерности на плоскости параметров μ, v . (В частности, при $\mu = v = 1/3$ из (9.7) получаем $2 \cdot 3^{-d} = 1$ и $D_C = \log_3 2$ – уже известный нам результат для классического канторова множества.)

Покажем теперь, что размерность аттрактора обобщенного отображения пекаря действительно выражается соотношением $D_B = D_C + 1$. Согласно геометрической трактовке действия отображения пекаря, на k -м шаге итераций имеется 2^k горизонтальных полос, покрывающих аттрактор. Обозначим через ε_i поперечный размер i -й полосы. Для покрытия этой полосы квадратиками со стороной ε_i требуется $n_i = [1/\varepsilon_i] + 1$ квадратиков, где квадратные скобки – целая часть числа (рис. 9.4).

При вычислениях, связанных с анализом предела $k \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_i \rightarrow 0$, можно считать, что $n_i \cong 1/\varepsilon_i$. Сумма $\Gamma_d(k)$, которую нужно вычислять при определении размерности Хаусдорфа, выражается тогда следующим образом:

$$\Gamma_d(k) = \sum_i n_i \varepsilon_i^d \cong \sum_i \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_i^d = \sum_i \varepsilon_i^{d-1}. \quad (9.8)$$

На следующем, $(k+1)$ -м шаге построения аттрактора каждая полоса ширины ε_i дает две более узкие полосы, $\mu\varepsilon_i$ и $v\varepsilon_i$, так что

$$\Gamma_d(k+1) = (\mu^{d-1} + v^{d-1}) \Gamma_d(k). \quad (9.9)$$

Размерность D_B определяется, следовательно, как решение уравнения

$$\mu^{d-1} + v^{d-1} = 1. \quad (9.10)$$

Сопоставляя его с уравнением (9.7), корень которого соответствовал размерности двухмасштабного канторова множества D_C , заключаем, что

$$D_B - 1 = D_C.$$

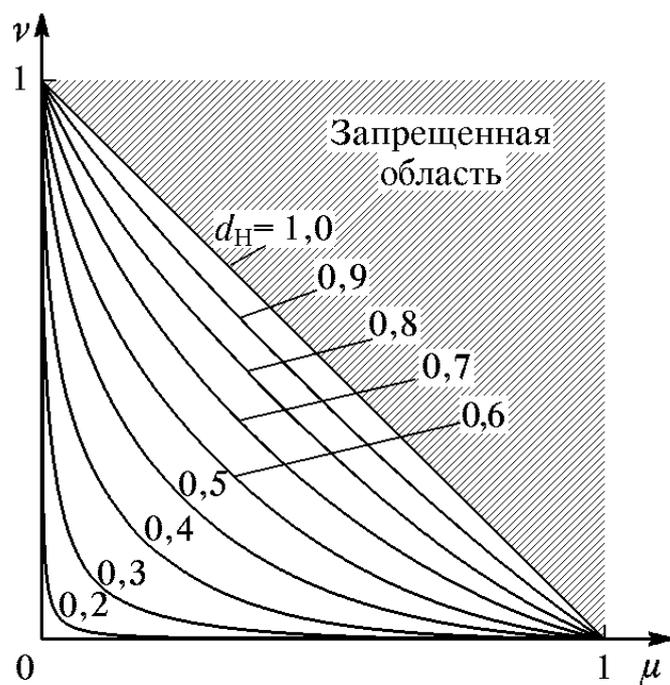


Рис. 9.3. Линии равных значений фрактальной размерности двухмасштабного канторова множества на плоскости параметров μ, ν

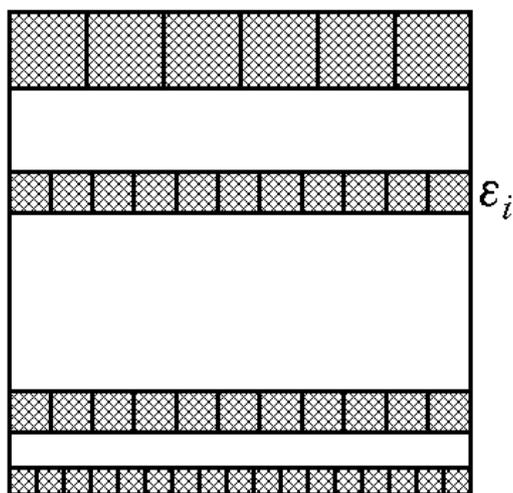


Рис. 9.4. К вычислению размерности аттрактора обобщенного отображения пекаря

Информационная размерность. Рассмотрим, как в начале предыдущего раздела, покрытие аттрактора ячейками фиксированного размера (рис. 9.5).

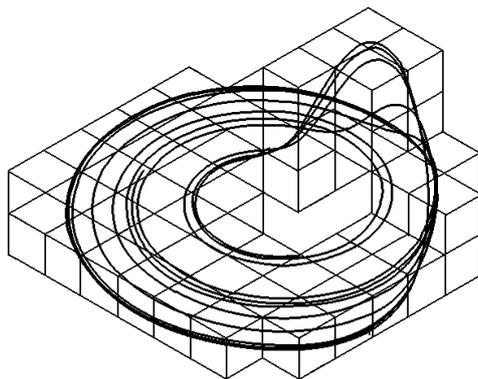


Рис. 9.5. Покрытие аттрактора элементами одинакового размера ε

Фрактальную размерность (емкость) аттрактора, определенную как показатель степени в формуле зависимости количества ячеек покрытия $N(\varepsilon)$ от размера ячейки ε , будем с этого момента обозначать через D_0 :

$$N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_0}, \text{ или } D_0 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (9.11)$$

Наряду с величиной D_0 вводят и используют целый ряд других размерностей, в том числе информационную, корреляционную, обобщенные размерности Реньи. Необходимость иметь дело не с одной, а со многими размерностями связана в конечном итоге со сложностью рассматриваемых объектов – фрактальных аттракторов.

Почему же одной размерности D_0 недостаточно? Представим себе, что аттрактор неоднороден – одни области (элементы покрытия) посещаются чаще, другие реже. Это обстоятельство никак не отражено в определении размерности D_0 , хотя, по идее, оно должно быть существенным для такой количественной характеристики свойств аттрактора, какой претендует быть размерность.

Попытаемся «исправить» определение размерности, приняв во внимание разную вероятность посещения ячеек покрытия. Для этого следует привлечь инвариантную меру.

Напомним, что естественная инвариантная мера любой области фазового пространства S определяется как вероятность пребывания в этой области типичной фазовой траектории:

Ясно, что при уменьшении размера ячеек покрытия величина суммы (9.13) будет возрастать: чем мельче ячейки, тем больше информации в утверждении, что точка попала в данную определенную ячейку. Можно предположить, что это нарастание следует степенному закону:

$$I(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_1}, \quad (9.14)$$

или, что эквивалентно, существованию предела:

$$D_1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log \varepsilon}. \quad (9.15)$$

Величину D_1 называют *информационной размерностью*.

Информационная размерность обладает важным свойством, которое делает ее очень важной характеристикой фрактальных аттракторов. Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема. Пусть имеется аттрактор A , на котором определена инвариантная мера, и пусть S – подмножество этого аттрактора, имеющее меру θ между 0 и 1, т. е. $0 < \theta < 1$. (Смысл θ в том, что это вероятность для взятой наугад точки аттрактора принадлежать подмножеству S .) Тогда *фрактальная размерность множества S равна информационной размерности аттрактора A : $D_0(S) = D_1(A)$.*

Это будет так при любом $\theta \in (0, 1)$, даже при $\theta = 0,99$! Только при $\theta = 1$ будем иметь $D_0(S) = D_0(A)$.

9.2. Корреляционная размерность

Рассмотрим снова покрытие аттрактора ячейками одинакового размера ε и предположим, что выбраны наугад две точки, принадлежащие аттрактору: x_1 и x_2 . Какова вероятность того, что обе они окажутся в i -й ячейке? Вероятность того, что одна точка попадает в i -й элемент покрытия, равна p_i . Если попадание обеих точек в данную ячейку можно считать независимыми событиями, то вероятность будет p_i^2 .

Рассмотрим теперь сумму

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \quad (9.16)$$

и зададимся вопросом, как она будет вести себя при уменьшении размера ячеек, которыми производится покрытие. При уменьшении r сумма будет убывать, и можно предположить, что это будет происходить по степенному закону:

$$C(\varepsilon) \cong \varepsilon^{D_2}, \quad (9.17)$$

или, что эквивалентно, существованию предела

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\log \varepsilon}. \quad (9.18)$$

Величину D_2 называют *корреляционной размерностью*.

Особое значение корреляционной размерности для нелинейной динамики состоит в том, что для ее вычисления имеется относительно простой и эффективный (во всяком случае более простой и эффективный, нежели для других размерностей) *алгоритм Грассбергера-Прокаччия*. Он состоит в следующем. Пусть мы получили, скажем, из численного решения уравнений динамики набор векторов состояния $\{x_i, i = 1, 2, \dots, M\}$, отвечающих последовательным итерациям отображения или шагам интегрирования дифференциального уравнения. Задавшись некоторым (малым) ε , можно использовать наш набор данных для оценки суммы $C(\varepsilon)$, фигурирующей в определении корреляционной размерности. Имеем:

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 = \{\text{вероятность того, что две точки разделены расстоянием} \\ &\text{меньше } \varepsilon\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \times \{\text{число пар } i \neq j \text{ таких, что } \|x_i - x_j\| < \varepsilon\} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \cdot \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \equiv C_M(\varepsilon), \end{aligned} \quad (9.19)$$

где θ – ступенчатая функция Хевисайда: $\theta = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

Величину $C_M(\varepsilon)$ называют *корреляционным интегралом*. При достаточно больших M (обычно тысячи или десятки тысяч) он служит статистической оценкой суммы $C(\varepsilon)$ и, следовательно, может быть использован для вычисления корреляционной размерности. Для этого проводят расчет $C_M(\varepsilon)$ при различных ε и представляют результаты в координатах $\log \varepsilon$ и $\log C_M(\varepsilon)$.

Предполагаемая зависимость $C_M(\varepsilon)$ имеет вид ε^{D_2} , так что полученный график должен иметь вид прямой линии с угловым коэффициентом D_2 .

Объем вычислений при подсчете корреляционного интеграла непосредственно с помощью (9.9) очень велик, поскольку количество операций пропорционально M^2 . Чтобы его сократить, применяют несколько «маленьких хитростей».

Во-первых, можно разбить рассматриваемую область фазового пространства на несколько частей и рассортировать обрабатываемые точки x_i по группам, отвечающим этим частям. Если ε мало, а это как раз интересующий нас случай, то при расчете корреляционного интеграла можно учитывать только те пары точек, у которых обе точки принадлежат одной и той же группе.

Во-вторых, вместо евклидовой нормы можно использовать другую, требующую меньшего объема вычислений. При этом величина размерности от выбора нормы не зависит. Математики вводят семейство норм

$$\|x\|_q = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^N |x_i|^q}, \quad (9.20)$$

где q – параметр; в частности, $q = 2$ отвечает евклидовой норме. Среди них наиболее удобными для быстрого вычисления являются нормы

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i < N} |x_i|.$$

На практике график зависимости корреляционного интеграла от ε , построенный в логарифмических координатах, отклоняется от прямой линии в области больших ε , сравнимых с размерами аттрактора, и очень малых ε , когда количество пар точек становится мало для хорошей статистической оценки. Интервал линейности тем шире, чем больше объем обрабатываемых данных M . Чаще всего его выбирают «на глаз», а затем подвергают полученные точки обработке с помощью метода наименьших квадратов для нахождения аппроксимирующей прямой.

В качестве примера на рис. 9.6 воспроизведены результаты расчета корреляционной размерности аттрактора в отображении Эно:

$$x_{n+1} = 1 - ax^2 - by_n, \quad y_{n+1} = x_n.$$

Параметры отображения: $a = 1,4$, $b = -0,3$, количество точек $M = 16384$.
 Результат расчета – значение корреляционной размерности $D_2 = 1,21$.

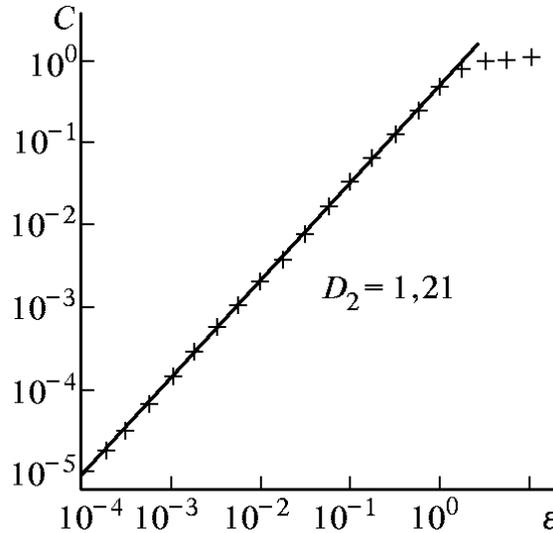


Рис. 9.6. К оценке корреляционной размерности странного аттрактора отображения Эно по алгоритму Грассбергера–Прокаччия

Контрольные вопросы и задания

- 9.1. Какие существуют информационные размерности?
- 9.2. Что называют корреляционной размерностью?
- 9.3. В чем состоит алгоритм Грассбергера-Прокаччия?

10. ОБРАБОТКА РЕАЛИЗАЦИЙ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В различных областях знания, от медицины и биологии до метеорологии и астрофизики, приходится сталкиваться с ситуацией, когда объект исследования либо не допускает непосредственного исследования своей структуры, либо эта структура слишком сложна, но для анализа доступен производимый системой сигнал. В медицинских приложениях это может быть кардиограмма или электроэнцефалограмма, в климатологии – запись данных метеорологических наблюдений за длительный период, в астрофизике –

зависимость оптической яркости или интенсивности радиоизлучения от отдаленного объекта. Абстрагируясь от конкретной природы объекта, можно представить себе «черный ящик», на выходе которого наблюдатель регистрирует временную зависимость одной или нескольких переменных (рис. 10.1).

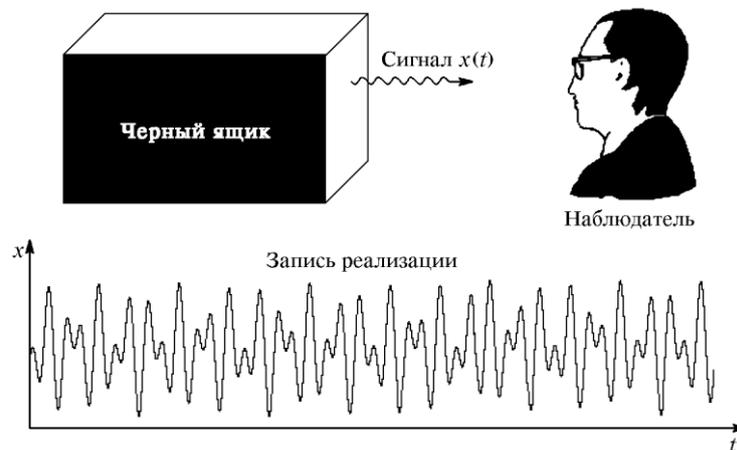


Рис. 10.1. Идентификация динамических систем

Пусть мы имеем записанную реализацию

$$x = x(t) \quad (10.1)$$

или, при наличии искусственной или естественной дискретизации, временной ряд

$$x_k = x(k\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (10.2)$$

и пусть зависимость от времени визуально выглядит сложной и непериодической. Можно ли из ее анализа заключить: произведена реализация динамической системой или это просто случайный шумовой сигнал? Если это динамическая система, то что можно сказать о ее свойствах и характеристиках? Сколько переменных необходимо для задания состояния, какова фрактальная размерность аттрактора, отвечающего за наблюдаемый режим, хаотический ли он, можно ли сконструировать модель в виде дифференциальных уравнений или отображений, которая позволяла бы адекватно воспроизвести наблюдаемую временную зависимость и прогнозировать будущее состояние системы? Если такой анализ возможен, то аппарат нелинейной динамики с очевидностью превращается в неоценимый инструмент исследования, позволяющий делать заключения или предположения о структуре объекта и, возможно, выработать пути к управлению его динамикой посредством

внешнего воздействия. Поэтому разработка методов и алгоритмов анализа реализаций рассматривается как одно из важнейших направлений нелинейной динамики, непосредственно связанное с возможными приложениями. В этом разделе познакомимся с идеями и представлениями, которые лежат в основе развиваемых подходов.

10.1. Реконструкция фазового пространства.

Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой

Имея запись зависимости наблюдаемой переменной от времени $x = x(t)$, зададимся некоторым временным шагом τ и целым числом m и построим m -мерный вектор, компонентами которого являются значения x в моменты времени $t, t - \tau, t - 2\tau, \dots, t - (m-1)\tau$, т.е.

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (m-1)\tau)). \quad (10.3)$$

Вектор $\mathbf{x}(t)$ задает точку в m -мерном пространстве, которая с течением времени t перемещается по некоторой траектории. В дискретном случае полагаем

$$\mathbf{x}_k = (x_k, x_{k-p}, x_{k-2p}, \dots, x_{k-(m-1)p}), \quad (10.4)$$

где p – фиксированное целое, например, 1, 2, 3, ...

При переборе по k получаем дискретный набор точек m -мерного пространства. Если предположить, что мы имеем дело с установившимся режимом колебаний диссипативной системы, то возникающая при описанном построении картинка есть реконструированный портрет аттрактора.

Это построение позволяет связать с анализируемой реализацией наглядный образ, что само по себе заслуживает внимания. Рассматривая реконструированный портрет при небольших m , именно $m = 2$ и 3 , уже можно сделать полезные качественные заключения. Картинку можно интерпретировать как проекцию изображения аттрактора из «естественного» фазового пространства системы в «реконструированное» пространство размерности m . Если изображение выглядит как бесструктурная область, заполненная точками, то это означает, что размерность системы N велика по сравнению с m , либо анализируемый сигнал имеет природу случайного шума. Если же сигнал генерируется динамической системой с невысокой размерностью фазового пространства, то наблюдается картинка с характерной выраженной тонкой внутренней структурой (рис. 10.2). Слева на рисунке аттрактор для реализации, генерируемой уравнением с запаздыванием

$\dot{x} + \gamma x = a - x^2(t-1)$, $a = 1,5$, $\gamma = 10$; рисунок справа – реализация случайного сигнала (с конечным временем корреляции).

Можно ли указать не «глазомерный», а количественный критерий динамической природы обрабатываемой реализации? В начале 80-х годов было предложено использовать для этой цели корреляционную размерность, адаптируя соответствующим образом алгоритм Грассбергера-Прокаччия.

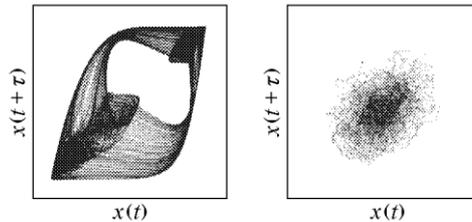


Рис. 10.2. Пример представления данных в виде портрета реализации в реконструированном фазовом пространстве при $m = 2$

Рассмотрим временной ряд, полученный в результате записи наблюдаемой переменной величины в последовательные равноотстоящие моменты времени, x_1, x_2, \dots, x_N . Зададимся некоторым целым m и используем идею реконструкции аттрактора методом запаздывания в пространстве размерности N , т.е. положим

$$\mathbf{x}_i = (x_i, x_{i-p}, x_{i-2p}, \dots, x_{i-(m-1)p}) \quad i = 1, 2, \dots \quad (10.5)$$

Целое число p рекомендуется подобрать так, чтобы по возможности улучшить получаемый результат.

Рассматривая множество точек \mathbf{x}_i в m -мерном пространстве как фазовый портрет аттрактора, оценим его размерность по методу Грассбергера-Прокаччия, т.е. вычислим для разных ε корреляционный интеграл:

$$\tilde{N}(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (10.6)$$

Отложим полученную зависимость на графике в координатах $(\log \varepsilon, \log C(\varepsilon))$, отыщем на ней линейный участок и определим угловой коэффициент $D(m)$. Описанную процедуру выполним несколько раз, рассматривая последовательно $m = 1, 2, 3, \dots$. Наличие или отсутствие насыщения зависимости $D(m)$ при увеличении N рассматривается как критерий того, что изучаемый сигнал генерируется динамической системой. Если наблюдается насыщение на некотором уровне D , то эту величину D принимаем в качестве оценки

корреляционной размерности аттрактора динамической системы, породившей наблюдаемый сигнал. Основываясь на оценке D и теореме о вложении, можно заключить, что размерность фазового пространства этой динамической системы не превышает $2D+1$. Независимую оценку этой величины (размерности вложения) дает число m , начиная с которого наступает насыщение зависимости $D(m)$.

Рассмотрим один из исторически первых примеров применения такого подхода к обработке временного ряда. На рис. 10.3 приводятся зависимости корреляционного интеграла от ε и от размерности вложения m для исследованного режима конвекции Релея-Бенара, причем в качестве обрабатываемой переменной фигурировало отклонение светового луча, прошедшего через конвекционную ячейку. Количество отсчетов в обрабатываемой последовательности составляло $M = 15000$. В области, где график аппроксимируется прямой, ее наклон с ростом m имеет тенденцию к насыщению на уровне $D \cong 2,8$. Было показано, что изменение шага выборки при реконструкции фазового пространства ($p = 4-15$) не влияет заметным образом на оценку размерности.

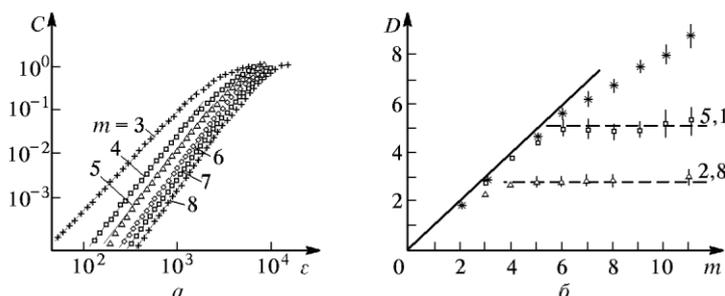


Рис. 10.3. Оценка размерности аттрактора: а) конвекция Релея-Бенара; б) обработка шумового сигнала

Аналогичной обработке были подвергнуты данные эксперимента по конвекции, вызванной электрическим полем, а также тестовый шумовой сигнал. Для электроконвекции размерность тоже оказалось конечной, $D \cong 5,1$, тогда как для шумового сигнала зависимость $D(m)$ не показывает тенденции к насыщению (рис. 10.3, б).

10.2. Вычисление ляпуновских показателей

Поскольку критерием хаотической динамики служит присутствие

положительного старшего ляпуновского показателя, представляет большой интерес возможность его оценки на основании обработки записи реализаций (временных рядов). Предложенная для этой цели процедура состоит в следующем.

Сначала производится реконструкция аттрактора в фазовом пространстве методом запаздываний и определяется размерность вложения m . Дальнейшая последовательность действий похожа на алгоритм Бенеттина (рис. 10.4).

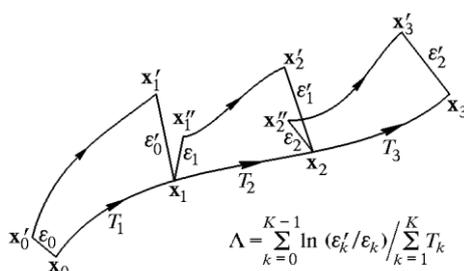


Рис. 10.4. К алгоритму вычисления ляпуновского показателя по реализации

Берем за исходную некоторую точку x_0 на реконструированном аттракторе и находим, просматривая запись временного ряда, другую точку x'_0 , находящуюся на малом расстоянии $\|x'_0 - x_0\| = \varepsilon_0$, но не близкую по времени. Затем, используя запись реализации, отслеживаем шаг за шагом динамику при старте из этих двух точек. Когда расстояние между изображающими точками x_1 и x'_1 превысит некоторую заданную величину ε_{\max} , остановимся и зафиксируем период времени T_1 , который для этого понадобился, и отношение конечного и начального расстояний $\varepsilon'_0 / \varepsilon_0$. Теперь вновь просмотрим реализацию с тем, чтобы отыскать другую точку старта возмущенной траектории. Она должна быть по возможности близка к точке x_1 и сдвинута от нее по направлению, близкому к направлению вектора $x'_1 - x_1$. Пусть это точка x''_1 и $\|x''_1 - x_1\| = \varepsilon_1$. Отслеживаем теперь траектории, стартующие из точек x_1 и x''_1 , пока через некоторый следующий период времени T_2 расстояние не превысит ε_{\max} , и вычисляем отношение $\varepsilon'_1 / \varepsilon_1$. Далее процедура повторяется многократно, и ляпуновский показатель оценивается как

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \ln(\varepsilon'_k / \varepsilon_k)}{\sum_{k=1}^K T_k}, \quad (10.7)$$

где K – общее число «ступенек» алгоритма.

Процедура оценки ляпуновского показателя требует еще большего объема данных, нежели вычисление корреляционной размерности. Согласно Экману-Рюэлю, если для адекватной оценки размерности нужно M отсчетов, то для оценки ляпуновского показателя в той же ситуации – порядка M^2 отсчетов.

Контрольные вопросы и задания

- 10.1. Как с помощью показателей Ляпунова идентифицировать динамику динамической системы?
- 10.2. Каков геометрический смысл показателей Ляпунова?
- 10.3. Что такое корреляционный интеграл?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изложены современные методы анализа систем, основанных на принципах математического моделирования. Особое внимание было уделено бурно развивающемуся в последние годы разделу математического моделирования – детерминированному хаосу. В рамках настоящего пособия были рассмотрены вопросы идентификации хаотического поведения, основанные на вычислении показателей Ляпунова, а также геометрических методах нелинейного анализа. Отдельное внимание было уделено бифуркациям в динамических системах, рассмотрены различные методы перехода к хаосу через перемежаемость и каскады бифуркаций удвоения периода.

В целом, пособие ориентировано на разнообразные инженерные приложения методов математического моделирования и анализа систем.

Предлагаемое учебное пособие может быть использовано для формирования фундаментальных основ теории моделирования и применения математического аппарата формализации процессов в сложных системах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Советов, Б.Я. Моделирование систем. / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Физматлит, 2009. – 343 с.
2. Советов, Б.Я. Моделирование систем: практикум / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Юрайт, 2012. – 294 с.
3. Советов, Б.Я. Моделирование систем. Комплект в 2-х томах. Учебник и практикум. / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Юрайт, 2014. – 638 с.
4. Советов, С.А. Моделирование систем: учебник. / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Юрайт, 2016. – 344 с.
5. Рейзлин, В.И. Математическое моделирование: учеб. пособие для магистратуры / В.И. Рейзлин 2-е изд., пер. и доп. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 126 с.
6. Динамика и математическое моделирование геофизических и гидрометеорологических процессов /отв. ред. А.А. Макошко. – М: ИФЗ РАН, 2008. – 276 с.
7. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А.А. Самарский. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
8. Самарский, А.А. Математическое моделирование. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2007. – 320 с.
9. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
10. Владимиров, В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, Х.Х. Каримова, В.П. Михайлов, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. – М.: Физматлит, 2004. – 288 с.
11. Барботько, А.И. Основы теории математического моделирования: учеб. пособие./ А.И. Барботько, А.О. Гладышкин. – Старый Оскол: ТНТ, 2013. – 212 с.
12. Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование: вводный курс: учебное пособие / Ю.Ю. Тарасевич. – М.: ЛИБРОКОМ, 2013. – 152 с.
13. Мышкис, А.Д. Элементы теории математических моделей. / А.Д. Мышкис. – М.: Физматгиз, 1994. – 192 с.
14. Трусков, П.В. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие. / П.В. Трусков, – М.: Логос, 2005. – 440 с.

15. Даньков, В.В. Моделирование процессов и систем: учеб. пособие / В.В. Даньков, М.М. Скрипниченко, С.Ф. Логинова и др. – СПб.: Лань, 2015. – 288 с.

16. Елизаров, И.А. Моделирование систем: учеб. пособие / И.А. Елизаров, Ю.Ф. Мартемьянов. – Ст. Оскол: ТНТ, 2013. – 136 с.

17. Зайдель, А.Н. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация: учеб. пособие / А.Н. Зайдель. – СПб.: Лань, 2016. – 304 с.

18. Сидоров, В.Н. Математическое моделирование в строительстве: учеб. пособие. / В.Н. Сидоров, В.К. Ахматов. – М.: АСВ, 2007. – 336 с.

Учебное издание

СЕМЕНОВ Михаил Евгеньевич
НЕКРАСОВА Наталия Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Редактор Акритова Е.В.

Подписано в печать 17.08. 2016. Формат 60 x 84 1/16. Уч.–изд. л. 5,9.
Усл. – печ. л. 6,0. Бумага писчая. Тираж 100 экз. Заказ № .

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства
учебной литературы и учебно-методических пособий
Воронежского ГАСУ
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84