ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

Г. П. Шлыков

ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ: уравнения, модели, оценивание точности

*Допущено учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
200500 «Метрология, стандартизация и сертификация»*

Пенза
Издательство
Пензенского государственного университета
2008

УДК 681.3
Ш69

Рецензенты:

кафедра «Метрология, стандартизация и сертификация»
Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева;
доктор технических наук, главный конструктор направления НИИФИ
А. А. Папко

Шлыков, Г. П.

Ш69 Теория измерений: уравнения, модели, оценивание точности: учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 100 с.

Приведены отдельные положения теории измерений, составляющие фундамент метрологии. Рассмотрены уравнения процессов измерений, метрологические модели измерительных преобразователей, оценивание погрешностей функций преобразования и способы суммирования погрешностей.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Метрология и системы качества» Пензенского государственного университета и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 200500 «Метрология, стандартизация и сертификация».

УДК 681.3

Предисловие

Как известно общая теория измерений относится к основным проблемам метрологии. Рассматриваемые в учебном пособии четыре темы входят составной частью в учебную программу дисциплины «Общая теория измерений» и используется в дальнейшем в метрологических дисциплинах, изучаемых на последующих курсах.

Первые две темы (уравнения процессов измерений и метрологические модели) являются оригинальными и, как нам кажется, хорошо дополняют уже сложившуюся теорию измерений и раскрытую во многих пособиях и монографиях. Анализируя уравнения процессов измерений и метрологические модели измерительных преобразователей, как составных частей средств измерений всегда осуществляют оценивание точности. Поэтому приведены еще две темы, посвященные методам оценивания погрешностей функций преобразования и суммирования погрешностей.

Приведенные четыре темы могут служить основой соответствующих лекций. Получаемые студентами знания предполагается закреплять на практических занятиях.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей «Метрология и метрологическое обеспечение» и «Стандартизация и сертификация», входящих в направление подготовки дипломированных специалистов (инженеров) 200500 – Метрология, стандартизация и сертификация.

Автор признателен своим слушателям – студентам, которые проявляли интерес при чтении мной лекций на протяжении многих лет, и своими порой непростыми вопросами заставляли меня непрерывно совершенствовать тексты лекций.

Выражаю благодарность коллективу кафедры «Метрологи, стандартизация и сертификация» Мордовского государственного университета (зав. кафедрой к.т.н., доцент С.Д. Богатырев), профессору М.И. Киселеву и д.т.н. А.А. Папко за доброжелательную критику и поддержку при подготовке к изданию.

Автор

1 Уравнения процессов измерений

Введение

Понятие «измерение» может быть и философским (в теории познания), и бытовым (сколько нужно соли на литр воды), и коммерческим (платим за измеренное количество, например, электроэнергии), и техническим (размеры, масса, параметры компонентов, из которых делается продукция), и научным ("Наука начинается… с тех пор, как начинают измерять" – Д.И.Менделеев), и т.д.

Но совершенно очевидно, что результат измерения должен сопровождаться указанием точности. И это необходимо для обеспечения допустимого риска принятия решения на основе полученного результата измерения. Принятие же решений осуществляют на стыке различных субъектов. Следовательно, обеспечение единства измерений веками являлась важнейшей задачей перед человеком, актуальна она и сейчас и будет в будущем, ибо требования растут в степенной зависимости от времени.

Для будущих метрологов и специалистов по качеству умение анализировать измерительные процедуры является необходимым для подтверждения их компетентности.

Уравнение процесса измерения, является математической моделью процесса измерения. Подчеркнем слово "процесса". Процесс – это действие (или операции), которые необходимы для реализации измерений.

Рассмотрим также структурные модели процессов измерений, как совокупности операций, и покажем на конкретных примерах, что любая процедура измерения, заложенный в основу построения средства измерений, всегда содержит компоненты, реализующие основные операции, вытекающие из математической модели.

1.1 Что есть измерение

Через измерение осуществляют переход от действительности к абстракции, т.е. от действительных свойств и состояний объектов к величинам и их значениям, которые являются оценками свойств. Об этом было сказано при изучении теории шкал, рассматривая измерение с позиции теории и практики познания – отражения и воспроизведения человеческим мышлением (или машиной) действительности.

Для метрологии (и теории измерений как её фундаментальной части) основополагающим гносеологическим аспектом является упорядочение системы понятий, которая непрерывно развивается. Поэтому при появлении новых международных и отечественных (национальных) нормативных документов по терминологии часто вносятся какие-то уточняющие положения в определение термина "измерение".

Напомним, что согласно философскому словарю:

измерение – познавательный процесс, имеющий целью определение характеристик материальных объектов с помощью соответствующих измерительных приборов. Осуществляется процесс на эмпирическом уровне.

В международном словаре по метрологии дано следующее лаконичное определение:

измерение – совокупность операций, выполняемых для определения значения величины.

Профессор Э.И.Цветков дает свое определение:

измерение – получение числового эквивалента (значения) величины, характеризующей свойство физического объекта (предмета, процесса, явления) посредством эксперимента (опытным путем), основу которого составляет операция сравнения аналоговой величины с образцовой, формируемой мерой, удовлетворяющей требованиям системы обеспечения единства измерений.

Предложения по определению термина "измерения" вносили также именитые ученые, как П.В.Новицкий (Ленинград – Санкт-Петербург), П.П.Орнатский (Киев), Я.Пиотровский (Польша), Дж.Тейлор (США), И.Пфанцагль (Германия) и др.

В рекомендациях по межгосударственной стандартизации РМГ 29-99, разработанных Всероссийским научно-исследовательским институтом метрологии им. Д.И.Менделеева, дано следующее определение:

измерение физической величины (измерение величины, измерение) – совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины и её единицей и получение значения этой величины.

В рекомендациях приводятся примеры и примечания, которые мы воспроизводим.

Примеры

1 В простейшем случае, прикладывая линейку с делениями к какой-либо детали, по сути, сравнивают её размер с единицей, хранимой линейкой, и, производя отсчет, получают значение величины (длины, высоты, толщины и других параметров детали).

2 С помощью измерительного прибора сравнивают размер величины, преобразованной в перемещение указателя, с единицей, хранимой шкалой этого прибора, и производят отсчет.

Примечания

1 Приведенное определение понятия "измерение" удовлетворяет **общему уравнению измерений**, что имеет существенное значение в деле упорядочения системы понятий в метрологии. В нем учтена техническая сторона (совокупность операций), раскрыта метрологическая суть измерений (сравнение с единицей) и показан гносеологический аспект (получение значения величины).

2 От термина "измерение" происходит термин "измерять", который широко используется на практике. Все же нередко применяются такие термины, как "мерить", "обмерять", "замерять", "промерять", не вписывающиеся в систему метрологических терминов. Их применять не следует.

Не следует также применять такие выражения, как "измерение значения" (например, мгновенного значения напряжения или его среднего квадратического значения), так как значение величины – это уже результат измерений.

3 В тех случаях, когда невозможно выполнить измерение (не выделена величина как физическая и не определена единица измерений этой величины) практикуется **оценивание** таких величин по условным шкалам.

В связи с третьим примечанием следует обратить внимание на то, что в переводе на русский язык стандартов ISO (Международная организация по стандартизации) применен термин "измерение" (8-й раздел ISO 9001:2000 и ГОСТ Р ИСО 9001-2001) в смысле понятия "оценивание", что, конечно, может привести к путанице.

1.2 От уравнения измерения к уравнению процесса измерения

Уравнение измерения рассматривают как уравнение связи между величинами в конкретной измерительной задаче. Под уравнением связи между величинами, согласно РМГ 29-99, понимается "уравнение, отражающее связь между величинами, обусловленную законами природы, в котором под буквенными символами понимают физические величины".

Уравнения процесса измерения должно устанавливать связи между величинами *в процессе измерения*, под которым понимают, согласно ISO 10012:2003, "совокупность операций по определению значения величины".

Как уже было отмечено при определении термина "измерение" ключевыми словами в определении являются слова "сравнение" и "величина, принятая за единицу". Для шкал отношений уравнение измерения физической величины может быть представлено в виде:

$$N_x = \frac{x}{1_x},$$

где N_x – число (целое или дробное), которое должно быть получено по завершению процесса измерения; x – измеряемая величина, обладающая некоторым размером, присущим конкретному объекту; $1_{\tilde{o}}$ – величина, принятая за единицу данной измеряемой величины x.

Для нахождения этого числа с помощью технических средств, очевидно, необходимо иметь и хранить единицу физической величины, что обеспечивается эталонами, а в конкретных рабочих средствах измерений устройствами или совокупностью устройств (мерами), хранящими с той или другой точностью размер единицы физической величины, переданной от эталона.

Поиск отношения осуществляют с помощью действий, происходящих во времени, в результате которых формируется число $N_{\tilde{o}}$. Сводятся эти действия к процессу измерения. Окончательным же результатом процесса измерения величины x является получение оценки её размера $\widetilde{x}$ в единицах измеряемой величины:

$$\tilde{\delta} = \tilde{N}_{\delta} \cdot 1_{\delta},$$

где $\tilde{N}_x$ – числовое значение, отличное от N_x из-за существования в реальном эксперименте тех или других ошибок (погрешностей).

Но вернемся к уравнению измерения.

Из уравнения следуют следующие варианты сравнения, сводящиеся к получению разностей теоретически равных нулю:

$$x - N_x \cdot 1_x = 0; \qquad \frac{\tilde{\delta}}{N_x} - 1_{\tilde{\delta}} = 0;$$

$$\frac{\tilde{\delta}}{1_{\tilde{\delta}}} - N_{\tilde{\delta}} = 0; \qquad \frac{\tilde{\delta}}{1_{\tilde{\delta}} N_{\tilde{\delta}}} - 1 = 0.$$

Первые два варианта подразумевают наличие в процессе измерения операции сравнения размерных физических величин, вторые два – операции сравнения безразмерных величин (чисел, отношений).

В процессе измерения должен осуществляться поиск такого значения N из некоторого множества $\{N\}$, чтобы разность сравниваемых величин была близка к нулю. Уравнение процесса измерения для первого варианта сравнения, когда осуществляется масштабирование величины, принятой за единицу, можно представить в виде:

$$\tilde{N}_x = \arg_N \min \left| x - N(t) \cdot 1_x \right|,$$

где $N(t)$ – непрерывно или дискретно изменяющееся во времени измерения (поиска) значение N. Алгоритм изменения $N(t)$ может быть детерминированным, адаптивным, стохастическим и т.п.

Уравнение читается так: $\tilde{N}_x$ равно аргументу N, при котором модуль разности $\left|x - N(t) \cdot 1_x\right|$ принимает минимальное значение.

Очевидно, минимальное $N_{\min}$ и максимальное $N_{\max}$ значения в множестве чисел $\{N\}$ должны быть таковыми, чтобы измеряемая величина (по данным до измерения – априори) принадлежала интервалу $\left[N_{\min} \cdot 1_x; N_{\max} \cdot 1_x\right]$.

Для других вариантов сравнения уравнения процессов измерений запишется следующим образом:

$$\widetilde{N}_x = \arg\min_N \left| \frac{x}{N(t)} - 1_x \right|;$$

$$\widetilde{N}_x = \arg\min_N \left| \frac{x}{1_x} - N(t) \right|;$$

$$\widetilde{N}_x = \arg\min_N \left| \frac{x}{1_x N(t)} - 1 \right|.$$

Из приведенных уравнений следует, что любой процесс измерения должен содержать следующие операции:

1 Воспроизведение единицы измеряемой величины;

2 Масштабирование (умножение, деление) единицы измеряемой величины или самой измеряемой величины, либо получение отношения величин;

3 Сравнение размерных или безразмерных величин;

4 Поиск значения числа *N*, управляемый результатом операции сравнения.

К этим операциям добавляется пятая – формирование результата измерения путем приписывания к полученному числу соответствующей размерности ($\widetilde{x} = \widetilde{N}_x \cdot 1_x$).

Таким образом, получены математические выражения, описывающие модель процесса измерения в отличие от приведенного ранее уравнения измерения, не отражающего операции процесса измерения.

1.3 Структурные модели процессов измерений

Для наглядности и лучшего понимания физического смысла уравнения процесса измерения представим его в виде графической схемы – структурной модели. Рассмотрим структурные модели процессов измерений четырех вариантов сравнения, о которых сказано выше.

Каждый элемент структурной модели – это операция. Число различных операций равно пяти. Их взаимосвязи зависят от варианта сравнения. Результатом сравнения является выработка управляющего воздействия на операцию поиска числа N из некоторого множества $\{N\}$.

Вариант первый. Непосредственно сравниваются измеряемая величина x и промасштабированная единица измеряемой величины, т.е. $N(t)\cdot 1_x$ (рисунок 1.1).

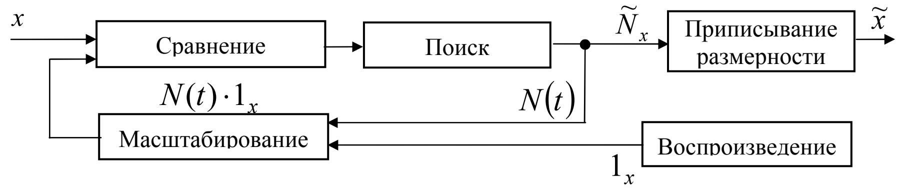


Рисунок 1.1

Вариант второй. Масштабируется измеряемая величина $x/N(t)$. Полученная величина сравнивается с единицей измеряемой величины 1_x (рисунок 1.2).

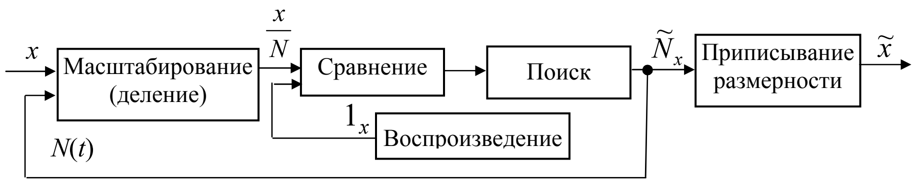


Рисунок 1.2

Третий вариант. Здесь напрямую нет операции масштабирования, а осуществляется операция по получению отношения измеряемой величины x и единицы измеряемой величины 1_x, в результате которой получают безразмерную величину, которая сравнивается с текущим значением $N(t)$, образующимся путем выполнения операции "поиск" (рисунок 1.3). Заметим, что этот вариант скорей гипотетический, ибо если уже удалось получить отношение $x/1_x$, то измерительная задача решена.

Вариант четвертый. В данном варианте подразумевается как операция масштабирования, так и операция определения отношения. При этом полученное отношение может сравниватьсяся как с безразмерной единицей $\left(\frac{x}{N \cdot 1_x} - 1\right)$, так и заданным числом меньше единицы $\left(\frac{x}{nN \cdot 1_x} - \frac{1}{n}\right)$.

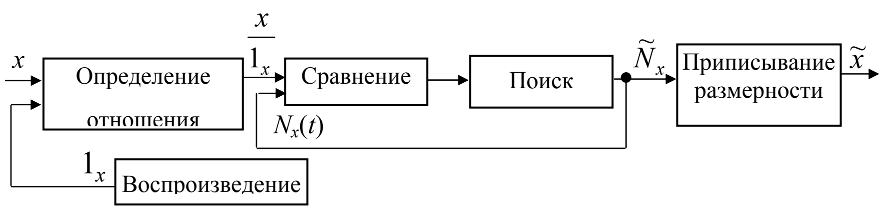


Рисунок 1.3

Структурная модель этого варианта показана на рисунке 1.4.

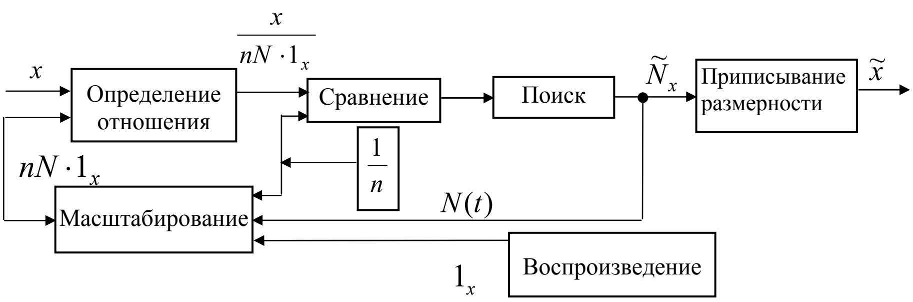


Рисунок 1.4

Таким образом, структурные модели процессов измерений содержат операции из одного набора, но взаимосвязи у них могут быть различными. Общим для всех моделей является наличие отрицательной обратной связи.

Обратим внимание на то, что приведены на рисунках структурные модели, а не структурные схемы. Ибо рассматриваются операции, а не устройства.

В разделе 1.5 покажем на конкретных примерах, как операции, вытекающие из уравнения процесса измерений, реализуются.

1.4 Неявные формы воспроизведения единицы физической величины и сравнения

До сих пор предполагалось, что единица физической величины воспроизводится в явном виде, например, если измеряется электрическое напряжение, то в средстве измерений хранится единица напряжения – вольт, предположим, в виде напряжения стабилизации полупроводникового стабилитрона.

Однако в практике измерений, как воспроизведение единицы измеряемой физической величины, так и сравнение осуществить в явном виде не всегда возможно. Поэтому прибегают к еще одной операции – операции преобразования из одной физической величины в другую, в том числе при воспроизведении единицы данной физической величины через воспроизведение другой физической величины, связанной с ней уравнением связи по законам физики.

Пример. Измерение температуры ртутным термометром. Очевидно, единица температуры (градус) где-то присутствует. В данном случае единица температуры косвенным образом заложена в температурном коэффициенте расширения ртути.

Преобразование одной физической величины в другую осуществляется путем использования тех или других физических эффектов, хорошо изученных и имеющих стабильные функции преобразования, т.е. уравнения связи между величинами. Эти функции, как правило, нелинейные, но при их реализации всегда стремятся функции приблизить к линейным либо использовать линейный участок функции.

Для упрощения рассуждений не нарушая сути, примем, что операции по преобразованию одной физической величины в другую имеют линейный характер, т.е.

$$y = S_{yx} \cdot x ,$$

где y – величина, получаемая в результате преобразования и имеющая размерность $[y]$; x – преобразуемая величина, например, измеряемая, имеющая размерность [x]; S_{yx} – чувствительность преобразования, имеющая размерность [S_{yx}] = [y]/[x].

В ранее рассмотренных процессах измерений фигурировала для каждого процесса одна физическая величина. Сейчас будут рассмотрены процессы, в которых две, три или может быть и больше физических величин.

Предположим, что единица физической величины воспроизводится косвенно:

$$1_x = S_{xy} \cdot 1_y ,$$

где 1_y – единица другой физической величины, связанной с данной физической величиной (измеряемой) через чувствительность S_{xy}, имеющей размерность [S_{xy}] = [x]/[y].

Тогда операция сравнения может быть осуществлена, например, в соответствии с выражением:

$$x - N_x \cdot 1_y \cdot S_{xy} = 0 .$$

В случае преобразования измеряемой величины, т.е. $y = S_{yx} \cdot x$, операцию сравнения осуществляют, например, в соответствии с выражением

$$x \cdot S_{yx} - N_x \cdot 1_y = 0 .$$

Может оказаться, что для осуществления сравнения как измеряемую величину x, так и воспроизводимую единицу 1_y физической величины y, преобразует в третью физическую величину z. Тогда

$$x \cdot S_{zx} - N_x \cdot S_{zy} \cdot 1_y = 0 ,$$

где S_{zx} – чувствительность преобразования измеряемой величины x в величину z: S_{zy} – чувствительность преобразования единицы 1_y физической величины y в величину z.

Уравнения таких преобразований:

$$z = S_{zx} \cdot x \text{ и } z = S_{zy} \cdot 1_y .$$

В этом случае математическая модель процесса измерения примет вид:

$$N_x = \arg\min_N \left| S_{zx} \cdot x - S_{zy} \cdot N(t) \cdot 1_y \right| .$$

Соответствующая структурная модель включает две операции преобразования физических величин (рисунок 1.5).

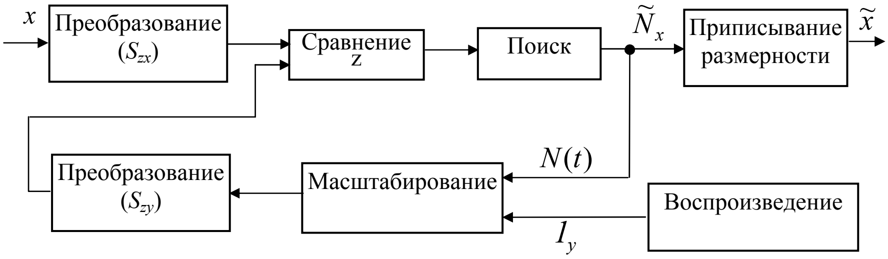


Рисунок 1.5

Возможны и другие многочисленные варианты.

1.5 Уравнения и структурные модели процессов измерений в практических примерах

1.5.1 Измерение массы с помощью рычажных весов

Измерение осуществляют следующим образом. Находящуюся на одной чаше весов массу, например, арбуз, уравновешивают путем подбора гирь, устанавливаемых на другую чашу. Здесь единица измеряемой величины (килограмм) хранится в гирях. Ее масштабирование осуществлено заранее на заводе-изготовителе гирь. В результате чего был сделан набор разнономинальных мер, из которых путем комбинаций в процессе непосредственного измерения продавец (в нашем понимании – оператор) подбирает нужные значения за несколько приемов. Операция сравнения осуществляется оператором, который следит за положением "клювиков" рычажных весов. Поиск нужного значения N_x производит путем перебора возможных значений мер массы опять-таки оператор. При этом алгоритм перебора (последовательность) может быть самым разным.

1.5.2 Измерение длины с помощью линейки

Линейка есть мера, хранящая единицу длины, но многозначная, т.е. имеющая определенное число делений полученных путем масштабирования при её изготовлении. Оператор перебирает деления шкалы линейки (все возможные коэффициенты) до тех пор, пока не найдет то, которое совпадает с измеряемым размером (осуществляет поиск и сравнение). Реально все возможные значения деления оператор, казалось бы, и не перебирает, а рассматривает только несколько лежащих близко к искомому. Но ведь это только кажется. Оператор видит всю линейку, т.е. множество значений. Итак, опять все те же операции из перечня, который был определен при рассмотрении уравнений процессов измерений.

1.5.3 Измерение электрического напряжения вольтметром уравновешивающего типа

Структурная схема (не модель) вольтметра показана на рисунке 1.6. Вольтметр обязательно содержит источник опорного напряжения, хранящий единицу напряжения – вольт (1_U). Напряжение это делится с помощью управляемого кодом делителя напряжения (операция масштабирования). Коэффициентов деления такого делителя должно быть достаточно большое количество, например, 10^3, 10^4, а то и 10^5, 10^6 для высокоточных приборов. Напряжение после масштабирования (компенсирующее напряжение $U_к$) сравнивается с измеряемым напряжением U_x с помощью так называемого компаратора, построенного на операционном усилителе с дифференциальными входами. Результат сравнения в виде сигналов "больше", "меньше" или "равно" поступает в накапливающее устройство типа счетчика импульсов или регистра с сумматором, на выходе которого образуется число (код). Это число – из множества коэффициентов масштабирования. Если в результате сравнения нет сигнала "равно", то содержимое накапливающего устройства изменяется в ту или другую сторону, коэффициент масштабирования меняется (операция поиска). И так до тех пор, пока не будет равенства измеряемого напряжения и напряжения с делителя, т.е. пока не произойдет их уравновешивание. Все операции происходят автоматически, и оператору остается лишь произвести считывание показания.

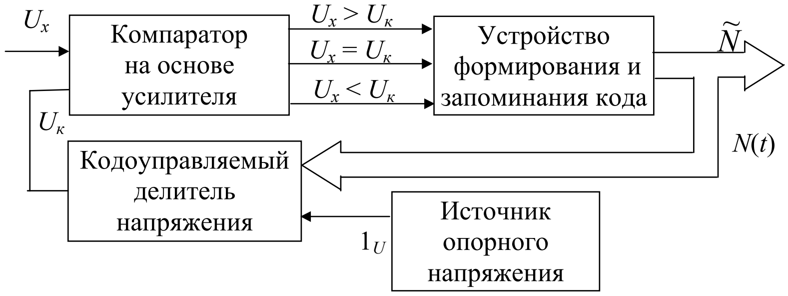


Рисунок 1.6

1.5.4 Измерение электрического сопротивления с помощью уравновешивающего моста

Электрическое сопротивление относится к физическим величинам, которые не могут быть измерены без внешнего воздействия на испытуемый объект. В данном случае сопротивление рассматривается как свойство объекта, которое проявляется только при прохождении через объект электрического тока (сопротивление току!).

Другая особенность данной физической величины это невозможность непосредственно получить разность двух сопротивлений, необходимой для осуществления операции сравнения (сложить сопротивления двух объектов можно, вычесть – нет). Следовательно, непосредственно реализовать вариант сравнения $N1_R$-R_x = 0 невозможно.

Поэтому сравнивают сопротивления только косвенным образом, переходя к безразмерным величинам–отношениям и далее преобразуя эти отношения, например, в электрическое напряжение.

Широко рассмотренным методом измерения электрического сопротивления постоянному току является мостовой метод. На рисунке 1.7 приведена структурная схема установки для измерения сопротивления с ручным уравновешиваем моста, т.е. осуществляемым человеком. Приводимые ниже уравнения, структурная модель и анализ погрешностей такие же как, если бы уравновешивание было автоматическим.

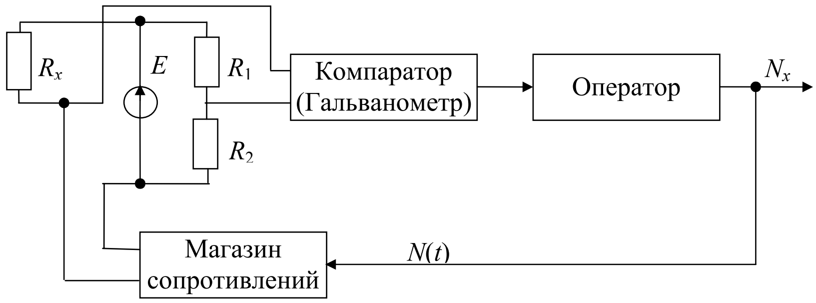


Рисунок 1.7

Четырехплечий мост включает в себя два делителя напряжения. Первый делитель образуется объектом, сопротивление которого R_x измеряется, и магазином сопротивлений, воспроизводящим сопротивление $N(t)\cdot 1_R$, где 1_R – единица электрического сопротивления.

Второй делитель образуется двумя резисторами, сопротивления которых соответственно R_1 и R_2. Как правило, номинальные значения этих сопротивлений равны между собой. Тогда отношение $R_1/R_2 = 1$ и коэффициент деления делителя $R_1/(R_1+R_2) = 0,5$.

Питание моста осуществляется от источника напряжения E.

К измерительной диагонали подключают компаратор напряжений, в простейшем случае это гальванометр, по показанию которого оператор судит о том, в какую сторону необходимо изменять положения переключателей магазина сопротивлений, т.е. в какую сторону изменять сопротивление, определяемое произведением $N(t)\cdot 1_R$ (операция поиска и операция масштабирования единицы сопротивления). Уравновешивание наступает при показании гальванометра равном нулю.

Структурная модель процесса измерения с помощью рассмотренной измерительной установки представлена на рисунке 1.8.

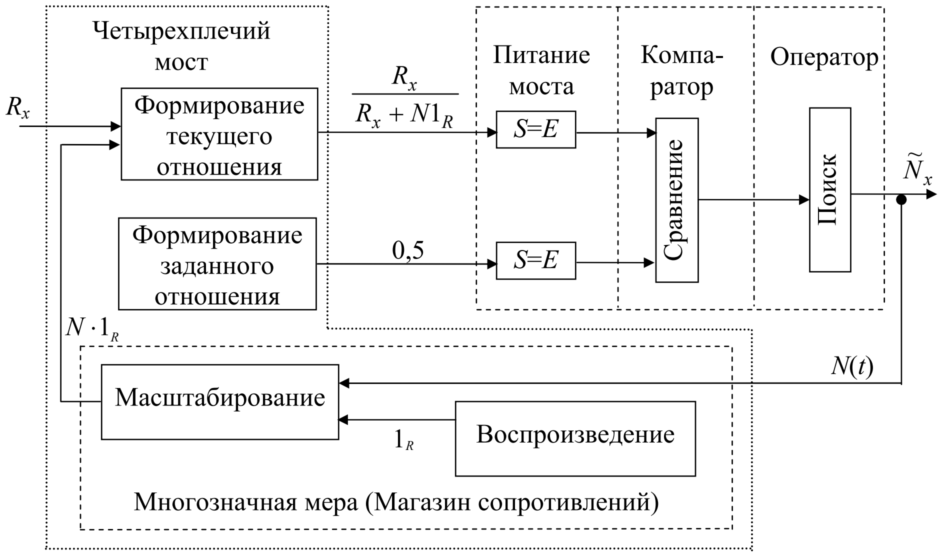


Рисунок 1.8

В состав структурной модели вошли все основные операции, присущие любому процессу измерения: воспроизведение единицы физической величины, масштабирование, сравнение и поиск, а также дополнительные операции формирования отношений (коэффициентов деления) и преобразования их в электрическое напряжение через умножение на чувствительность S, равную в данном случае напряжению питания E моста.

Уравнение процесса измерения записывается в виде:

$$\widetilde{N}_x = \underset{N}{\arg\min}\left| E\frac{R_x}{R_x + N(t)\cdot 1_R} - E\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right|.$$

Очевидно, при $N(t)\cdot 1_R \to R_x$, модуль разности в приведенном уравнении стремится к нулю, если $R_1 = R_2$.

На данном примере осуществим переход от уравнения процесса измерения к функции преобразования, причем с учетом наиболее значимых погрешностей компонентов измерительной установки.

Разность сравниваемых величин – это напряжение в измерительной диагонали моста. Её минимум определяется некоторым порогом чувствительности и возможным смещением "нуля" $\Delta_{\text{ã}}$ гальванометра, включая субъективную погрешность оператора при считывании показания индикатора гальванометра. Тогда

$$E\frac{R_x}{R_x + N_x \cdot 1_R} - E\frac{R_1}{R_1 + R_2} \le \Delta_{\text{ã}}\,.$$

Так как реально воспроизведение единицы и её масштабирование осуществляются с некоторой погрешностью $\delta_{\text{ì}}$ (погрешность магазина сопротивлений) и формирование коэффициента деления делителя R_1 и R_2 осуществляется также с погрешностью – погрешностью $\delta_{\text{Ä}}$ коэффициента деления (заметим – не сопротивлений R_1 и R_2), то

$$E\frac{R_x}{R_x + N_x \cdot 1_R(1+\delta_{\text{ì}})} - 0{,}5E(1+\delta_{\text{Ä}}) \le \Delta_{\text{Ã}}\,,$$

где $0{,}5 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, если номинально $R_1 = R_2$.

Приведем полученное выражение к следующему виду:

$$\frac{R_x}{R_x + N_x \cdot 1_R(1+\delta_{\text{ì}})} - 0{,}5(1+\delta_{\text{Ä}}) + \frac{\Delta_{\text{Ã}}}{E} = 0\,.$$

Обратим внимание, что δ и Δ это симметричные пределы допускаемых относительной и абсолютной погрешностей. Это означает, что строго по правилам перед каждым из этих символов следует поставить знак "$\pm$". Но для упрощения записи ставится всегда "+", но подразумевается "$\pm$".

Определим N_x из полученного уравнения:

$$N_x = \frac{R_x}{1_R(1+\delta_{\text{ì}})}\left[\frac{0{,}5 - (0{,}5\delta_{\text{Ä}} + \Delta_{\text{Ã}}/E)}{0{,}5 + (0{,}5\delta_{\text{Ä}} + \Delta_{\text{Ã}}/E)}\right].$$

При отсутствии погрешностей формула преобразуется в уравнение измерения $N_x = R_x/1_R$.

Преобразуем формулу таким образом, чтобы исключить из нее знаменатель. Для этого разложим в ряд Тейлора выражение в квадратных скобках.

Обозначим $\dfrac{0,5-x}{0,5+x} = \dfrac{u}{v}$, где $\tilde{o} = 0,5\delta_{\text{Ã}} + \Delta_{\text{Ã}} / \mathring{A}$.

Как известно формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Согласно справочнику по математике для дроби вида *u*/*v* первая производная

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{v \cdot u^{/} - u \cdot v^{/}}{v^2} .$$

Тогда

$$f^{/}(x) = \frac{(0,5+x)(-1) - (0,5-x)(1)}{(0,5+x)^2}$$

$$\text{и } f^{/}(0) = \frac{-1}{0,5^2} = -4 .$$

$$f^{//}(x) = \left(\frac{-1}{(0,5+x)^2}\right)^{/} = \frac{(0,5+x)^2 \cdot 0 + 1 \cdot (2x+1)}{(0,5+x)^4}$$

$$\text{и } f^{//}(0) = \frac{1}{0,0025} = 16 .$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках преобразуемого уравнения пример вид:

$$1 - 4\left(0,5\delta_{\text{Ã}} + \Delta_{\text{Ã}} / E\right) + \frac{16}{2!}\left(0,5\delta_{\text{Ã}} + \Delta_{\text{Ã}} / E\right)^2 + \ldots$$

Отбрасывая малые второго и высших порядков и учитывая, что погрешности заданы в виде пределов допускаемых значений, получим

$$N_x = \frac{R_x}{1_R\left(1+\delta_{\text{ì}}\right)}\left[1 + 2\delta_{\text{Ã}} + 4\Delta_{\text{Ã}} / E\right].$$

Перенесем $\left(1+\delta_{\text{ì}}\right)$ из знаменателя в числитель. Это допустимо, учитывая, что $\delta_{\text{ì}} << 1$, а также то, что погрешность $\delta_{\text{ì}}$ предельная ($\pm$). Из математики известно, что $1/(1 \pm x) \approx 1 \mp x$. Тогда

$$N_x = \frac{R_x}{1_R}\left(1 + 2\delta_{\text{Ã}} + 4\Delta_{\text{ã}} / E\right)\left(1 + \delta_{\text{ì}}\right),$$

или окончательно

$$N_x = \frac{R_x}{1_x}\left(1 + 2\delta_{\text{Ã}} + 4\Delta_{\text{ã}} / E + \delta_{\text{ì}}\right).$$

Переход от одной формулы к другой осуществлен путем умножения выражений в скобках и отбрасывания малых второго порядка, т.е. произведений погрешностей.

Обратим внимание на то, что погрешность измерения сопротивления мостовым методом имеет только мультипликативную составляющую. Аддитивная погрешность есть, но она обусловлена в основном сопротивлениями контактов и соединительных проводов подсоединения объекта, сопротивление которого измеряется. Здесь этот момент не рассматривается.

1.5.5 Измерение электрического тока путем преобразования в электрическое напряжение

Процесс измерения можно осуществить путем преобразования тока в напряжение с помощью резистора с нормированным сопротивлением и последующего измерения полученного напряжения, например, цифровым вольтметром уравновешивающего типа. Появляется новая операция – операция преобразования одной физической величины в другую. При этом в качестве меры измеряемой величины (тока) выступает отношение размера меры напряжения, воспроизводимой в процессе измерения напряжения (в вольтметре), к сопротивлению резистора. Уравнение процесса измерения тока примет вид

$$N_x = \underset{N}{\arg}\ \min\left| N(t)\frac{1_{\text{U}}}{R} - I_x \right|,$$

где 1_{U} – единица напряжения; R – нормированное сопротивление резистора; I_x – измеряемый ток.

1.5.6 Измерение электрического тока с помощью магнитоэлектрического прибора

В миллиамперметре магнитоэлектрической системы первоначально происходит преобразование измеряемого тока в момент силы (вращающий момент), действующий на подвижную часть механизма прибора. Этот момент определяется выражением, известным из курса физики, где рассматривается поведение проводника с током в поле постоянного магнита. Для рассматриваемого случая вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = I_x 2nlBr,$$

где I_x – ток через рамку прибора (измеряемый ток); n – число витков рамки; l – длина рамки; B – магнитная индукция в воздушном зазоре, в котором вращается рамка; r – радиус вращения.

Вращающий момент не зависит от угла β поворота рамки, поэтому на графике $M_{\text{вр}}(\beta)$ для различных значений тока показаны параллельные оси абсцисс прямые (рисунок 1.9).

Противодействующий момент образуется при закручивании спиральной пружины. Он пропорционален углу поворота рамки:

$$M_{\text{пр}} = W\beta,$$

где W – удельный противодействующий момент, определяющийся упругими свойствами пружины; β – угол поворота рамки в радианах или градусах. Это выражение представляет собой функцию масштабирования удельного противодействующего момента и является линейной зависимостью (см. рисунок 1.9).

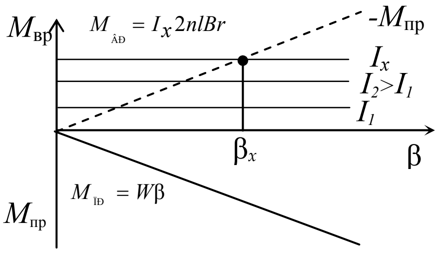


Рисунок 1.9

Рамка, а следовательно, и стрелка указателя, останавливается, когда минимальной становится разность $M_{\text{пр}} - M_{\text{вр}}$. Этот минимум определяется моментом силы, необходимым для преодоления силы трения, например, в системе "керн-подпятник" механизма прибора.

Следовательно, уравнение процесса преобразования может быть представлено в виде:

$$\beta_x = \arg\min_{\beta} \left| W\beta(t) - 2nlBrI_x \right|.$$

Выразив результат не в единицах угла поворота, а в делениях шкалы прибора α, получим уравнение процесса измерения тока:

$$\alpha_x = \arg\min_{\alpha} \left| \frac{Wd(t)}{2nlBr}\alpha - I_x \right|,$$

где d – коэффициент в уравнении связи $\beta = d \cdot \alpha$, показывающий число единиц угла в одном делении (град/дел).

Из полученного уравнения следует, что единица тока заключена в отношении *Wd/2nlBr*, что подтверждает анализ размерностей:

удельный противодействующий момент – [*W*]=[*M*/β];

угол поворота – $[\beta]$ = градус;

момент силы – [*M*] = L^2MT^{-2} = м^2•кг•с$^{-2}$;

площадь рамки – [2*lr*] =L^2=м^2;

магнитная индукция – [*B*]=$MT^{-2}I^{-1}$= кг•с$^{-2}$•А$^{-1}$.

Тогда размерность выражения

$$\left[\frac{Wd}{2nlBr}\right] = \frac{\text{ì}^{\,2}\cdot \text{êã}\cdot \text{ñ}^{-2}}{\text{ãðàä}}\cdot\frac{\text{ãðàä}}{\text{äåë}}\cdot\frac{1}{\text{ì}^{\,2}\cdot \text{êã}\cdot \text{ñ}^{-2}\cdot A^{-1}} = \frac{A}{\text{äåë}}.$$

Структурная модель магнитоэлектрического прибора может быть представлена в виде, показанном на рисунке 1.10, где в звеньях, обозначающих операций преобразования, указаны коэффициенты преобразования – чувствительности.

Операция поиска подразумевает прохождение рамкой всех возможных положений угла от принятого за нулевую отметку до того значения, при котором моменты сил сравниваются.

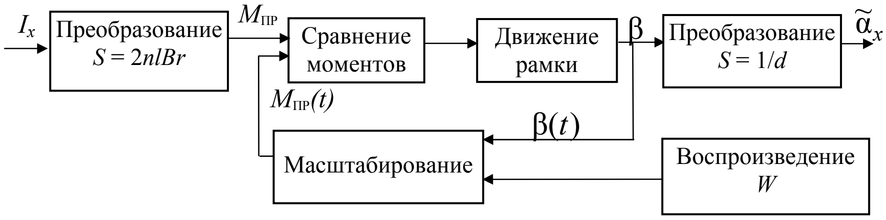


Рисунок 1.10

Приравнивая моменты, можно получить формулу, связывающую показание прибора с измеряемым током (функцию преобразования):

$$\tilde{\alpha}_x = \frac{2nlBr}{Wd} I_x .$$

Эта формула хорошо известна из учебников по измерительной техники.

1.5.7 Измерение температуры с помощью оптического пирометра

В основе измерения лежит зависимость спектральной яркости нагретого до раскаленного состояния тела от его температуры. Эта зависимость описывается уравнением Стефана – Больцмана на основании закона Планка. С точки зрения процесса измерения осуществляется преобразование одной физической величины в другую.

Как происходит процесс измерения далее? С помощью оптики и собственного зрения человек-оператор сравнивает яркость нагретого тела с яркостью нити накаливания лампочки, через которую пропускается электрический ток (рисунок 1.11).

Регулируя силу тока (осуществляя перебор возможных значений – поиск), оператор добивается одинаковой яркости тела и нити. Этот момент фиксируется, когда на фоне раскаленного тела нить накаливания перестает различаться. По показанию миллиамперметра, проградуированного в градусах, оператор судит об измеряемой температуре.

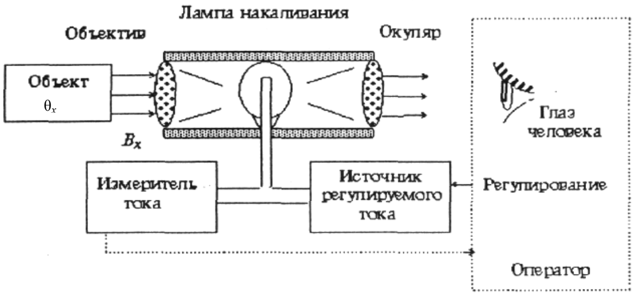


Рисунок 1.11

В этом примере не обнаруживается в явном виде мера, воспроизводящая единицу температуры. Но где-то единица температуры должна быть и, видимо, представлена каким-то косвенным образом. Чтобы разобраться в этом, построим структурную модель, совмещенную со структурной схемой (рисунок 1.12).

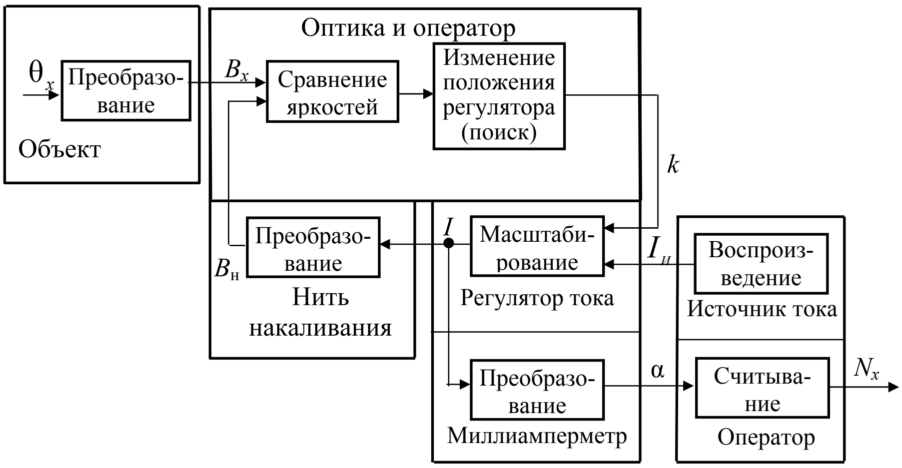


Рисунок 1.12

Первое преобразование одной физической величины в другую (измеряемой температуры θ_x в яркость B_x) происходит в самом объекте (раскаленном теле). Функция такого преобразования имеет явно выраженный нелинейный характер. Однако в рабочем диапазоне температур, например, от 800° до 1000° С, она может быть аппроксимирована линейной зависимостью вида:

$$B_x = S_1(\theta_x - \theta_0),$$

где S_1 – коэффициент преобразования температуры; θ_0 – некоторое начальное значение.

Второе преобразование – это преобразование электрического тока в яркость свечения нити лампочки. Функция преобразования также имеет нелинейный характер и аналогичным образом может быть аппроксимирована линейной зависимостью

$$B_H = S_2(I - I_0),$$

где S_2 – коэффициент преобразования тока; I_0 – некоторое начальное значение.

Виды указанных нелинейных зависимостей показаны на рисунке 1.13 (а и б).

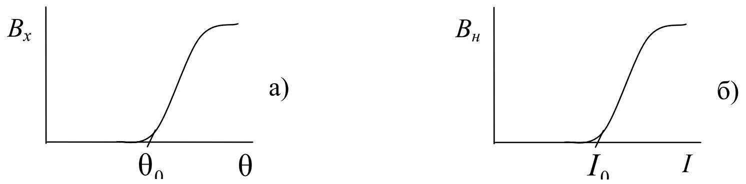


Рисунок 1.13

Ток через нить накаливания изменяется путем регулирования (масштабирования) тока, получаемого от источника. Это масштабирование представим линейным уравнением

$$I = kI_и,$$

где k – регулируемый оператором коэффициент масштабирования; $I_и$ – ток источника.

Если бы в пирометре не было миллиамперметра, измеряющего ток I, то о результате измерения температуры можно было бы судить по коэффициенту k, определяя его по положению регулятора тока. В этом случае источник тока должен быть мерой тока, воспроизводить ток заданного размера, а масштабирование должно быть осуществлено с необходимой точностью. Но в рассмотренном примере построения пирометра точность формирования тока обеспечивается путем его измерения миллиамперметром. Он осуществляет третье преобразование – преобразование тока I в отклонение α стрелки прибора в делениях шкалы. Функция преобразования миллиамперметра

$$\alpha = S_3 I ,$$

где S_3 – чувствительность миллиамперметра.

Из приведенных рассуждений следует, что

$$B_{\text{i}} = S_2 \left(I - I_0 \right) = \frac{S_2}{S_3} \alpha - S_2 I_0 .$$

Считывание показания прибора оператор осуществляет при достижении минимальной разности яркостей $B_{\text{i}} - B_x$. И если параметры компонентов пирометра рассчитаны так, что $S_2 I_0 = S_1 \theta_0$, то уравнение процесса измерения запишется следующим образом:

$$\tilde{N}_x = \tilde{\alpha}_x = \arg\min_{\alpha} \left| \frac{S_2}{S_3} \alpha(t) - S_1 \theta_x \right| .$$

Следовательно, после завершения операции поиска

$$\frac{S_2}{S_3 S_1} \tilde{\alpha}_x = \theta_x .$$

Тогда функция преобразования запишется в виде:

$$\tilde{\alpha}_x = \frac{S_3 S_1}{S_2} \theta_x .$$

Заметим, что линейная аппроксимация влечет за собой некоторую погрешность от нелинейности, которая должна быть компенсирована построением нелинейной шкалы миллиамперметра.

Проверим размерности. Размерность яркости определяется в системе единиц СИ как отношение размерности силы света в канделах (J) к площади в квадратных метрах (L^2). Единицей термодинамической температуры является градус Кельвина (K). Единица силы электрического тока есть ампер (A). За единицу отклонения стрелки прибора примем одно деление.

Тогда размерности коэффициентов преобразования будут соответственно равны:

$$[S_1] = \frac{[B_x]}{[\theta_x]} = \mathrm{JL^{-2}\theta^{-1}} = \frac{\text{кд/м}^2}{\text{K}};$$

$$[S_2] = \frac{[B_\text{н}]}{[I]} = \mathrm{JL^{-2}I^{-1}} = \frac{\text{кд/м}^2}{\text{A}};$$

$$[S_3] = \frac{[\alpha]}{[I]} = \frac{\text{äåë}}{\text{À}}.$$

Отсюда следует, что размерность коэффициента в функции преобразования

$$\left[\frac{S_1 S_3}{S_2}\right] = \frac{\text{кд/м}^2}{\text{K}} \cdot \frac{\text{дел}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{кд/м}^2} = \frac{\text{дел}}{\text{K}},$$

т.е. одно деление шкалы прибора на единицу температуры.

Таким образом, в отношении коэффициентов S_1, S_2, S_3 заложена единица температуры. Заметим, что в уравнение процесса измерения не вошли коэффициенты масштабирования и значение тока источника.

2 Метрологические модели измерительных преобразователей

Введение

Напомним, что понимается под термином "измерительное преобразование". Под измерительным преобразованием понимают процесс, в результате которого информативный параметр (измеряемая, преобразуемая величина) входного сигнала или физическая величина преобразуются к виду, удобному для дальнейшего преобразования в измерительной цепи, на выходе которой должен быть в том или другом виде получен результат измерения.

Измерительное преобразование осуществляют устройства (преобразователи), которые могут исполняться в виде отдельных изделий (датчик, усилитель, магнитоэлектрический прибор и т.п.), либо быть в составе относительно сложных (нерасчленяемых) устройств и механически не могут быть выделены как отдельное устройство (модуль), либо это нецелесообразно по технологическим, конструкторским или метрологическим причинам (интегрирующий преобразователь в составе цифрового вольтметра, мембранный емкостной преобразователь в составе датчика разности давлений и т.д.).

При проектировании средств измерений, включая измерительные преобразователи, стремятся получить линейную зависимость выходной величины y преобразователя от входной x:

$$y = Sx,$$

где S – чувствительность преобразователя.

Это выражение называют номинальной функцией преобразования.

Реально функция преобразования не может полностью соответствовать приведенному выражению.

Поэтому приведенное выражение только приписывают преобразователю, т.е. устанавливают в документации номинальную линейную функцию с некоторой допускаемой погрешностью.

Реальная функция преобразования может быть представлена, например, степенным рядом вида:

$$y_{\text{р}} = Sx + a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

где a, b, c, d – некоторые, как правило, размерные коэффициенты.

Конструкторским, технологическим, схемотехническим путем указанные коэффициенты минимизируют и тогда функция преобразования реальная приближается к номинальной.

Разработка метрологических моделей, с достаточной степенью достоверности отражающих реальные функции для заданных условий, помогает конструкторам оптимальным образом выбрать схему, комплектующие детали и материалы, режимы изготовления, методику настройки и т.д.

Измерительный преобразователь представляет собой объединение более простых преобразователей. При метрологическом анализе устанавливают зависимости погрешностей измерительных преобразователей или цепи преобразователей от погрешностей компонентов.

Эти зависимости (естественно приближенные) называют метрологическими моделями в дополнение к функциональным моделям.

Реально в большинстве случаев измерительные преобразователи работают в квазистатическом режиме, когда скорость изменения информативного параметра входной величины не велика, т.е. динамическая погрешность составляет долю статической погрешности преобразователя.

Поэтому ниже рассматриваются случаи, когда информативный параметр во время измерения (преобразования) не меняется, а инерционные свойства преобразователя таковы, что время, отводимое на преобразование достаточно, чтобы практически полностью закончились переходные процессы. Таким образом, в моделях параметр время будет отсутствовать, но при необходимости можно обратиться к методам авторегулирования, если рассматривается работа преобразователя в динамическом режиме.

В общем случае математически погрешность можно представить, например, в виде детерминированной или случайной зависимости, учитывающей множество факторов:

$$\varepsilon\left(x, t, \theta^{\circ}, \Sigma\psi_i, \Sigma\xi\ldots\right),$$

где ε – погрешность; x – измеряемая величина; t – время; θ^{o} – температура; $\Sigma\psi_i$ – суммарная функция влияния других (кроме температуры) внешних факторов; $\Sigma\xi$ – суммарные влияния отклонений параметров компонентов от номинальных значений и т.д.).

Подобные модели изучаются в различных дисциплинах: метрология (теория точности), метрологическое обеспечение средств измерений и др.

В рамках настоящего метрологического анализа рассматриваются предельные значения погрешностей Δ, т.е. такие значения, в пределах которых находится истинная погрешность

$$\varepsilon \in [-\Delta; \Delta].$$

Предельные погрешности устанавливают в документации на параметры компонентов и преобразователей в целом при их проектировании и выпуске из производства.

Составив предельные метрологические модели есть возможность, при необходимости, путем декомпозиции перейти к оцениванию тех или других составляющих (случайных, от внешних факторов, динамических и т.д.).

2.1 Метрологические модели простейшего линейного звена

Номинальная функция преобразования линейного звена, как уже было сказано во введении ко второй главе, описывается выражением

$$y(x)=Sx,$$

где y – выходная величина; x – входная величина; S – чувствительность, или коэффициент преобразования.

На структурных моделях линейное звено отображают прямоугольником, в центре которого буква S – чувствительность (рисунок 2.1), слева – стрелка, обозначающая вход, справа – выход.

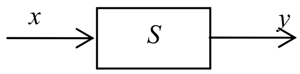


Рисунок 2.1 – Представление линейного звена на структурных моделях

Реальная функция преобразования $y_{р}(x)$, в силу ряда причин, (неточность конструкции, несоблюдение технологических режимов при изготовлении, настройке, старение материалов и т.п.) отличается от номинальной, т.е. как бы деформируется. Например, она может принять вид, показанный на рисунке 2.2а.

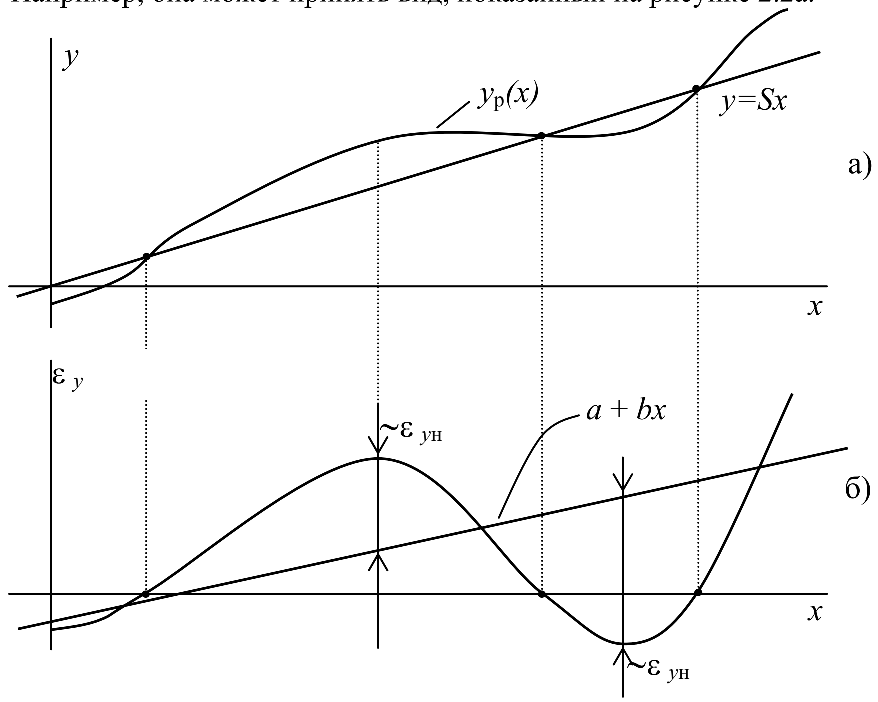


Рисунок 2.2 – Номинальная и реальная функции преобразования (а); погрешность функции преобразования (б)

Разность $y_р(x) - y(x) = \varepsilon_y(x)$ есть абсолютная погрешность функции преобразования и точно может быть определена только экспериментально. Именно метрологи и имеют дело с точными погрешностями. Размерность погрешности соответствует размерности выходной величины, поэтому погрешность в таком виде называют приведенной к выходу. Графически для данного примера погрешность имеет вид, показанный на рисунке 2.2б (для лучшей наглядности взят другой масштаб).

Характер изменения погрешности по диапазону входной величины может оказаться самым разным и описываться, например, степенным рядом. Однако для практики столь сложное математическое представление не всегда можно считать оправданным. Поэтому экспериментально полученную зависимость $\varepsilon_y(x)$ (график, таблица) представляют математическим выражением не более чем с тремя членами (нулевая и первая степень и некоторый член, представляющий объединение степеней более высокого порядка). Тогда

$$\varepsilon_y(x) = a + bx + \varepsilon_{y\text{í}}(\text{õ}) \approx a + bx + \Delta_{y\text{í}},$$

где $\varepsilon_{y\text{í}}(x)$ – погрешность от нелинейности в функции измеряемой величины; $\Delta_{y\text{í}} = \max\{\varepsilon_{y\text{í}}(x)\}$ – предельное значение погрешности от нелинейности.

Разложение экспериментально полученной зависимости $\varepsilon_y(x)$ на три составляющие осуществляют путем аппроксимации ее прямой a+bx , например, используя метод наименьших квадратов. Напомним, что он заключается в вычислении двух параметров a и b таких, что сумма квадратов отклонений исследуемой зависимости от прямой (a+bx) будет минимальной. Приближенно это можно интерпретировать следующим образом: площадь между частью кривой, находящейся выше прямой и самой прямой, должна быть равна площади между прямой и частью кривой, находящейся ниже этой кривой.

Параметры a и b дают характеристику двум составляющим погрешности:

a – составляющей, выраженной в абсолютной форме, имеющей размерность выходной величины, и независящей от входной величины (аддитивная погрешность);

bx – составляющей, выраженной в абсолютной форме, имеющей размерность выходной величины, и прямопропорциональной входной величине (мультипликативная погрешность).

Параметр b имеет размерность чувствительности. Смысл его заключается в том, что он представляет собой абсолютную погрешность чувствительности, т.е. отклонение реальной чувствительности от номинальной ($b = S_{\text{р}} - S$).

Третья составляющая – погрешность от нелинейности. Её представляют в виде некоторого максимально возможного отклонения от аппроксимирующей прямой – предельным значением $\Delta_{y\text{н}}$.

Часто погрешность функции преобразования приводят ко входу, т.е. выражают в единицах входной величины. Переход осуществляют через номинальную чувствительность:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\varepsilon_y(x)}{S}.$$

Тогда

$$\varepsilon_x(x) = A + Bx + \Delta_{xi},$$

где $A=a/S$; $B=b/S$; $\Delta_{xi} = \Delta_{yi} / S$.

Очевидно A и Δ_{xi} имеют размерность измеряемой величины; B – безразмерная величина.

Параметр A – есть абсолютное значение аддитивной погрешности, приведенной ко входу. Параметр B – есть относительное значение мультипликативной погрешности. Заметим, что в относительной форме мультипликативная погрешность не зависит от измеряемой величины. Отсюда следует важный для метрологической практики вывод: аддитивную погрешность следует выражать в абсолютной форме, а мультипликативную – в относительной.

Как уже неоднократно отмечалось, зависимость $\varepsilon_y(x)$, либо $\varepsilon_x(x)$, как правило, получают экспериментальным путем. При метрологическом анализе вновь создаваемых средств измерений и контроля либо при анализе уже существующих средств априори могут быть известны некоторые пределы (чаще допускаемые), в которых может находиться истинное значение той или другой составляющей погрешности.

Следовательно, истинное значение аддитивной составляющей

$a \in \left[-\Delta_y; \Delta_y\right]$ либо $A \in \left[-\Delta_x; \Delta_x\right]$,

где Δ_y и Δ_x – пределы допускаемых значений аддитивной погрешности, приведенной к выходу либо ко входу.

Истинное значение мультипликативной погрешности

$$B \in [-\delta; \delta],$$

где δ – пределы допускаемых значений мультипликативной погрешности, выраженной в относительной форме.

Пределы допускаемых аддитивной и мультипликативной погрешностей можно графически представить в виде, показанном на рисунке 2.3.

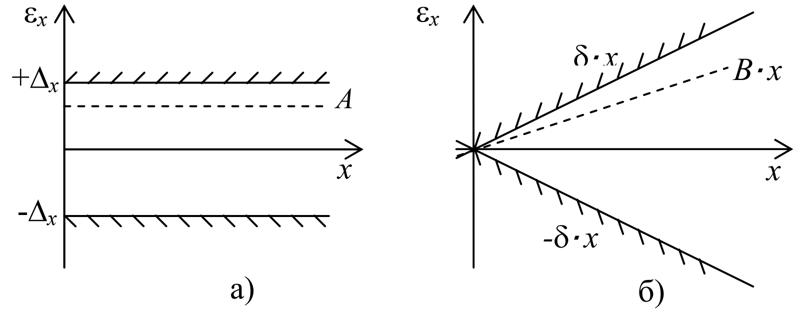


Рисунок 2.3 – Графики пределов допускаемых значений аддитивной (а) и мультипликативной (б) погрешностей

Пунктирные прямые *A* и *Bx* показывают, где, например, могут находиться истинные аддитивная и мультипликативная погрешности.

Выразив мультипликативную погрешность в относительной форме, становится бессмысленно говорить о приведении ко входу или выходу. Мультипликативная погрешность характеризует погрешность чувствительности.

Математическая метрологическая модель представляет собой три независимых выражения для

$$\Delta_{x\text{адд}} \text{ или } \Delta_{y\text{адд}};$$

$$\delta_{\text{мульт}};$$

$$\Delta_{x\text{нел}} \text{ или } \Delta_{y\text{нел}}.$$

Для наглядности будем использовать также структурную метрологическую модель. Для линейного звена она имеет вид, показанный на рисунке 2.4.

Звено (1+δ) получено из следующих соображений. Так как $S_p - S = b$, а $b/S = B$, то реальная чувствительность

$$S_\delta = S + b = \frac{S+b}{S}S = S(1+\frac{b}{S}) = S(1+B).$$

Переходя от истинной погрешности чувствительности *B* к предельной δ, получим

$$S_р = S(1+\delta).$$

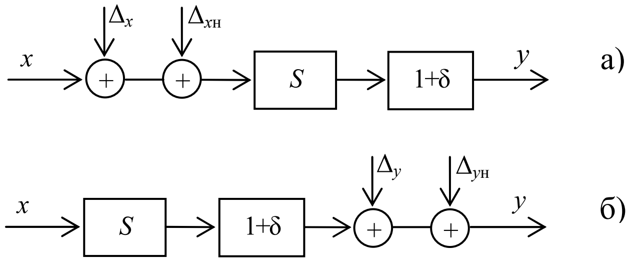


Рисунок 2.4 – Модель с приведенными ко входу погрешностями (а) и модель с приведенными к выходу погрешностями (б)

Следовательно для модели а), представленной на рисунке 2.4, реальная функция преобразования запишется в виде

$$y = S(1+\delta)(x+\Delta).$$

2.2 Модели последовательного соединения звеньев

2.2.1 Соединение двух звеньев

Построение метрологических моделей цепей из линейных звеньев начнем с рассмотрения двух последовательно включенных звеньев, имеющих номинальные функции преобразования $y_1=S_1x_1$ и $y_2=S_2x_2$. Принимая выходную величину первого звена равной входной величине второго звена, т.е. $y_1=x_2$, получим

$$y_2=S_2(x_2)=S_2(y_1)= S_2(S_1x_1)= S_1S_2x_1.$$

Опустим индексы у входных и выходных величин и получим для последовательного соединения двух звеньев общую номинальную функцию преобразования

$$y=S_1S_2x.$$

Будем считать, что каждое звено может иметь как аддитивную, так и мультипликативную погрешности, причем независимые друг от друга. Тогда структурная метрологическая модель двух звеньев примет вид, показанный на рисунке 2.5, на котором Δ_1 и Δ_2 – предельные аддитивные погрешности звеньев, приведенные к собственным входам, δ_1 и δ_2 – мультипликативные погрешности звеньев, выраженные в относительной форме.

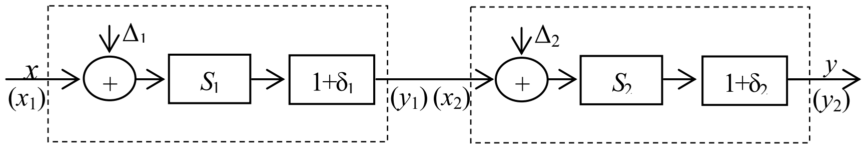


Рисунок 2.5 – Метрологическая модель последовательно соединенных звеньев

Реальные функции преобразования звеньев представляются следующим образом:

$$y_1 = S_1(1+\delta_1)(x_1+\Delta_1)\,,$$

$$y_2 = S_2(1+\delta_2)(x_2+\Delta_2)\,.$$

Согласно принципу суперпозиции выходная величина y будет состоять из трех слагаемых, по числу входов на модели, т.е. x, Δ_1, Δ_2. Тогда

$$y_{\text{р}} = xS_1(1+\delta_1)S_2(1+\delta_2) + \Delta_1 S_1(1+\delta_1)S_2(1+\delta_2) +$$

$$+\Delta_2 S_2(1+\delta_2) = xS_1S_2(1+\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2) +$$

$$\Delta_1 S_1S_2(1+\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2) + \Delta_2 S_2(1+\delta_2).$$

Произведениями погрешностей пренебрегаем в силу их малости. Следовательно,

$$y_{\text{р}} = xS_1S_2(1+\delta_1+\delta_2) + \Delta_1 S_1S_2 + \Delta_2 S_2.$$

Так как номинальная функция преобразования $y = xS_1S_2$, то, абсолютная погрешность функции преобразования

$$y_{\text{р}} - y = xS_1S_2(\delta_1+\delta_2) + \Delta_1 S_1S_2 + \Delta_2 S_2\,.$$

Эта погрешность приведена к выходу.

Приведенная ко входу погрешность -

$$\frac{y_{\text{р}} - y}{S_1S_2} = x(\delta_1+\delta_2) + \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{S_1}\,.$$

Из полученных выражений следует общая формула для мультипликативной погрешности

$$\delta = \delta_1 + \delta_2\,.$$

Общая формула для аддитивной погрешности, приведенной ко входу, будет иметь вид

$$\Delta_x = \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{S_1},$$

а приведенная к выходу – $\Delta_y = \Delta_1 S_1 S_2 + \Delta_2 S_2$.

2.2.2 Отражение в модели погрешности от несогласования

Приведенное в 2.2.1 выражение точно описывает процесс преобразования только в том случаек, если при подсоединении к выходу одного звена входа другого звена чувствительности звеньев не изменятся (т.е. чувствительности ненагруженного и нагруженного звена одинаковы). В противном случае возникает ошибка модели, которая в данном случае носит название погрешности от несогласования. Она обусловлена тем, что $y_1 \neq x_2$.

Приведем примеры возникновения погрешности согласования.

При подключении к электронному генератору нагрузки, имеющей некоторый импеданс, может измениться постоянная времени, определяющая частоту колебаний.

При измерении температуры объекта, имеющего относительно небольшую массу, масса термометра или термопары может повлиять на температуру объекта.

При подключении нагрузки к валу электродвигателя его скорость вращения уменьшится.

Рассмотрим более подробно случай, когда информативным параметром является электрическое напряжение. Пусть последовательно включены два линейных звена. Сигнал на выходе первого, а следовательно и на входе второго – напряжение.

Электрическая схема замещения выходной части первого и входной части второго звена показана на рисунке 2.6. На ней обозначены $R_{\text{вых}1}$ и $R_{\text{вх}2}$ – выходное и входное сопротивления звеньев; $U_{\text{вых}1} = S_1 x$ – выходное напряжение первого звена (S_1 – чувствительность, x – входная величина); $U_{\text{вх}2}$ – входное напряжение второго звена; y- выходная величина второго звена ($y = S_2 U_{\text{вх}2}$).

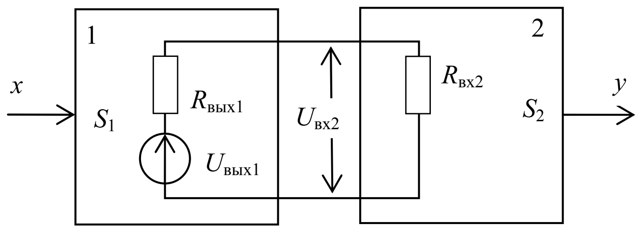


Рисунок 2.6 – К расчету погрешности от несогласования

Очевидно, если $R_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}1} \neq 0$ и $R_{\hat{a}\tilde{o}2} \neq \infty$, то $U_{\hat{a}\tilde{o}2} \neq U_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}1}$, т.е. $\acute{o}_1 \neq \tilde{o}_2$. Следовательно, $y \neq S_1 S_2 x$. Отношение $U_{\hat{a}\tilde{o}2} / U_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}1}$, которое в идеальном случае должно быть равно единице, назовем коэффициентом согласования звена 1 и звена 2 и обозначим S_{12}. Из рассмотрения электрической схемы получим

$$S_{12} = \frac{U_{\hat{a}\tilde{o}2}}{U_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}1}} = \frac{R_{\hat{a}\tilde{o}2}}{R_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}1} + R_{\hat{a}\tilde{o}2}}.$$

Отличие от единицы этого коэффициента определяет действительное значение абсолютной погрешности от несогласования $\varepsilon_{12} = S_{12} - 1$. Но так как коэффициент идеального согласования равен единице, то абсолютная и относительная погрешности от несогласования могут быть приняты равными между собой

$$\eta_{12} = \varepsilon_{12} / S_{12} \approx \varepsilon_{12}.$$

С учетом того, что $R_{вх2} >> R_{вых1}$ получим

$$\eta_{12} = S_{12} - 1 = -R_{\hat{a}\hat{u}\tilde{o}1} / R_{\hat{a}\tilde{o}2}.$$

Погрешность согласования всегда имеет отрицательный знак, а по характеру зависимости от входной (измеряемой) величины *x* является мультипликативной при условии неизменяющихся значений входного и выходного сопротивлений. Мультипликативная в данном случае означает, что относительное значение погрешности не зависит от величины *x* и равно

η_{12}, а абсолютное значение – прямо пропорционально величине x и в единицах входной величины равно $\varepsilon_{\tilde{o}} = \eta_{12}\tilde{o}$.

Математическая модель соединения двух звеньев с учетом погрешности от несогласования представляется одним из следующих выражений:

$$\acute{o} = S_1 S_2 S_{12} x,\ y = S_1 S_2 (1 + \eta_{12}) x \quad \text{èëè} \quad \acute{o} = S_1 S_2 \left(1 - R_{\text{âûõ1}} / R_{\text{âõ2}}\right) x$$

На практике значения сопротивлений $R_{\text{вых}}$ и $R_{\text{вх}}$ точно неизвестны. Чаще всего их задают верхней границей для выходного сопротивления и нижней границей – для входного, т.е. с односторонним допуском. Это означает, что реальные значения сопротивлений есть случайные величины и находятся в интервалах

$$R_{\text{âûõ1}} \in \left[0; R_{\text{âûõ â}}\right] \ \text{è} \ R_{\text{âõ2}} \in \left[R_{\text{âõ í}}; \infty\right].$$

Следовательно, погрешность от несогласования также случайная величина, у которой верхняя граница $\eta_{\text{â}} = 0$ и нижняя граница $\eta_{\text{í}} = -R_{\text{âûõ â}} / \mathrm{R}_{\text{âõ í}}$. Учитывая, что погрешность смещена в отрицательную область, целесообразно разделить ее на две части: систематическую составляющую $\overline{\eta}_{12} = \eta_{\text{í}}/2$ и центрированную случайную погрешность с симметричными границами $[-\delta_{12}; \delta_{12}]$, где $\delta_{12} = |\eta_{\text{í}}/2|$ – предельное значение случайной погрешности как это показано на рисунке 2.7.

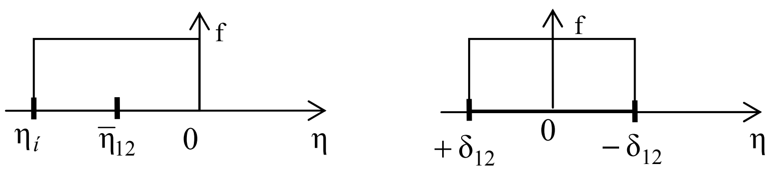


Рисунок 2.7 – Плотности вероятностей погрешностей

Тогда математическая модель принимает вид

$$y = S_1 S_2 \left(1 + \overline{\eta}_{12} + \delta_{12}\right) x,$$

или пренебрегая произведением $\overline{\eta}_{12}\delta_{12}$

$$\acute{o} = S_1 S_2 \left(1 + \overline{\eta}_{12}\right)\left(1 + \delta_{12}\right)x .$$

В структурной модели звено $\left(1 + \eta_{12}\right)$ заменяется двумя последовательно соединенными звеньями $\left(1 + \overline{\eta}_{12}\right)$ и $\left(1 + \delta_{12}\right)$

Значение $\overline{\eta}_{12}$ при данных допусках на сопротивления известно и поэтому может быть учтено в виде поправки. Погрешность в виде симметричных границ δ_{12} должна учитываться при метрологическом анализе вместе с инструментальными составляющими погрешности.

В случае, когда сопротивления заданы с двусторонними допустимыми границами

$$R_{\text{âûõ}1} \in \left[R_{\text{âûõ í}}; R_{\text{âûõ â}}\right] \text{ è } R_{\text{âõ}2} \in \left[R_{\text{âõ í}}; R_{\text{âûõ â}}\right]$$

погрешность согласования оказывается в границах

$$\eta_{12} \in \left[\eta_{\text{í}}; \eta_{\text{â}}\right]$$

где $\eta_{\text{í}} = -R_{\text{âûõ â}} / R_{\text{âõ í}}$; $\eta_{\text{â}} = -R_{\text{âûõ í}} / R_{\text{âõ â}}$

Следовательно, $\overline{\eta}_{12} = \left(\eta_{\text{í}} + \eta_{\text{â}}\right)/2 ; \delta_{12} = \left|\eta_{\text{í}} - \eta_{12}\right|/2$

Пример.

Задача состоит в том, чтобы определить систематическую и случайную составляющие погрешности от несогласования делителя напряжения и электронного усилителя. Пусть выходное сопротивление делителя $R_{\text{âûõ}} = 10 \pm 0{,}1\,\text{êÎì}$ *, а входное сопротивление усилителя* $R_{\text{âõ}} =\geq 1\,\text{ÌÎì}$ *. Тогда нижняя и верхняя граница относительной погрешности от несогласования*

$$\eta_{\text{í}} = \frac{R_{\text{âûõ â}}}{R_{\text{âõ í}}} = -\frac{10{,}1 \cdot 10^3}{10^6} \approx -0{,}01 \text{ èëè } -1\%, \eta_{\text{â}} = -\frac{R_{\text{âûõ í}}}{R_{\text{âõ â}}} = 0$$

Следовательно,

$$\overline{\eta}_{12} = -0{,}005 \text{ èëè } -0{,}5\%; \delta_{12} = \pm 0{,}005 \, \textit{èëè} \pm 0{,}5\%$$

Структурная метрологическая модель, учитывающая инструментальные погрешности и погрешности от несогласования приведена на рисунке 2.8.

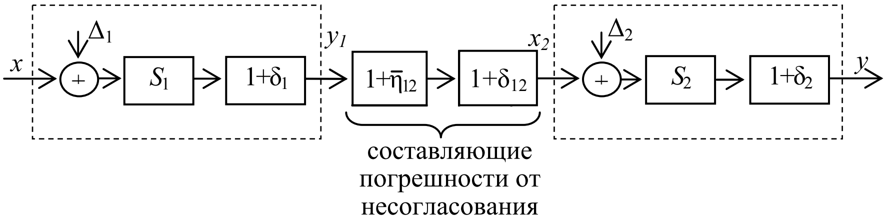


Рисунок 2.8 – Структурная метрологическая модель, учитывающая погрешность от несогласования звеньев

Общая мультипликативная погрешность соединенных звеньев:

$$\delta = \underbrace{(\delta_1+\delta_2+\delta_{12})}_{\text{предельные значения } (\pm)} + \underbrace{\bar{\eta}_{12}}_{\text{отрицательное значение}},$$

где δ_{12} – предельная составляющая погрешности от несогласования (границы, в которых находится неучтенная, т.е. случайная составляющая), вычисляемая по формуле $\delta_{12} = \pm\left(\eta - \eta_{\text{н}}\right)/2$.

$\bar{\eta}_{12}$ – систематическая составляющая погрешности от несогласования (учтенная составляющая, всегда отрицательная), вычисляемая по формуле $\bar{\eta}_{12} = \left(\eta_{\text{в}} + \eta_{\text{н}}\right)/2$

Обычно погрешности суммируются под квадратным корнем, но это допустимо только для предельных (случайных) погрешностей. Систематическая погрешность под корень не вводится. Тогда

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_{12}^2} + \bar{\eta}_{12}.$$

Подробно правила суммирования изложены в четвертой части настоящего учебного пособия.

2.2.3 Соединение нескольких звеньев

Номинальная функция преобразования n последовательно соединенных звеньев, очевидно имеет вид:

$$y = x\prod_{i=1}^{n} S_i ,$$

где y и x – выходная и входная величины; n – число звеньев; S_i - чувствительности звеньев.

Математическая метрологическая модель такой цепи – это совокупность формул для мультипликативной и аддитивной погрешностей соединения:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i ,$$

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_i \prod_{j=i}^{n} S_j \right) \text{ или } \Delta_x = \Delta_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\Delta_i \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{S_j} \right),$$

где δ – мультипликативная предельная погрешность соединения; δ_i – мультипликативные предельные относительные погрешности звеньев; Δ_y и Δ_x – аддитивные предельные абсолютные погрешности соединения, приведенные к выходу и ко входу; Δ_i – аддитивные предельные абсолютные погрешности звеньев, приведенные к их входам.

Если для мультипликативной погрешности формула очевидна, то для аддитивной студенту придется вывести эти формулы самостоятельно. Подскажем лишь, что основываясь на формулах, приведенных в конце 2.2.1 произведениями погрешностей пренебрегают.

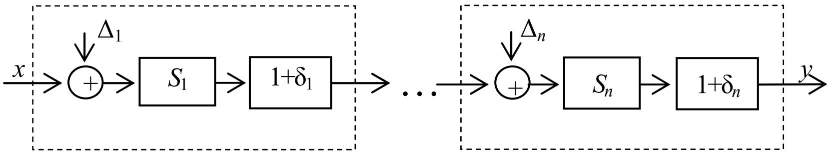
Если число слагаемых в сумме больше двух, то пользуются формулой квадратического сложения, позволяющей получить наиболее вероятные границы. (По аналогии с суммированием средних квадратических отклонений – σ. Известно, что дисперсия суммы, есть сумма дисперсий $D_\Sigma = \sum D_i$, тогда $\sigma = +\sqrt{D} = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots}$).

При $n \geq 3$ уже целесообразно проводить геометрическое сложение

$$\delta = \sqrt{\sum (\delta_i)^2} \text{ или } \Delta = \sqrt{\sum (\Delta_i)^2} .$$

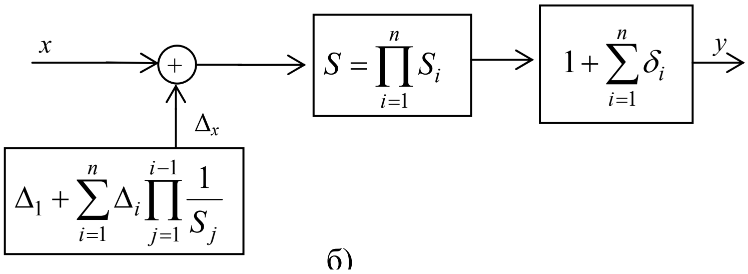
При обычном сложении получается завышенный результат, в то время как реальная погрешность значительно меньше полученной суммы.

Структурная метрологическая модель строится по аналогии с моделью соединения двух звеньев (рисунок 2.9).



а)

или



б)

Рисунок 2.9 – Два варианта (а и б) структурной метрологической модели

2.3 Параллельное соединение звеньев

Функциональная модель двух параллельно соединенных звеньев показана на рисунке 2.10. Результаты преобразования двух звеньев складываются (но могут и вычитаться).

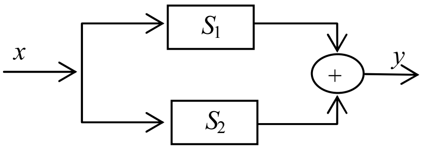


Рисунок 2.10 – Функциональная модель параллельного соединения звеньев

Общая функция преобразования

$$y = y_1 + y_2 = S_1 x_1 + S_2 x_2 = (S_1 + S_2)x \text{, т.к. } x_1 = x_2 .$$

Следовательно, общая чувствительность $S = S_1 + S_2$.

Применяя уже принятые ранее приемы, строят метрологическую структурную модель (рисунок 2.11).

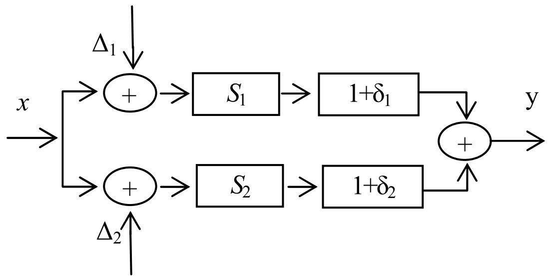


Рисунок 2.11 – Структурная метрологическая модель параллельно соединенных звеньев

Реальная функция преобразования описывается выражением:

$$y_{\text{р}} = \left[S_1(1+\delta_1) + S_2(1+\delta_2)\right]x + \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 .$$

Тогда приведенная к выходу абсолютная погрешность функции преобразования

$$y_\delta - y = (S_1\delta_1 + S_2\delta_2)x + \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 = \Delta S ,$$

а приведенная ко входу погрешность

$$\frac{y_{\text{р}} - y}{S_1 + S_2} = \left(\frac{S_1}{S_1 + S_2}\delta_1 + \frac{S_2}{S_1 + S_2}\delta_2\right)x + \frac{S_1}{S_1 + S_2}\Delta_1 + \frac{S_2}{S_1 + S_2}\Delta_2 .$$

Общая мультипликативная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta S}{S_1 + S_2} = \frac{S_1}{S_1 + S_2}\delta_1 + \frac{S_2}{S_1 + S_2}\delta_2 .$$

Аддитивная погрешность, приведенная к выходу, определяется выражением:

$$\Delta_y = \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 .$$

Аддитивная погрешность, приведенная ко входу,

$$\Delta_x = \frac{S_1}{S_1 + S_2}\Delta_1 + \frac{S_2}{S_1 + S_2}\Delta_2 .$$

Если $S_1 = S_2$ (номинально), то $\delta = 0{,}5(\delta S_1 + \delta S_2)$ и $\Delta_x = 0{,}5(\Delta_1 + \Delta_2)$.

Структурная метрологическая модель рассматриваемого соединения представлена на рисунке 2.12.

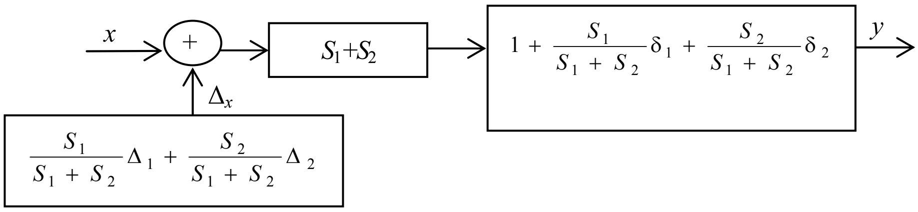


Рисунок 2.12 – Структурная метрологическая модель параллельного соединения звеньев

2.4 Модель замкнутой цепи линейных звеньев

Как известно, функция преобразования соединения двух звеньев, представляющих контур с отрицательной обратной связью, имеет вид:

$$y = \frac{S_1}{1+S_1S_2}x\,,$$

где S_1 – чувствительность звена в прямой цепи; S_2 – чувствительность звена обратной связи. При этом имеется ввиду, что $S_1S_2>0$.

Структурная функциональная модель такой цепи представлена на рисунке 2.13.

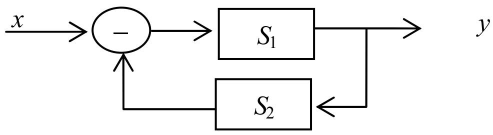


Рисунок 2.13 – Структурная функциональная модель замкнутой цепи с обратной связью

Функция преобразования в случае, если $S_1S_2>>1$, может быть заменена выражением $y=\frac{1}{S_2}x$ с ошибкой модели, равной $-\frac{1}{S_1S_2}=\eta$, которая всегда отрицательна.

Эта ошибка определяется разностью:

$$\frac{S_1}{1+S_1S_2}x - \frac{1}{S_2}x\,.$$

Для получения относительного значения погрешности эту разность делят на точную функцию и в результате получают ошибку модели $\eta = -1/S_1 S_2$.

Рассмотрим влияние погрешностей звеньев на общую погрешность, т.е. построим метрологическую модель.

Основываясь на принципе суперпозиции и независимости аддитивной и мультипликативной погрешностей между собой, построение модели проведем последовательно, а потом просуммируем.

Структурная метрологическая модель, учитывающая только мультипликативные погрешности, показана на рисунке 2.14.

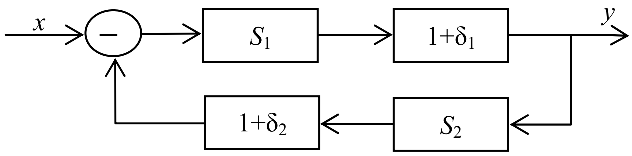


Рисунок 2.14 – Вариант структурной метрологической модели, учитывающей мультипликативные погрешности звеньев

На структурной метрологической модели δ_1 и δ_2 мультипликативные погрешности звеньев (или относительные погрешности чувствительностей S_1 и S_2).

Реальная функция преобразования, учитывающая погрешности звеньев, представляется в следующем виде

$$y_{\text{р}} = \frac{S_1(1+\delta_1)}{1 + S_1 S_2 (1+\delta_1)(1+\delta_2)} x .$$

Самый простой путь получения выражения для общей мультипликативной погрешности следует из предположения, что $S_1S_2 >> 1$, а следовательно и $S_1 S_2 (1+\delta_1)(1+\delta_2) >> 1$.

Тогда

$$y_{\text{р}} \approx \frac{1}{S_2(1+\delta_2)} x = \frac{1}{S_2}(1+\delta_2) x .$$

В полученном выражении для принятых условий оказалось, что погрешность δ_1 (звена в прямой цепи) не влияет на результат.

Теперь обратим внимание на то, что выражение $(1+\delta_2)$ оказалось в числителе, т.е. мы приняли $\frac{1}{1+\delta} = 1+\delta$. Этот прием был уже использован в 1.5.4. Напомним формулу Ньютона (простейшая из формул разложения функции в ряд Тейлора). Согласно этой формуле

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

В нашем случае $x = \delta$ – погрешность, которая явно меньше 1.

Пренебрегая малыми второго ($x^2 = \delta^2$), третьего ($x^3 = \delta^3$) и более высокого порядка, получим $\frac{1}{1+x} = 1 - x$. Но так как δ – предельная погрешность, т.е. верхняя и нижняя границы $\pm\delta$, то запишем $\frac{1}{1+\delta} = 1+\delta$. Что и требовалось доказать.

Вернемся к выражению для $\acute{o}_\delta$. Так как $\frac{1}{S_2} = S$ – общая чувствительность, то δ_2 есть погрешность этой чувствительности, или мультипликативная погрешность $\delta = \delta_2$.

Отсюда следует важный вывод: общая мультипликативная погрешность равна погрешности звена обратной связи и не зависит от погрешности звена в прямой цепи (если S_1S_2>>1).

Рассмотрим случай, когда нельзя принять сделанные допущения, которые были приняты в предыдущих рассуждениях.

Преобразуем полученное ранее выражение для реальной функции преобразования:

$$y_{\text{р}} = \frac{S_1(1+\delta_1)}{1+S_1S_2(1+\delta_1)(1+\delta_2)}x = \frac{S_1(1+\delta_1)}{1+S_1S_2(1+\delta_1+\delta_2)}x.$$

Произведением $\delta_1\delta_2$ пренебрегли.

Определим абсолютную погрешность функции преобразования, приведенную к выходу:

$$y_\delta - y = S_1x\left(\frac{(1+\delta_1)}{1+S_1S_2(1+\delta_1+\delta_2)} - \frac{1}{1+S_1S_2}\right) =$$

$$= S_1 x \frac{(1+\delta_1)(1+S_1S_2) - 1 - S_1S_2(1+\delta_1+\delta_2)}{[1+S_1S_2(1+\delta_1+\delta_2)](1+S_1S_2)} \approx$$

$$\approx S_1 x \frac{1+S_1S_2+\delta_1+\delta_1S_1S_2 - 1 - S_1S_2 - \delta_1S_1S_2 - \delta_2S_1S_2)}{(1+S_1S_2)^2} \approx$$

$$\approx \frac{S_1 x}{(1+S_1S_2)^2}(\delta_1 - \delta_2S_1S_2).$$

Перейдем к относительной погрешности:

$$\delta = \frac{y_{\text{р}} - y}{y} = \frac{\delta_1}{1+S_1S_2} + \frac{S_1S_2\delta_2}{1+S_1S_2}.$$

Знак "плюс" появился потому, что рассматриваем предельные погрешности (±). Всегда ±, но пишем +. Опять, пренебрегая малыми высших порядков, упростим выражение и получим в окончательном виде

$$\delta = \frac{\delta_1}{S_1S_2} + \delta_2 \quad \text{или} \qquad \delta = \delta_2 .$$

Пример.

Если известно, что $\dfrac{\delta_1}{S_1S_2} \le 0{,}1\delta_2$, *то должно быть* $S_1S_2 \ge 10\dfrac{\delta_1}{\delta_2}$.

Следовательно, если погрешность прямого звена и влияет, то уменьшается в S_1S_2 *раз, что чаще всего приводит к малой второго или более высокого порядка.*

Рассмотрим метрологическую модель, учитывающую аддитивные погрешности звеньев. Структурная модель показана на рисунке 2.15.

Выражение для приведенной к выходу аддитивной погрешности получим из структурной модели, приравняв $x = 0$, ибо аддитивная погрешность не зависит от входной величины. Из рассматриваемой структурной схемы следует, что

$$\Delta_y = \Delta_1S_1 - \Delta_yS_1S_2 - \Delta_2S_1S_2 .$$

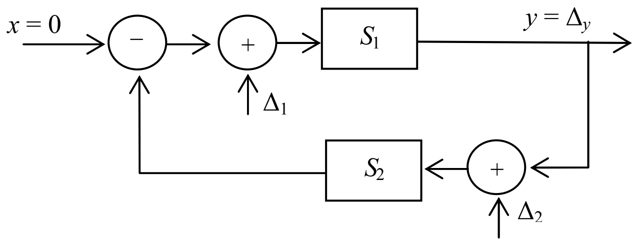


Рисунок 2.15 – Вариант структурной метрологической модели, учитывающей аддитивные погрешности звеньев.

Откуда выражение для аддитивной погрешности, приведенной к выходу примет вид

$$\Delta_y = \frac{\Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_1 S_2}{1 + S_1 S_2}.$$

Учитывая, что $S_1 S_2 >> 1$ и то, что погрешности рассматриваются предельные (±), получим приведенную к выходу аддитивную погрешность соединения звеньев

$$\Delta_y = \frac{\Delta_1}{S_2} + \Delta_2.$$

Приведем погрешность ко входу: $\Delta_x = \frac{\Delta_y}{S}$, но так как $S = \frac{1}{S_2}$,

$$\Delta_x = \Delta_1 + \Delta_2 S_2.$$

Погрешность первого звена полностью входит в общую аддитивную погрешность, а погрешность второго – путем приведения через коэффициент S_2.

Математическая метрологическая модель, как это известно, это две формулы:

$\delta = \delta_2$ (мультипликативная погрешность);

$\Delta_x = \Delta_1 + \Delta_2 S_2$ (аддитивная погрешность).

Наиболее полной метрологическая модель будет, если кроме инструментальных погрешностей звеньев, будут учтены ошибки модели. В нашем случае это ошибка от замены выражения для общей чувствительности $S = \dfrac{S_1}{1 + S_1 S_2}$ выражением $S = \dfrac{1}{S_2}$.

Так как ошибка модели всегда отрицательная, то целесообразно, как и при рассмотрении погрешности от несогласования, представить её двумя частями:

$\eta_{м} = -\dfrac{0{,}5}{S_1 S_2}$ – систематическая погрешность модели;

$\delta_{м} = \pm\dfrac{0{,}5}{S_1 S_2}$ – предельные значения случайной погрешности модели.

С учетом всех рассмотренных составляющих получим структурную метрологическую модель в виде, приведенном на рисунке 2.16.

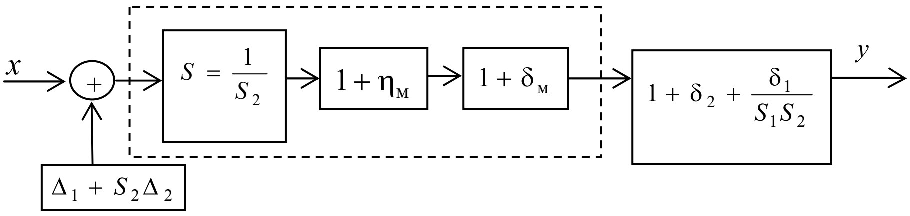


Рисунок 2.16 – Полная структурная метрологическая модель цепи с отрицательной обратной связью

Перейдем к математическому представлению метрологической модели в части мультипликативной погрешности:

$$\delta = \sqrt{\delta_2^2 + \left(\frac{\delta_1}{S_1 S_2}\right)^2 + \delta_{м}^2} + \eta_{м}.$$

Если принята модель $S = 1/S_2$ с допустимой точностью, то составляющей $\delta_1 / S_1 S_2$ можно пренебречь. Тогда

$$\delta = \sqrt{\delta_2^2 + \delta_{м}^2} + \eta_{м}.$$

Что касается аддитивной погрешности, то к ней ничего не добавляется: $\Delta_1 + S_2 \Delta_2$.

Общими выводами можно считать следующие:

– соединения линейных звеньев образуют цепь, которая также является линейной;

– метрологические модели соединений звеньев могут включать как инструментальные (аддитивную, мультипликативную и нелинейную) погрешности звеньев, так и ошибки моделей, возникающие при замене выражений функций преобразования на приближенные и учитывающие погрешности от несогласования звеньев;

– метрологические модели строят в математическом виде (две или три формулы погрешностей всей цепи в зависимости от погрешностей звеньев) и/или в структурной форме, полностью отражающей формулы математической модели, но обладающей большей наглядностью, а, следовательно, улучшающей понимание сути метрологического анализа.

3 Оценивание погрешностей функций преобразования

Введение

Одним из разделов теории точности, рассматриваемой в фундаментальной дисциплине "Метрология", является методология оценивания степени влияния на результирующую точность отклонений от номинальных значений (погрешностей) параметров компонентов, из которых состоят те или другие измерительные устройства. Математическими моделями измерительных устройств, а также различного рода процессов, в том числе измерительных, являются математические зависимости, т.е. функции. Поэтому задача, с позиции математики, сводится к оцениванию погрешностей функций по известным значениям аргументов (параметров) и отклонений их от номинальных значений (погрешностей). Эти отклонения реально всегда имеют место и определяются неточностью изготовления, нестабильностью, влиянием внешних факторов и т. п.

Таким образом ставится задача по оцениванию погрешностей функций приближенных аргументов.

Решение этой математической задачи имеет большое значение для инженерной практики.

Например, возьмем электронный прибор, предназначенный для измерения интервалов времени (времени между двумя импульсами). В этом приборе есть кварцевый генератор. Пусть отклонение частоты генератора от номинального значения на 0,1% приводит к погрешности измерения интервала времени также на 0,1%. В этом случае говорят, что погрешность частоты генератора полным весом входит в погрешность измерения. Так называемый весовой коэффициент (коэффициент связи) равен единице.

В этом же приборе имеется источник напряжения питания. Пусть расчет и эксперимент показали, что отклонение напряжения питания от номинального значения на 10 % приводит к погрешности измерения интервала времени на 0,05 %. В этом случае весовой коэффициент равен 0,05/10 = 1/200 = 0,005.

Из примера следует, что получить погрешность измерения не выше заданного значения можно лишь в том случае, если генератор будет иметь погрешность не более требуемой погрешности измерения и даже меньше. А к источнику напряжения питания требования предъявляются относительно невысокие.

Поставим задачу снабдить инженера методологией вычисления погрешностей функции по заданным погрешностям аргументов. Эта задача является задачей анализа, в результате решения которой определяют весовые коэффициенты влияния. При этом, как правило, задача имеет единственное решение, полагая, что номинальные значения аргументов и характеристики погрешностей известны.

Решается подобная задача при анализе возможностей имеющегося варианта проекта разрабатываемого измерительного устройства или процесса.

Если окажется, что полученная в результате вычислений погрешность функции не удовлетворяет установленным в техническом задании на проектирование требованиям, то производят доработку проекта или разрабатывают новый. И так до тех пор, пока очередной вариант не даст положительный результат. Выбор окончательного варианта основывается на использовании итераций, следовательно, анализ есть составная часть задачи синтеза.

Ниже рассматриваются два метода решения поставленной задачи оценивания погрешностей функций.

Первый – простейший, основанный на применении элементарных математических операций, второй – на применении дифференциального исчисления. Оба метода дают одни и те же результаты. А какой из них лучше использовать покажет практика решения конкретной задачи.

3.1 Структурная модель измерительного преобразователя

Измерительный прибор (вольтметр, термометр, манометр и др.) или измерительный преобразователь (термопара, усилитель, шунт и др.) могут быть представлены математической моделью в общем виде:

$$y = f\left(x; a_1,..., a_n; \psi_1,..., \psi_k; t; T\right) + \Delta\left(x; T,...\right),$$

где y – выходная величина (результат измерения или преобразования); x – входная измеряемая (преобразуемая) величина; $a_1,\ldots a_n$ – параметры компонентов, из которых собрано измерительное устройство; $\psi_1,\ldots,\psi_k$ – внешние влияющие величины (температура, влажность, вибрация и другие условия эксплуатации); t – время от начала измерения или преобразования до момента снятия результата; T – время от начала эксплуатации (выпуска с предприятия-изготовителя) до момента данного использования; $\Delta(x,\ T,\ldots)$ – ошибка модели, обусловленная представлением реальных (действительных) зависимостей идеализированными, а также неучтенными факторами.

Такую модель будем называть математической функциональной моделью измерительного устройства.

В структурном виде она представлена на рисунке 3.1.

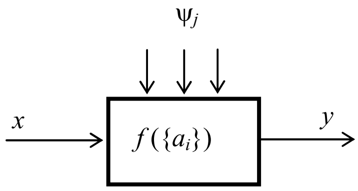


Рисунок 3.1 – Структурная модель измерительного устройства

Для обеспечения требуемой точности измерения, в общем случае преобразования величины x в величину y, очевидно, необходимо, чтобы:

– вид функции был известен и стабилен, что достигается минимизацией ошибки модели;

– параметры $a_1,\ldots a_n$ были определенными и стабильными, что достигается соответствующей точностью их изготовления;

– внешние влияющие величины $\psi_1,\ldots,\psi_k$ находились в заданных границах, что достигается тем, что эксплуатируется измерительное устройство в контролируемых условиях;

– время t, затрачиваемое на процесс преобразования, было не менее времени установления переходных процессов, что достигается соответствующей организацией измерения;

– время T от начала эксплуатации до момента данного применения было не более гарантированного времени точного функционирования (например, межповерочного интервала).

Несоблюдение перечисленных условий, которые выражаются отклонениями указанных факторов от их номинальных (установленных) значений, очевидно, приводит к появлению погрешности результата измерения или преобразования.

Получить зависимость погрешности Δ_y от изменений тех или других факторов есть задача метрологического анализа, в результате решения которой получают метрологическую модель.

Предположим, стоит задача определить влияние погрешностей компонентов на погрешность результата преобразования. В общем виде эта погрешность запишется выражением:

$$\Delta_y = F\left(x; \Delta_{a1}, \ldots, \Delta_{an}\right),$$

где $\Delta_{a1}, \ldots, \Delta_{an}$ - погрешности параметров компонентов измерительного преобразователя (прибора).

Пример.

Магнитоэлектрический вольтметр. Его приближенная функция преобразования (модель), выраженная через параметры компонентов, имеет вид(см. 1.5.6):

$$\beta = SU_{\text{ð}} = \frac{2nr\ell B}{W} \frac{1}{R_{\text{ä}} + R_{\text{ð}}} U_x ,$$

где β *– угол поворота рамки, с которой жестко связана стрелка отсчетного устройства;* S *– чувствительность вольтметра;* U_x *– измеряемое напряжение;* r *– радиус рамки (половина нерабочей стороны);* ℓ *– длина проводника (рабочая сторона рамки);* B *– индукция в зазоре магнитной системы;* n *– число витков рамки;* W *– удельный противодействующий момент пружины;* $R_{\text{д}}$ *– сопротивление добавочного резистора;* $R_{\text{р}}$ *– сопротивление рамки.*

Из приведенной формулы следует, что погрешность измерения таким вольтметром будет зависеть от того, насколько действительные параметры отличаются от номинальных значений. В данном случае это r, ℓ, B, W, $R_{\text{д}}$ *и* $R_{\text{р}}$. *Число витков рамки из рассмотрения опускаем, ибо сколько их намотали при изготовлении, столько их будет и при эксплуатации.*

Это модель. Реально, например, параметры B и W зависят от угла поворота рамки β прежде всего в начале и конце диапазона как показано на рисунке 3.2. Модель не учитывает также трение в системе керн - подпятник и другие факторы.

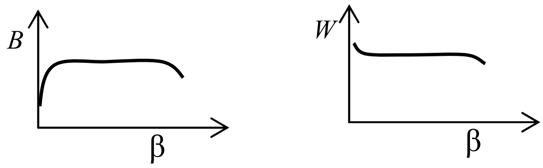


Рисунок 3.2 – Реальные функции $\hat{A}(\beta)$ и $W(\beta)$

Обратимся к косвенным измерениям.

Пусть имеется объект, некоторое свойство которого предстоит определить косвенным методом путем измерения ряда величин (параметров), характеризующих объект и поддающихся прямым измерениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, объем резервуара, имеющего определенную форму, определяют путем измерения ряда линейных и угловых величин и вычисления по формуле, представляющей геометрическую модель объекта.

Математическая модель косвенного измерения, в общем виде, представляет собой следующую запись:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где y – измеряемое свойство объекта.

Структурная функциональная модель косвенного измерения показана на рисунке 3.3.

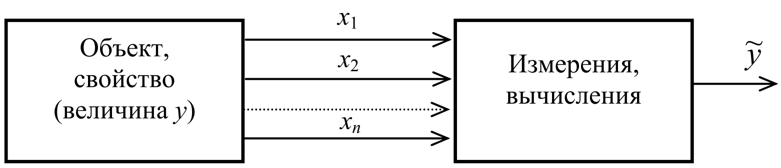


Рисунок 3.3 – Структурная модель косвенного измерения

Каждый из измеренных параметров обладает погрешностью. Следовательно, и результат косвенного измерения также будет с погрешностью. Поэтому, с точки зрения математики, решается задача аналогичная выше рассмотренной, т.е. находится погрешность функции по известным погрешностям аргументов:

$$\Delta_y = F(\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, ..., \Delta_{xn}),$$

где Δ_{xi} – погрешности прямых измерений.

Еще одно направление деятельности, где необходимо решать задачу оценивания погрешностей функций. Это проектирование и анализ состояния производственных технологических процессов, на выходе которых должна быть продукция с заданными по точности техническими характеристиками. Обобщенная структурная модель технологического процесса аналогична рассмотренной и представлена на рисунке 3.4.

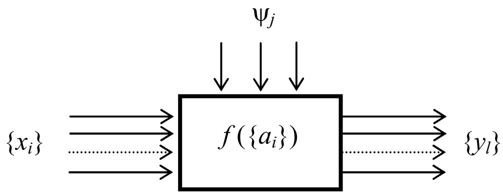


Рисунок 3.4 – Обобщенная структурная модель технологического процесса

Здесь измеряемыми входами процесса является множество параметров материалов и комплектующих изделий $\{x_i\}$. Параметры (режимы) самого технологического процесса характеризуются совокупностью величин $\{a_k\}$, а функционирование процесса определяется функцией *f*. Внешние факторы, влияющие на точность процесса, обозначены на рисунке множеством $\{\Psi_j\}$. Параметры готовой продукции, как выходы процесса, обозначены совокупностью $\{y_l\}$.

Для каждого выходного параметра разрабатывают математическую функциональную модель, которая, в общем случае, может быть представлена в следующем виде:

$$y_l = f(\{x_i\}; \{a_k\}; \{\Psi_j\}).$$

В приведенном выражении, с целью упрощения, опущены многие факторы, которые могут существенно влиять на точность функционирования процесса, например, время и ошибка модели.

В отличие от процесса измерения, задачей которого является определение оценок неизвестной измеряемой величины, в технологическом процессе неизвестных параметров не должно быть, и задачей является воспроизведение продукции (обеспечить заданный выход) с заданной точностью.

Очевидно, погрешность каждого из параметров продукции будет функцией g погрешностей параметров материалов Δ_{xi}, параметров процесса Δ_{ak} и отклонений от номинальных значений внешних влияющих факторов $\Delta\Psi_j$:

$$\Delta_{y1} = g\left(\{\Delta_{xi}\};\{\Delta_{ak}\};\{\Psi_j\}\right).$$

3.2 Погрешности арифметических преобразований

3.2.1 Сложение

Поставим задачу определить погрешность функции, представляющей собой арифметическую сумму

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

где x_i – приближенные аргументы (слагаемые) с известными предельными погрешностями Δx_i.

Очевидно, что точная погрешность суммы есть сумма точных погрешностей слагаемых:

$$\varepsilon_y = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{xi} ,$$

где ε_{xi} – точные абсолютные погрешности слагаемых.

По определению предельная абсолютная погрешность Δ приближенного числа есть положительное число, содержащее одну-две значащие цифры, которое больше или равно модулю точной погрешности, т.е. $\Delta \geq |\varepsilon|$. Это означает, что точная погрешность находится в симметричном интервале $-\Delta < \varepsilon < \Delta$, или $\varepsilon \in [-\Delta;\Delta]$.

Перейдем от точных погрешностей к предельным. Запишем очевидные соотношения:

$$\left|\varepsilon_y\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_{xi}\right| \text{ и далее } \left|\varepsilon_y\right| \le \sum_{i=1}^{n}\Delta_{xi} \ .$$

Следовательно, можно принять

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n}\Delta_{xi} \ .$$

Относительная предельная погрешность суммы определяется выражением

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|\ y\ |} = \frac{\sum\Delta_{xi}}{\sum x_i} = \frac{\sum\left(x_i \cdot \delta_{xi}\right)}{\sum x_i},$$

где δ_{xi} – относительные предельные погрешности слагаемых.

Пример.

Складываются три числа, являющиеся результатами измерения линейных размеров (в мм), с существенно различными абсолютными предельными погрешностями:

$$y = 65{,}3 + 4{,}75 + 0{,}262.$$

Это, фактически, косвенное измерение.

Предельные абсолютные погрешности каждого слагаемого (погрешности измерений), включающие инструментальную составляющую и погрешность округления, соответственно равны 0,1, 0,01 *и* 0,001. *Тогда предельная погрешность суммы*

$$\Delta_y = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}111 \ (мм).$$

Учитывая, что цифровые значения предельных погрешностей должны содержать одну – две значащих цифры, следует принять $\Delta_y =$ 0,12 *либо даже* $\Delta_y =$ 0,10*, *так как вторая и третья погрешности оказываются малыми второго и третьего порядка.*

Результат измерения суммы следует записать не $y = 70{,}312$ *(мм), а* $70{,}3 \pm 0{,}1$ *(мм).*

Очевидно, при измерении третьего размера, результат которого оказался равным 0,262, *не имеет смысла устанавливать погрешность равной* 0,001 *мм.*

---

* Почему возможен вариант 0,10, т.е. число меньшее суммы, будет объяснено в разделе, посвященной суммированию погрешностей. А пока лишь скажем, что для приближения по вероятности к истинному значению производят вычисление корня квадратного из суммы квадратов, результат которого всегда меньше арифметической суммы.

3.2.2 Вычитание

Вычитание есть алгебраическое сложение, когда какие-то из слагаемых отрицательные. Поэтому правило определения погрешности результата остается тем же.

Покажем это. Итак, имеется функция $y = x_1 - x_2$.

Точная погрешность разности

$\varepsilon_y = \varepsilon_{x1} - \varepsilon_{x2}$,

где ε_{x1} и ε_{x2} - точные погрешности x_1 и x_2.

Но точные значения и даже их знаки неизвестны. Реально может оказаться, что знаки их противоположны, и тогда погрешности не вычитаются, а складываются. Так может быть. Поэтому оперируют предельными погрешностями, которые считаются известными.

Следовательно,

$$\Delta_y = \Delta_{x1} + \Delta_{x2}.$$

Относительная предельная погрешность разности

$$\delta_y = \frac{\Delta_{x1} + \Delta_{x2}}{|y|} = \frac{\Delta_{x1} + \Delta_{x2}}{|x_1 - x_2|}$$

Обратим внимание на особенность вычитания близких чисел. Разность может быть соизмеримой с абсолютными погрешностями аргументов, тогда относительная погрешность окажется значительной.

Косвенные измерения или алгоритмы измерений, основанные на измерении двух величин, а потом вычисления их разности, по выше указанной причине, организовывать не целесообразно. Нужно стараться непосредственно измерять разность, например, напряжений. Сложное математическое выражение, содержащее разность следует преобразовать так, чтобы эта разность была бы в неявном виде.

3.2.3 Умножение

Пусть $y = x_1 \cdot x_2$.

Определим Δ_y и δ_y, считая заданными Δ_{x1} и Δ_{x2}.

Для упрощения положим, что $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Реальная точная функция с учетом погрешностей примет вид:

$$y_p = (x_1 + \varepsilon_{x1})(x_2 + \varepsilon_{x2}) = x_1 x_2 + \varepsilon_{x1} x_2 + \varepsilon_{x2} x_1 + \varepsilon_{x1}\varepsilon_{x2}.$$

Точная погрешность функции

$$\varepsilon_{\text{у}} = y_p - y_{\text{н}} = \varepsilon_{x1} x_2 + \varepsilon_{x2} x_1 + \varepsilon_{x1}\varepsilon_{x2}.$$

Считая ε_{x1} и ε_{x2} малыми первого порядка, отбросим произведение $\varepsilon_{x1} \cdot \varepsilon_{x2}$, как малую второго порядка и перейдем к модулям точных погрешностей. Тогда

$$\left|\varepsilon_y\right| \le x_1 \left|\varepsilon_{x2}\right| + x_2 \left|\varepsilon_{x1}\right|.$$

Заменяя модули точных погрешностей предельными абсолютными погрешностями, получим верхнюю границу точной погрешности, которую можно принять за предельную абсолютную погрешность произведения двух сомножителей:

$$\Delta_y = x_1 \Delta_{x2} + x_2 \Delta_{x1}.$$

Формула относительной погрешности произведения имеет вид:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|\text{y}|} = \frac{|x_1|\Delta_2 + |x_2|\Delta_1}{|x_1 x_2|} = \delta_1 + \delta_2.$$

Рассмотрим произведение произвольного числа сомножителей. Пусть имеется произведение из n сомножителей

$$\text{y} = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

Предельная абсолютная погрешность произведения

$$\Delta_y = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \cdot \Delta x_n + x_1 x_2 \ldots x_{i-1} \Delta x_i x_{i+1} \ldots x_n + \ldots + \Delta x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

,

или

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} x_j \right).$$

При этом предполагается, что все сомножители положительные. Если же есть отрицательные, то их нужно заменить их модулями.

Определим предельную относительную погрешность произведения

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{xi}}{|x_i|}.$$

Но так как $\frac{\Delta_{xi}}{|x_i|} = \delta_{xi}$, поэтому

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \delta_{xi}$$

Применим правило вычисления погрешности произведения на другие математические операции.

Умножение на точное число:

$$y = Ax,$$

где A – число не имеющее погрешности, т.е. $\Delta_A = 0$ и $\delta_A = 0$.

Тогда абсолютная приведенная погрешность

$$\Delta_y = \Delta_A \cdot x + A \cdot \Delta_x = A \cdot \Delta_x.$$

Относительная-

$$\delta_y = \delta_A + \delta_x = \delta_x.$$

Возведение в степень:

$$y = x^n = \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

где $x_1 = x_2 = ... = x_i = ... = x_n = x$.

Очевидно,

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_1} \cdot x^{n-1},$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = ... = \Delta_{x_i} = ... = \Delta_{x_n} = \Delta_x$.

Тогда

$$\Delta_y = n\Delta_x x^{n-1}$$

$$\delta_y = n\delta_x$$

Извлечение квадратного корня:

$$y = \sqrt{x}\ .$$

Подставляя в предыдущие формулы $n = 0{,}5$, получим

$$\Delta_y = 0{,}5\Delta_x x^{0{,}5-1} = \frac{1}{2}\Delta_x \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\delta_y = \frac{1}{2}\delta_x.$$

3.2.4 Деление

Пусть $y = \dfrac{x_1}{x_2}$. Поставим задачу найти Δ_y и δ_y по известным Δx_1 и Δx_2 .

Точная абсолютная погрешность

$$\varepsilon_y = \frac{x_1 + \varepsilon_{x1}}{x_2 + \varepsilon_{x2}} - \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1\varepsilon_{x2} - x_2\varepsilon_{x1}}{x_2^2 + x_2\varepsilon_{x2}}.$$

Учитывая, что $x_2^2 >> x_2\varepsilon_{x2}$, и переходя к предельным погрешностям, получим:

$$\Delta_y = \frac{x_2\Delta x_1 + x_1\Delta x_2}{x_2^2}.$$

Относительная предельная погрешность результата деления

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta y}{x_1}\cdot x_2 = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}.$$

Откуда следует

$$\delta_y = \delta_{x1} + \delta_{x2}.$$

Пример 1.

Косвенным методом измеряется ускорение свободного падения g путем измерения времени t падения предмета (шарика) с некоторой высоты h, которая также должна быть измерена.

Расчетная формула для ускорения имеет вид

$$g = \frac{2h}{t^2}\,.$$

В соответствии с правилами расчёта погрешностей арифметических действий запишем для относительной погрешности расчётного значения ускорения:

$$\delta g = \delta h + 2\delta t\,.$$

Пусть прямые измерения дали следующие результаты:

t = 2,2 ± 0,1 *с, т.е.* Δt =0,1 *с;*

h = 25,0 ± 0,05 *м, т.е.*Δh = 0,05 *м*.

Тогда расчётное значение ускорения:

$$g = \frac{2 \cdot 25м}{(2{,}2\text{с})^2} = 10{,}33\, м/с^2\,.$$

Предельные относительные погрешности прямых измерений соответственно равны:

$$\delta h = \frac{\Delta h}{h} = \frac{0{,}05}{25{,}0} = 0{,}002 \text{ или } 0{,}2\ \%;$$

$$\delta t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0{,}1}{2{,}2} = 0{,}045 \text{ или } 4{,}5\ \%.$$

Относительная предельная погрешность измерения ускорения равна:

δg = 0,002 + 2· 0,045 = 0,092 *или* 9,2 %.

Отсюда делается важнейший для практики вывод, что для получения более высокой точности необходимо, прежде всего, повышать точность измерения времени. Повышение точности измерения высоты может не дать, практически, повышения точности измерения ускорения.

С учётом полученной погрешности, которую можно принять равной δg = 10 %, *получим окончательный результат косвенного измерения:*

g = 10,3 ± 1,0 *м/с*^{2} ,

ибо 10% от 10 *м/с*^{2} есть 1 *м/с*^{2}.

Пример 2.

Рассмотрим пример вывода зависимости погрешности функции от погрешности аргументов, используя выше полученные правила для арифметических действий.

Пусть задана функция

$$y = \sqrt{\frac{x_1 + bx_2}{c}},$$

где b и c – постоянные числа, не имеющие погрешностей; x_1 *и* x_2 *– приближенные аргументы, характеризующиеся предельными погрешностями* Δx_1 *и* Δx_2 *или* δx_1 *и* δx_2.

Применим простой приём, заключающийся в переходах от относительных погрешностей к абсолютным и наоборот, чтобы иметь возможность осуществлять суммирование абсолютных погрешностей сумм или относительных погрешностей произведений.

Представим заданную функцию в виде

$$y = \sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \sqrt{x_1 + bx_2}\ .$$

Тогда

$$\delta y = \delta\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right) + \delta\left(\sqrt{x_1 + bx_2}\right).$$

Первая составляющая погрешности равна нулю, так как значение c под корнем постоянное число. Поэтому

$$\delta_y = \delta\left(\sqrt{x_1 + bx_2}\right).$$

Заметим, что δ *и далее* Δ *не умножается на содержимое скобок. В скобках аргумент функции* δ *или* Δ.

Для квадратного корня погрешность равна

$$\delta y = \frac{1}{2}\delta\left(x_1 + bx_2\right).$$

Преобразуем в правой части погрешность относительную в погрешность абсолютную:

$$\delta y = \frac{1}{2}\Delta\left(x_1 + bx_2\right)\Big/\left(x_1 + bx_2\right) = \frac{1}{2\left(x_1 + bx_2\right)}\left(\Delta x_1 + b\Delta x_2\right)$$

.

И вновь, возвращаясь к относительным погрешностям, получим окончательно:

$$\delta y = \frac{x_1\delta x_1 + bx_2\delta x_2}{2\left(x_1 + bx_2\right)}\ .$$

3.3 Оценивание погрешностей функций приближенных аргументов

Перейдем к более общему методу оценивания погрешностей функций, основанному на применении дифференциального исчисления.

3.3.1 Функция одной переменной

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная дифференцируемая функция (рисунок 3.5).

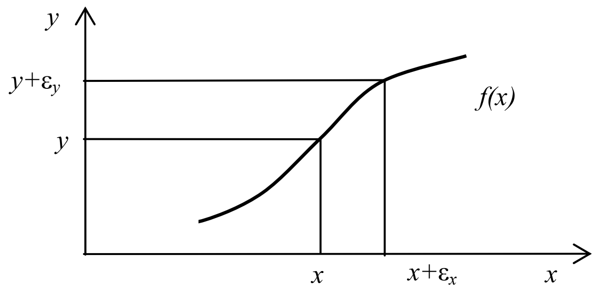


Рисунок 3.5 – Функция одной переменной и ее погрешность

Если аргумент x имеет погрешность, то и функция y будет иметь погрешность. Будем считать, что сама зависимость не изменяется и известна.

Тогда согласно формуле Лагранжа о конечных приращениях

$$y + \varepsilon_y = f(x + \varepsilon_x) = f(x) + \varepsilon_x f'(x^*),$$

где $x^* \in [x; x + \varepsilon_x]$.

Следовательно, точная абсолютная погрешность

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x f'(x^*).$$

Примем $x^* = x$, тогда с некоторым допущением

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x f'(x).$$

Допущение связано с заменой x^* на x. Более точное выражение для конечного приращения может быть получено, если воспользоваться формулой Тейлора, в которую входят производные второй и более высоких степеней

$$f(x+\varepsilon_x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\varepsilon_x+\frac{f''(x)}{2!}\varepsilon_x^2+\ldots\frac{f^n(x)}{n!}\varepsilon_x^n+\ldots$$

Сумму членов второй и высших степеней будем считать погрешностью (ошибкой) модели. Формула Тейлора позволяет оценить эту ошибку.

Переходя к предельным погрешностям, получим формулу:

$$\Delta_y=|f'(x)|\Delta_x=\left|\frac{dy}{dx}\right|\Delta_x .$$

Здесь и ранее погрешность рассматривается в конкретной точке диапазона x, поэтому и первая производная определяется в этой же точке.

Формула предельной относительной погрешности имеет вид:

$$\delta_y=\frac{\Delta_y}{y}=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right||x|\delta_x .$$

Из формулы видно, что относительная погрешность функции пропорциональна логарифмической производной функции

$$(ln\, y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)} .$$

Логарифмирование с последующим дифференцированием является распространенным приемом.

Пример.

Получен результат измерения x с некоторой погрешностью. Требуется вычислить функцию $y=x^n$ и определить погрешность функции.

Предельная абсолютная погрешность определяется выражением:

$$\Delta y=\left|\frac{dy}{dx}\right|\Delta x=\left|nx^{n-1}\right|\Delta x ,$$

а предельная относительная -

$$\delta y=|\ n\ |\delta x .$$

Значение n – любое положительное или отрицательное число.

Из приведенных выражений следуют те выводы, которые мы сделали выше при рассмотрении погрешностей арифметических действий возведения в степень и извлечения квадратного корня:

$$\Delta\left|x^{2}\right| = \left|2x^{2-1}\right|\Delta_{x} = 2\left|x\right|\Delta_{x},\ \delta(x^{2}) = 2\delta x;$$

$$\Delta\left|\sqrt{x}\right| = \left|0{,}5x^{0{,}5-1}\right|\Delta_{x} = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|\Delta_{x},\ \delta(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\delta x.$$

3.3.2 Функция двух переменных

Пусть $y=f(x_1;x_2)$ – непрерывная дифференцируемая функция в рассматриваемой области аргументов x_1и x_2.

Обратимся вновь к формуле Тейлора. Для функции нескольких переменных формула строится аналогично, только дифференциалы берутся полные. Для двух переменных:

$$f(x_1+\varepsilon_{x1};x_2+\varepsilon_{x2}) = f(x_1;x_2)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{o}_1}\varepsilon_{x1}+\frac{\partial}{\partial\tilde{o}_2}\varepsilon_{x2}\right)f(x_1,x_2)+\ldots$$

Отбрасывая члены второго и высших степеней и переходя к предельным погрешностям, получим:

$$\Delta_{y} = \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_1\\x_2}}\cdot\Delta x_1+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1\\x_2}}\cdot\Delta x_2$$

Частные производные берутся в точке (x_1; x_2).

Эту формулу называют дифференциальной формулой оценки погрешности.

3.3.3 Функция многих переменных

Распространяя полученную в 3.3.2 формулу на произвольное число аргументов, т.е. на функции вида $y=f(x_1, x_2,\ldots x_n)$, получим выражения для погрешностей.

Абсолютная погрешность функции –

$$\Delta_{\acute{o}} = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_1\\x_2\\\ldots\\x_n}}\cdot\Delta x_i,$$

где частные производные представляют собой, как правило, размерные коэффициенты.

Относительная погрешность функции –

$$\delta_{\acute{o}} = \frac{\Delta \acute{o}}{\acute{o}} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\tilde{o}_i}{y} \right| \cdot \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\substack{x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n}} \cdot \delta x_i \ ,$$

где выражение перед относительной погрешностью аргумента является безразмерным весовым коэффициентом.

В практике используют квадратичное сложение, т.е. берется корень квадратный из суммы квадратов составляющих

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2} \ .$$

3.3.4 Обобщения и пример

Формулы, полученные в 3.2 при рассмотрении погрешностей арифметических операций, совпадают с выражениями полученными на основе дифференциального исчисления.

Формулы погрешностей простейших функций, к которым сводятся многие функции, описывающие измерительные процедуры, приведены в таблице.

Функция	Частные производные	Предельная абсолютная погрешность	Предельная относительная погрешность
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$f'_{x_1} = f'_{x_2} = \ldots = f'_{x_n} = 1$	$\sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i \delta x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i$
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	$f'_{x_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j$	$\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{x_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j \right)$	$\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$
$\frac{x_1}{x_2}$	$f'_{x_1} = \frac{1}{x_2}$ $f'_{x_2} = \frac{x_1}{x_2^2}$	$\frac{x_1 \Delta_{x_2} + x_2 \Delta_{x_1}}{x_2^2}$	$\delta x_1 + \delta x_2$
$A \cdot x$	$f'_x = A$	$A \Delta_x$	δx
x^n	$f'_x = n x^{n-1}$	$n x^{n-1} \Delta_x$	$n \delta x$

$\sqrt[m]{x}$	$f_x' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$	$\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} \Delta_x$	$\frac{1}{m}\delta x$

Пример.

Косвенным методом измеряют мощность в соответствии с формулой $P=I^2R$.

Считается, что известны результаты прямых измерений $\widetilde{I}$, $\widetilde{R}$ *и погрешности* δI *и* δR.

Путем дифференцирования определим абсолютную погрешность измерения мощности:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial P}{\partial R}\Delta R = 2IR \cdot \Delta I + I^2 \Delta R\ .$$

Аналогично определяется относительная погрешность

$$\delta P = \frac{\Delta P}{P} = 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} = 2\delta I + \delta R\ .$$

Пусть $\widetilde{I}$ =15,6 *мА* = $15{,}6\cdot10^{-3}$*А*; $\delta I = 0{,}005$;

$\widetilde{R}$ =10,2 *кОм* = $10{,}2\cdot10^{3}$ *Ом*; $\delta R = 0{,}01$.

Расчетный результат измерения мощности определяется числом

$$\widetilde{P} = \widetilde{I}^{\,2}\widetilde{R} = \left(15{,}6\cdot10^{-3}\right)^2\cdot 10{,}2\cdot10^{3} = 2{,}482272\ Вт\ .$$

Относительная погрешность измерения мощности по алгебраическому правилу суммирования равна

$$\delta P = 2\cdot 0{,}005 + 0{,}01 = 0{,}02,\ \textit{èëè}\ \ \delta P\% = 2\%\ ;$$

а по квадратическому -

$$\delta P = \sqrt{4\left(\delta I\right)^2 + \left(\delta R\right)^2} = 0{,}014\ ,\ \textit{или}\ \ \delta P\% = 1{,}4\%\ .$$

Чтобы оценить погрешность измерения в абсолютном значении, определим сначала абсолютные погрешности измерения тока и сопротивления:

$$\Delta I = \delta I \cdot \widetilde{I} = 0{,}005\cdot15{,}6 = 0{,}078\ \textit{мА} = 78\cdot10^{-6}\textit{А},$$

$$\Delta R = \delta R \cdot \widetilde{R} = 10{,}2\cdot0{,}01 = 0{,}102\ \textit{кОм} = 102\ \textit{Ом}.$$

Тогда абсолютная погрешность измерения мощности будет равна

$$\Delta P = 2 \cdot 15{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 10{,}2 \cdot 10^{3} \cdot 78 \cdot 10^{-6} + \left(15{,}6 \cdot 10^{-3}\right)^{-2} \cdot 102 \approx 0{,}05 \text{ Âò}$$

либо ΔP=0,35 Вт при геометрическом суммировании.

Таким образом, результат измерения мощности запишется следующим образом

$$\widetilde{P} \pm \Delta P = \left(2{,}48 \pm 0{,}05\right) \textit{Вт или } P \in \left[2{,}43;2{,}53\right] \textit{Вт}$$

Существует правило: последний значащий разряд результата измерения совпадает с последним разрядом погрешности.

3.4 Понятие об обратной задаче теории погрешностей

В техническом задании (ТЗ) на проектирование измерительного устройства указывают предельную погрешность функции преобразования. Задача состоит в том, чтобы так подобрать (назначить) погрешности параметров компонентов устройств, т.е. аргументов функции преобразования, чтобы погрешность функции оказалась не более заданной.

Первоначально решают задачу анализа в общем виде, т.е. получают функциональную математическую модель разрабатываемого измерительного устройства в виде:

$$y = f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$$

где y – выходная величина; x_i – параметры компонентов.

На ее основе строят метрологическую модель

$$\Delta y = F\left(\Delta x_1; \Delta x_2; \ldots; \Delta x_n\right).$$

где Δy – погрешность функции; Δx_i – погрешности компонентов.

Число аргументов n, как правило, более одного, поэтому задача не имеет единственного решения и поэтому применяют поэтапное приближение.

На практике используют метод равных влияний. Он состоит в том, что принимается соглашение так выбирать предельные погрешности аргументов, чтобы все слагаемые в сумме выражения для предельной абсолютной погрешности функции (см. 3.3.3) имели одинаковое значение:

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 = \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 = \ldots \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right| \Delta x_n = \frac{\Delta y}{n}.$$

Отсюда следует выражение для предельных погрешностей аргументов:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n\left|\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right|}.$$

Если предполагается использовать не алгебраическое, а геометрическое суммирование погрешностей (корень квадратный из суммы квадратов), то делить в полученной формуле следует не на *n*, а на $\sqrt{n}$.

Полученные по этому методу предельные погрешности могут оказаться не все достижимыми при конструировании и изготовлении. В таких случаях приходится отступать от соглашения. Корректировку проводят исходя из имеющихся в наличии комплектующих, возможностей настройки, стоимости и т.д.

Другим вариантом метода равных влияний является соглашение о том, чтобы были равны между собой слагаемые в сумме выражения для предельной относительной погрешности функции. Тогда

$$\delta x_i = \frac{\delta y}{n\left|\dfrac{x_i}{y}\right| \cdot \left|\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right|}.$$

Здесь также возможна корректировка.

Пример.

В процессе проектирования канала преобразования температуры θ_x *в цифровой код* N_y *многоканальной измерительной системы ставится задача установить предельные погрешности параметров компонентов, входящих в состав измерительного канала.*

Пусть требуется обеспечить общую погрешность преобразования

$$\delta N_y = 0{,}005,\ \text{ò.å.}\,0{,}5\%.$$

Для выбранной структуры измерительного канала математическая модель принята в виде:

$$N_y = S_{\text{Ä}} S_{\text{Ò}} S_{\text{Ê}} S_{\text{Ä}} S_{\text{Ö}} \theta_x,$$

где $S_{\text{Ä}}$ *– чувствительность датчика;* $S_{\text{Ó}}$ *– чувствительность усилителя (коэффициент усиления);* $S_{\text{Ê}}$ *– чувствительность коммутатора (номинально* $S_{\text{Ê}} = 1$*);* $S_{\text{Â}}$ *– чувствительность преобразователя напряжения в интервал времени;* $S_{\text{Ö}}$ *– чувствительность преобразователя интервала времени в цифровой код.*

Тогда

$$\delta N_y = \delta S_{\text{Ä}} + \delta S_{\text{Ó}} + \delta S_{\text{Ê}} + \delta S_{\text{Â}} + \delta S_{\text{Ö}},$$

где δ *– предельные относительные погрешности.*

По методу равных влияний и учитывая, что все весовые коэффициенты равны единице, получим

$$\delta S_{\text{Ä}} = \delta S_{\text{Ó}} = \delta S_{\text{Ê}} = \delta S_{\text{Â}} = \delta S_{\text{Ö}} = \frac{\delta N_y}{n} = \frac{0{,}005}{5} = 0{,}001, \text{ ò.å. } 0{,}1\%$$

.

Если разделим на $\sqrt{n} = \sqrt{5}$*, то получим*

$$\frac{\delta N_y}{\sqrt{n}} \approx 0{,}0022 \approx 0{,}002, \text{ ò.å. } 0{,}2\%.$$

Округлять следует в сторону уменьшения, т.е. в сторону ужесточения требований (это проектирование!).

Далее разработчик анализирует возможность приобретения компонентов с погрешностями не более рассчитанных значений. Предположим, оказалось, что датчиков с погрешностью ниже 0,3% не существует, в тоже время выполнить коммутатор и преобразователь интервала времени в код с погрешностью менее 0,1% и даже меньше не представляет сложности. Исходя из этого разработчик назначает:

$$\delta S_{\text{Д}} = 0{,}003;\ \delta S_{\text{У}} = 0{,}002;\ \delta S_{\text{К}} = 0{,}001;\ \delta S_{\text{В}} = 0{,}001;$$

$$\delta S_{\text{Д}} = 0{,}0005.$$

Осуществим проверку

$$\delta N_y \geq \sqrt{0{,}003^2 + 0{,}002^2 + 0{,}001^2 + 0{,}001^2 + 0{,}0005^2} = 0{,}0039$$

Условие выполнено, т.к. $0{,}0039 \leq 0{,}005$.

4 Суммирование погрешностей

Введение

К суммированию погрешностей, вызванных теми или другими факторами, влияющими на характеристики средств измерений или их компонентов, а также на результат измерительной процедуры, прибегают постоянно при разработке контрольно-измерительной аппаратуры, методик выполнения измерений и контроля, при проведении измерений в процессах исследования объектов, контроля и испытаний, и в ряде других случаев. Во всех предыдущих частях настоящего учебного пособия суммирование погрешностей постоянно использовалось.

При простейших измерениях оператор должен оценивать результирующую погрешность, суммируя погрешность, определяемую установленным классом точности прибора, и, например, температурную погрешность, если окружающая температура отличается от нормальной (например, 20±2°С).

Экспериментатор, испытывая тот или иной объект, проводит массу измерений. Ему приходится учитывать погрешности средств измерений, методические погрешности, погрешности от влияния температуры, влажности, вибрации и т.д.

Проектируя средство измерений разработчик, чтобы удостовериться, что средство измерений будет иметь погрешность не превышающую значения, установленного в техническом задании, суммирует составляющие, определяемые неточностью и нестабильностью параметров компонентов.

Параметры компонентов и внешние влияющие факторы имеют определенные размерности. Абсолютные отклонения параметров от номинальных значений (погрешности), очевидно, имеют те же размерности. Поэтому, чтобы осуществить суммирование их приводят к одной размерности через так называемые весовые (размерные, как правило) коэффициенты. Если стоит задача определить погрешность измерения, то все составляющие приводят к размерности измеряемой величины.

В случае, если слагаемые выражены в относительной форме, то весовые коэффициенты будут безразмерными.

В данном разделе рассматриваются математические правила суммирования. При этом все выводы и формулы представляются в символике абсолютных погрешностей. Если стоит задача суммирования погрешностей в относительной форме, то все привила остаются такими же.

Напомним, что каждая составляющая погрешности обладает погрешностью. Поэтому результирующую (суммарную) погрешность никогда не представляют более чем двумя значащимися десятичными цифрами. Например, 0,015 вместо 0,014875 и т.п.

Если одна из составляющих больше другой в десятки раз, то ей, как правило, пренебрегают. Эта погрешность второго или более высокого порядка малости.

В данном разделе, который посвящен рассмотрению математических правил, приведены ответы на следующие вопросы теории и практики суммирования погрешностей. Как осуществить процедуру суммирования, если составляющие погрешности заданы в виде:

– действительных значений погрешностей, полученных при метрологических испытаниях $\tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\varepsilon}_2$;

– числовых характеристик (математические ожидания и средние квадратические отклонения) погрешностей как случайных некоррелированных величин m_1, σ_1 и m_2, σ_2;

– числовых характеристик (математические ожидания, средние квадратические отклонения и коэффициент корреляции) погрешностей, как случайных коррелированных величин $m_1, \sigma_1; m_2, \sigma_2$ и K_{12};

– предельных (нормированных) значений погрешностей Δ_1 и Δ_2, установленных в документации на компоненты или условия;

– предельных значений с указанием вероятности или интерквантильных значений $\Delta_1; P_1$ и $\Delta_2; P_2$.

– плотностей вероятностей погрешностей $f_1(\varepsilon_1); f_2(\varepsilon_2)$;

4.1 Суммирование действительных значений

Напомним, что действительное значение $\tilde{\varepsilon}$ погрешности есть приближенная оценка истинного значения ε. Получают действительное значение с помощью образцовых средств измерений, которые в свою очередь также обладают погрешностями, но значительно (например, в 5-10 раз) меньшими, чем оцениваемые. Подразумевается, что эти погрешности являются детерминированными величинами, по крайней мере за время метрологических испытаний.

Во время метрологических испытаний, к которым относят поверку и калибровку средств измерений, аттестацию испытательного оборудования, проверку средств контроля, а также при проведении регулировочных работ, предшествующих итоговым приемо-сдаточным испытаниям, пуско-наладочных работ на объекте заказчика, имеют дело с действительными погрешностями, которые могут суммироваться.

Правило сложения таких погрешностей очень простое: производят арифметическое сложение с учетом знака

$$\tilde{\varepsilon}_{\Sigma} = \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\varepsilon}_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varepsilon}_i ,$$

где $i = \overline{1,n}$; n – число слагаемых.

Еще раз обратим внимание на то, что слагаемые, а, следовательно, и сумма обладают некоторыми погрешностями, которые вызваны погрешностями образцовых средств и методов их определения.

Пример.

Имеется три последовательно соединенных прецизионных резистора. Требуется определить погрешность $\tilde{\varepsilon}_{\Sigma}$ *сопротивления всей цепи (суммы сопротивлений резисторов). Пусть абсолютные погрешности каждого резистора определены с помощью образцового омметра и составили соответственно* $\tilde{\varepsilon}_1 = +0{,}27$ Ом, $\tilde{\varepsilon}_2 = -0{,}12$ Ом *и* $\tilde{\varepsilon}_3 = +0{,}0035$ Ом.

Тогда $\tilde{\varepsilon}_{\Sigma}$ = +0,27-0,12+0,0035= +0,1535≈0,15 Ом.

4.2 Суммирование случайных погрешностей, заданных числовыми характеристиками распределений

Пусть погрешность определяется суммой двух составляющих, которые являются случайными величинами. Заданы числовые характеристики плотностей распределения: m_1 – математическое ожидание и σ_1 – среднее квадратическое отклонение первой составляющей и аналогично m_2 и σ_2 –второй.

Числовые характеристики получают опытным путем по результатам ряда измерений, вычисления их средних значений (оценка математического ожидания) и корня квадратного из среднего значения квадратов отклонений единичных значений от их математических ожиданий (оценка среднего квадратического отклонения) по формулам:

$$\tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_i ,$$

$$\tilde{\sigma} = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{m}\right)^2} ,$$

где $\tilde{\varepsilon}_i$ – оценки действительных значений погрешностей единичных измерений; n – число измерений.

Из приведенных формул следует, что заданные для расчета значения m_1, σ_1 и m_2, σ_2 обладают своими погрешностями, определяемыми как погрешностями образцовых средств (во время их опытного определения), так и погрешностью, определяемой конечностью числа измерений (n – никак не бесконечность).

Волнистую линию над обозначением погрешности, означающие оценки, будем опускать для упрощения записей, однако всегда будем помнить, что дело имеем с оценками, или действительными значениями, а не с истинными значениями.

Из теории вероятностей известно, что математическое ожидание суммы случайных величин есть сумма математических ожиданий этих величин; дисперсия суммы случайных некоррелированных величин есть сумма дисперсий, т.е.

$$m_\Sigma = m_1 + m_2;$$

$$D_\Sigma = D_1 + D_2 .$$

Переходя к среднему квадратическому отклонению, получим:

$$\sigma_\Sigma = +\sqrt{D_\Sigma} = +\sqrt{D_1 + D_2}$$

или

$$\sigma_{\Sigma} = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Если случайные погрешности коррелированны и коэффициент корреляции K_{12} известен (также по предыдущим опытным данным), то

$$D_{\Sigma} = D_1 + D_2 + 2K_{12}\sigma_1\sigma_2$$

или

$$\sigma_{\Sigma} = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2K_{12}\sigma_1\sigma_2}\ .$$

Произведение $K_{12}\sigma_1\sigma_2 = \mu_{12}$ называют вторым центральным смешанным моментом. Коэффициент корреляции $K_{12} \in [-1; 1]$.

Если $K_{12} = 0$, то имеем выше рассмотренный случай для некоррелированных составляющих.

Если $K_{12} = 1$, то налицо жесткая корреляция. Это означает, что если одна составляющая погрешности возрастает, то и другая возрастает пропорционально в той же степени. Например, пусть случайность определяется внешним фактором – температурой. Температурные коэффициенты двух компонентов одинаковые. Находятся компоненты в одинаковых температурных условиях. Тогда может оказаться, что на сколько изменилась погрешность параметра одного компонента, настолько изменится и другая, т.е. $K_{12} = 1$. Следовательно

$$\sigma_{\Sigma} = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1 + \sigma_2\ .$$

Для такого особого случая складываются не дисперсии, а средние квадратические отклонения.

Возьмем другой крайний случай $K_{12} = -1$. Среднее квадратическое отклонение суммы определится выражением:

$$\sigma_{\Sigma} = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2} = |\sigma_1 - \sigma_2|\ .$$

Берется модуль разности средних квадратических отклонений, что среднее квадратическое отклонение по определению всегда положительно.

4.3 Суммирование предельных погрешностей

Предельные погрешности на средства измерений и на их измерительные компоненты устанавливаются заводом изготовителем или устанавливаются по результатам метрологических испытаний потребителям. Нормированные предельные погрешности, по сути, есть пределы допускаемых значений истинных погрешностей, определяющих нижнюю $\Delta_н$ и верхнюю $\Delta_в$ границы, в которых должна находиться истинная погрешность. Если вероятность того, что погрешность, находящаяся в установленных границах, не задана, то она принимается равной единице.

Истинная погрешность не известна, поэтому может принять любое значение в установленных границах. Она может быть постоянна (систематическая), относительно медленно изменяться (дрейф) либо представлять собой случайный процесс. Эти тонкости учитывают в своей деятельности метрологи, а для практики, чаще всего, достаточно знания предельных значений погрешностей.

Границы интервала (пределы) чаще всего устанавливают симметричными: $\left[-\Delta;+\Delta\right]$ или $\pm\Delta$. Для упрощения записи знак $\pm$ опускают, но всегда подразумевают. Запись, например, $\Delta = 0{,}1\ мм$ означает, что $\varepsilon \in \left[-0{,}1;+0{,}1\right]мм$.

В формулах для расчета суммы предельных погрешностей всегда ставят знак "плюс":

$$\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i .$$

Очевидно, что результат такого суммирования по вероятности дает завышенный, по отношению к истинному значению, результат. Вероятность того, что все истинные значения суммируемых погрешностей имеют один знак и близки к предельным значениям, очень мала. Поэтому, чтобы получить результат более близкий к реальному, осуществляют не арифметическое, а геометрическое сложение, т.е. используют формулу, имеющую вид как и формула для расчета среднего квадратического отклонения суммы независимых случайных погрешностей:

$$\Delta_\Sigma = +\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2} .$$

Этот прием неоднократно использовался в предыдущих разделах настоящего учебного пособия.

Существенная разница в расчетах по двум формулам может обнаружиться уже при $n = 2$ или $n = 3$.

Пример.

Пусть имеется несколько одинаковых значений предельных погрешностей $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \Delta$. *Их необходимо сложить.*

Сумма двух погрешностей при арифметическом сложении дает $\Delta_\Sigma = 2\Delta$, *при геометрическом –* $\Delta_\Sigma = +\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = +\sqrt{2}\,\Delta = 1{,}4\Delta$. *Разница очевидна.*

Для трех составляющих имеем

$$\Delta_\Sigma = 3\Delta \text{ и } \Delta_\Sigma = +\sqrt{3}\,\Delta = 1{,}7\Delta.$$

Для четырех составляющих –

$$\Delta_\Sigma = 4\Delta \text{ и } \Delta_\Sigma = +\sqrt{4}\Delta = 2\Delta.$$

Следовательно, чем больше число слагаемых, тем целесообразнее суммировать, применяя геометрическое сложение.

4.4 Суммирование интерквантильных погрешностей

Под интерквантильными значениями погрешностей понимают интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение случайной погрешности.

Что такое "квантиль"? Когда говорят "квантиль порядка α", это означает такое значение аргумента интегральной функции распределения $F(\varepsilon)$, при котором функция принимает значение α:

$$\varepsilon_\alpha = \arg_{\varepsilon}\left[F(\varepsilon) = \alpha\right].$$

Если α=0,5, то аргумент представляет собой медиану *Me* закона распределения (или математическое ожидание для симметричных законов):

$$\varepsilon_{0,5} = Me \text{ или } \varepsilon_{0,5} = Me = m.$$

Пусть α=0,95, то квантиль порядка 0,95 определяется выражением:

$$\varepsilon_{0,95} = \arg_{\varepsilon}\left[F(\varepsilon) = 0{,}95\right],$$

откуда следует, что вероятность

$$P\left[\varepsilon \le \varepsilon_{0,95}\right] = F\left(\varepsilon_{0,95}\right) = 0{,}95.$$

Установив вторую (нижнюю границу) в виде квантиля порядка 0,05, получим интерквантильный интервал $\left[\varepsilon_{0,05}; \varepsilon_{0,95}\right]$, в котором случайная величина находится с вероятностью

$$P\left[\varepsilon_{0,05} \langle \varepsilon \langle \varepsilon_{0,95}\right] = 0{,}95 - 0{,}05 = 0{,}90.$$

Интерквантильная оценка погрешности более информативна для практического использования, чем математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (без указания закона распределения) либо математическое ожидание и энтропийное значение. Однако возникают сложности, заключающиеся в том, что невозможно определить интерквантильные интервалы суммы составляющих, не зная законов распределения.

Приближенно эту задачу можно решить для вероятности 0,90. Как показали П.В.Новицкий и И.Н.Зограф нормированные интегральные функции распределения для широкого класса симметричных высокоэнтропийных распределений: равномерного, треугольного, трапецеидального, нормального и некоторых других, в районе 0,05-й и 0,95-й квантилей пересекаются между собой в очень узком интервале значений $z = 1{,}6 \pm 0{,}05$, где $z = \dfrac{\varepsilon - m}{\sigma}$ – нормированная переменная.

На рисунке 4.1 показаны графики нормированных интегральных функций распределения нормального и равномерного законов.

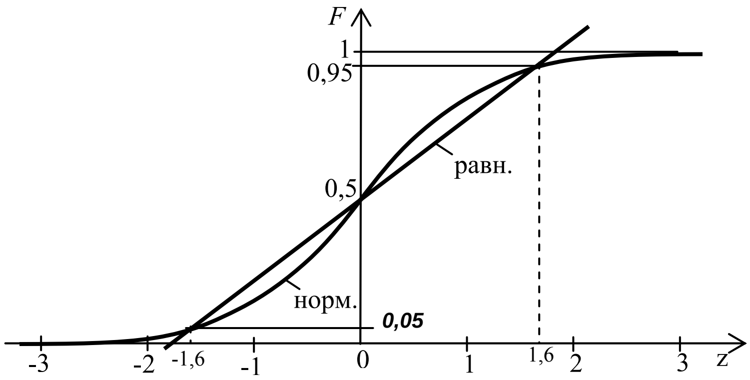


Рисунок 4.1 – Функции распределения нормального и равномерного законов и точки их пересечения.

Из сказанного следует, что с погрешностью 0,05σ можно считать, что 0,05-й и 0,95-й квантили для любых из выше перечисленных распределений определяются выражениями

$$\varepsilon_{0,05} = m - 1{,}6\sigma,$$

$$\varepsilon_{0,95} = m + 1{,}6\sigma.$$

Интерквантильный интервал записывается в виде $[\varepsilon_{0,05}; \varepsilon_{0,95}]$ с вероятностью $P = \alpha_{0,95} - \alpha_{0,05} = 0{,}95 - 0{,}05 = = 0{,}90$.

Случайная (центрированная) составляющая погрешности заключена в интервале $[-1{,}6\sigma; +1{,}6\sigma]$.

По аналогии с предельными погрешностями обозначим $\Delta_{0,9} = 1{,}6\sigma$, что справедливо, как было показано выше для многих законов распределения. При суммировании погрешностей любого сочетания распределений оговоренного класса результирующее распределение будет того же класса. Тогда и для суммы *n*- составляющих

$$(\Delta_{0,9})_{\Sigma} = 1{,}6\sigma_{\Sigma} \quad ,$$

где $\sigma_{\Sigma} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$, а $\sigma_i^2 = \left((\Delta_{0,9})_i / 1{,}6\right)^2$.

Отсюда следует, что

$$\left(\Delta_{0,9}\right)_{\Sigma} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_{0,9}^{2}\right)_{i}}\ .$$

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод, что при нормировании целесообразно устанавливать P=0,90. Отметим, что квантиль $\varepsilon_{0,9}$ экспериментально определяется более точно, чем квантили $\varepsilon_{0,97}$ и $\varepsilon_{0,99}$.

4.5 Композиция законов распределения слагаемых

Исходными данными о суммируемых погрешностях являются их полные вероятностные характеристики, т.е. плотности вероятностей или функции распределения. Задача состоит в том что бы найти закон распределения суммы двух (и далее в общем случае) случайных погрешностей.

Закон распределения суммы случайных величин представляет собой композицию законов распределения слагаемых. Композиция находится с помощью операции, называемой в математике сверткой:

$$f_{\Sigma}(\varepsilon) = f_1(\varepsilon_1) * f_2(\varepsilon_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon_1) f_2(\varepsilon - \varepsilon_1) d\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) f_2(\varepsilon_2) d\varepsilon_2$$

где $f_{\Sigma}(\varepsilon)$ - плотность вероятностей суммы;

$f_1(\varepsilon_1)$ è $f_2(\varepsilon_2)$ – плотности вероятностей слагаемых.

Композиция нескольких законов распределения находится повторным применением операции свертки. Если вид распределения композиции сохраняется, то такой закон называется устойчивым. Например, композиция двух нормальных распределений дает нормальное распределение. К устойчивым относятся также биномиальный закон, закон Паскаля, Пуассона, Коши и др.

В противном случае законы являются неустойчивыми. К примеру, два равномерных закона дают треугольный (Симпсона) или трапецеидальный. Несколько равномерных законов образуют закон, близкий к нормальному.

Предположим, имеются две некоррелированные случайные погрешности, подчиняющиеся нормальному закону, с плотностями $f_1(m_1; \sigma_1; \varepsilon_1)$ и $f_2(m_2; \sigma_2; \varepsilon_2)$. Согласно предыдущим утверждениям

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 \ , \ \sigma_\Sigma = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \ .$$

Вид закона распределения сохраняется (устойчивый закон), а плотность вероятности суммы погрешностей определяется выражением:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon - m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right].$$

Построим графики слагаемых нормально распределенных погрешностей и их композицию (рисунок 4.2) для заданных значений числовых характеристик:

m_1 = 1,5 мВ; m_2 = 2,5 мВ; σ_1 =1 мВ; σ_2 =0,5 мВ.

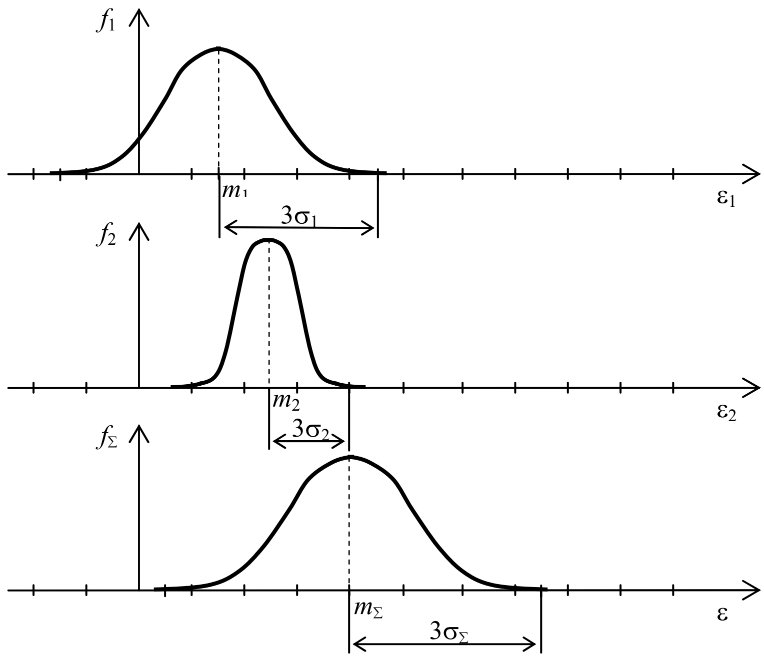


Рисунок 4.2 – Композиция нормальных распределений

Числовые характеристики полученного нормального распределения равны

$$m_{\Sigma} = m_1 + m_2 = 1{,}5 + 2{,}5 = 4 \ мВ \ .$$

$$\sigma_{\Sigma} = +\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = +\sqrt{(1)^2 + (0{,}5)^2} = +\sqrt{1{,}25} = 1{,}12 \ мВ \, .$$

При построении кривых плотностей применено правило "трех сигм", т.е. практически весь размах определяется $2 \cdot 3\sigma$.

Рассмотрим более сложный пример, когда придется обратится к операции свертки. Пусть первая слагаемая погрешность имеет произвольный закон распределения, характеризующийся непрерывной плотностью вероятности $f_1(\varepsilon_1)$. Это может быть нормальный, равномерный или другой закон. Вторая же слагаемая – погрешность с равномерной плотностью:

$$f_2(\varepsilon_2) = \frac{1}{b-a}\Pi(\varepsilon_2; a, b),$$

где $\Pi(\varepsilon_2; a, b)$- селектор интервала, определяемый выражени-

$$\Pi(\varepsilon_2; a, b) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varepsilon \geq \text{a или } \varepsilon \leq b \\ 0, \text{ если } \varepsilon < a \text{ или } \varepsilon > b. \end{cases}$$

ем:

Числовые характеристики такого закона равны

$$m_2 = \frac{b+a}{2}, \ \sigma_2 = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \, .$$

Графически такая плотность распределения имеет вид, показанный на рисунке 4.3.

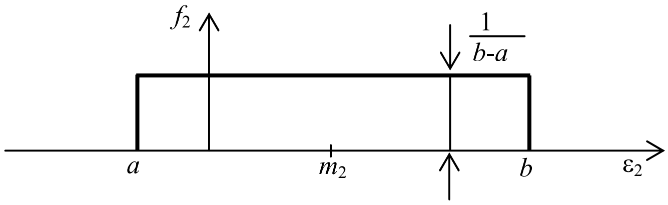


Рисунок 4.3 – Равномерная плотность вероятностей

Плотность вероятности суммы этих двух случайных погрешностей (композиция) определяется выражением:

$$f_{\Sigma}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) \cdot f_2(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon_2 =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\int_{-\infty}^{b} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon_2 - \int_{-\infty}^{a} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon_2 \right].$$

Проведем некоторые математические преобразования:

$$\int_{-\infty}^{b} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon_2 = \int_{-\infty}^{b-\varepsilon} f_1(-\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = -\int_{\infty}^{-b+\varepsilon} f_1(-\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = \int_{-b+\varepsilon}^{\infty} f_1(\varepsilon_2) d\varepsilon_2$$

.

Каждое преобразование следует из свойств определенного интеграла, подробно рассмотренных в курсе математики.

Полученный интеграл разобьем на два:

$$\int_{-b+\varepsilon}^{\infty} f_1(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 - \int_{-\infty}^{-b+\varepsilon} f_1(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 .$$

По определению для нормированной плотности вероятности площадь под кривой равна единице:

$$P\,[-\infty<\varepsilon<\infty]=1.$$

Поэтому первый интеграл равен единице.

Второй интеграл представляет собой интегральную функцию распределения. Из теории вероятностей следует:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{ отсюда } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x^*) dx^* .$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{b} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon_2 = \int_{-b+\varepsilon}^{\infty} f_1(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = 1 - F_1(\varepsilon - b).$$

Аналогичным образом получим

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f_1(\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon = 1 - F_1(\varepsilon - \alpha)$$

Таким образом, композиция любого закона и равномерного имеет вид:

$$f_{\Sigma}(\varepsilon)=\frac{1}{b-a}\left[F_1(\varepsilon-a)-F_1(\varepsilon-b)\right].$$

Из полученного выражения следует, что композиция представляет собой разность смещенных друг относительно друга на (b-a) интегральных функций распределения первой составляющей. Началами координат этих функций являются границы равномерного распределения, т.е. точки a и b. Разность интегральных функций $F_1(\varepsilon$-$a)$ – $F_1(\varepsilon$-$b)$ определяет кривую, вид которой представляет собой плотность вероятности $f_{\Sigma}(\varepsilon)$суммы двух случайных величин. Масштабируя полученную зависимость с помощью коэффициента $1/(b - a)$, получают безусловную плотность вероятности $f_{\Sigma}(\varepsilon)$. Площадь под построенной кривой становиться равной единице.

Приведем пример графического построения композиции.

Пусть первое слагаемое – случайная погрешность с нормальным законом распределения. Вид ее интегральной функции показан на рисунке 4.4.

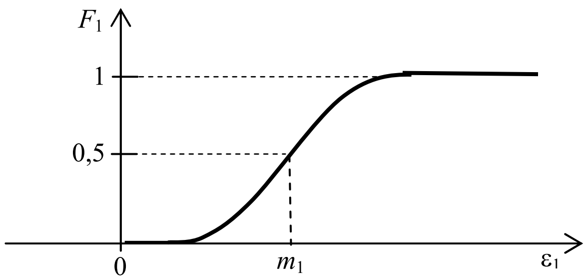


Рисунок 4.4 – Функция нормального распределения

Второе слагаемое – случайная погрешность с равномерной плотностью, показанной на рисунке 4.3.

Произведем построение результирующего закона распределения. Для этого, взяв за основу рисунок 4.3, отметим на оси абсцисс точки a; b; a+m_1; m_2; m_2+m_1; b+m_1. Вокруг точек a+m_1 и b+m_1 построим две кривые центрированной* интегральной функции $F_1(\varepsilon)$ и $F_1(\varepsilon)$, как это показано на рисунке 4.5. Кри-

* - Центрированная функция, т.е. без учета математического ожидания, значение m, уже учтено.

вые функций распределения пересекаются с уровнем 0,5 по оси F при $\varepsilon=a+m_1$ и $\varepsilon=b+m_1$.

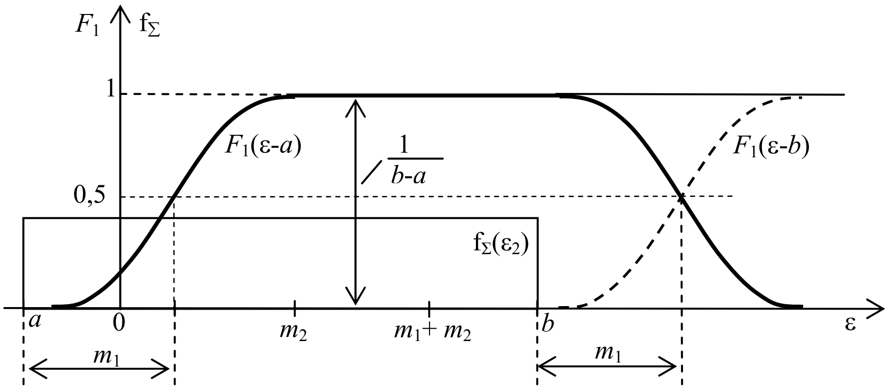


Рисунок 4.5 – Композиция нормального и интегрального распределений

Приведенный пример характерен для цифровых измерительных приборов, у которых погрешность квантования подчиняется равномерному закону, а погрешности уровней квантования распределены по закону близкому к нормальному.

Следующий пример – это получение композиции двух равномерных законов:

$$f_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{d-c}\prod(\varepsilon_1; c, d),$$

$$f_2(\varepsilon_2) = \frac{1}{b-a}\prod(\varepsilon_2; a, b),$$

где П(•) – селектор интервала.

Начнем со случая, когда $b-a = d-c$, т.е. одинаковые размахи, но не обязательно, $a=c$ и $b=d$. Чтобы воспользоваться формулой для композиции

$$f_\Sigma(\varepsilon) = \frac{1}{b-a}\left[F_1(\varepsilon-a) - F_1(\varepsilon-b)\right],$$

определим интегральную функцию первого равномерного распределения, которая определяется выражением:

$$F_1(\varepsilon_1) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f_1(\varepsilon^*)d\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_1-c}{d-c}\prod(\varepsilon_1; c, d).$$

Ее график имеет вид, показанный на рисунке 4.6.

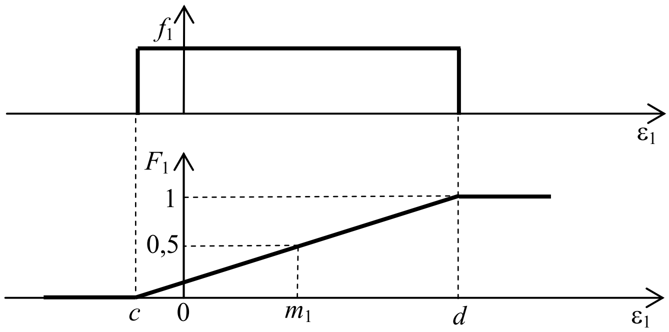


Рисунок 4.6 – Плотность вероятностей и полученная из нее интегральная функция первого равномерного распределения

Графическое построение композиции осуществляют аналогично ранее проделанному. Откладывают на оси ординат точки a и b, являющиеся границами второго нормального распределения. Находят точки a+m_1 и b+m_1, где m_1=(c+d)/2 – математическое ожидание первой случайной величины. Строят две, смещенные относительно друг друга центрированные интегральные функции вокруг точек a+m_1 и b+m_1. Для этого влево и вправо от этих точек откладывают по полуразмаху (d – c)/2. Построение показано на рисунке 4.7.

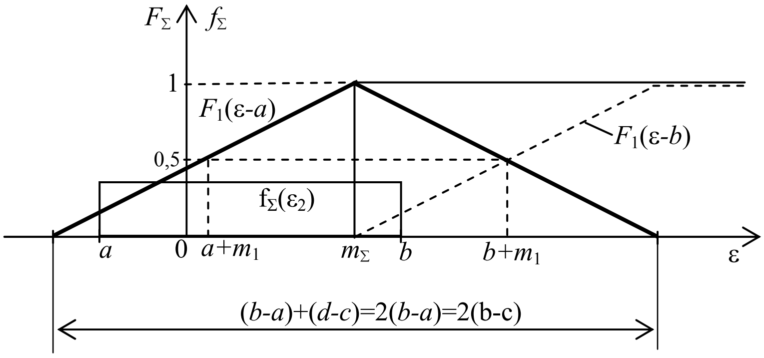


Рисунок 4.7 – Композиция двух одинаковых равномерных законов

Получился треугольный закон (закон Симпсона). Его математическое ожидание $m_\Sigma = m_1 + m_2$ и размах равен двойному размаху составляющих.

Рассмотрим случай, когда $b - a \neq d - c$.

В этом случае при использовании формулы свертки важно правильно выбрать, какую функцию считать первой, а какую второй. Если $(b-a) > (d-c)$, то следует взять плотность $f_2(\varepsilon_2)$ с границами a и b. Процедура построения композиции аналогична. В результате получают трапецеидальный закон, как это показано на рисунке 4.8.

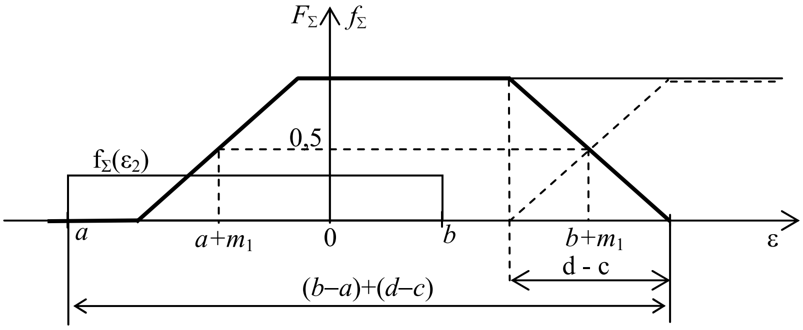


Рисунок 4.8 – Композиция двух равномерных законов с разными размахами

Библиографический список

1 Абезгауз Г.Г., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчетам – М.:Воениздат, 1970.

2 Анцыферов С. С, Голубь Б. И. Общая теория измерений/ Под редакцией академика РАН Н. Н. Евтихиева. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007.

3 Бронштейн И. Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов –М.:Наука, 1986.

4 Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Шлыков Г.П. Расчет метрологических характеристик при проектировании средств измерений: Учеб. пособие. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1988.

5 Зайдель А.И. Погрешности измерений физических величин. – Л.: Наука,1989.

6 Кузнецов В.А., Ялунина Г.В. Общая метрология. – М.: ИПК «Изд-во стандартов», 2001.

7 Назаров Н.Г. Метрология. Основные понятия и математические модели: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2002.

8 Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985.

9 Пиотровский Я. Теория измерений для инженеров. – М.: Мир,1989.

10 Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.: Энергия, 1978.

11 Розенберг В.Я. Введение в теорию точности измерительных систем. – М.: Сов. радио, 1975.

12 Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

13 Цветков Э.И. Основы математической метрологии. – СПб.: Политехника, 2005

14 Шлыков Г.П. Функциональный и метрологический анализ средств измерений и контроля. Часть 1. Функциональный анализ: Учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1998.

15 Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. – М.: Наука, 1969.

16 РМГ 29 – 99 Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения.

Оглавление