С.В. Амелин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ: ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Воронеж 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

С.В. Амелин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ: ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 519.85 (075) + 658.012.122 (075)
ББК 65в641я7
А 615

Амелин С.В. Математические методы и модели в логистике: лабораторный практикум: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые, граф. данные (2,45 Мб) / С.В. Амелин. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. – 151 с.

В издании изложены указания к проведению лабораторных работ по темам курса: линейное программирование, модели управления запасами, теория массового обслуживания, сетевые модели, балансовые модели, теория игр и статистических решений. В каждой работе определяется ее цель, даны основные теоретические положения, математические модели, расчетные формулы, приведены примеры расчетов с использованием моделей, реализованных на ЭВМ.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 38.03.02 «Менеджмент», профилю «Логистика и управление цепями поставок», дисциплине «Математические методы и модели в логистике».

Табл. 5. Ил. 68. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: кафедра информационных технологий и математических методов Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р экон. наук, проф. В.В. Давнис);
канд. экон. наук, доц. Д.М. Шотыло

ВВЕДЕНИЕ

Ежедневно руководители в сфере производства и бизнеса, начиная от менеджеров нижнего звена управления и вплоть до “топ” менеджеров, принимают различные управленческие решения, призванные обеспечить экономическую безопасность предприятий и организаций, создать условия для их нормального функционирования и развития. Часто решения принимаются исходя из сложившейся ситуации, на основе опыта и интуиции руководителя, не обращая внимания на оптимальность получаемых результатов. Однако во многих случаях требуется обоснование решений с привлечением средств и методов науки управления и исследования операций. Иными словами, экономистам и менеджерам необходимо овладевать инструментарием экономико-математических методов и моделей для того, чтобы иметь возможность оперативно проанализировать сложившуюся ситуацию, выработать множество альтернатив достижения цели и выбрать наиболее рациональное решение.

Многие управленческие решения принимаются в ситуациях, которые при анализе можно разложить на составляющие, установить имеющиеся между ними взаимосвязи и зависимости, и на основе этого дать формализованное описание сложившегося положения и путей достижения цели. Такое формализованное описание, представленное в математической форме, называется математической моделью.

При наличии математической модели, в зависимости от ее природы, к ней можно применить различные математические методы из широкого арсенала экономико-математических методов исследования операций для получения информации, необходимой для принятия рационального решения.

Экономико-математическое моделирование в процессе принятия управленческих решений предполагает ряд этапов: формализация и математизация реальной производственно-экономической ситуации и возникшей проблемы, решение задачи, воплощенной в модели с помощью соответствующих математических методов (реализованных в виде программного обеспечения ЭВМ), анализ и интерпретация результатов решения, позволяющие формировать управленческое решение.

Каждую производственно-экономическую ситуацию или проблему можно отобразить различными способами и в соответствии с этим, построить разнообразные экономико-математические модели.

Большинство производственно-экономических проблемных ситуаций характеризуется множеством факторов, связей и отношений с внутренней и внешней средой. Поэтому, для экономии времени и средств, необходимо упрощение многоаспектной проблемы до ограниченной формализованной модели проблемы. Для этого отбрасываются наиболее слабые связи и малозначимые факторы, а наиболее существенные – преобразуются в условия и ограничения, налагаемые на создаваемую модель. Перед формированием модели и выбором метода решения необходимо грамотно поставить задачу, выполнив при этом ряд требований:

четко сформулировать проблему и цели, которые должны быть достигнуты в результате реализации управленческого решения;

указать, какие результаты решения должны гарантировать достижение целей;

выявить и описать различные возможности достижения цели, а также факторы, способствующие решению проблемы, и ограничения, препятствующие достижению целей.

В пособии представлены лабораторные работы, позволяющие освоить модели сетевого планирования и управления, теории массового обслуживания, межпродуктового баланса, линейного программирования, включая транспортные задачи, управления запасами и теории игр.

Целью дисциплины «Математические методы и модели в экономике» является подготовка студентов к использованию современной теории и практики экономико-математического моделирования при разработке, принятии и реализации оптимальных управленческих решений в процессе управления предприятием (организации).

Задачи дисциплины:

- изучение теоретических основ и развитие практических навыков применения методов принятии оптимальных решений в реальных условиях многокритериальности и неполноты информации в рыночной экономике, с использованием современных методов экономико-математического моделирования и информационных технологий;

- освоение будущим экономистом комплекса методов поиска и обоснованного выбора наилучших (оптимальных) решений, формирование у него потребности в их повседневном использовании, раскрытие особенности экономико-математических методов и моделей при обосновании решений, принимаемых руководителем коллектива предприятия (организации) и возможности математического моделирования при их разработке и реализации;

- развитие у студентов навыков творческого подхода к выбору методов моделирования при анализе управленческих ситуаций и выработке своевременных экономически обоснованных оптимальных управленческих решений на современных промышленных предприятиях и в организациях.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
Расчет и оптимизация сетевой модели

Цель работы: знакомство студентов с методикой построения сетевого графика и его линейной диаграммы (графика Ганта), расчет основных временных параметров сетевого графика и его оптимизация на ЭВМ. Закрепление теоретического лекционного материала и материала, изучаемого самостоятельно.

Исходные положения. Сетевые модели используются при планировании и управлении ходом разработок новых видов продукции и процессов их производства. Сетевые модели позволяют изображать календарный план графически, показывают последовательность и время начала и окончания каждой из работ. Это важно для оперативного контроля за ходом выполнения работ и своевременного принятия регулирующих решений при возникновении отклонений от плана.

Основные понятия. Главными элементами сетевой модели являются *событие* и *работа*. *Работа* – любой процесс (действие), приводящий к определенному результату – *событию*. Если событие является результатом нескольких произведенных работ, то момент свершения такого события наступает с окончанием самой длительной работы, входящей в данное событие. Кроме работ *действительных*, требующих затрат времени и ресурсов, существуют *ожидания* (время естественных технологических процессов, например, остывание, высыхание, затвердевание и т.д.) и *фиктивные* работы (*зависимости*), временем выполнения и затратами ресурсов которых можно пренебречь (например, сигнал о результатах выполнения предыдущих работ, телефонное сообщение).

Работы на графиках изображаются стрелками (фиктивные работы – пунктирными стрелками). Длительность работы проставляется над стрелкой. События изображаются кругом, разделенным на четыре сектора (рис. 1.1).

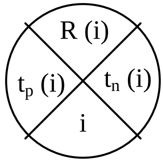


Рис. 1.1. Изображение события на сетевом графике

Обозначения: ***i*** – номер события;
$t_p(i)$ – ранний срок наступления ***i*** – го события;
$t_n(i)$ – поздний срок наступления ***i*** – го события;
$R(i)$ – резерв времени ***i*** – го события.

Для каждой работы имеется предшествующее (***i***) и последующее (***j***) события.

Непрерывная технологическая цепочка работ составляет *путь*, а каждый путь, соединяющий *исходное* и *завершающее* события, называется *полным*. Полный путь, обладающий наибольшей суммарной продолжительностью работ, называется *критическим*. Это наиболее напряженный путь, не обладающий резервами времени и определяющий сроки завершения всего комплекса работ.

Все остальные полные пути менее длительные и менее напряженные. Работы, лежащие на таких путях имеют резервы времени.

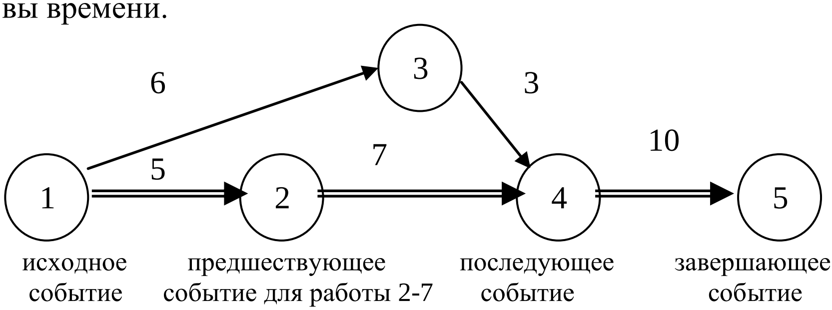


Рис. 1.2. Сетевой график

Полные пути: 1-3-4-5 и 1-2-4-5 (критический).

Поскольку сетевой график вычерчивается без масштаба времени, он недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в каждый момент времени. Поэтому в случае небольшого проекта его следует дополнить линейной диаграммой (графиком Ганта).

При построении линейной диаграммы каждая работа изображается параллельным оси времени отрезком, длина которого равна продолжительности этой работы. Фиктивная работа нулевой продолжительности изображается точкой. События $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, начало и конец работы ($\boldsymbol{i}$-$\boldsymbol{j}$) помещают соответственно в начале и конце отрезка. Отрезки располагают один под другим, сверху вниз в порядке возрастания индекса $\boldsymbol{i}$, а при одном и том же $\boldsymbol{i}$ – в порядке возрастания индекса $\boldsymbol{j}$. Абсцисса самого правого конца последнего отрезка определит критическое время выполнения всего комплекса работ (рис. 1.3).

При календарном планировании менеджеру необходимо знать, какое количество исполнителей должно быть задействовано при выполнении комплекса работ в соответствующие промежутки времени. Для этого строится эпюра загрузки работников (рис. 1.4). При построении эпюры загрузки работников для каждого момента начала или окончания очередной работы подсчитывается общее количество исполнителей и строится столбиковая диаграмма. Система координат при построении диаграммы имеет в качестве абсциссы ось времени, а в качестве ординаты – количество работников. Высота столбца соответствуют суммарному количеству исполнителей, задействованных на всех работах, выполняемых в данный момент времени. Ширина столбца соответствует промежутку времени, в течение которого количество исполнителей работ не изменяет своего значения. Возможно построение нескольких эпюр загрузки, отдельно по каждой категории работников.

Допустим работу 1-2 выполняют 2 человека, работу 1-3 выполняют 3 человека, работу 2-4 выполняют 4 человека, работу 3-4 выполняют 2 человека, работу 4-5 выполняют 3 человека.

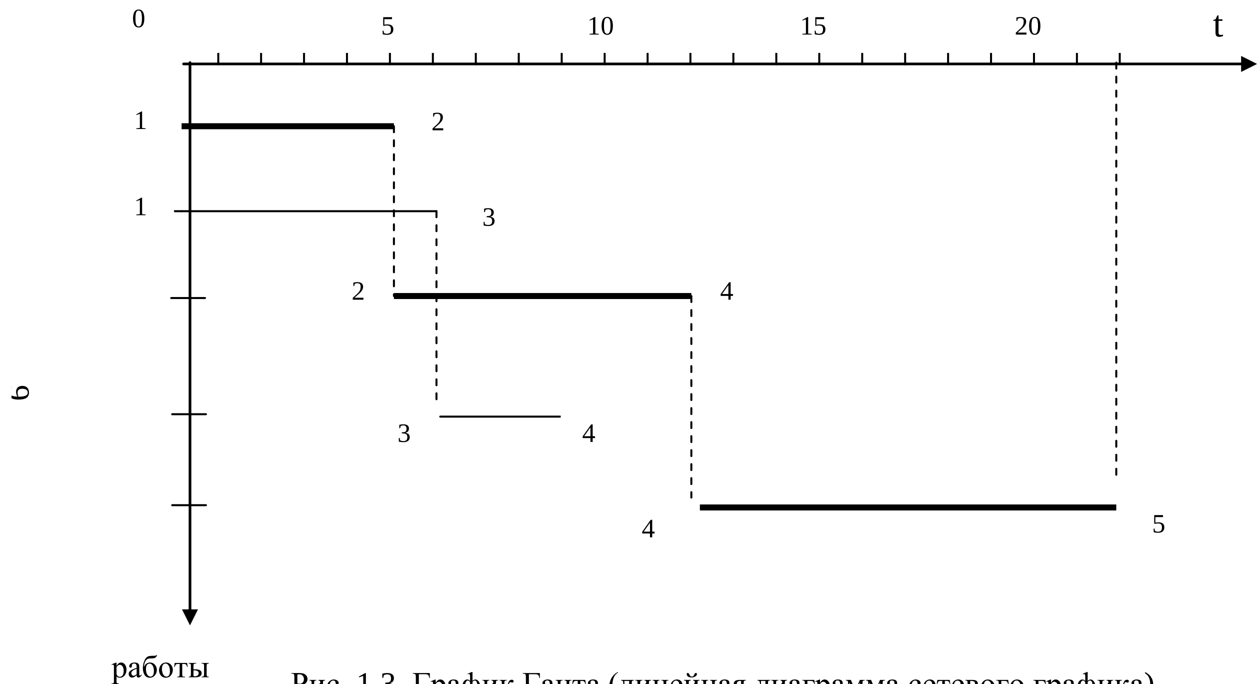


Рис. 1.3. График Ганта (линейная диаграмма сетевого графика)

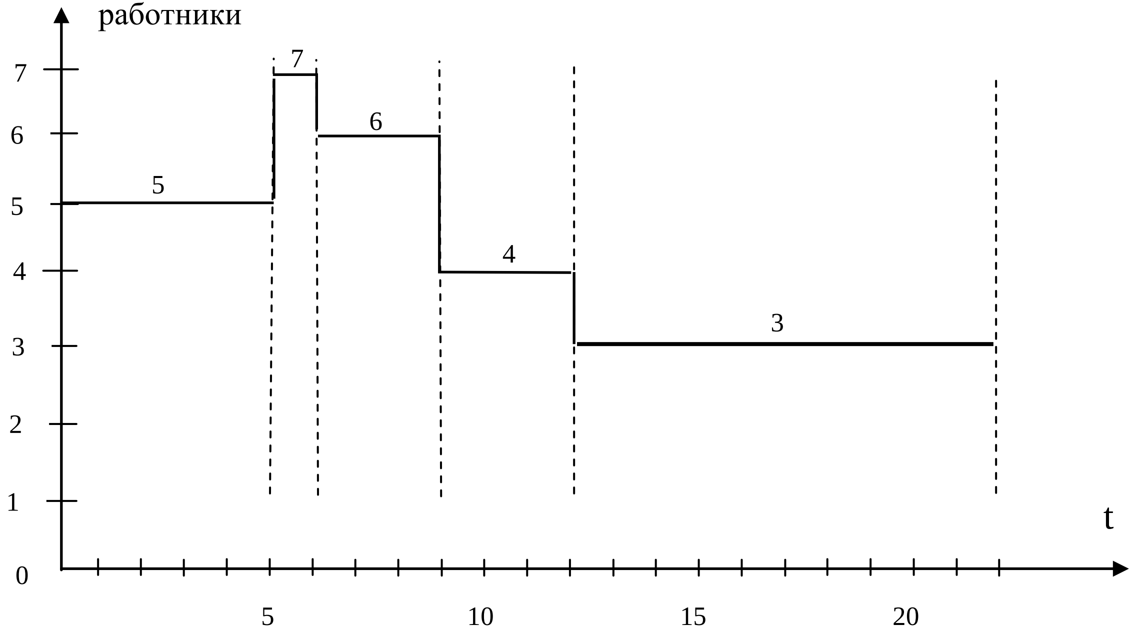


Рис. 1.4. Эпюра загрузки исполнителей работ

Среди резервов времени работ выделяют четыре разновидности резервов (рис. 1.5).

Под *полным* $R_n(i,j)$ резервом времени работы (***i-j***) понимается допустимый сдвиг срока ее выполнения, не меняющий срока свершения завершающего события всего комплекса работ.

Под *свободным* $R_c(i,j)$ резервом времени работы (***i-j***) понимается допустимый сдвиг срока ее выполнения, не меняющий раннего срока ее последующего события $t_p(j)$.

Под *частным* $R_ч(i,j)$ резервом времени работы (***i-j***) понимается допустимый сдвиг срока ее выполнения, не меняющий позднего срока предшетвующего ей события $t_n(i)$.

Под *независимым* $R_н(i,j)$ резервом времени работы (***i-j***) понимается допустимый сдвиг срока ее выполнения, не меняющий и раннего срока ее последующего события $t_p(j)$, и позднего срока предшествующего ей события $t_n(i)$

Примечание. Резервы времени работы (***i-j***) могут состоять из двух временных отрезков, если интервал продолжительности работы $t(i,j)$ занимает промежуточное место между двумя его крайними положениями, изображенными на графиках.

Свободный, частный и независимый резервы являются частями полного. Аналитически все резервы вычисляются по следующим формулам:

Полный резерв

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j) \tag{1.1}$$

Частный резерв

$$R_r(i,j) = t_n(j) – t_n(i) - t(i,j) \tag{1.2}$$

или

$$R_ч(i,j) = R_n(i,j) – R(i) \tag{1.3}$$

Свободный резерв

$$R_ч(i,j) = t_p(j) – t_p(i) - t(i,j) \tag{1.4}$$

или

$$R_c(i,j) = R_n(i,j) – R(j) \tag{1.5}$$

Независимый резерв

$$R_н(i,j) = t_p(j) – t_n(i) - t(i,j) \tag{1.6}$$

или

$$R_н(i,j) = R_n(i,j) – R(j) – R(i) \tag{1.7}$$

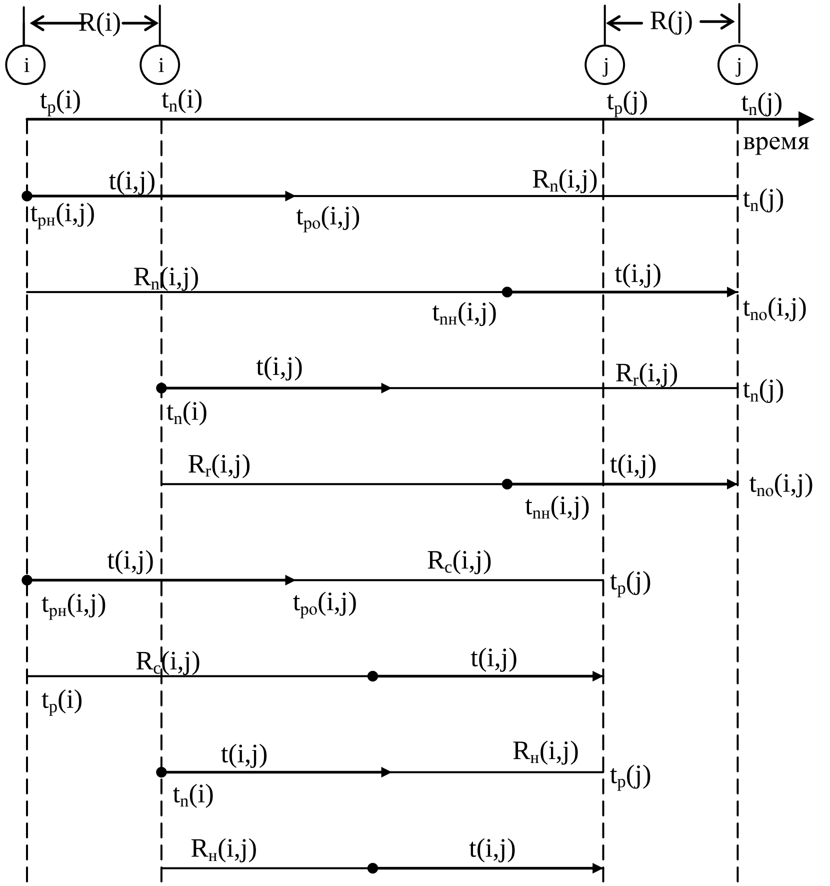


Рис. 1.5. Графическое изображение резервов времени событий и работ на шкале времени

Из приведенных формул следует, что полный резерв данной работы может быть использован на всех работах подкритических путей, через нее проходящих. Свободный резерв можно использовать на данной работе и всех работах, последующих за ней. Независимый резерв можно использовать только на данной работе.

Оптимизация сетевого графика производится путем перераспределения взаимозаменяемых сотрудников с менее загруженных работ, имеющих большие резервы времени, на работы, производящиеся в то же самое время и лежащие на критическом пути. В результате сокращается длительность критического пути и возрастает напряженность работы на остальных. При оптимизации используется следующая система уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{T_p}}{\boldsymbol{W_p - X}} = \boldsymbol{t_p + R - y} \\ \dfrac{\boldsymbol{T_k}}{\boldsymbol{W_k + X}} = \boldsymbol{t_k - y} \end{cases} \qquad (1.8)$$

где $\boldsymbol{T_p}$ и $\boldsymbol{T_k}$ – трудоемкости, соответственно, работы, имеющей резерв и работы, лежащей на критическом пути;
$\boldsymbol{t_p}$ и $\boldsymbol{t_k}$ - длительности данных работ;
$\boldsymbol{W_p}$ и $\boldsymbol{W_k}$ - число исполнителей на этих работах;
$\boldsymbol{x}$ - количество переводимых людей;
$\boldsymbol{y}$ - время сокращения критического пути.

Пример выполнения лабораторного задания.

Допустим, при планировании выполнения некоторого комплекса работ, определена их трудоемкость и число исполнителей (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Исходные данные

Код работы (i,j)	Трудоемкость работы T(i,j), нормо-ч	Число исполнителей работы W(i,j), чел
1-2	64	4
1-3	120	3
2-3	32	2
2-4	192	6
2-5	80	2
3-4	96	4
3-6	80	2
4-5	64	2
4-6	128	4
4-7	320	5
5-7	64	4
6-7	96	6

Требуется:

1. По данным табл. 1.1 рассчитать с помощью микрокалькулятора или электронной таблицы:
а) Продолжительность каждой работы в днях.
б) Временн*ы*е параметры каждого события.

2. Построить сетевой график, учитывая правила его построения, указать внутри событий номер, ранний и поздний сроки свершения и резерв времени, выделить критический путь.

3. Построить линейную диаграмму сетевого графика, выделив критический путь, и эпюру загрузки работников.

4. Рассчитать на ЭВМ:
а) Полный и свободный резервы каждой из работ.
б) Критический путь (какие события он включает) и полное время выполнения всего комплекса работ.
в) Провести оптимизацию сетевого графика.

5. Рассчитать частный и независимый резервы времени каждой работы, а также ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

6. Составить таблицы временн*ы*х параметров работ и событий.

Оформление результатов расчетов.

1. Рассчитываем на микрокалькуляторе продолжительность каждой работы t(i,j) в днях по формуле:

$$t(i,j) = \frac{T(i,j)}{8 \cdot W(i,j)} \tag{1.9}$$

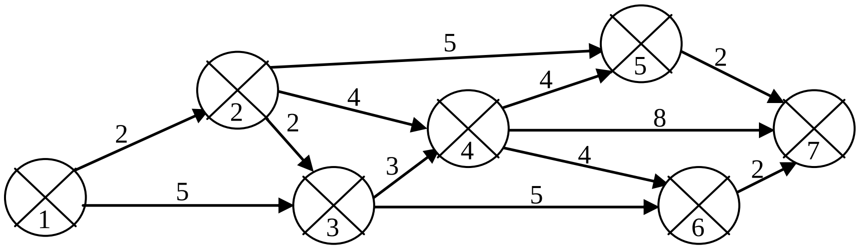
и записываем результаты в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

Расчет длительности выполнения работ

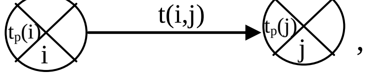
Код работы	T(i,j)	W(i,j)	t(i,j)
1-2	64	4	2
1-3	120	3	5
2-3	32	2	2
2-4	192	6	4
2-5	80	2	5
3-4	96	4	3
3-6	80	2	5
4-5	64	2	4
4-6	128	4	4
4-7	320	5	8
5-7	64	4	2
6-7	96	6	2

2. Строим сетевой график



Рассчитываем временные параметры событий и наносим их на график в каждый кружок, как показано на рис. 1.1. Рассчитываем ранние сроки свершения каждого события:

1) если событию j предшествует одно событие i, т.е.

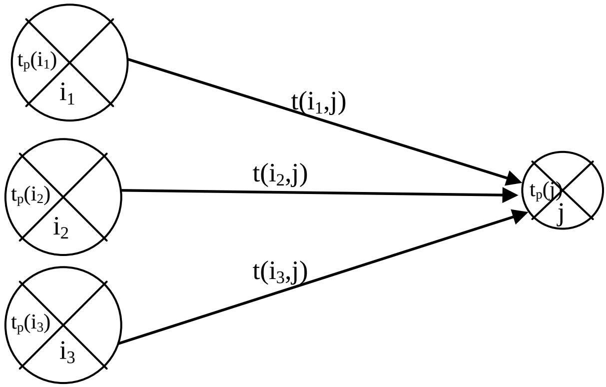


,

то $t_p(j)$ рассчитываем по формуле:

$$\boldsymbol{t_p(j) = t_p(i) + t(i,j)} \tag{1.10}$$

2) если событию j предшествует несколько событий i, т.е.



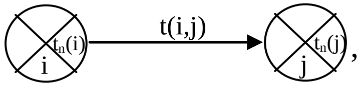
то $t_p(j)$ рассчитываем по формуле:

$$t_p(j) = \max_{i_к}\{t_p(i_к) + t(i_к, j)\}. \tag{1.11}$$

Расчет ранних сроков свершения событий ведется от первого события к последнему, т.е. слева направо. При этом $t_{p1} = 0$. Рассчитываем поздние сроки свершения каждого события.

Расчет ведется от последнего события к первому, т.е. справа налево. При этом для последнего события $t_p = t_n$.

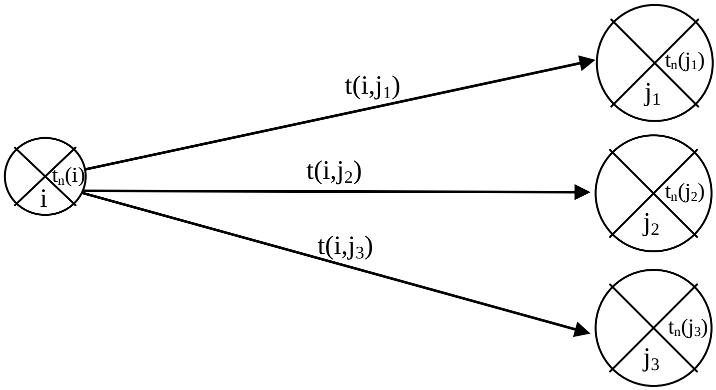
1) если у события i одно последующее событие, т.е.



то $t_n(i)$ рассчитывается по формуле:

$$t_n(i) = t_n(j) - t(i,j) \tag{1.12}$$

2) если у события i несколько последующих событий, т.е.



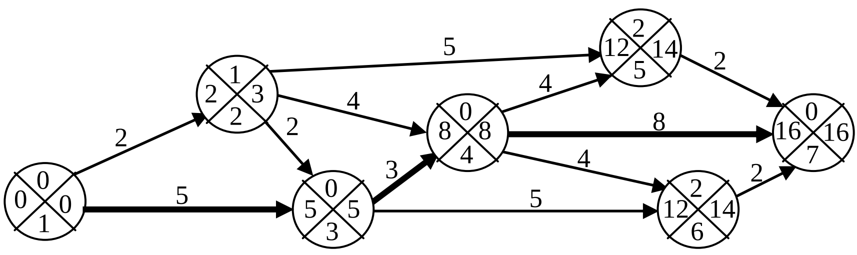
то расчет $t_n(i)$ ведется по формуле:

$$t_n(i) = \min_{j_\kappa}\left\{t_n(j_\kappa) - t(i, j_\kappa)\right\}. \qquad (1.13)$$

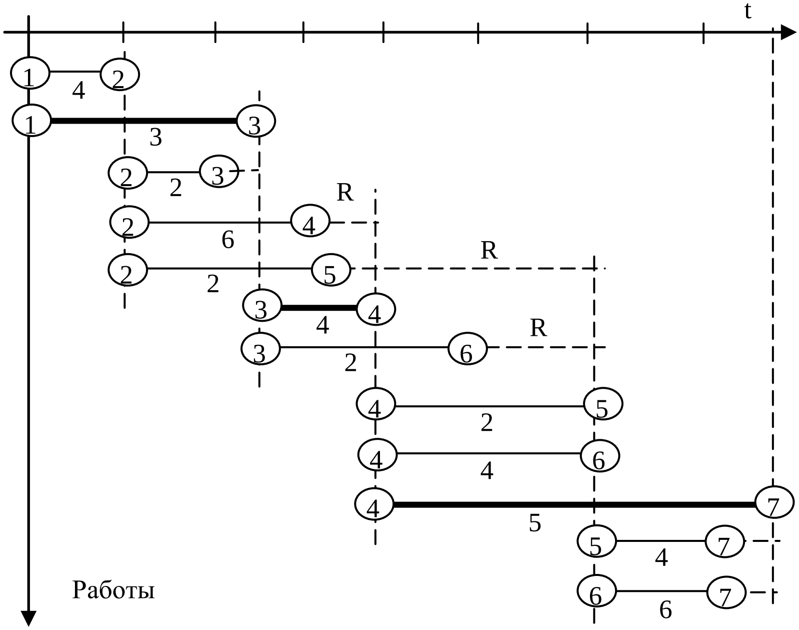
Резервы времени событий рассчитываем по формуле:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i). \qquad (1.14)$$

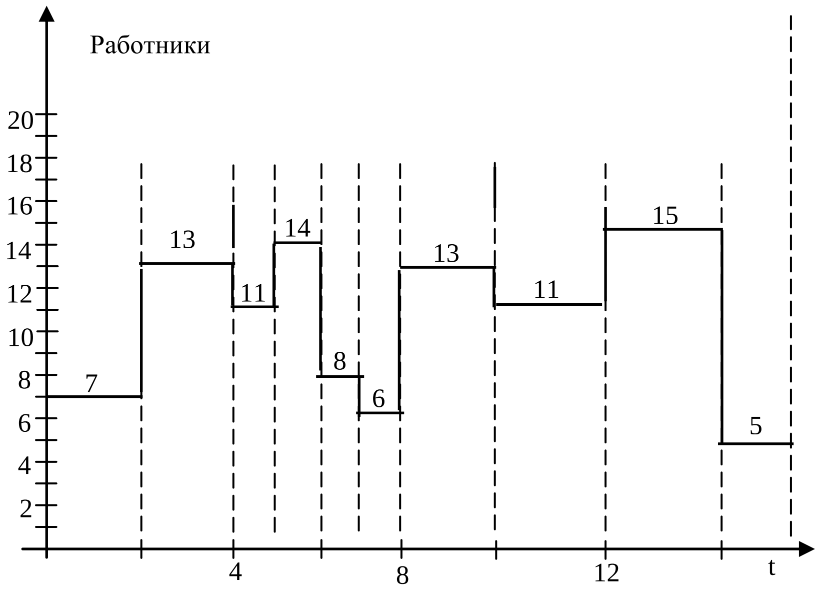
Полученные результаты расчета заносим в соответствующие сектора на сетевом графике, после чего он примет вид:



3. Строим график Ганта (линейную диаграмму)



4. Строим эпюру загрузки работников



4. Проводим расчет полного и свободного резервов времени работ на ЭВМ. Расчёт и построение сетевой модели в ППП PRIMA в среде Excel представлен на рис. 1.6 – 1.20.

Исходные данные вводятся, как это показано на рис. 1.6 и 1.7. Коды работ (1-2, 1-3 и т.д.) вводятся в два соседних столбца. В рассматриваемом примере коды работ занимают ячейки с адресами A2 **:** B13. Время выполнения работ введено в ячейки C2 **:** C13. Количество исполнителей – в ячейки D2 **:** D13.

Результаты расчёта представлены на рис. 1.8 – 1.10. Таблица временных параметров работ (рис. 1.8) включает ранние сроки начала работ, время выполнения работ, полные и свободные резервы работ, а также коэффициенты загруженности работ. Таблица временных параметров событий (рис. 1.9) включает ранние и поздние сроки свершения событий, а также резервы времени событий, длительность критического пути и события критического пути. Результаты оптимизации сетевого графика (рис. 1.10) показывают пары работ, для которых производится перераспределение трудовых ресурсов, приводящее к сокращению времени критического пути. На рис. 1.11 – 1.18 показана последовательность построения календарного плана выполнения работ - графика Ганта. На рис. 1.19 и 1.20 показано построение эпюры использования трудовых ресурсов.

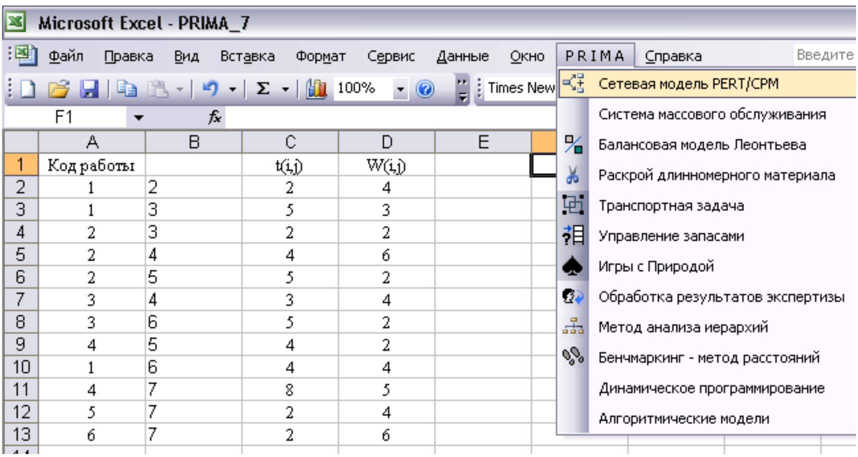


Рис. 1.6. Исходные данные для расчёта сетевого графика

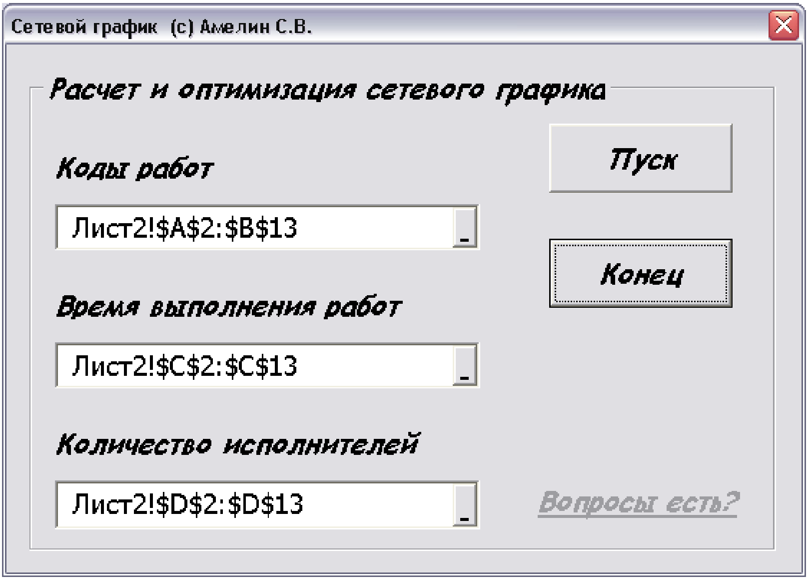


Рис. 1.7. Ввод исходных данных в программе *Сетевая модель* в ППП *PRIMA*

	F	G	H	I	J	K	L	M
1		РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА						
2		Детерминированная сетевая модель СРМ						
3								
4	РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАБОТ							
5	КОД РАБОТЫ		ВРЕМЯ	ПОЛНЫЙ	СВОБОДНЫ	РАННЕЕ	КОЭФФИЦИЕНТ	
6	i - j		РАБОТЫ	РЕЗЕРВ	РЕЗЕРВ	НАЧАЛО	ЗАГРУЖЕННОСТИ	
7		1--2	2	1	0	0	0,6666667	
8		1--3	5	0	0	0	1	
9		2--3	2	1	1	2	0,6666667	
10		2--4	4	2	2	2	0,6666667	
11		2--5	5	7	5	2	0,4166667	
12		3--4	3	0	0	5	1	
13		3--6	5	4	0	5	0,5555556	
14		4--5	4	2	0	8	0,6666667	
15		1--6	4	10	6	0	0,2857143	
16		4--7	8	0	0	8	1	
17		5--7	2	2	2	12	0,5	
18		6--7	2	4	4	10	0,3333333	

Рис. 1.8. Результаты расчёта временн*ы*х параметров работ

	F	G	H	I	J	K	L	M
20	РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СОБЫТИЙ							
21	НОМЕР		РАННИЙ СРОК		ПОЗДНИЙ СРОК		РЕЗЕРВ ВРЕМЕНИ	
22	СОБЫТИЯ		НАСТУПЛЕНИЯ		СОБЫТИЯ		СОБЫТИЯ	
23	1		0		0		0	
24	2		2		3		1	
25	3		5		5		0	
26	4		8		8		0	
27	5		12		14		2	
28	6		10		14		4	
29	7		16		16		0	

Рис. 1.9. Результаты расчёта временн*ы*х параметров событий и критического пути

	F	G	H	I	J	K
31	КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ = 16 ДНЕЙ					
32	И ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ СОБЫТИЯ					
33	1-	3-	4-	7-		
34						
35	ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА					
36						
37	ДЛЯ РАБОТ 1 - 2 и * 1 - 3 *					
38	КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕВОДИМЫХ ЛЮДЕЙ					0,4994674
39	СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ					0,7136335
40						
41	ДЛЯ РАБОТ 1 - 6 и * 1 - 3 *					
42	КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕВОДИМЫХ ЛЮДЕЙ					2,6282716
43	СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ					2,3348834
44						
45	ДЛЯ РАБОТ 3 - 6 и * 3 - 4 *					
46	КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕВОДИМЫХ ЛЮДЕЙ					0,8218225
47	СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ					0,5113145
48						
49	ДЛЯ РАБОТ 4 - 5 и * 4 - 7 *					
50	КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕВОДИМЫХ ЛЮДЕЙ					0,4873005
51	СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ					0,7104412
52						
53	ПОСЛЕ ОПТИМИЗАЦИИ КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ					
54	СОКРАЩАЕТСЯ НА 4,27027253699128 ДНЕЙ					

Рис.1.10. Оптимизация сетевого графика

После оптимизации сетевого графика получен следующий результат: при переводе 1 человека на 49,9% времени с работы 1-2 на работу 1-3, работа критического пути сократится на 0,7дня и т.д. Общее сокращение критического пути - 4,27 дня.

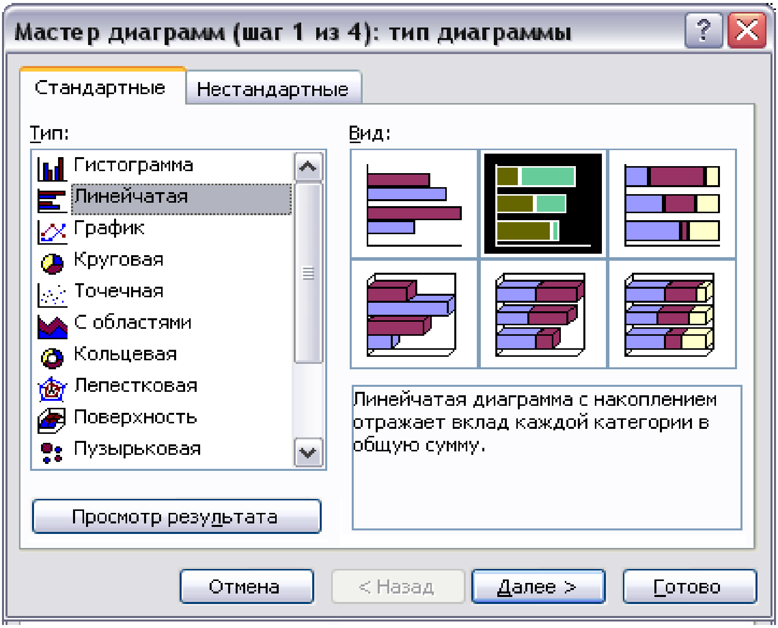


Рис. 1.11. Построение графика Ганта (шаг 1)

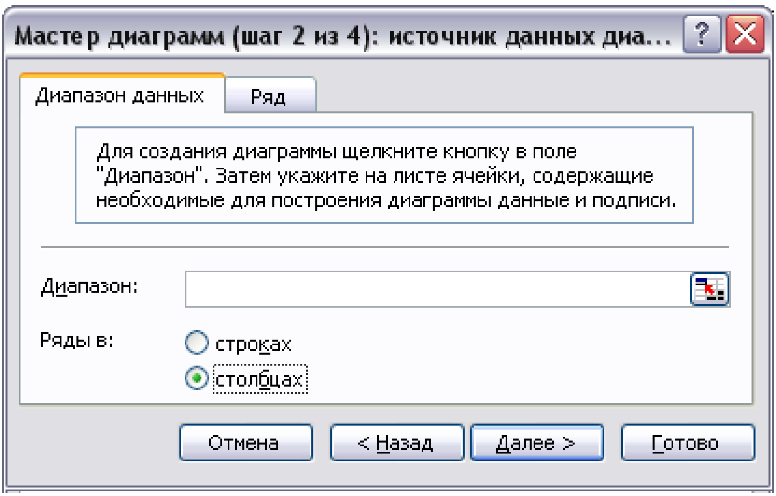


Рис. 1.12. Построение графика Ганта (шаг 2)

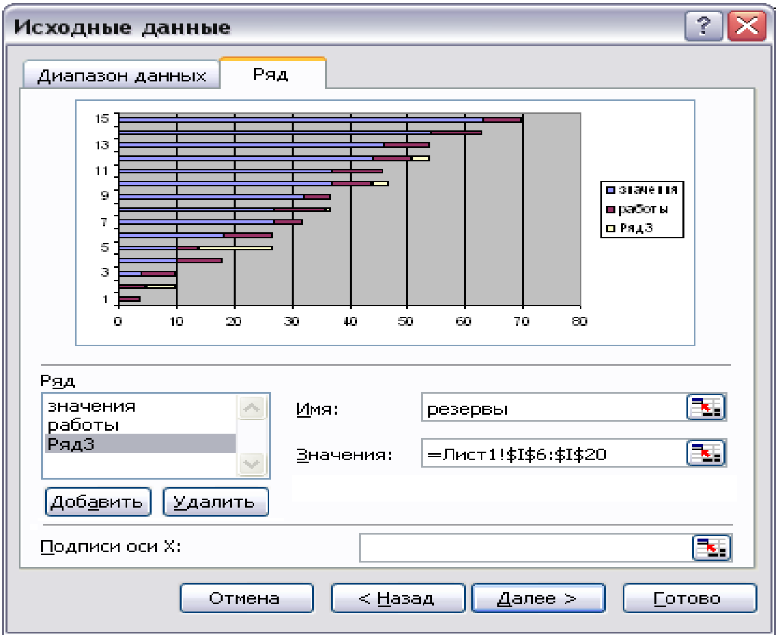


Рис. 1.13. Построение графика Ганта (ввод обозначений)

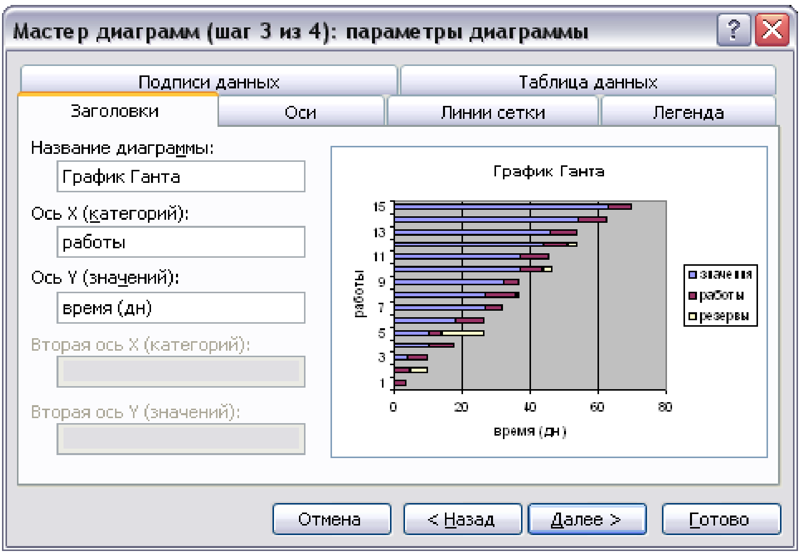


Рис. 1.14. Построение графика Ганта (шаг 3)

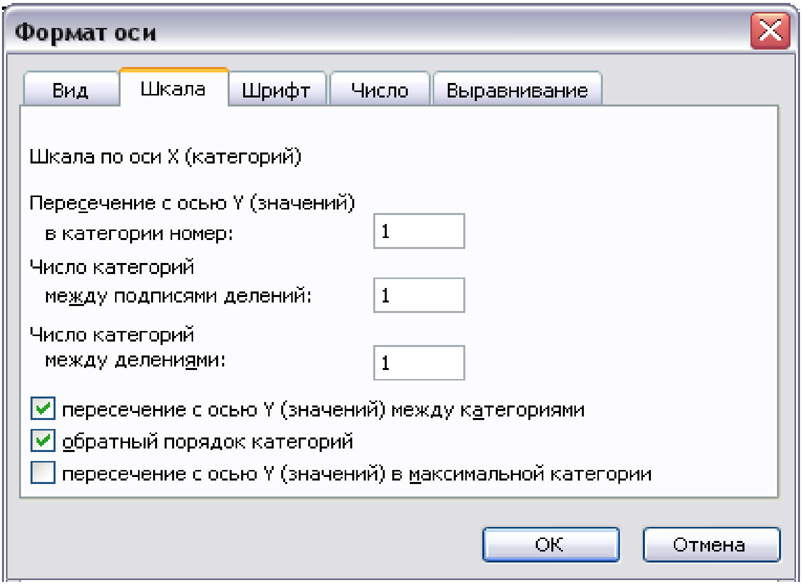


Рис. 1.15. Построение графика Ганта (коррекция шкалы)

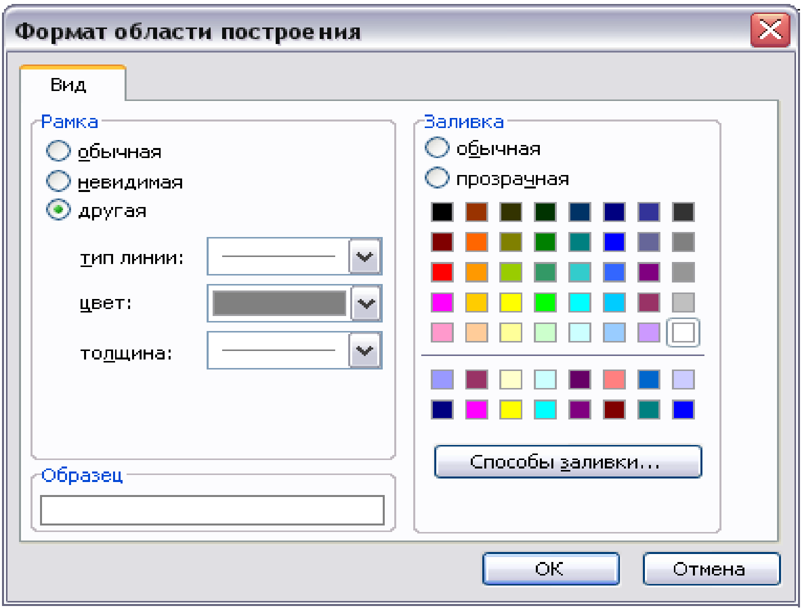


Рис. 1.16. Построение графика Ганта (выбор цвета фона)

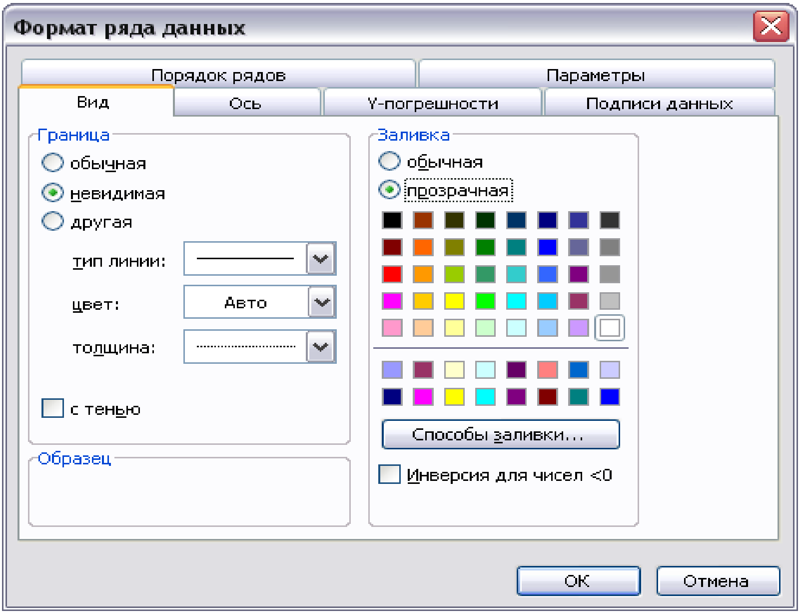


Рис. 1.17. Построение графика Ганта (удаление лишних линий)

Для построения эпюры потребности в трудовых ресурсах использована столбиковая диаграмма (гистограмма). Исходные данные для построения диаграммы выводятся в таблицу в конце расчёта сетевого графика (рис. 1.18).

	F	G	H	I
60	Данные для эпюры использования ресурсов			
61	День	Ресурс		
62	1	3		
63	2	3		
64	3	3		
65	4	3		
66	5	4		
67	6	3		
68	7	3		
69	8	3		

Рис. 1.18. Фрагмент данных для построения диаграммы

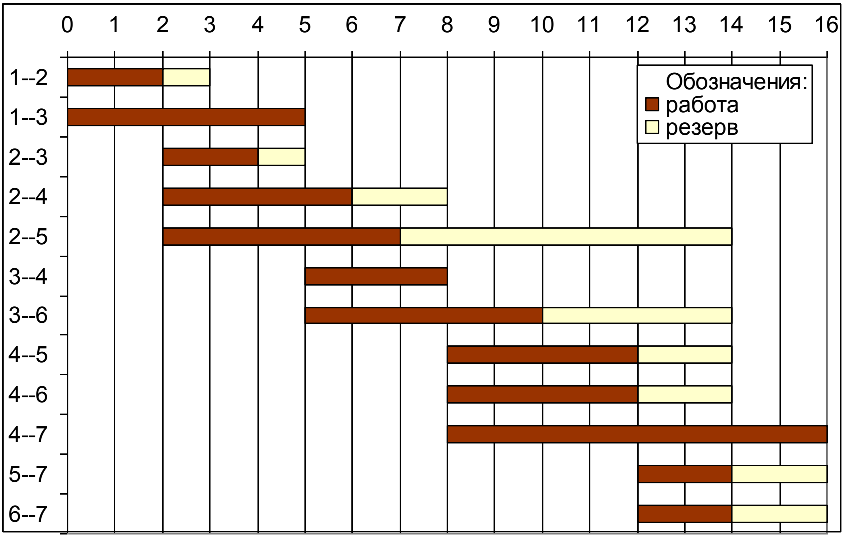


Рис. 1.19. Вид графика Ганта в Excel

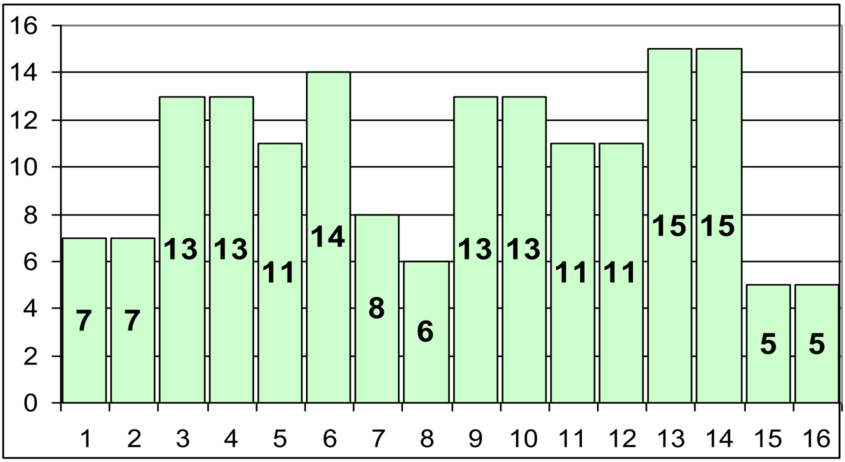


Рис. 1.20. Эпюра потребности в исполнителях

Если передвинуть начало выполнение работ за счёт резервов времени, то можно получить альтернативные варианты загрузки исполнителей работ (рис. 1.21 и 1.22).

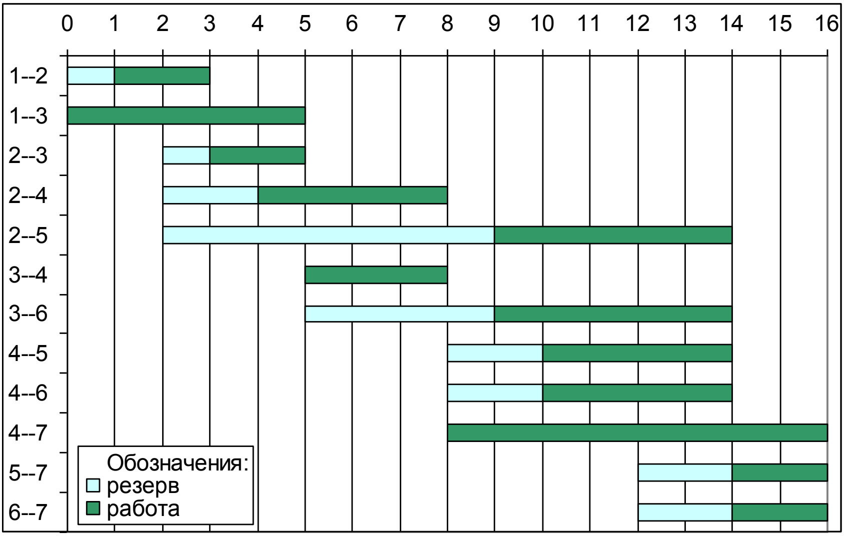


Рис. 1.21. Вариант графика Ганта в Excel

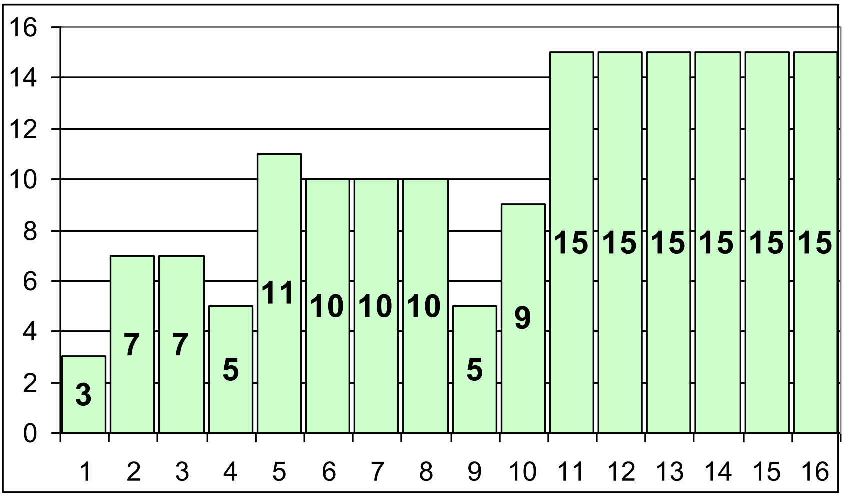


Рис. 1.22. Вариант эпюры потребности в исполнителях

5. Составим таблицу резервов работ

Код работы	Полный резерв $R_п(i,j)$	Свободный резерв $R_с(i,j)$	Частный резерв $R_ч(i,j)$	Независи-мый резерв $R_н(i,j)$
1-2	1	0	1	0
1-3	0	0	0	0
2-3	1	1	0	0
2-4	2	2	1	1
2-5	7	6	6	4
3-4	0	0	0	0
3-6	4	2	4	2
4-5	2	0	2	0
4-6	2	0	2	0
4-7	0	0	0	0
5-7	2	2	0	0
6-7	2	2	0	0

Расчёт частных резервов ведем по формулам (1.2) или (1.3), расчёт независимых резервов ведем по формулам (1.6) или (1.7).

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической модели сетевого планирования и управления;
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания;
3. Построение математической модели в общем виде, представление ситуации в виде календарного плана проведения комплекса работ и представление его в виде графической модели;
4. При "ручном" способе расчета на калькуляторах определить ранние и поздние сроки свершения событий и резервы времени событий. Выделить на графике критический путь. Построить график Ганта и эпюру загрузки работников;
5. Расчет на ЭВМ производится с помощью программы «Сетевая модель», реализованной на ПЭВМ в ППП «PRIMA»;

6. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе.

Содержание отчета по лабораторной работе:

1. Цель и постановку задачи в общем виде;
2. Таблица исходных данных с рассчитанной продолжительностью каждой работы в днях;
3. Основные формулы, по которым рассчитывались параметры событий и работ;
4. Сетевой график с нанесенными на него параметрами событий и работ и выделенным критическим путем;
5. Линейная диаграмма (график Ганта) с выделенным критическим путем;
6. Результат оптимизации, оформленный в виде таблицы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Применение теории массового обслуживания для обоснования организационных решений

Цель работы: Закрепление теоретического материала и получение практических навыков по использованию теории массового обслуживания для решения задач по обоснованию управленческих решений в области организации производства, одной из которых является задача расчёта оптимального числа контролёров в цехе.

Постановка задачи. Для нормальной работы основных цехов, в которых производится пооперационный контроль качества продукции, важное значение имеет наличие оптимального количества контролёров. Процесс контроля качества продукции может быть представлен как функционирование системы массового обслуживания, потоком требований в которой является последовательность вызова дежурного контролёра на рабочее место для приёмки изготовленной продукции, а временем обслуживания является продолжительность проведения контрольных операций.

В цехе в смену работают n контролёров, занятых проверкой качества заготовок, технической документации и др. Каждый контролёр может одновременно осуществлять контроль только одного изделия. Если в момент поступления очередного требования на контроль, работа не может быть выполнена (все контролёры заняты), возникает очередь на обслуживание. Всего бригада контролёров обслуживает m рабочих мест. Таким образом, поток требований на контроль ограничен числом m.

Рассчитать основные параметры качества функционирования данной системы при различных вариантах её организации (разном количестве контролёров). Выбрать оптимальный вариант на основе одного из критериев оптимальности.

Основные понятия. Для расчета основных параметров качества функционирования системы массового обслуживания введём следующие обозначения:

n – число обслуживающих каналов (аппаратов);

k – число требований, находящихся в системе одновременно, $k = 0,1; \dots, m$;

$\bar{T}_{обсл}$ – среднее время обслуживания одного требования одним обслуживающим каналом (аппаратом);

λ - интенсивность поступления требований на обслуживание, т.е. количество требований в ед. времени;

ν – интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим каналом (аппаратом).

$$\nu = \frac{1}{\bar{T}_{обсл}}. \qquad (2.1)$$

Тогда

1. Вероятность того, что занято k обслуживающих аппаратов, при условии, что число требований, находящихся в системе, не превосходит числа обслуживающих каналов:

$$P_к = \frac{m!}{k!(m-k)!}\alpha^k \cdot P_o, \quad 1 \le k \le n, \qquad (2.2)$$

где $\alpha = \dfrac{\lambda}{\nu}$.

2. Вероятность того, что в системе находится $\boldsymbol{k}$ требований, для случая, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_к = \frac{m!}{n^{к-n}(m-k)!\,n!}\alpha^k \cdot P_o, \; n \le k \le m, \qquad (2.3)$$

3. Среднее число требований, ожидающих начала обслуживания (средняя длина очереди):

$$M_{оч} = M_1 = \sum_{k=n+1}^{m}(k-n)\cdot P_k \qquad (2.4)$$

4. Коэффициент простоя обслуживаемого требования в ожидании обслуживания (в очереди):

$$K_{по} = K_1 = \frac{M_1}{m} \qquad (2.5)$$

5. Среднее число требований, находящихся в обслуживающей системе (в обслуживании и ожидании его):

$$M_{ст} = M_2 = \sum_{k=1}^{m}k \cdot P_k \qquad (2.6)$$

6. Коэффициент простоя обслуживаемого требования в обслуживающей системе:

$$K_{пс} = K_2 = \frac{M_2}{m} \qquad (2.7)$$

7. Среднее число свободных обслуживающих каналов:

$$M_{ск} = M_3 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot P_k \qquad (2.8)$$

8. Коэффициент простоя обслуживающего канала:

$$K_{пк} = K_3 = \frac{M_3}{n} \qquad (2.9)$$

Рассчитанные по формулам (2.2) – (2.9) параметры системы массового обслуживания дают общую характеристику ее функционирования, не указывая на основе какого критерия выбирается оптимальный вариант организации системы.

Выше нами сформулированы задачи, в которых в качестве обслуживающих систем выступают различного рода вспомогательные службы и хозяйства цеха.

Хотя обслуживающие системы носят вспомогательный характер и не участвуют непосредственно в основном производстве, об их оптимальности следует судить исходя из общих результатов хозяйствования цеха.

Поэтому при выборе оптимального варианта организации обслуживающей системы в качестве *критерия оптимальности* следует брать минимальную себестоимость единицы выпускаемой основным производством продукции, считая ее функцией от варианта организации системы.

Варианты организации обслуживающей системы задаются при этом количеством обслуживающих каналов (аппаратов), которыми в наших задачах являются вспомогательные рабочие (кладовщики-раздатчики инструмента, контролеры-приемщики продукции, слесари-ремонтники, наладчики).

Себестоимость единицы продукции выражается отношением затрат производства к объёму выпуска:

$$\boldsymbol{C = \frac{З}{B}} \tag{2.10}$$

Обслуживающие системы не имеют прямого отношения к выпуску продукции, но влияют на величину её объёма, т.к. от качества обслуживания зависит величина простоев обслуживаемых рабочих мест. Образуемая очередь на обслуживание приводит к значительным потерям, которые несёт цех. При увеличении численного состава вспомогательных служб простои в основном производстве уменьшаются.

Если при существующей в цехе численности обслуживающих каналов (аппаратов) коэффициент простоя рабочих мест в обслуживании и ожидании обслуживания - $\boldsymbol{\tilde{K}_2}$, а при другом количественном составе обслуживающих каналов (аппаратов) - $\boldsymbol{K_2}$, то доля времени работы обслуживаемых рабочих мест основного процесса изменится от $(\boldsymbol{1-\tilde{K}_2})$ до $(\boldsymbol{1-K_2})$. Изменение выпуска продукции при этом пропорционально времени работы рабочих единиц основного процесса. Поэтому влияние численного состава обслуживающей системы на объём выпуска продукции может быть записано как:

$$\boldsymbol{B} = \tilde{\boldsymbol{B}} \cdot \frac{\boldsymbol{1 - K_2}}{\boldsymbol{1 - \tilde{K}_2}}, \qquad (2.11)$$

где $\tilde{\boldsymbol{B}}$ – объём выпуска продукции при существующей в цехе численности обслуживающих каналов ($\tilde{\boldsymbol{n}}$);
$\boldsymbol{B}$ – возможный объём выпуска продукции при другой численности обслуживающих каналов ($\boldsymbol{n}$).

Численность каналов (аппаратов) обслуживающей системы влияет и на величину затрат на производство. Поскольку затраты подразделяются на условно-постоянные и переменные, причем переменные – пропорциональны объёму выпуска продукции, то очевидно рассматривать последние изменяющимися пропорционально времени работы, т.е.:

$$\boldsymbol{\Pi} = \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \frac{\boldsymbol{1 - K_2}}{\boldsymbol{1 - \tilde{K}_2}}, \qquad (2.12)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}$ – величина переменных расходов при существующей в цехе численности обслуживающих каналов ($\tilde{\boldsymbol{n}}$);
$\boldsymbol{\Pi}$ – ожидаемая величина переменных расходов при другой численности обслуживающих каналов ($\boldsymbol{n}$).

Изменения условно-постоянных расходов, включающих расходы на содержание вспомогательных служб в цехе, связаны только с изменениями заработной платы обслуживающих рабочих с доплатами и отчислениями на соцстрах. Если эти расходы в рассматриваемый период составляли в среднем на одного рабочего, работающего в одну смену $\boldsymbol{Q}$ ден.ед, то при изменении численности обслуживающих каналов (аппаратов) они будут иметь вид:

$$\boldsymbol{P} = \tilde{\boldsymbol{P}} + (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}, \qquad (2.13)$$

где $\tilde{\boldsymbol{P}}$ – условно-постоянные расходы при существующей численности обслуживающих каналов (аппаратов) в цехе ($\tilde{\boldsymbol{n}}$);
$\boldsymbol{P}$ – условно-постоянные расходы при другой численности обслуживающих каналов ($\boldsymbol{n}$);
$\boldsymbol{r}$ – число смен работы обслуживающего рабочего в день.

Из изложенного выше следует, что общие затраты на производство, равные сумме условно-постоянных и переменных, будут иметь вид:

$$\boldsymbol{З = П + Р = \tilde{П} \cdot \frac{1 - К_2}{1 - \tilde{К}_2} + [\tilde{Р} + (n - \tilde{n}) \cdot Q \cdot r].} \qquad (2.14)$$

Подставим в (3.9) значения (3.10) и (3.13), получим:

$$\boldsymbol{С = \frac{\tilde{П}}{\tilde{В}} + \frac{[\tilde{Р} + (n - \tilde{n}) \cdot Q \cdot r] \cdot (1 - \tilde{К}_2)}{\tilde{В} \cdot (1 - К_2)}} \qquad (2.15)$$

Этот показатель, а также объем выпуска продукции (2.11) можно брать в качестве критерия оптимальности при выборе необходимого числа обслуживающих каналов (аппаратов) в цехе, т.е. при выборе оптимального варианта организации вспомогательного хозяйства цеха.

Пример лабораторного задания. В цехе в одну смену работают 3 контролёра ($\tilde{n}$ = 3). Общее количество источников, от которых поступает поток требований, 15. Расходы на содержание одного контролера в среднем в месяц составляют Q = 1400 ден.ед. Выпуск продукции цехом в исследуемом месяце составил $\tilde{В}$ = 36885 нормо-ч. Затраты на выпуск были следующими: переменные $\tilde{П}$ = 714992 ден.ед., условно-постоянные $\tilde{Р}$ = 436800 ден.ед. Цех работает в 2 смены.

С помощью хронометража и некоторых вычислений было установлено, что интенсивность поступления одного требования от одного источника составляет λ = 0,02 треб./мин, а среднее время обслуживания одним контролером одного требования $\bar{\mathbf{T}}_{обсл}$ = 4 мин.

Требуется:

1. Рассчитать на ЭВМ основные параметры качества функционирования системы массового обслуживания.

2. Рассчитать на микрокалькуляторе основные показатели хозяйственной деятельности цеха.

3. На основании анализа полученных результатов по критерию минимума себестоимости единицы выпускаемой продукции выбрать оптимальное число контролёров.

Оформление результатов расчетов

1. Рассчитать параметр $\boldsymbol{v}$ – интенсивность обслуживания одного требования одним контролером:

$$\boldsymbol{v = \frac{1}{\overline{T}_{обсл}} = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

2. Рассчитать на ЭВМ основные параметры качества функционирования системы. Расчёт производится по формулам (2.2) – (2.9).

2.1. Указания по проведению расчетов на ЭВМ.

Расчёты показателей системы массового обслуживания можно осуществить и с помощью электронной таблицы Excel. В МЕНЮ ППП PRIMA выберите программу «Система массового обслуживания».

2.2. Протокол диалогового режима расчётов

Расчёт основных параметров массового обслуживания

Ввести следующие исходные данные:

Параметр системы обслуживания $\boldsymbol{\lambda}$? 0,02
Параметр системы обслуживания $\boldsymbol{v}$? 0,25
Количество обслуживающих устройств
(контролёров, наладчиков или роботов) ……..? 3
Максимально возможное число требований в обслуживающей системе (Число станков на участке)……? 15

Замечание! Повторить расчеты для $\boldsymbol{n}$ = 2, 4, 5, 6.

На рис. 2.1 приведена форма ввода исходных данных. В диалоговом окне необходимо выделить закладку «*Параметры*», выбрать вид модели системы массового обслуживания «*Многоканальная замкнутая СМО*» и нажать правой кнопкой мыши на кнопку «Выбор». Нажать на закладку «*Исходные данные*» и ввести с помощью клавиатуры входные параметры СМО (дробная часть отделяется запятой). Для получения решения задачи нажать кнопку «*Пуск*», а после вывода результатов в таблицу Excel нажать кнопку «*Конец*».

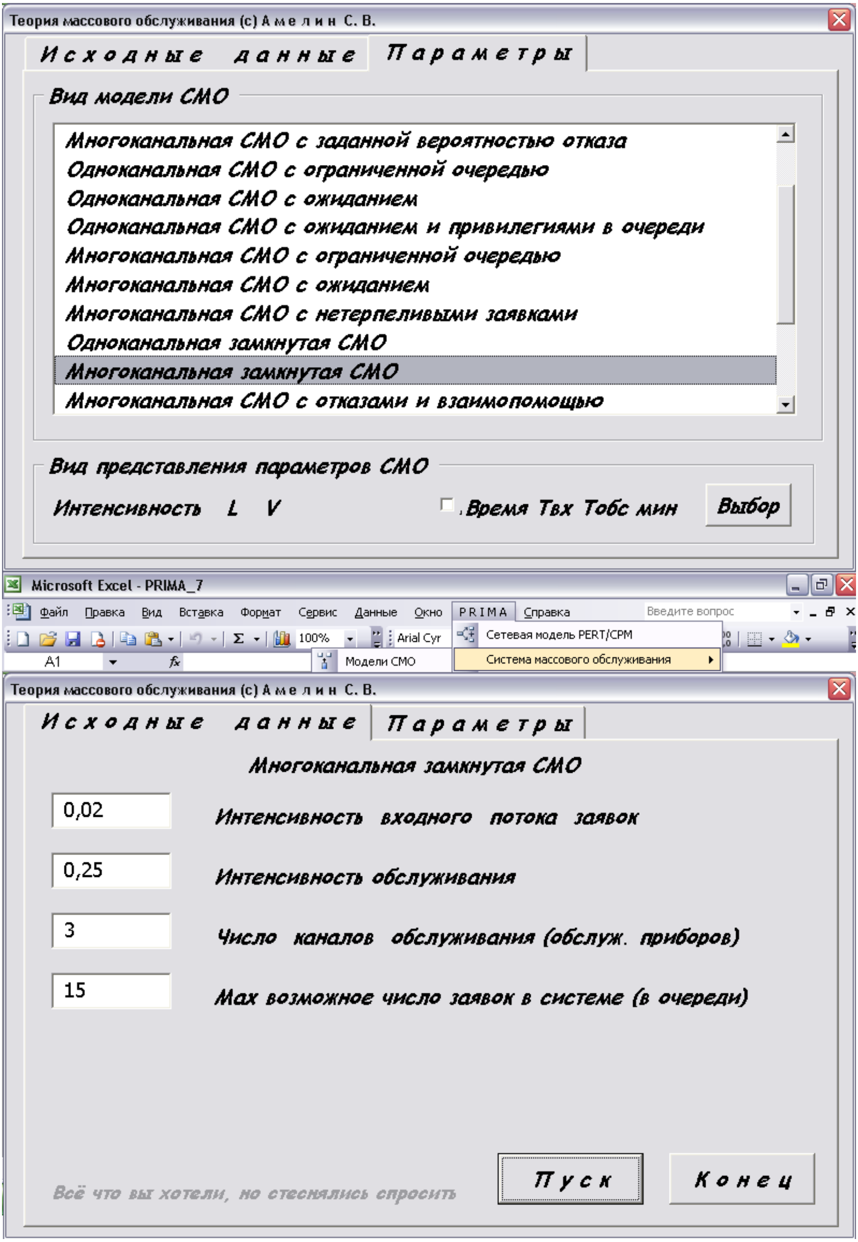


Рис. 2.1. Ввод исходных данных в программе «Система массового обслуживания» в ППП *PRIMA*

	A	B	C	D	E	F
1	Замкнутая многоканальная СМО					
2						
3	интенсивность входящего потока				L =	0,02
4	интенсивность обслуживания				V =	0,25
5	число каналов обслуживания				n =	3
6	число заявок в системе				m =	15
7						
8		Вероятности состояний СМО				
9		P(0)=	0,31			
10		P(1)=	0,37			
11		P(2)=	0,209413			
12		P(3)=	0,072597			
13		P(4)=	0,023231			
14		P(5)=	0,006814			
15		P(6)=	0,001817			
16		P(7)=	0,000436			
17		P(8)=	9,3E-05			
18		P(9)=	1,74E-05			
19		P(10)=	2,78E-06			
20		P(11)=	3,71E-07			
21		P(12)=	3,95E-08			
22		P(13)=	3,16E-09			
23		P(14)=	1,69E-10			
24		P(15)=	4,5E-12			

	A	B	C	D	E	F
25						
26	вероятность простоя канала				Po=	0,311627
27	вероятность обслуживания без очереди				Роб =	0,912226
28	вероятность присоединения к очереди				Роч =	0,087774
29	коэффициент нагрузки системы				a =	0,08
30	абсолютная пропускная способность				A =	0,276951
31						
32	среднее число заявок в очереди				Моч=	0,044648
33	коэффициент простоя в очереди				Кпо=	0,002977
34	среднее время простоя в очереди				Точ=	0,161212
35						
36	среднее число заявок в системе				Мст=	1,152452
37	коэффициент простоя в системе				Кпс=	0,07683
38	среднее время пребывания в системе				Тст=	4,161212
39						
40	среднее число свободных каналов				Мск=	1,892196
41	коэффициент простоя каналов				Кпк=	0,630732
42						
43	среднее число занятых каналов				Мз =	1,107804
44	коэффициент загрузки канала				Кз =	0,369268

Рис. 2.2. Результаты расчета по программе «Система массового обслуживания» в ППП *PRIMA*

3. Рассчитать на калькуляторе такие показатели хозяйственной деятельности предприятия, как объем выпуска, затраты на производство и себестоимость для исходного количества обслуживающих каналов (контролёров) и для всех альтернативных вариантов обслуживания (с большим или меньшим количеством контролёров) по формулам (2.11), (2.14), (2.10) при $\tilde{n} = 3$ и $n = 2, 4, 5, 6$.

4. Все расчеты заносятся в таблицу.

Результаты моделирования

Показатели	Ед. измерений	Число контролеров в системе (n)				
		2	3	4	5	6
M_1	заявок	0,32	0,045	0	0	0
M_2	*	1,40	1,15	1,12	1,11	1,11
M_3	*	0,91	1,89	2,89	3,89	4,89
K_1		0,02	0,003	0	0	0
K_2		0,09	0,077	0,074	0,07	0,07
$1 - K_2$		0,91	0,923	0,926	0,93	0,93
K_3		0,46	0,63	0,72	0,78	0,81
В	нормо-ч	36368,6	38885	36995,6	37180,1	37180,1
З	ден.ед	1128982,1	1141792	1146737	1153112	1155912
С	$\frac{\text{ден.ед}}{\text{нормо-ч}}$	31,04	30,96	31,00	31,01	31,09

5. Анализ результатов

Проведенные расчеты показывают, что при наличии двух контролеров в смене, на контроле и в ожидании подхода контролера в среднем простаивает почти 1,5 рабочих места ($M_2 = 1,4$). При увеличении числа контролеров в смене до трех среднее число простаивающих рабочих мест уменьшается до одного ($M_2 = 1,15$) и дальнейшее увеличение числа контролеров практически не сказывается на изменении этого показателя.

Аналогичная тенденция просматривается и в изменении средней длины очереди: при двух контролерах $M_1 = 0,32$, при трех – резко уменьшается при дальнейшем увеличении практически исчезает.

Коэффициенты K_1, K_2, K_3 и $1 - K_2$, рассчитанные на основе M_1, M_2, и M_3, тоже дают достаточно материала для того, чтобы судить о возможностях улучшения работы службы технического контроля.

Для того, чтобы оргтехмероприятия были связаны с экономическими показателями работы цеха, проанализируем их.

Полученные данные показывают, что свое минимальное значение себестоимость единицы продукции имеет при n = 3. Уменьшение численности контролеров до двух человек приводит к снижению общих затрат на производство продукции на 12809,9 ден.ед. (1141792 – 1128928,1), но при этом уменьшается объем выпуска продукции на 516 нормо-ч (36885 – 36368,6). Увеличение численности контролеров до четырех человек приводит к увеличению выпуска продукции всего на 110,6 нормо-ч, причём и общие затраты увеличиваются на 4945 ден.ед.

Из приведенного анализа следует, что оптимальной на данном предприятии является существующая система организации службы контроля, то есть – три контролёра.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической модели массового обслуживания;
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания;
3. Построение математической модели в общем виде, представление ситуации в виде системы массового обслуживания;
4. Расчет на ЭВМ производится с помощью программы «Система массового обслуживания», реализованной на ПЭВМ в ППП «PRIMA»;
5. При "ручном" способе расчета на калькуляторах определить показатели хозяйственной деятельности предприятия;
6. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе.

Содержание отчета по лабораторной работе:

1. Название, цель работы, постановка задачи;
2. Таблица исходных данных;
3. Математические выражения для моделируемой СМО;
4. Сводная таблица результатов расчета;
5. Анализ полученных результатов и выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Использование балансовых моделей в плановых расчетах

Цель работы: закрепление знаний по теории и практическому использованию балансовых моделей в плановых расчетах и выработке навыков проведения многовариантных расчетов в диалоговом режиме с ЭВМ.

Общие положения. Балансовая модель производства записывается в виде системы уравнений, каждое из которых выражает требование равенства (баланса) между производимым отдельным экономическим объектом количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Пусть экономическая система состоит из $\boldsymbol{n}$ экономически взаимосвязанных объектов. Продукция каждого объекта (валовой выпуск) частично идет на внешнее потребление (конечный продукт), а частично используется объектами данной экономической системы. Эта часть продукции называется производственным потреблением. Таким образом, каждый объект системы выступает и как производитель продукции, и как ее потребитель.

Обозначим через:

$\boldsymbol{i}$ – порядковый номер экономического объекта, производящего продукцию, $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$;

$\boldsymbol{j}$ – порядковый номер экономического объекта, потребляющего продукцию, $\boldsymbol{j = \overline{1, n}}$;

$\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{y_i}$ – валовой выпуск и конечный продукт (соответственно) i-ой отрасли;

x_{ij} – поставки продукции из i-го экономического объекта в j-й, т.е. объем продукции i-го объекта, использованной при производстве продукции j-го объекта.

В дальнейшем будем предполагать, что баланс составляется в стоимостном выражении.

Соотношение, характеризующее распределение продукции, произведенной i-м экономическим объектом,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

называется I балансовым соотношением.

Предположим, что поставки продукции, идущей из i-го объекта в j-й прямо пропорциональны валовому выпуску того объекта, куда они направляются, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j. \tag{3.2}$$

Коэффициенты a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат.*

Подставим (1.2) в (1.1), получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.3}$$

или в матричном виде:

$$AX + Y = X. \tag{3.4}$$

Выражения (1.3) и (1.4) называются моделью Леонтьева.

Приближенно можно полагать, что коэффициенты a_{ij} постоянны в некотором промежутке времени, охватывающем как отчетный, так и планируемый период. Поэтому можно считать, что коэффициенты a_{ij} известны к началу планового периода. Тогда модель Леонтьева можно использовать для следующих плановых расчетов.

1. Задавая объемы конечного продукта y_i всех отраслей, определить их валовые выпуски x_i.

2. Задавая объемы конечного продукта части отраслей и объемы валового выпуска остальных, определить объемы валовых выпусков первых и объемы конечной продукции вторых.

Решение 1-ой задачи записывается в виде:

$$X = (E - A)^{-1} Y, \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица, того же порядка, что и матрица $\boldsymbol{A}$, а $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ – матрица, обратная к $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$.

Матрицу $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ обозначают через $\boldsymbol{B}$. Коэффициенты $\boldsymbol{B_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{B}$ называются *коэффициентами полных материальных затрат*. Они показывают, сколько в целом нужно произвести продукции $\boldsymbol{i}$-м объектом для выпуска в сферу конечно потребления одной единицы продукции j-го объекта. Коэффициенты полных затрат всегда превышают коэффициенты прямых на величину косвенных затрат.

Решение 2-ой задачи, называемой смешанной, осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X_1 = (E - A_{11})^{-1}(\overline{Y}_1 + A_{12}\overline{X}_2);} \\ \boldsymbol{Y_2 = (E - A_{22})\overline{X}_2 \cdot A_{21}X_1.} \end{cases} \tag{3.6}$$

После определения объемов валовых выпусков продукции, в случае необходимости, можно рассчитать матрицу поставок продукции из $\boldsymbol{i}$-го объекта $\boldsymbol{j}$-му для планового периода по формуле (3.2).

Пример лабораторного задания. В составе предприятия 4 цеха, каждый из которых выпускает один вид продукции. Плановым заданием предусматривается выпуск конечной продукции первыми двумя цехами. Мощности третьего и четвертого цехов обеспечивают валовой выпуск продукции не более, чем 520 и 450 условных единиц соответственно. Данные о межцеховых материальных потоках и объемах конечной продукции каждого цеха приведены в таблице.

Данные межпродуктового баланса

Номер цеха	Межцеховые потоки				Конечный продукт
	1	2	3	4	
1	0	120	30	70	380
2	70	80	50	30	430
3	170	150	10	80	70
4	160	100	60	20	80

Требуется:

1. По данным баланса, приведенного в табл. 3.1, рассчитать с помощью калькулятора:

1.1. Валовой выпуск каждого цеха.

1.2. Матрицу коэффициентов прямых затрат.

2. Рассчитать на ЭВМ:

2.1. Матрицу коэффициентов полных затрат.

2.2. Матрицу коэффициентов косвенных затрат.

2.3. Валовой выпуск 1 и 2-го цехов и конечный продукт 3 и 4-го цехов при следующих условиях:

увеличить выпуск конечной продукции первых двух цехов на 4 %, оставив без изменения валовые выпуски третьего и четвертого цехов;

увеличить выпуск конечной продукции 1-го цеха на 9 %, 2-го – на 7 % при 100 % использовании мощностей 3-го и 4-го цехов;

увеличить выпуск конечной продукции 1-го цеха на 5 %, 2-го – на 6 % при 95 % использовании мощностей 3-го и 4-го цехов.

2.4. Для третьего варианта рассчитать производственную программу каждого цеха.

3. В каждом пункте отчета о выполнении лабораторной работы дать краткие пояснения и привести формулы, по которым проводились расчеты.

Оформление результатов проведенных расчетов.

1. Расчеты на калькуляторе или в электронной таблице:

Расчет валовых выпусков каждого цеха по данным таблицы осуществляется на основе 1-го балансового соотношения:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.7}$$

$x_1 = 0 + 120 + 30 + 70 + 380 = 600$

$x_2 = 70 + 80 + 50 + 30 + 430 = 660$

$x_3 = 170 + 150 + 10 + 80 + 70 = 480$

$x_4 = 160 + 100 + 60 + 60 + 80 = 420.$

Коэффициенты матрицы прямых затрат рассчитываются по формуле:

$$\boldsymbol{a_{ij}} = \frac{\boldsymbol{x_{ij}}}{\boldsymbol{x_j}} \qquad (3.8)$$

$$a_{11} = \frac{0}{600} = 0 \quad a_{12} = \frac{120}{660} = 0{,}182 \quad a_{13} = \frac{30}{480} = 0{,}062 \quad a_{14} = \frac{70}{420} = 0{,}167$$

$$a_{21} = \frac{70}{600} = 0{,}117 \quad a_{22} = \frac{80}{660} = 0{,}121 \quad a_{23} = \frac{50}{480} = 0{,}104 \quad a_{24} = \frac{30}{420} = 0{,}071$$

$$a_{31} = \frac{170}{600} = 0{,}283 \quad a_{32} = \frac{150}{660} = 0{,}227 \quad a_{33} = \frac{10}{480} = 0{,}021 \quad a_{34} = \frac{80}{420} = 0{,}190$$

$$a_{41} = \frac{160}{600} = 0{,}267 \quad a_{42} = \frac{100}{660} = 0{,}152 \quad a_{43} = \frac{60}{480} = 0{,}125 \quad a_{44} = \frac{20}{420} = 0{,}048$$

Получена матрица коэффициентов прямых затрат следующего вида:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0{,}182} & \boldsymbol{0{,}062} & \boldsymbol{0{,}167} \\ \boldsymbol{0{,}117} & \boldsymbol{0{,}121} & \boldsymbol{0{,}104} & \boldsymbol{0{,}071} \\ \boldsymbol{0{,}283} & \boldsymbol{0{,}227} & \boldsymbol{0{,}021} & \boldsymbol{0{,}190} \\ \boldsymbol{0{,}267} & \boldsymbol{0{,}152} & \boldsymbol{0{,}125} & \boldsymbol{0{,}048} \end{pmatrix}$$

2. Подготовка вариантов для проведения расчётов на ЭВМ

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$\overline{y}_1=380\cdot1{,}04=395{,}2$	$\overline{y}_1=380\cdot1{,}09=414{,}2$	$\overline{y}_1=380\cdot1{,}05=399$
$\overline{y}_2=430\cdot1{,}04=447{,}2$	$\overline{y}_2=430\cdot1{,}07=460{,}1$	$\overline{y}_2=430\cdot1{,}06=455{,}8$
$\overline{x}_3 = 480$	$\overline{x}_3 = 520$	$\overline{x}_3 =520\cdot0{,}95 = 494$
$\overline{x}_4 = 420$	$\overline{x}_4 = 450$	$\overline{x}_4= 450\cdot0{,}95 = 427{,}5$

Указания по проведению расчётов на ЭВМ. Ввести исходные данные в электронную таблицу Excel (рис. 3.1). В рассматриваемом примере матрица коэффициентов прямых затрат введена в ячейки A2 **:** D5. Известные значения вектора конечной продукции – в ячейки E2 **:** E3. Известные значения вектора валового выпуска – в ячейки F4 **:** F5. В ППП Prima Excel выбрать программу «*Межотраслевая балансовая модель*» (рис. 3.1). В соответствующие окна диалоговой формы с помощью мыши ввести адреса введённой матрицы и векторов. Для получения решения нажать на кнопку «Пуск», после получения результатов – нажать на кнопку «Конец».

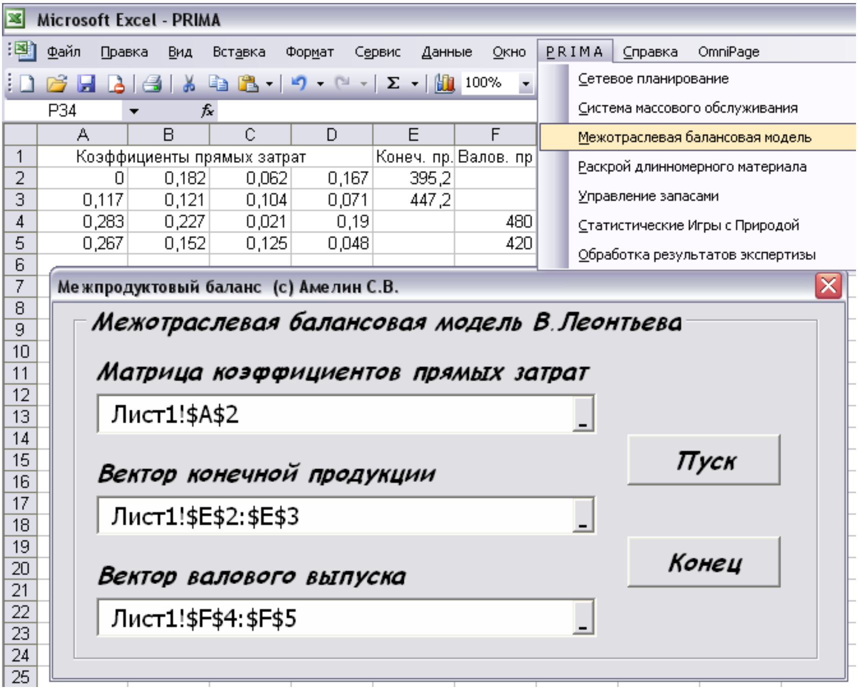


Рис. 3.1. Ввод исходных данных в «Межотраслевую балансовую модель» в ППП *PRIMA*

Пояснения к расчётам на ЭВМ

1. Коэффициенты полных затрат – это элементы матрицы, обратной к ***(E – A)***. Рассчитанная на ЭВМ матрица имеет вид:

$$(E-A)^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1{,}143 & 0{,}316 & 0{,}138 & 0{,}252 \\ 0{,}249 & 1{,}261 & 0{,}171 & 0{,}171 \\ 0{,}468 & 0{,}452 & 1{,}143 & 0{,}344 \\ 0{,}421 & 0{,}349 & 0{,}216 & 1{,}193 \end{pmatrix}$$

	H	I	J	K	L	M	N
1	РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА						
2							
3	МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЯМЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАТРАТ						
4	0	0,182	0,062	0,167			
5	0,117	0,121	0,104	0,071			
6	0,283	0,227	0,021	0,19			
7	0,267	0,152	0,125	0,048			
8							
9	МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ						
10	1,143234	0,315891	0,138091	0,251666			
11	0,241536	1,261344	0,17107	0,170583			
12	0,46812	0,451568	1,142978	0,343911			
13	0,420664	0,349279	0,216119	1,193395			
14							
15	МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ КОСВЕННЫХ ЗАТРАТ						
16	0,143234	0,133891	0,076091	0,084666			
17	0,124536	0,140344	0,06707	0,099583			
18	0,18512	0,224568	0,121978	0,153911			
19	0,153664	0,197279	0,091119	0,145395			
20							
21	МАТРИЦА МЕЖЦЕХОВЫХ ПОСТАВОК ПО НОВОМУ ПЛАНУ						
22	0	124,306	29,76	70,14			
23	72,423	82,643	49,92	29,82			
24	175,177	155,041	10,08	79,8			
25	165,273	103,816	60	20,16			
26							
27	ВАЛ.ВЫП.	КОН.ПРОД.	ПРОИЗВ.ЗАТРАТ				
28	619	395,2	223,8				
29	683	447,2	235,8				
30	480	60	420				
31	420	71	349				

Рис. 3.2. Результаты расчета по программе
«Межотраслевая балансовая модель»

2. Косвенные затраты равны разности между полными и прямыми затратами. Следовательно, матрица косвенных затрат получается вычитанием из матрицы ***B*** матрицы ***A***.

$$
(B-E-A)=\begin{pmatrix} 0,143 & 0,134 & 0,076 & 0,085 \\ 0,124 & 0,140 & 0,067 & 0,099 \\ 0,185 & 0,225 & 0,122 & 0,154 \\ 0,154 & 0,197 & 0,091 & 0,145 \end{pmatrix}
$$

3. Так как по двум первым цехам известны плановые задания по выпуску конечной продукции, а по 3 и 4-му заданы валовые выпуски, то определение валовых выпусков для 1 и 2-го цехов и объемов конечной продукции для 3 и 4-го цехов в плановом периоде осуществляется по комбинированной схеме расчетов, задаваемой формулами:

$$
X_1 = (E - A_{11})(\bar{Y}_1 + A_{12}\bar{X}_2) \tag{3.9}
$$

$$
Y_2 = (E - A_{22})\bar{X}_2 - A_{21}X_1, \tag{3.10}
$$

где

$$
X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}_1 = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}
$$

(черточкой отмечены известные из условия задачи величины), а матрица A_{ik} (i,k = 1,2) получены разбиением A на соответствующие блоки

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.11}
$$

где

$$
A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0,182 \\ 0,117 & 0,121 \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 0,062 & 0,167 \\ 0,104 & 0,071 \end{pmatrix},
$$

$$
A_{21} = \begin{pmatrix} 0,283 & 0,227 \\ 0,267 & 0,152 \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 0,021 & 0,190 \\ 0,125 & 0,048 \end{pmatrix}.
$$

4. Результаты расчётов: валовые выпуски 1 и 2-го цехов

1 вариант	2 вариант	3 вариант
x_1 = 619,2	x_1 = 650,4	x_1 = 627,5
x_2 = 681,9	x_2 = 707,9	x_2 = 695,0

Объёмы конечной продукции 3 и 4-го цехов

y_3 = 60,1	y_3 = 78,8	y_3 = 67,0
y_4 = 70,9	y_4 = 82,1	y_4 = 72,0

5. Расчёты производственной программы каждого цеха осуществляются по формуле:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j. \qquad (3.12)$$

Результаты расчётов производственной программы по 3-му варианту представлены в таблице:

Номер цеха	Межцеховые поставки			
	1	2	3	4
1	0	126,499	30,628	71,392
2	73,420	84,101	51,376	30,352
3	177,588	157,776	10,374	81,225
4	167,548	105,647	61,750	20,520

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической модели межпродуктового (межотраслевого) баланса;
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания;
3. Построение математической модели в общем виде, представление ситуации в виде балансовой модели (модели Леонтьева);
4. При "ручном" способе расчета на калькуляторах определить матрицу коэффициентов прямых материальных затрат и новые значения плана выпуска конечной продукции;
5. Расчет на ЭВМ производится с помощью программы «Межотраслевая балансовая модель», реализованной на ПЭВМ в ППП «PRIMA»;
6. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе.

Отчёт по работе должен содержать:

1. Цель и постановку задачи в общем виде;
2. Экономико-математическую модель задачи и исходные данные для расчета на ЭВМ;
3. Результаты моделирования на ЭВМ и их экономическую интерпретацию;
4. Выводы по лабораторной работе должны содержать анализ результатов моделирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Применение электронной таблицы Excel для решения задач оптимизации

Цель работы: изучение порядка работы с электронной таблицей при решении задач оптимизации, проведение анализа решения оптимизационных задач в Excel.

Исходные положения. Если финансы, оборудование, сырье и даже людей полагать ресурсами, то значительное число задач в экономике можно рассматривать как задачи распределения ресурсов. Часто математической моделью таких задач является задача линейного программирования.

Допустим требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов Прод 1, Прод 2, Прод 3, Прод 4, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, оборудование, сырье. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа (норма расхода), наличие располагаемого ресурса, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены в таблице:

Ресурс	Прод 1	Прод 2	Прод 3	Прод 4	Наличие
Прибыль	15	24	19	27	
Труд	2	2	2	2	30
Оборуд.	12	8	10	6	200
Сырье	8	20	12	26	125

Математическая модель задачи:
максимизировать прибыль от реализации продукции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \qquad (4.1)$$

произведенной при ограниченном количестве ресурсов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x \le b_i; \quad i = \overline{1,m}; \qquad (4.2)$$

при условии неотрицательности переменных

$$x_j \ge 0; \; j = \overline{1, n}, \qquad (4.3)$$

где x_j - количество выпускаемой продукции j-го типа;

b_i - количество располагаемого ресурса i-го вида; a_{ij} - норма расхода i-го ресурса для выпуска единицы продукции j-го типа; c_j - прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го типа, m – количество видов ресурсов; n - количество видов продукции.

Подставим исходные данные в модель:

$$F = 15\,X_1 + 24\,X_2 + 19\,X_3 + 27\,X_4 \to MAX$$

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 + 2\,X_4 \le 30 \\ 12\,X_1 + 8\,X_2 + 10\,X_3 + 6\,X_4 \le 200 \\ 8\,X_1 + 20\,X_2 + 12\,X_3 + 26\,X_4 \le 125 \end{cases}$$

$$X_j \ge 0;\; j=\overline{\mathbf{1,4}}.$$

Ввод условий задачи в электронную таблицу состоит из следующих основных шагов:

1. Создание формы для ввода условий задачи;
2. Ввод исходных данных;
3. Ввод зависимостей из математической модели;
4. Назначение целевой функции;
5. Ввод ограничений и граничных условий.

Форма для ввода условий может иметь следующий вид (рис. 4.1). После подготовки формы таблицы необходимо ввести исходные параметры (коэффициенты функции цели и ограничений и соответствующие зависимости) экономико-математической модели (рис. 4.2)

Для ввода зависимости (формулы) для целевой функции (ЦФ) необходимо выполнить следующее:

выделить ячейку, в которую будет вводиться формула;

с помощью мыши нажать кнопку *Вставка функции* **[*fx*];**

в диалоговом окне вызвать категорию *Математические функции*;

выбрать в окне *Функции* СУММПРОИЗВ;

нажать [*ОК* или *Далее*], (появляется диалоговое окно);

в *массив 1* ввести адреса ячеек, содержащих значения переменных (или с клавиатуры или протаскивая мышь по ячейкам);

в *массив 2* ввести адреса коэффициентов функции цели;

нажать [*ОК* или *Готово*].

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**Переменные**				
2	**Имя**	**Прод 1**	**Прод 2**	**Прод 3**	**Прод 4**			
3	**Значение**							
4						**ЦФ**	**Направл.**	
5	**Коэф. в ЦФ**							
6								
7				**Ограничения**				
8	**Вид**					**Лев.часть**	**знак**	**Прав.часть**
9	**Труд**							
10	**Оборуд.**							
11	**Сырье**							

Рис. 4.1. Форма для ввода исходных данных для математической модели задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Переменные				
2	Имя	Прод 1	Прод 2	Прод 3	Прод 4			
3	Значение							
4						ЦФ	Направл.	
5	Коэф. в ЦФ	15	24	19	27	= СУММПРОИЗВ ($B$3:$E$3;B5:E5)	MAX	
6								
7				Ограничения				
8	Вид					Лев.часть	знак	Прав.часть
9	Труд	2	2	2	2	= СУММПРОИЗВ ($B$3:$E$3;B9:E9)	<=	30
10	Оборуд.	12	8	10	6	= СУММПРОИЗВ ($B$3:$E$3;B10:E10)	<=	200
11	Сырье	8	20	12	26	= СУММПРОИЗВ ($B$3:$E$3;B11:E11)	<=	125

Рис. 4.2. Ввод зависимостей из математической модели в электронную таблицу

Поскольку формулы левых частей ограничений имеют то же строение, что и функция цели (меняются только коэффициенты), то их ввод можно осуществить с помощью копирования. При копировании относительные ссылки на адрес ячейки (например, A1) изменятся в зависимости от количества пройденных ячеек по вертикали или горизонтали.

Ссылка на ячейку в виде абсолютного адреса не изменится при копировании содержащей ее формулы. Абсолютный адрес ячейки имеет знак $ перед буквой столбца и номером строки (например, $A$1). В смешанном адресе ячейки только одна из его компонент абсолютна, а другая относительна (например, $A1 или A$1). Нажатием на клавиатуре кнопки *F4* тип ссылки на ячейку можно изменить с относительного на абсолютный, смешанный и снова на относительный.

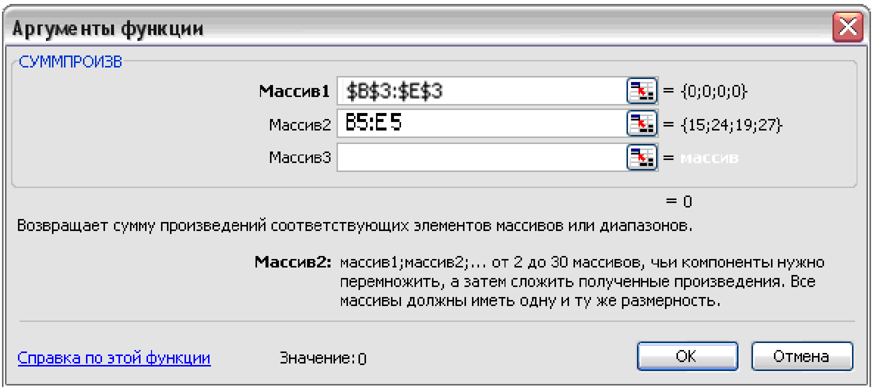


Рис. 4.3. Ввод функции цели (или ограничений)

Копировать формулы можно несколькими способами:

выделить ячейку - источник для копирования;

нажать [*Копировать* (в буфер)] - кнопку в виде двух листов;

выделить ячейку в которую будем копировать;

нажать [*Вставить* (из буфера)] - кнопка в виде папки и листа;

пунктир в источнике убирается клавишей [*Esc*].

Такого же результата можно добиться используя команды из меню *Правка*. Другим способом является перетаскивание формулы с помощью мыши:

выделить объект копирования и подвести курсор к границе объекта;

нажать [*Ctrl*] и удерживая переместить копию объекта на новое место;

отпустить кнопку мыши и [*Ctrl*].

Если область для копирования расположена вплотную к источнику, тогда копирование осуществляется протаскиванием мыши:

выделить ячейку - источник копирования;

курсор на квадратик в правом нижнем углу выделенной ячейки;

переместить курсор в виде перекрестия в ячейку(ки) куда будем копировать и отпустить кнопку мыши.

Для ввода направления поиска оптимального значения целевой функции (ЦФ) и граничных условий вызвать в меню *Сервис\Поиск решения* и далее в диалоговом окне:

в поле *Установить целевую ячейку* ввести адрес ячейки, содержащей формулу ЦФ;

выбрать направление поиска оптимального значения ЦФ (установив точку в круге у *max*, *min* или *= значению*);

в поле *Изменяя ячейки* ввести адреса ячеек, содержащих значения искомых переменных (до 200 ячеек);

для ввода ограничений нажать кнопку [*Добавить*];

в диалоговом окне *Добавление ограничения* в левом поле *Ссылка на ячейку* ввести адрес ячейки, содержащей переменную или формулу левой части ограничений, выбрать знак **(<=, >=, =)**, в правом поле *Ограничение* ввести адрес ячейки, содержащей значение правой части ограничения (таким образом вводятся граничные условия для переменных и условия ограничений); ограничения можно вводить используя ссылки на диапазоны ячеек содержащих формулы левой части и числовые значения правой части ограничений;

после ввода последнего ограничения нажать [*ОК*].

Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, вызвать команды [*Изменить*] или [*Удалить*].

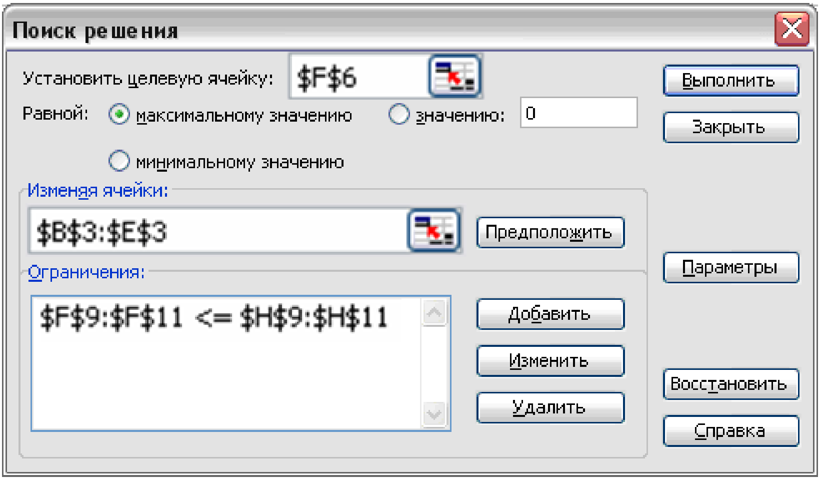


Рис. 4.4. Формирование модели с помощью «Поиска решения»

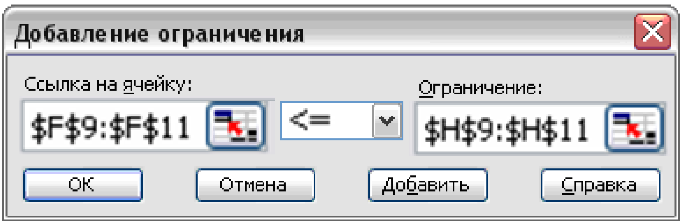


Рис. 4.5. Добавление ограничений к модели

Команда [*Параметры*] вызывает диалоговое окно *Параметры поиска решения*. С помощью команд этого окна можно вводить условия для решения задач оптимизации всех классов.

Максимальное время - служит для назначения времени в секундах, выделяемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32767 с (более 9 часов). Значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства задач.

Предельное число итераций - служит для назначения числа итераций. Используемое по умолчанию значение 100 подходит для решения большинства задач.

Относительная погрешность - задает точность вычислений.

Линейная модель - для решения задач линейного программирования.

Неотрицательные значения – для выполнения условия неотрицательности получаемых значений переменных. Другой способ выполнения этого условия – добавление ограничений для каждой переменной в виде $x_i \geq 0$.

Автоматическое маситабирование используется для получения корректного решения, если исходные данные в модели варьируются в широком диапазоне, например от единиц до сотен тысяч.

После задания параметров нажать [*OK*].

Результаты поиска решения вызываются нажатием кнопки [*Выполнить*]. Для анализа результатов решения выводятся отчеты по результатам, устойчивости и пределам изменения переменных.

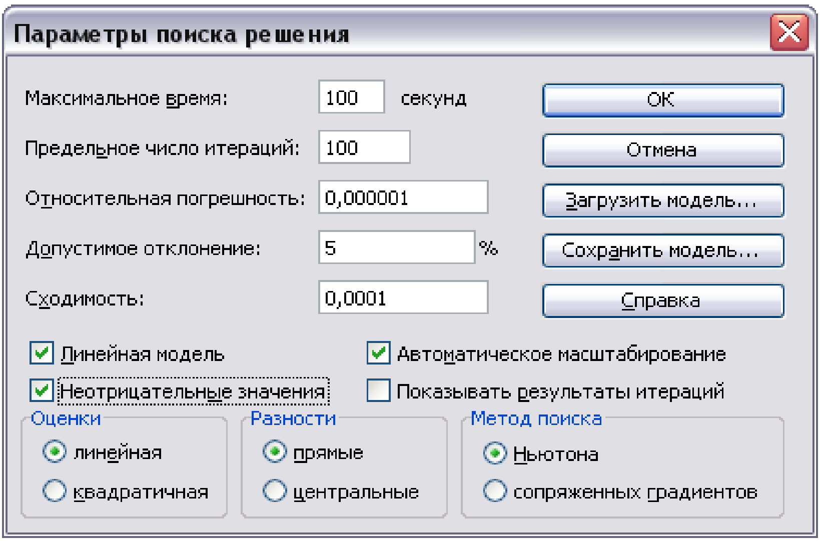


Рис. 4.6. Установка параметров «Поиска решения»

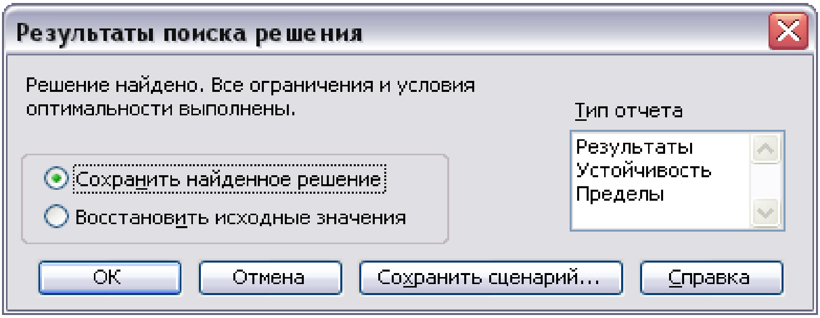


Рис. 4.7. Выбор типов отчетов

После успешного решения задачи на экране появляется диалоговое окно *Результаты поиска решения*. (Решение найдено). С помощью этого окна можно вызвать отчеты трех типов: результаты; устойчивость; пределы.

Отчет по результатам. Включает исходные и конечные значения целевой и изменяемых ячеек. В графе *Значение* приводятся величины использованного ресурса. Если дефицитный ресурс используется полностью, то в графе *Статус* **(***Состояние***)** соответствующее ограничение указывается как *связанное*; при неполном использовании ресурса имеющегося в избытке в этой графе указывается -*не связан*.

Показывает в графе *Разница* - разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием (например, количество неиспользованного ресурса или объём сверхплановой продукции).

Отчет по устойчивости. Содержит сведения о чувствительности решения к малым изменениям в изменяемых ячейках или в формулах ограничений.

Нормированная стоимость - дополнительные переменные в двойственной задаче, показывающие на сколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение.

Допустимые изменения (*увеличение* и *уменьшение*) значений коэффициентов целевой функции и ресурсов, при которых сохраняются оптимальные значения переменных, входящих в первоначальное решение. При выходе за эти границы оптимальное решение может меняться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (то есть будет выгоден выпуск другой продукции в иных пропорциях).

Теневая цена - двойственные оценки переменных прямой исходной задачи, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу. Значение двойственной оценки тем больше, чем более дефицитен ресурс. Для ресурсов, имеющихся в избытке двойственная оценка равна нулю.

*Отчет по пределам***.** Включает исходные и конечные значения изменяемых и целевой ячеек, а также верхние и нижние границы значений, которые могут принимать влияющие ячейки при соблюдении ограничений. Показывает значение целевой функции при выпуске каждого из типов продукции на нижнем пределе (по умолчанию - это ноль, т.е. при невыпуске данной продукции).

2. Параметрический анализ.

Провести серию экспериментов на модели для значений ресурса "Сырье"- 50; 100; 150; 200; 250; 300; 350; 400; 450.

Порядок ввода:

Удалить результат решения - выделить область таблицы, содержащую значения переменных (B3:E3); нажать клавишу "← *Delete*"; убрать выделение (клавиша "*Esc*" или щелкнуть левой кнопкой мыши по свободному полю).

Ввести в ячейку правой части ограничения по сырью (ячейка H11) значение 50.

В меню *Сервис* вызвать *Поиск решения* нажать кнопку *Выполнить*.

Результаты поиска решения. Сохранить сценарий.

Ввести имя сценария (Сырьё = 50). ОК. ОК.

Выполнить решение для всех значений ресурса "Сырьё".

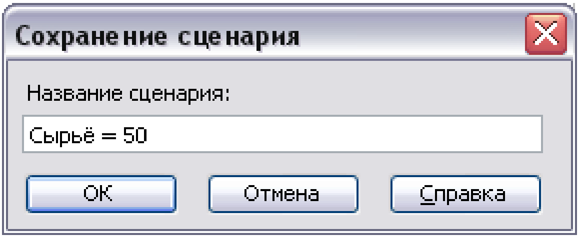


Рис.4.8. Ввод названия сценария

Представление результатов решения.
В меню *Сервис* вызвать *Сценарии*.
Диспетчер сценариев. Отчет. Структура. ОК.
Итоговый сценарий.

Примечание. В некоторых случаях правильная работа *Сценария* зависит от установки региональных стандартов. Нажмите кнопку *Пуск*, выберите *Настройка*, *Панель управления*, *Язык и региональные стандарты*, *Английский* (США).

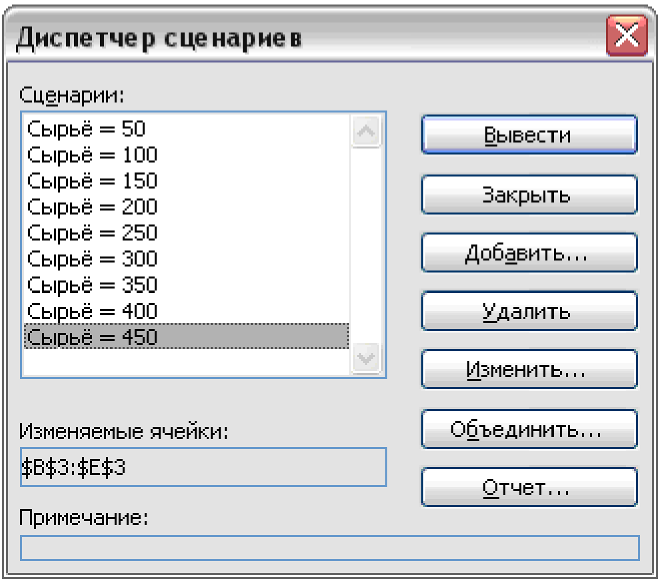


Рис.4.9. Вид диспетчера сценариев

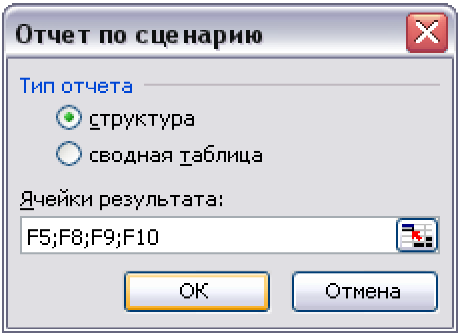


Рис.4.10. Выбор типа отчёта

Структура сценария

	Текущие значения:	Сырье = 50	100	150	200	250	300	350	400	450
Изменяемые:										
$B$3	0.00	6.25	12.50	7.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$C$3	0.00	0.00	0.00	0.00	2.50	8.75	15.00	6.67	0.00	0.00
$D$3	0.00	0.00	0.00	7.50	12.50	6.25	0.00	0.00	0.00	0.00
$E$3	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8.33	15.00	15.00
Результат:										
$F$5	405	93.75	187.5	255	297.5	328.75	360	385	405	405
$F$8	30	12.5	25	30	30	30	30	30	30	30
$F$9	90	75	150	165	145	132.5	120	103.33	90	90
$F$10	390	50	100	150	200	250	300	350	390	390

Рис. 4.11. Итоговый вид сценария с результатами решения

3. Решить задачу при назначении граничных условий на все виды выпускаемой продукции $1 \le X_j \le 5$. Ввести эти условия в ячейки для нижней и верхней границ значений переменных (B4**:**E4 и B5**:**E5).

4. Решить задачу с иной целевой функцией: минимизация используемых ресурсов при заданном результате.

Ввести в модель дополнительные переменные - неиспользованные ресурсы, а функцию цели направить на максимизацию неиспользуемых (сэкономленных) ресурсов.

$$f(x)=X_5+X_6+X_7 \to MAX$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 \le 30 \\ 12X_1 + 8X_2 + 10X_3 + 6X_4 \le 200 \\ 8X_1 + 20X_2 + 12X_3 + 26X_4 \le 125 \end{cases}$$

$$1 \le X_j \le 5;\ j = \overline{\boldsymbol{1, 4}}$$

Ввести новую целевую функцию в свободную ячейку, например (I4).

5. Решение задач целочисленного программирования

Если решение задачи должно быть целочисленным, например для количества единиц выпускаемой продукции, тогда в меню *Сервис* вызвать *Поиск решения*. Для каждого значения переменных *Добавить ограничения* на челочисленность получаемых результатов: B3=целое; C3=целое; D3=целое; E3=целое.

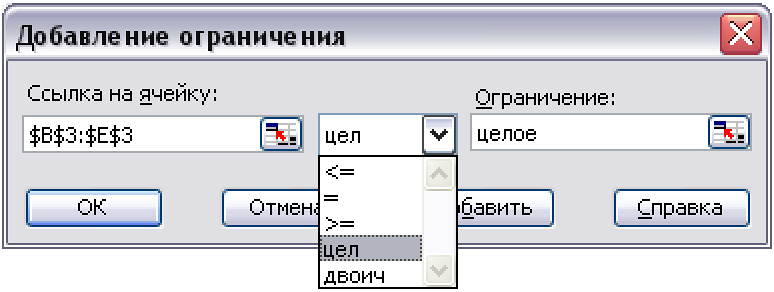


Рис.4.12. Добавление условия целочисленности решения

6. Вывод промежуточных результатов вычислений.

Для показа всех этапов решения задачи необходимо нажать кнопку *Параметры* и выбрать опцию *Показывать результаты итераций*. [*ОК*]. [*Выполнить*]. [*Сохранить сценарий*]. [*Продолжить*].

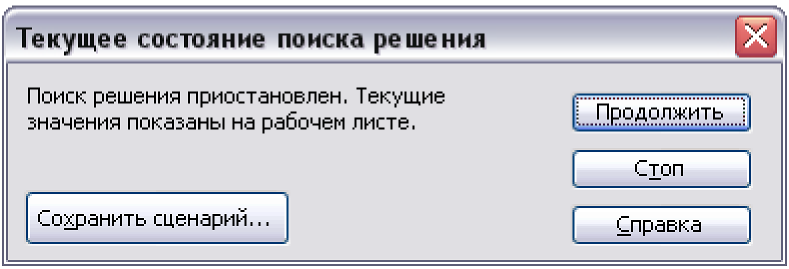


Рис.4.13. Сохранение результатов решения по итерациям

Ввести номер итерации (итерация 1, 2, ...) как имя сценария. [*ОК*]. [*Продолжить*].

Решение найдено. [*Сохранить сценарий*] [*ОК*].

Сервис\Сценарии\ Вывести

Диспетчер сценариев\Отчет\Структура ОК.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической постановки задачи оптимального планирования;
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания;
3. Построение математической модели оптимального планирования производства в общем виде и составление матрицы исходных данных для расчета задачи на ЭВМ;
4. Расчет производится с помощью программы «Поиск решения», реализованной на ПЭВМ в электронной таблице Excel;
5. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе.

Отчет по работе должен содержать:

1. Цель и экономико-математическую постановку задачи оптимального планирования производства;
2. Экономико-математическую модель в общем виде и исходные данные для расчета на ЭВМ;
3. Порядок работы на ЭВМ при решении задачи;
4. Результаты моделирования на ЭВМ и их экономическую интерпретацию;
5. Выводы по лабораторной работе должны содержать анализ и экономическую интерпретацию результатов моделирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
Методы оптимизации раскроя материалов

Цель работы: Закрепление знаний в области экономико-математического моделирования, знакомство с методикой решения задачи рационального раскроя материалов, основанной на решении оптимизационной задачи линейного программирования.

Исходные положения. Изготовление многих видов современной промышленной продукции начинается с раскроя материалов, что является одной из важных производственных задач для заготовительного производства и органов материально-технического снабжения.

Задачи оптимального раскроя материалов - одни из первых задач, к решению которых применялись методы линейного программирования. Они заключаются в определении наилучшего способа раскроя поступающего материала, при которой будет изготовлено наибольшее число готовых изделий в заданном ассортименте или будет получено наименьшее количество отходов.

Первая работа, посвященная решению задач, названных впоследствии задачами линейного программирования, появилась в 1939 г. Это была книга Л.В.Канторовича "Математические методы организации и планирования производства". Толчком для ее появления послужила задача, поставленная перед Институтом математики и механики Ленинградского Государственного университета лабораторией фанерного треста. В других отраслях промышленности также успешно применялись экономико-математические методы оптимизации раскроя материалов. Так, еще в 1948 - 1949 гг. математические методы раскроя были успешно применены на вагоностроительном заводе им. Егорова в Ленинграде, что позволило снизить в несколько раз отходы при раскрое различных материалов.

Математическая модель задачи.

Поступающие на предприятие материалы подлежат раскрою на заготовки. От правильности раскроя зависит себестоимость продукции (используется, например на автозаводах и в др.).

В большинстве случаев раскрой материалов на заготовки производится в определенной пропорции, обеспечивающей получение комплекта заготовок (т.е. кратно комплекту).

Задача оптимизации раскроя материалов заключается в разработке таких вариантов раскроя, при которых получают определенное количество заготовок в данном ассортименте (разных видов) с минимальными отходами.

Для составления математической модели задачи оптимального раскроя введем следующие обозначения:
L - длина материала; S - площадь поверхности листового или рулонного материала; N - количество единиц исходного материала.

Необходимо получить m различных видов заготовок либо длиной L_i, либо площадью S_i, где i - вид заготовки ($i=1, 2, ..., m$).

Известно число заготовок i-го вида в изделии, т.е. то число заготовок, которое необходимо для производства одного изделия - b_i. Число комплектов изделий, выпускаемых предприятием обозначим через k.

Раскрой материала можно произвести n способами. Известно a_{ij} - число заготовок i-го вида, получаемое j-м способом раскроя ($j=1, 2, \ldots, n$).

Количество отходов, получаемое при раскрое единицы исходного материала j-м способом - C_j.

Требуется составить такой план раскроя, чтобы обеспечить получение полных комплектов заготовок с минимальными отходами.

Обозначим через x_j количество единиц исходного материала, раскроенных j-м способом. Найти такие $x_j \geq 0$, которые удовлетворяют следующим ограничениям:
(ограничение по количеству исходного материала)

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \leq N \qquad (5.1)$$

(ограничение по плану производства)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times x_j = b_i \,(i = 1..m) \tag{5.2}$$

- столько получается заготовок i-го вида при всех вариантах раскроя. Исходя из условия комплектности получим следующие ограничения по плану производства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times x_j = d_i \times k, \quad (i = \overline{1,m}), \tag{5.3}$$

Суммарная величина отходов должна быть минимальной, тогда функция цели примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to min. \tag{5.4}$$

Задача может быть решена и на максимизацию комплектного выпуска продукции, тогда функция цели будет иметь вид: $\boldsymbol{k \to max}$.

Пример расчётов в задаче оптимального раскроя материалов. Из металлических труб длиной по 6 м каждый, имеющихся в количестве 100 шт. необходимо изготовить конструкцию, изображенную на рис.5.1.

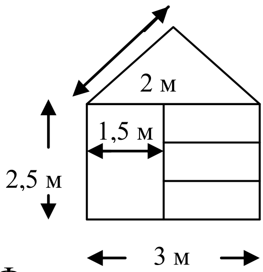


Рис. 5.1. Форма и размеры элементов конструкции

Требуется найти оптимальный план раскроя материала при условии получения полных комплектов конструкций из имеющегося материала, дающий минимальное количество отходов.

Решение.

Имеется N = 100 шт. исходного материала (труб).

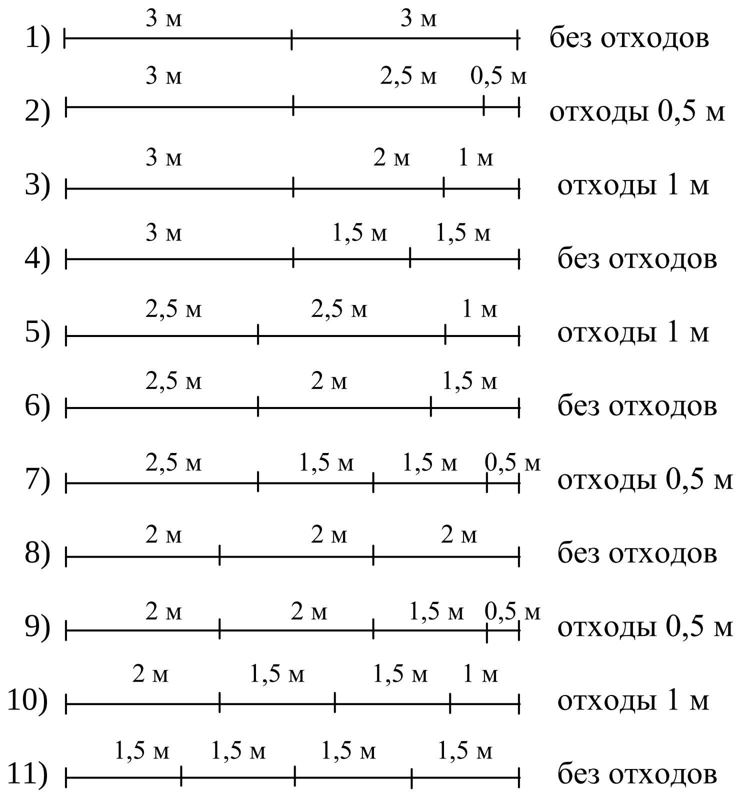
Длина трубы L = 6 м.

Деталей на один комплект требуется:

длиной 1,5 м - 2 шт.,
длиной 2 м - 2 шт.,
длиной 2,5 м - 3 шт.,
длиной 3 м - 2 шт.

Определим все возможные варианты раскроя исходного материала с помощью графического построения.

Получаем 11 вариантов раскроя материала (труб):



Представим в табличном виде количество различного вида заготовок, получаемых с помощью всех возможных вариантов раскроя и требование по комплектации изделия.

Количество заготовок по вариантам раскроя

Виды заготовок	Варианты раскроя											Кол-во заготовок на комплект
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	
3 м	2	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	2
2,5 м	-	1	-	-	2	1	1	-	-	-	-	3
2 м	-	-	1	-	-	1	-	3	2	1	-	2
1,5 м	-	-	-	2	-	1	2	-	1	2	4	2
Отходы	-	0,5	1	-	1	-	0,5	-	0,5	1	-	min отходов

В соответствии с имеющимися вариантами раскроя и условиями комплектности, получаем общее количество

3-х метровых заготовок $2X_1+X_2+X_3+X_4=2\boldsymbol{k}$;

2,5 метровых заготовок $X_2+2X_5+X_6+X_7=3\boldsymbol{k}$;

2-х метровых заготовок $X_3+X_6+3X_8+2X_9+X_{10}=2\boldsymbol{k}$;

1,5 метровых заготовок $2X_4+2X_6+2X_7+X_9+2X_{10}+4X_{11}=2\boldsymbol{k}$.

Ограничение по исходным материальным ресурсам:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} = 100$$

Функция цели (при условии минимизации отходов):

$$f(x)= 0,5X_2+X_3+X_5+0,5X_7+0,5X_9+X_{10} \rightarrow \min.$$

Приведем задачу к каноническому виду. Обозначим количество комплектов $\boldsymbol{k}$ через переменную X_{12}, тогда модель примет вид:

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{11} = 100 \\ 2X_1+X_2+X_3+X_4-2X_{12} = 0 \\ X_2+2X_5+X_6+X_7-3X_{12} = 0 \\ X_3+X_6+3X_8+2X_9+X_{10}-2X_{12} = 0 \\ 2X_4+X_6+2X_7+X_9+2X_{10}+4X_{11}-2X_{12} = 0 \\ X_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 12, \end{cases}$$

функция цели (на минимум отходов)

$$f_1(x) = 0,5X_2+X_3+X_5+0,5X_7+0,5X_9+X_{10} \rightarrow \min,$$

функция цели (на максимум комплектов)

$$f_2(x) = X_{12} \rightarrow \max,$$

линейная комбинация целевых функций имеет вид

$$f_3(x)= f_1(x) - f_2(x) \rightarrow \min.$$

При использовании комбинированной целевой функции зададим первое ограничение в виде неравенства

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} \leq 100$$

Использование программы *Раскрой длинномерного материала* из ППП PRIMA позволяет, задав длину исходного материала и требуемые размеры заготовок, получить возможные варианты раскроя и величину возможных отходов (рис. 5.2).

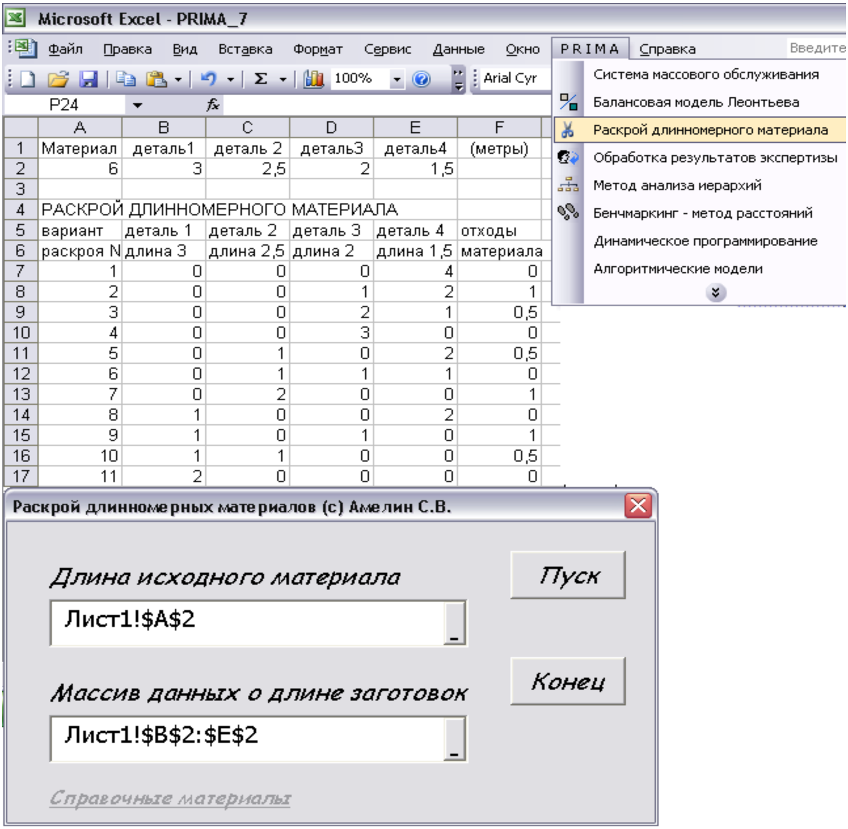


Рис. 5.2. Диалоговое окно программы «Раскрой длинномерного материала» из ППП PRIMA

Так же программа позволяет сформировать исходные данные для построения диаграммы вариантов раскроя (рис. 5.3).

Порядок построения диаграммы (рис. 5.4):

1) Выбрать *Линейчатую диаграмму с накоплением* или *Цилиндрическую линейчатую с накоплением*;
2) Ввести диапазон ячеек с данными для диаграммы;
3) Указать: *Ряды - в столбцах*;
4) В готовом графике щёлкнуть правой кнопкой мыши по цифрам вертикальной оси и в *Формате оси* указать: *Обратный порядок категорий*;
5) Щёлкнуть правой кнопкой мыши по отрезкам линий и в *Формате ряда данных* указать: *Подписи данных – значения*.

	K	L	M	N	O
5	Данные для диаграммы				
6	Длина деталей				Отходы
7	1,5	1,5	1,5	1,5	0
8	2	1,5	1,5		1
9	2	2	1,5		0,5
10	2	2	2		0
11	2,5	1,5	1,5		0,5
12	2,5	2	1,5		0
13	2,5	2,5			1
14	3	1,5	1,5		0
15	3	2			1
16	3	2,5			0,5
17	3	3			0

Рис. 5.3. Исходные данные для построения диаграммы

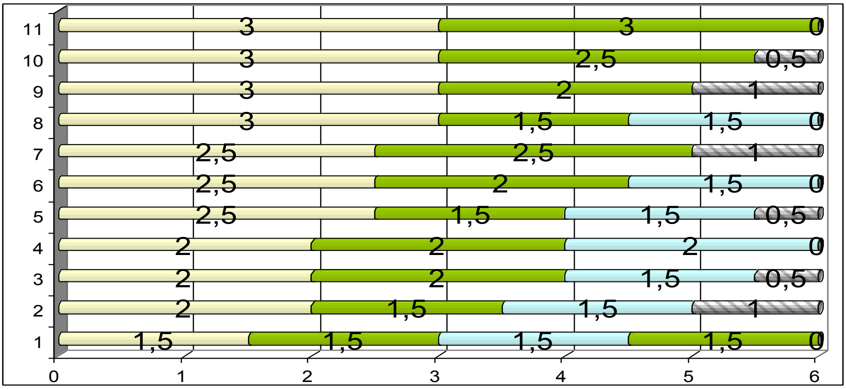


Рис. 5.4. Диаграмма вариантов раскроя

Ввод исходных данных и математических соотношений задачи в Excel представлен на рис. 5.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Виды	Варианты раскроя											Кол-во	
2	заготовок	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	заготовок на комплект	
3	3 м	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-2	=СУММПРОИЗВ(B3:M3;$B$9:$M$9)
4	2,5 м	0	1	0	0	2	1	1	0	0	0	0	-3	=СУММПРОИЗВ(B4:M4;$B$9:$M$9)
5	2 м	0	0	1	0	0	1	0	3	2	1	0	-2	=СУММПРОИЗВ(B5:M5;$B$9:$M$9)
6	1,5 м	0	0	0	2	0	1	2	0	1	2	4	-2	=СУММПРОИЗВ(B6:M6;$B$9:$M$9)
7	Отходы	0	0,5	1	0	1	0	0,5	0	0,5	1	0	min отходов	=СУММПРОИЗВ(B7:L7;B9:L9)
8													=N7-N9	ЦФ
9	=СУММ(B9:L9)													=M9

Рис. 5.5. Ввод исходных данных и математических соотношений задачи в Excel

Ячейки B9:L9 отводятся для размещения искомых переменных, означающих количество исходного материала, подвергаемое раскрою одним из одиннадцати способов. Ячейка M9 предназначена для размещения переменной, соответствующей количеству получаемых комплектов заготовок. В ячейки N3:N6 помещены выражения левых частей ограничений задачи с помощью функций СУММПРОИЗВ, аргументами которых являются коэффициенты при переменных в ограничениях и искомые переменные. В ячейках N7 и N9 расположены выражения для целевых функций, представляющих собой соответственно общую величину отходов (=СУММПРОИЗВ(B7:L7;B9:L9) которую следует минимизировать) и количество комплектов заготовок (которое следует максимизировать). Объединённая целевая функция в виде разности первых двух функций цели введена в ячейку M8. В ячейку A9 введено выражение для общего количества используемых единиц исходного материала (=СУММ(B9:L9)).

Заполнение диалогового окна программы *Поиск решения* показано на рис. 5.6.

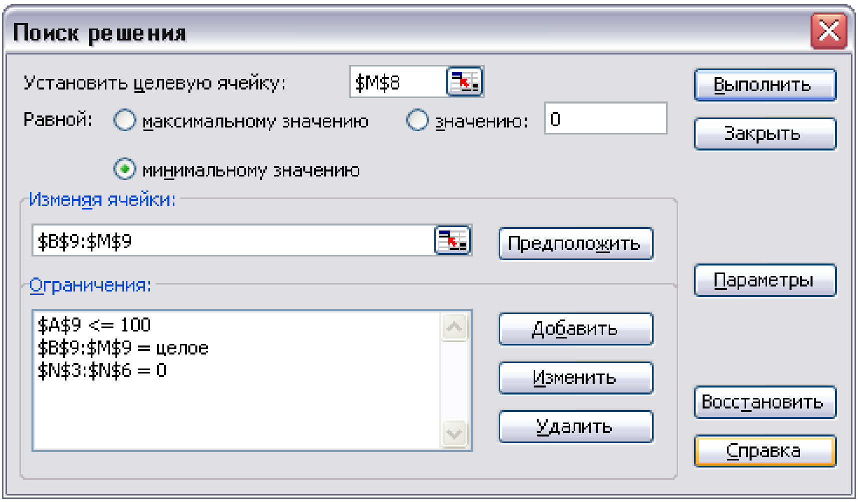


Рис. 5.6. Диалоговое окно программы *Поиск решения*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Виды	Варианты раскроя											Кол-во	
2	заготовок	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	заготовок на комплект	
3	3 м	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-2	0
4	2,5 м	0	1	0	0	2	1	1	0	0	0	0	-3	0
5	2 м	0	0	1	0	0	1	0	3	2	1	0	-2	0
6	1,5 м	0	0	0	2	0	1	2	0	1	2	4	-2	0
7	Отходы	0	0,5	1	0	1	0	0,5	0	0,5	1	0	min отходов	14
8													-14	ЦФ
9	98	14	28	0	0	0	56	0	0	0	0	0	28	28

Рис. 5.7. Первое альтернативное решение задачи раскроя

Задача имеет два альтернативных варианта решения, показанных на рис. 5.7 и 5.8. Так, при первом решении оптимальными вариантами раскроя будут № 1 (14 штук материала), № 2 (28 штук материала), № 6 (56 штук материала).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Виды	Варианты раскроя											Кол-во	
2	заготовок	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	заготовок на комплект	
3	3 м	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-2	0
4	2,5 м	0	1	0	0	2	1	1	0	0	0	0	-3	0
5	2 м	0	0	1	0	0	1	0	3	2	1	0	-2	0
6	1,5 м	0	0	0	2	0	1	2	0	1	2	4	-2	0
7	Отходы	0	0,5	1	0	1	0	0,5	0	0,5	1	0	min отходов	14
8													-14	ЦФ
9	98	28	0	0	0	14	56	0	0	0	0	0	28	28

Рис. 5.8. Второе альтернативное решение задачи раскроя

Повторное решение данной задачи с помощью программы *Поиск решения* даёт следующие результаты:

1-м вариантом раскраивается $X_1 = 28$ прутков;

5-м вариантом раскраивается $X_5 = 14$ прутков;

6-м вариантом раскраивается $X_6 = 56$ прутков;

остальные 8 вариантов раскроя оказались невыгодными - $X_{2,3,4}=0$, $X_{7\text{-}11}=0$, отходы составили $f_1(x)=14$ метров, количество комплектов $f_2(x)=28$, число использованных единиц исходного материала – 98 штук.

Задача раскроя плоскостного (листового) материала

Пример модели раскроя листового материала

Пусть необходимо раскроить 100 листов стального проката размером 2,5 × 1,5 м на прямоугольные заготовки А, Б, В размерами: А – 2 × 1 м, Б – 1 × 0,75 м и В - 0,5 × 0,5 м, в ассортименте 1 : 4 : 12. Требуется разработать оптимальный план раскроя листов стального проката.

Возможные различные способы раскроя листов стального проката на заготовки показаны на рис. 5.2. В таблице приведены данные о количестве заготовок и отходах, получаемых при различных способах раскроя. Из таблицы видно, что в результате раскроя листов всеми способами получим заготовки различного типа и соотнесем их с ассортиментными требованиями:

заготовок А - $X_1 = 1\ k$;

заготовок Б - $4X_2+3X_3 = 4\ k$;

заготовок В - $7X_1+3X_2+5X_3+15X_4 =12\ k$.

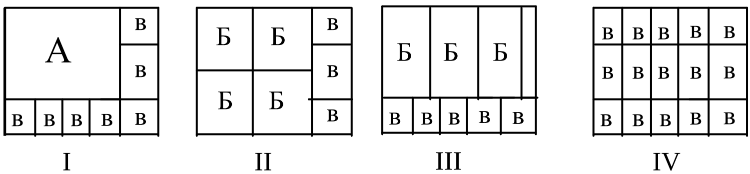


Рис.5.9. Возможные варианты раскроя листов

Возможные варианты раскроя листа

Вид заготовки	Количество заготовок при способах раскроя			
	I	II	III	IV
А	1	0	0	0
Б	0	4	3	0
В	7	3	5	15
Отходы C_j	0	0	0,5	0
Количество листов исходного материала, раскраиваемых				
j-м способом	X_1	X_2	X_3	X_4

В соответствии с формулой (5.1) ограничение по ресурсам листов равно

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 100.$$

Обозначим количество комплектов ***k*** через переменную X_5. Из соотношения заготовок в ассортименте в соответствии с формулой (5.3) находим ограничения

$$X_1 = 1X_5;$$

$$4X_2 + 3X_3 = 4X_5;$$

$$7X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 5X_4 = 12X_5.$$

В канонической форме ограничения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 100, \\ X_1 - X_5 = 0; \\ 4X_2 + 3X_3 - 4X_5 = 0, \\ 7X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 15X_4 - 12X_5 = 0. \\ X_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Целевая функция (на минимум отходов) равна

$$f(X) = 0{,}5X_3 \rightarrow \min.$$

Целевая функция (на максимум комплектов) равна

$$f(X) = X_5 \rightarrow \max.$$

После расчетов на ЭВМ получаем решение:

$$X_1 = 47;\ X_2 = 37;\ X_3 = 0;\ X_4 = 6.$$

Таким образом, для сокращения отходов необходимо раскроить первым способом 47 листов, вторым - 37 листов и четвертым - 6 листов.

Математическая модель задачи раскроя с минимальным расходом материала:

Определить оптимальные варианты экономичного раскроя исходного материала для получения деталей в соответствии с планом (функция цели на минимум расхода материала)

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \rightarrow min;} \qquad (5.5)$$

при следующих ограничениях
(ограничения по плану производства)

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i\ ; \quad (i = \overline{1,m})\,;} \qquad (5.6)$$

(условие неотрицательности переменных)

$$x_j \geq 0; \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (5.7)$$

где x_j – количество исходного материала, раскраиваемое по j-му способу; N_q – запасы исходного материала q-го вида; w – количество видов исходных материалов; Z – количество комплектов изделий; k_i – количество заготовок (деталей) i-го типа, входящих в комплект; a_{ij} – количество заготовок (деталей) i-го типа, получаемых при j-м варианте раскроя; Y – общее количество отходов; n – количество возможных вариантов раскроя; m – общее количество различных видов деталей, получаемых в результате раскроя.

Математическая модель задачи раскроя с минимальными отходами:

Определить оптимальные варианты раскроя исходного материала, обеспечивающие выполнение плана производства деталей с минимальными отходами (функция цели на минимум отходов)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow min; \qquad (5.8)$$

при следующих ограничениях

(ограничения по плану производства)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (5.9)$$

(условие неотрицательности переменных)

$$x_j \geq 0; \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (5.10)$$

где x_j – количество исходного материала, раскраиваемое по j–му способу; N_q – запасы исходного материала q-го вида; w – количество видов исходных материалов; Z – количество комплектов изделий; k_i – количество заготовок (деталей) i-го типа, входящих в комплект; a_{ij} – количество заготовок (деталей) i-го типа, получаемых при j-м варианте раскроя; Y – общее количество отходов; n – количество возможных вариантов раскроя; m – общее количество различных видов деталей, получаемых в результате раскроя.

Математическая модель задачи раскроя с учетом комплектности и различных типов исходных материалов:

Определить максимально возможное получение комплектов деталей из исходного материала (функция цели)

$$Z \to max \tag{5.11}$$

при следующих ограничениях

(ограничения по количеству исходного материала)

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le N_q; \quad (q = \overline{1,w}); \tag{5.12}$$

(ограничения по плану производства и комплектности)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = k_i Z; \quad (i = \overline{1,m}); \tag{5.13}$$

(суммарное количество отходов)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Y; \tag{5.14}$$

(условие неотрицательности переменных)

$$x_j \ge 0; \quad (j = \overline{1,n}), \tag{5.15}$$

где X_j – количество исходного материала, раскраиваемое по j-му способу; N_q – запасы исходного материала q-го вида; w – количество видов исходных материалов; Z – количество комплектов изделий; k_i – количество заготовок (деталей) i-го типа, входящих в комплект; a_{ij} – количество заготовок (деталей) i-го типа, получаемых при j-м варианте раскроя; Y – общее количество отходов; n – количество возможных вариантов раскроя; m – общее количество различных видов деталей, получаемых в результате раскроя.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической постановки задачи оптимального раскроя материалов:

2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания:

3. Определение возможных вариантов раскроя с помощью графических построений:

4. Построение математической модели оптимального раскроя в общем виде, приведение модели к каноническому виду и составление матрицы исходных данных для расчета задачи на ЭВМ:

5. Расчет производится с помощью программы "Поиск решения", реализованной на ПЭВМ в электронной таблице Excel.

6. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе:

Отчёт по работе должен содержать:

1. Цель и экономико-математическую постановку задачи на раскрой материалов, графические построения вариантов раскроя;
2. Экономико-математическую модель в общем и каноническом виде, исходные данные для расчета на ЭВМ;
3. Результаты моделирования на ЭВМ и их экономическую интерпретацию;
4. Выводы по лабораторной работе должны содержать анализ и экономическую интерпретацию результатов моделирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
Транспортная задача линейного программирования

Цель работы: закрепление на практике методики составления экономико-математических моделей транспортного типа и решения задач линейного программирования, относящихся к типу транспортных задач.

Исходные положения. К задачам линейного программирования транспортного типа относятся задачи о перевозках некоторого однородного продукта (груза, товара) из пунктов отправления (от поставщиков) в пункты назначения (к потребителям) при обеспечении минимальных затрат на перевозки или минимального времени доставки. Задача заключается в составлении наилучшего (оптимального) плана перевозок грузов от распределенных в пространстве поставщиков к распределенным в пространстве потребителям с учетом ограниченных ресурсов предложения поставщиков и известного спроса потребителей. Транспортная задача линейного программирования нашла практическое применение на транспорте и в промышленности.

Постановка задачи: некоторый однородный продукт, сосредоточенный у $\boldsymbol{m}$ поставщиков $\boldsymbol{A_i}$ в количестве $\mathbf{a}_i$ ($\boldsymbol{i}=1,2,\ldots\boldsymbol{m}$) единиц соответственно, необходимо доставить $\boldsymbol{n}$ потребителям $\boldsymbol{B_j}$ в количестве $\boldsymbol{b_j}$ ($\boldsymbol{j}=1,2,\ldots\boldsymbol{n}$) единиц. Известна стоимость $\boldsymbol{C_{ij}}$ перевозки единицы груза от $\boldsymbol{i}$-го поставщика к $\boldsymbol{j}$-му потребителю. Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности при минимальных затратах.

Обозначим через $\boldsymbol{X_{ij}}$ - количество единиц груза, которое необходимо перевезти от $\boldsymbol{i}$-го поставщика к $\boldsymbol{j}$-му потребителю. Условие задачи можно записать в виде таблицы:

Поставщики	Потребители				Предложение
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	A_m
Спрос	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Тогда математическая модель задачи сведется к нахождению минимума функции цели, выражающей суммарные затраты на перевозку всего груза:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij} \to \min \qquad (6.1)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i; \ (i = 1,2...m) \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j; \ \ (j = 1,2...n) \end{cases}$$

- ограничение по плану поставок от ***i***-го поставщика всем потребителям;

- ограничение по плану поставок ***j***-му потребителю от всех поставщиков; (6.2)

и условии неотрицательного объёма перевозок

$$X_{ij} \geq 0; \quad (i = 1,2...m), \ (j = 1,2...n). \tag{6.3}$$

Если выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. спрос равен предложению, то задача соответствует открытой модели. Если же предложение превышает спрос, вводится фиктивный потребитель с потребностью, равной разнице между предложением и спросом, в противном случае, когда спрос больше, чем предложение - вводится фиктивный поставщик с запасом, также равным разнице этих сравниваемых величин.

Тогда ограничения математической модели примут вид:

1-й случай

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} < a_i; \quad X_{ij} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j; \quad (i = 1,2...m), \ (j = 1,2...n) \end{cases} \tag{6.4}$$

Вводится фиктивный потребитель $\boldsymbol{B_{n+1}}$, потребность которого в продукции равна

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{6.5}$$

2-й случай

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i; \quad X_{ij} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} < b_j; \quad (i = 1,2 \ldots m), \; (j = 1,2 \ldots n) \end{cases} \tag{6.6}$$

Вводится фиктивный поставщик $\boldsymbol{A_{m+1}}$, предложение которого равно

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{6.7}$$

Стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю принимается равной 0 т.к. груз в обоих случаях реально не перевозится. После преобразования задача принимает вид закрытой модели и, как и все задачи транспортного типа может быть решена как с помощью симплекс-метода, так и с помощью распределительного метода или же методом потенциалов.

Примеры решения задач. Закрытая модель.

Поставщики	Потребители					Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 X_{11}	7 X_{12}	4 X_{13}	1 X_{14}	4 X_{15}	100
A_2	2 X_{21}	7 X_{22}	10 X_{23}	6 X_{24}	11 X_{25}	250
A_3	8 X_{31}	5 X_{32}	3 X_{33}	2 X_{34}	2 X_{35}	200
A_4	11 X_{41}	8 X_{42}	12 X_{43}	16 X_{44}	13 X_{45}	300
Спрос	200	200	100	100	250	Σ 750

Составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий min стоимость.

$(10X_{11} + 7X_{12} + 4X_{13} + X_{14} + 4X_{15} + 2X_{21} + 7X_{22} + 10X_{23} + 6X_{24} + 11X_{25} + 8X_{31} + 5X_{32} + 3X_{33} + 2X_{34} + 2X_{35} + 11X_{41} + 8X_{42} + 12X_{43} + 16X_{44} + 13X_{45}) \to \min.$

Система ограничений имеет вид:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 100$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 250$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 200$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 300$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 200$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 200$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 100$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 100$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 250$$

Для решения задачи в электронной таблице Excel введём тарифы на перевозку единицы груза по различным маршрутам в диапазон (B3:F6), величину предложения поставщиков в ячейки (G3:G6) и величину спроса потребителей в ячейки (B7:F7). Выделим рамкой диапазон ячеек (B9:F12) для размещения переменных – искомых величин плана поставок. Математические выражения для системы ограничений по предложению и спросу вводятся в ячейки G9:G12 и B13:F13 соответственно с помощью функции СУММ (рис. 6.1). Целевая функция вводятся в ячейку F13 с помощью функции СУММПРОИЗВ из категории *Математические* (рис. 6.2). Для этого необходимо выбрать в меню *Вставка* строку *Функция…*.

Аргументами функции СУММПРОИЗВ являются: Массив1 - адреса матрицы тарифов перевозок, Массив2 – адреса пустых ячеек, зарезервированных под размещение искомых переменных задачи (плана перевозок).

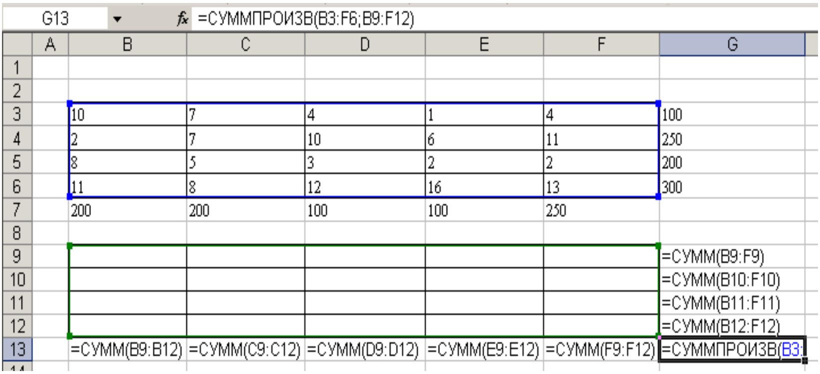


Рис. 6.1. Ввод транспортной модели в Excel

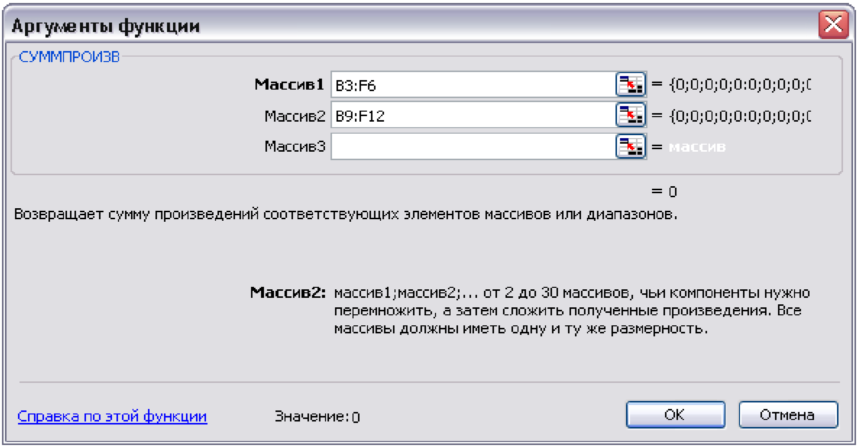


Рис. 6.2. Ввод целевой функции транспортной задачи

После ввода всех исходных данных, математических выражений и оформления таблица примет вид, представленный на рис. 6.3.

G13 fx =СУММПРОИЗВ(B3:F6;B9:F12)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		В 1	В 2	В 3	В 4	В 5	Предложение	
2		Стоимость перевозки единицы груза					поставщиков	
3	А 1	10	7	4	1	4	100	
4	А 2	2	7	10	6	11	250	
5	А 3	8	5	3	2	2	200	
6	А 4	11	8	12	16	13	300	
7	Спрос	200	200	100	100	250		
8			План перевозок				Отправлено	
9	А 1						0	
10	А 2						0	
11	А 3						0	
12	А 4						0	
13	Получено	0	0	0	0	0	0	
14							Затраты	

Рис. 6.3. Табличное представление транспортной задачи в Excel

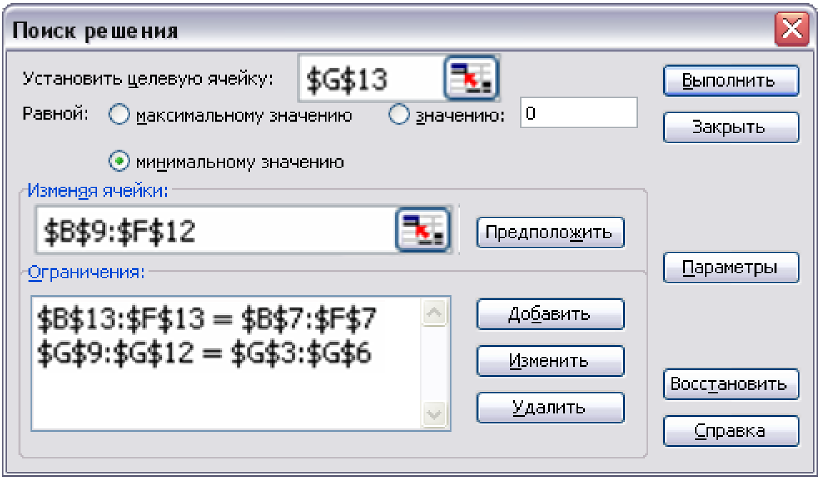


Рис. 6.4. Заполнение диалоговой формы Поиск решения

Для ввода математической модели в диалоговое окно оптимизатора (рис. 6.4) вызовем команду меню *Сервис > Поиск решения*. В диалоговом окне *Поиска решения*, в поле *Установить целевую ячейку* введём адрес функции цели G13. Направление поиска экстремума целевой функции устанавливается соответствующим *минимальному значению*. В поле *Изменяя ячейки* введём адреса ячеек, предназначенных для размещения оптимального плана поставок B9:F12. В поле *Ограничения* с помощью кнопки *Добавить* введем соотношения между объёмом поставок и предложением (мощностью) поставщиков (рис.6.5), а также между объёмом получаемых грузов и спросом потребителей. В закрытой модели эти соотношения принимают форму равенств.

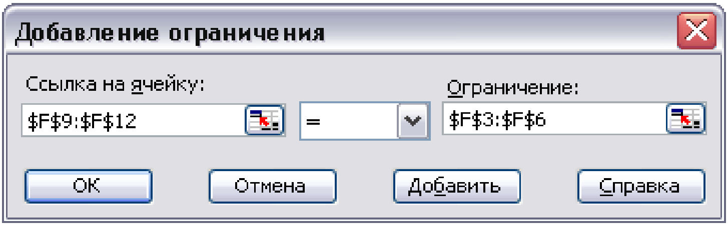


Рис. 6.5. Заполнение диалоговой формы Добавление ограничения

В левом окне формы *Добавление ограничения* (рис. 6.5) вводятся адреса левой части ограничений – суммы объёмов перевозок от поставщиков и суммы объёмов перевозок к потребителям. Знак ограничения устанавливается в виде знака равенства " = ". В правом окне формы *Добавление ограничения* вводятся адреса правой части ограничений – числовые значения предложения и спроса.

Для выполнения поиска решения задачи - оптимального плана перевозок, необходимо также задать *Параметры*: «Линейная модель», «Неотрицательные значения» и «Автоматическое масштабирование» (рис. 6.6), после чего нажать кнопку *ОК*. После введения модели и установки параметров алгоритма, нажать кнопку *Выполнить* окна *Поиск решения*.

Оптимальный план перевозок представлен на рис. 6.7. Так, от первого поставщика четвёртому и пятому потребителям перевозится по 50 единиц груза, от второго поставщика первому потребителю – 200 единиц груза и четвёртому ещё 50. Третий поставщик обеспечивает поставки пятому потребителю в объёме 200 единиц груза. Поставки из четвёртого пункта отправления осуществляются по двум маршрутам: второму потребителю –

200 единиц груза и третьему потребителю – 100 единиц груза. Общие затраты на перевозки составят 4150 ден.ед.

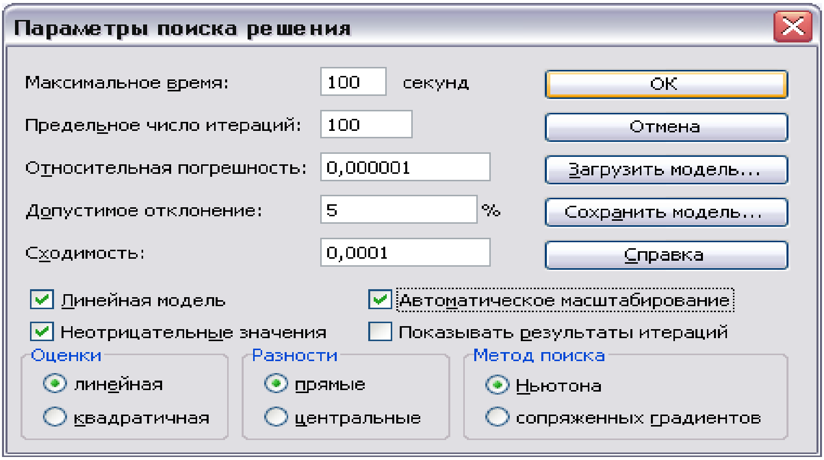


Рис. 6.6. Заполнение диалоговой формы Параметры

G13 f_x =СУММПРОИЗВ(B3:F6;B9:F12)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		В 1	В 2	В 3	В 4	В 5	Предложение	
2		Стоимость перевозки единицы груза					поставщиков	
3	А 1	10	7	4	1	4	100	
4	А 2	2	7	10	6	11	250	
5	А 3	8	5	3	2	2	200	
6	А 4	11	8	12	16	13	300	
7	Спрос	200	200	100	100	250		
8			План перевозок				Отправлено	
9	А 1	0	0	0	50	50	100	
10	А 2	200	0	0	50	0	250	
11	А 3	0	0	0	0	200	200	
12	А 4	0	200	100	0	0	300	
13	Получено	200	200	100	100	250	4150	
14							Затраты	

Рис. 6.7. Результаты решения транспортной задачи

Открытая модель.

Составим план перевозок грузов от 4-х поставщиков $\boldsymbol{A_i}$ $\boldsymbol{(i=1,2,3,4)}$ соответственно в количествах 100, 400, 100 и 100 единиц к пяти потребителям $\boldsymbol{B_j}$ $\boldsymbol{(j=1,2,3,4,5)}$ соответственно в количествах 50, 100, 150, 200, 250 единиц с наименьшей стоимостью перевозок. Стоимость перевозок единицы груза представлена матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 12 & 16 \\ 16 & 10 & 8 & 6 & 15 \\ 4 & 1 & 9 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Решение.

Суммарные запасы (предложение) $\sum_{i=1}^{4} a_i = 700$.

Суммарные потребности (спрос) $\sum_{j=1}^{5} b_j = 750.$

Суммарный спрос превышает суммарное предложение, следовательно, модель открытая (2-й случай). Необходимо ввести фиктивного поставщика A_5 с запасами 750-700=50 единиц продукта.

Постав-ставщики	Потребители					Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 X_{11}	6 X_{12}	8 X_{13}	12 X_{14}	16 X_{15}	100
A_2	16 X_{21}	10 X_{22}	8 X_{23}	6 X_{24}	15 X_{25}	400
A_3	4 X_{31}	1 X_{32}	9 X_{33}	11 X_{34}	15 X_{35}	100
A_4	3 X_{41}	2 X_{42}	7 X_{43}	7 X_{44}	15 X_{45}	100
(A_5)	0 X_{51}	0 X_{52}	0 X_{53}	0 X_{54}	0 X_{55}	(50)
Спрос	50	100	150	200	250	Σ 850

Тогда математическая модель задачи примет вид:

$(X_{11} + 6X_{12} + 8X_{13} + 12X_{14} + 16X_{15} + 16X_{21} + 10X_{22} + 8X_{23} + 6X_{24} +$
$+\ 15X_{25} + 4X_{31} + X_{32} + 9X_{33} + 11X_{34} + 13X_{35} + 3X_{41} + 2X_{43} +$
$+\ 7X_{43} + 7X_{44} + 15X_{45} + 0X_{51} + 0X_{52} + 0X_{53} + 0X_{54} + 0X_{55}) \to \min.$

Система ограничений имеет вид:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 100$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 400$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 100$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 100$$
$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} = 50$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 50$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 100$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 150$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 200$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{55} + X_{55} = 250$$

Для решения транспортной задачи можно использовать метод потенциалов. Пусть задан опорный план задачи, тогда каждому пункту отправления A_i приписывается некоторое число U_i, а каждому пункту назначения B_j – число V_j. Эти числа называют потенциалами, они подбираются так, чтобы для каждой базисной клетки (i, j) выполнялось равенство

$$U_i + V_j = C_{ij}. \tag{6.8}$$

Таким образом, получаем $m + n - 1$ простых уравнений с $m + n$ неизвестными U_i и V_j. В таком случае, когда система состоит из числа уравнений, меньшего, чем число неизвестных, появляется свободная неизвестная величина, которой мы можем придать любое значение. Все остальные неизвестные можно найти из системы уравнений.

После того, как будут найдены все потенциалы U_i и V_j, для каждой свободной клетки (i, j) определяют числа

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j). \tag{6.9}$$

Далее находим наибольшее по модулю отрицательное число $\Delta_{i_0 j_0}$ (т.е. самое малое из отрицательных) и делаем сдвиг по соответствующему циклу пересчета. Таким образом, в методе потенциалов для нахождения чисел Δ_{ij} не нужно искать циклы пересчета для всех свободных клеток. Надо найти только один цикл пересчёта, соответствующий наименьшему отрицательному $\Delta_{i_0 j_0}$.

Этапы метода потенциалов:

1. Найти первоначальный опорный план. Число заполненных клеток равно m + n – 1.

2. Найти потенциалы U_i и V_j. Составить для базисных клеток m + n – 1 уравнений с m + n неизвестными.

3. Для каждой свободной клетки найти значения $\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$. Если среди значений Δ_{ij} нет отрицательных, то полученный план транспортной задачи оптимальный. Если же такие имеются, то перейти к новому опорному плану.

4. Среди отрицательных Δ_{ij} выбрать наибольшее по модулю отрицательное число Δ_{ij}. Построить для этой свободной клетки цикл пересчета и произвести сдвиг по циклу пересчета.

5. Полученный опорный план проверить на оптимальность. Если он не оптимален, то перейти к п. 2.

Ввод данных в программу «Транспортная задача» из ППП PRIMA представлен на рис. 6.8. Решение задачи представлено на рис. 6.9.

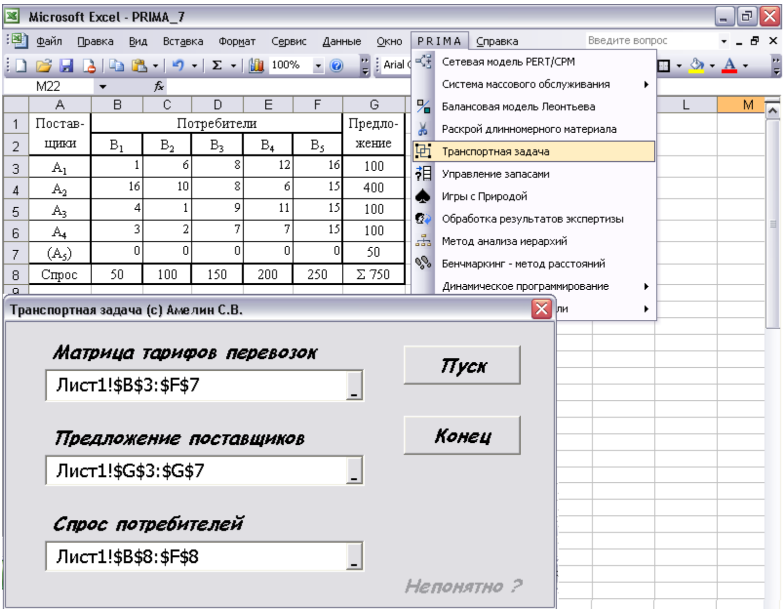


Рис. 6.8. Заполнение диалоговой формы «Транспортная задача»

	A	B	C	D	E	F	G
10	РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ						
11	МАТРИЦА ТАРИФОВ ПЕРЕВОЗОК						
12	Постав-	Потребители Bj					
13	щики Ai	B1	B2	B3	B4	B5	Предложение
14	A1	1	6	8	12	16	100
15	A2	16	10	8	6	15	400
16	A3	4	1	9	11	15	100
17	A4	3	2	7	7	15	100
18	A5	0	0	0	0	0	50
19	Спрос	50	100	150	200	250	

	A	B	C	D	E	F
20	Потенциалы					
21	U(I) =	1	0	-2	-1	-15
22	V(J) =	0	3	8	6	15
23	Delta(i,j)					
24	D(1,2)= 2	D(2,2)= 7	D(3,5)= 2	D(5,1)= 15		
25	D(1,3)= -1	D(3,1)= 6	D(4,1)= 4	D(5,2)= 12		
26	D(1,4)= 5	D(3,3)= 3	D(4,4)= 2	D(5,3)= 7		
27	D(2,1)= 16	D(3,4)= 7	D(4,5)= 1	D(5,4)= 9		
28	min D(KL)= -1 K=1 L=3 - включить в базис					

	A	B	C	D
30	План перевозок: I-поставщики J-потребители			
31	I J	Xij	Cij	Стоимость
32	1 1	50	1	50
33	1 5	50	16	800
34	2 3	50	8	400
35	2 4	200	6	1200
36	2 5	150	15	2250
37	3 2	100	1	100
38	4 2	0	2	0
39	4 3	100	7	700
40	5 5	50	0	0
41	Всего транспортных расходов 5500			

Рис. 6.9. Решения транспортной задачи
в ППП PRIMA (начало)

	A	B	C	D	E	F	G
42	МАТРИЦА ПЕРЕВОЗОК						
43	Постав-	Потребители Bj					
44	щики Ai	B1	B2	B3	B4	B5	Предложение
45	A1	50				50	100
46	A2			50	200	150	400
47	A3		100				100
48	A4		0	100			100
49	A5					50	50
50	Спрос	50	100	150	200	250	
51	Цикл пересчета I J		Перераспределение груза				
52	1)	1 3	0	(+) 50			
53	2)	1 5	50	(--) 50			
54	3)	2 5	150	(+) 50			
55	4)	2 3	50	(--) 50			
56	Q=50 Row =1 Col =5 - исключить из базиса						

	A	B	C	D	E	F
58	Потенциалы					
59	U(I) =	0	0	-2	-1	-15
60	V(J) =	1	3	8	6	15
61	Delta(i,j)					
62	D(1,2)= 3	D(2,2)= 7	D(3,5)= 2	D(5,1)= 14		
63	D(1,4)= 6	D(3,1)= 5	D(4,1)= 3	D(5,2)= 12		
64	D(1,5)= 1	D(3,3)= 3	D(4,4)= 2	D(5,3)= 7		
65	D(2,1)= 15	D(3,4)= 7	D(4,5)= 1	D(5,4)= 9		

	A	B	C	D	E	F	G
67	Оптимальный план перевозок: I-поставщики J-потребители						
68	I J	Xij	Cij	Стоимость			
69	1 1	50	1	50			
70	1 3	50	8	400			
71	2 3	0	8	0			
72	2 4	200	6	1200			
73	2 5	200	15	3000			
74	3 2	100	1	100			
75	4 2	0	2	0			
76	4 3	100	7	700			
77	5 5	50	0	0			
78	Всего транспортных расходов 5450						
79	МАТРИЦА ПЕРЕВОЗОК						
80	Постав-	Потребители Bj					
81	щики Ai	B1	B2	B3	B4	B5	Предложение
82	A1	50		50		0	100
83	A2			0	200	200	400
84	A3		100				100
85	A4		0	100			100
86	A5					50	50
87	Спрос	50	100	150	200	250	

Рис. 6.9. Решения транспортной задачи
в ППП PRIMA (продолжение)

Решение задачи на ЭВМ даёт следующий результат:

$f(X) = 5450$ $X_{11} = 50$ $X_{13} = 50$

$X_{24} = 200$ $X_{25} = 200$

$X_{32} = 100$ $X_{43} = 100$ $X_{55} = 50$.

Анализ решения показывает, что для пятого потребителя спрос не будет удовлетворен на величину 50 единиц груза, поскольку осуществление этой поставки приходится на фиктивного пятого поставщика $X_{55} = 50$. Общие затраты на перевозку грузов составят 5450 ден.ед. Оптимальный план перевозок представлен в следующей таблице:

Поставщики	Потребители					Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	50		50			100
A_2				200	200	400
A_3		100				100
A_4			100			100
(A_5)					(50)	(50)
Спрос	50	100	150	200	250	5450

Поскольку поставки от пятого поставщика пятому потребителю являются фиктивными, то спрос последнего не будет удовлетворён на 50 единиц груза. Общие затраты на перевозку составят 5450 ден.ед.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической постановки транспортной задачи линейного программирования;
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания;
3. Построение математической модели в общем виде, приведение модели к каноническому виду и составление матрицы исходных данных для расчета задачи на ЭВМ;

4. При «ручном» способе расчета на калькуляторах, задача решается распределительным методом или методом потенциалов;

5. Расчёт на ЭВМ производится с помощью программы «Поиск решения» – надстройки Excel и «Транспортная задача линейного программирования», реализованной на ПЭВМ в ППП «PRIMA»;

6. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе.

Отчёт по работе должен содержать:

1. Цель и экономико-математическую постановку транспортной задачи линейного программирования;

2. Экономико-математическую модель в общем и каноническом виде, исходные данные для расчета на ЭВМ;

3. Результаты моделирования на ЭВМ и их экономическую интерпретацию;

4. Выводы по лабораторной работе должны содержать анализ и экономическую интерпретацию результатов моделирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
Модели управления запасами

Цель работы: знакомство с экономико-математическими моделями управления запасами; овладение навыками расчета величины складских запасов.

Исходные положения: процесс материального производства требует непрерывного и бесперебойного обеспечения его средствами производства. Для этого на предприятии должен быть создан определенный запас средств производства, как гарантия от перерывов и случайностей в материально-техническом обеспечении. Запасы материалов на складах по своему назначению делятся на текущие и страховые.

Текущие запасы должны обеспечивать бесперебойную работу между двумя очередными поставками материалов.

При регулярном завозе максимальный текущий запас соответствует потребности в материале за период времени между поставками. Этот запас определяет и партию поставки:

$$\boldsymbol{Vo} = \sqrt{2 \cdot \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{C3}}{\boldsymbol{Cx}}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{C\text{н}}}{\boldsymbol{C\text{н}}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{C3}}{\boldsymbol{Cx}}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{Cx}}{\boldsymbol{C\text{н}}} + 1}, \qquad (7.1)$$

где ***Vo*** - размер оптимальной партии; ***S*** - потребность в данной продукции за время ***T***; ***T*** - расчетный период времени (обычно, год); ***Сз*** – постоянные транспортно-заготовительные расходы в расчете на одну партию поставки (один заказ) продукции; ***Сх*** - переменные затраты на хранение единицы продукции в запасе за время ***T***; ***Сн*** - потери из-за дефицита продукции за время ***T***.

Уровень запаса в начале временного интервала $\boldsymbol{t_0}$:

$$\boldsymbol{Zo} = \sqrt{2 \cdot \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{C3}}{\boldsymbol{Cx}}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{C\text{н}}}{\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{C\text{н}}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{C3}}{\boldsymbol{Cx}}} \cdot \sqrt{1/\left(\frac{\boldsymbol{Cx}}{\boldsymbol{C\text{н}}} + 1\right)}, \qquad (7.2)$$

Оптимальный период времени между двумя поставками:

$$\boldsymbol{t_o} = \sqrt{2 \cdot \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{S}} \cdot \frac{\boldsymbol{C3}}{\boldsymbol{Cx}}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{C\text{н}}}{\boldsymbol{C\text{н}}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{S}} \cdot \frac{\boldsymbol{C3}}{\boldsymbol{Cx}}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{Cx}}{\boldsymbol{C\text{н}}} + 1}. \qquad (7.3)$$

Ожидаемые накладные расходы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Qo} &= \sqrt{2 \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{C3} \cdot \boldsymbol{Cx}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{C\text{н}}}{\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{C\text{н}}}} = \\ &= \sqrt{2 \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{C3} \cdot \boldsymbol{Cx}} \cdot \sqrt{1/\left(\frac{\boldsymbol{Cx}}{\boldsymbol{C\text{н}}} + 1\right)}. \end{aligned} \qquad (7.4)$$

На практике, если точное определение конкретных значений ***Сз, Сх*** и ***Сн*** затруднительно, то можно определить верхний и нижний пределы их соотношений и брать для расчета среднее значение из них. Например, среднее значение

$$\left(\frac{Сз}{Сх}\right)_{ср} = \left(\frac{Сз\max}{Сх\min} + \frac{Сз\min}{Сх\max}\right)/2;$$
$$\left(\frac{Сх}{Сн}\right)_{ср} = \left(\frac{Сх\max}{Сн\min} + \frac{Сх\min}{Сн\max}\right)/2; \qquad (7.5)$$
$$(Сз \cdot Сх)_{ср} = (Сз\ max \cdot Сх\ min + Сз\ min \cdot Сх\ max) / 2\ .$$

Страховые запасы гарантируют обеспечение снабжения производства в случае опоздания поступления очередной партии материалов. Размер страхового запаса:

$$\boldsymbol{Z_{стр}} = \boldsymbol{S_{сут}} \frac{\sum(\boldsymbol{t_{оп}} - \boldsymbol{t_{св}}) \cdot \boldsymbol{V_{овс}}}{\sum \boldsymbol{V_{овс}}}, \qquad (7.6)$$

где $\boldsymbol{S_{сут}}$ - среднесуточный расход материалов; $\boldsymbol{t_{оп}}$ - интервалы между поставками, превышающие средневзвешенный (опозданий); $\boldsymbol{t_{св}}$ - средневзвешенный интервал; $\boldsymbol{V_{овс}}$ - объем партии, поставленный с интервалом выше среднего.

Пример расчёта. Требуется определить оптимальный размер поставки прутка диаметром 12 мм предприятию при следующих условиях: годовая потребность $\boldsymbol{S}$ = 3500 т; условно-постоянные транспортно-заготовительные расходы на один заказ $\boldsymbol{Сз}$ = 25÷30 ден.ед.; издержки по содержанию запасов $\boldsymbol{Сх}$ = 10÷15 ден.ед. за 1т в год; потери из-за дефицита установлены исходя из необходимости замены прутка диаметром 12 мм прутком диаметром 14 мм, что составляет убыток $\boldsymbol{Сн}$ = 20÷25 ден.ед. на тонну в год.

Размер партии (в тоннах) с учетом дефицита равен:

$$\boldsymbol{V}_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{3500}{1} \cdot \frac{\left(\frac{30}{10} + \frac{25}{15}\right)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{15}{20} + \frac{10}{25}\right)}{2} + 1} = 160{,}39$$

Уровень запаса (в тоннах) в начале временного интервала:

$$Z_0=\sqrt{2\cdot\frac{3500}{1}\cdot\frac{\left(\frac{30}{10}+\frac{25}{15}\right)}{2}}\cdot\sqrt{1/\left(\frac{\left(\frac{15}{20}+\frac{10}{25}\right)}{2}+1\right)}=101{,}835$$

Периодичность поставок (в долях года) равна:

$$t_0=\sqrt{2\cdot\frac{1}{3500}\cdot\frac{\left(\frac{30}{10}+\frac{25}{15}\right)}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\left(\frac{15}{20}+\frac{10}{25}\right)}{2}+1}=0{,}0458$$

Накладные расходы составят (ден.ед в год):

$$Q_0=\sqrt{2\cdot3500\cdot1\cdot\frac{(30\cdot10+25\cdot15)}{2}}\cdot\sqrt{1/\left(\frac{\left(\frac{15}{20}+\frac{10}{25}\right)}{2}+1\right)}=1224{,}7$$

Пример расчёта размера страхового запаса.

Дата поставки	Объем поставки V, т	Интервалы между поставками t, дн	t·V	Опоздания при t > tсв t – tсв, дн	Vовс	(tоп-tсв)* *Vовс
5.01	100	-	-	-	-	-
10.01	250	5	1250	-	-	-
25.01	100	15	1500	4,64	100	464
15.02	100	21	2100	10,64	100	1064
28.02	250	13	3250	2,64	250	660
5.03	100	6	500	-	-	-
20.03	250	15	3750	4,64	250	1160
25.03	100	5	500	-	-	-
	1250	-	12950	-	700	3348

Средний интервал между поставками

$t_{св}$ = 12950 **:** 1250 = 10,36 дн.

Средневзвешенный интервал опозданий

$t_{св\ оп}$ = 3348 **:** 700 = 4,78 дн.

Среднесуточный расход продукции равен (на расчётный период):

$\boldsymbol{S_{сут}} = 1250 : 90 = 13{,}89$ т/день

Размер страхового запаса

$\boldsymbol{Z_{стр}} = 13{,}89 \cdot 4{,}78 = 66{,}4$ т.

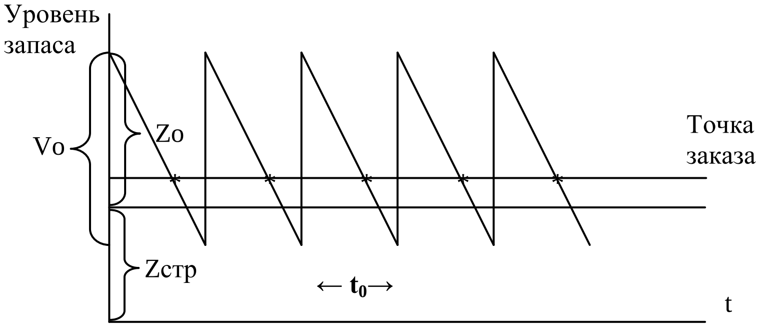


Рис.7.1. График изменения запаса в условиях равномерного потребления с учётом дефицита

Расчёты можно осуществить с помощью программы *Управление запасами* из комплекса прикладных программ математического моделирования PRIMA. Предварительно в рабочий лист Excel необходимо ввести данные о датах, объёме и интервалах поставок.

Порядок вызова и заполнения пользовательской формы и результаты решения по программе *Управление запасами* в ППП *PRIMA* представлены на рис. 7.2.

Результаты моделирования системы управления запасами представлены на рис. 7.3.

График уровня страхового запаса и изменения текущего запаса, построенный средствами Excel представлен на рис. 7.4.

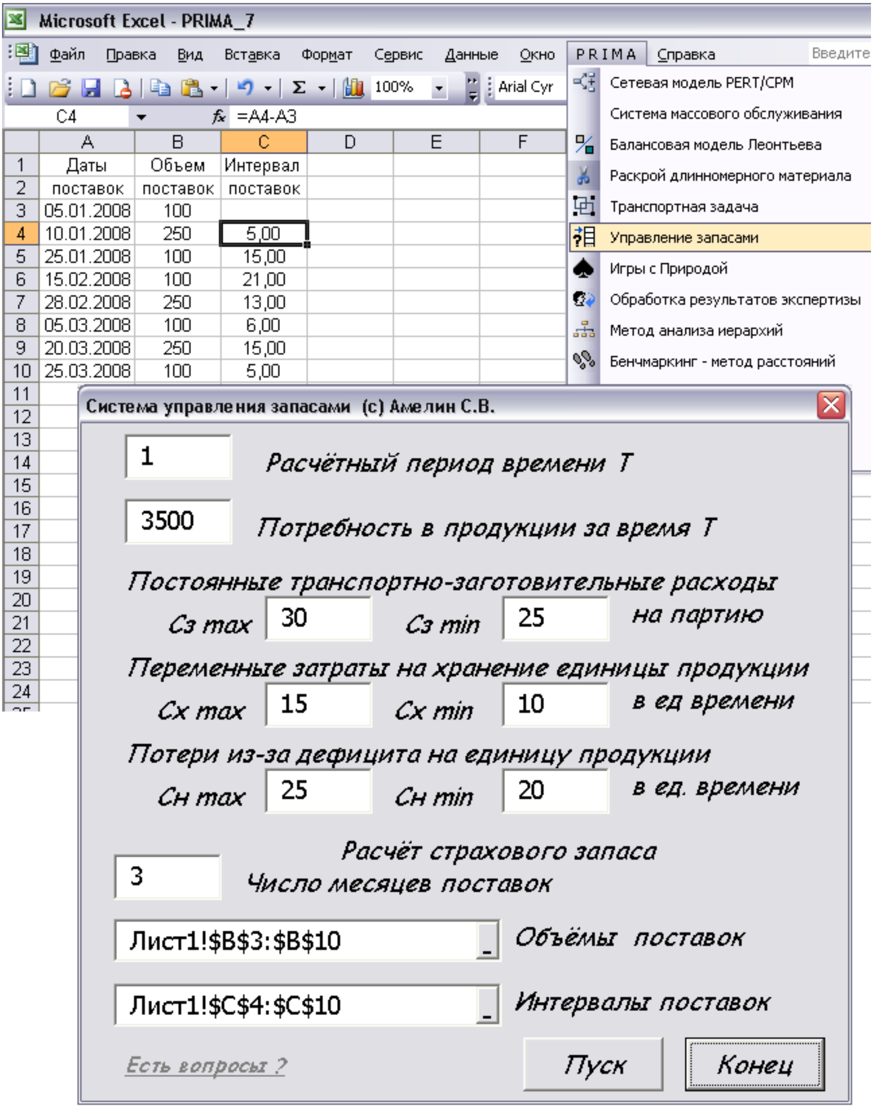


Рис. 7.2. Ввод исходных данных модели
управления запасами

	A	B	C	D	E	F	G
12		РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ					
13							
14	Размер партии поставки с учетом дефицита равен Vo = 160,390149323454						
15							
16	Уровень запаса в начале интервала времени So= 101,835015443463						
17							
18	Периодичность поставок равна to = 4,58257569495584E-02						
19							
20	Накладные расходы за время Т составят Qo = 1224,74487139159						
21							
22	Средний интервал между поставками tсв= 10,36						
23							
24	Средний интервал опозданий tоп= 4,78285714285714						
25							
26	Среднесуточный расход продукции Рсут = 13,8888888888889						
27							
28	Размер страхового запаса Z = 66,4285714285714						
29							
30	Данные для графика изменения запаса						
31	Время	Текущий	Страховой				
32	0	7,873438	66,42857				
33	0	168,2636	66,42857				
34	0,0458258	7,873438	66,42857				
35	0,0458258	168,2636	66,42857				
36	0,0916515	7,873438	66,42857				
37	0,0916515	168,2636	66,42857				
38	0,1374773	7,873438	66,42857				
39	0,1374773	168,2636	66,42857				
40	0,183303	7,873438	66,42857				
41	0,183303	168,2636	66,42857				
42	0,2291288	7,873438	66,42857				

Рис. 7.3. Результаты расчета параметров
системы управления запасами

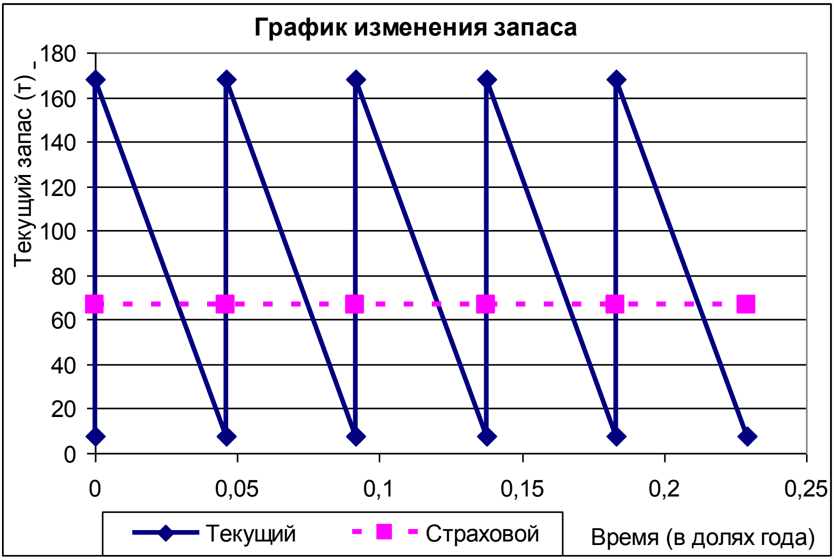


Рис. 7.4. График изменения запаса в Excel

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами методического руководства по расчетам параметров системы управления запасами;

2. Разделение студенческой группы на бригады и получение ими задания для проведения расчетов и анализа результатов;

3. На основании полученных исходных данных каждая бригада производит расчет оптимального размера партии поставки материалов, периода времени между поставками, ожидаемых накладных расходов, размера страхового запаса;

4. Используя полученные расчетные показатели системы управления запасами каждая бригада производит графические построения динамики величины запасов в условиях равномерного потребления, величины страхового запаса и точки заказа;

5. По результатам анализа полученных расчетных данных делается вывод об актуальности проведения данных расчетов, о целесообразности и причинах создания страховых запасов.

Отчет по работе должен содержать:

1. Краткое изложение цели и значения использования экономико-математических моделей управления запасами;
2. Постановку задачи, основные методические положения и расчетные формулы;
3. Таблицы исходных данных для проведения расчетов;
4. Расчеты величины оптимального размера партии поставки материалов, периода времени между очередными поставками, ожидаемых накладных расходов, величины страхового запаса;
5. График изменения запасов в условиях равномерного потребления, величины страхового запаса и точки заказа;
6. Анализ результатов и выводы по лабораторной работе.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8
Игровые модели в экономике

Цель работы: закрепление знаний в области применения игровых моделей для обоснования принятия решений в области экономики, организации производства, менеджмента.

Исходные положения. В природе и обществе часто возникают конфликтные ситуации, в которых участвуют стороны с различными или даже противоположными интересами. Конфликтные ситуации возникают при операциях типа купли-продажи (особенно при наличии конкуренции), в производстве также применимо игровое моделирование в виде игр с "природой" (производственными условиями).

Если при вычислении максиминной стратегии для игрока $\boldsymbol{A}$ (нижней цены игры) и минимаксной стратегии для его противника (верхней цены игры) не будет найдена седловая точка, то такая игра имеет решение в смешанных стратегиях. Для этого необходимо решить систему трех уравнений, предварительно представив игру в виде "игры два на два":

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = V; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = V; \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases} \qquad (8.1)$$

где a_{ij} - "выигрыш" игрока A, принимающего i-е решение при j-м состоянии "природы"; p_i - вероятность выбора решения игроком A, V - цена игры,

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = V; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = V; \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases} \qquad (8.2)$$

q_j - вероятность проявления состояний "природы".

Для решения системы произведем следующие преобразования:

$$p_1 = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}) \qquad (8.3)$$

$$p_2 = (a_{11} - a_{12}) / (a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}) = 1 - p_1 \qquad (8.4)$$

$$q_1 = (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}) \qquad (8.5)$$

$$q_2 = (a_{11} - a_{21}) / (a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}) = 1 - q_1 \qquad (8.6)$$

$$V = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) / (a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}). \qquad (8.7)$$

Пример статистической игры (игры с "природой").

Задача о технологической линии. На технологическую линию может поступать сырье с малым количеством примесей ($П_1$) и с большим количеством примесей ($П_2$). Известно, что в среднем поступает 60% сырья первого вида и 40% сырья второго вида. Для использования различных видов сырья предусмотрены три режима работы технологической линии A_1, A_2, A_3. Априорные вероятности состояний природы и потери, отражающие качество выпускаемой продукции и расходы сырья в зависимости от качества сырья и режима работы технологической линии, приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Априорные вероятности состояний природы и потери производства

Возможные действия	Вероятности состояния природы	
	$q_{п1}$ = 0,6	$q_{п2}$ = 0,4
A_1	0	5
A_2	1	3
A_3	3	2

Средние потери, соответствующие заданным вероятностям при различных режимах работы:

$L(A_1, S_П) = \sum L(A_1, П) * q_П = 0*0,6 + 5*0,4 = 2,0$;

$L(A_2, S_П) = 1*0,6 + 3*0,4 = 1,8$;

$L(A_3, S_П) = 3*0,6 + 2*0,4 = 2,6$.

Наилучшим ("байесовским") действием будет установление режима работы A_2, при котором потери будут минимальными **min** $L(A_i, S_П)$. Найдем минимаксную стратегию руководителя производства. Согласно принципу минимакса выбирается такая смешанная стратегия S_A, при которой средние потери $L(S_A, П)$ будут минимальны при наихудшем для производства состоянии природы $П$. Наихудшим случаем будет такое $П$, когда величина $L(S_A, П)$ принимает максимальное значение. Эту величину руководитель и должен минимизировать, т.е. выбрать стратегию S_A^*, которая обеспечит условие

$$L(S_A^{\bullet}, П) = \min_{S_A} \max_{П} L(S_A, П). \qquad (8.8)$$

Решим игру графически, аналитически и путем приведения к задаче линейного программирования.

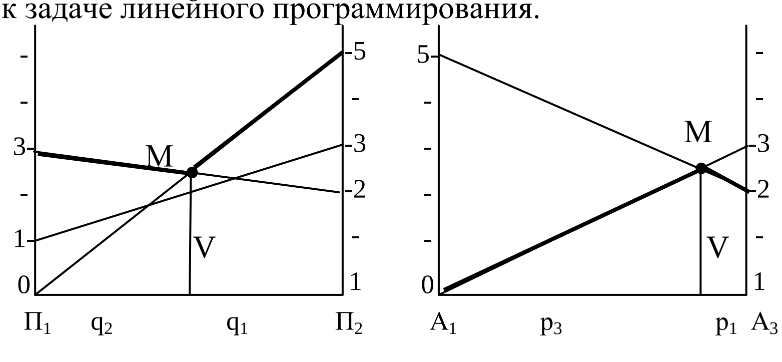


Рис. 8.1. Графическое решение игры

Для решения задачи аналитически составим следующие системы уравнений:

$$0*q_1 + 5*q_2 = V \qquad\qquad 0*P_1 + 3*P_3 = V$$
$$3*q_1 + 2*q_2 = V \qquad\qquad 5*P_1 + 2*P_3 = V$$
$$q_1 + q_2 = 1 \qquad\qquad P_1 + P_3 = 1,$$

и используем приведенные ранее соотношения.

Для решения задачи, путем приведения ее к задаче линейного программирования, введём обозначения:

$X_i = P_i / V$; $Y_j = q_j / V$; $V = 1 / f(x)$, тогда

$$f(x) = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow min \qquad f(y) = Y_1 + Y_2 \rightarrow max$$
$$0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \geq 1 \qquad 0 \cdot Y_1 + 5 \cdot Y_2 \leq 1$$
$$5 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 \geq 1 \qquad 1 \cdot Y_1 + 3 \cdot Y_2 \leq 1$$
$$3 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 \leq 1.$$

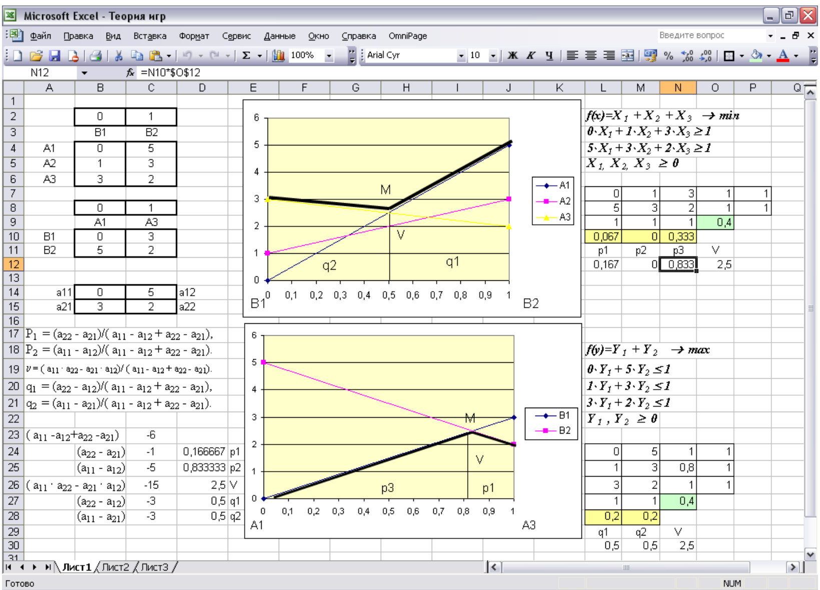


Рис. 8.2. Расчёт параметров игровой модели в Excel

	A	B	C	D
1				
2		0	1	
3		B1	B2	
4	A1	0	5	
5	A2	1	3	
6	A3	3	2	
7				
8		0	1	
9		A1	A3	
10	B1	0	3	
11	B2	5	2	
12				
13				
14	a11	0	5	a12
15	a21	3	2	a22
16				

C23 f_x =B14-C14+C15-B15

	A	B	C	D	
17	$P_1 = (a_{22} - a_{21})/(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$,				
18	$P_2 = (a_{11} - a_{12})/(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$.				
19	$\nu = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})/(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$.				
20	$q_1 = (a_{22} - a_{12})/(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$,				
21	$q_2 = (a_{11} - a_{21})/(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$.				
22					
23	$(a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21})$		-6		
24		$(a_{22} - a_{21})$	-1	0,166667	p1
25		$(a_{11} - a_{12})$	-5	0,833333	p2
26	$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})$		-15	2,5	V
27		$(a_{22} - a_{12})$	-3	0,5	q1
28		$(a_{11} - a_{21})$	-3	0,5	q2

Рис. 8.3. Данные для графического и аналитического решения

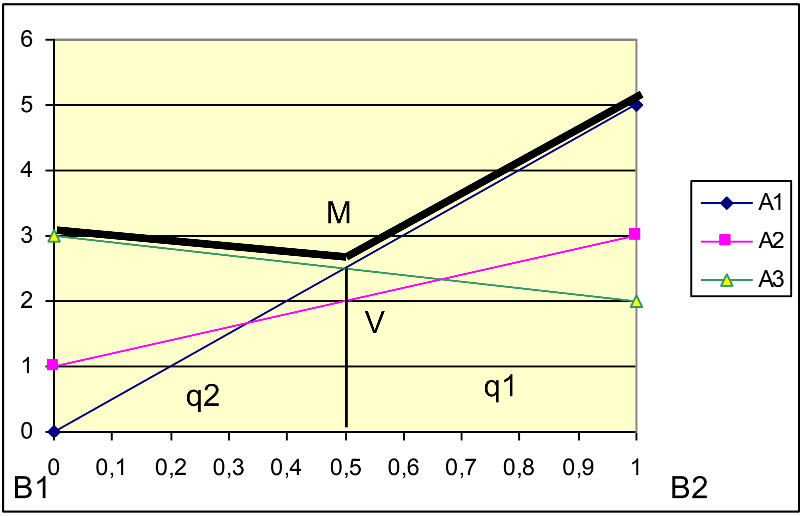


Рис. 8.4. Графическое решение игры для игрока B в Excel

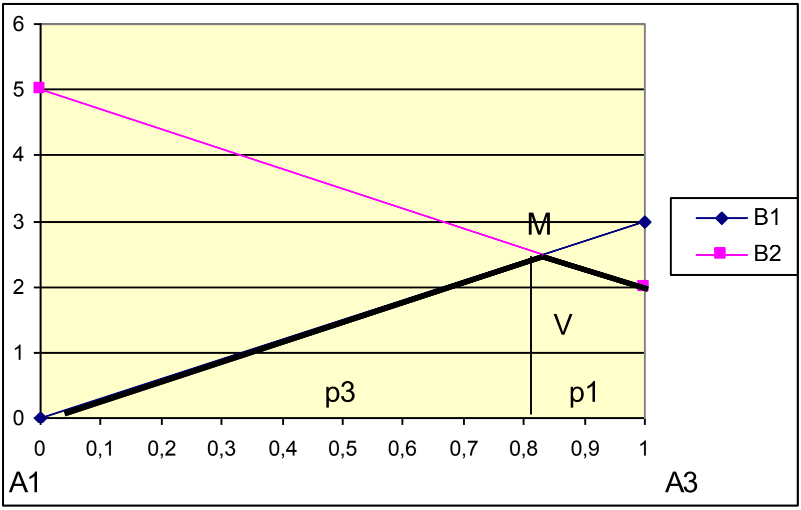


Рис. 8.5. Графическое решение игры для игрока А в Excel

fx =СУММПРОИЗВ(L9:N9;$L$10:$N$10)

	L	M	N	O	P
2	$f(x)=X_1+X_2+X_3 \quad \to min$				
3	$0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \geq 1$				
4	$5 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 \geq 1$				
5	$X_1,\ X_2,\ X_3 \ \geq 0$				
6					
7	0	1	3	1	1
8	5	3	2	1	1
9	1	1	1	0,4	
10	0,067	0	0,333		
11	p1	p2	p3	V	
12	0,167	0	0,833	2,5	

N30 fx =1/N27

	L	M	N	O
18	$f(y)=Y_1+Y_2 \quad \to max$			
19	$0 \cdot Y_1 + 5 \cdot Y_2 \leq 1$			
20	$1 \cdot Y_1 + 3 \cdot Y_2 \leq 1$			
21	$3 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 \leq 1$			
22	$Y_1,\ Y_2 \ \geq 0$			
23				
24	0	5	1	1
25	1	3	0,8	1
26	3	2	1	1
27	1	1	0,4	
28	0,2	0,2		
29	q1	q2	V	
30	0,5	0,5	2,5	

Рис. 8.6. Решение игры как задачи
линейного программирования

Особенностью статистической игры является возможность для руководителя углублять свои знания относительно состояния природы путем постановки эксперимента. Однако постановка эксперимента всегда связана с затратой средств и времени, потери от которых могут оказаться значительнее того выигрыша, который могут дать результаты эксперимента.

Обозначим через Z_i отдельные исходы эксперимента. Для каждого состояния природы $П_j$ имеется определенная вероятность $P_{Пj}(Z_i)$ того, что исходом эксперимента будет данное Z_i. Величины $P_{Пj}(Z_i)$, иногда обозначаемые $P(Z_i\,|\,П_j)$, представляют собой условное распределение вероятностей отдельных исходов эксперимента при данном $П_j$ и удовлетворяют соотношениям $P_{Пj}(Z_i) \geq 0$; $\sum_i P_{Пj}(Z_i)=1$.

В данной задаче эксперимент может состоять в грубом предварительном анализе содержания примесей (точный лабораторный анализ невозможен, т.к. требует затраты значительного времени, а значит, простоя оборудования).

Результаты эксперимента:

Z_1 - примесей не обнаружено,

Z_2 - примеси в небольшом количестве,

Z_3 - примесей много.

Таблица 8.2

Пространство выборок

	$П_1$	$П_2$
Z_1	0,60	0,20
Z_2	0,25	0,30
Z_3	0,15	0,50

Поскольку при данном состоянии природы $П_j$ необходимо учитывать все возможные исходы эксперимента, то необходимо вести речь о средних потерях, называемых решающей функцией:

$$\rho(S,П)= \sum Lz\,(S,П)\cdot P_{Пj}(Z_i). \tag{8.9}$$

Поскольку пространство исходов эксперимента состоит из трех элементов, то применяемые стратегии будут иметь вид $S(Z)=(A_{k1},A_{k2},A_{k3})$, где A_{k1},A_{k2} и A_{k3} означают стратегии, применяемые при исходах эксперимента Z_1, Z_2 и Z_3 соответственно. Так, решающая функция S_{122} означает, что при исходах эксперимента Z_1, Z_2 и Z_3 применяются решения A_1, A_2 и A_3.

Рассмотрим пример вычисления решающей функции

$$\rho(S_{122},П_1) = a_{11}\cdot P_{П1}(Z_1) + a_{21}\cdot P_{П1}(Z_2) + a_{21}\cdot P_{П1}(Z_3) =$$
$$= 0\cdot 0{,}6 + 1\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}15 = 0{,}4;$$
$$\rho(S_{122},П_1) = a_{12}\cdot P_{П2}(Z_1) + a_{22}\cdot P_{П2}(Z_2) + a_{22}\cdot P_{П2}(Z_3) =$$
$$= 5\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 = 3{,}4.$$

Значения решающей функции, подсчитанные для каждой стратегии, приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Значения решающей функции ρ (S,П)

	$П_1$	$П_2$		$П_1$	$П_2$		$П_1$	$П_2$
S_{111}	0	5	S_{211}	0,6	4,6	S_{311}	1,8	4,4
S_{112}	0,15	4	S_{212}	0,75	3,6	S_{312}	1,95	3,4
S_{113}	0,45	3,5	S_{213}	1,05	3,1	S_{313}	2,25	2,9
S_{121}	0,25	4,4	S_{221}	0,85	4	S_{321}	2,05	3,8
S_{122}	0,4	3,4	S_{222}	1	3	S_{322}	2,2	2,8
S_{123}	0,7	2,9	S_{223}	1,3	2,5	S_{323}	2,5	2,3
S_{131}	0,75	4,1	S_{231}	1,35	3,7	S_{331}	2,55	3,5
S_{132}	0,9	3,1	S_{232}	1,5	2,7	S_{332}	2,7	2,5
S_{133}	1,2	2,6	S_{233}	1,8	2,2	S_{333}	3	2

Таблица 8.3 содержит величины потерь, чтобы определить значения "выигрышей" произведем преобразование
[$5- \rho(S,П)$**]**:

	$П_1$	$П_2$		$П_1$	$П_2$		$П_1$	$П_2$
S_{111}	5	0	S_{121}	4,75	0,6	S_{223}	3,7	2,5
S_{112}	4,85	1	…	…	…	…	…	…
…	…	…	S_{131}	4,25	0,9	S_{332}	2,3	2,5

Избавимся от доминируемых стратегий и произведем геометрические построения. Так, например, стратегия S_{112} доминирует над стратегией S_{121}, а стратегия S_{223} над S_{332}, следовательно стратегии S_{121} и S_{332} могут быть исключены и т.д.

Определить самостоятельно все возможные значения в преобразованной таблице и возможности упрощения таблицы. Найти решение задачи графически, аналитически и путем приведения ее к задаче линейного программирования.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами методических положений построения матрицы игровой модели и решения игры аналитически, графически и с помощью приведения игры к задаче линейного программирования;

2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходных данных для игрового моделирования;

3. Определение оптимальных стратегий игрока ***A*** с использованием информации об априорных вероятностях состояния "природы" (производственных условий);

4. Определение наличия седловой точки и возможности решения игры в чистых или смешанных стратегиях;

5. Решение игры в смешанных стратегиях графически, аналитически и путем приведения к задаче линейного программирования;

6. Определение новых стратегий, получаемых в результате проведения эксперимента и получения дополнительной информации;

7. Упрощение матрицы игры и решение игры в смешанных стратегиях графически, аналитически и путем приведения к задаче линейного программирования.

Отчет по работе должен содержать:

1. Цель работы и постановку задачи. Экономико-математическую модель решения игры аналитически и с помощью приведения игры к задаче линейного программирования;

2. Исходные данные для расчета игровой ситуации;

3. Определение оптимальной стратегии игрока ***A*** (руководителя производства) при известных априорных вероятностях.

4. Расчеты седловой точки. Графическое решение игры. Решение игры аналитически. Решение игры с помощью ЭВМ симплексным методом;

5. Результаты эксперимента и стратегии, полученные в результате дополнительной информации. Пояснения к порядку упрощения матрицы игры;

6. Графическое, аналитическое решение игры и решение игры симплекс-методом с использованием ЭВМ;

7. Анализ полученных результатов и выводы по лабораторной работе.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9
Выбор рациональной стратегии при неопределенной рыночной конъюнктуре с помощью методов теории статистических игр

Цель работы: закрепление знаний в области применения моделей статистических игр с “природой” для обоснования принятия управленческих решений.

Исходные положения. Предприятие должно определить уровень выпуска продукции и предоставления услуг на некоторый период времени, так, чтобы удовлетворить потребности клиентов. Точная величина спроса на продукцию и услуги неизвестна, но ожидается, что в зависимости от соотношения сил на рынке товаров, действий конкурентов и погодных условий, спрос может принять одно из четырех возможных значений: 300, 400, 500 или 600 тыс. шт. изделий. Маркетинговые исследования позволили определить возможные вероятности возникновения этих ситуаций, которые соответственно составили 0,2; 0,4; 0,3 и 0,1. Для каждого из возможных значений спроса существует наилучший уровень предложения, с точки зрения возможных затрат и прибыли, отклонение от этих уровней связано с риском и может привести к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросам, либо из-за неполного удовлетворения спроса. В первом случае это связано с необходимостью хранения нереализованной продукции и потерями при реализации ее по сниженным ценам, во втором – с дополнительными затратами по оперативному выпуску недостающей продукции, т.к. иначе это будет связано с риском потери клиентов. Данную ситуацию можно представить в виде матрицы игры (таблица).

Анализ стратегий производства при неопределенной рыночной конъюнктуре

<table>
<tr><td rowspan="5">Объем предло-жения, тыс.шт.</td><td colspan="4">Возможные колебания спроса на продукцию, тыс.шт.</td></tr>
<tr><td>$П_1 = 300$</td><td>$П_2 = 400$</td><td>$П_3 = 500$</td><td>$П_4 = 600$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Вероятность состояния спроса</td></tr>
<tr><td>$q_1 = 0,2$</td><td>$q_2 = 0,4$</td><td>$q_3 = 0,3$</td><td>$q_4 = 0,1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Размер прибыли (убытков) в зависимости от колебаний спроса (a_{ij}), млн. р.</td></tr>
<tr><td>$C_1 = 300$</td><td>30</td><td>22</td><td>16</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$C_2 = 400$</td><td>6</td><td>40</td><td>32</td><td>24</td></tr>
<tr><td>$C_3 = 500$</td><td>-18</td><td>16</td><td>50</td><td>42</td></tr>
<tr><td>$C_4 = 600$</td><td>-42</td><td>-8</td><td>36</td><td>60</td></tr>
</table>

Для выбора наилучшей стратегии поведения на рынке товаров и услуг существуют различные критерии, среди которых можно назвать критерии: Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица и максимакса. Считается, что вернее будет выбрать ту стратегию, которая будет предпочтительнее по нескольким критериям.

По критерию Байеса наилучшая стратегия определяется выражением:

$$\boldsymbol{B = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,} \tag{9.1}$$

где $\boldsymbol{a_{ij}}$ - размер "выигрыша" при выборе $\boldsymbol{i}$-й стратегии при $\boldsymbol{j}$-м состоянии "природы"; $\boldsymbol{q_j}$ - вероятность возникновения $\boldsymbol{j}$-го состояния "природы".

$B_1 = 30 \cdot 0,2 + 22 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,1 = 20,4$

$B_2 = 6 \cdot 0,2 + 40 \cdot 0,4 + 32 \cdot 0,3 + 24 \cdot 0,1 = 29,2 \; \boldsymbol{\max_i}$

$B_3 = -18 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,4 + 50 \cdot 0,3 + 42 \cdot 0,1 = 22,0$

$B_4 = -42 \cdot 0,2 - 8 \cdot 0,4 + 36 \cdot 0,3 + 60 \cdot 0,1 = 4,8$

Наилучшая стратегия B_2 дает максимальный "выигрыш" в размере 29,2 млн. р.

По критерию Лапласа:

$$L = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (9.2)$$

L_1 = (30 + 22 + 16 + 8)/4 = 19

L_2 = (6 + 40 + 32 + 24)/4 = 25,5 $\max_i$

L_3 = (–18 + 16 + 50 + 42)/4 = 22,5

L_4 = (–42 - 8 + 36 + 60)/4 = 11,5

Наилучшая стратегия L_2 дает максимальный "выигрыш" в размере 25,5 млн. р.

По критерию Вальда:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (9.3)$$

W_1 = 8 ; W_2 = 6 ; W_3 = –18 ; W_4 = –42.

Наилучшая стратегия W_1 дает максимальный "выигрыш" в размере 8 млн. р.

Стра-тегии	Состояния «природы»				$\min_j a_{ij}$
	$П_1$ = 300	$П_2$ = 400	$П_3$ = 500	$П_4$ = 600	
C_1 = 300	30	22	16	8	8 $\max_i$
C_2 = 400	6	40	32	24	6
C_3 = 500	-18	16	50	42	-18
C_4 = 600	-42	-8	36	60	-42

По критерию Сэвиджа наилучшая стратегия соответствует минимальному риску:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}, \qquad (9.4)$$

где r_{ij} - размер риска при выборе i-й стратегии при j-м состоянии "природы";

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}. \qquad (9.5)$$

r_{11} = 30 - 30 = 0; r_{12} = 40 - 22 = 18; r_{21} = 30 - 6 = 24 и т.д., в результате получаем матрицу рисков.

Матрица рисков

Страте-гии	Состояния «природы»				$\max\limits_{j} r_{ij}$
	$П_1 = 300$	$П_2 = 400$	$П_3 = 500$	$П_4 = 600$	
$C_1 = 300$	0	18	34	52	52
$C_2 = 400$	24	0	18	36	36 $\min\limits_{i}$
$C_3 = 500$	48	24	0	18	48
$C_4 = 600$	72	48	14	0	72

Наилучшая стратегия S_2 дает минимальный риск – 36 млн. р.

По критерию Гурвица:

$$G = \max_{i}\left\{k \cdot \min_{j} a_{ij} + (1-k)\cdot \max_{j} a_{ij}\right\} \qquad (9.6)$$

где k - коэффициент "пессимизма", примем k = 0,3.

$G_1 = 0{,}3 \cdot 8 + 0{,}7 \cdot 30 = 23{,}4$

$G_2 = 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}7 \cdot 40 = 29{,}8 \ \max\limits_{i}$

$G_3 = 0{,}3 \cdot (-18) + 0{,}7 \cdot 50 = 29{,}6$

$G_4 = 0{,}3 \cdot (-42) + 0{,}7 \cdot 60 = 29{,}4.$

Наилучшая стратегия G_2 дает "выигрыш" 29,8 млн. р.

По критерию максимакса:

$$M = \max_{i} \max_{j} a_{ij} \qquad (9.7)$$

Наивыгоднейшая стратегия может дать "выигрыш" в размере 60 млн. р., но ей же соответствует и наибольший риск (72 млн. р.).

По большинству критериев наилучшая стратегия $C_2 = 400$ тыс. шт. изделий.

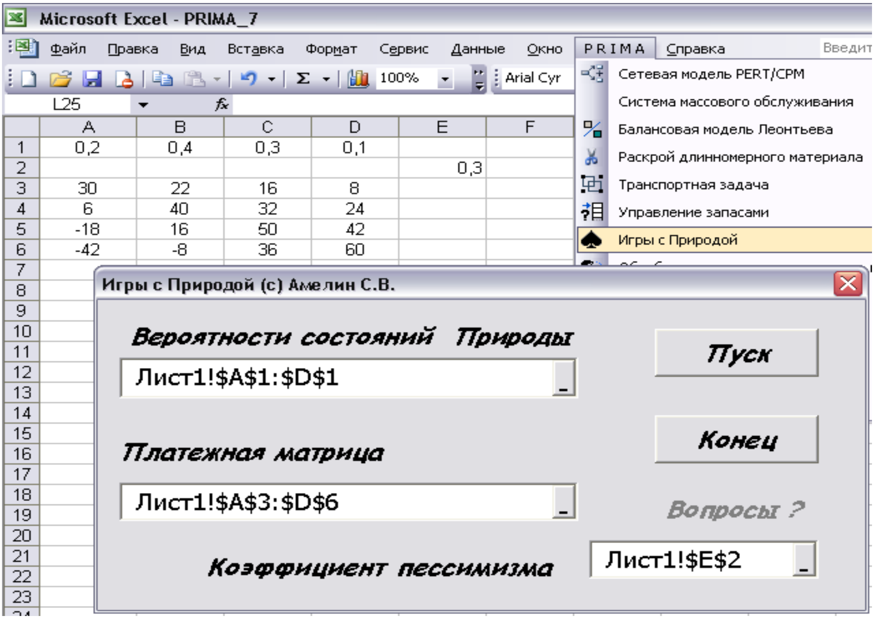


Рис. 9.1. Ввод исходных данных в ППП PRIMA
при расчёте параметров Игры с Природой в Excel

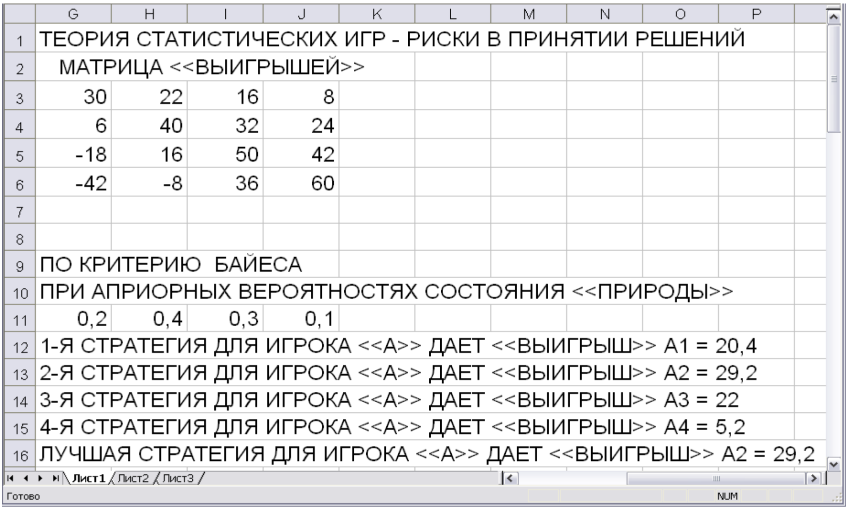


Рис. 9.2. Результаты расчёта в игре с природой

Порядок выполнения работы:

1. Изучение студентами исходных положений и экономико-математической модели статистической игры с «природой»;

2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания;

3. Построение математической модели в общем виде, представление ситуации в виде статистической игры с «природой»;

4. При «ручном» способе расчета на калькуляторах, задача решается с применением всех критериев выбора решений;

5. Расчет на ЭВМ производится с помощью программы «Теория игр с природой», реализованной на ПЭВМ в комплексе программ для учебного процесса «Prima»;

6. Анализ и экономическая интерпретация результатов моделирования на ЭВМ, которые должны быть отражены в выводах по работе.

Отчёт по работе должен содержать:

1. Цель и постановку задачи в общем виде;

2. Экономико-математическую модель задачи и исходные данные для расчета на ЭВМ;

3. Результаты моделирования на ЭВМ и их экономическую интерпретацию;

4. Выводы по лабораторной работе должны содержать анализ результатов моделирования.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Общие методические указания

Студенты должны ознакомится с программой и содержанием основных вопросов по дисциплине "Математические методы и модели в экономике режимных предприятий", внимательно изучить соответствующие методические указания и решение типовых задач в пособии по дисциплине.

В процессе изучения дисциплины студенты отвечают на вопросы для самопроверки. Выполняя индивидуальные задания, студенты должны показать ход решения, подробно изложить расчеты, расшифровать все используемые формулы, сделать краткие выводы.

Изучая дисциплину "Математические методы и модели в экономике режимных предприятий", студенты получают условия заданий у преподавателя и выполняют тот вариант задания, номер которого соответствует номеру студента по списку группы. Перед решением задачи необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующего раздела дисциплины "Методы оптимальных решений".

Программа дисциплины "Математические методы и модели в экономике режимных предприятий".

ТЕМА 1. Сетевые модели и методы планирования и управления

Назначение и область применения. Основные элементы сетевой модели (работа, событие, путь). Принципы и правила построения сетевых графиков. Линейная диаграмма сетевого графика. Расчет основных временных параметров. Оптимизация сетевого графика. Сетевое планирование в условиях неопределенности.

ТЕМА 2. Элементы теории массового обслуживания

Процесс производства как процесс обслуживания. Типы производственных задач, решаемых методами теории массового обслуживания. Поток требований, основные типы потоков. Простейший поток требований, его основные свойства. Основные типы систем массового обслуживания. Характеристика их деятельности. Формулы Эрланга для определения показателей качества функционирования систем массового обслуживания, выбор оптимальной системы.

ТЕМА 3. Матричные модели в экономике. Балансовый метод

Принципиальная схема, содержание разделов, основные балансовые соотношения межотраслевого баланса. Модель Леонтьева. Расчет полных, прямых и косвенных затрат. Расчет векторов валового выпуска, конечного продукта и добавленной стоимости. Учет внешнего ресурса в межотраслевом балансе.

ТЕМА 4. Основы линейного программирования

Математические методы в экономике. Примеры экономических задач, решаемых методами математического программирования. Общая, каноническая и стандартная задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. План, опорный план, оптимальный план.

Оптимальное планирование на промышленном предприятии. Модели эффективного использования материальных ресурсов: модель оптимальной загрузки оборудования, модели оптимального раскроя и составления смеси. Моделирование процессов распределения.

ТЕМА 5. Методы решения задач линейного программирования

Симплекс-метод (идея метода, критерий оптимальности опорного плана, переход от одного опорного плана к другому).

ТЕМА 6. Основы теории двойственности

Прямая и двойственная задачи, связь между решениями прямой и двойственной задач. Теорема двойственности. Экономическая интерпретация двойственной задачи.

ТЕМА 7. Транспортная задача

Постановка задачи. Нахождение первоначального опорного плана (метод северо-западного угла, метод минимального элемента). Циклы пересчета. Распределительный метод. Метод потенциалов. Экономические задачи, сводимые к транспортным.

ТЕМА 8. Модели управления запасами

Проблемы оптимизации материальных запасов. Системы регулирования запасов. Типы моделей управления запасами. Задача об экономичной партии с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса. Задача управления запасами с учетом затрат на хранение.

ТЕМА 9. Игровые модели в экономике

Конфликтные ситуации. Игра лиц с нулевой суммой. Платежная матрица, стратегии игроков чистые и смешанные. Седловая точка. Оптимальные максиминные и минимаксные стратегии. Решение игры в смешанных стратегиях. Сведение игровых моделей к моделям линейного программирования. Аналитическое и геометрическое решение игр 2 x 2, 2 x n, m x 2.

Элементы теории статистических игр. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица, максимакса.

Целью дисциплины "Методы оптимальных решений" является подготовка студентов к использованию современной теории и практики экономико-математического моделирования при разработке, принятии и реализации оптимальных управленческих решений в процессе управления предприятием.

Задачи дисциплины:

- изучение теоретических основ и развитие практических навыков применения методов принятии оптимальных решений в реальных условиях многокритериальности и неполноты информации рыночной экономики, с использованием современных методов экономико-математического моделирования и информационных технологий;

- освоение будущим экономистом комплекса методов поиска и обоснованного выбора наилучших (оптимальных) решений, формирование у него потребности в их повседневном использовании, раскрытие особенности экономико-математических методов и моделей при обосновании решений, принимаемых руководителем производственного коллектива и возможности технических средств в реализации основных технологических этапов их получения;

- развитие у студентов навыков творческого подхода к выбору методов моделирования при анализе производственных ситуаций и выработке своевременных обоснованных оптимальных управленческих решений на современных машиностроительных предприятиях.

Индивидуальные задания должны содержать решение всех задач по всем установленным преподавателем темам. При выполнении расчетных заданий необходимо привести постановку задачи, расчетные формулы, исходные данные (вариант выбирается по номеру студента в списке группы), все промежуточные расчеты и анализ полученных результатов с выводами.

Задания для выполнения самостоятельной работы

Модели сетевого планирования и управления

Вопросы для самопроверки

1. Каковы цели применения методов СПУ ? Охарактеризуйте область применения сетевых методов в сфере экономики.
2. Что представляет собой сетевой график ?
3. Что понимается под терминами работа и события, какие разновидности работ Вы знаете ?
4. Опишите основные требования, которым должен удовлетворять сетевой график.
5. Как определяются временные оценки работ и событий ?
6. Раскройте содержание, метод определения и значение критического пути в моделях сетевого планирования.
7. Как обеспечивается правильная нумерация событий ?

Задание для индивидуального расчета:

Построить сетевую модель выполнения комплекса работ и рассчитать основные временные параметры для всех событий и работ, используя оценки длительности работ, данные оптимистом ($t_о$), пессимистом ($t_п$) и наиболее вероятную оценку

($t_{нв}$) /9/. Построить график Ганта и эпюру загрузки исполнителей.

Варианты для индивидуального выполнения

Вариант 1		Оценки времени выполнения работ			Исполнители, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	1	2	3	3
B	-	1	3	4	2
C	-	1	2	4	1
D	A	2	3	4	2
E	A	2	5	7	3
F	D	3	4	5	2
G	B, C, E, F	2	7	9	1
H	G	3	9	12	2
I	G	2	3	5	3
J	H	1	2	3	2
K	I	2	3	4	1
L	H, I	4	5	8	2
M	J, K, L	4	7	8	3

Вариант 2		Оценки времени выполнения работ			Исполнители, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	2	4	5	1
B	-	2	3	5	2
C	-	2	3	4	3
D	C	5	8	10	2
E	C	1	2	3	1
F	E	6	7	12	2
G	A, B, D, F	5	6	7	3
H	G	5	7	9	2
I	G	5	6	9	1
J	A, B, D, F	5	8	9	2
K	H	1	2	5	3
L	H	1	4	5	2
M	H	4	7	8	1
N	J, M	2	3	5	2
P	J, M, L	2	4	5	3

Вариант 3		Оценки времени выполнения работ			Исполни-тели, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	3	4	5	3
B	-	3	4	6	2
C	-	3	5	6	1
D	A	1	2	3	2
E	A	1	3	4	3
F	D	1	2	4	2
G	B, C, E, F	2	3	5	1
H	G	2	4	7	2
I	G	2	4	5	3
J	G	2	6	7	2
K	G	2	5	7	1
L	I	1	2	3	2
M	K	1	3	5	3
N	H, L. J	1	5	7	2
P	N, M	1	7	9	1

Вариант 4		Оценки времени выполнения работ			Исполни-тели, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	2	3	5	1
B	-	2	4	5	2
C	-	1	2	5	3
D	-	1	3	5	2
E	B	1	4	5	1
F	A, C, D	3	4	5	2
G	E, F	4	5	6	3
H	G	4	5	7	2
I	G	4	6	7	1
J	H	2	3	4	2
K	H, I	2	3	6	3
L	H, I	2	4	6	2
M	J, K, L	1	2	3	1

Вариант 5		Оценки времени выполнения работ			Исполни-тели, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	2	3	4	3
B	-	3	4	5	2
C	-	4	5	7	1
D	A	1	3	4	2
E	A	1	2	4	3
F	D	1	5	9	2
G	B, C, E, F	2	3	4	1
H	B, C, E, F	4	5	6	2
I	G, H	5	6	7	3
J	G, H	6	7	8	2
K	G, H	6	7	10	1
L	G, H	6	8	10	2
M	J	2	3	4	3
N	I, K, L	2	3	5	2

Вариант 6		Оценки времени выполнения работ			Исполни-тели, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	1	2	3	1
B	A	2	3	5	2
C	A	3	5	7	3
D	A	5	7	10	2
E	B	7	10	11	1
F	B	2	5	7	2
G	E	2	7	8	3
H	D, C, F, G	1	2	3	2
I	H	1	3	4	1
J	H	2	3	4	2
K	H	2	4	5	3
L	I	2	5	7	2
M	I	1	3	5	1
N	J	1	5	7	2
P	J, K	3	4	5	3

Вариант 7		Оценки времени выполнения работ			Исполнители, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	3	4	5	3
B	-	4	5	6	2
C	-	5	6	7	1
D	A	6	7	9	2
E	A	1	3	5	3
F	D	2	5	7	2
G	B, C, E, F	2	3	4	1
H	B, C, E, F	4	5	6	2
I	G	4	6	8	3
J	H	1	3	5	2
K	H	4	8	9	1
L	G, J	3	5	6	2
M	K, L	3	4	6	3

Вариант 8		Оценки времени выполнения работ			Исполнители, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	2	3	7	1
B	-	1	2	3	2
C	-	1	5	7	3
D	A	1	2	3	2
E	C, B	1	2	5	1
F	C, B	3	5	7	2
G	C	3	4	7	3
H	G, F	1	3	6	2
I	D, E, H	2	3	4	1
J	I	4	5	6	2
K	I	6	7	8	3
L	J	2	3	4	2
M	K	1	2	4	1
N	J, M	1	2	4	2
P	L, N	2	3	4	3
Q	J, M	1	3	4	2

Вариант 9		Оценки времени выполнения работ			Исполни-тели, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	3	4	5	3
B	-	1	3	5	2
C	-	1	2	4	1
D	A	8	9	10	2
E	B	1	3	4	3
F	B	1	4	6	2
G	E	1	3	6	1
H	C, D, G	1	2	3	2
I	C, D, G	1	2	4	3
J	C, D, G	1	3	4	2
K	C, D, G	1	3	5	1
L	J	5	6	8	2
M	J	1	2	3	3
N	L	1	3	5	2

Вариант 10		Оценки времени выполнения работ			Исполни-тели, чел
Работа	предшествующая работа	$t_о$	$t_{нв}$	$t_п$	
A	-	12	14	16	1
B	A	6	8	10	2
C	A	7	8	10	3
D	A	10	12	15	2
E	A	18	19	21	1
F	B, D	5	6	8	2
G	C, E	8	9	10	3
H	F, G	4	5	8	2
I	H	3	4	8	1
J	H	4	5	6	2
K	H	5	6	7	3
L	H	6	7	8	2
M	I, J, K, L	7	8	10	1

Отчет по индивидуальной работе должен содержать:

1. Постановку задачи распределения комплекса работ по календарным плановым периодам и по исполнителям.

2. Исходные данные для построения модели и для расчета сетевого графика.

3. Сетевую модель в графическом исполнении и масштабный сетевой график (линейную диаграмму).

4. Расчет основных параметров сетевой модели для работ и событий.

5. Анализ рациональности построенной модели.

Задачи теории массового обслуживания

Вопросы для письменных ответов

1. Какие системы исследуются при помощи теории массового обслуживания ?

2. Приведите примеры систем массового обслуживания в экономике, на производстве.

3. Как классифицируются системы массового обслуживания ?

4. Какими чертами обладает простейший поток ?

5. Какое распределение обычно имеет время обслуживания?

6. Какое практическое применение имеет теория массового обслуживания при анализе функционирования подразделений производства ?

7. Какие важнейшие характеристики функционирования подразделений
производства можно вычислить на основе теории массового обслуживания ?

Задание для индивидуального расчета:

Провести расчеты показателей качества системы массового обслуживания и проанализировать полученные результаты сравнивая их с представленным примером. Пояснить какая система является более приемлемой для внедрения на производстве и почему.

Допустим имеется возможность выбора способа реализации производственного процесса, используя различные технологии и различное оборудование: 1-й способ, рассмотренный в варианте, 2-й способ, для которого необходимо также рассчитать все приведенные показатели и сравнить с 1-м, определяется следующим образом: количество работников необходимо увеличить на 1 для всех вариантов. Интенсивность поступления заявок во всех случаях равна 1 (один из станков выходит из строя в среднем 1 раз в час), время обслуживания станка 6 мин.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол-во станков	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Кол-во работников	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3

Отчет по индивидуальной работе должен содержать:

1. Постановку задачи теории массового обслуживания.
2. Исходные данные для построения математической модели.
3. Обоснование выбора формул Эрланга.
4. Расчеты основных характеристик модели массового обслуживания (вероятности всех состояний системы и все математические ожидания и коэффициенты простоя).
5. Сравнительный анализ рациональности построенной модели.

Модели межотраслевого баланса

Вопросы для письменных ответов

1. Область применения межотраслевых и межпродуктовых балансов.
2. Что показывает и отражают балансовые модели ?
3. Дайте характеристику разделов балансовой модели.
4. Каково различие между промежуточной и конечной продукцией в матричных моделях ?
5. Дайте характеристику методов формирования коэффициентов прямых затрат в балансовых моделях.
6. Раскройте экономическое содержание коэффициентов прямых и полных затрат. Как вычисляются эти коэффициенты ?
7. Как отражаются в балансовой модели экспорт и импорт продукции ?

Задание для индивидуального расчета:

По заданным коэффициентам прямых затрат (матрица А) и заданным значениям конечного продукта для 4-х отраслей (вектор У), найти добавленную стоимость для каждой из четырех отраслей. Представить все промежуточные расчеты.

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix} 0.04 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.04 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.04 \\ 0.3 & 0.1 & 0.04 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.04 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вар1 $Y=\begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 120 \\ 74 \end{pmatrix}$ **Вар2** $Y=\begin{pmatrix} 29 \\ 65 \\ 100 \\ 32 \end{pmatrix}$ **Вар3** $Y=\begin{pmatrix} 150 \\ 26 \\ 75 \\ 17 \end{pmatrix}$ **Вар4** $Y=\begin{pmatrix} 48 \\ 16 \\ 95 \\ 105 \end{pmatrix}$

Вар5 $Y=\begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 116 \\ 96 \end{pmatrix}$ **Вар6** $Y=\begin{pmatrix} 26 \\ 70 \\ 44 \\ 115 \end{pmatrix}$ **Вар7** $Y=\begin{pmatrix} 67 \\ 18 \\ 35 \\ 100 \end{pmatrix}$ **Вар 8** $Y=\begin{pmatrix} 90 \\ 111 \\ 22 \\ 58 \end{pmatrix}$ **Вар9** $Y=\begin{pmatrix} 73 \\ 42 \\ 19 \\ 110 \end{pmatrix}$ **Вар 10** $Y=\begin{pmatrix} 27 \\ 59 \\ 117 \\ 80 \end{pmatrix}$

Отчет по индивидуальной работе должен содержать:

1. Постановку задачи межотраслевого баланса.
2. Исходные данные для построения математической модели.
3. Расчетные формулы.
4. Расчеты необходимых характеристик модели.

Решение задач линейного программирования симплекс-методом

Вопросы для самопроверки:

1. В решении каких производственно-экономических проблем используются методы линейного программирования
2. На чем основан графический метод решения задач линейного программирования (ЛП)
3. Каким образом осуществляется графическая интерпретация системы ограничений задачи ЛП. Как определить область допустимых значений
4. Каким образом строят графическую интерпретацию функции цели и находят максимум и минимум функции цели в задаче ЛП
5. В каком случае задача имеет множество решений (привести графический пример)
6. В каком случае задача не имеет решения (привести графический пример)
7. В каком случае экстремум функции цели находится в бесконечности (привести графический пример)
8. Как определить точные координаты точки оптимума при графическом решении задачи ЛП
9. Как построить первоначальный опорный план задачи ЛП в симплексном методе и проверить его оптимальность
10. Как определить переменную (вектор) для включения в базис и переменную (вектор) подлежащую исключению из базиса
11. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплекс-метода
12. Какой элемент называется разрешающим (ключевым) и какова его роль в пересчете симплекных таблиц
13. Опишите алгоритм симплекс-метода
14. Опишите правила построения двойственной задачи ЛП
15. Какова экономическая интерпретация двойственных оценок
16. Каким образом определяются двойственные оценки из последней симплексной таблицы

17. Сформулируйте задачу оптимального планирования производства и запишите ее в виде модели ЛП
18. Сформулируйте задачу оптимального состава смеси и запишите ее в виде модели ЛП
19. Сформулируйте транспортную задачу ЛП и запишите ее модель
20. Какие существуют методы построения первоначального опорного плана и методы отыскания оптимального решения в транспортной задаче
21. Какие модели транспортной задачи называются открытыми и как преобразовать открытую модель в закрытую.

Задание для индивидуального расчета:

Допустим предприятие выпускает три вида изделий (И1, И2, И3), используя три вида ресурсов (Р1, Р2, Р3). Запасы ресурсов (З) ограничены. Прибыль от реализации (П) единицы изделия и нормы расхода ресурсов представлены в таблицах. Определить ассортимент и объемы выпуска продукции, получаемую прибыль, величину остатков ресурсов. Найти решение задачи симплексным методом с представлением всех симплексных таблиц (промежуточных шагов решения) и проанализировать полученные результаты. Составить двойственную задачу. Определить двойственные оценки из последней симплексной таблицы и провести анализ последней симплексной таблицы.

Вариант 1

	И1	И2	И3	З
Р1	8	1	5	44
Р2	4	1	3	48
Р3	6	5	2	90
П	6	7	8	

Вариант 2

	И1	И2	И3	З
Р1	3	5	4	81
Р2	6	1	3	74
Р3	1	5	2	33
П	4	8	7	

Вариант 3

	И1	И2	И3	З
Р1	6	7	2	57
Р2	6	6	1	97
Р3	3	7	8	63
П	5	6	8	

Вариант 4

	И1	И2	И3	З
Р1	3	2	8	65
Р2	2	3	1	85
Р3	1	4	7	96
П	3	4	2	

Вариант 5

	И1	И2	И3	З
Р1	7	8	3	81
Р2	4	1	6	68
Р3	5	1	7	54
П	2	5	6	

Вариант 6

	И1	И2	И3	З
Р1	2	7	1	34
Р2	4	1	1	39
Р3	8	8	8	86
П	7	2	5	

Вариант 7

	И1	И2	И3	З
Р1	2	4	7	34
Р2	5	3	5	63
Р3	5	3	2	82
П	3	3	2	

Вариант 8

	И1	И2	И3	З
Р1	5	6	7	97
Р2	6	5	3	85
Р3	3	4	2	61
П	5	2	4	

Вариант 9

	И1	И2	И3	З
Р1	2	5	8	58
Р2	8	4	5	55
Р3	6	6	2	69
П	7	4	1	

Вариант 10

	И1	И2	И3	З
Р1	6	2	1	42
Р2	2	8	7	35
Р3	6	4	3	36
П	3	8	2	

Графическое решение задачи ЛП

решить задачу линейного программирования графическим и аналитическим методами. Для всех вариантов X_1 и X_2 принимают неотрицательные значения.

Задание для индивидуального расчета:

Вариант 1

$3X_1 + 3X_2 <= 57$	$– 15X_1 + 2X_2 <= 0$
$– 12X_1 + 15X2 <= 60$	$3X_1 + 3X_2 >= 57$
$7X_2 <= 77$	$4X_2 >= 44$
$18X_1 – 10X_2 <= 90$	$– 12X_1 + 15X_2 >=60$
$f(X) = 4X_1 – 6X_2 -> max$	$f(X) = 4X_1 + 5X_2 -> min$

Вариант 2

$X_1 >= 5$	$2X_1 + X_2 <= 10$
$4X_1 + 12X2 <= 252$	$2X_1 + 4X_2 <= 8$
$4X + 4X_2 <= 120$	$– 2X_1 + 3X_2 <= 6$
$12X_1 + 4X_2 <= 300$	$X_1 – 8X_2 >= 0$
$f(X) = 10X_1 + 10X_2 -> max$	$f(X) = – 2X_1 – 7X_2 -> min$

Вариант 3

$17X_1 + 12X_2 <= 204$	$7X_1 + 7X_2 >= 63$
$5X2 >= 55$	$– 12X + 15X_2 >=60$
$– 15X_1 + 2X_2 >= 0$	$3X_1 + 3X_2 <= 57$
$3X_1 + 3X_2 <= 63$	$18X_1 – 10X_2 <= 90$
$f(X) = – 15X_1 – 5X_2 -> min$	$f(X) = 7X_1 + 15X_2 -> max$

Вариант 4

$X_1 + 4{,}5X_2 >= 90$	$X_2 <= 70$
$6X_1 + 5X_2 <= 300$	$5X_1 + 4X_2 <= 200$
$10X_1 + 3X_2 <= 300$	$9X_1 – X_2 <= 0$
$4X_1 + 3X_2 <= 240$	$5X_1 – 4X_2 <= 200$
$f(X) = 3X_1 + 2X_2 -> max$	$f(X) = – 3X_1 – X_2 -> min$

Вариант 5

$3X_1 + 3X_2 >= 57$	$2X_1 >= 34$
$– 12X_1 + 15X2 <= 60$	$17X_1 + 12X_2 <= 204$
$23X_1 + 27X_2 <= 621$	$– 10X_1 + 25X_2 <= 0$
$18X_1 – 10X_2 <= 90$	$23X_1 + 27X_2 >= 621$
$f(X) = – 5X_1 + 2X_2 -> max$	$f(X) = 12X_1 + 4X_2 -> min$

Вариант 6

$5X_1 – 4X_2 >= 200$	$4X_1 + 3X_2 <= 240$
$9X_1 – X_2 >= 0$	$X_1 + 0{,}3X_2 <= 30$
$5X_1 + 4X_2 >= 200$	$6X_1 + 5X_2 <= 300$
$X_2 <= 70$	$2X_1 + 9X_2 >= 180$
$f(X) = 2X_1 – 3X_2 -> min$	$f(X) = 3X_1 + 2X_2 -> max$

Вариант 7

$$\begin{array}{ll} 7X_1 + 7X_2 >= 63 & 17X_1 + 12X_2 <= 204 \\ -12X_1 + 15X_2 <= 60 & 11X_2 >= 121 \\ 17X_1 + 12X_2 <= 204 & -15X_1 + 2X_2 <= 0 \\ 18X_1 - 10X_2 <= 90 & 3X_1 + 3X_2 >= 57 \\ f(X) = 4X_1 + 17X_2 \text{ -> min} & f(X) = 2X_1 + 15X_2 \text{ -> max} \end{array}$$

Вариант 8

$$\begin{array}{ll} 18X_1 - 10X_2 <= 90 & 5X_1 + 4X_2 >= 200 \\ -10X_1 + 25X_2 <= 0 & X_2 >= 70 \\ 7X_1 + 7X_2 <= 63 & 9X_1 - X_2 >= 0 \\ 17X_1 + 12X_2 <= 204 & 5X_1 - 4X_2 >= 200 \\ f(X) = -5X_1 - 4X_2 \text{ -> min} & f(X) = -3X_1 - 2X_2 \text{ -> max} \end{array}$$

Вариант 9

$$\begin{array}{ll} 3X_1 + 3X_2 <= 57 & -12X_1 + 15X_2 >= 60 \\ 23X_1 + 27X_2 <= 621 & 18X_1 - 10X_2 >= 90 \\ -15X_1 + 2X_2 >= 0 & 23X_1 + 27X_2 >= 621 \\ 5X_2 >= 55 & 10X_2 >= 110 \\ f(X) = 3X_1 - 4X_2 \text{ -> max} & f(X) = 6X_1 + 2X_2 \text{ -> min} \end{array}$$

Вариант 10

$$\begin{array}{ll} 3X_1 + 12X_2 <= 255 & X_1 + 0{,}8X_2 >= 40 \\ 10X_1 >= 50 & 9X_1 - X_2 >= 0 \\ 12X_1 + 4X_2 <= 300 & X_2 >= 70 \\ 4X_1 + 4X_2 >= 120 & 1{,}25X_1 - X_2 <= 50 \\ f(X) = 40X_1 + 30X_2 \text{ -> max} & f(X) = 3X_1 + 2X_2 \text{ -> min} \end{array}$$

Транспортная задача

Решить задачу распределительным методом или методом потенциалов.

Допустим имеется три поставщика продукции с соответствующими предложениями a_1, a_2 и a_3 и три потребителя, спрос которых составляет $в_1$, $в_2$ и $в_3$ соответственно. Стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления до каждого пункта назначения задается матрицей С. В каждой задаче имеются дополнительные условия, которые обязательно необходимо учитывать при решении.

Вариант 1. Из 2-го пункта в 3-й груз не поставляется.

$a_1 = 90,\ a_2 = 40,\ a_3 = 70$

$в_1 = 50,\ в_2 = 50,\ в_3 = 68 \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 2. Из 3-го пункта весь груз должен быть вывезен.

$a_1 = 180,\ a_2 = 80,\ a_3 = 140$

$в_1 = 100,\ в_2 = 100,\ в_3 = 136 \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 3. Из 3-го пункта во 2-й груз не поставляется.

$a_1 = 80,\ a_2 = 70,\ a_3 = 50$

$в_1 = 45,\ в_2 = 27,\ в_3 = 88 \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 4. Из 1-го пункта весь груз должен быть вывезен.

$a_1 = 90,\ a_2 = 40,\ a_3 = 70$

$в_1 = 85,\ в_2 = 37,\ в_3 = 40 \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 5. Из 3-го пункта в 1-й груз не поставляется.

$a_1 = 140,\ a_2 = 120,\ a_3 = 140$

$в_1 = 98,\ в_2 = 122,\ в_3 = 100 \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 6. Спрос 3-пункта удовлетворить полностью.

$a_1 = 90,\ a_2 = 54,\ a_3 = 176$

$в_1 = 160,\ в_2 = 140,\ в_3 = 100 \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 7. Из 1-го пункта во 2-й груз не поставляется.

$a_1 = 255,\ a_2 = 111,\ a_3 = 120$

$в_1 = 270,\ в_2 = 120,\ в_3 = 210 \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 8. Спрос 1-пункта удовлетворить полностью.

$a_1 = 120,\ a_2 = 130,\ a_3 = 200$

$в_1 = 112,\ в_2 = 238,\ в_3 = 250 \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 9. Из 2-го пункта в 1-й груз не поставляется.

$a_1 = 213,\ a_2 = 157,\ a_3 = 130$

$в_1 = 300,\ в_2 = 100,\ в_3 = 190 \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 10. Спрос 2-пункта удовлетворить полностью.

$a_1 = 115,\ a_2 = 85,\ a_3 = 130$

$в_1 = 160,\ в_2 = 155,\ в_3 = 85 \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Игровые модели в экономике

Вопросы для самопроверки

1. Какие причины вызывают неопределенность результатов игры ?
2. Как определить нижнюю и верхнюю цену матричной игры и какое соотношение существует между ними ?
3. Сформулируйте основную теорему теории матричных игр.
4. Какие существуют методы упрощения игр ?
5. Геометрические методы решения игр с матрицами 2xn и mx2 и их применение.
6. На чем основана связь матричной игры и задачи линейного программирования ?
7. В чем состоит отличие игры с природой ?
8. Перечислите основные критерии решения игр с природой и каковы расчетные формулы для этих критериев.

Задание для индивидуального расчета:

Найти решение игровых ситуаций графически, аналитически и представить игру в виде задачи линейного программирования /9/.

Допустим в матричной игре два игрока имеют возможность выбора из нескольких вариантов решений. Ai (i =1, 2,…,m) – стратегии игрока A, Bj (j = 1, 2, …, n) – стратегии игрока B.

Значения выигрышей представлены в матрицах по вариантам.

$$1)\begin{pmatrix}6 & 10\\ 7 & 9\\ 8 & 2\\ 1 & 12\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}0 & 10\\ 4 & 5\\ 6 & 1\\ 2 & 8\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}5 & 6\\ 1 & 7\\ 12 & 2\\ 10 & 4\end{pmatrix}\quad 4)\begin{pmatrix}10 & 6\\ 4 & 15\\ 11 & 1\\ 8 & 10\end{pmatrix}\quad 5)\begin{pmatrix}12 & 9\\ 3 & 18\\ 9 & 13\\ 14 & 4\end{pmatrix}$$

$$6)\begin{pmatrix}7 & 8\\ 10 & 2\\ 9 & 6\\ 1 & 11\end{pmatrix}\quad 7)\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 6\\ 1 & 8\\ 5 & 3\end{pmatrix}\quad 8)\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 4\\ 7 & 6\\ 8 & 1\end{pmatrix}\quad 9)\begin{pmatrix}0 & 15\\ 5 & 9\\ 9 & 6\\ 14 & 4\end{pmatrix}\quad 10)\begin{pmatrix}1 & 12\\ 6 & 8\\ 10 & 6\\ 15 & 5\end{pmatrix}$$

Отчет по индивидуальной работе должен содержать.

1. Постановку задачи. Экономико-математическую модель решения игры аналитически и путем приведения игры к задаче линейного программирования.
2. Исходные данные для расчета игровой ситуации.
3. Аналитическое, графическое решение игры и решение игры симплекс-методом.
4. Анализ полученных результатов и выводы по работе.

Теория игр и статистических решений

Определить наилучшую стратегию поведения на рынке товаров и услуг с помощью критериев: Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица и максимакса. Ci (i=1-m) – стратегии лица, принимающего решения, Пj (j=1-n) – вероятные состояния рыночной среды, q_j – вероятности проявления каждой из n возможных ситуаций во внешней среде.

Задание для индивидуального расчета:

Вариант 1

	q_1=0,15	q_2=0,2	q_3=0,35	q_4=0,25	q_5=0,05
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	79	-9	15	87	66
C_2	-7	87	61	37	64
C_3	42	48	97	49	-6
C_4	48	78	10	95	75
C_5	45	58	31	-3	85

Коэффициент “пессимизма” равен 0,4

Вариант 2

	q_1=0,05	q_2=0,25	q_3=0,35	q_4=0,2	q_5=0,15
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	77	56	29	94	-11
C_2	-2	89	-16	74	31
C_3	20	57	91	-1	66
C_4	25	-18	66	99	82
C_5	-9	31	24	-13	87

Коэффициент “пессимизма” равен 0,3

Вариант 3

	q_1=0,15	q_2=0,2	q_3=0,35	q_4=0,25	q_5=0,05
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	19	71	44	20	93
C_2	37	31	71	96	59
C_3	36	53	67	70	-18
C_4	-1	97	28	43	87
C_5	56	-10	63	-1	65

Коэффициент “пессимизма” равен 0,4

Вариант 4

	q_1=0,05	q_2=0,25	q_3=0,35	q_4=0,2	q_5=0,15
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	62	-8	23	77	96
C_2	-1	77	48	95	-2
C_3	19	36	90	24	92
C_4	18	87	62	-9	15
C_5	99	50	-6	84	65

Коэффициент “пессимизма” равен 0,3

Вариант 5

	q_1=0,15	q_2=0,2	q_3=0,35	q_4=0,25	q_5=0,05
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	94	33	44	68	11
C_2	74	56	-9	64	-3
C_3	69	51	95	-13	42
C_4	-4	59	71	89	43
C_5	46	-12	57	15	68

Коэффициент “пессимизма” равен 0,4

Вариант 6

	q_1=0,05	q_2=0,25	q_3=0,35	q_4=0,2	q_5=0,15
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	81	-5	80	-2	69
C_2	80	69	37	14	81
C_3	63	-11	90	28	75
C_4	71	54	-9	33	75
C_5	-17	65	84	16	88

Коэффициент “пессимизма” равен 0,3

Вариант 7

	q_1=0,15	q_2=0,2	q_3=0,35	q_4=0,25	q_5=0,05
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	49	33	52	57	95
C_2	41	96	85	93	-12
C_3	28	-22	99	-2	75
C_4	-18	94	52	90	27
C_5	69	49	-20	61	92

Коэффициент “пессимизма” равен 0,4

Вариант 8

	q_1=0,05	q_2=0,25	q_3=0,35	q_4=0,2	q_5=0,15
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	83	-16	63	47	43
C_2	44	49	31	82	45
C_3	-13	64	69	27	-10
C_4	31	46	-11	86	35
C_5	60	85	66	-21	47

Коэффициент “пессимизма” равен 0,3

Вариант 9

	q_1=0,15	q_2=0,2	q_3=0,35	q_4=0,25	q_5=0,05
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	30	80	-9	55	49
C_2	-18	84	87	96	-1
C_3	87	-8	92	74	34
C_4	46	90	54	-6	92
C_5	88	51	78	27	-12

Коэффициент “пессимизма” равен 0,4

Вариант 10

	q_1=0,05	q_2=0,25	q_3=0,35	q_4=0,2	q_5=0,15
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
C_1	71	39	32	78	69
C_2	31	75	27	85	-10
C_3	50	-2	96	83	30
C_4	34	99	65	-14	44
C_5	96	76	-12	44	41

Коэффициент “пессимизма” равен 0,3

Глоссарий

Антагонистическими называют игры, когда интересы игроков строго противоположны.

Действительная работа - протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т. п.).

Дисциплина очереди описывает порядок обслуживания заявок, поступающих на вход системы.

Доминирующим столбцом (строкой) называется столбец, в котором все выигрыши не меньше выигрышей в некотором другом столбце.

Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

Задача линейного программирования - поиск минимума линейной формы при наличии ограничений, заданных линейными уравнениями (неравенствами).

Задача линейного программирования – нахождение экстремума линейной функции: $\boldsymbol{Z = p_1x_1 + ... + p_nx_n}$ при условиях ограничений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

Решается обычно симплекс-методом.

Задача транспортная – нахождение оптимального плана поставки товаров от производителя в пункты потребления.

Задачи массового обслуживания - класс задач исследования операций, заключающихся в нахождении оптимальных параметров систем массового обслуживания.

Игра - формализованная модель конфликтной ситуации, включающей определенные правила действий участников, добивающихся выигрыша в результате принятия той или иной стратегии.

Игроки - множество заинтересованных сторон, которых также называют участниками, сторонами, лицами.

Игровой поход – применяется в теории игр и состоит в максимизации выигрыша игрока.

Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ.

Канал обслуживания - это единица, обслуживающая систему СМО.

Косвенными затратами второго порядка называются прямые затраты, необходимые для обеспечения косвенных затрат первого порядка: $a^{j(2)}=Aa^{j(1)}$

в матричной форме $A^{(2)} = A \cdot A^{(1)} = A^3$, где $A^{(2)}$ - матрица коэффициентов косвенных затрат второго порядка.

Коэффициент детерминации служит для оценки точности регрессии, то есть соответствие полученного уравнения регрессии имеющимся эмпирическим данным.

Коэффициентами косвенных затрат первого порядка называются элементы вектора затрат $a^{j(1)} = Aa^j$ соответствующих продуктов на производство единицы продукта ***j***.

Коэффициентом напряженности $К_н$, работы (i,j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим - критический путь.

Критерии эффективности – инструмент определения степени достижения цели системой управления.

Критерий оптимальности в управлении - показатель, характеризующий качество принимаемого решения и представляющий собой экстремальное значение целевой функции управления.

Критический путь - это наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике.

Критическими работами и *событиями* называются работы и события, расположенные на критическом пути.

Линейное программирование - область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными.

Математические модели - это модели в виде логических соотношений или алгоритмов либо численных соотношений в виде таблиц или законов распределения, определяющих количественные соотношения между параметрами входа и выхода.

Матрицей косвенных затрат первого порядка называется матрица $A^{(1)}$, составленная из столбцов $a^{j(1)}$ $j = 1,2,..., n$.

Матрицей коэффициентов прямых затрат модели является квадратная матрица технологических коэффициентов $A = (a_{ij})_{n*n}$,элементы a_{ij}, которой показывают, сколько продукции отрасли ***i*** необходимо затратить для производства единицы продукции отрасли ***j*** непосредственно в производственном цикле отрасли ***j***.

Межотраслевой баланс общественного продукта (МОБ) представляет собой прямоугольную таблицу чисел, состоящую из четырех разделов, или «квадрантов». Все элементы ее рассчитываются в стоимостных единицах.

Методы экономико-математические - методы анализа и оптимизации, которые применяются для выбора наилучших, оптимальных вариантов, определяющих хозяйственные решения в сложившихся или планируемых экономических условиях.

Моделирование экономико-математическое - описание процессов математическими методами с целью экспериментальной проверки параметров, процессов и взаимодействия элементов объекта, экономии ресурсов и повышения качества управленческого решения.

Когда человек имеет дело с явлениями, более сложными, чем природные, он прибегает к высшим формам абстрактного мышления, *моделируя* действительность.

В исследовании окружающего нас реального мира, природы необходим развитый понятийный аппарат, умение отрешаться от конкретных вещей и строить общие понятия – абстракции, выводить общие законы поведения различных объектов реального мира. Человек не может охватить - отразить – отобразить природы всей полностью, ее непосредственной цельности, он может лишь вечно приближаться к этому, создавая абстракции, понятия, законы, научную картину мира.

При изучении природы излишняя простота в методе изучения и способе мышления уже не служит на пользу, а является помехой, заводит на ложные пути.

Еще более сложны явления общественной жизни, в том числе экономики, производства. Человеческие потребности всегда превышают возможности их удовлетворения, так как удовлетворенная потребность рождает новый спрос. Сложность современного мира порождает множество проблем, и наше продвижение вперед зависит прежде всего от умения правильно распределять усилия, направлять их на решение действительно насущных и актуальных проблем.

Модель математическая – модель, при описании которой используется язык математики.

Оптимизация решения - процесс перебора множества факторов, влияющих на результат, и выбор наилучшего для данной ситуации решения.

Оптимизация условная – решение экстремальной задачи $f(x_1 \ldots, x_n) \Rightarrow \text{extr}$ при некоторых условиях:

$$\varphi_1 (x_1, ..., x_n) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_m (x_1, ..., x_n) = 0.$$

Оптимум - экстремальное значение показателя, применяемого в качестве критерия оптимальности.

Ординарный поток событий - поток, у которого вероятность появления на элементарном участке Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события. При этом совмещение двух или более событий в один и тот же момент времени практически считают невозможным.

Ординарный поток событий без последействия (пуассоновский) - поток, у которого вероятность появления на любом участке времени того или другого числа событий не зависит от того, какое число событий попало на другие участки, не пересекающиеся с данным, т.е. протекание потока после любого момента времени не зависит от того, как протекал поток до этого момента.

Очередь - в теории массового обслуживания - последовательность требований или заявок, которые, заставая систему обслуживания занятой, не выбывают, а ожидают ее освобождения (затем они обслуживаются в том или ином порядке). Очередью можно назвать также и совокупность ожидающих (простаивающих) каналов или средств обслуживания.

Полный путь - любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец - с завершающим.

Простейший поток - ординарный, стационарный и без последействий - поток, плотность которого постоянна.

Условия применимости теории «случайных процессов». При изучении динамики тех или иных экономических явлений вероятностными методами должны быть учтены условия применимости теории «случайных процессов». Для привлечения, например, распределения Пуассона при изучении какого-нибудь процесса поток событий в этом процессе должен быть простейшим, т.е. стационарным, ординарным и без последействия.

Плотность потока - среднее число событий в единицу времени.

Поток событий - последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Поток требований (заявок) - последовательность требований или заявок, поступающих на пункт обслуживания (канал, станцию, прибор и т. д.).

Путь - любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Работа - процесс или действие, которое нужно совершить, что бы перейти от одного события к другому. Она характеризуется определенными затратами труда и времени.

Решение оптимальное - наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение, выбранное по какому-либо критерию оптимизации для данной ситуации.

Седловая точка - элемент платежной матрицы, который является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети.

Сетевой график - полная графическая модель комплекса работ, направленных на выполнение единого задания, в которой (модели) определяется логическая взаимосвязь, последовательность работ и взаимосвязь между ними. Основными элементами сетевого графика являются работа и событие.

Сетевые методы менеджмента - методы, которые применяет управляющая подсистема к организационным объектам управления. В основе этих методов лежит сетевое планирование и управление (СПУ) - графоаналитический метод управления процессами создания (проектирования) любых систем.

Сетевым графиком называется графическое изображение сетевой модели.

Система методов сетевого планирования и управления (СПУ) - система методов планирования и управления разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путем применения сетевых графиков.

Системы массового обслуживания - это системы, предназначенные для многоразового использования при решении однотипных задач.

Смешанная стратегия - это стратегия, ориентированная на несколько возможных стратегий поведения игрока-противника.

Событие - это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта.

Стационарный поток - такой поток, вероятностный режим которого не изменяется.

Теория игр - теоретико-вероятностная прикладная наука, рассматривающая поведение людей в различных конфликтных ситуациях в условиях неопределенности.

Перед математической теорией игр стоит задача - на абстрактных моделях конфликтных ситуаций противостоящих интересов людей или их групп наметить план действий, предусматривающий любые возможные действия «противника», т.е. стратегию, дающую правило поведения в любой возможной ситуации и приводящую, в определенном смысле, к наилучшему результату.

Модели конфликтных ситуаций по внешнему виду аналогичны формализованной игре нескольких игроков, каждый из которых преследует свои цели. Главным в теории игр является принцип минимакса - оптимальное решение в конфликтной ситуации, минимизирующее потери, вызываемые наименее выгодными для нас действиями противника.

Теория массового обслуживания - математическая дисциплина, изучающая закономерности, возникающие в процессе обслуживания требований различными услугами, и разрабатывающая методы их точной количественной характеристики. В качестве примера системы массового обслуживания можно привести работу телефонной станции, обслуживание населения ремонтными работами, обслуживание покупателей, работу лифтов и т. д.

Если пропускная способность системы ограничена, то требования могут образовать очередь (требованиями могут быть готовые изделия, поступающие на склады ограниченной емкости; телефонные абоненты, ожидающие соединения и т. п.). Изучение таких классов систем составляет специальную ветвь теории массового обслуживания - теорию очередей. При этом наиболее часто используемой математико-статистической и вероятностной характеристикой системы является математическое ожидание: число заявок в очереди, время ожидания заявок до их удовлетворения или время простоя канала обслуживания и др. При привлечении экономических показателей теория массового обслуживания позволяет выбрать наиболее рациональный, экономически обоснованный вариант функционирования систем. Наиболее типичными задачами, решаемыми с помощью теории массового обслуживания, являются: определение оптимального числа станков, обслуживаемых одним рабочим; расчет мощности канала обслуживания, при котором среднее время пребывания заявки в системе не должно превышать заданную величину; проектирование поточных линий по обработке или сборке деталей; организация движения по путям с жесткими ограничениями в пропускной способности (мосты и тоннели) и др.

Теория оптимальных процессов - математическая, вероятностная наука, позволяющая из множества различных путей достижения той или иной цели выбрать наилучший путь. Особенностью выбора является многошаговость процесса деятельности. При этом перед каждым новым шагом на пути к достижению конечной цели возникает необходимость принятия того или иного решения. Оптимизация большинства реальных процессов, носящих непрерывный характер, требует чрезвычайно больших усилий. Выход в наиболее частом использовании дискретных схем.

Теория статистических решений - рассматривает общую задачу принятия определенного решения по результату статистического наблюдения явления или процесса в условиях неопределенности. Если статистическая характеристика процесса по состоянию на некоторый момент определяется величиной $\boldsymbol{w}$ и принято решение $\boldsymbol{a}$, то в результате принятия этого решения образуются потери (времени, материальных средств и др.) $L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{a})$.

Пусть изучается работа станка, на котором изготавливаются детали. Возможны два альтернативных состояния станка: $\boldsymbol{w}_1$ - станок налажен правильно и размер изготовляемых деталей соответствует стандарту с допусками (об этом может свидетельствовать средний размер деталей) и $\boldsymbol{w}_2$ - станок разлажен, это вызывает отклонения от заданных размеров, приводящие к частичному выпуску нестандартных деталей.

В условиях эксперимента можно принять два решения: $\boldsymbol{a}_1$ -продолжить выпуск деталей и $\boldsymbol{a}_2$ - остановить станок для наладки. Имеются функции потерь: $L(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{a}_1)=0$ и $L(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{a}_2)=0$, стоимость нестандартной продукции (брак) $L(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{a}_1)$ и стоимость лишней наладки станка $L(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{a}_2)$. Задача состоит в выработке решений о дальнейших действиях. Методы теории статистических решений могут быть использованы в экономике для распределения ограниченных средств при анализе возникающих ситуаций в страховании, планировании и др.

Выбор решения основывается на нескольких основных стратегиях:

1) минимизация уровня максимальных потерь (правило минимакса);

2 минимизация наибольшего риска;

3) максимизация риска (стратегия азарта);

4) компромиссность (средняя из минимальных и максимальных потерь);

5) максимальное (или среднее) значение полезного эффекта (стратегия Лапласа);

6) максимальное ожидание (стратегия Байеса), когда используются смешанные стратегии.

Теория статистических решений обобщается теорией последовательных статистических решений, в которых учитывается стоимость повторения наблюдения.

Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.

Фиктивная работа - логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой.

Функции выигрыша или платежи - числовые характеристики, выражающие интересы игроков.

Целевая функция – функция в экстремальных задачах, минимум или максимум которой необходимо найти.

Целевая функция - количественная форма выражения критерия, с помощью которого сравниваются варианты решения.

Чистая стратегия - это стратегия, ориентированная на определенное поведение игрока-противника.

Экономико-математическая модель - это математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии даны методические материалы, предназначенные для освоения основ экономико-математического моделирования в целях обоснования принимаемых управленческих решений. Большое внимание уделено линейному программированию, моделям управления запасами, теории массового обслуживания, сетевым моделям, балансовым моделям, теории игр и статистических решений. Подробно рассмотрены оптимизационные модели планирования, рационального раскроя, транспортных перевозок, пополнения производственных запасов. Приведен анализ возможностей корректировки планов на основе модели межпродуктового баланса. Описаны методы планирования взаимосвязанного комплекса работ с помощью сетевых графиков. Изучение представленного материала предполагает широкое использование техники расчетов в среде электронной таблицы Excel.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амелин С.В. Методы и модели в экономике [Текст]: учеб. пособие / С.В. Амелин. – Воронеж: «Воронеж гос. техн. ун-т», 2005. – 142 с.

2. Амелин С.В. Методы и модели в экономике [Текст]: учеб. пособие: практикум / С.В. Амелин. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2008. – 120 с.

3. Амелин С.В. Экономико-математические методы и модели в дипломном проектировании и выпускных квалификационных работах [Текст]: учеб. пособие / С.В. Амелин. – Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2011. – ч. 1. – 187 с.

4. Амелин С.В. Экономико-математические методы и модели в дипломном проектировании и выпускных квалификационных работах [Текст]: учеб. пособие / С.В. Амелин. – Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2012. – ч. 2. – 189 с.

5. Амелин С.В. Экономическое обоснование управленческих решений по повышению конкурентоспособности продукции [Текст] / С.В. Амелин, И.В. Щетинина. // Экономика и предпринимательство. – 2016. – № 11–4 (76–4). – С. 913–917.

6. Амелин С.В. Выбор инновационных альтернатив на основе моделирования [Текст] / С.В. Амелин. // Экономинфо. – 2016. – № 26. – С. 93–95.

7. Амелин С.В. Выбор решений о приоритетных направлениях выпуска конкурентоспособной продукции / С.В. Амелин. [Текст] // Современная экономика: проблемы и решения. – 2016. – Т. 83. – № 11. – С. 58–65.

8. Амелин С.В. Выбор рациональных решений на основе анализа конкурентоспособности продукции предприятия [Текст] / С.В. Амелин, И.В. Щетинина. // Современная экономика: проблемы и решения. – 2016. – Т. 84. – № 12. – С. 39–47.

9. Амелин С.В. Обоснование управленческих решений по повышению конкурентоспособности продукции промышленного предприятия [Текст]: монография / С.В. Амелин, И.В. Щетинина. Воронеж: ФГБОУ ВО “Воронежский государственный технический университет”. – 2016. – 221 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Амелин Станислав Витальевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И
МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ:
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Подписано к изданию 24.05.2017.

Объём данных 2,45 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14