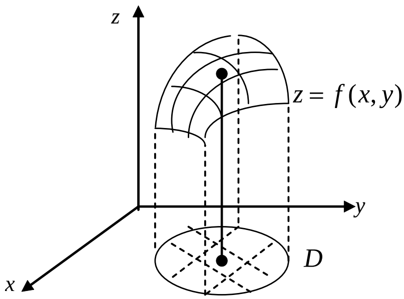
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы
по изучению раздела «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»
курса «Математический анализ»
для студентов направления подготовки бакалавров 230100
«Информатика и вычислительная техника» (профили «Системы автоматизированного проектирования», «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»)
очной формы обучения



Воронеж 2013

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская

УДК 517.9

Методические указания для организации самостоятельной работы по изучению раздела «Интегральное исчисление функций нескольких переменных» курса «Математический анализ» для студентов направления подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профили «Системы автоматизированного проектирования», «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети») очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская. Воронеж, 2013. 45 с.

В методических указаниях содержатся основные теоретические положения по интегральному исчислению функций нескольких переменных, изложение теоретического материала иллюстрируется большим количеством примеров и задач, приводятся задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для организации самостоятельного изучения студентами второго курса раздела «Интегральное исчисление функций нескольких переменных» по курсу математического анализа.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word 2003 и содержатся в файле «IFNP. doc».

Ил. 26. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойные интегралы.

1. Основные понятия и свойства.

При изучении определенных интегралов для нахождения площади криволинейной трапеции было введено понятие интегральной суммы, пределом которой является определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_i f(\xi_i)\triangle x_i$. Задача об определении объема тела приводит к понятию двумерной интегральной суммы, предел которой называется двойным интегралом.

Задача. Найти объем тела – «цилиндроида», ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$ ($f(x,y) \geq 0$), снизу конечной замкнутой областью D плоскости Oxy, и прямой боковой цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющая является границей области D (рис.1).

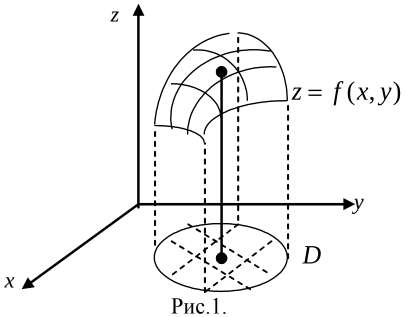


Рис.1.

Для вычисления объема V разобьем область D произвольными линиями на n элементарных частей $D_1, D_2, ..., D_n$. В каждой из этих частей выберем точку $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ и построим прямой цилиндрический столбик с основанием D_i. Объем такого столбика приблизительно равен $\triangle V_i \approx f(x_i, y_i)\triangle S_i$, где $\triangle S_i$ -площадь элементарной части D_i. Составим сумму $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i$. Суммы такого вида называются двумерными интегральными суммами Римана.

Объем «цилиндроида» V приблизительно равен

$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i = S_n(f)$. Обозначим d_i диаметр площадки S_i, то есть ее наибольший линейный размер. Пусть $d = \max d_i$ - наибольший диаметр площадок $D_1, D_2, ..., D_n$. Переходя к пределу при $d \to 0$, $n \to \infty$, получаем объем «цилиндроида» $V = \lim\limits_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i$. Таким образом, поставленная задача о нахождении объема «цилиндроида» привела к необходимости рассматривать двумерные интегральные суммы и их пределы. Пусть теперь $f(x, y)$ - любая функция двух переменных (не обязательно положительная), непрерывная в некоторой области D, ограниченной замкнутой линией. Повторяя операцию разбиения и вышеизложенные рассуждения, составим интегральную сумму вида $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i$.

Определение. Если существует предел последовательности интегральных сумм $S_n(f)$ при $d \to 0, n \to \infty$, и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на части $D_1, D_2, ..., D_n$, ни от выбора точек $M_i \in D_i$, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)ds$ или $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, то есть

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i .$$

Теорема (достаточные условия существования двойного интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она интегрируема в этой области.

В дальнейшем будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

Геометрический и физический смысл двойного интеграла.

1. **Геометрический смысл**. По определению выражение, стоящее в правой части равенства $V = \lim\limits_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \triangle S_i$,
является двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D, поэтому объем $V = \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy.$

Таким образом, если $f(x, y) \geq 0$, то двойной интеграл представляет собой объем прямого «цилиндроида», ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью D и прямой боковой цилиндрической поверхностью.

2. Физический смысл. Пусть плоская материальная фигура D имеет поверхностную плотность $\rho(x, y) = \lim\limits_{\triangle s \to 0} \dfrac{\triangle m}{\triangle s}$ и $\rho(x, y)$ - непрерывная функция. Разобьем область D на части $D_1, D_2, ..., D_n$ и выберем точки $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ произвольным образом. В пределах малой площадки D_i можно считать плотность постоянной и равной $\rho(x_i, y_i)$, тогда масса малой площадки D_i приближенно равна $m_i \approx \rho(x_i, y_i) \triangle s_i$, где $\triangle s_i$ - площадь малой площадки D_i. Следовательно, масса всей материальной фигуры приближенно будет равна $m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i) \triangle s_i$.
Переходя к пределу при $d \to 0, n \to \infty$, получаем
$$m = \lim_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i) \triangle s_i = \iint\limits_{D} \rho(x, y) ds .$$
Таким образом, физический смысл двойного интеграла – масса неоднородной материальной области.

Свойства двойного интеграла.

1. Если область интегрирования D разбита на непересекающиеся части, то двойной интеграл по этой области

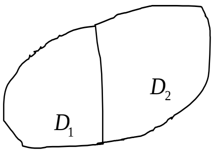


Рис.2.

равен сумме двойных интегралов по ее частям.

Пусть $D = D_1 \cup D_2$ (рис.2), тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$

Доказать самостоятельно.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

Действительно, $\iint\limits_D Kf(x,y)dxdy = \lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} Kf(x_i, y_i)\vartriangle S_i =$

$$= K \lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\vartriangle S_i = K \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

3. Двойной интеграл суммы равен сумме двойных интегралов слагаемых.

Действительно, $\iint\limits_D (f(x,y) + \varphi(x,y))dxdy =$

$$\lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i, y_i) + \varphi(x_i, y_i))\vartriangle S_i = \lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\vartriangle S_i +$$

$$\lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i)\vartriangle S_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy.$$

4. Двойной интеграл от единичной функции равен площади области интегрирования.

Действительно, $\iint\limits_D dxdy = \lim\limits_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} \vartriangle S_i = S_D$.

5. Двойной интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

Действительно, в этом случае интегральные суммы неотрицательны и, следовательно, их предел неотрицателен.

6. Монотонность двойного интеграла. Если $f(x,y) \le \varphi(x,y)$

на области D, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy.$

Действительно, из неравенства $\varphi(x,y) - f(x,y) \ge 0$ верного на области D, по свойству 5, следует неотрицательность двойного интеграла $\iint\limits_D (\varphi(x,y) - f(x,y))dxdy \ge 0$, а значит и

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy.$$

7. **Теорема о среднем**. Двойной интеграл от непрерывной функции по ограниченной замкнутой области равен произведению площади этой области на значение подынтегральной функции в некоторой точке области

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S_D.$$

Доказательство. Пусть на замкнутой ограниченной области D задана непрерывная функция $f(x,y)$. Тогда $f(x,y)$ принимает в области D все значения, лежащие между наибольшим и наименьшим значениями $f(x,y)$ на D. Обозначим их соответственно M и m. Для всех точек области D имеем $m \le f(x,y) \le M$, поэтому по свойству 6 справедливы неравенства

$$\iint\limits_D m dxdy \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D M dxdy,$$

или $mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS_D$, откуда

$$m \le \frac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S_D} \le M.$$

Дробь, стоящая в средней части, является промежуточным числом между m и M, следовательно, $f(x,y)$ в некоторой точке (ξ,η) области D принимает значение

$$\frac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S_D} = f(\xi,\eta), \text{ откуда } \iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S_D .$$

Замечание. Значение функции $f(\xi,\eta) = \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{S_D}$ называется средним значением $f(x,y)$ в области D.

Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области

$$D = \{(x,y): a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - непрерывные функции на отрезке $[a,b]$.

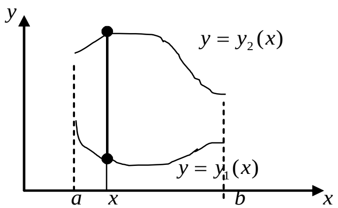


Рис.3.

Область, в которой всякая прямая параллельная оси Oy, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает ее границы в двух точках, называется **правильной** относительно оси Oy (рис.3).

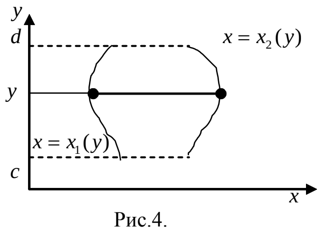


Рис.4.

Аналогично определяется область **правильная** относительно оси Ox:

$D = \{(x,y): c \le x \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, где функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ - непрерывные функции на отрезке $[c,d]$ (рис.4).

Выражения вида

$$I_D = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx, \quad I_D = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x,y)dx \right) dy$$

называются повторными интегралами от функции $f(x,y)$ по области D.

Теорема. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен повторному интегралу от этой функции по области D.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Если область правильная относительно оси Ox, то двойной интеграл вычисляется как повторный вида

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

В случае, когда область D не является правильной, ее разбивают на части, каждая из которых является правильной.

Частный случай. Если область интегрирования есть прямоугольник, ограниченный прямыми $x=a, x=b, y=c,$ $y=d,$ то формула преобразования двойного интеграла в повторный имеет вид

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Если кроме того, в подынтегральной функции переменные разделены, то есть $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, то двойной интеграл превращается в произведение двух определенных интегралов:

$$\iint\limits_D \varphi(x)\psi(y)dxdy = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \int\limits_c^d \psi(y)dy = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \cdot \int\limits_c^d \psi(y)dy.$$

Пример. Найти $\iint\limits_D xydxdy$, где D - область, ограниченная линиями $y=x^2, x=y^2$ (рис.5).

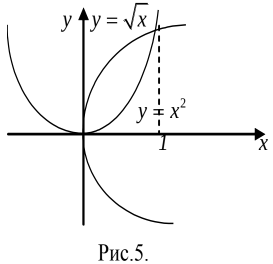


Рис.5.

Решение. $\iint\limits_D xydxdy =$

$$=\int_0^1 xdx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy=\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx\ =\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^5)dx=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6})\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Пример. Найти $\iint\limits_D \sin x\sin ydxdy$, где D- квадрат $0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$ (рис.6).

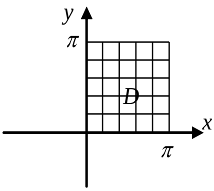


Рис.6.

Решение. $\iint\limits_D \sin x\sin ydxdy\ =$

$$=\ \int_0^{\pi}\sin xdx\int_0^{\pi}\sin ydy=(\int_0^{\pi}\sin xdx)^2=2^2=4.$$

Представление двойного интеграла в виде повторного

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

называют расстановкой пределов интегрирования в определенном порядке. Задача расстановки пределов интегрирования допускает несколько вариантов.

1. Задан двойной интеграл по области D. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

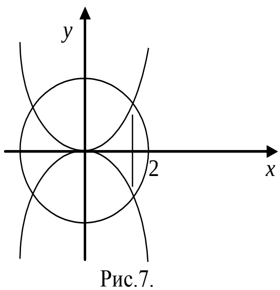


Рис.7.

Пример. Область D лежит в правой полуплоскости (т.е. $x\ge 0$) и ограничена кривыми: $3y=x^2$, $3y=-x^2, x^2+y^2=4$ (рис.7). В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в одном и другом порядке.

Решение. Запишем неравенства, которым должны удовлетворять координаты точек области D:

$$D=\{(x,y):0\le x\le\sqrt{3},-\frac{x^2}{3}\le y\le\frac{x^2}{3}\}\cup\{(x,y):\sqrt{3}\le x\le 2,$$

$-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$ или

$D=\{(x,y): -1 \le y \le 0, \sqrt{-3y} \le x \le \sqrt{4-y^2}\} \cup \{(x,y): 0 \le y \le 1,$
$\sqrt{3y} \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$.

Расставим пределы интегрирования

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-x^2/3}^{x^2/3} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt{-3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

2. Задан двойной интеграл по области D. Расставить пределы интегрирования в каком-либо порядке.

В этом случае выбирают порядок интегрирования, при котором интеграл имеет наиболее простое представление. Выбор может определяться как видом области интегрирования, так и свойствами подынтегральной функции. Например, расстановка пределов в одном порядке требует разбиения множества D на меньшее число составляющих, чем расстановка в другом порядке.

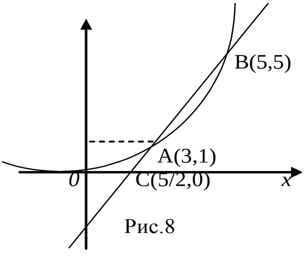


Рис.8

Пример. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, где D- область ограниченная линиями: $y=2x-5$, $y=0$, $x^2+y^2=10y$, (рис.8).

Решение. Для расстановки пределов интегрирования в порядке y,x можно не разбивать D на составляющие области, а для другого порядка расстановки пределов такое разбиение необходимо. Исходя из этого выбираем порядок y,x. Решая систему $\begin{cases} x^2+y^2=10y; \\ 2x-5=y, \end{cases}$ получаем координаты точек пересечения: A(3,1), B(5,5). Следовательно, $D = \{(x,y): 0 \le y \le 1, \sqrt{10y - y^2} \le x \le (y+5)/2\}$ и

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{10y-y^2}}^{(y+5)/2} f(x,y)dx .$$

3.Задан повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Поменять порядок интегрирования.

Для решения такой задачи сначала делают переход от заданного повторного интеграла к двойному, то есть восстанавливают по данным пределам область интегрирования D: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Условия на координаты точек (x,y) множества D получаем исходя из заданного повторного интеграла $D = \{(x,y): a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$. В полученном двойном интеграле проведем расстановку пределов интегрирования в требуемом порядке. Таким образом, считая область D правильной относительно обеих осей Ox и Oy, получаем цепочку равенств

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

Пример. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

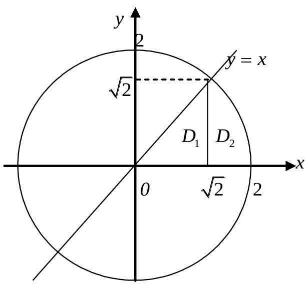


Рис.9.

Решение. Запишем условие на координаты точек (x,y) из множества D, по которому берется интеграл:

$D = \{(x,y): 0 \le y \le \sqrt{2}, y \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$ (рис.9).

Область D правильная как относительно оси Oy, так и относительно оси Ox. Так как при интегрировании в порядке x, y верхняя граница области D задается двумя различными функциями, представим множество D в виде $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x,y): 0 \le x \le \sqrt{2}, 0 \le y \le x\},$$

$$D_2 = \{(x,y): \sqrt{2} \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}.$$

Итак,

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy .$$

Двойной интеграл в полярной системе координат

Выведем формулу перехода от декартовых координат к полярным в двойном интеграле.

Пусть $f(x,y)$ - непрерывная функция на ограниченной замкнутой области D. Так как при определении двойного интеграла предел последовательности интегральных сумм не зависел от способа разбиения области D на части D_i, то разобьем область D на D_i концентрическими окружностями $\rho = \rho_i$ и лучами $\varphi = \varphi_i$ (рис.10).

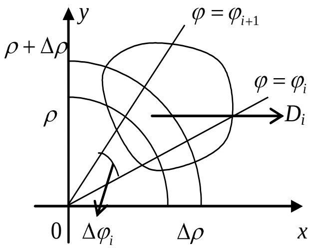


Рис.10.

Тогда площадь

$$S_{D_i} = \frac{\pi(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\varphi}{2\pi} - \frac{\pi\rho^2 \Delta\varphi}{2\pi} = \Delta\rho(\rho + \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\varphi \approx \rho\Delta\rho\Delta\varphi$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости чем $\frac{\Delta\rho^2\Delta\varphi}{2}$. Таким образом, двумерный элемент площади в полярных координатах запишется в виде

$ds = \rho d\rho d\varphi$.

Пусть теперь область D правильная относительно ρ, то есть любой луч, исходящий из полюса и проходящий через внутреннюю точку области пересекает границу области только в двух точках. В этом случае область D можно задать множеством

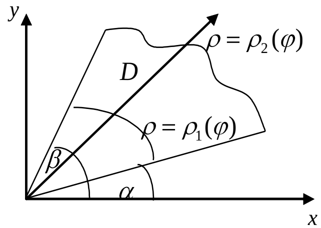


Рис.11.

$D = \{(\varphi, \rho) : \alpha \le \varphi \le \beta, \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\}$ (рис.11). Тогда повторный интеграл по области D представим в виде

$$\iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

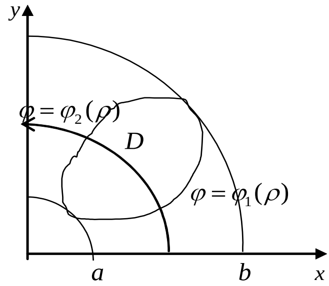


Рис.12.

Если любая окружность с центром в начале координат, проходящая через внутреннюю точку области пересекает линию границы в двух точках, то есть область D есть множество:

$D = \{(\varphi, \rho) : a \le \rho \le b, \varphi_1(\rho) \le \varphi \le \varphi_2(\rho)\}$, (рис.12), то повторный интеграл примет вид

$$\iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_a^b d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi.$$

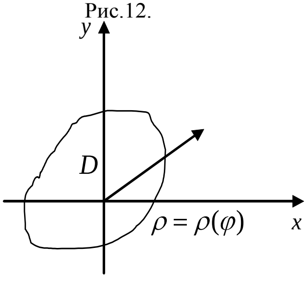


Рис.13.

В случае, когда полюс лежит внутри области D и любой луч пересекает границу не более чем в одной точке (рис.13), для вычисления удобно использовать формулу

$$\iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ в полярной системе координат по области D, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0$, расположенной в I квадранте (рис.14).

Решение.

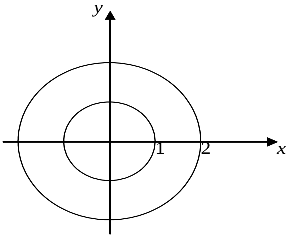


Рис.14.

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2} dxdy = \iint_D e^{\rho^2} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_1^2 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} e^{\rho^2} d\varphi = \int_1^2 \rho e^{\rho^2} d\rho \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^2 e^{\rho^2} d(\rho^2) = \frac{\pi}{4} e^{\rho^2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}(e^4 - e).$$

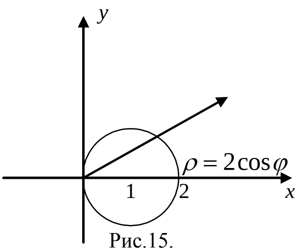


Рис.15.

Пример. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ в полярной системе координат по области D, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ (рис.15).

Решение. Перейдем к полярным координатам с полюсом в точке $O(0,0): x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$ Угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2.$ Подставляя полярные координаты в уравнение окружности, получим $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, откуда $\rho = 0$ или $\rho = 2\cos\varphi$ - уравнение окружности в полярных координатах. Двойной интеграл по области D сводится повторному $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\ \right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным u и v по формулам $x = x(u,v), y = y(u,v)$, $(u,v) \in G$. При этом каждая точка (x,y) области D соответствует некоторой точке (u,v) области G, а каждая точка (u,v) области G переходит в некоторую точку (x,y) области D. Функции $x = x(u,v), y = y(u,v)$ называют также отображением области G плоскости (u,v) на область D плоскости (x,y). Пусть отображение удовлетворяет следующим условиям:

1. Отображение взаимно однозначно, то есть различным точкам (u,v) области G соответствуют различные точки (x,y) области D.

2. Функции $x = x(u,v), y = y(u,v)$ имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка.

3. Якобиан отображения $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ отличен от нуля во всех точках области G.

Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,dudv.$$

Эта формула называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

Замечание. При переходе к полярной системе координат якобиан перехода имеет вид

$$J=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

Приложения двойных интегралов.

Двойные интегралы применяются для вычисления площадей плоских фигур и поверхностей, объемов пространственных тел, механических величин связанных с непрерывным распределением массы в плоской области, а также для решения многих других задач.

Геометрические приложения двойных интегралов

1. Площадь S области D на плоскости (x,y) выражается формулой $S=\iint\limits_D dxdy.$

2. Объем V тела $T=\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0\le z\le f(x,y)\}$, где $f(x,y)-$ непрерывная неотрицательная в области D функция, выражается формулой $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

3. Площадь поверхности, заданной явно уравнением $z=f(x,y),(x,y)\in D,$ вычисляется с помощью двойного интеграла вида: $S=\iint\limits_D\sqrt{1+(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2+(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2}dxdy.$

Физические приложения двойных интегралов

Пусть D- материальная бесконечно тонкая пластинка с плотностью $\rho(x,y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

1. $m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy$ - масса пластинки;

2. $M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy, M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy$ - статические моменты пластинки относительно осей Ox, Oy;

3. $x_0 = \dfrac{M_y}{m}, y_0 = \dfrac{M_x}{m}$ - координаты центра тяжести пластинки;

4. $I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy,\ I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy$ - моменты инерции пластинки относительно осей Ox, Oy;

5. $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$ - момент инерции пластинки относительно начала координат.

Пример. Найти объем тела T, ограниченного поверхностями $z=0, z=x^2+y^2, y=x^2, y=1.$

Решение. Данное тело можно представить в виде $T=\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0\le z\le x^2+y^2\}$ (рис.16), где D - область на плоскости (x,y), ограниченная кривыми $y=x^2, y=1$, то есть $D=\{(x,y): -1\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$. Переходя от двойного интеграла к повторному, получим

$$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy =$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2(1-x^2)+\frac{1}{3}(1-x^6)\right)dx = 88/105.$$

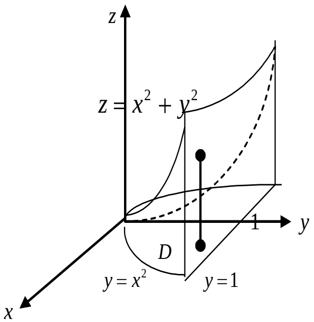


Рис.16.

Пример. Найти моменты инерции I_x, I_y относительно осей Ox, Oy пластины с плотностью $\rho = 1$, ограниченной кривыми $xy == 1, xy = 2,$ и прямыми $y = 2x, x = 2y$, расположенной в первом квадранте (рис.17).

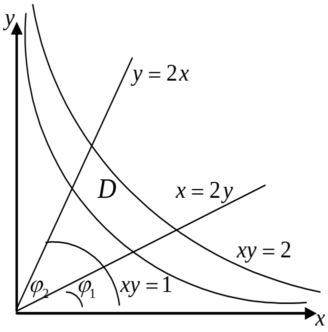


Рис.17.

Решение. $I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy$, $I_y = \iint\limits_D x^2 dxdy$. Чтобы свести каждый из этих интегралов к повторному в декартовых координатах, нужно область D разбить на три части. Поэтому удобнее перейти к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\;\; y = \rho\sin\varphi$. Тогда φ изменяется от $\varphi_1 = arctg(1/2)$ до $\varphi_2 = arctg2$, а при каждом значении $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ переменная ρ изменяется от

$\rho_1(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$ (значение ρ на кривой $xy = 1$, уравнение которой в полярных координатах в I квадранте имеет вид $\rho(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$) до $\rho_2(\varphi) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$ (значение ρ на кривой $xy = 2$). Следовательно,

$$I_x = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho^3 \sin^2\varphi d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi[\rho_2^4(\varphi) - \rho_1^4(\varphi)]d\varphi =$$

$$\frac{3}{4}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\varphi\,\Big|_{\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\varphi_2=\operatorname{arctg}2} = \frac{9}{8}.$$ Аналогично получаем $I_y = \dfrac{9}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если:

а) D - область, ограниченная кривыми $y = 3x^2, y = 6 - 3x$;

б) D - круг $x^2 + y^2 \le 2x - 4y + 4$;

в) D - треугольник со сторонами, лежащими на прямых

$y = 2x, y = 3x, x = 4;$

г) D - кольцо $1 \le (x-1)^2 + y^2 \le 4;$

д) D - область, ограниченная кривыми $x^2 - 2x + y^2 = 0,$ $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2$;

е) D - область, лежащая вне окружности и внутри кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

2. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx;$ б) $\int\limits_{e}^{e^2} dx \int\limits_{\ln x}^{\ln x^2} f(x,y)dy;$ в) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy;$

г) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy;$ д) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y-1}^{y^2} f(x,y)dx;$

е) $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2}-x} f(x,y)dy;$ ж) $\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{4}+y-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

3. Вычислить двойные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_3^4 \frac{dy}{(x+y)^2};$ б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x} xydy;$

в) $\iint\limits_D x^2 dxdy,$ где $D = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\};$

г) $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4`)dxdy,$ где $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9\};$

д) $\iint\limits_D \sqrt{|x - y^2|}\, dxdy,$ где $D = \{(x,y) : |y| \le 1, 0 \le x \le 2\};$

е) $\iint\limits_D xdxdy,$ где D - область, ограниченная кривыми $y = 3x^2,$ $y = 6 - 3x$;

ж) $\iint\limits_D xdxdy,$ где D - область, ограниченная кривой

$x^2+y^2=4x-2y+4;$

з) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$ где D - область, ограниченная кривыми $y^2=2x, x+y=4, x+y=12.$

4. В следующих интегралах перейти к полярным координатам

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy;$ б) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y}^{\sqrt{3}y} f(x^2+y^2)dx;$ в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=\ln(1+x^2+y^2), z=0, x^2+y^2=2;$

б) $z=\sin\sqrt{x^2+y^2}, z=0, x^2+y^2=\pi^2;$

в) $z=xy, x^2=y, x^2=2y, y^2=x, y^2=2x, z=0.$

6. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми:

а) $x+y=4, \ y=0,5x^2;$

б) $\dfrac{(x-3)^2}{3}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2};$

в) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy \ (x>0, y>0).$

Ответ: а) $x_0=-1, y_0=3,2;$ б) $x_0=4,5, y_0=-1;$ в) $x_0=y_0=\pi a/8.$

7. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $\{(x,y): x^2+y^2\le a^2\},$ если ее плотность в точке $M(x,y)$ пропорциональна расстоянию от точки M до точки $A(a,0).$

Ответ: $x_0=-a/5, \ y_0=0.$

8. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy однородной пластинки с плотностью $\rho=\rho_0$, ограниченной кривыми:

а) $x=0, \ y=0, \ x=a, \ y=b \ (a>0, \ b>0);$

б) $y=0, \ y=x, \ y=2-x;$

в) $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2,\ x=0,\ y=0\ \ (0\le x\le a);$

г) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2).$

Ответ: а) $I_x=ab^3\rho_0/3, I_y=a^3b\rho_0/3;$ б) $I_x=\rho_0/6, I_y=7\rho_0/6;$ в) $I_x=I_y=a^4(1-\frac{5\pi}{16})\rho_0;$ г) $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}\rho_0.$

9. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy однородной пластинки с плотностью $\rho=xy$, ограниченной кривыми:

а) $x=0,\ y=0,\ x=a,\ y=b\ (a>0,\ b>0);$

б) $y=0,\ y=x,\ y=2-x.$

Ответ: а) $I_x=a^2b^4/8, I_y=a^4b^2/8;$ б) $I_x=0{,}1, I_y=13/30.$

10. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности ρ, причем центр шара находится на расстоянии h от уровня жидкости и $h\ge a$. Найти силы давления $P_в$ и $P_н$ на верхнюю и нижнюю полусферы этого шара.

Ответ: $P_н=\pi a^2\rho(h-\frac{2}{3}a);\ P_в=\pi a^2\rho(h+\frac{2}{3}a).$

11. Доказать, что если в плоскости, где расположена пластинка G массы m, взяты две параллельные оси x и x' на расстоянии a друг от друга, причем первая из них проходит через центр тяжести пластинки G, то моменты инерции пластинки G относительно этих осей связаны соотношением $I_{x'}=I_x+ma^2.$

Ответ: Взяв ось x в качестве оси абсцисс, получаем

$$I_{x'}=\iint\limits_G (y-a)^2\rho(x,y)dxdy=I_x-2aM_x+a^2m.$$

Так как, по условию $M_x=0$, то приходим к равенству $I_{x'}=I_x+ma^2.$

Тройной интеграл

Основные определения и теоремы для тройных интегралов аналогичны соответствующим определениям и теоремам для двойных интегралов.

Пусть T - область в трехмерном евклидовом пространстве , ограниченная замкнутой поверхностью, и пусть в области T и на ее границе определена непрерывная функция $u = f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем область T на n частей так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части T_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму вида $S_n(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\vartriangle V_i$, где $\vartriangle V_i$ - объем части T_i. Пусть d_i- диаметр T_i, $d = \max d_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

<u>Определение</u>. Если существует предел последовательности интегральных сумм $S_n(f)$ при $d \to 0, n \to \infty$, и если предел не зависит ни от способа разбиения области T на части $T_1, T_2, ..., T_n$, ни от выбора точек $M_i \in T_i$, то он называется **тройным интегралом** от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается $\iiint\limits_T f(M)dV$ или $\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz$, то есть

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\vartriangle V_i .$$

<u>Теорема</u> (достаточные условия существования тройного интеграла). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области T, ограниченной замкнутой поверхностью, то она интегрируема в этой области.

В дальнейшем будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

Из определения тройного интеграла следует, что объем области T: $V = \iiint\limits_T d\,\mathrm{v} = \iiint\limits_T dxdydz.$

Физический смысл тройного интеграла - масса тела, занимающего область T с объемной плотностью, то есть если $\rho(P)$- объемная плотность распределения массы в точке $P(x,y,z)$ тела, то масса тела

$$m = \iiint\limits_T \rho(P)d\,\mathrm{v} = \iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz\ .$$

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные и двойные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т.д.)

Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования.

Назовем трехмерную область T, ограниченную замкнутой поверхностью S правильной, если:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области T пересекает поверхность S в двух точках;

2) вся область T проектируется на плоскость Oxy в правильную (двумерную) область D;

3) всякая часть области T, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей, также обладает свойствами 1),2).

Пусть функция $u = f(x,y,z)$ определена и непрерывна в области $T = \{(x,y,z):(x,y)\in D, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$, где $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$- непрерывные функции в ограниченной замкнутой области D. Обозначим $I(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Назовем повторным интеграл вида

$$\iint\limits_D I(x,y)dxdy = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ .$$

Теорема. Тройной интеграл от непрерывной функции $u = f(x, y, z)$ по правильной области T равен повторному интегралу

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz .$$

Если область D правильная в направлении оси Oy, то есть $D = \{(x, y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x, y)\}$, то двойной интеграл $\iint\limits_D I(x, y)dxdy$ в свою очередь можно свести к повторному, тогда

$$\iint\limits_D I(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x, y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к последовательному вычислению трех определенных (однократных) интегралов:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T xy\sqrt{z}dxdydz$, где T – область ограниченная поверхностями $z = 0, z = y, y = x^2, y = 1,$ $x = 0.$

Решение. Область T можно представить в виде

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \le z \le y\} ,$$

где $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$. Сводя тройной интеграл к повторному, получим

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 (2/3)xy^{5/2}dy =$$

$$= (4/21)\int\limits_0^1 (x - x^8)dx == (4/21)(x^2/2\big|_0^1 - x^9/9\big|_0^1) = 2/27.$$

Замена переменных в тройном интеграле

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

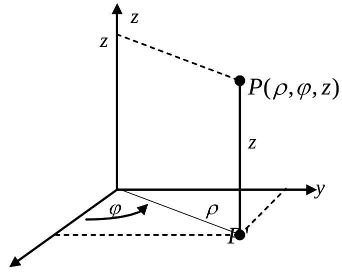


Рис.18.

Пусть $P(x,y,z)$- произвольная точка в пространстве, P'- проекция точки P на плоскость Oxy. В цилиндрических координатах положение точки P в пространстве определяется тремя числами $\rho,\varphi,z,$ где ρ,φ- полярные координаты точки P' на плоскости Oxy, z - аппликата точки P (рис.18). Переход от прямоугольных координат (x,y,z) к цилиндрическим (ρ,φ,z) задается формулами $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$ $(0\le\rho<+\infty,$ $0\le\varphi<2\pi,\ -\infty<z<+\infty).$ Заметим, что при переходе к цилиндрическим координатам $x^2+y^2=\rho^2$. Элемент площади в полярных координатах находился по формуле $\Delta S=\rho\Delta\rho\Delta\varphi$, поэтому элемент объема в цилиндрической системе координат имеет вид $\Delta V=\rho\Delta\rho\Delta\varphi\Delta z$ или $dV=\rho d\rho d\varphi dz$.

Следовательно, справедливы равенства

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz.$$

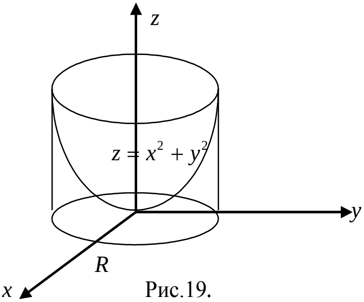


Рис.19.

Пример. Вычислить объем, ограниченный поверхностями

$$z=0,x^2+y^2=R^2,z=x^2+y^2$$

(рис.19).

Решение. Переведем уравнения поверхностей в цилиндрические координаты. Уравнение цилиндрической поверхности примет вид

$\rho^2 = R^2$ или $\rho = R$. Уравнение параболоида $z = \rho^2$. На плоскость Oxy область проектируется в круг радиуса R. Тогда

$$V = \iiint_T dxdydz = \iint_{T_{xy}} \rho d\rho d\varphi \int_0^{\rho^2} dz = = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^4/4) d\varphi = (R^4/4)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

2. Тройной интеграл в сферической системе координат

Пусть $P(x, y, z)$ - произвольная точка в пространстве P' - проекция точки P на плоскость Oxy. В сферических координатах положение точки P в пространстве определяется тремя числами r, φ, θ где r - расстояние точки P от точки O (начала координат), θ - угол между лучами Oz и OP, φ - полярный угол точки P' на плоскости Oxy (рис.20). Переход от прямоугольных координат (x, y, z) к сферическим (r, φ, θ) задается формулами $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,$ $z = r\cos\theta \ \ (0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta < \pi,$ $0 \le \varphi < 2\pi).$ Элемент объема в сферической системе координат имеет вид

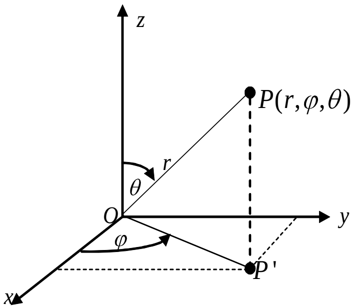


Рис.20.

$\Delta V = r^2 \sin\theta \Delta r \Delta\varphi \Delta\theta$ или $dV = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$

При переходе к сферическим координатам $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Следовательно, справедливы равенства $\iiint_T f(x, y, z) dxdydz =$

$$= \iiint_T f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} r^2 f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) dr.$$

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где область T ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=z$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ (внутри конуса) (рис.21).

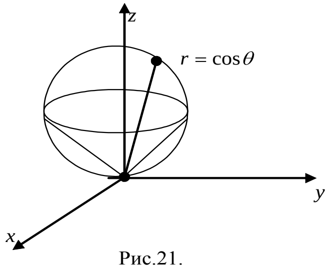


Рис.21.

Решение. Приведем уравнение сферы к виду

$$x^2+y^2+(z-1/2)^2=1/4,$$

получим уравнение сферы радиуса ½ с центром в точке (0,0,1/2) . В сферической системе координат уравнение сферы принимает вид $r^2 = r\cos\theta$, тогда

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{4}2\pi(-\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\pi/4}) = \frac{\pi}{10}(1-\frac{\sqrt{2}}{8}).$$

Приложения тройных интегралов

1.Объем пространственной области T

$$V = \iiint\limits_T d\,\mathrm{v} = \iiint\limits_T dxdydz.$$

2. Масса тела, занимающего область T ,

$m = \iiint\limits_T \rho(P) d\,\mathrm{v} = \iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz$, где $\rho(P)$- объемная плотность распределения массы в точке $P(x,y,z)$ тела.

3.Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$m_{yz} = \iiint\limits_T x\rho(x,y,z)dxdydz,\ m_{xz} = \iiint\limits_T y\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$m_{xy} = \iiint\limits_T z\rho(x,y,z)dxdydz \ .$$

4. Координаты центра тяжести C тела

$$x_C = \frac{m_{yz}}{m}, y_C = \frac{m_{xz}}{m}, z_C = \frac{m_{xy}}{m},$$

где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} - статические моменты тела относительно координатных плоскостей.

5. Моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz и начала координат O

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz; \ I_y = \iiint\limits_T (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz;$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz; \ I_o = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить тройные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} (x+y+z)dz$; в) $\int\limits_0^4 dz \int\limits_{-z}^z dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2 xy^2 dy.$

2.Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в следующих тройных интегралах в декартовой системе координат:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$; б) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{4-x} dy \int\limits_0^{4-x-y} f(x,y,z)dz$;

в) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{2-|x-1|} f(x,y,z)dz$; г) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{1-|y-1|} f(x,y,z)dz.$

3. Расставить пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$, если:

а) $V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le H\}$;

б) $V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le k^2 z^2, 0 \le z \le H\}$;

в) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2\le R^2, x^2+y^2+z^2\le 4R^2\}$;

г) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 2az, x^2+y^2\le z^2\}$;

д) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4R^2, z\ge R\}$.

4. Расставить пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$, если:

а) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 4az, x^2+y^2\le 3z^2\}$;

б) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge R/3\}$.

5. Вычислить:

а) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,\ V=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2z,\ 0\le z\le 2\}$;

б) $\iiint\limits_V xdxdydz,\ V=\{(x,y,z): 0\le y\le h, x+z\le a, x\ge 0, z\ge 0\}$;

в) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le R^2,$
$y^2+z^2\le x^2, x\ge 0\}$;

г) $\iiint\limits_V zdxdydz,\ V=\{(x,y,z): z^2\ge \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2), 0\le z\le h\}$.

6. Найти объем следующих тел:

а) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le R^2, x^2+y^2+z^2\le 2Rz\}$;

б) $V=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z^2, a^2\le x^2+y^2+z^2\le 9a^2\}$.

7. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2z=x^2+y^2$, $x+y+z=1$, если плотность тела изменяется по закону: а) $\rho=\rho_0$; б) $\rho=\rho_0|1+x|$, в) $\rho=\rho_0 y^2|1+x|$ $(\rho_0=const)$.

Ответ: а) $4\pi\rho_0$; б) $128\rho_0/15$; в) $1408\rho_0/105$.

8. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:

а) $x^2+z^2=a^2,\ y=1,\ y=3,\ z=0\ (z\ge 0)$;

б) $z=4-x^2-y^2,\ z=1,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$;

в) $x^2 = 2pz,\ y^2 = 2px,\ x = p/2, z = 0\ (p > 0)$;

г) $z = x^2 + y^2,\ z = (x^2 + y^2)/2,\ x + y = 1,\ x + y = -1,$
$x - y = 1,\ x - y = -1.$

Ответ: а) $x_0 = 0, y_0 = 2, z_0 = 2a^2/5$; б) $x_0 = y_0 = 16\sqrt{3}/(15\pi), z_0 = 2$; в) $x_0 = 7p/18, y_0 = 0,\ z_0 = 7p/176$; г) $x_0 = y_0 = 0,\ z_0 = 7/20.$

9. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5,\ z = 2,$ если плотность тела изменяется по закону: а) $\rho = \rho_0$;

б) $\rho = \rho_0((x+2)^2 + (y-1)^2)$; в) $\rho = \rho_0 z(x^2 + y^2)\ (\rho_0 = const)$.

Ответ: а) $x_0 = -2, y_0 = 1, z_0 = 4/3$; б) $x_0 = -2,\ y_0 = 1,\ z_0 = 2/3$;
в) $x_0 = 32/13,\ y_0 = 16/13,\ z_0 = 33/65.$

10. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела плотности ρ_0, ограниченного поверхностями:

а) $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = 2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) - 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$;

б) $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$;

в) $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 1,\ x = 0,\ y = 0\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$.

Ответ: а) $I_{xy} = (4/15)\pi\rho_0 abc^3,\ I_{xz} = (4/15)\pi\rho_0 ab^3 c,$
$I_{yz} = (4/15)\pi\rho_0 a^3 bc$, б) $I_{xy} = \pi\rho_0/5,\ I_{xz} = I_{yz} = \pi\rho_0/20$;
в) $I_{xy} = 81\pi\rho_0/16,\ I_{xz} = I_{yz} = 9\pi\rho_0/16.$

11. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей тела: а) плотности $\rho = \frac{\rho}{x^2 + y^2 + z^2}$ $(\rho_0 = const)$, ограниченного поверхностью:

$$(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = 2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) - 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$$

б) плотности $\rho = 35z^2/128$, ограниченного поверхностями

$x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

Ответ: а) $I_{xy}=(4/9)\pi\rho_0 abc^3$, $I_{xz}=(4/9)\pi\rho_0 ab^3c$,

$I_{yz}=(4/9)\pi\rho_0 a^3bc$, б) $I_{xy}=75\pi$, $I_{xz}=62\pi$, $I_{yz}=50\pi$.

12. Найти моменты инерции относительно осей координат и начала координат однородного тела плотности ρ_0, ограниченного поверхностями:

а) $z=(x^2+y^2+z^2)^2$; б) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ответ: а) $I_x=I_y=0{,}15\pi\rho_0, I_z=0{,}1\pi\rho_0$, $I_0=0{,}2\pi\rho_0$;

б) $I_x=I_y=\pi\rho_0 a^5(16-7\sqrt{2})/60$, $I_z=\pi\rho_0 a^5(8-5\sqrt{2})/30$,

$I_0=\pi\rho_0 a^5(2-\sqrt{2})/5$.

13. Определить момент инерции относительно начала координат тела плотности $\rho=\rho_0(x^2+y^2+z^2)$, где $\rho_0=const$, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$.

Ответ: $5\pi^2\rho_0/64$.

14. Пусть T - однородный цилиндр плотности ρ_0 с высотой h и радиусом основания R. Найти силу притяжения этим цилиндром материальной точки массы m_0, находящейся в центре основания цилиндра.

Ответ: $F_x=\gamma\iiint\limits_T \frac{\rho_0 m_0 x}{r^3}dxdydz=$

$$=\gamma\rho_0 m_0 \iint\limits_{\substack{-R\le y\le R\\ 0\le z\le h}} dydz \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{xdx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0;\ F_y=0;$$

$$F_z=\gamma\rho_0 m_0\iiint\limits_T \frac{z}{r^3}dxdydz=\gamma\rho_0 m_0 \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dxdy\int\limits_0^h \frac{zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=$$

$$=\gamma\rho_0 m_0 \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right)dxdy=$$

$=2\pi\gamma\rho_0 m_0 (R+h-\sqrt{R^2+h^2})$.

Криволинейный интеграл 2-го рода

1. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла 2-го рода.

Предположим, что при движении по кривой AB материальная точка M переходит из точки A в точку B под воздействием силы $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$, заданной своими проекциями на координатные оси:

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Найдем работу силы $\vec{F}$ по перемещению точки M из A в B.

Если перемещение прямолинейно, а действующая сила постоянна по величине и направлению, то работа вычисляется по формуле $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Пусть перемещение криволинейное, а действующая сила переменная.

Разобьем кривую AB на n дуг точками $M_0, M_1, ..., M_n$ и обозначим диаметр разбиения (длину наибольшей дуги) через d (рис.22). На каждой частичной дуге $M_k M_{k+1}$ выберем точку N_k. Будем считать, что сила

$$\vec{F}(N_k)=P(N_k)\vec{i}+Q(N_k)\vec{j}+R(N_k)\vec{k}$$

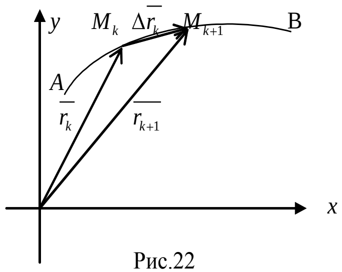


Рис.22

сохраняется постоянной в точках дуги $M_k M_{k+1}$ на малом участке и под ее воздействием точка перемещается по хорде $\overline{\Delta r_k}=\bar{r}_{k+1}-\bar{r}_k=\Delta x_k\vec{i}+\Delta y_k\vec{j}+\Delta z_k\vec{k}$, этой дуги. Тогда приближенное значение работы на каждой частичной дуге имеет вид

$$\Delta A_k \approx \vec{F}(N_k)\cdot\Delta\vec{r}_k = P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k + R(N_k)\Delta z_k.$$

Суммируя элементарные работы, получаем $A \approx \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \triangle\vec{r}_k$.

За работу силы $\vec{F}$ по перемещению точки M из A в B вдоль кривой AB примем предел суммы $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \triangle\vec{r}_k$, то есть

$$A = \lim_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \triangle\vec{r}_k = \lim_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\triangle x_k + Q(N_k)\triangle y_k + R(N_k)\triangle z_k.$$

2. Определение криволинейного интеграла 2-го рода.

Рассмотрим теперь направленную кусочно-гладкую кривую AB, заданную в $Oxyz$. Дуга кривой называется гладкой, если задающие ее функции непрерывно дифференцируемы, и кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких дуг. Пусть $\vec{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ - векторное поле, определенное в некоторой области V, содержащей дугу AB, функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой AB. Разобьем кривую AB на n дуг точками $M_0, M_1, ..., M_n$ в направлении от A до B. На каждой частичной дуге $M_k M_{k+1}$ выберем произвольную точку N_k и составим сумму вида $S_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \triangle\vec{r}_k$.

<u>Определение</u>. Если существует предел последовательности интегральных сумм S_n не зависящий ни от способа разбиения кривой AB на части, ни от выбора точек N_k, то он называется криволинейным интегралом второго рода (по координатам) и обозначается $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\substack{d \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \triangle\vec{r}_k$, то есть

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

где $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$

Сравнивая формулы для определения работы A и определение криволинейного интеграла заключаем, что $A = \int\limits_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Таким образом, криволинейный интеграл 2-го рода выражает работу силы $\vec{F}$ по перемещению точки M из A в B вдоль кривой AB . В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода.

3. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1.При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл изменяет свой знак , то есть $\int\limits_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} = -\int\limits_{BA} \overline{F} \cdot d\overline{r}.$

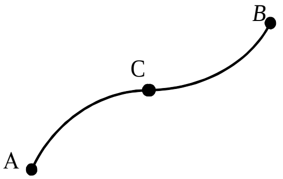


Рис.23.

2.Если путь интегрирования разбит на непересекающиеся части (рис.23), то криволинейный интеграл вдоль всего пути равен сумме криволинейных интегралов вдоль его частей $\int\limits_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{AC} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int\limits_{CB} \overline{F} \cdot d\overline{r}.$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла.

4. Криволинейный интеграл от суммы равен сумме криволинейных интегралов.

Все свойства непосредственно следуют из определения криволинейного интеграла.

Замечание. Для криволинейных интегралов второго рода теорема об оценке модуля интеграла и формула среднего значения неверны.

Пусть AB - замкнутая кривая (замкнутый контур), то есть точка A совпадает с точкой B, тогда для нее можно указать два направления обхода от A к B. Если область, лежащая внутри контура остается слева по отношению к движущейся по контуру точке, то такое направление обхода кривой L назовем положительным, а противоположное ему – отрицательным.

Криволинейный интеграл вдоль замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки пути, а зависит лишь от направления обхода

Интеграл по замкнутому контуру L обозначается $\oint\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ и называется циркуляцией вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру L.

4. **Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.**

Вычисляют криволинейный интеграл сведением его к определенному интегралу. Для преобразования криволинейного интеграла в определенный, следует всюду под знаком криволинейного интеграла заменить переменные их выражениями через параметр и после этого рассматривать интеграл как определенный по параметру, взятый в пределах изменения параметра.

1. Пусть AB - плоская гладкая кривая, заданная уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx.$$

2. Пусть плоская кривая AB задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \le t \le b$, функции $x(t), y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $x'(t), y'(t)$. Тогда

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt\,.$$

3. Если пространственная кривая задана параметрически:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),\; a \le t \le b,$$

где функции $x(t), y(t), z(t)$ - непрерывны и имеют непрерывные производные, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

4. Если кривая задана уравнениями $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$, $a \le x \le b$,

то принимая x за параметр, получим:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b (P(x, y(x), z(x)) +$$

$$+ Q(x, y(x), z(x))y'(x) + R(x, y(x), z(x))z'(x))dx.$$

Примеры. 1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{AB} (x+y)dx + (x+z)dy + (y+z)dz$$

вдоль отрезка прямой AB от точки $A(1,1,3)$ до $B(3,2,1)$.

Решение. Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A и B: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-1}{2-1} = \dfrac{z-3}{1-3} = t,$

$$\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t+1, \\ z = -2t+3, \end{cases} \quad \text{тогда } dx = 2dt, dy = dt, dz = -2dt.$$

Точке A соответствует $t = 0$, точке B соответствует $t = 1$. Следовательно,

$$I = \int_0^1 ((3t+2)2 + 4 + (-t+4)(-2))dt = \int_0^1 8tdt = 4.$$

2.Вычислить $I = \int\limits_{AB} xy^2dx + x^2ydy$ вдоль дуги параболы $y = x^2$ от точки $A(1,1)$ до $B(2,4)$.

Решение. Принимая x за параметр, перейдем к определенному интегралу

$$I=\int_1^2 (x\cdot x^4+x^2\cdot x^2\cdot 2x)dx=\frac{3x^6}{6}\Big|_1^2=31.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, где L - окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

Решение. Запишем параметрические уравнения данной окружности : $x=1+2\cos t,\ y=1+2\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$. Найдем $dx=-2\sin t dt,\ dy=2\cos t dt$. Получим

$$\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_0^{2\pi}(2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)dt+$$

$$+(2\cos t-2\sin t)2\cos t dt=\int\limits_0^{2\pi}(-4\sin t-8\sin t\cos t+4\cos 2t)dt=0.$$

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\int\limits_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz,$ где L кривая $x=t, y=t^2,\ z=t^3$, $0\le t\le 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

Решение. Найдем $dx=dt, dy=2tdt, dz=3t^2dt, 0\le t\le 1$, тогда

$$I=\int_0^1 (t^4-t^6+2t^5\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2)dt=\frac{1}{35}.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz\ ,$$

вдоль замкнутого контура L, являющегося границей части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в I октанте: $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0,$ причем направление обхода контура таково, что в плоскости Oxy движение происходит от точки $A(1,0,0)$ к точке $B(0,1,0)$.

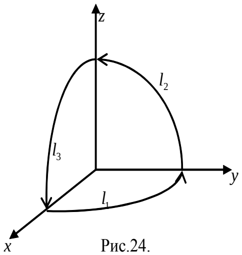


Рис.24.

Решение. Контур L состоит из трех кривых l_1, l_2, l_3, каждая из которых является дугой единичной окружности, лежащей соответственно в координатных плоскостях Oxy, Oyz, Oxz (рис.24). Поэтому $I=\sum_{k=1}^{3} I_k$, где

$$I_k = \int\limits_{l_k} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz.$$

Найдем интеграл I_1 по кривой l_1. Так как кривая l_1 лежит в плоскости Oxy, то $z=0, dz=0$ и $I_1 = \int\limits_{l_k} y^2dx - x^2dy,$ где $l_1: x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0.$ Запишем параметрические уравнения $l_1: x=\cos t, y=\sin t,\ 0\le t\le \pi/2.$ Получим

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} (-\sin^3 t - \cos^3 t)dt = -2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)d(\cos t) =$$

$$= 2(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3})\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{4}{3}.$$

Точно также вычисляются интегралы I_2, I_3. При этом $I_1 = I_2 = I_3 = -4/3.$ Следовательно, $I=-4.$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

1. $\int\limits_{OA} xdy - ydx,$ где $O(0,0), A(1,2)$, если а) ОА- отрезок прямой; б) ОА- дуга параболы, осью которой является ось Oy; в) ОА- ломаная линия состоящая из отрезка ОВ оси Ox и отрезка ВА, параллельного оси Oy.

2. $\int\limits_{OA} (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy,$ где L - дуга параболы:

$y = x^2,\ -1 \le x \le 1.$

3. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy,$ где L - кривая $y = 1 - |1 - x|,\ 0 \le x \le 2.$

4. $\oint\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy,$ где L - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

5. $\int\limits_L (2 - y)dx + xdy,$ где L - арка циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

6. $\oint\limits_L \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2},$ где L - окружность $x^2 + y^2 = 1.$

7. $\oint\limits_L \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|},$ где L - граница квадрата с вершинами A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1).

8. $\int\limits_L ydx + zdy + xdz,$ где L - виток винтовой линии $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi.$

9. $\int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz,$ где L - кривая Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax\ (z \ge 0, a \ge 0)$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$.

10. Вычислить работу силы $\vec{F}$ вдоль кривой AB, если:

а) $\vec{F} = \{y, -x\}$, AB – окружность $x^2 + y^2 = 1$, пробегаемая по ходу часовой стрелки от точки A($-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$) до точки $B(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;

б) $\vec{F} = \{z, -x, y\}$, AB – виток винтовой линии $x = a\cos t, y = b\sin t, z = ct, 0 \le t \le 2\pi,\ A(a, 0, 0), B(a, 0, 2\pi).$

5.Формула Грина

Формула Грина связывает криволинейный интеграл по замкнутой кривой с двойным интегралом по области, ограниченной этой кривой.

Теорема. Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в ограниченной замкнутой область D, тогда справедливо равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (1)$$

где L граница области D, пробегаемая в положительном направлении.

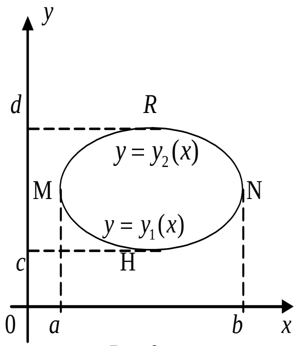


Рис.25.

Доказательство. Пусть область $D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ (рис.25). Тогда

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy\Big)dx =$$

$$= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b (P(x, y_2(x)) -$$

$$-P(x, y_1(x))dx = \int_{MRN} P(x,y)dx -$$

$$-\int_{MHN} P(x,y)dx = \int_{MRN} P(x,y)dx + \int_{NHM} P(x,y)dx = \oint_{L^-} P(x,y)dx =$$

$$= -\oint_{L^+} P(x,y)dx.$$ Доказано, что

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint_{L^+} P(x,y)dx. \qquad (2)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\oint\limits_{L^{+}}Q(x,y)dy\,. \qquad (3)$$

Вычитая из равенства (3) равенство (2), получаем формулу Грина.

<u>Пример</u>. Вычислить, применяя формулу Грина, интеграл $\oint\limits_{C}-x^2ydx+xy^2dy$, где C - окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

<u>Решение</u>. $P=-x^2y, Q=xy^2, \dfrac{\partial P}{\partial y}=-x^2, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^2.$

$$\oint\limits_{C}-x^2ydx+xy^2dy=\iint\limits_{D}(y^2+x^2)dxdy=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{a}r^3dr=\frac{a^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi a^4}{2}.$$

6.Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

<u>**Теорема**</u>. 1) Пусть функции $P(x,y),Q(x,y)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области D. Тогда следующие три условия эквивалентны (то есть из каждого из них следуют два другие):

I. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура L, расположенного в области D, справедливо равенство

$$\oint\limits_{L}Pdx+Qdy=0\,.$$

II. Для любых двух точек A,B области D криволинейный интеграл $\oint\limits_{L}Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в области D.

III. Выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом, то есть в области D существует функция $u(M)=u(x,y)$ такая, что $du=Pdx+Qdy$. При этом для любой кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в D, справедливо равенство $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy=u(B)-u(A).$

2. Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, тогда каждое из условий I-III эквивалентно следующему условию:

IV. В области D выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

7. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

1. Пусть известен полный дифференциал функции $u(x,y)$ двух переменных $du = Pdx + Qdy$, где $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда $u(x,y)$ можно найти, интегрируя равенство $du = Pdx + Qdy$ по любой линии между произвольной фиксированной точкой $A(x_0, y_0)$ и переменной точкой $M(x,y)$ (рис.26):

$$u = \int\limits_{AM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C.$$

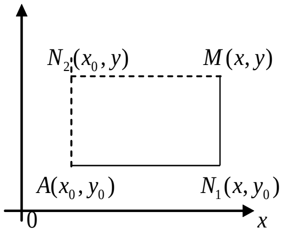


Рис.26.

Обычно в качестве линии интегрирования AM берется ломаная AN_1M или AN_2M со звеньями, параллельными осям координат. При этом криволинейный интеграл наиболее просто выражается через определенные интегралы и преобразуется к виду

$$u(x,y) = \int\limits_{AM} du + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

или

$$u(x,y) = \int\limits_{AM} du + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C.$$

Во многих случаях можно найти функцию u по ее полному дифференциалу $du = Pdx + Qdy$ иначе.

2. Поскольку полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов $du = d_x u + d_y u,\ d_x u = Pdx,\ d_y u = Qdy$, то интегрируя каждый из них отдельно, найдем два выражения искомой функции u:

а) $u = \int Pdx + \varphi(y)$, считая y постоянной;

б) $u = \int Qdy + \phi(x)$, считая x постоянной,

где $\varphi(y)$ и $\phi(x)$ - неизвестные функции.

Беря все известные члены из первого выражения и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от y, из второго выражения, получим функцию u.

3. Если вычисление обоих интегралов затруднительно, можно вычислив один интеграл $u = \int Pdx + \varphi(y)$ найти затем частную производную по y от найденной функции, приравнять ее к $Q(x, y)$ и определить функцию $\varphi'(y)$. Затем интегрированием найти $\varphi(y)$, подставляя ее в выражение $u = \int Pdx + \varphi(y)$, получить искомую функцию $u(x, y)$.

Решение такой задачи легко проверить: если функция $u(x, y)$ найдена верно, то ее полный дифференциал, найденный по формуле $du = u'_x dx + u'_y dy$, должен быть тождествен данному полному дифференциалу $Pdx + Qdy$.

Замечание. Если $du(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, то функция $u = u(x, y, z)$ может быть найдена по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx +$$

$$+ \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C.$$

Пример. Проверить, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$, и найти эту функцию.

1. $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy;$

Решение. Обозначим коэффициенты при дифференциалах следующим образом: $P(x,y)=2x-3y^2+1;\ Q(x,y)=2-6xy$. Тогда $P'_y=-6y,\ Q'_x=-6y$. Так как $P'_y=Q'_x$ и P,Q,P'_y,Q'_x непрерывны, то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$:

$du=(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$.

Найдем эту функцию по формуле

$$u(x,y)=\int\limits_{AM}du+C=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C,$$

взяв в качестве точки A начало координат $O(0,0)$

$$u(x,y)=\int\limits_{0}^{x}(2x+1)dx+\int\limits_{0}^{y}(2-6xy)dy+C=x^2+x+2y-3xy^2+C.$$

2. $(e^{xy}+5)(xdy+ydx)$.

Решение. Преобразуем заданное дифференциальное выражение к виду $Pdx+Qdy$ и найдем $P'_y,\ Q'_x$.

$$(e^{xy}+5)(xdy+ydx)=y(e^{xy}+5)dx+x(e^{xy}+5)dy;$$

$P'_y=5+e^{xy}(1+xy)=Q'_x$. Условие $P'_y=Q'_x$ выполнено. Заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Найдем эту функцию по формуле

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C.$$

$$u=\int\limits_{x_0}^{x}y(e^{xy}+5)dx+\int\limits_{y_0}^{y}x_0(e^{x_0y}+5)dy+C=(e^{xy}+5xy)\Big|_{x_0}^{x}+$$

$$+(e^{x_0y}+5x_0y)\Big|_{y_0}^{y}+C=e^{xy}+5xy-e^{x_0y_0}-5x_0y_0+C=e^{xy}+5xy+C_1,$$

где $C_1 = C - e^{x_0 y_0} - 5x_0 y_0$.

3. $(1-\sin 2x)dy - (3+2y\cos 2x)dx$;

Решение. Найдем частные производные $P'_y = -(3+2y\cos 2x)'_y = -2\cos 2x, Q'_x = (1-\sin 2x)'_x = -2\cos 2x$. Так как $P'_y = Q'_x$, то заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Найдем функцию $u(x,y)$ вторым способом, интегрируя каждый частный дифференциал Pdx и Qdy отдельно.

а) $u = -\int(3+2y\cos 2x)dx = -3x - y\sin 2x + \varphi(y)$, считая y постоянной;

б) $u = \int(1-\sin 2x)dy = y - y\sin 2x + \phi(x)$, считая x постоянной.

Объединяя эти два выражения - дописав к известным членам первого выражения недостающий член, зависящий только от y, из второго выражения, получим одну из первообразных функций, а прибавив к ней произвольную постоянную C, получим общее выражение первообразной функции для заданного полного дифференциала $u = y - 3x - y\sin 2x + C$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Проверить, что данное дифференциальное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ и затем найти u:

1. $(3x^2y+1)dx + (x^3-1)dy$.
2. $\cos x\cos y dx - \sin y(\sin x + 4\cos y)dy$.
3. $(1+\cos(xy))(ydx + xdy)$. 4. $(y^2e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1+xy)dy$.
5. $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. 6. $\dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$.

Библиографический список

1. Задачник-практикум по высшей математике: В 2 ч. Ч.1. Интегральное исчисление: Учеб. пособие/ Андрианова Т.Н., Ефи-

мова Т.А., Коломейцева З.Д. и др.; Под ред. Волкова В.А.- СПб.: Изд. Санкт-Петербурского ун-та,1994. 232 с.
2.Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. М.: Высш. Шк., 1988. 288с.
3.Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П.Демидовича.М.:Наука.1993.480 с.
4.Виниградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу.Кн.1.М.: Высш.шк. 2000. -725 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для организации самостоятельной работы
по изучению раздела «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»
курса «Математический анализ»
для студентов направления подготовки бакалавров 230100
«Информатика и вычислительная техника» (профили «Системы автоматизированного проектирования», «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»)
очной формы обучения

Составители:
Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна

В авторской редакции

Компьютерный набор Е.Г. Глушко
Подписано к изданию 26.06.13.
Уч. - изд. л. 2.7.
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14