

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»

Кафедра систем информационной безопасности

**211-2015**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к лабораторным работам по дисциплине  
«Измерения в телекоммуникационных системах»  
для студентов специальности  
090302 «Информационная безопасность  
телекоммуникационных систем»  
очной формы обучения

Воронеж 2015

Составители: Д. А. Никулин, канд. техн. наук В. Б. Щербаков

УДК 681.326

Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Измерения в телекоммуникационных системах» для студентов специальности 090302 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Д. А. Никулин, В. Б. Щербаков. Воронеж, 2015. 25 с.

Методические указания предназначены для студентов третьего курса, выполняющих лабораторные работы по измерениям в телекоммуникационных системах.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2013 и содержатся в файле Никулин\_ЛР\_Измерения ТКС.pdf.

Табл. 3. Ил. 1. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент д-р техн. наук, проф. А. Г. Остапенко

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. А. Г. Остапенко

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015

# Лабораторная работа № 1

## Погрешности измерений и обработка результатов измерений

Цель занятия: Изучение и практическая отработка метода вычисления погрешностей и обработки результатов измерений.

### Теоретические сведения

Для уменьшения влияния случайных ошибок необходимо произвести измерение данной величины несколько раз. Предположим, что мы измеряем некоторую величину  $x$ . В результате проведенных измерений мы получили значений величины :

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n. \quad (1.1)$$

Этот ряд значений величины  $x$  получил название **выборки**. [1] Имея такую выборку, мы можем дать оценку результата измерений. Величину, которая будет являться такой оценкой, мы обозначим  $\mu$ . Но так как это значение оценки результатов измерений не будет представлять собой истинного значения измеряемой величины, необходимо оценить его ошибку. Предположим, что мы сумеем определить оценку ошибки  $\Delta x$ . В таком случае мы можем записать результат измерений в виде

$$\mu = \pm \Delta x. \quad (1.2)$$

Так как оценочные значения результата измерений  $\mu$  и ошибки  $\Delta x$  не являются точными, запись (1.2) результата измерений должна сопровождаться указанием его надежности  $P$ . **Под надежностью или достоверной вероятностью** понимают вероятность того, что истинное значение измеряемой величины заключено в интервале, указанном

записью (1.2). Сам этот интервал называется **доверительным интервалом** [1].

Например, измеряя длину некоторого отрезка, окончательный результат мы записали в виде

$$l = (8.34 \pm 0.02) \text{ мм}, \quad (P = 0.95).$$

Это означает, что из 100 шансов – 95 за то, что истинное значение длины отрезка заключается в интервале от 8.32 до 8.36 мм.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы, имея выборку (1.1), найти оценку результата измерений  $\bar{x}$ , его ошибку  $\Delta x$  и надежность  $P$ .

Эта задача может быть решена с помощью теории вероятностей и математической статистики.

В большинстве случаев случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения, установленного Гауссом.

**Нормальный закон распределения** ошибок выражается формулой

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (1.3)$$

где  $\Delta x$  – отклонение от величины истинного значения;

$\sigma$  – истинная среднеквадратичная ошибка;

$\sigma^2$  – дисперсия, величина которой характеризует разброс случайных величин.

Как видно из (1.3) функция имеет максимальное значение при  $x = 0$ , кроме того, она является четной. [2]

На рисунке показан график этой функции. Смысл функции (1.3) заключается в том, что площадь фигуры, заключенной между кривой, осью  $\Delta x$  и двумя ординатами из точек  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  (заштрихованная площадь на рисунке) численно равна вероятности, с которой любой отсчет попадет в интервал  $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ .

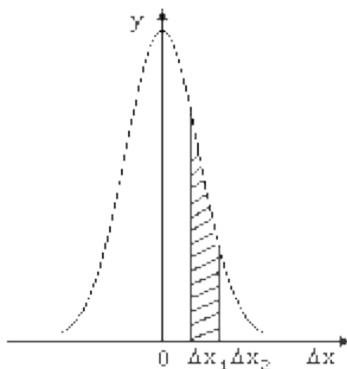


График исследуемой функции

Поскольку кривая распределена симметрично относительно оси ординат, можно утверждать, что равные по величине, но противоположные по знаку ошибки равновероятны. А это дает возможность в качестве оценки результатов измерений взять среднее значение всех элементов выборки (1.1)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.4)$$

где  $n$  — число измерений.

Итак, если в одних и тех же условиях проделано  $n$  измерений, то наиболее вероятным значением измеряемой величины будет ее среднее значение (арифметическое). Величина стремится к истинному значению  $\mu$  измеряемой величины при  $n \rightarrow \infty$ .

**Средней квадратичной ошибкой** отдельного результата измерения называется величина

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.5)$$

Она характеризует ошибку каждого отдельного измерения. При  $n \rightarrow \infty$   $S$  стремится к постоянному пределу  $\sigma$

(1.6)

С увеличением  $\sigma$  увеличивается разброс отсчетов, т.е. становится ниже точность измерений.

Среднеквадратичной ошибкой среднего арифметического называется величина

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \quad (1.7)$$

Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа измерений. [3]

Ошибка характеризует точность, с которой получено среднее значение измеренной величины. Результат записывается в виде:

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.8)$$

Эта методика расчета ошибок дает хорошие результаты (с надежностью 0.68) только в том случае, когда одна и та же величина измерялась не менее 30 – 50 раз.

В 1908 году Стьюдент показал, что статистических подход справедлив и при малом числе измерений. Распределение Стьюдента при числе измерений  $n \rightarrow \infty$  переходит в распределение Гаусса, а при малом числе отличается от него.

Для расчета абсолютной ошибки при малом количестве измерений вводится специальный коэффициент, зависящий от надежности  $P$  и числа измерений  $n$ , называемый **коэффициентом Стьюдента  $t$** . [2]

Опуская теоретические обоснования его введения, заметим, что

(1.9)

где  $\Delta x$  – абсолютная ошибка для данной доверительной вероятности;

– среднеквадратичная ошибка среднего арифметического.

Коэффициенты Стьюдента приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Коэффициенты Стьюдента

n	Значения P				
	0,6	0,8	0,95	0,99	0,999
2	1,376	3,078	12,706	63,657	636,61
3	1,061	1,886	4,303	9,925	31,598
4	0,978	1,638	3,182	5,841	12,941
5	0,941	1,533	2,776	4,604	8,610
6	0,920	1,476	2,571	4,032	6,859
7	0,906	1,440	2,447	3,707	5,959
8	0,896	1,415	2,365	3,499	5,405
9	0,889	1,397	2,306	3,355	5,041
10	0,783	1,383	2,262	3,250	4,781
40	0,851	1,303	2,021	2,704	3,551
60	0,848	1,296	2,000	2,660	3,460
120	0,845	1,289	1,980	2,617	3,373
	0,842	1,282	1,960	2,576	3,291

Из сказанного следует:

1. Величина среднеквадратичной ошибки позволяет вычислить вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в любой интервал вблизи среднего арифметического.

2. При  $n \rightarrow \infty \rightarrow 0$ , т.е. интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение  $\mu$ , стремится к нулю с увеличением числа измерений. Казалось бы, увеличивая  $n$ , можно получить результат с любой степенью точности. Однако точность существенно увеличивается лишь

до тех пор, пока случайная ошибка не станет сравнимой с систематической. Дальнейшее увеличение числа измерений нецелесообразно, т.к. конечная точность результата будет зависеть только от систематической ошибки. Зная величину систематической ошибки, нетрудно задаться допустимой величиной случайной ошибки, взяв ее, например, равной 10% от систематической. Задавая для выбранного таким образом доверительного интервала определенное значение  $P$  (например,  $P = 0.95$ ), нетрудно найти необходимое число измерений, гарантирующее малое влияние случайной ошибки на точность результата.

Для этого удобнее воспользоваться табл. 1.2, в которой интервалы заданы в долях величины  $\sigma$ , являющейся мерой точности данного опыта по отношению к случайным ошибкам.

Таблица 1.2

Необходимое число измерений для получения  
ошибки  $\Delta$  с надежностью  $P$

—	Значения					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	127
0.2	13	29	70	99	171	277
0.1	47	169	273	387	668	1089

При обработке результатов прямых измерений предлагается следующий порядок операций:

1. Результат каждого измерения запишите в таблицу.
2. Вычислите среднее значение из  $n$  измерений

—.

3. Найдите погрешность отдельного измерения

4. Вычислите квадраты погрешностей отдельных измерений

5. Определите среднеквадратичную ошибку среднего арифметического

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Задайте значение надежности (обычно берут  $P = 0.95$ ).

6. Определите коэффициент Стьюдента  $t$  для заданной надежности  $P$  и числа произведенных измерений  $n$ .

7. Найдите доверительный интервал (погрешность измерения)

Если величина погрешности результата измерения  $\Delta x$  окажется сравнимой с величиной погрешности прибора  $\delta$ , то в качестве границы доверительного интервала возьмите

\_\_\_\_\_

Если одна из ошибок меньше другой в три или более раз, то меньшую отбросьте.

Окончательный результат запишите в виде

Оцените относительную погрешность результата измерений

---

### Варианты заданий:

1. Было проведено 5 непосредственных измерений величин  $x$  и  $y$ . Для величины  $x$  получены значения: 50, 51, 52, 50, 47; для величины  $y$  получены значения: 500, 510, 476, 354, 520. Требуется рассчитать значение величины  $z$ , определяемой по формуле  $z = x + y$  и найти погрешность полученного значения.

2. Проводили измерения длины металлического бруска. Было сделано 10 измерений и получены следующие значения: 10 мм, 11 мм, 12 мм, 13 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм. Требуется найти среднее значение измеряемой величины (длины бруска) и его погрешность  $\Delta$ .

### Контрольные вопросы:

1. Что такое выборка?
2. Что такое надежность?
3. Что понимают под доверительным интервалом?
4. Какой формулой выражается нормальный закон распределения ошибок?
5. Что характеризует средняя квадратичная ошибка?
6. Что такое коэффициент Стьюдента?
7. Перечислите порядок обработки прямых измерений.

## Лабораторная работа № 2

### Измерения случайных величин, процессов и полей

Цель занятия: Изучение и практическая отработка метода измерения случайных величин, процессов и полей и обработки результатов измерений.

#### Теоретические сведения

Термин «измерение случайных величин» можно понимать как условный; на самом деле измеряются числовые характеристики их законов распределения вероятности, которые, как известно, не являются случайными. Установить размер или измерить значение случайной величины нельзя именно потому, что они случайные [4].

С помощью однократного измерения определить вероятные характеристики случайной величины, естественно, невозможно.

Многократное измерение нужно стремиться организовать так, чтобы рассеянием результата из-за случайности отсчета можно было пренебречь по сравнению с рассеянием из-за случайного характера самой измеряемой величины. Тогда при монотонных функциях преобразования закон распределения вероятности измеряемой величины  $p(Q)$  находится путем преобразования закона распределения вероятности показания средства измерений  $p_x(X)$  по формуле

$$\text{---} . \quad (2.1)$$

Если случайным характером отсчета пренебречь нельзя, то закон распределения вероятности результата измерения должен рассматриваться как композиция закона распределения вероятности случайной величины  $Q$  и закона распределения вероятности показания при  $Q = \text{const}$ . Определить искомый закон в этом случае очень сложно, поэтому обычно ограничиваются оценками числовых характеристик закона

распределения вероятности случайной величины  $Q$ . Оценка ее среднего значения равна среднему арифметическому результатов однократных измерений, а оценки дисперсии - разностями между оценками дисперсий композиции и показания при  $Q = \text{const}$ .

Изменение физической величины во времени называется процессом. Если при повторениях он каждый раз протекает случайным образом, то это случайный процесс.

Существуют два способа описания случайных процессов. При первом из них каждому текущему моменту времени  $t$  ставятся в соответствие случайные величины  $x_i \{1, \dots, n\}$ ; при втором - случайный процесс  $Q(t)$  задается множеством своих реализаций  $x(t)$ . Случайные величины  $x_i$  в каждом сечении  $t = \text{const}$  подчиняются определенному закону распределения вероятности. Если он одинаков для любого сечения, т. е. не зависит от времени, то процесс называется стационарным; в противном случае - нестационарным. Стационарные случайные процессы обладают свойством эргодичности, заключающемся в том, что вероятностные характеристики, вычисленные по множеству реализаций и по любой из них, равны между собой. Это позволяет при измерениях обходиться одной реализацией стационарного случайного процесса [3].

Исчерпывающая информация о случайном процессе содержится в его многомерной интегральной функции распределения вероятности

характеризующей вероятность того, что в моменты времени  $t_i$  случайные величины  $x_i$  не превысят определенных своих значений, и в многомерной дифференциальной функции (плотности) распределения вероятности

---

$$(2.3)$$

На практике ограничиваются оцениванием числовых характеристик, или моментов, которые в общем случае являются функциями времени. Они представляют собой некоторые средние значения, причем для неэргодических случайных процессов усреднение должно производиться по множеству реализаций, а для эргодических может выполняться по одной из них.

Для стационарного случайного процесса, в частности, начальный момент первого порядка определяется как

$$- \quad (2.4)$$

Это так называемая постоянная составляющая стационарного случайного процесса, которую редко определяют, так как измерительная задача обычно заключается в выяснении динамики, развития влияния [4].

Мерой статистической связи между значениями стационарного случайного процесса без постоянной составляющей в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  служит смешанный центральный момент второго порядка называемый корреляционным. Вероятно - статистические характеристики стационарного случайного процесса не зависят от времени, поэтому можно выбрать произвольно, приняв  $t_1 = 0$ . Тогда корреляционный момент будет зависеть только от  $\tau$ . В силу эргодичности он равен

$$- \quad (2.5)$$

С переходом от фиксированного времени к текущему корреляционный момент стал функцией [2].

Определенная выражением (2.5) корреляционная функция обладает следующими свойствами.

1. При  $\tau = 0$  корреляционная функция максимальна и равна дисперсии стационарного случайного процесса. Если измеряемой

физической величиной является, например, сила тока  $I(t)$ , то  $P$  - полная мощность, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом. В этом случае, когда процесс имеет постоянную и переменную составляющие,  $P = P_{\text{пост}} + P_{\text{пер}}$ , где  $P_{\text{пост}}$  и  $P_{\text{пер}}$  - мощности соответственно переменной и постоянной составляющих.

Максимальное значение корреляционной функции при  $\tau=0$  объясняется тем, что статистическая связь между неразличимыми по времени значениями  $x(t)$  является наибольшей. Корреляционную функцию часто нормируют по ее максимальному значению:

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{K_{xx}(\tau)}{K_{xx}(0)} \quad (2.6)$$

2. Корреляционная функция является четной, т. е.  $K_{xx}(\tau) = K_{xx}(-\tau)$ . Это можно показать в качестве текущего момента времени  $t_1=t$  и обозначив  $t_1=t_2+\tau$ . Спектр корреляционной функции состоит, следовательно, только из косинусоидальных составляющих.

3. При  $\tau=0$   $K_{xx}(\tau) = \sigma^2$ , если в  $x(t)$  нет детерминированной составляющей.

4. Корреляционная функция  $K_{xx}(\tau)$  монохроматического колебания является косинусоидой с такой же частотой. Доказательство этого важного свойства будет рассмотрено ниже, а важным следствием является то, что при корреляционном преобразовании теряется информация о фазовой структуре процесса.

5. Корреляционная функция суммы независимых процессов равна сумме их корреляционных функций. Вместе с предыдущим это свойство используется в оптимальной фильтрации для суммирования гармоник сигнала в момент  $\tau=0$ .

6. Корреляционная функция связана со спектром мощности случайного процесса прямым и обратным преобразованиями Фурье:

—  
—

Это положение известно как теорема Винера - Хинчина. Таким образом, спектр мощности, как и  $R_x(\tau)$  - корреляционная функция, может служить неслучайной характеристикой случайного процесса [3].

Корреляционная функция является основной характеристикой стационарных случайных процессов, поддающейся измерению и определяющей их внутренние статистические свойства. На практике, однако, из-за конечности времени усреднения  $T$  определяется не сама корреляционная функция (2.5), а ее оценка

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt \quad (2.9)$$

что указывает на необходимость внесения в результат измерения поправки.

Средства измерения, предназначенные для определения корреляционной функции, могут работать как в реальном масштабе времени, так и с накоплением информации. В первом случае в измерительную цепь включается регулируемая линия задержки, умножитель и интегрирующая цепочка; во втором осуществляется промежуточная запись информации на магнитную или бумажную ленту. В обоих случаях важнейшей нормируемой метрологической характеристикой служит время усреднения. Соответствие этой величины норме должно контролироваться при поверке средств измерения [1].

Другим способом определения корреляционной функции является обратное преобразование Фурье (2.8) спектра мощности. Оба способа совершенно равнозначны, и выбор одного из них определяется практическими соображениями.

Возможность измерения или вычисления по формуле (2.7) спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса используется для определения АЧХ средств измерений с линейной и стационарной статической характеристикой. Для них спектральные плотности мощности входного и выходного сигналов при подаче на вход стационарного случайного процесса связаны соотношением

$$(2.10)$$

Если спектр мощности испытательного сигнала в виде стационарного случайного процесса известен, то

$$\frac{\text{---}}{\text{---}}, \quad (2.11)$$

где  $S_{xx}$  - измеряемая величина. Если же  $S_{yy}$  неизвестен, то он измеряется спектрометром более высокого класса точности с известной АЧХ:

$$(2.12)$$

Тогда из формул (2.11) и (2.12) следует, что

$$S_{xx} = \dots \quad (2.13)$$

Обобщением понятия случайного процесса является понятие случайного поля

Под полем понимают функцию  $Q(x, y, z, \dots)$  нескольких координат.

Изменение физической величины вдоль любого направления случайного поля аналогично случайному процессу с той лишь разницей, что роль времени играет пространственная координата.

Если закон распределения вероятности не меняется вдоль пространственной координаты, то поле называется

однородным, если не зависят от направления в пространстве - изотропным [3].

Пространственная корреляционная функция однородного и изотропного случайного поля

$$\overline{f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2)}, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  - координаты двух различных точек пространства, а

$$(2.15)$$

Пространственно- временная корреляционная функция стационарного, однородного и изотропного случайного поля

$$, \quad (2.16)$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ , а черта означает усреднение и по времени и по пространству.

По аналогии с процессами для полей вводится понятие пространственных частот.

Пространственный спектр неслучайного поля

$$\overline{f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}, \quad (2.17)$$

пространственно- временной –

$$\overline{f(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t}}, \quad (2.18)$$

где  $\mathbf{k}$  – соответственно пространственные и временные частоты.

Пространственно – временной спектр «мощности» стационарного, однородного и изотропного случайного поля связан с его пространственно- временной корреляционной функцией соотношениями Винера - Хинчена:

— ; (2.19)

— . (2.20)

Средства измерений пространственных и пространственно временных характеристик случайных полей могут быть контактными и неконтактными.

Контактными неподвижными средствами регистрируют только процессы, поскольку для обзора пространства необходимо относительное движение. Недостатком контактных средств является возмущение измеряемого поля первичным измерительным преобразователем.

Неконтактные средства измерений могут быть с высокой и низкой разрешающей способностью.

Обзор пространства первыми производится за счет сканирования или относительного движения с накоплением и усреднением данных. У вторых усреднение по пространству происходит благодаря низкой разрешающей способности.

Во всех случаях интервал усреднения по времени и по пространству является важнейшей нормируемой метрологической характеристикой. Она должна контролироваться при поверке средств измерения, приниматься во внимание при подготовке и проведении измерений, при обработке и анализе их результатов.

### Варианты заданий:

1. В лотерею выпущено 100 билетов. Разыгрывался один выигрыш в 50 у.е. и десять выигрышей по 10 у.е. Найти закон распределения величины  $X$  – стоимости возможного выигрыша.

2. Рассмотрим случайную величину с распределением

$$\xi = \dots$$

Реализация данной случайной величины — игра в орлянку с условием, что орел это 3 очка, а решка — 4 очка. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

3. Вероятность того, что покупатель ознакомился заранее с рекламой товара равна 0,6 ( $p=0,6$ ). Осуществляется выборочный контроль качества рекламы путем опроса покупателей до первого, изучившего рекламу заранее. Составить ряд распределения количества опрошенных покупателей.

### Контрольные вопросы:

1. Что означает термин «измерение случайных величин»?

2. Как находится закон распределения вероятности измеряемой величины  $p(Q)$ ?

3. Что называется процессом?

4. Что такое случайный процесс?

5. Какие существуют способы описания случайных процессов?

6. Как определяется начальный момент первого порядка для стационарного случайного процесса?

7. Какое положение известно как теорема Виннера-Хинчина?

## Лабораторная работа № 3

### Числовые характеристики случайных величин

Цель занятия: Изучение и практическая отработка метода расчета числовых характеристик случайных величин.

#### Теоретические сведения

Для изучения распределения случайных величин пользуются рядом числовых характеристик: мер положения и мер рассеивания.

К характеристикам положения относятся: математическое ожидание, мода, медиана. Математическое ожидание случайной величины называют также средним значением случайной величины. [3]

Математическим ожиданием  $M(x)$  дискретной случайной величины  $X$  называется сумма произведений возможных значений ее на соответствующие вероятности:

(3.1)

где  $n$  - число возможных значений случайной величины.

Математическим ожиданием  $M(x)$  непрерывной случайной величины  $L'$  называется определенный интеграл от произведения плотности вероятности  $f(x)$  на действительное переменное  $x$ , взятый в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

(3.2)

Модой  $M_0(x)$  называют значение случайной величины, имеющее у дискретной величины наибольшую вероятность, а у непрерывной - наибольшую плотность вероятности. Если кривая распределения имеет один максимум, то мода равна значению случайной величины, соответствующей этому максимуму. Такая кривая называется унимодальной

(одномодальной). Если кривая распределения имеет два или несколько случайной величины одинаковых максимумов, то она соответственно называется двухмодальной, или много модальной [3].

Медианой случайной величины  $L'$  называют такое ее значение  $Me(x)$ , для которого функция распределения равна 0,5. Это означает, что вероятность случайной величины принять значение меньше медианы в точности равна вероятности этой величины принять значение, большее медианы [4].

Для непрерывной случайной величины медиана определяется из соотношения

$$(3.4)$$

Геометрически медиана представляет собой абсциссу точки, которая делит площадь, ограниченную кривой распределения, пополам.

Для дискретной случайной величины  $x$  необходимо расположить ее значения в порядке возрастания и в качестве медианы принять такое срединное значение  $x$  между  $x(t)$  и  $x'(t)$ , чтобы удовлетворить условие

$$(3.4)$$

Наряду с характеристиками положения используются числовые характеристики, по которым судят о рассеивании случайной величины. К ним, в частности, относят дисперсию и среднеквадратическое отклонение [3].

Дисперсией  $\Theta(x)$  дискретной случайной величины  $L'$  называется сумма квадратов отклонений случайной величины от ее математического ожидания, умноженная на соответствующие вероятности:

$$(3.5)$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия определяется по формуле

(3.6)

Среднеквадратическим отклонением случайной величины называют положительное значение квадратного корня из дисперсии:

(3.7)

Среднеквадратическое отклонение измеряется в тех же единицах, что и сама величина  $X_i$  ее среднее значение, тогда как дисперсия выражается в квадратах соответствующей единицы измерения [3].

### **Моменты случайных величин**

Для исследования распределений случайных величин в математической статистике пользуются моментами. Моменты представляют собой систему численных характеристик распределения, включающую среднюю арифметическую и дисперсию [3].

Моментом ряда распределения (или просто моментом) относительно начального значения  $x = a$  называется сумма произведений отклонений значений  $x$  от  $a^r$  на соответствующую частоту:

(3.8)

Давая показателю степени  $r$  различные значения ( $r = 0, 1, 2, 3$  и т. д.), получим моменты нулевого, первого, второго и т. д. порядка относительно начала  $a$ .

Различают начальные и центральные моменты  $n$ -го порядка. Если  $a = 0$ , то момент называется начальным. Обозначим начальный момент  $r$ -го порядка через  $\mu_r$  тогда

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (3.9)$$

Если  $a = X$ , то момент называется центральным. Обозначим его через  $\mu_r$ , тогда центральный момент  $r$ -го порядка

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^r f(x) dx \quad (3.10)$$

Обычно для практических целей ограничиваются вычислением моментов не выше четвертого порядка.

Среднее арифметическое значение случайной величины представляет собой начальный момент первого порядка:

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = X \quad (3.11)$$

Центральные моменты выражаются через начальные моменты следующим образом:

$$\mu_2 = \mu_2 - \mu_1^2 \quad (3.12)$$

$$\mu_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 \quad (3.13)$$

$$\mu_4 = \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4 \quad (3.14)$$

$$\mu_5 = \mu_5 - 5\mu_1\mu_4 + 10\mu_1^2\mu_3 - 10\mu_1^3\mu_2 + 4\mu_1^5 \quad (3.15)$$

$$\mu_6 = \mu_6 - 6\mu_1\mu_5 + 15\mu_1^2\mu_4 - 20\mu_1^3\mu_3 + 15\mu_1^4\mu_2 - 6\mu_1^6 \quad (3.16)$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию случайной величины  $X$ :

$$\mu_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2 f(x) dx \quad (3.17)$$

Для распределений дискретных случайных величин:

$$(3.18)$$

—

$$(3.19)$$

Для распределения непрерывных случайных величин:

$$(3.20)$$

—

$$(3.21)$$

Варианты заданий:

1. Составьте закон распределения дискретной случайной величины  $X = \{\text{Число гербов при бросании 4 монет}\}$ .

2.  $X_1 = \{\text{Число очков на I-ом кубике}\}$ ,  $X_2 = \{\text{Число очков на II-ом кубике}\}$  (таблица ниже).

Таблица для записи результатов

X1						
P1						

X2						
P2						

Найдите закон распределения величины  $X_1 + X_2$ .

Контрольные вопросы:

1. Что называют средним значением случайной величины?

2. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины?

3. Что называют математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
4. Что называют модой?
5. Что называют медианой случайной величины?
6. Какая кривая называется унимодальной?
7. Каким соотношением определяется медиана непрерывной случайной величины?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов, В. А. Основы метрологии [Текст]: учебник / В. А. Кузнецов, Г. В. Ялунина. – М.: Издательство стандартов, 1995. – 279 с.
2. Селиванов, М. Н. Качество измерений. Метрологическая справочная книга [Текст]: учебник / М. Н. Селиванов, А. Э. Фридман, Ж. Ф. Кудряшова. – Л.: Лениздат, 1987. – 295 с.
3. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – М.: Высшая школа, 1973. – 368с.
4. Вентцель, Е. С. Введение в исследование операций [Текст]: учебник / Е. С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1964. – 623 с.
5. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ -ДАНА, 2007. – 551 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1 Погрешности измерений и обработка результатов измерений.....	1
Лабораторная работа № 2 Измерения случайных величин, процессов и полей .....	9
Лабораторная работа № 3 Числовые характеристики случайных величин .....	18
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	24

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к лабораторным работам по дисциплине  
«Измерение в телекоммуникационных системах»  
для студентов специальности  
090302 «Информационная безопасность  
телекоммуникационных систем»  
очной формы обучения

Составители:

Никулин Дмитрий Александрович  
Щербаков Владимир Борисович

В авторской редакции

Подписано к изданию 27.04.2014  
Уч.-изд. л. 1,6.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный  
технический университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14