ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ №3-4

по дисциплине «Теория измерений» для студентов направления 200100.62 «Приборостроение» (профиль «Приборостроение») очной и заочной форм обучения

Воронеж 2013

Составитель канд. техн. наук А.С. Самодуров

УДК 621.317.08

Методические указания к лабораторным работам №3-4: по дисциплине «Теория измерений» для студентов направления 200100.62 «Приборостроение» (профиль «Приборостроение») очной и заочной форм обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.С. Самодуров, Воронеж, 2014. 29 с.

Методические указания предусматривают закрепление теоретических знаний и приобретение практических навыков по статистической обработке результатов измерений, содержащих случайные ошибки (при отсутствии или наличии ошибок систематических), в том числе навыков использования статистических таблиц и критериев.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MSWord 2003 и содержатся в файле МУЛабТИ34.doc

Табл. 12. Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. В.С. Скоробогатов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р. техн. наук, проф. А.В. Муратов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой «Теория измерений». Учитывая разнообразие инженерных задач, встающих перед выпускниками направления 200100.62 «Приборостроение», признано целесообразным не усложнять практикум измерениями с помощью специальных технических средств (в соответствии с определением термина «измерение» в метрологии), заменив их моделированием процесса измерения «измерениями на глаз», а также математическим экспериментом с помощью таблиц равномерно и нормально распределенных чисел. Опыт показывает, что таким моделированием достигается необходимая наглядность и оперативность, суть же и порядок статистической обработки при этом сохраняются.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Прежде чем приступить к выполнению предлагаемых работ, студенту необходимо ознакомиться с основными теоретическими положениями.

Студент допускается к выполнению работ после предварительного опроса по их содержанию и порядку выполнения.

Требования к отчету изложены в каждой работе. В работах, кроме общего, предусмотрено выполнение индивидуальных заданий по указанию преподавателя.

РАБОТА 3

МНОГОКРАТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПОСТОЯННОГО РАЗМЕРА

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Убедиться в случайном характере результата отдельного измерения, оценки среднего квадратичного отклонения (СКО) и результата многократных измерений.
- Освоить основные приемы статистической обработки результатов многократных измерений:
  - построение вариационного ряда, гистограммы частот;
  - нахождение среднего арифметического, медианы, моды; проверка гипотезы о виде закона распределения по виду гистограммы;
  - вычисление оценки СКО измерений и оценки СКО среднего арифметического;
  - построение доверительного интервала для неизвестного истинного значения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При многократных измерениях (число измерений п >4) физической величины (ФВ) постоянного размера за результат измерений обычно принимается среднее арифметическое (СА):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}. \qquad (1)$$

Иногда, вместо СА, используют медиану при нечетном числе измерений:

$$\bar{X}_{Me} = X_{\frac{n+1}{2}}, \qquad (2)$$

а при четном пользуются формулой

$$\bar{X}_{Me} = \frac{\left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right)}{2}, \qquad (2.1)$$

причем предварительно результаты измерений X_i располагают в неубывающем порядке (такой ряд измерений называется вариационным)

$$X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n.$$

Реже используется мода $\bar{X}_{Mo}$ как значение, соответствующее максимуму гистограммы.

Все эти оценки определяются по выборке и выражаются одним числом, то есть точкой на числовой оси, и называются точечными выборочными оценками.

Важными характеристиками точечных оценок являются следующие:

- Несмещенность: оценка (например $\bar{X}$) параметра ($X_{\text{ист}}$) называется несмещенной, если ее математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром ($X_{\text{ист}}$).
- Состоятельность: оценка называется состоятельной, если с увеличением объема выборки *n* (числа измерений) вероятность того, что оценка сходится к истинному значению, возрастает и стремится к единице при объеме выборки, стремящемся к бесконечности.
- Эффективность: оценка называется эффективной, если она обладает минимальной дисперсией по сравнению с другими оценками.

Чаще всего используется среднее арифметическое. Оно обладает весьма важными преимуществами перед другими оценками:

1) при любом законе распределения ошибок (с конечными математическим ожиданием и дисперсией) СА является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания (истинного значения).

2) дисперсия СА в *n* раз меньше дисперсии отдельных результатов измерений, то есть дисперсии ошибок;

3) в случае нормального распределения ошибок измерений СА является эффективной оценкой математического ожидания;

4) в случае нормального распределения ошибок измерений СА распределено нормально, а при других распределениях ошибок — асимптотически нормально, то есть быстро сходится к нормальному с ростом числа измерений (увеличением объема выборки).

Последнее свойство позволяет применять для большинства распределений богатый статистический аппарат, разработанный лучше всего для нормального распределения.

Найденное по выборке случайных величин $\bar{X}$ является случайной величиной.

Разность между ним и неизвестным истинным значением $\Delta = \bar{X} - X_{\text{ист}}$, называемая в метрологии погрешностью, остается неизвестной (эта разность также случайная величина, ее правильнее называть ошибкой среднего арифметического). Если бы дисперсия σ_X^2 случайной величины X была известна, то дисперсия $\sigma_{\bar{X}}^2$ СА, вычисленного по выборке объема n , была бы тоже известна: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$.В этом случае можно было бы построить доверительный интервал для $X_{\text{ист}}$:

$$\bar{X} - U\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}} \leq X_{\text{ист}} \leq \bar{X} + U\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}},$$

где $\sigma_{\bar{X}}$ — СКО среднего арифметического; $U\alpha_{/2}$— квантиль (критическое значение) нормального нормированного распределения, соответствующая двухстороннему уровню значимости α (или доверительной вероятности $P_{\text{д}} = 1 - \alpha$).

В приложении даны таблицы интегральной и дифференциальной функций нормированного нормального распределения (табл. 1 и 2).

При неизвестной дисперсии $\sigma_{\bar{X}}^2$ (и неизвестном истинном значении $X_{\text{ист}}$) ее точечной несмещенной и состоятельной, а при нормальном распределении ошибок и эффективной оценкой является выборочная оценка дисперсии

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}. \qquad (3)$$

Обычно пользуются корнем квадратным из выражения (3) для вычисления оценки СКО по выборке:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}, \qquad (4)$$

хотя это выражение не вполне строго и S_X по (4) в качестве оценки СКО является смещенной. Более точное, хотя и тоже приближенное выражение для опенки СКО имеет вид

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1,5}}. \qquad (5)$$

Для оценки СКО среднего арифметического $S_{\bar{X}}$ — получаем из (4)

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}. \qquad (6)$$

Для построения доверительного интервала для $X_{ист}$ воспользуемся соотношением, называемым дробью Стьюдента, которое имеет *t*-распределение

$$\frac{\bar{X} - X_{\text{ист}}}{S_{\bar{X}}} = t.$$

Пользуясь таблицами *t*-распределения (табл. 3 прил.) можем построить доверительный интервал для истинного значения $X_{ист}$

$$\bar{X} - t_{\alpha/2,v} S_{\bar{X}} \le X_{\text{ист}} \le \bar{X} + t_{\alpha/2,v} S_{\bar{X}}, \qquad (7)$$

где $t_{\alpha/2,v}$ — квантили t-распределения при уровне значимости $\alpha/2$, то есть доверительной вероятности $P_{\text{д}} = 1 - \alpha$, и числе степеней свободы (числе независимых слагаемых в (4) и (6)) $v = n - 1$.

Интервал $t_{\alpha/2,v} S_{\bar{X}}$ — в метрологии называется доверительной случайной погрешностью.

Доверительным интервалом по выражению (7) в метрологии пользуются, когда ошибки измерений имеют нормальное распределение. В данной работе предлагается визуально по гистограмме проверить гипотезу о нормальности распределения.

Если установить вид распределения не удается, что бывает при малом объеме выборки, погрешность результата измерения можно оценить с помощью неравенства Чебышева:

$$P_{\text{д}}\{|X_{\text{ист}} - \bar{X}| < \varepsilon\} \geq \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\varepsilon^2}. \qquad (8)$$

Задаваясь значением P_∂ и приравнивая его к правой части (8), находим соответствующее значение ε.

Например, пусть $P_{\text{д}}$= 0,90. Тогда

$$P_{\text{д}}\{|X_{\text{ист}} - \bar{X}| < \varepsilon\} = 0{,}90 = 1 - \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\varepsilon^2}\ ;$$

$$\varepsilon^2 = 10\sigma_{\bar{X}}^2\ ;$$

$$\varepsilon = 3{,}2\sigma_{\bar{X}}\ ;$$

то есть интервал $\bar{X} \pm 3{,}2\sigma_{\bar{X}}$ с вероятностью, большей или равной 0,90, накрывает неизвестное истинное значение.

Поскольку $\sigma_{\bar{X}}$ обычно неизвестно, вместо него используют выборочную оценку $S_{\bar{X}}$. При этом, однако, нельзя утверждать, что интервал $\bar{X} \pm 3{,}2\sigma_{\bar{X}}$ накроет неизвестное истинное значение с вероятностью, большей или равной заданной, так как $S_{\bar{X}}$ - является случайной величиной и может быть больше $\sigma_{\bar{X}}$ (тогда вероятность накрытия $X_{ист}$ будет больше заданной) или меньше (тогда вероятность будет меньше). Можно лишь надеяться, что вероятность накрытия не слишком отличается от заданной. Строго говоря, это же замечание относится и к доверительному интервалу (7), если он определен по единственной выборке, как это обычно имеет место в метрологии.

Среднее арифметическое весьма чувствительно к промахам (грубым ошибкам), то есть не является робастной (устойчивой) оценкой, такой результат подлежит исключению. Прежде всего таковыми могут оказаться X_{min} или X_{max}. При нормальном распределении случайных ошибок измерений вопрос об исключении отдельного результата решается с помощью статистических критериев. Вычислив предварительные оценки $\bar{X}$ и S_X, можно проверить X_{min} и X_{max} по статистике для резко выделяющихся наблюдений:

$$v = \frac{X_{max} - \bar{X}}{S_X} \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \qquad (9)$$

или

$$v = \frac{\bar{X} - X_{min}}{S_X} \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \qquad (10)$$

Вычисленные по формуле (9 или 10) значения статистики v следует сравнить с критическим (предельным для данной статистики) значением, приведенным в табл. 4 приложения (для уровня значимости α=0,05). Если вычисленное значение v превышает v_{Kp}, результат признается промахом и должен быть отброшен. После исключения промаха вычисления $\bar{X}$ и S_x производятся заново без учета отброшенного результата.

Для построения гистограммы вариационный ряд разбивают на интервалы одинаковой, произвольной или специальным образом выбираемой длины. В простейшем случае берутся интервалы одинаковой длины.

Число результатов отдельных измерений в каждом интервале n_k называется частотой попадания в k-й интервал, а относительная частота $\frac{n_k}{n}$ называется частостью, где n — общее число измерений. Если отложить по оси абсцисс границы интервалов, а по оси ординат — частоты или частости, то можно построить график в виде прямоугольников, ширина которых равна длине интервала, а высота — соответствующей частоте или частости. Такой график называется гистограммой частот или гистограммой частостей соответственно. На гистограмме частот сумма всех высот прямоугольников равна n, а на гистограмме частостей — единице. Существует также гистограмма статистического распределения. Для ее построения по оси ординат откладывают значения $\frac{n_k}{n\Delta X_k}$, где ΔX_k - длина k-го интервала. Сумма площадей всех прямоугольников на гистограмме статистического распределения равна единице.

Если длины всех интервалов одинаковы (ΔX_k = const), все три гистограммы совпадут при соответствующем выборе масштаба по оси ординат. Построив любую из гистограмм с интервалами одинаковой длины, можно по ее общему виду сделать предварительное заключение о возможном виде закона распределения. Это заключение будет более надежным, если на гистограмму нанести и теоретические значения частот, частостей или дифференциальной функции распределения, соединив их плавной кривой. При этом теоретические значения следует относить к серединам интервалов. Теоретические значения вычисляются в соответствии с предполагаемым законом распределения, в котором неизвестные параметры заменяются, их выборочными оценками.

В данной работе предлагается по гистограмме частостей с интервалами одинаковой длины $\Delta X_k = h$ (h — называется так же шагом гистограммы) проверить предположение о нормальном законе распределения результатов отдельных измерений. Частость есть оценка вероятности попадания результата в k-й интервал.

Теоретическая вероятность $P_к$ может быть вычислена по формуле

$$P_k = P\{X_k < X < X_{k+1}\} = \Phi(Z_{k+1}) - \Phi(Z_k), \qquad (11)$$

где X_k, X_{k+1} - нижняя и верхняя границы k-то интервала;

$Z_k = \frac{X_k - \bar{X}}{S_X}$; $\Phi(Z_k)$ - значение интегральной функции нормированного нормального распределения для $Z = Z_к$ (табл. 1 прил.).

В заключительной части работы предлагается обработать как самостоятельные выборки 4 подмассива одинакового объема. Построение гистограмм для подмассивов теряет смысл из-за малости их объема. Вид закона распределения предлагается считать неизвестным (но с конечными математическим ожиданием и дисперсией) и для построения доверительного интервала воспользоваться неравенством Чебышева. Для вычисления оценки СКО применить формулу

$$S_j = \frac{W_{n,j}}{d_n}, \tag{12}$$

где $W_{nj} = X_{max,j} - X_{min,j}$; j - номер подмассива; n - объем подмассива; d_n - табулированный коэффициент (табл. 5 прил.).

3.ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Визуальное «измерение» роста (1-е занятие)

3.1.1. Записать результат своей оценки роста студента (по выбору преподавателя), не обмениваясь мнениями с другими студентами.

3.1.2. По результатам наблюдений всех студентов сформировать выборку значений «многократных измерений на глаз».

3.1.3. Для более полного представления о случайных ошибках результатов измерений построить вариационный ряд и гистограмму частостей.

Шаг гистограммы принять равным

$$h \approx {}^{W_n}\!/_{r},$$

где W_n — размах варьирования: $W_n = X_{max} - X_{min}$, а r — число интервалов (r = 5 или 6). Для построения гистограммы данные представить в виде табл. А.

3.1.4. Определить по вариационному ряду медиану, используя формулу (2) или (2.1).

3.1.5. По общему виду гистограммы проверить предположение о нормальности закона распределения. Провести «на глаз» плавную колоколообразную кривую.

3.1.6. Вычислить точечные оценки параметров распределения по формулам (1) и (4).

3.1.7. Вычислить по формуле (11) теоретические значения вероятности попадания результатов отдельных измерений в k-й интервал, заполнить табл. В. Нанести на гистограмму график теоретической вероятности попадания в к-й интервал и сравнить с плавной кривой, проведенной «на глаз», и с самой гистограммой.

Таблица А - Данные для построения гистограммы

Номер инт. k	Интервал		Среднее значение в интервале	Число значений в интервале n_k (частота)	Частость $\frac{n_k}{n}$
	Начало	Конец			
1	X_{min}	$h + X_{min}$	$X_{min} + h/2$	n_1	$\frac{n_1}{n}$
2	$h + X_{min}$	$2h + X_{min}$	$X_{min} + 3h/2$	n_2	$\frac{n_2}{n}$
…					
r		X_{max}		n_r	$\frac{n_r}{n}$

Подтвердить или отвергнуть предположение о нормальном законе распределения.

Таблица В - Данные для построения кривой теоретических вероятностей

Номер границы инт. k	Значение границы интервала	$Z_k = \frac{X_k - \bar{X}}{S_X}$	$\Phi(Z_k)$ (табл.1 прил.)	$P_k = \Phi(Z_{k+1}) - \Phi(Z_k).$
1				
2				
…				
r+1				

3.1.8. Если распределение признано нормальным, проверить массив данных по критериям (9), (10). Исключить обнаруженные промахи и повторить обработку по пп. 3.1.2. — 3.1.7.

3.1.9. Построить доверительный интервал для неизвестного истинного значения $X_{ист}$, воспользовавшись выражением (7), если гипотеза о нормальности распределения не отвергнута, или неравенством Чебышева (8), если она не может быть принята (отвергается). При этом взять P_{∂} = 0,90.

3.1.10. Записать результат и вывод по работе.

3.2. Обработка массива случайных чисел (2-е занятие)

3.2.1. Получить у преподавателя индивидуальное задание — выборку (массив), разделенную на подвыборки (подмассивы) равного объема.

3.2.2. Провести обработку всего массива по схеме, изложенной в пп. 3.1.3. — 3.1.10.

3.2.3. Для каждого подмассива вычислить $\bar{X}_j$, j = 1,2,3,4, найти оценку СКО подмассива по размаху варьирования (12) и сделать заключение о характере оценок.

3.2.4. Пользуясь неравенством Чебышева (8) для P_{∂} = 0,90, построить доверительные интервалы для неизвестного истинного значения каждой подвыборки, сравнить их между собой и с результатом для всей выборки.

3.2.5. Сделать вывод.

4.СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Название и цель работы.

4.2. Краткие теоретические сведения.

4.3. Массив экспериментальных данных.

4.4. Вариационный ряд.

4.5. Размах варьирования и шаг гистограммы. Таблица данных для построения гистограммы (табл. А).

4.6. На гистограмме пунктиром провести плавную кривую, сглаживающую гистограмму. Сделать вывод о нормальности распределения ошибок измерений (результатов отдельных измерений).

4.7. Расчетные формулы и результаты вычислений. Значения $\bar{X}$, $\bar{X}_{Me}, \bar{X}_{Mo}$, S_X, $S_{\bar{X}}$.

4.8. Теоретическая кривая вероятности попадания результата отдельного измерения в k-й интервал (11) в виде табл. В и сплошной линии на гистограмме. Вывод по результатам проверки закона распределения.

4.9. Проверка на промахи для уровня значимости α=0,05 и вывод о наличии промахов (при обнаружении таковых).

4.10. Повторные вычисления $\bar{X}$, $\bar{X}_{Me}$, S_X, $S_{\bar{X}}$ после исключения промахов.

4.11. Доверительный интервал для $X_{ист}$ (погрешность $\bar{X}$) по выражениям (7) или (8).

4.12. Результат многократных измерений в виде $X_{\text{ист}} = \bar{X} \pm \Delta$, $P_{\text{Д}} = 0{,}90$, n=... Вид распределения — нормальное (не установлен).

4.13. Обработка подмассивов:

- средние значения $\bar{X}_j$, показать в выводе случайный характер $\bar{X}_j$;
- оценки S_j по размаху варьирования, вывод о случайном характере S_j;
- доверительные интервалы Чебышева (8) для подмассивов (в численном и графическом виде).

4.14. Окончательные результаты и выводы по работе.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что чаще всего принимается за результат измерения?
2. Какие требования предъявляются к точечным оценкам?
3. Что такое вариационный ряд?
4. Что такое мода?
5. Преимущества среднего арифметического?
6. Что делать, если установить вид распределения не

удается?
7. Что используется вместо $\sigma_{\bar{X}}$ при обработке результатов?
8. Как отбросить грубые ошибки (промахи)?
9. Как сделать предварительное заключение о виде распределения?

РАБОТА 4

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Освоить основные методы и приемы проверки гипотезы о виде закона распределения результатов отдельных измерений методом линеаризации интегральной эмпирической функции распределения (метод вероятностной бумаги) с помощью критерия Колмогорова и критерия согласия χ^2 на примере нормального распределения.
- Получить представление о надежности статистических выводов и важности априорной информации.

2.ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При обработке экспериментальных данных и определении погрешности результатов измерений, основополагающим является допущение о нормальности закона распределения ошибок измерений. Эго допущение должно быть подтверждено. В работе 1 вывод о нормальности закона распределения делается визуально, то есть субъективно. Сглаживание гистограммы осуществляется интуитивно так, что построенные зависимости соответствуют кривым нормального распределения. Более объективными являются методы, использующие вероятностную бумагу и статистические критерии.

2.1. Использование вероятностной бумаги

Вероятностной называется бумага для построения графика интегральной функции распределения, у которой масштаб по оси абсцисс равномерен, а по оси ординат — неравномерен (кроме равномерного распределения) и соответствует проверяемому закону распределения. График интегральной функции распределения превращается на соответствующей вероятностной бумаге в прямую линию. Установить прямолинейность проще, чем определить соответствие (близость) двух плавных кривых.

Существуют нормальная, логарифмически нормальная и т.д. вероятностные бумаги. При отсутствии вероятностной бумаги и в случае равномерного распределения пользуются обычной миллиметровой, вычисляя значения ординат в соответствии с проверяемым законом распределения.

Для проверки гипотезы о виде закона распределения необходимо расположить результаты измерений в неубывающем порядке, то есть построить вариационный ряд измерений:

$$-\infty < X_1, < X_2,, < \ldots. < X_n < +\infty.$$

Получаем (n+1) интервал:

$$(-\infty < X_1), (X_1, X_2), \ldots, (X_{n-1}, X_n),\ (X_n, \infty).$$

Поставив в соответствие каждому значению X_i вариационного ряда в качестве оценки функции распределения $F(X) i/(n+1)$-ю долю эмпирической функции распределения и пользуясь таблицами предполагаемого закона распределения, находят теоретические значения аргумента, соответствующие значениям, полученным в опыте для оценки интегральной функции $F_n(X_i)$. Например, предполагая распределение нормальным при $n = 7$ для X_i, для вычисленного значения $F_1(X_1) = 1/8 = 0{,}125$ по табл. 1 приложения находим Z_1=-1,150, для $F_7(X_2) = 2/8 = 0{,}250$ находим Z_2 =-0,674 и т.д. Поскольку между Z_i и X_i существует линейная связь $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_X}$ (при неизвестных ц и а заменяем их выборочными точечными оценками), вычислять соответствующие теоретические значения $X_{теор}$ нет необходимости, так как характер графика не изменится, если по оси ординат мы отложим значения Z_1, Z_2 и так далее, а соответствующие им опытные значения X_1, X_2 и так далее отложим по оси абсцисс. Расположение точек на графике вдоль прямой линии подтверждает линейную зависимость между экспериментальными значениями измерений X_i и теоретическими Z_i, что свидетельствует о возможности принятия гипотезы о виде закона распределения.

Проведя на глаз прямую линию через точки, можно приближенно найти оценки $\bar{X}_{гр}$, $S_{X,гр}$ значений $X_{ист}$, σ. Значение абсциссы в точке пересечения ее с построенной прямой равно $\bar{X}_{\text{гр}}$. Значение $S_{X,гр}$ можно найти по углу наклона прямой. Эти оценки, как и само установление факта прямолинейности, являются приближенными. Однако близость графических оценок к вычисленным значениям $\bar{X}$ и S_X (смотри работу 1) является подтверждением правильности гипотезы о законе распределения.

2.2. Использование критерия Колмогорова

Для определения допустимых отклонений эмпирической функции распределения от теоретической существуют непараметрические (свободные от распределения) критерии Колмогорова, Смирнова и другие.

В табл. 6 прил. даны критические значения статистики Колмогорова (Колмогорова-Смирнова), определяющие максимальное расстояние по модулю между эмпирической и теоретической функциями при α=0,10 и α=0,05 для разных n.

Пользуясь табл. 6 прил. можно построить доверительную зону для теоретической функции распределения $F(X)$:

$$P\left(D_n \le D_{n,\text{кр}}\right) = P\left(|F_n(X_i) - F(X)| \le D_{n,\text{кр}}\right) = P_{\text{Д}},$$

тогда

$$P\left(F_n(X_i) - D_{n,\text{кр}} \le F(X) \le F_n(X_i) + D_{n,\text{кр}}\right) = P_{\text{Д}}. \quad (1)$$

Из табл. 6 прил. видно, что доверительная зона очень широка при малых n и убывает с ростом n довольно медленно, следовательно, для надежного установления вида закона распределения требуются выборки большого объема.

Более наглядное представление о критерии Колмогорова можно получить, построив график эмпирической функции распределения, на который наносится также теоретическая интегральная функция, соответствующая проверяемому закону распределения. При этом, как и ранее, при неизвестных μ и σ используют их выборочные точечные оценки. Найденное по графику во всем интервале значений X_i. максимальное отклонение эмпирической функции от теоретической D_{max} сравнивается с допустимым значением $D_{n,\text{кр}}$. Гипотеза отклоняется, если $D_{max}>D_{n,\text{кр}}$.

2.3. Использование критерия согласия χ^2

При объеме выборки $n>40$ для проверки гипотезы о виде распределения применяют критерий согласия χ^2 (критерий Пирсона). Он применяется для группированных данных (как при построении гистограммы), когда в каждом интервале находится не менее 5 измерений. Если число измерений в интервале оказывается меньше 5, этот интервал объединяют с соседним. Критерий согласия χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k} \le \chi^2_{v,\text{кр}}, \qquad (2)$$

где $n_к$ — число данных в k-м интервале (k=1,2,...,r); $P_к$ —теоретическая вероятность попадания случайной величины X_i в k-й интервал, равная при нормальном законе

$$P_k = \int_{X_k}^{X_{k+1}} f(x)dx = \Phi\left(\frac{X_{k+1}+\bar{X}}{S_X}\right) - \Phi\left(\frac{X_k-\bar{X}}{S_X}\right), \qquad (3)$$

где X_k — нижняя, а X_{k+1} — верхняя границы интервала; Φ(Z) - теоретическая интегральная функция нормированного нормального распределения; n — объем выборки; r — число интервалов; $v=r-j-1$ — число степеней свободы; j — число параметров закона распределения, определяемых по выборке.

В случае нормального распределения j=2, так как по выборке оцениваются два параметра распределения — математическое ожидание и дисперсия. В случае распределения Пуассона $j=1$, так как математическое ожидание и дисперсия его равны, по выборке определяется один параметр.

Вычисленное по (2) значение χ^2 сравнивается с табличным (критическим, табл. 7 прил.) при выбраном одностороннем уровне значимости α. Если $\chi^2 < \chi^2_{\text{v,кр}}$, то гипотеза о виде распределения принимается, в противном случае она отвергается и строится новая гипотеза — предполагается другой закон. Если вид закона подобрать не удается, то пользуются неравенством Чебышева для определения случайной погрешности $\bar{X}$ (построение доверительного интервала для $X_{ист}$).

3.ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1.Проверка гипотезы о нормальности распределения результатов измерений методом линеаризации интегральной функции распределения

3.1.1. Экспериментальные данные работы 1 представить в виде вариационного ряда и занести в табл. А.

При совпадении значений X_i им присваиваются разные номера, как и в вариационном ряде.

3.1.2. Занести в табл. А значения эмпирической функции распределения $F_n(X_i) = i/(n+1)$.

3.1.3. По таблицам интегральной функции нормального распределения (табл. 1 прил.) найти теоретическое значение аргумента Z_i, соответствующее каждому значению эмпирической функции распределения $F_n(X_i)$.

Таблица А - Данные для проверки закона распределения по вероятностной бумаге

Номер точки i	X_i	$F_n(X_i) = \Phi(Z_i)$	Z_i
1	X_1	$1/(n+1)$	
2	X_2	$2/(n+1)$	
…			
n	X_n	$i/(n+1)$	

3.1.4. Нанести на миллиметровую бумагу точки с координатами по оси абсцисс, равными X_i, а по оси ординат — Z_i. Построить график, проведя по точкам прямую линию, обращая особое внимание на средние точки (крайние значения могут отклоняться от этой прямой).

3.1.5. Сделать вывод о справедливости гипотезы о нормальности закона распределения.

3.1.6. Найти по графику оценку среднего арифметического $\bar{X}_{\text{гр}}$ и СКО $S_{X,\text{гр}}$, сравнить их с соответствующими результатами работы 1.

3.1.7. Сделать вывод о законе распределения.

3.2. Проверка нормальности по критерию Колмогорова

3.2.1. По табл. 6 прил. найти и выписать критическое значение $D_{n,\,кр}$ для доверительной вероятности $P_д = 0{,}90$.

3.2.2. Построить график эмпирической функции распределения $F_n(X_i)$ (по табл. А) в виде ступенчатой ломаной линии.

3.2.3. Используя данные для построения кривой теоретических вероятностей (работа 1, табл. В), заполнить колонки 2 и 3 табл. В. Значения функции в колонках 4 и 5 не могут быть меньше 0 и больше 1. В ячейках таблицы, где условие не выполняется ставятся прочерки.

3.2.4. Построить график функции $\Phi(Z_к)$ (по табл. В) на том же рисунке, где построена эмпирическая функция $F_n(X_i)$. При этом учесть, что $\Phi(\bar{X}) = 0{,}5$.

Таблица В - Данные для проверки закона распределения по критерию Колмогорова

Номер границы инт. k	Значение границы интервала	$\Phi(Z_k)$	$\Phi(Z_k) - D_{n,\text{кр}}$	$\Phi(Z_k) + D_{n,\text{кр}}$
1				
2				
…				
r+1				

3.2.5. Вычислить доверительную полосу $\Phi(Z_к) \pm D_{n,кр}$, заполнить колонки 4 и 5 табл. В, нанести полосу на график. При этом помнить, что значение вероятности не может быть меньше нуля и больше единицы.

3.2.6. Сделать вывод.

3.3. Проверка нормальности с помощью критерия согласия χ^2

3.3.1. По табл. А работы 1, составить табл. С (колонки 1 - 5).

Таблица С - Данные для проверки закона распределения по критерию согласия Пирсона

Номер интервала k	Интервал		Число знач. в интервале n_k	P_k	nP_k	$\frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k}$
	Начало	Конец				
1	X_{min}	$h + X_{min}$	n_1	P_1	nP_1	$\frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP_1}$
2	$h + X_{min}$	$2h + X_{min}$	n_2	P_2	nP_2	$\frac{(n_2 - nP_2)^2}{nP_2}$
…						
r						

3.3.2.Вычислить для каждого интервала значения $\frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k}$, занести в табл. С.

3.3.3. Вычислить χ^2 по формуле (2).

3.3.4. По табл. 7 прил. найти критическое значение $\chi^2{}_{\text{v,кр}}$ для одностороннего уровня значимости α=0,10 и v=r-3. Сравнить вычисленное значение χ^2 с табличным.

3.3.5. Сделать выводы.

3.3.6. Сравнить выводы по всем трем методам. В случае противоречивых выводов объяснить причины. Сделать общий вывод о законе распределения.

3.3.7. Составить отчет.

4.СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Наименование и цель работы.

4.2. Краткие теоретические сведения.

4.3. Обработка массива экспериментальных данных:

4.3.1. Массив данных в виде вариационного ряда.

4.3.2. Табл. А.

4.3.3. График $Z_i = f(X_i)$.

4.3.4. Значения $\bar{X}_{\text{гр}}$ и $S_{X,\text{гр}}$. сравнение с вычисленными в работе 1 значениями.

4.3.5. Вывод о законе распределения.

4.3.6. Табл. В.

4.3.7. Значение $D_{\text{n, кр}}$.

4.3.8. График $F_n(X_i)$ и $\Phi(Z_k)$, доверительная полоса.

4.3.9. Вывод о законе распределения.

4.3.10. Таблица С.

4.3.11. Сравнение вычисленного значения χ^2 с табличным $\chi^2{}_{\text{v,кр}}$.

4.3.12. Вывод о законе распределения.

4.3.13. Сравнение выводов по пп. 4.3.5, 4.3.9 и 4.3.12. Объяснение причин противоречий, общий вывод о законе распределения.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое вероятностная бумага?
2. Какие параметры можно приближенно найти по вероятностной бумаге?
3. Как по вероятностной бумаге сделать вывод о законе распределения?
4. Использование критерия Колмогорова.
5. Критерий согласия.
6. Что такое доверительная полоса?
7. При каком объеме выборки используется χ^2?
8. Если вид закона распределения подобрать не возможно, что делать?
9. При каком условии принимается гипотеза о виде закона распределения по χ^2?
10. При каком условии отклоняется гипотеза по критерию Колмогорова?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1 - Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{Z} e^{\frac{t^2}{2}} dt;\ Z = \frac{X-\mu}{\sigma};\ \ \Phi(-Z) = 1 - \Phi(Z)$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	0,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	0,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	0,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	0,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	0,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	0,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	0,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	0,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	0,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	0,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	0,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	0,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9161	,9147	,9162	,9177
1,4	0,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	0,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	0,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	0,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	0,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	0,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	0,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817

Окончание табл. 1

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,1	0,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	0,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	0,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	0,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	0,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	0,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	0,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	0,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9980	,9980	,9981
2,9	0,9981	,9982	,9983	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,0	0,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990

Таблица 2 - Дифференциальная функция нормированного нормального распределения (плотность нормированного нормального распределения)

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{z^2}{2}};\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma};\ f(-Z) = f(Z)$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	,3989	,3989	,3987	,3986	,3984	,3982	,3980	,3977	,3973
од	0,3970	,3965	,3961	,3956	,3951	,3945	,3939	,3932	,3925	,3918
0,2	0,3910	,3902	,3894	,3885	,3876	,3867	,3857	,3847	,3836	,3825
0,3	0,3814	,3802	,3790	,3778	,3765	,3752	,3739	,3726	,3712	,3697
0,4	0,3683	,3662	,3653	,3637	,3621	,3605	,3589	,3572	,3555	,3538
0,5	0,3521	,3503	,3485	,3467	,3448	,3429	,3410	,3391	,3372	,3352
0,6	0,3332	,3312	,3292	,3271	,3251	,3230	,3209	,3187	,3166	,3144
0,7	0,3123	,3101	,3079	,3056	,3034	,3011	,2989	,2966	,2943	,2920

Окончание табл. 2

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,8	0,2897	,2874	,2850	,2827	,2803	,2780	,2756	,2732	,2709	,2685
0,9	0,2661	,2637	,2613	,2589	,2565	,2541	,2516	,2492	,2468	,2444
1,0	0,2420	,2396	,2371	,2347	,2323	,2299	,2275	,2251	,2227	,2203
1,1	0,2179	,2155	,2131	,2107	,2083	,2059	,2036	,2012	,1989	,1965
1,2	0,1942	,1919	,1895	,1872	,1849	,1826	,1804	,1781	,1758	,1736
1,3	0,1714	,1691	,1669	,1647	,1626	,1604	,1582	,1561	,1539	,1518
1,4	0,1497	,1476	,1456	,1435	,1415	,1394	,1374	,1354	,1334	,1315
1,5	0,1295	,1276	,1257	,1238	,1219	,1200	,1182	,1163	,1145	,1127
1,6	0,1109	,1092	,1074	,1057	,1040	,1023	,1006	,0989	,0973	,0957
1,7	0,0940	,0925	,0909	,0893	,0878	,0863	,0848	,0833	,0818	,0804
1,8	0,0790	,0775	,0761	,0748	,0734	,0721	,0707	,0694	,0681	,0669
1,9	0,0656	,0644	,0632	,0620	,0608	,0596	,0584	,0573	,0562	,0551
2,0	0,0540	,0529	,0519	,0508	,0498	,0488	,0478	,0468	,0459	,0449
2,1	0,0440	,0431	,0422	,0413	,0404	,0396	,0387	,0379	,0371	,0363
2,2	0,0355	,0347	,0339	,0332	,0325	,0317	,0310	,0303	,0297	,0290
2,3	0,0283	,0277	,0270	,0264	,0258	,0252	,0246	,0241	,0235	,0229
2,4	0,0224	,0219	,0213	,0208	,0203	,0198	,0194	,0189	,0184	,0180
2,5	0,0175	,0171	,0167	,0163	,0158	,0154	,0151	,0147	,0143	,0139
2,6	0,0136	,0132	,0129	,0126	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110	,0107
2,7	0,0104	,0101	,0099	,0096	,0093	,0091	,0088	,0086	,0084	,0081
2,8	0,0079	,0077	,0075	,0073	,0071	,0069	,0067	,0065	,0063	,0061
2,9	0,0060	,0058	,0056	,0055	,0053	,0051	,0050	,0048	,0047	,0046
3,0	0,0044	,0043	,0042	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036	,0035	,0034

Таблица 3 - Коэффициенты Стьюдента (двухсторонние границы t - распределения)

Число степеней свободы	Доверительная вероятность $P_д$	
$v = n - 1$	0,9	0,95
1	6,31	12,71
2	2,92	4,30
3	2,35	3,18
4	2,13	2,78
5	2,02	2,57
6	1,94	2,45
7	1,90	2,37
8	1,86	2,31
9	1,83	2,26
10	1,81	2,23
12	1,78	2,18
15	1,75	2,13
17	1,74	2,11
18	1,73	2,10
19	1,73	2,09
20	1,72	2,09
25	1,71	2,06
30	1,70	2,04
40	1,68	2,02
∞	1,64485	1,95996

Таблица 4 - Критические значения статистики ν для уровня значимости α = 0,05 (односторонний критерий)

n	4	6	8	10	15	20	30	35	40
ν	1,68	1,99	2,17	2,29	2,49	2,62	2,79	2,85	2,90

Таблица 5 - Коэффициенты d_n для определения оценки СКО S_x по размаху выборки W_n

$$W_n = X_{max} - X_{min};\ n \text{ – объем выборки};\ S_x = \frac{W_n}{d_n}$$

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20
d_n	2,06	2,53	2,85	3,08	3,26	3,41	3,53	3,64	3,74

Таблица 6 - Критические значения для наибольшего отклонения эмпирической функции распределения от теоретической (критерий Колмогорова). Значения $D_{n,\alpha}$, удовлетворяющие условию $P\{D_n > D_{n,\alpha}\} > \alpha$.

α \ n	4	6	8	10	15	20	25	30	40
0,05	0,62	0,52	0,45	0,41	0,34	0,29	0,26	0,24	0,21
0,10	0,57	0,47	0,41	0,37	0,30	0,26	0,24	0,22	0,19

Для n>35 используют аппроксимации:

$$\alpha = 0{,}05,\ D_{n,\alpha} \approx \frac{1{,}36}{\sqrt{n}};$$

$$\alpha = 0{,}10,\ D_{n,\alpha} \approx \frac{1{,}22}{\sqrt{n}}.$$

Таблица 7 - Распределение χ^2 (процентные точки). Значения $\chi^2_{\alpha,\nu}$, удовлетворяющие условию $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\nu}\} = \alpha$ или эквивалентному условию $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\nu}\} = 1 - \alpha = P_д$

ν \ $P_д$	0,025	0,05	0,40	0,50	0,60	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,275	0,455	0,708	3,841	5,024
2	0,051	0,103	1,022	1,386	1,833	5,991	7,378
3	0,216	0,352	1,869	2,366	2,946	7,815	9,348
4	0,484	0,711	2,753	3,357	4,045	9,488	11,143
5	0,831	1,145	3,655	4,351	5,132	11,070	12,832
6	1,237	1,635	4,570	5,348	6,211	12,592	14,449
7	1,690	2,167	5,493	6,346	7,283	14,067	16,013
8	2,180	2,733	6,423	7,344	7,351	15,507	17,535
9	2,700	3,325	7,357	8,343	9,414	16,919	19,023
10	3,247	3,940	8,295	9,342	10,473	18,307	20,483
12	4,404	5,226	10,182	11,340	12,584	21,026	23,336
14	5,629	6,571	12,079	13,339	14,685	23,685	26,119
16	6,908	7,962	13,983	15,338	16,780	26,296	28,845
18	8,231	9,390	15,893	17,338	18,868	28,861	31,526
20	9,591	10,851	17,809	19,337	20,951	31,410	34,170
25	13,120	14,611	22,616	24,337	26,143	37,652	40,646
30	16,791	18,493	27,442	29,336	31,316	43,773	46,979
40	24,433	26,509	37,134	37,335	41,622	55,758	59,345
α	0,975	0,95	0,60	0,50	0,40	0,05	0,025

Примечание: для построения двустороннего доверительного интервала для случайной величины, имеющей χ^2 - распределение, удовлетворяющего условию

$$P\{\chi^2_{1-\alpha^*/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\} = P^*_д,$$

следует учесть, что

$$P\{\chi^2_{1-\alpha^*/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\} = P\{\chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\} - P\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha^*/2}\} = $$
$$= 1-\alpha^*/2-[1-(1-\alpha^*/2)] = 1-\alpha^* = P_{д}.$$

Верхнюю границу такого интервала находят по табл. для $\alpha = \alpha^*/2$, а нижнюю - для $\alpha = 1 - \alpha^*/2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 8.011-72. ГСИ. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений.
2. ГОСТ 8.207-76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.
3. ГОСТ 8.401-80. ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования.
4. ГОСТ 7.32-81. Отчёт о научно-исследовательской работе. Общие требования и правила оформления.
5. ГОСТ 1494-77. Электротехника. Буквенные обозначения основных величин.
6. Тартаковский Д.Ф. Метрология стандартизация и технические средства измерений: учеб. для ВУЗов / Д.Ф. Тартаковский, А.С. Ястребов. – М.: Высш. шк., 2002. – 205 с.
7. Муратов А.В. Метрология, стандартизация и технические измерения: учеб. пособие / А.В. Муратов, М.А. Ромащенко. Воронеж: ВГТУ, 2007. – 255 с.
8. Крохин В.В. Метрология. Карманная энциклопедия студента / В.В. Крохин, В.Г. Сергеев. – М.: Высш. шк., 2001. 376 с.
9. Болтон У. Карманный справочник инженера-метролога / У. Болтон. – М.: Изд-во «Додека -XXI », 2002. – 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ №3-4

по дисциплине «Теория измерений» для студентов направления 200100.62 «Приборостроение» (профиль «Приборостроение») очной и заочной форм обучения

Составитель
Самодуров Александр Сергеевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 30.03.2014.
Уч.-изд. л. 1,9. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский проспект, 14