1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Область определения. Линии и поверхности уровня

Рассмотрим пример функции двух переменных:

$$z = \sqrt{1 + y^2 - x^2}\,.$$

Область определения — *это те значения переменных, при которых все действия в выражении, определяющем функцию, выполнимы.* В нашем примере область определения — это те числа x и y, для которых

$$I(x, y) = 1 + y^2 - x^2 \geq 0\,. \tag{1}$$

Например, пара чисел $x = 0, y = 0$ принадлежит области определения. Каждая пара чисел может быть изображена точкой на координатной плоскости XOY. Будем говорить, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет неравенству (1), если ее координаты удовлетворяют этому неравенству. Для того, чтобы разобраться, какие точки плоскости XOY удовлетворяют неравенству (1), а значит попадают в область определения функции, найдем сначала те из них, которые удовлетворяют уравнению $I(x, y) = 0$ или $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение гиперболы с полуосями $a = 1$ и $b = 1$ (см. рис.1, а), и, следовательно, точки этой гиперболы – это те точки координатной плоскости, для которых $I(x, y) = 0$. Для остальных точек плоскости $I(x, y) \neq 0$. При этом по одну сторону от гиперболы лежат точки, для которых $I(x, y) < 0$, а по другую сторону — точки, для которых $I(x, y) > 0$. В последнем случае это точки области G_0, лежащей "между" ветвями гиперболы (см. рис.1, а). *Таким образом, область определения функции есть область G_0 вместе с самой гиперболой.*

Область значений —*это множество чисел, которые может принять функция.* Так как $z = \sqrt{1 + y^2 - x^2}$ - арифметический корень, то $z \geq 0$. При $x = 1, y = 0$ $z = 0$. Полагая $x = 0$, а y как угодно большим числом, мы видим, что $z > |y|$, и, значит, область значений есть $[0, \infty)$.

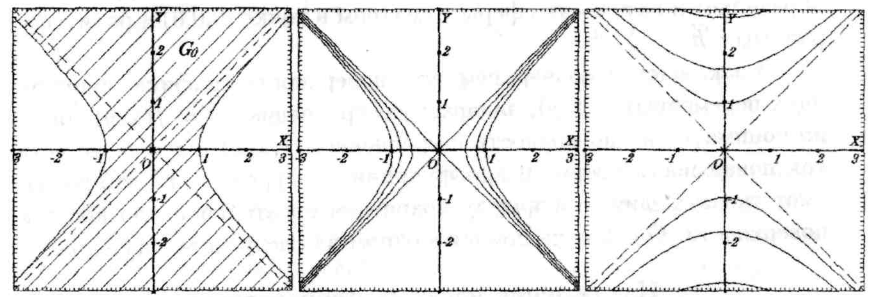
Пусть h — некоторое число из области значений. **Линия уровня h функции** $z(x, y)$ — *это множество тех точек (x, y) из области определения функции z, в которых она равна h.* По самому определению уравнение линии уровня h имеет вид

$$z(x, y) = h\,.$$

В нашем примере линии уровня существуют только для $h \in [0, \infty)$, а их уравнения имеют вид $\sqrt{1 + y^2 - x^2} = h$ или, после преобразований, $x^2 - y^2 = 1 - h^2$. При $h = 0$ – это уже знакомая гипербола, ограничивающая область определения. При $h = 1$ получаем уравнение $x^2 - y^2 = 0$ или $(x - y)(x + y) = 0$. Ему удовлетворяют точки, лежащие на прямых $x - y = 0$ и $x + y = 0$ (то есть биссектрисы координатных углов). Пара этих прямых и есть линия уровня 1. При h, меняющемся от 0 до 1, линии уровня плавно переходят от исходной гиперболы к паре пересекающихся прямых $y = x$, $y = -x$ (ее асимптотам). Уравнение такой линии имеет вид

$$x^2 - y^2 = 1 - h^2, \text{ или } \frac{x^2}{1 - h^2} - \frac{y^2}{1 - h^2} = 1. \tag{2}$$

Это уравнение равнобочной гиперболы с полуосями $a = b = \sqrt{1 - h^2}$ и вершинами в точках $(\pm\sqrt{1 - h^2}, 0)$. Две такие гиперболы при $h = \frac{3}{5}$ и $h = \frac{4}{5}$ показаны на рис.1, б.



а б в

Рис.1

Хотя уравнение любой линии уровня h всегда имеет вид (2), но при $h > 1$ его следует переписать так:

$$\frac{y^2}{h^2 - 1} - \frac{x^2}{h^2 - 1} = 1\,.$$

Тогда $h^2 - 1 > 0$, и мы снова имеем уравнение равнобочной гиперболы с полуосями $a = b = \sqrt{h^2 - 1}$ и теми же асимптотами. Но теперь x и y поменялись местами, а это означает, что ветви гиперболы расположены "вдоль" оси OY, а не оси OX. Вершины такой гиперболы находятся в точках $(0, \pm\sqrt{h^2 - 1})$ уже на оси OY. На рис.1, в изображены три такие линии уровня при $h = 1.4$, $h = 2$ и $h = 3$.

Следует помнить, что там, где линии уровня сгущаются, функция меняется быстро, а там, где линии уровня разрежены, — медленно. Так, из рис.1 следует, что функция z вблизи начала координат меняется медленно, а вблизи асимптот при больших x и y или вблизи точки $(1,0)$ — быстро. При этом начало координат является особой, так называемой седловой точкой, ибо при движении из нее вдоль оси OX как влево, так и в право функция убывает, а при движении вдоль оси OY как вверх, так и вниз функция возрастает.

Теперь поговорим о функциях трех переменных. Такие функции имеют вид u=$u(x,y,z)$, например u=$x^2+y^2+z^2$ или t=$ln(\alpha+3\beta^2-\sin\gamma)$. Для функций 3-х переменных приходится говорить не о линиях, а о **поверхностях уровня**. Точное определение аналогично определению линии уровня, поэтому попробуйте сформулировать его сами. Отметим только, что уравнение поверхности уровня h имеет вид

$$u(x,y,z)=h, \text{ например } x^2+y^2+z^2=h\,.$$

При $h<0$ такая поверхность не существует, а при $h>0$ уравнение определяет поверхность сферы с центром в точке (0,0,0) и радиусом, равным $\sqrt{h}$.

В заключение подчеркнем, что поверхность графика функции двух переменных $f(x,y)$, задаваемую уравнением $z=f(x,y)$, можно понимать как поверхность с уравнением $f(x,y)-z=0$, то есть как поверхность уровня 0 для функции $u=f(x,y)-z$. Это позволяет указать единую формулу уравнения касательной плоскости к поверхности. О ней речь пойдет в одном из следующих разделов.

Нахождение частных производных

При нахождении частных производных функции нескольких переменных, например $u(x,y,z)$ по y, надо помнить, что остальные переменные (в данном случае x и z), входящие в выражение функции, считаются постоянными. Это приводит к тому, что перед нами возникает функция одной переменной y, от которой надо взять обычную производную. При этом заметим, что любые выражения, содержащие только x и z и не содержащие y, будут тоже постоянными, и, следовательно, производная от них также равна нулю.

В остальном применяются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

Пример 1. Пусть $u=x^3+y^2+z-3xyz$. Требуется найти частные производные от u по x,y,z.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x=(x^3+y^2+z-3xyz)'_x=(x^3)'_x+(y^2)'_x+(z)'_x-(3xyz)'_x\,.$$

Так как y^2, z и $3yz$ постоянны, то получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz(x)'_x=3x^2-3yz\,.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u'_y=(x^3+y^2+z-3xyz)'_y=$$

$$(x^3)'_y+(y^2)'_y+(z)'_y-(3xyz)'_y=2y-3xz\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=u'_z=(x^3+y^2+z-3xyz)'_z=$$

$$(x^3)'_z+(y^2)'_z+(z)'_z-(3xyz)'_z=1-3xy\,.$$

Пример 2. Найти частные производные от $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\,.$$

Операцию нахождения частных производных можно повторять несколько раз. Так возникают вторые частные производные по x — $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, по y — $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, смешанная производная по x и y — $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ и так далее, а также частные производные более высоких порядков. Найдем, для примера, некоторые из них для первой из рассмотренных выше функций.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(3x^2-3yz)'_x=6x\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(2y-3xz)'_y=2\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(1-3xy)'_z=0\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(3x^2-3yz)'_y=-3z\,.$$

Градиент и производная по направлению

Пусть дана функция трёх переменных $u=f(x,y,z)$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. **Градиентом** *функции* **u** *в точке* M_0 *называется* **вектор**, *координатами которого являются значения частных производных функции в этой точке:*

$$\mathbf{grad}\,u(M_0)=\mathbf{grad}\,f(M_0)=\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x},\frac{\partial f(M_0)}{\partial y},\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\}=$$

$$= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot \mathbf{k}.$$

Для функции двух переменных $z = g(x, y)$ и точки $N_0(x_0, y_0)$

$$\mathbf{grad}\, z(N_0) = \mathbf{grad}\, g(N_0) = \left\{ \frac{\partial g(N_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(N_0)}{\partial y} \right\} =$$

$$\frac{\partial g(N_0)}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial g(N_0)}{\partial y} \cdot \mathbf{j}.$$

Основные физические свойства градиента. Находясь в некоторой точке M области определения функции f, мы можем двигаться из неё в разных направлениях. При этом функция f будет меняться по-разному и, следовательно, будет иметь разную скорость изменения по разным направлениям. В связи с этим сформулируем основные физические свойства градиента.

1. Вектор $\mathbf{grad}\, f(M)$ указывает **направление** наискорейшего возрастания функции f **вблизи** точки M.

2. Скалярное произведение вектора $\mathbf{grad}\, f(M)$ на любой вектор $\mathbf{a}$, делённое на длину вектора $\mathbf{a}$, есть число, равное мгновенной скорости изменения функции в точке M в направлении вектора $\mathbf{a}$.

Последняя величина называется производной функции f в точке M в направлении вектора $\mathbf{a}$ и обозначается $\frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{a}}$:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{grad}\, f(M), \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|}.$$

Геометрическое свойство градиента. Уравнение касательной плоскости к поверхности. Пусть дана некоторая функция двух переменных и точка M из области ее определения. Так как вдоль линии уровня, проходящей через точку M, функция не меняется, а в направлении градиента она меняется быстрее всего, то нетрудно убедиться, что *градиент в точке M и линия уровня в точке M* ***перпендикулярны*** *друг к другу*. То же самое верно и для функции трех переменных: *градиент и поверхность уровня в точке всегда перпендикулярны друг к другу*. Этот факт позволяет легко написать уравнение касательной плоскости к поверхности, проведенной в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. А именно: пусть дано уравнение поверхности. Перенесем все его члены в одну часть, тогда оно примет вид

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

а значит будет представлять собой уравнение поверхности уровня 0 для функции $u = \Phi(x, y, z)$. Тогда, если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности, то в силу сказанного выше вектор

$$\mathbf{grad}\, \Phi(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right).$$

перпендикулярен к поверхности, а значит и к касательной плоскости к поверхности в точке M_0. Отсюда уравние касательной плоскости выписываем по формуле уравнения плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Дифференциал функции и его применение

Рассмотрим сначала функцию $u = u(x, y, z)$ и две точки из области ее определения $M_0(x, y, x)$ и $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Вектор $\mathbf{\Delta r} = \overline{M_0 M} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ называется вектором приращения аргумента M. Тогда число du, равное скалярному произведению вектора градиента на вектор приращения, называется **полным дифференциалом** функции u в точке M_0:

$$du = du(M_0) = \mathbf{grad} u(M) \cdot \mathbf{\Delta r} =$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\Delta z.$$

Если z=$z(x, y)$ — функция двух переменных, то определение dz аналогично

$$dz = dz(M_0) = \mathbf{grad} z(M) \cdot \mathbf{\Delta r} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Здесь $M_0 = M_0(x, y)$, $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $\mathbf{\Delta r} = (\Delta x, \Delta y)$. Важнейшим свойством дифференциала является то, что *если частные производные функции непрерывны, то при малом $\mathbf{\Delta r}$ приращение функции приближенно равно дифференциалу*. Например, для функции u $\Delta u = u(M) - u(M_0) \approx du(M_0)$, и приближенное равенство тем точнее, чем меньше $\mathbf{\Delta r}$. Отсюда также получаем полезную формулу

$$u(M) = u(M_0) + du(M_0), \tag{3}$$

которая позволяет вычислить значение функции в новой точке M через ее значение в старой точке M_0 и ее дифференциал в старой точке.

Пример 3. Пусть требуется найти значение $arctg(\frac{7.2}{6.9})$. Рассмотрим функцию двух переменных $z{=}arctg(\frac{x}{y})$, связанную с этой задачей. Нам надо найти $z(7.2, 6.9)$. Воспользуемся формулой (3), в которой положим $M{=}(7.2, 6.9)$, а $M_0{=}(7,7)$. Тогда $\Delta x{=}0.2$, $\Delta y{=}-0.1$. Используя найденные ранее частные производные, получаем, что

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)|_{x=7,y=7} = \frac{1}{14},$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)|_{x=7,y=7} = -\frac{1}{14}.$$

Отсюда $dz = \frac{1}{14}\Delta x - \frac{1}{14}\Delta y = \frac{3}{140}$, $z(M_0) = arctg(1) = \frac{\pi}{4} = 0.785$. Следовательно, $arctg\frac{7.2}{6.9} \approx z(M_0) + dz(M_0) = 0.785 + 0.021 = 0.796 \approx 0.8$. Точное значение равно 0.8067.

Нахождение точек максимума и минимума функции двух переменных

Существует правило: *точки экстремума функции многих переменных следует искать только среди тех точек области определения, в которых градиент равен нулю или не существует.* Это и понятно, ибо если градиент существует и не равен 0, то он указывает направление, в котором функция возрастает. Тогда в противоположном направлении функция убывает и, следовательно, в такой точке у функции не может быть ни max ни min.

Равенство нулю вектора градиента означает, что равны нулю все его координаты. То есть точки экстремума функции n переменных надо искать среди тех точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$. Точки, удовлетворяющие такой системе уравнений, называются стационарными.

Но не всякая такая точка действительно будет точкой max или min. Каждую стационарную точку надо специальным образом проверить. Для функции двух переменных проверка стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ требует:

1) нахождения **в этой точке** значений старших производных

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2},$$

которые обозначим буквами A, B, C соответственно.

2) определения знака $B^2 - AC$, Так, *если* $B^2 - AC > 0$, *то в стационарной точке* M_0 *нет экстремума. Если* $B^2 - AC < 0$, *то экстремум есть, причем* min, *если* $A > 0$, *и* max, *если* $A < 0$. *Наконец, если* $B^2 - AC = 0$, *то ничего сказать нельзя — требуется дополнительное исследование.*

Пример 4. Найдем для функции $z = xy(3 - x - y)$ точки максимума и минимума (если они существуют).

Решение. 1. Ищем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3xy - x^2y - xy^2)'_x = 3y - 2xy - y^2 = y(3 - 2x - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3xy - x^2y - xy^2)'_y = 3x - x^2 - 2xy = x(3 - 2y - x).$$

2. Для нахождения стационарных точек функции составим и решим систему $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$. В нашем случае система имеет вид $\begin{cases} y(3 - 2x - y) = 0 \\ x(3 - x - 2y) = 0 \end{cases}$. Первое уравнение выполняется *в двух* случаях: либо когда $y = 0$, либо когда $3 - 2x - y = 0$ или $y = 3 - 2x$. В *первом случае* второе уравнение после подстановки нуля вместо y приобретает вид $x(3 - x) = 0$ и имеет решения $x = 0$ и $x = 3$. Таким образом, *в данном случае* решениями системы будут пары чисел $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 0$, а стационарными точками функции z — точки $M_1(0,0)$ и $M_2(3,0)$.

Во втором случае, после замены y на $3 - 2x$ второе уравнение приобретает вид $x(3 - x - 2(3 - 2x)) = x(3x - 3) = 0$. Оно имеет решения $x = 0$ и $x = 1$. Так как $y = 3 - 2x$, то отсюда следует, что решениями системы будут пары чисел $x_3 = 0$, $y_3 = 3 - 0 = 3$ и $x_4 = 1$, $y_4 = 3 - 2 = 1$. Поэтому стационарными точками функции z будут также $M_3(0,3)$ и $M_4(1,1)$.

3. Согласно теории точки максимума и минимума z могут быть только в найденных стационарных точках M_1, M_2, M_3, M_4. Следующий шаг — это проверка каждой стационарной точки на экстремум. Для проверки (см. выше) используются вторые производные функции z, вычисленные в стационарных точках. Поэтому найдем сначала формулы, выражающие эти производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (3y - 2xy - y^2)'_x = -2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (3y - 2xy - y^2)'_y = 3 - 2x - 2y\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (3x - x^2 - 2xy)'_y = -2x\,.$$

Приступим теперь к проверке точки $M_1(0,0)$, для чего найдем соответствующие ей числа A, B, C:

$$A = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2} = -2y|_{x=0,y=0} = 0\,,$$

$$B = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y} = (3 - 2x - 2y)|_{x=0,y=0} = 3\,,$$

$$C = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2} = -2x|_{x=0,y=0} = 0\,.$$

Отсюда $B^2 - AC = 3^2 - 0 > 0$ и, значит, в M_1 экстремума нет.

Аналогично проверяем точку $M_2(3,0)$:

$$A = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x^2} = -2y|_{x=3,y=0} = 0\,,$$

$$B = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x \partial y} = (3 - 2x - 2y)|_{x=3,y=0} = -3\,,$$

$$C = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial y^2} = -2x|_{x=3,y=0} = -6\,.$$

Отсюда $B^2 - AC = (-3)^2 - 0 > 0$ и, значит, в M_2 экстремума нет.

Точно также нет экстремума и в точке $M_3(0,3)$, так как в ней $A = -6$, $B = -3$, $C = 0$ и $B^2 - AC = 9 > 0$.

Наконец, для точки $M_4(1,1)$ $A = -2y|_{x=1,y=1} = -2$, $B = (3-2x-2y)|_{x=1,y=1} = -1$, $C = -2x|_{x=1,y=1} = -2$ и $B^2 - AC = 1 - (-2)(-2) = -3 < 0$. Следовательно, в точке M_4 экстремум есть, и согласно теории это максимум, так как знак A (или C) отрицательный. При этом значение в точке максимума равно $z(1,1) = xy(3-x-y)|_{x=1,y=1} = 1$.

2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Определение двойного интеграла и его основные свойства

Пусть функция $z = f(x,y)$ задана в области D. Разобьем область D на части Δ_1, $\Delta_2, ..., \Delta_n$ с площадями $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$,..., $\Delta\sigma_n$. Расстояние между двумя наиболее удаленными точками Δ_i обозначим $diam\,\Delta_i$. В каждой части выберем точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i. \qquad (4)$$

Определение 3. *Если при* $\max(diam\,\Delta_i) \to 0$ *существует предел интегральных сумм (4), который не зависит от способа разбиения области D на части и выбора в них точек $P(x_i, y_i)$, то он называется двойным интегралом по области D от функции $z = f(x,y)$ и обозначается*

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \text{ или } \iint\limits_D f(M)d\sigma.$$

Подчеркнем, что, являясь пределом чисел, *двойной интеграл есть число*, при этом D называется *областью интегрирования*, $d\sigma$ – *элементом площади*, $f(x,y)d\sigma{=}f(M)d\sigma$ – *подынтегральным выражением.*

Можно доказать, что если функция $z{=}(x,y)$ *непрерывна в ограниченной области D*, то двойной интеграл существует и обладает следующими свойствами:

1) $\iint\limits_D (f_1 + f_2)d\sigma = \iint\limits_D f_1 d\sigma + \iint\limits_D f_2 d\sigma$,

2) $\iint\limits_D a f d\sigma = a \iint\limits_D f d\sigma$,

3) $\iint\limits_D f d\sigma = \iint\limits_{D_1} f d\sigma + \iint\limits_{D_2} f d\sigma$, если $D = D_1 \cup D_2$, и $D_1 \cap D_2$ – пусто,

4) если $f(x,y) \geq g(x,y)$ для всех $(x,y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$,

5) если S_D площадь области D, $m \leq f(x,y) \leq M$ для всех $(x,y) \in D$, то $mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq MS_D$,

6) существует точка $C \in D$ такая, что $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(C)S_D$.

Следует помнить, что понятие двойного интеграла возникло как абстракция методов решения ряда практических задач, из которых отметим задачу о вычислении обьема цилиндрического тела и задачу о нахождении массы тонкой пластинки с переменной поверхностной плотностью.

Геометрический смысл двойного интеграла

Напомним, что если функция $f(x,y)$ неотрицательна и задана в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = V,$$

где V — обьем цилиндрического тела, зажатого между областью D снизу и графиком функции $f(z,y)$ сверху. Отсюда легко следует полезная *формула вычисления объема цилиндрического тела, ограниченного снизу графиком функции $z = g(x,y)$, сверху графиком функции $z = f(x,y)$ и лежащего над областию D:*

$$V = \iint\limits_D [f(x,y) - g(x,y)]d\sigma. \tag{5}$$

Механический смысл двойного интеграла Вычисление массы неоднородной пластинки, координат центра тяжести и моментов инерции

Напомним, что если область D понимать как пластинку, а неотрицательную функцию $f(x,y)$ — как плотность пластинки в точке $P(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = M,$$

где M — масса пластинки D.

Поэтому, если область D плоскости XOY занята пластинкой с поверхностной плотностью $\delta(x,y)$, то масса пластинки и ее статические моменты M_X и M_Y относительно осей OX и OY выражаются следующими двойными интегралами (если пластинка однородна, то $\delta(x,y) = const$):

$$M = \iint\limits_D \delta(x,y)\,dx\,dy,\;\; M_X = \iint\limits_D y\,\delta(x,y)\,dxdy,$$
$$M_Y = \iint\limits_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

Пусть $C(x_C, y_C)$ - координаты центра тяжести пластинки, тогда

$$x_C = M_Y/M, \quad y_C = M_X/M. \tag{7}$$

Моменты инерции пластинки относительно осей OX и OY соответственно равны

$$I_X = \iint\limits_D y^2\delta(x,y)dxdy, \qquad I_Y = \iint\limits_D x^2\delta(x,y)dxdy.$$

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Однако все эти замечательные формулы оставались бы абстрактными теоретическими достижениями, если бы не было простых методов вычисления двойных интегралов.

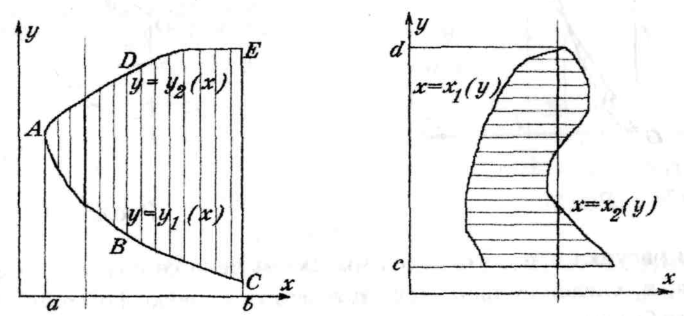
Пусть функция двух переменных $z = f(P) = f(x,y)$ и область D заданы в декартовой прямоугольной системе координат XOY. В этом случае элемент площади $d\sigma$ равен $dx\,dy$.

Предположим, что область D: 1) проектируется на отрезок $[a,b]$ оси OX, 2) любая прямая, параллельная оси OY, пересекается с областью D только по связному множеству (сравни *рис.2, а* и *2, б*). В этом случае можно говорить о линии, ограничивающей D снизу, и о линии, ограничивающей D сверху, причем и та и другая являются графиками некоторых функций от x (на *рис.2, а* это линии ABC и ADE соответственно).

Пусть нижняя кривая есть график функции $y = y_1(x)$, а верхняя кривая — график функции $y = y_2(x)$. Тогда справедлива первая формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах, которая сводит вычисление двойного интеграла к нахождению двух определенных интегралов от двух функций одной переменной:

$$\iint\limits_D f(P)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$
$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{8}$$

Здесь первым вычисляется внутренний интеграл по переменной y при фиксированном x . В результате получается величина, зависящая от x. Затем эта новая функция интегрируется по x от a до b и в результате получается число — значение двойного интеграла.



а б

Рис.2

На *рис.2, б* показан пример области Q, к которой предыдущая формула вычисления двойного интеграла неприменима. Зато к ней применима другая формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах.

Пусть: 1) область Q проектируется на отрезок $[c,d]$ оси OY и 2) любая прямая, параллельная оси OX, пересекает Q по связному множеству. Тогда можно говорить, что область Q ограничена слева и справа графиками некоторых функций $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in [c,d]$ переменной y. Пусть эти функции нам известны. Тогда справедлива вторая формула вычисления двойного интеграла

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (9)$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy, D: y = 2x, y = 3x^2.$$

Решение. Сначала необходимо построить линии, ограничивающие область D, для того, чтобы увидеть саму область и правильно выбрать формулу вычисления двойного интеграла (см. *рис.3*).

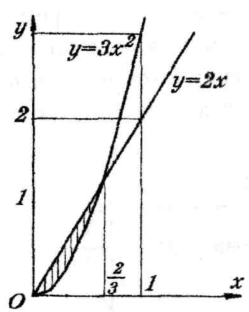


Рис.3

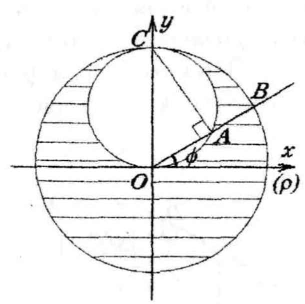


Рис.4

Из рисунка ясно, что здесь мы имеем дело со случаем, как на *рис.2, а*, и, следовательно, надо применять первую формулу. При этом необходимо ответить на вопрос: чему равны в нашем примере числа a, b и функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$? Другими словами, на какой

отрезок оси OX проектируется область D и графиком какой функции она ограничена снизу (сверху)? Ясно, что в нашем примере D ограничена снизу графиком $y = 3x^2$, сверху — $y = 2x$ и, значит, $y_1(x) = 3x^2$, $y_2(x) = 2x$. Наконец, для определения a и b найдем точки пересечения линий $y = 2x$ и $y = 3x^2$: $2x = 3x^2$, $x(2-3x) = 0$, $x = 0$ и $x = 2/3$. То есть область интегрирования расположена над $[a,b]$, где $a = 0$, $b = 2/3$. Остается применить формулу (8):

$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy = \int\limits_0^{2/3} dx \int\limits_{3x^2}^{2x} (x^2+y)dy = \int\limits_0^{2/3} \left[(x^2y + y^2/2)\Big|_{3x^2}^{2x} \right] dx =$$

$$\int\limits_0^{2/3} \left(2x^3 + 2x^2 - 3x^4 - 9x^4/2\right) dx = \int\limits_0^{2/3} \left(2x^3 + 2x^2 - 15x^4/2\right) dx =$$

$$\left(x^4/2 + 2x^3/3 - 3x^5/2\right)\Big|_0^{2/3} = 8/81.$$

Следует помнить, что далеко не для всякой области D двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ может быть непосредственно вычислен по формуле (8) или (9) (см., например, *рис.4*, где изображена область, которая имеет несвязные пересечения как с прямыми, параллельными OX, так и с прямыми, параллельными OY). В общем случае для преодоления такой ситуации используют свойство 3) двойного интеграла, разбивая область на куски, к которым уже можно применить формулы (8) и (9) (такое разбиение всегда существует). Однако кроме этой возможности иногда удается вычислить двойной интеграл еще по одной формуле, к обсуждению которой мы сейчас и перейдем.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

Пусть область D лежит в полярной системе координат и 1) целиком расположена между двумя лучами, образующими с полярной осью углы α и β, $\alpha < \beta$, $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, 2) любой луч, выходящий из начала координат O под углом ϕ, $\alpha < \phi < \beta$, пересекает область по связному множеству (см. *рис.5*).

В этом случае обозначим через $\rho_1(\phi)$ расстояние вдоль луча ϕ от точки O до точки A входа в область D и через $\rho_2(\phi)$ — расстояние вдоль луча ϕ от точки O до точки B его выхода из области D. Ясно, что $\rho_1(\phi) \le \rho_2(\phi)$, $\alpha < \phi < \beta$ и что линии с уравнениями $\rho_1(\phi)$, $\rho_2(\phi)$, $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ в полярной системе координат образуют границу области D. Пусть $z = g(P) = g(\rho,\phi)$ — функция двух переменных, определенная в точках $P(\rho, \phi)$ области D. Тогда справедлива *формула вычисления двойного интеграла в полярных координатах:*

$$\iint\limits_D g(P)d\sigma = \iint\limits_D g(\rho, \phi)\, \rho\, d\rho\, d\phi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{\rho_1(\phi)}^{\rho_2(\phi)} g(\rho, \phi)\, \rho\, d\rho \right) d\phi \qquad (10)$$

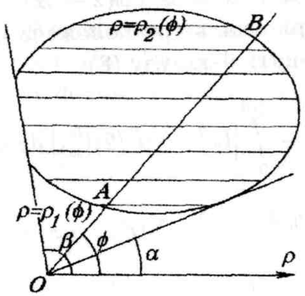


Рис.5

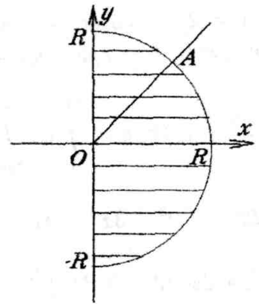


Рис.6

Здесь интегрирование идет сначала по переменной ρ, а затем по переменной ϕ. При этом надо помнить, что элемент площади $d\sigma$, который в декартовой системе координат заменялся на $dx\, dy$, здесь заменяется на выражение $\rho\, d\rho\, d\phi$. В заключение заметим, что подынтегральная функция $z = g(P)$, как правило, бывает задана не в полярной, а в декартовой системе координат: $z = g(P) = \overline{g}(x, y)$. В этом случае надо воспользоваться формулами перехода от декартовых к полярным координатам: $x = \rho\, cos(\phi), y = \rho\, sin(\phi)$ и получить искомую функцию $z = g(\rho, \phi)$ в виде $g(\rho, \phi) = \overline{g}(\rho\, cos(\phi), \rho\, sin(\phi))$. Следующий пример подробно демонстрирует порядок вычислений.

Пример 6. На *рис.4* изображена однородная пластинка D, радиус внешнего круга равен 1. Требуется найти координаты ее центра тяжести.

Решение. По формуле (7) $X_C = M_Y/M$, $Y_C = M_X/M$, где M — масса пластинки, а M_X, M_Y — ее статические моменты относительно осей OX и OY соответственно. Формулы (6) их вычисления содержат величину $\delta(x, y)$ поверхностной плотности пластинки, которая по условию постоянна. Поэтому M, M_X, M_Y будут пропорциональны δ, и, после деления в формулах $X_C = M_Y/M$, $Y_C = M_X/M$, ответ не будет содержать δ. Поэтому, без ограничения общности, будем считать $\delta = 1$. Отсюда: масса пластинки равна ее площади $M = \pi R^2 - \pi R^2/4 = 3/4\pi R^2 = 3/4\pi$. В силу симметрии центр тяжести должен находиться на оси OY и, следовательно, $X_C = 0$.

Таким образом, нам остается вычислить только M_X. По формуле (6), переходя к полярным координатам, имеем

$$M_X = \iint\limits_D y\, \delta(x, y)\, dx\, dy =$$

$$\iint\limits_D \rho\, sin\, \phi\, \delta(\rho\, cos\, \phi, \rho\, sin\, \phi)\, \rho\, d\rho\, d\phi = \iint\limits_D \rho\, sin\, \phi\, \rho\, d\rho\, d\phi$$

Будем вычислять двойной интеграл по формуле (10), для чего необходимо выяснить, чему в нашем примере равны α, β, $\rho_1(\phi)$, $\rho_2(\phi)$. Так как область окружает начало координат со всех сторон, то содержащий ее угол между лучами α и β должен быть равен 2π, а лучи α и β должны быть совпадающими. В нашем примере удобно положить $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. Теперь займемся ρ_1 и ρ_2. Возьмем произвольный луч, выходящий из O под углом ϕ. Ясно, что для любого ϕ расстояние от начальной точки O до точки B, в которой мы выходим из области (см. *рис.4*), равно $R = 1$, и, следовательно, $\rho_2(\phi) = 1$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Наоборот, расстояние до точки A входа в область зависит от ϕ (см. *рис.4*). Для $\phi \in (0, \pi)$ из прямоугольного треугольника OAC получаем $\rho_1(\phi) = OA = R\, sin\, \phi$, $0 \le \phi \le \pi$, а для $\pi \le \phi \le 2\pi$, $\rho_1(\phi) = 0$, что видно непосредственно из *рис.4*. Отсюда

$$M_X = \iint\limits_D \rho\, sin\, \phi\, \rho\, d\rho\, d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{\rho_1(\phi)}^{\rho_2(\phi)} sin\, \phi\, \rho^2\, d\rho \right) d\phi =$$

$$\int\limits_0^{\pi} sin\, \phi \left(\int\limits_{sin\, \phi}^{1} \rho^2\, d\rho \right) d\phi + \int\limits_{\pi}^{2\pi} sin\, \phi \left(\int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho \right) d\phi = \int\limits_0^{\pi} sin\, \phi\, \frac{\rho^3}{3}\bigg|_{sin\, \phi}^{1} d\phi +$$

$$+ \int\limits_{\pi}^{2\pi} sin\, \phi\, \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^1 d\phi = \frac{1}{3}\left[\int\limits_0^{\pi} sin\, \phi\, (1 - sin^3\phi)\, d\phi + \int\limits_{\pi}^{2\pi} sin\, \phi\, d\phi \right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[\int\limits_0^{2\pi} sin\, \phi\, d\phi - \int\limits_0^{\pi} sin^4\phi \right] = -\frac{1}{12}\int\limits_0^{\pi} \left(1 - 2cos\, 2\phi + cos^2 2\phi\right) d\phi =$$

$$-\frac{1}{12}\left[\pi - 0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (1 + cos\, 4\phi)\, d\phi \right] = -\frac{1}{12}[\pi + \pi/2] = -\frac{\pi}{8}$$

Отсюда $Y_C = M_X/M = -\frac{\pi}{8}/\frac{3\pi}{4} = -1/6$.

Пример 7. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$J = \int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dy.$$

Решение. По сути нам дан двойной интеграл, для вычисления которого используется формула (8). Отсюда следует, что область интегрирования проектируется на отрезок $[0, R]$ оси OX, снизу она ограничена графиком функции $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, а сверху — $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Так как эти графики представляют собой нижнюю и верхнюю половинки окружности радиуса R с центром в нуле, то сама область интегрирования есть полукруг, изображенный на *рис.6*.

Полагая $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, получаем $\cos\sqrt{x^2+y^2} = \cos\rho$. Так как координата ϕ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и при любом ϕ координата r меняется от 0 до R, то

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^R \cos\rho\,\rho\,d\rho. \tag{11}$$

Вычислим интеграл $\int_0^R \cos\rho\,\rho\,d\rho$, используя метод интегрирования по частям. Положим $u = \rho$, $dv = \cos\rho\,d\rho$, тогда $du = d\rho$, $v = \sin\rho$, и $\int_0^R \cos\rho\,\rho\,d\rho = \rho\sin\rho|_0^R - \int_0^R \sin\rho\,d\rho = R\sin R + \cos R - 1$. Подставляя найденные значения в (11), получаем

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R\sin R + \cos R - 1)d\phi = \pi(R\sin R + \cos R - 1).$$

Пример 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$, координатными плоскостями $y = 0$, $x = 0$ и плоскостями $z = x + y - 1$, $x + y = 1$.

Решение. Изобразим тело и область интегрирования на рис.7.

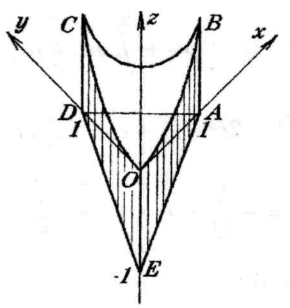


Рис.7

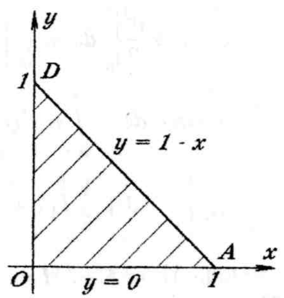


Рис.8

Поверхность OBC с уравнением $z = x^2 + y^2$ ограничивает тело сверху, плоскость EAD с уравнением $z = x + y - 1$ ограничивает тело

снизу, наконец, координатные плоскости $OCDE$ и $OEAB$, а также плоскость $ABCD$ с уравнением $x + y = 1$ ограничивают тело с боков (см. *рис.7*). Тело проектируется на треугольную область OAD в плоскости XOY, которую обозначим Q. Тогда искомый объем тела согласно (5) выражается по формуле

$$V = \iint_Q [f(x,y) - g(x,y)]d\sigma = \iint_Q [x^2 + y^2 - (x + y - 1)]d\sigma.$$

Рис.8 показывает, что для вычисления двойного интеграла можно применить первую формулу (8), где $a = 0$, $b = 1$, $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 1 - x$. Окончательно имеем

$$V = \iint_Q [x^2 + y^2 - x - y + 1)]d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2 - x - y + 1)\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 (x^2y + y^3/3 - xy - y^2/2 + y)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (5x^2/2 - 4x^3/3 - 2x + 5/6)\,dx$$

$$= (5x^3/6 - x^4/3 - x^2 + 5x/6)\Big|_0^1 = 1/3$$

Вычисление площадей

Используя предыдущий пункт о вычислении объемов, легко видеть, что $\iint_D d\sigma$ выражает объем цилиндрического тела, имеющего единичную высоту и лежащего над областью D, что численно равно площади S_D области D.

Пример 9. Вычислить площадь области, ограниченной линией $\rho = 3 + 2\cos\phi$.

Решение. Линия, заданная в полярной системе координат, есть кардиоида. Она окружает начало координат и симметрична относительно оси OX. Поэтому для нахождения площади будем пользоваться формулой вычисления двойного интеграла в полярной системе координат: $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\rho_1(\phi) = 0$, $\rho_2(\phi) = 3 + 2cos\,\phi$. Тогда

$$S = \iint_D d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{3+2\cos\phi} \rho\,d\rho = 1/2\int_0^{2\pi} (3 + 2\cos\varphi)^2 d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi} (4.5 + 6\cos\phi + 2\cos^2\phi)d\phi = (4.5\phi + 6\sin\phi + (\phi + 0.5\sin 2\phi))\Big|_0^{2\pi} = 11\pi.$$

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть на плоскости или в пространстве дана некоторая кривая Γ с концами A и B, в точках которой определены скалярная функция $f(P)$ и векторнозначная функция $\mathbf{F}(P)$, $P \in \Gamma$.

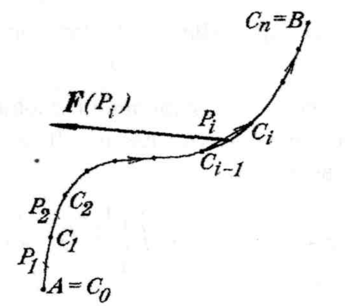


Рис.9

Разобьем кривую на мелкие части точками $C_0 = A, C_1, C_2, ..., C_n = B$, выберем в каждом промежутке C_{i-1}, C_i некоторую точку P_i, $i = 1, 2, ..., n$, и составим интегральные суммы

$$\sum_1^n f(P_i)\Delta_i \qquad \sum_1^n \mathbf{F}(P_i)\mathbf{\Delta}_i.$$

Здесь $\mathbf{\Delta}_i$ означает вектор $\overline{C_{i-1}C_i}$, Δ_i — его длину, а $\mathbf{F}(P_i)\mathbf{\Delta}_i$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{F}(P_i)$ и $\mathbf{\Delta}_i$.

Определение. Предел первой интегральной суммы при неограниченном измельчении разбиения кривой Γ называется *криволинейным интегралом первого рода от скалярной функции* $f(P)$ *по кривой* Γ, а предел второй интегральной суммы называется *криволинейным интегралом второго рода от векторнозначной функции* $\mathbf{F}(P)$ *по кривой* Γ. При этом, как обычно, требуется, чтобы эти пределы существовали независимо от способа разбиения кривой и выбора точек P_i внутри частей разбиения.

Обозначаются эти интегралы так:

$$\int_\Gamma f(P)\,dl, \qquad \int_\Gamma \mathbf{F}(P)\,\mathbf{dl}.$$

Здесь символ $\mathbf{dl}$ выражает "бесконечно малый" вектор смещения вдоль кривой Γ в точке P, а dl — "дифференциал длины кривой" в точке P, или длину "бесконечно малого" кусочка кривой. Оба интеграла — числа.

Подчеркнем, что если разбиение кривой Γ точками $C_0, C_1, ..., C_n$ проводить не от конца A к концу B, а наоборот (в обратном порядке), то первая интегральная сумма не изменится, а вторая изменит свой знак, так как при обратном порядке разбиения все $\mathbf{\Delta}_i = \overline{C_{i-1}C_i}$ изменят свое направление на обратное. То есть криволинейный интеграл первого рода не зависит, а второго рода зависит от выбора направления (ориентации) на кривой.

Физический смысл криволинейных интегралов

Пусть $f(P)$ — функция, задающая переменную плотность на линии Γ. Тогда криволинейный интеграл первого рода равен массе M кривой Γ. Статические моменты M_X, M_Y, координаты центра тяжести x_C, y_C и моменты инерции I_X, I_Y кривой Γ также выражаются с помощью криволинейных интегралов 1-го рода

$$M = \int_\Gamma \delta(P)\,dl, \quad M_X = \int_\Gamma y\delta(P)\,dl, \quad M_Y = \int_\Gamma x\delta(P)\,dl,$$

$$x_C = M_Y/M, \; y_C = M_X/M, \quad I_X = \int_\Gamma y^2\delta(P)\,dl, \quad I_Y = \int_\Gamma x^2\delta(P)\,dl, \tag{12}$$

где $\delta(P)$ — функция линейной плотности на кривой Γ.

Пусть теперь материальная точка движется из положения A в положение B вдоль кривой Γ и пусть в каждой точке $P \in \Gamma$ на нее действует переменная сила $\mathbf{F}(P)$. Тогда работа A переменной силы при криволинейном движении выражается формулой

$$A = \int_\Gamma \mathbf{F}(P)\,\mathbf{dl}. \tag{13}$$

В этом и состоит физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

Формулы вычисления криволинейных интегралов

Для вычисления криволинейного интеграла необходимо, чтобы в некоторой системе координат были заданы как подынтегральная функция, так и сама кривая. Пусть сначала кривая Γ лежит в пространстве и задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, причем $x(t), y(t), z(t)$ являются координатами начальной точки A при $t = \alpha$, а $x(t), y(t), z(t)$ являются координатами конечной точки B при $t = \beta$ (то есть параметризация кривой соответствует выбранному на ней направлению). Пусть функции $f(P)$ и $\mathbf{F}(P)$ также известны в декартовой системе координат XYZ:

$f(P) = f(x,y,z)$, $\mathbf{F}(P) = Q(x,y,z)\mathbf{i} + R(x,y,z)\mathbf{j} + S(x,y,z)\mathbf{k}$, где x, y, z – координаты точки P. Тогда справедливы формулы

$$\int_\Gamma f(P)\,dl = \int_\Gamma f(x,y,z)\,dl = \tag{14}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt;$$

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(P)\,\mathbf{dl} = \int_\Gamma Q(x,y,z)\,dx + R(x,y,z)\,dy + S(x,y,z)\,dz = \tag{15}$$

$$\int_\alpha^\beta [Q(x(t),y(t),z(t))x'(t) + R(x(t),y(t),z(t))y'(t) + S(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt.$$

Если задача двумерна и все происходит на плоскости XOY, то в формулах надо всюду опустить слагаемые, содержащие координату z. Например:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(P)\,\mathbf{dl} = \int_\Gamma Q(x,y)\,dx + R(x,y)\,dy = \tag{16}$$

$$\int_\alpha^\beta [Q(x(t),y(t))x'(t) + R(x(t),y(t))y'(t)]\,dt.$$

Пусть теперь кривая на плоскости задана не параметрически, а является графиком функции $y = y(x)$ над отрезком $[a,b]$, причем точка A лежит над a, а точка B над b. Тогда справедливы формулы

$$\int_\Gamma f(P)\,dl = \int_\Gamma f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx; \tag{17}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(P)\,\mathbf{dl} = \int_\Gamma Q(x,y)\,dx + R(x,y)\,dy = \tag{18}$$

$$\int_a^b [Q(x,y(x)) + R(x,y(x))y'(x)]\,dx.$$

Пример 10. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x^{2/9}dl$, где L –дуга астроиды, соединяющая точки $A(1,0)$ и $B(0,1)$.

Решение. Параметрические уравнения астроиды $x = cos^3 t$, $y = sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Заметим, что точкам $A(1,0)$ и $B(0,1)$ соответствуют значения параметра $t = 0$ и $t = \pi/2$. Согласно формуле (14) в двумерном случае

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \sqrt{(3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}dt = 3cost\ sint\,dt.$$

Тогда

$$\int_L x^{2/9}dl = 3\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{2/3}\cos t\sin t\,dt = -3\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{5/3}d(\cos t) =$$

$$-9\cos^{8/3} t/8\,\Big|_0^{\pi/2} = 9/8.$$

Пример 11. Найти массу дуги C кривой $y = \ln(1+x)$, заключенной между точками с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$, если плотность дуги $\delta(x,y) = (x+1)^2$.

Решение. Применим формулы (12) и (17):

$$M = \int_C \delta(x,y)dl = \int_1^2 (x+1)^2\sqrt{1 + (1+x)^{-2}}dx = \int_1^2 (x+1)\sqrt{2 + 2x + x^2}dx$$

$$= 1/2\int_1^2 \sqrt{2 + 2x + x^2}d(2 + 2x + x^2) = 1/3(10^{3/2} - 5^{3/2}).$$

Пример 12. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xdx + 3ydy + (x-z)dz$, где L – отрезок прямой AB: $A(1,3,0)$, $B(2,-1,3)$.

Решение. Уравнение прямой AB имеет вид: $(x-1)/1 = (y-3)/(-4) = z/3 = t$, $-\infty < t < \infty$. Приводя это уравнение к параметрическому виду, имеем $x = 1 + t, y = 3 - 4t, z = 3t$. Тогда по формуле (15)

$$\int_L xdx + 3ydy + (x-z)dz = \int_0^1 [1 + t - 12(3-4t) + 3(1-2t)]dt =$$

$$\int_0^1 (-32 + 43t)dt = (-32t + 43t^2/2)\big|_0^1 = -21/2.$$

Пример 13. Вычислить работу силового поля $x\mathbf{i} + (x-2y)\mathbf{j}$ при перемещении точки вдоль окружности C радиуса 3.

Решение. Параметрические уравнения окружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Поэтому по формулам (13) и (16)

$$A = \int_C Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi}[-9\cos t\sin t + (3\cos t - 6\sin t)3\cos t]dt =$$

$$9\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - 3\cos t\sin t)dt = 9/2\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)dt + 27\int_0^{2\pi}\cos t\,d(\cos t) =$$

$$[9/2(t + \sin 2t/2) + 27\cos^2 t/2]\big|_0^{2\pi} = 9\pi.$$

Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина

Кривая Γ, по которой идет интегрирование, может иметь самопересечения или быть замкнутой, при этом ни в определениях, ни в формулах ничего менять не надо. Тем не менее, имеет смысл особо рассмотреть случай интеграла второго рода по замкнутому контуру. Его обозначают специальным символом и называют *циркуляцией* векторного поля $\mathbf{F}(P) = Q(P)\mathbf{i} + R(P)\mathbf{j} + S(P)\mathbf{k}$ по замкнутому контуру Γ:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(P)\,\mathbf{dl} = \oint_{\Gamma} Q(P)\,dx + R(P)\,dy + S(P)\,dz.$$

При этом то направление на кривой, при движении по которому область, ограниченная ею, остается слева, называется *положительным*, а противоположное — *отрицательным*.

Пусть G – область на плоскости XOY, ограниченная замкнутым контуром Γ и пусть $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ — векторная функция (или, как ее еще называют, векторное поле) определенная в точках $M(x,y)$ области G. Тогда справедлива замечательная формула Грина

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(M)\,\mathbf{dl} = \oint_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{19}$$

где направление интегрирования положительное.

Формула Грина имеет много важных применений, из которых отметим только вычисление площади S_G области G с помощью криволинейного интеграла по ее границе Γ:

$$S_G = 1/2 \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx. \tag{20}$$

Здесь $P(x,y) = -y,\ Q(x,y) = x$, откуда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$, и следовательно

$$1/2 \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = 1/2 \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_G dx\,dy = S_D$$

Пример. Вычислить площадь S эллипса с полуосями a и b.

Решение. Параметрические уравнения эллипса: $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 < t < 2\pi$. По (20) и (16)

$$S = 1/2 \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = 1/2 \int_0^{2\pi} (a\cos t\, b\cos t + b\sin t\, a\sin t)dt =$$

$$1/2\, ab \int_0^{2\pi} 1\,dt = 1/2\, ab\, t|_0^{2\pi} = \pi\, ab$$

Восстановление функции по ее полному дифференциалу и условие потенциальности силового поля

Как известно, дифференциал функции $z = U(x,y)$ имеет вид

$$dz = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy.$$

В свою очередь подинтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в криволинейном интеграле второго рода напоминает формулу полного дифференциала. Оно и в самом деле является таковым (то есть $P(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$, а $Q(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ для некоторой функции $U(x,y)$), если выполняется условие

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \tag{1}$$

для всех (x,y) в односвязной области D плоскости XOY.

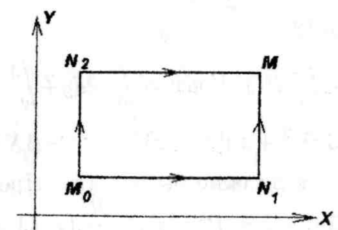
Саму функцию $U(x,y)$ можно найти с помощью криволинейного интеграла второго рода по любой кривой, соединяющей некоторую фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ односвязной области D с переменной точкой $M(X,Y)$

$$U(X,Y) = \int_{M_0 M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{2}$$

Дело в том, что в случае выполнения условия (1) силовое поле $P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ является полем градиентов функции $U(x,y)$, а работа такого силового поля, выражаемая криволинейным интегралом (2), не зависит от траектории движения, а зависит только от начальной A и конечной B точек движения. При этом работа $\mathcal{A}$ легко выражается через функцию $U(x,y)$:

$$\mathcal{A} = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A).$$

Отсюда ясно, что знание функции $U(x,y)$ может оказаться полезным. Функция U называется потенциалом силового поля, а тождество (1) является условием потенциальности силового поля.



При вычислении $U(X,Y)$ по формуле (2) обычно в качестве контура интегрирования M_0M берется ломаная M_0N_1M или ломаная M_0N_2M со звеньями параллельными осям координат, которые изображены на предыдущем рисунке.

В этом случае криволинейный интеграл наиболее просто выражается через определенные интегралы

$$U(X,Y)=\int_{M_0N_1M}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{X}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{Y}Q(X,y)dy \quad (2)$$

$$U(X,Y)=\int_{M_0N_2M}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{y_0}^{Y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{X}P(x,Y)dx. \quad (3)$$

Заметим, что если область определения D функций P и Q содержит начало системы координат XOY, то в качестве начальной точки M_0, как правило, берут именно точку $O(0,0)$, что обычно упрощает вычисления.

Пример 1. Проверить, что выражение $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$ является полным дифференциалом функции $U(x,y)$ и найти эту функцию.

Решение. По условию $P(x,y)=(2x-3y^2+1)$, $Q(x,y)=(2-6xy)$ и эти функции определены на всей плоскости XOY. При этом

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-6y\quad\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-6y.$$

То есть условие (1) выполнено и, значит, выражение $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, определенной также на всей плоскости XOY. Найдем U по формулам (2) и (3) и сравним результаты. В качестве M_0 примем начало координат. В результате $x_0=0$, $y_0=0$, откуда

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{X}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{Y}Q(X,y)dy=\int_0^X(2x+1)dx+\int_0^Y(2-6Xy)dy=$$

$$(2\frac{x^2}{2}+x)|_0^X+(2y-6X\frac{y^2}{2})|_0^Y=X^2+X+2Y-3XY^2$$

Аналогично по формуле (3)

$$U(x,y)=\int_{y_0}^{Y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{X}P(x,Y)dx=\int_0^Y 2dy+\int_0^X(2x-3Y^2+1)dx=$$

$$(2y)|_0^Y+(x^2-3xY^2+x)|_0^X=2Y+X^2-3XY^2+X.$$

Результаты совпали, как и должно было быть. Проверка показывает, что $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=2x-3y^2+1=P(x,y)$, а $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=2x-6xy=Q(x,y)$.

Задание N1. Функции многих переменных

1. Дана функция $z=f(x,y)$, графиком которой является поверхность второго порядка.

Требуется найти:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) наибольшее z^* и наименьшее z_* значения функции;

г) начертить три линии уровня функции (включая z^* и z_*, если они конечны);

д) определить название поверхности, заданной функцией:

1) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$

2) $z=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1}$

3) $z=\sqrt{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-1}$

4) $z=\sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-1}$

5) $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$

6) $z=3\sqrt{x^2+y^2}$

7) $z=2\sqrt{x^2-y^2}$

8) $z=5xy$

9) $z=2xy$

10) $z=4\sqrt{x^2-y^2}$

11) $z=5\sqrt{x^2+y^2}$

12) $z=\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$

13) $z=\sqrt{\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}-1}$

14) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

15) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}}$

16) $z=\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}$

17) $z=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}$

18) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

19) $z=\sqrt{x^2-y^2}$

20) $z=3xy$

21) $z=4\sqrt{x^2-y^2}$

22) $z=8\sqrt{x^2+y^2}$

24) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}$

25) $z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$

1) S: $2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$; $M_0(1,-1,1)$

2) S: $x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0$; $M_0(2,1,-1)$

3) S: $x^2+z^2-4y^2+2xy=0$; $M_0(-2,1,2)$

4) S: $x^2+y^2+z^2-xy+3z-7=0$; $M_0(1,2,1)$

5) S: $x^2+y^2+z^2+6y+4x-8=0$; $M_0(-1,1,2)$

6) S: $2x^2-y^2+z^2-4x+y-13=0$; $M_0(2,1,-1)$

7) S: $z^2+x^2+y^2-6y+4z+4=0$; $M_0(2,1,-1)$
8) S: $x^2+z^2-5yz+3y-46=0$; $M_0(1,2,-3)$
9) S: $x^2+y^2-xz-yz=0$; $M_0(0,2,2)$
10) S: $x^2+y^2-2yz-z^2+y-2z-2=0$; $M_0(1,1,1)$
11) S: $y^2-z^2+x^2-2xz+2x-z=0$; $M_0(1,1,1)$
12) S: $x^2+y^2-2xy+2x-y-z=0$; $M_0(-1,-1,-1)$
13) S: $y^2-x^2+2xy-3y-z=0$; $M_0(1,-1,1)$
14) S: $x^2-y^2-2xy-x-2y-z=0$; $M_0(-1,1,1)$
15) S: $x^2-2y^2+z^2+xz-4y-13=0$; $M_0(3,1,2)$
16) S: $4y^2-z^2+4xy-xz+3z-9=0$; $M_0(1,-2,1)$
17) S: $x^2+y^2-3xy-x+y-z+2=0$; $M_0(2,1,0)$
18) S: $2x^2-y^2+2z^2+xy+xz-3=0$; $M_0(1,2,1)$
19) S: $x^2-y^2+z^2-4x+2y-14=0$; $M_0(3,1,4)$
20) S: $x^2+y^2-z^2+xz+4y-4=0$; $M_0(1,1,2)$
21) S: $x^2-y^2-z^2+xz+4x+5=0$; $M_0(-2,1,0)$
22) S: $x^2+y^2-xz+yz-3x-11=0$; $M_0(1,4,-1)$
23) S: $x^2+2y^2+z^2-4xz-8=0$; $M_0(0,2,0)$
24) S: $x^2-y^2-2z^2-2y=0$; $M_0(-1,-1,1)$
25) S: $x^2+y^2-3z^2+xy+2z=0$; $M_0(1,0,1)$

3. Вычислить приближенно, пользуясь дифференциалом

1) $\sqrt[7]{(3,03)^4+(1,98)^5+15}$
2) $\ln\left[(2,02)^3+\sqrt[3]{0,98}-8\right]$
3) $\dfrac{10}{(4,98)^3-(5,03)^2}$
4) $\ln\left(\sqrt{4,02}-\sqrt[3]{0,97}\right)$
5) $\ln\left(\sqrt[5]{0,98}+\sqrt[4]{1,03}-1\right)$
6) $\dfrac{2,03}{(2,03)^4+(2,97)^2}$
7) $\operatorname{arctg}\dfrac{(1,04)^2}{0,98}$
8) $\sqrt[5]{(2,97)^3+(2,02)^2+1}$
9) $(1,05)^{3,02}$
10) $\dfrac{(2,03)^2}{\sqrt{(2,03)^3+(1,05)^3+7}}$
11) $\sqrt[5]{(2,95)^3+(2,03)^2+1}$
12) $\dfrac{10}{(4,023)^3+(1,97)^5+4}$
13) $\sqrt[3]{(3,95)^2+(3,03)^2+2}$
14) $\sqrt[4]{(2,03)^3+(1,94)^3}$

15) $\sin 29^\circ\ \operatorname{tg} 46^\circ$
16) $\sqrt{3,98}\,(1,03)^{3,98}$
17) $\sqrt{(4,03)^3+(1,96)^5+4}$
18) $(0,97)^{1,05}$
19) $\sqrt{(3,02)^2-(2,004)^2+11}$
20) $\sqrt{(4,05)^2+(2,93)^2}$
21) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1,97}{1,02}-1\right)$
22) $(1,08)^{3,96}$
23) $(2-\sqrt{0,97})^{3,02}$
24) $(0,97)^{2,02}$
25) $(1,94)^2\,e^{0,12}$

4. Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $z=\frac{1}{3}x^3+5x^2+12xy+6y^2-60x+60y+6$
2) $z=\frac{1}{3}x^3+8x^2-2xy-y^2-32y-5$
3) $z=\frac{1}{3}x^3-5x^2-2xy-y^2+20y$
4) $z=\frac{1}{3}x^3+7x^2-4xy-2y^2-56y+2$
5) $z=\frac{1}{3}x^3-x^2+8xy+4y^2+20x+4y$
6) $z=\frac{1}{3}x^3+2x^2+2xy+y^2+x+9y-1$
7) $z=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2xy+y^2+4x-4y+5$
8) $z=\frac{1}{3}x^3+3x^2+4xy+2y^2+x+25y+3$
9) $z=\frac{1}{3}x^3-x^2+4xy+2y^2-6y+4$
10) $z=\frac{1}{3}x^3-3x^2-4xy-2y^2-4x+20y+1$
11) $z=\frac{1}{3}x^3+4x^2+6xy+3y^2-24x+24y+2$
12) $z=\frac{1}{3}x^3+3x^2-2xy-y^2+20x+8y-4$
13) $z=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6xy+3y^2+20x-28y+4$
14) $z=x^3+8y^3-6xy+5$
15) $z=\frac{1}{3}x^3+8x^2-2xy-y^2+60x+28y+4$
16) $z=\frac{1}{3}x^3-y^2+8xy+4x^2+20y+4x$
17) $z=\frac{1}{3}y^3+2y^2+2xy+x^2+y+9x-1$
18) $z=\frac{1}{3}y^3-2y^2+2xy+x^2+4y-4x+5$
19) $z=\frac{1}{3}y^3+3y^2+4xy+2x^2+y+25x+3$
20) $z=\frac{1}{3}y^3-3y^2-4xy-2x^2-4y+20x+1$
21) $z=\frac{1}{3}y^3+4y^2+6xy+3x^2-24y+24x+2$

22) $z = \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + 6xy + 3x^2 + 20y - 28x + 4$

23) $z = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 20xy + 10y^2 + 80y + 1$

24) $z = \frac{1}{3}y^3 + 3y^2 - 2xy - x^2 + 20y + 8x - 4$

25) $z = \frac{1}{3}y^3 + 5y^2 + 12xy + 6x^2 - 60y + 60x + 6$

5. Дана функция $u = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2. Требуется

1) найти векторы $\overline{a} = \overline{M_1M_2}$; $\overline{b} = \mathbf{grad}\, u(M_1)$

2) вычислить производные функции u в точке M_1 по направлению векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Сравнить получившиеся значения.

1)	$u = x^{yz}$;	$M_1(3, 1, 4)$;	$M_2(1, -1, -1)$
2)	$u = (x^2 + y^2 + z^2)^3$;	$M_1(1, 2, -1)$;	$M_2(0, -1, 3)$
3)	$u = x^2y + y^2z - 3z$;	$M_1(0, -2, -1)$;	$M_2(12, -5, 0)$
4)	$u = (x + y)^z$;	$M_1(1, 5, 0)$;	$M_2(3, 7, -2)$
5)	$u = \frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$;	$M_1(-1, 2, -2)$;	$M_2(2, 0, 1)$
6)	$u = x^2y + y^2z + z^2x$;	$M_1(1, -1, 2)$;	$M_2(3, 4, -1)$
7)	$u = 5xy^3z^2$;	$M_1(2, 1, -1)$;	$M_2(4, -3, 0)$
8)	$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;	$M_1(-1, 2, 1)$;	$M_2(3, 1, -1)$
9)	$u = ze^{x^2+y^2+z^2}$;	$M_1(0, 0, 0)$;	$M_2(3, -4, 2)$
10)	$u = \ln(xy + yz + xz)$;	$M_1(2, 3, 1)$;	$M_2(2, 1, 3)$
11)	$u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$;	$M_1(1, 1, 1)$;	$M_2(3, 2, 1)$
12)	$u = x^2y + xz^2 - 2$;	$M_1(1, 1, -1)$;	$M_2(2, -1, 3)$
13)	$u = xe^y + ye^x - z^2$;	$M_1(3, 0, 2)$;	$M_2(4, 1, 3)$
14)	$u = 3xy^2 + z^2 - xyz$;	$M_1(1, 1, 2)$;	$M_2(3, -1, 4)$
15)	$u = 5x^2yz - xy^2z + yz^2$;	$M_1(1, 1, 1)$;	$M_2(9, -3, 9)$
16)	$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$;	$M_1(1, 2, 2)$;	$M_2(-3, 2, -1)$
17)	$u = y^2z - 2xyz + z^2$;	$M_1(3, 1, -1)$;	$M_2(-2, 1, 4)$
18)	$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$;	$M_1(1, -1, 2)$;	$M_2(5, -1, 4)$
19)	$u = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$;	$M_1(1, 1, 1)$;	$M_2(3, -5, 1)$
20)	$u = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$;	$M_1(1, 2, 1)$;	$M_2(-3, -2, 6)$
21)	$u = \ln(x^2 + y^2 + z + 1)$;	$M_1(1, 3, 0)$;	$M_2(-4, 1, 3)$
22)	$u = x - 2y + e^z$;	$M_1(-4, -5, 0)$;	$M_2(2, 3, 4)$
23)	$u = x^y - 3xyz$;	$M_1(2, 2, -4)$;	$M_2(1, 0, -3)$
24)	$u = 3x^2yz^3$;	$M_1(-2, -3, 1)$;	$M_2(5, -2, 0)$
25)	$u = e^{xy+z^2}$;	$M_1(-5, 0, 2)$;	$M_2(2, 4, -3)$

Задание N2. Двойные интегралы и их применения

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ по области D, ограниченной указанными линиями:

1)	$f(x, y) = x - y$;	$D: \ y = x^2 - 1; \ y = 3$
2)	$f(x, y) = (x + 1)y^2$;	$D: \ y = 3x^2; \ y = 3$
3)	$f(x, y) = xy^2$;	$D: \ y = x; \ y = 0; \ x = 1$
4)	$f(x, y) = x^3 + y$;	$D: \ x+y=1; \ x+y=2; \ x=1; \ x=0$
5)	$f(x, y) = xy^3$;	$D: \ y = x^2; \ y = 4x$
6)	$f(x, y) = x^3 + 3y$;	$D: \ x+y = 1; \ y = x^2-1; \ x \geq 0$
7)	$f(x, y) = x^2 + y$;	$D: \ y = x^2; \ x = y^2$
8)	$f(x, y) = xy^2$;	$D: \ y = x^2; \ y = 2x$
9)	$f(x, y) = x + y$;	$D: \ y^2 = x; \ y = x$
10)	$f(x, y) = x^2y$;	$D: \ y = 2-x; \ y = x; \ x = 0$
11)	$f(x, y) = x^3 - 2y$;	$D: \ y = x^2-1; \ y = 0$
12)	$f(x, y) = y - x$;	$D: \ y = x; \ y = x^2$
13)	$f(x, y) = 1 + y$;	$D: \ y^2 = x; \ 5y = x$
14)	$f(x, y) = x + y$;	$D: \ y = x^2-1; \ y = -x^2+1$
15)	$f(x, y) = x(y - 1)$;	$D: \ y = 5x; \ y = x; \ x = 3$
16)	$f(x, y) = (x - 2)y$;	$D: \ y = x; \ y = \frac{1}{2}x; \ x = 2$
17)	$f(x, y) = x - y^2$;	$D: \ y = x^2; \ y = 1$
18)	$f(x, y) = x^2y$;	$D: \ y = 2x^3; \ y = 0; \ x = 1$
19)	$f(x, y) = x^2 + y^2$;	$D: \ x = y^2; \ x = 1$
20)	$f(x, y) = xy$;	$D: \ x = 2; \ y = 0; \ y = x^3$
21)	$f(x, y) = x + y$;	$D: \ y = x^3; \ y = 8; \ y = 0; \ x = 2$
22)	$f(x, y) = x(2x + y)$;	$D: \ y = 1-x^2; \ y = 0$
23)	$f(x, y) = y(1 - x)$;	$D: \ y^3 = x; \ y = x$
24)	$f(x, y) = xy^3$;	$D: \ y^2 = 1-x; \ x = 0$
25)	$f(x, y) = x(y + 5)$;	$D: \ y = x+5; x+y+5 = 0; x = 0$

2. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты:

1) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$

3) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ 4) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$

5) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 6) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

7) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 8) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

9) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ 10) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

11) $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dx$ 12) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xydy}{x^2+y^2}$

13) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy$ 14) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{tg}(x^2+y^2)dy$

15) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$ 16) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dy$

17) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$ 18) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)dy$

19) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$ 20) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ 22) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

23) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy$

24) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy\,dy}{x^2+y^2}$ 25) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)dy$

3. Задачи на применение двойных интегралов.

1) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=10+x^2+2y^2$; $y=x$; $x=1$; $z=-1$; $y=0$.

2) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2=x$; $x=3$; $z=x$; $z=0$.

3) Найти объем тела, ограниченнего поверхностями: $z=x^2+2y^2$; $y=x$; $x=0$; $y=1$; $z=0$.

4) Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной линиями: $y^2=x$; $x=3$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x,y)=x$.

5) Вычислить массу неоднородной пластинки D, ограниченной линиями $x+y=1$; $x=0$; $y=0$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x,y)=x^2$.

6) Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной линиями: $y=2\sqrt{x}$; $x+y=3$; $y=0$ относительно оси OX.

7) Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной линиями $x=0$; $x=3$; $y=0$; $y=7$, относительно начала координат.

8) Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями: $y=x^2$; $y=2$.

9) Найти центр тяжести плоской фигуры D, ограниченной линиями $y^2=ax$; $y=x$.

10) Вычислить центр тяжести верхнего полукруга $x^2+y^2=a^2$, отсеченного осью OX.

11) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=3(1+\cos\varphi)$.

12) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho=2$; $\rho\cos\varphi=1$ (вне т.0).

13) Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho=a\sin 2\varphi$.

14) Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

15) Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho^2=3\cos 2\varphi$.

16) Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho=5\cos 3\varphi$.

17) Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho=4\sin 3\varphi$.

18) Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной линиями: $x=2$; $y=x^2$; $y=0$ относительно оси OY.

19) Найти центр тяжести фигуры, ограниченой линиями: $y^2=x$; $y=x^2$.

20) Найти статический момент однородного полукруга радиуса $R=2$ относительно диаметра.

21) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=4-x^2-y^2$; $z=0$.

22) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$; $y=x^2$; $y=1$; $z=0$.

23) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=1$; $z=x+3$; $z=0$.

24) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$; $x+y=1$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

25) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=1-x^2$; $x+y=1$; $y=2x$; $z=0$.

Задание N3. Криволинейные интегралы и их применения

1. Вычислить криволинейные интегралы I-го рода (по дуге).

1) $\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)\,dl$, где L_{OAB} – контур треугольника с вершинами $O(0,0)$; $A(-1,0)$; $B(0,1)$. 2) $\int\limits_{L} xy\,dl$, где L – четверть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3) $\int\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2y$.

4) $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами: $O(0,0)$; $A(5,0)$; $B(5,3)$; $C(0,3)$.

5) $\int\limits_{L} (x^2+y^2)\,dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4x$.

6) $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}\right) dl$, где L_{AB} – дуга астроиды: $x=\cos^3 t$; $y=\sin^3 t$ между точками $A(1,0)$ и $B(0,1)$.

7) $\int\limits_{L} xy\,dl$, где L – контур квадрата со сторонами: $x=\pm 1$; $y=\pm 1$.

8) $\int\limits_{L} y^2\,dl$, где L – первая арка циклоиды: $x=t-\sin t$; $y=1-\cos t$.

9) $\int\limits_{L_{ABCD}} xy\,dl$, где L_{ABCD} – контур прямоугольника с вершинами: $A(2,0)$; $B(4,0)$; $C(4,3)$; $D(2,3)$.

10) $\int\limits_{L} \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right) dl$, где L – дуга кривой: $x=t\cos t$; $y=t\sin t$; $z=t$; $0\le t\le 2\pi$.

11) $\int\limits_{L} (x^2+y^2)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4$.

12) $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где L_{OB} – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0,0)$ и $B(2,2)$.

13) $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right) dl$, где L_{AB} – отрезок прямой AB: $A(-1,0)$; $B(0,1)$.

14) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключенный между точками $A(0,4)$ и $B(4,0)$.

15) $\int\limits_{L} \frac{y\,dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где L – дуга кардиоиды $\rho=2(1+\cos\varphi)$ $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

16) $\int\limits_{L_{AB}} y\,dl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, заключенной между точками $A(1,0)$ и $B(0,1)$.

17) $\int\limits_{L} \frac{dl}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, соединяющий точки $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

18) $\int\limits_{L} (x^2+y^2+z^2)dl$, где L – дуга кривой $x=\cos t$; $y=\sin t$; $z=\sqrt{3}t$; $0\le t\le 2\pi$.

19) $\int\limits_{L} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, где L – дуга кардиоиды: $\rho=(1+\cos\varphi)$; $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

20) $\int\limits_{L} \sqrt{2y}\,dl$, где L – первая арка циклоиды: $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$; $0\le t\le 2\pi$.

21) $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L_{OA} – отрезок прямой, соединяющей $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

22) $\int\limits_{L} (x-y)\,dl$, где L – окружность: $x^2+y^2=2x$.

23) $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами: $O(0,0)$; $A(4,0)$; $B(4,2)$; $C(0,2)$.

24) $\int\limits_{L_{ABO}} (x+y)\,dl$, где L_{ABO} – контур треугольника с вершинами $A(1,0)$; $B(0,1)$; $C(0,0)$.

25) $\int\limits_{L} \frac{z^2\,dl}{x^2+y^2}$, где L – первый виток винтовой линии: $=2\cos t$; $y=2\sin t$; $z=2t$; $0\le t\le 2\pi$.

2. Вычислить данные криволинейные интегралы II-го рода (по координатам).

1) $\int\limits_{L_{AB}} xy\,dx + (y-x)\,dy$, где L_{AB} – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

2) $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2+y^2)\,dx + (x+y^2)\,dy$, где L_{ABC} – ломанная ABC: $A(1,2)$; $B(3,2)$; $C(3,5)$.

3) $\int\limits_{L_{OB}} xy^2\,dx + yz^2\,dy - x^2z\,dz$, где L_{OB} – отрезок прямой OB: $O(0,0,0)$; $B(-2,4,5)$.

4) $\int\limits_{L_{AB}} y\,dx + x\,dy$. где L_{OA} – дуга окружности: $x=R\cos t$; $y=R\sin t$, $0\le t\le\pi$.

5) $\int\limits_{L_{OA}} xy\,dx + (y-x)\,dy$, где L_{OA} – дуга параболы $y^2=x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

6) $\int\limits_{L_{AB}} x\,dx + y\,dy + (x-y+1)\,dz$, где L_{AB} – отрезок прямой AB: $A(1,1,1)$; $B(2,3,4)$.

7) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx + x^2y\,dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y^2=4-4x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

8) $\int\limits_{L_{OB}} xy\,dx + (y-x)\,dy$, где L_{OB} – дуга параболы $y=x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

9) $\int\limits_{L_{OB}} (xy-y^2)\,dx + x\,dy$, где L_{OB} – дуга параболы $y=x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

10) $\int\limits_{L_{AB}} x\,dy - y\,dx$, где L_{AB} – дуга астроиды: $x=2\cos^3 t$; $y=2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

11) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)\,dx + \frac{1}{2}x^2\,dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y^2=4x$ от точки $A(0.0)$ до точки $B(1,2)$.

12) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx + x^2y\,dy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB: $A(1,0)$; $B(0,2)$.

13) $\int\limits_{L_{AB}} 2xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, где L_{AB} – дуга одного витка винтовой линии $x=\cos t$; $z=2t$; $y=\sin t$; $A((1,0,0)$; $B(1,0,4\pi)$.

14) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}\,dx + x\,dy$, где L_{AB} – дуга линии $y=\ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

15) $\oint\limits_{L} y\,dx - x\,dy$, где L – дуга эллипса, пробегаемая в положительном направлении обхода: $x=3\cos t$; $y=2\sin t$.

16) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.

17) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} – дуга астроиды: $x=2\cos^3 t$; $y=2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

18) $\int\limits_{L_{OA}} (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$, где L_{OA} – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

19) $\oint\limits_{L} (x+2y)\,dx + (x-y)\,dy$, где L – окружность $x=2\cos t$; $y=2\sin t$, при положительном направлении обхода.

20) $\oint\limits_{L} (x^2y-x)\,dx + (y^2x-2y)dy$, где L – эллипс: $x=3\cos t$; $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

21) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx + x^2y\,dy$, где L_{AB} – дуга эллипса: $x=\cos t$; $y=2\sin t$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

22) $\int\limits_{L_{OBA}} 2xy\,dx - x^2\,dy$, где L_{OBA} – ломанная OBA: $O(0,0)$; $B(2,0)$; $A(2,1)$.

23) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2-y^2)\,dx + xy\,dy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB: $A(1,1)$; $B(3,4)$.

24) $\int\limits_{L_{AB}} \cos y\,dx - \sin x\,dy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB: $A(2\pi,-2\pi)$; $B(-2\pi,2\pi)$.

25) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, где L_{AB} – отрезок прямой AB: $A(1,2)$; $B(3,6)$.

3. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$ и найти эту функцию.

1) $\dfrac{1-y}{x^2y}dx + \dfrac{1-2x}{xy^2}dy$

2) $\left(\dfrac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\dfrac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5\right)dy$

3) $-(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$

4) $(y^2e^{xy^2} + 3)dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy$

5) $\left(\dfrac{1}{x+y} + \cos x\cos y - 3x^2\right)dx + \left(\dfrac{1}{x+y} - \sin x\sin y + 4y\right)dy$

6) $\left(\dfrac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \dfrac{x}{y} + 1\right)dy$

7) $(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin y)dy$

8) $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}} + 2x\right)dx + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}} + 6y\right)dy$

9) $(e^{xy} + xye^{xy} + 2)dx + (x^2e^{xy} + 1)dy$

10) $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$

11) $(y\cos(xy) + 2x - 3y)dx + (x\cos(xy) - 3x + 4y)dy$

12) $(y\sin(x+y) + xy\cos(x+y) - 9x^2)dx +$
$+(x\sin(x+y) + xy\cos(x+y) + 2y)dy$

13) $(5y + \cos x + 6xy^2)dx + (5x + 6x^2y)dy$

14) $(y^2e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$

15) $(1 + \cos(xy))y\,dx + (1 + \cos(xy))x\,dy$

16) $(y - \sin x)dx + (x - 2y\cos y^2)dy$

17) $\left(\sin 2x - \dfrac{1}{x^2y}\right)dx - \dfrac{1}{xy^2}dy$

18) $\dfrac{x+y}{xy}dx + \dfrac{y-x}{y^2}dy$

19) $(20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$

20) $(ye^{xy} - 2\sin x)dx + (xe^{xy} + \cos y)dy$

21) $\dfrac{x\ln y + y}{x}dx + \dfrac{y\ln x + x}{y}dy$

22) $e^{x-y}(1 + x + y)dx + e^{x-y}(1 - x - y)dy$

23) $(3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$

24) $(2xe^{x^2-y^2} - \sin x)dx + (\sin y - 2ye^{x^2-y^2})dy$

25) $\left(\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{y}{(x-1)^2} - 2\right)dx + \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{(y-1)^2} + 2y\right)dy$

4. Задачи на применение криволинейных интегралов.

1) Вычислить работу силы $\overline{F}=yi+(x+y)j$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $M(1,1)$ по параболе $y=x^2$.

2) Вычислить статические моменты относительно координатных осей дуги астроиды $x=2\cos^3 t$; $y=2\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.

3) Найти работу силы $\overline{F}=xi+(x+y)j$ при перемещении материальной точки по дуге эллипса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

4) Вычислить работу силы $\overline{F}=(x+y)i-xj$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x=2\cos t$; $y=2\sin t$ по ходу часовой стрелки.

5) Найти работу силы $\overline{F}=xyi+(x+y)j$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $A(1,1)$ по ломаной, проходящей через точки $O(0,0)$; $B(1,0)$ $A(1,1)$, звенья которой параллельны осям координат.

6) Найти массу дуги AB кривой $y=\ln x$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки ($\delta=kx^2$; $x_A=1$; $x_B=3$).

7) Вычислить момент инерции относительно координатных осей дуги четверти окружности $x=2\cos t$; $y=2\sin t$, лежащей в первом квадранте.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x=4\cos t$; $y=3\sin t$.

9) Найти момент инерции относительно начала координат четверти окружности $x=3\cos t$; $y=3\sin t$, лежащей в первом квадранте.

10) Вычислить работу силы $\overline{F}=xyi+(x+y)j$ при перемещении материальной точки по прямой $y=x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

11) Вычислить статический момент относительно оси OX однородной дуги цепной линии $y=(e^x+e^{-x})/2$; $x\in[0,\frac{1}{2}]$.

12) Вычислить работу силы $\overline{F}=(x-y)i+xj$ при перемещении материальной точки вдоль квадрата, образованного прямыми: $x=\pm 1$; $y=\pm 1$.