ФГ БОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлению 27.03.04 «Управление в технических системах» профиль: «Управление и информатика в технических системах», очной формы обучения.

Часть 3

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Е.М. Васильквe

Sam- rab 1k3 .docx 1,02 Мбайт 14.03.2016 уч.-изд. 3.1 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет »

(Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлению 27.03.04 «Управление в технических системах» профиль: «Управление и информатика в технических системах», очной формы обучения.

Часть 3

Воронеж 2016

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, доц. Е.М. Васильев.

УДК 517

Методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлению по направлению 27.03.04 «Управление в технических системах» профиль: «Управление и информатика в технических системах», очной формы обучения. Ч.3/ ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Е.М. Васильев. Воронеж, 2016. 56 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Sam- rab 1k3 .docx »

Ил. 8. Библиогр.: 15 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц.

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих инженеров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности. И главное при этом, чтобы с самого начала и на всем протяжении курса изучение высшей математики проходило студентами целенаправленно во взаимосвязи с другими дисциплинами и ориентацией на конкретное практическое приложение изученного материала. Это возможно только при условии эффективного сочетания обязательных учебных занятий и продуктивной самостоятельной работы студентов.

ЗАНЯТИЕ № 28

ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Литература: [1], с. 166-168, 179-189, 194-195, 199-200.

Основные понятия

Приложения двойных интегралов

Пусть G - материальная бесконечно тонкая пластинка с поверхностной плотностью $g(x, y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $S = \iint\limits_G dxdy$ - *площадь плоской области* G;

б) $m = \iint\limits_G g(x, y)\,dxdy$ - *масса пластинки*;

в) $M_x = \iint\limits_G y g(x, y)\,dxdy$, $M_y = \iint\limits_G x g(x, y)\,dxdy$ - *статические моменты пластинки относительно осей* Ox и Oy;

г) $x_c = \dfrac{M_y}{m}$, $y_c = \dfrac{M_x}{m}$ - *координаты центра тяжести пластинки*;

д) $I_x = \iint\limits_G y^2 g(x,y)\,dxdy$, $I_y = \iint\limits_G x^2 g(x,y)\,dxdy$ - *моменты инерции пластинки относительно осей* Ox и Oy;

е) $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) g(x,y)\,dxdy$ - *момент инерции пластинки относительно начала координат*;

ж) если гладкая поверхность имеет уравнение $z = f(x,y)$, то *площадь части поверхности, проектирующейся в область* G плоскости xOy, равна

$$Q = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy;$$

з) *объем* V *цилиндра*, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область G, выражается интегралом

$$V = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy.$$

Приложения тройных интегралов

Пусть T - материальное тело с объемной плотностью $g(x,y,z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $V = \iiint\limits_T dxdydz$ - *объем тела*;

б) $m = \iiint\limits_T g(x,y,z)\,dxdydz$ - *масса тела*;

в) $M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)\,dxdydz$, $M_{xz} = \iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)\,dxdydz$, $M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)\,dxdydz$ - *статические моменты тела относительно координатных плоскостей* yOz, xOz, xOy;

г) $x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}$, $y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}$, $z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$ - *координаты центра тяжести тела*;

д) $I_{yz} = \iiint\limits_T x^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$, $I_{xz} = \iiint\limits_T y^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$, $I_{xy} = \iiint\limits_T z^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$ - *моменты инерции тела относительно координатных плоскостей* yOz, xOz, xOy;

е) $I_x = I_{xz} + I_{xy}$, $I_y = I_{yz} + I_{xy}$, $I_z = I_{yz} + I_{xz}$ - *моменты инерции тела относительно осей координат* Ox, Oy, Oz; $I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$ - *момент инерции тела относительно начала координат.*

Контрольные вопросы и задания

1. Как вычисляется площадь плоской области с помощью двойного интеграла?

2. Как вычисляется объем тела с помощью двойного интеграла?

3. Выведите формулу для вычисления площади гладкой поверхности $z = z(x,y)$.

4. Как вычисляются площади поверхностей, заданных уравнениями $x = x(y,z)$ $y = y(x,z)$?

5. Что такое поверхностная плотность вещества?

6. Как определить общее количество вещества в плоской области D (массу пластинки) с помощью двойного интеграла?

7. Как находятся моменты инерции плоской фигуры относительно координатных осей?

8. Как находится момент инерции плоской фигуры относительно начала координат? Покажите его связь с моментами инерции относительно координатных осей.

9. Как определяются координаты центра масс плоской фигуры?

10. Что такое статические моменты плоской фигуры? Как они вычисляются?

11. Как вычисляется объем тела с помощью тройного интеграла?

12. Как вычисляется масса пространственного тела?

13. Как найти моменты инерции пространственного тела относительно координатных плоскостей?

14. Как найти моменты инерции пространственного тела относительно осей координат?

15. Как найти момент инерции пространственного тела относительно начала координат?

16. Как определить статические моменты пространственного тела относительно координатных плоскостей?

17. Как определить координаты центра масс пространственного тела?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти массу пластинки, ограниченной линией $x^2 + y^2 = 2x$, если ее плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния от начала координат.

Решение. Линия $x^2+y^2=2x$ или $(x-1)^2+y^2=1$ является окружностью с центром в точке $(1,\ 0)$ и радиусом 1 (рис. 4). Поэтому при вычислении интеграла удобно перейти к полярным координатам. Подставляя в уравнение окружности полярные координаты, получим $r=2\cos\varphi$. Плотность пластинки в полярных координатах $\gamma=kr^2$, где k - коэффициент пропорциональности. Таким образом, получаем

$$m=\iint_D \gamma(x,y)\,dxdy=\iint_D kr^2 r\,dr\,d\varphi=k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3dr=$$

$$=4k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi=k\left(\frac{3\varphi}{2}+\sin 2\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi k}{2}.$$

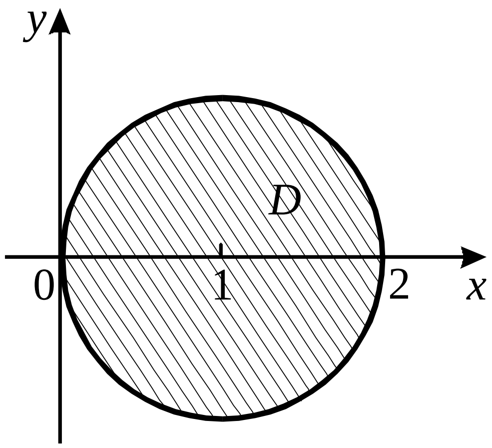


Рис. 4

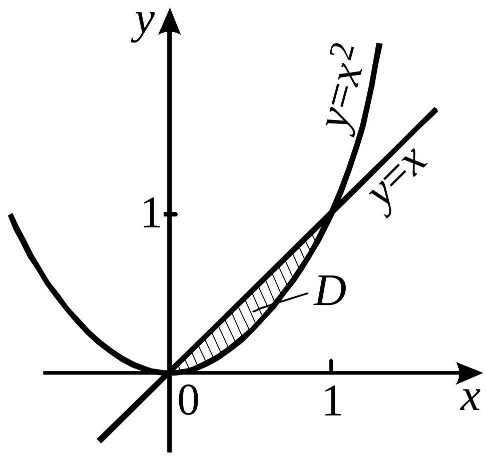


Рис. 5

Пример 2. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

Решение. Построим область D, ограниченную данными кривыми (рис. 5). Вычислим массу пластинки, учитывая, что ее плотность $\gamma(x,y)=const=\gamma$

$$m=\gamma\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\gamma\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\gamma\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\gamma}{6}.$$

Вычислим статические моменты пластинки относительно координатных осей Ox и Oy

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)\,dxdy=\gamma\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} y\,dy=\frac{\gamma}{2}\int_0^1 dx\left(x^2-x^4\right)=\frac{\gamma}{15},$$

$$M_y=\iint_D x\gamma(x,y)\,dxdy=\gamma\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{x} dy=\gamma\int_0^1 x\,dx\left(x-x^2\right)=\frac{\gamma}{12}$$

Окончательно имеем

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\gamma/12}{\gamma/6}=0,5;\qquad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\gamma/15}{\gamma/6}=0,4.$$

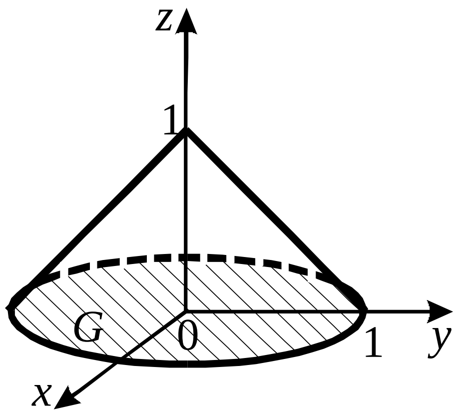


Рис. 6

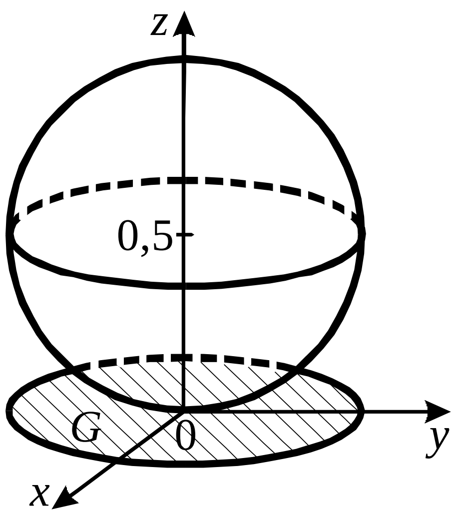


Рис. 7

Пример 3. Вычислить массу тела T, ограниченного поверхностями $z=0$, $(z-1)^2=x^2+y^2$, если плотность тела $\gamma(x,y,z)=(x+y)^2+z$.

Решение. Область T представляет собой конус с основанием G - круг радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 6). При вычислении интеграла удобнее перейти к цилиндрическим координатам (ρ,φ,z), в которых уравнение нижней половины конуса имеет вид $z=1-\rho$. Получаем

$$m=\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{1-\rho}\left(\rho^2(1+\sin 2\varphi)+z\right)dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\left(\rho^2(1-\rho)(1+\sin 2\varphi)+\frac{1}{2}(1-\rho)^2\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\varphi)+\frac{1}{24}\right)d\varphi=\frac{11\pi}{60}.$$

Пример 4. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородного тела T плотности γ, ограниченного поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

Решение. Область T представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой удобно записать в виде $x^2+y^2+(z-1/2)^2=1/4$ (рис. 7), G - проекция шара на плоскость (X,Y). При вычислении интеграла удобнее перейти к сферическим координатам (ρ,θ,φ), в которых уравнение сферы принимает вид $\rho=\cos\theta$. Получаем

$$I_x = \iiint\limits_T \left(y^2 + z^2\right)\gamma\, dxdydz = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi\,\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\,\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} \gamma\rho^2\left(\sin^2\varphi\,\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{\gamma}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2\varphi\,\sin^3\theta\cos^5\theta + \sin\theta\cos^7\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{\gamma}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left.\left(\frac{\sin^2\varphi}{32}\left(-\cos 2\theta + \frac{\cos^3 2\theta}{3} + \frac{\sin^4 2\theta}{4}\right) - \frac{\cos^8\theta}{8}\right)\right|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\gamma}{120}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi + 3\right)d\varphi = \frac{7\pi}{120}\gamma.$$

Пример 5. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy пластинки с плотностью $\gamma = 1$, ограниченной кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$ и расположенной в первом квадранте.

Решение. Необходимо вычислить $I_x = \iint\limits_G y^2 dxdy$ и $I_y = \iint\limits_G x^2 dxdy$. В декартовой системе координат, чтобы свести каждый из этих двойных интегралов к повторному нужно область G (рис. 8) разбить на три части, поэтому удобнее перейти к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда φ изменяется от $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ до $\varphi_2 = \operatorname{arctg}2$, а при каждом значении φ переменная ρ изменяется от $\rho_1(\varphi) = 1\big/\sqrt{\cos\varphi\,\sin\varphi}$ (значения r на кривой $xy=1$, уравнение которой в полярных координатах в первом квадранте имеет вид $r=1\big/\sqrt{\cos\varphi\,\sin\varphi}$) до $r_2(\varphi)=\sqrt{2}\big/\sqrt{\cos\varphi\,\sin\varphi}$ (значения r на кривой $xy=2$). Следовательно

$$I_x=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}r^3\sin^2\varphi\,dr=\frac{1}{4}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^2\varphi\,\left(r_2^4(\varphi)-r_1^4(\varphi)\right)d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{3}{4}\operatorname{tg}\varphi\,\Bigg|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}=\frac{9}{8},$$

$$I_y=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}r^3\cos^2\varphi\,dr=-\frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi\,\Bigg|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}=\frac{9}{8}.$$

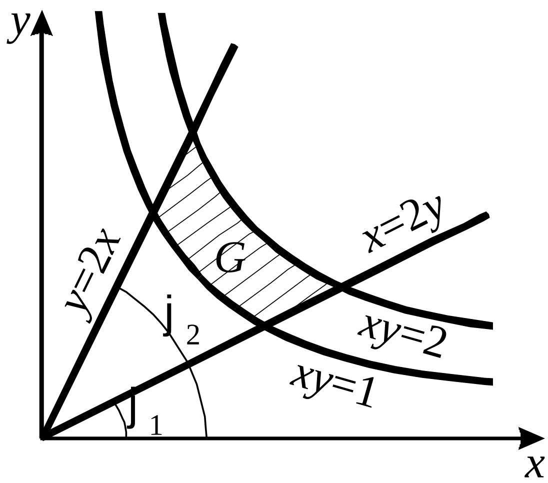


Рис. 8

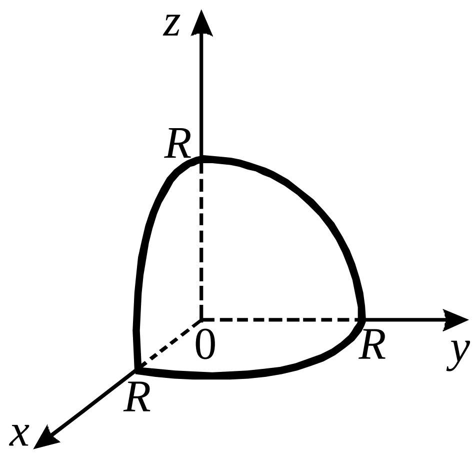


Рис. 9

Пример 6. Найти координаты центра масс части шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$, расположенной в первом октанте, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

Решение. Имеем $\gamma(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где k - коэффициент пропорциональности, и, вследствие симметрии, $x_c=y_c=z_c$. Вычислим статический момент тела (рис. 9) относительно плоскости yOz. Вычисления будем проводить в сферической системе координат, тогда получаем

$$M_{yz}=\iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)\,dv=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^R r\cos\varphi\,\sin\theta\frac{k}{r}r^2dr=$$

$$=k\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int\limits_0^R r^2dr=k\cdot1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^3}{3}=\frac{\pi kR^3}{12}.$$

Вычисляем массу тела

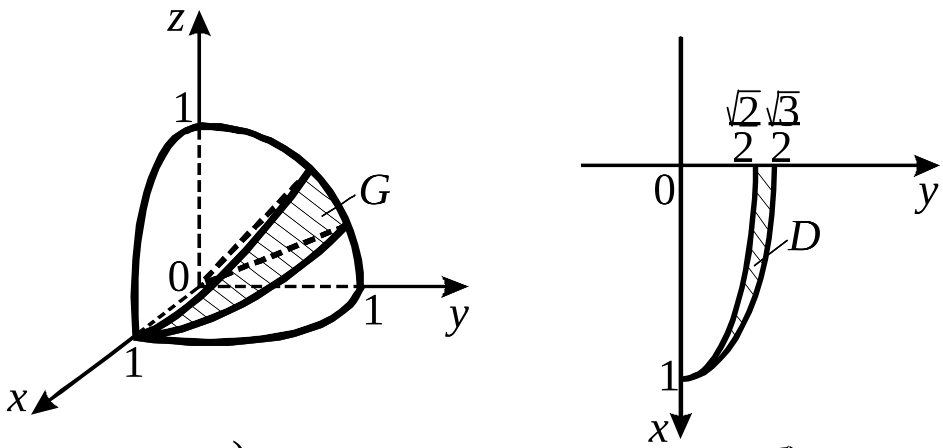
$$m=\iiint\limits_T\gamma(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^R\frac{k}{r}r^2dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}k\frac{r^2}{2}\Big|_0^R=\frac{\pi}{2}(1+1)k\frac{R^2}{2}=\frac{\pi kR^2}{2}.$$

В итоге получаем координаты центра масс

$$x_c=y_c=z_c=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\pi kR^3}{12}\bigg/\frac{\pi kR^2}{2}=\frac{R}{6}.$$

Пример 7. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной между плоскостями $z=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$ и $z=y$ ($x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$).



а) *б*)

Рис. 10

Решение. Изображаем поверхность G, площадь которой требуется найти (рис. 10,*а*). Чтобы найти уравнение проекции линии пересечения плоскости $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$ и сферы $x^2+y^2+z^2=1$ подставляем в уравнение сферы $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$. Получаем, что проекцией является часть эллипса $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{3/4}=1$. Чтобы найти уравнение проекции линии пересечения плоскости $z=y$ и сферы $x^2+y^2+z^2=1$ подставляем в уравнение сферы $z=y$. Получаем, что проекцией является часть эллипса $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1/2}=1$. Изображаем проекцию D поверхности G на плоскость xOy (рис. 10,*б*). Записываем уравнение верхней половины сферы $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и вычисляем искомую площадь

$$Q=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\left|\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\right|=$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1/\sqrt{1+\sin^2\varphi}}^{1/\sqrt{1+\frac{\sin^2\varphi}{3}}} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{4-\cos^2\varphi}} - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2-\cos^2\varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= \left(\arcsin\frac{\cos\varphi}{2} - \arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{12}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения
№№ 8.75, 8.92, 8.93, 8.94, 8.98, 8.130, 8.137, 8.142, 8.147 [6].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 29

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНГО ПЕРЕМЕННОГО. ТЕОРЕМА КОШИ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Литература: [2], с. 117-125; [8], с. 32-46; [9], с. 142-157.

Основные понятия

Пусть на комплексной плоскости задана ориентированная кусочно-гладкая кривая L, на которой определена функция $f(z)$. Разобьем эту кривую на n частей

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение интеграла от функции комплексного переменного.
2. Как вычислить интеграл от функции комплексного переменного?
3. Сформулируйте теорему Коши для простого и сложного контура.

4. Как применяется интегральная формула Коши для вычисления интегралов по замкнутым контурам?

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить $\int_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} z\,dz$, где C - отрезок прямой, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

Решение. Выделим действительную и мнимую часть подынтегральной функции $f(z)=e^{|z|^2}\operatorname{Re} z$. Для этого перепишем ее в виде $e^{|z|^2}\operatorname{Re} z=e^{x^2+y^2}x$. Отсюда следует, что $u(x,y)=xe^{x^2+y^2}$, $v(x,0)=0$. Применим формулу $\int_C f(z)\,dz=$ $=\int_C u(x,y)\,dx-v(x,y)\,dy+i\int_C v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy$. Получаем, что вычисление $\int_C f(z)\,dz$ сводится к вычислению двух криволинейных интегралов: $\int_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} z\,dz=\int_C xe^{x^2+y^2}dx+i\int_C xe^{x^2+y^2}dy$. Уравнение отрезка прямой, проходящей через точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$, будет $y=x$, где $0\le x\le 1$, а значит $dy=dx$. Поэтому

$$\int_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} z\,dz=\int_0^1 xe^{2x^2}dx+i\int_0^1 xe^{2x^2}dx=\frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1+i\frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)+i\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)(1+i).$$

Пример 2. Вычислить $\oint_C z^k dz$, где C - окружность единичного радиуса с центром в точке $z=0$ (обход против часовой стрелки, k - целое число).

Решение. Так как на окружности C $|z|=1$, то $z=e^{i\varphi}$ ($0\le\varphi\le 2\pi$) и $dz=ie^{i\varphi}\,d\varphi$. Тогда $\oint\limits_C z^k dz=\int\limits_0^{2\pi}e^{ik\varphi}\,ie^{i\varphi}\,d\varphi=$

$$=i\int\limits_0^{2\pi}e^{i(k+1)\varphi}\,d\varphi=i\int\limits_0^{2\pi}\left[\cos(k+1)\varphi+i\sin(k+1)\varphi\right]d\varphi=$$

$$=i\left[\frac{\sin(k+1)\varphi}{k+1}-\frac{\cos(k+1)\varphi}{k+1}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\begin{cases}0, & k\ne-1\\ 2\pi i, & k=-1\end{cases}.$$

При $k\ge 0$ результат вычислений согласуется с теоремой Коши. При $k=-1$ функция $f(z)=\dfrac{1}{z}$ не определена и не дифференцируема в точке $z=0$. Интеграл не равен нулю. При $k=-2,-3,\ldots$ подынтегральная функция не определена в точке $z=0$ и теорема Коши также не применима, но интеграл равен нулю.

Пример 3. Вычислить $\oint\limits_C z\bar{z}dz$, где $C:\ |z|=1$.

Решение. Аналогично примеру 2

$$\oint\limits_C z\bar{z}dz=\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}\,e^{-i\varphi}\,ie^{i\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}\,d(i\varphi)=e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi}=$$

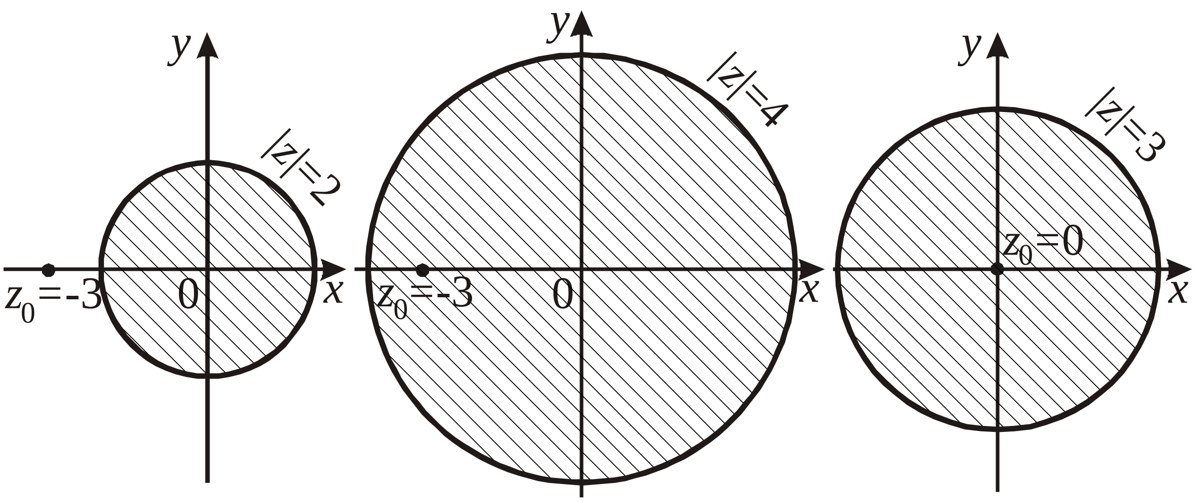
$$=e^{2\pi i}-1=\cos 2\pi+i\sin 2\pi-1=0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_i^{1+i} zdz$.

Решение. Так как подынтегральная функция является аналитической, то можно использовать формулу Ньютона-Лейбница: $\int\limits_i^{1+i} zdz=\dfrac{z^2}{2}\Bigg|_i^{1+i}=\dfrac{1}{2}\left[(1+i)^2-i^2\right]=\dfrac{1}{2}+i$.

Пример 5. Вычислить $\oint\limits_C \frac{e^z}{z+3}dz$, где C - окружность: а) $|z|=2$, б) $|z|=4$.

Решение. а) Если C - окружность радиуса 2, то подынтегральная функция $\frac{e^z}{z+3}$ является аналитической в каждой точке круга $|z|\le 2$ (рис. 2,*а*). Поэтому, в силу теоремы Коши $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z+3}dz = 0$.



а) *б*) *в*)

Рис. 2

б) Если C - окружность радиуса 4, то точка $z=-3$ (в ней функция не определена) принадлежит кругу $|z|\le 4$ (рис. 2,*б*). Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{f(z)}{z-z_0}$, где $f(z)=e^z$ является аналитической в каждой точке круга $|z|\le 4$. Применим интегральную формулу Коши (

$z_0 = -3$) $\qquad f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}dz$. Получим

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z dz}{z+3} = 2\pi i\, e^z\Big|_{z=-3} = \frac{2\pi i}{e^3}.$$

Пример 6. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{\cos z}{z^3}dz$, где $C: |z| = 3$.

Решение. Подынтегральная функция $\dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в круге $|z| \le 3$ всюду кроме точки $z_0 = 0$ (рис. 2,*в*). Выделим под знаком интеграла функцию $f(z) = \cos z$, являющуюся аналитической в круге $|z| \le 3$. Воспользуемся интегральной формулой Коши для производной $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$. При $z_0 = 0$ и $n = 2$ получим

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} = -\pi i.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^i z e^z dz$; б) $\int\limits_0^i z \cos z dz$; в) $\int\limits_1^i \left(3z^3 - 2z^2\right)dz$.

2) Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, где $C: \{|\operatorname{Im} z| \le 1,\ \operatorname{Re} z = 1\}$;

б) $\int\limits_C z|z|dz$, где $C: \{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$;

в) $\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Re}\, z^2 dz$, где AB - отрезок прямой, $z_A = 0$, $z_B = 1 + 2i$.

3) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши следующие интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$; в) $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3} dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}^2 z}{z^3} dz$; д) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{e^{1/z}}{\left(z^2+4\right)^2} dz$.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ 30-34
РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

[1], с. 125-132; [3], с. 46-70; [4], с. 160-172.

Контрольные вопросы и задания

1) Запишите ряд Тейлора для функции комплексного переменного $f(z)$, аналитической в круге $|z - z_0| < R$. Как определяются его коэффициенты?
2) Сформулировать теорему Тейлора. Каковы условия разложимости функции в ряд Тейлора?

3) Записать разложения в ряд Тейлора для основных элементарных функций: e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{Ln}(1+z)$, $(1+z)^a$, $\mathrm{arctg}\, z$
4) Дать определение ряда Лорана функции $f(z)$. Как определяются его коэффициенты?
5) Сформулировать теорему Лорана. Каковы условия сходимости ряда Лорана? Какова его область сходимости?
6) Какие ряды называются правильной и главной частями ряда Лорана?
7) Какая точка называется особой точкой функции? В каком случае она называется изолированной особой точкой?
8) Какая особая точка называется:
   а) устранимой; б) полюсом; в) существенно особой?
9) Как зависит вид ряда Лорана от характера особой точки?
10) Как связаны полюсы функции $\dfrac{1}{f(z)}$ с нулями функции $f(z)$? Что такое кратность полюса?

Примеры решения задач

Пример 1. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$ в окрестности точки $z=0$ в ряд Тейлора.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы двух дробей: $f(z)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{1-z^2}+\dfrac{1}{z^2+4}\right)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{1-z^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\dfrac{z^2}{4}}\right)$ и воспользуемся разложением в ряд $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, сходящемся в круге $|z|<1$, подставляя вместо z для первой дроби z^2, а для второй - $\left(-\frac{z^2}{4}\right)$. Получим ряд Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left(z^{2n}+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n}\right)= =\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)z^{2n}$, который сходится в круге $|z|<1$.

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)= =\frac{1}{(1-z)(z+2)}$ в областях: а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>2$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы двух дробей: $f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z+2}\right)$. Если $|z|<1$, то $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, а если $|z|>1$, то $\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$. Аналогично, при $|z|<2$ имеем разложение $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$, а если $|z|>2$, то $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}$. Отсюда следует:

а) в круге $|z|<1$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n$. Это ряд Тейлора;

б) в кольце $1<|z|<2$ $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3\cdot 2^{n+1}}$. Ряд Лорана содержит как положительные, так и отрицательные степени z;

в) в кольце $|z|>2$ $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}-1}{3z^n}$. Ряд Лорана содержит только отрицательные степени z.

Пример 3. Определить характер особой точки $z_0=0$ для функций: а) $f(z)=\frac{1}{\sin z-z}$, б) $f(z)=\cos\frac{1}{z}$, в) $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z}$.

Решение. а) Используя разложение в ряд Тейлора $\sin z-z=-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$, получим, что функция, стоящая в знаменателе дроби, имеет в точке $z_0=0$ нуль третьего порядка. Отсюда следует, что функция $f(z)=\frac{1}{\sin z-z}$ имеет в точке $z_0=0$ полюс третьего порядка.

б) Разложим $\cos\frac{1}{z}$ в ряд Лорана: $\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}- \quad -\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!z^{2n}}+\ldots$. Отсюда видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов. Поэтому для функции $\cos\frac{1}{z}$ точка $z_0=0$ является существенно особой.

в) Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^{-z} в окрестности точки $z_0=0$, получим $f(z)=\frac{1}{z}\left(1-e^{-z}\right)=$

$=\frac{1}{z}\left[1-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\right]=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}-\frac{z^3}{4!}+\ldots$. Лорановское разложение функции в окрестности точки $z_0=0$ не содержит главной части, поэтому эта точка является устранимой особой точкой.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Используя разложение основных элементарных функций, разложить в ряд по степеням z и указать области сходимости полученных рядов:

$$\text{а) } e^{-z^2}; \quad \text{б) } \frac{\sin^2 z}{z}; \quad \text{в) } z^3 e^{1/z}; \quad \text{г) } \frac{1+\cos z}{z^4}.$$

2) Доказать, что справедливы формулы:

$$\text{а) } \frac{1}{b-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}} \text{ при } |z-a|<|b-a|;$$

$$\text{б) } \frac{1}{b-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \text{ при } |z-a|>|b-a|,$$

где a и b - заданные комплексные числа. **Указание:** использовать при доказательстве разложение функции $\frac{1}{b-z}$ в ряд (геометрическую прогрессию).

3) Разложить в ряд Лорана следующие функции в указанных областях:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ в кольце $0<|z|<1$ и в кольце $1<|z|<\infty$;

б) $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в кольцах $0<|z-1|<1$ и $0<|z-2|<1$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ в кольце $0<|z-i|<2$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольцах $2<|z|<3$ и $3<|z|<\infty$.

4) Найти особые точки функции и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$; в) $f(z)=z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$;

г) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; д) $f(z)=\dfrac{z^3-1}{z-1}$.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ 35-36

ВЫЧЕТЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ. ПРИМЕННИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

$[1]$, с. 132-137; $[3]$, с. 70-81; $[4]$, с. 172-179.

Контрольные вопросы и задания

1) Что называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки?
2) Чему равен вычет в устранимой особой точке и почему?
3) Как вычисляется вычет в простом и кратном полюсах?
4) Как находится вычет в существенно особой точке?
5) Сформулируйте основную теорему о вычетах. Как применяется теория вычетов к вычислению интегралов по замкнутым контурам?
6) Сформулируйте лемму Жордана. Как применяются вычеты при вычислении несобственных интегралов?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ в ее особых точках.

Решение. Функция имеет две особые точки: $z_1=1$ - простой полюс и $z_2=2$ - полюс кратности 2. В случае простого полюса вычет вычисляется по формуле $\operatorname{Res}\left[f(z),\, z_0\right]= \ =\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$. Для $z_1=1$ получаем $\operatorname{Res}\left[f(z),\, 1\right]= \ =\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z}{(z-2)^2}=1$. В случае полюса кратности $n>1$ вычет вычисляется по формуле $\operatorname{Res}\left[f(z),\, z_0\right]=\dfrac{1}{(n-1)!}\times$

$\times \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$. Для $z_2=2$ и $n=2$ получаем $\operatorname{Res}\left[f(z),\,2\right]=\lim\limits_{z\to 2}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)'=-1$.

Пример 2. Вычислить вычет $f(z)=e^{1/z}$ в точке $z_0=0$.

Решение. Для функции $e^{1/z}$ точка $z_0=0$ является существенно особой, так как $e^{1/z}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+\ldots$. Поэтому $\operatorname{Res}\left[f(z),\,0\right]=c_{-1}=1$, где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана при z^{-1}.

Пример 3. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{dz}{e^z+1}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$ имеет внутри круга $|z-2i|<2$ одну особую точку $z_0=\pi i$ - полюс первого порядка (рис. 3). Воспользуемся формулой $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)},\,z_0\right]=\dfrac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$. Получим $\operatorname{Res}\left[f(z),\,\pi i\right]=$

$\left.\dfrac{1}{\left(e^z+1\right)'}\right|_{z=\pi i}=\dfrac{1}{\cos\pi}=-1$. Далее воспользуемся основной теоремой о вычетах. Откуда получим

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{dz}{e^z+1}=2\pi i\operatorname{Res}\left[f(z),\,\pi i\right]=-2\pi i.$$

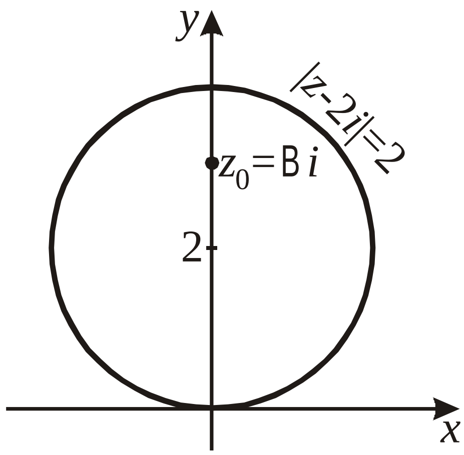


Рис. 3

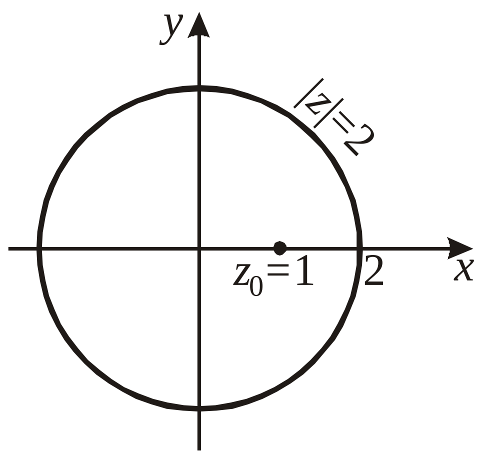


Рис. 4

Пример 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}(2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=(2z-1)\times\cos\dfrac{z}{z-1}$ имеет внутри круга $|z|<2$ одну особую точку $z_0=1$, которая является существенно особой (рис. 4). Поэтому для вычисления вычета в точке $z_0=1$ применим формулу $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана при $(z-1)^{-1}$. Имеем $\cos\dfrac{z}{z-1}=\cos\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)=\cos 1\cdot\cos\dfrac{1}{z-1}-\sin 1\times$

$$\times\sin\frac{1}{z-1}=\cos 1\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots\right)-\sin 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\ldots\right).$$

Так как $2z-1=2(z-1)+1$, то $c_{-1}=-(\cos 1+\sin 1)$. Следовательно $\oint\limits_{|z|=2}(2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}dz=-2\pi i(\cos 1+\sin 1)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}$.

Решение. Введем функцию $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$, которая на действительной оси ($z=x$) совпадает с подынтегральной функцией, которая является дробно-рациональной. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z>0$) единственный полюс четвертого порядка $z_0=i$. Поэтому $I=2\pi i\times$ $\times\operatorname{Res}\left[f(z), i\right]$, где $\operatorname{Res}\left[f(z), i\right]=\frac{1}{3!}\left.\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]'''\right|_{z=i}=-\frac{5}{32}i$.

Отсюда $I=\frac{5}{16}\pi$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1) Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

а) $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$; б) $f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$;

в) $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$.

2) Вычислить интегралы: а) $\oint\limits_C\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)(z-2)^2}dz$, где $C:|z|=3$;

б) $\oint\limits_C \operatorname{tg} z\,dz$, где $C: |z| = 2$; в) $\oint\limits_C z^3 \sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C: |z| = 1$; г) $\oint\limits_C \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C: |z| = 2$.

3) Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$; в) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, коллоквиум.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2. - М.:Наука, 1985.
2. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991.
3. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. - М.: Наука, 1985.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. - М.: Высш. шк., 1980.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.

6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. - М.:Наука, 1986.

7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.В. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1989.

8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1981.

9. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. - М.: Наука, 1980.

10. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1981.

11. Семенов М.П., Катрахова А.А. Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление: Учеб. пособие. - Воронеж: Изд-во ВГТУ, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» по направлению 27.03.04 «Управление в технических системах» профиль: «Управление и информатика в технических системах», очной формы обучения.

Часть 3

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Васильев Евгений Михайлович

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.03. 2016.
Уч.-изд. л. 3,1. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14