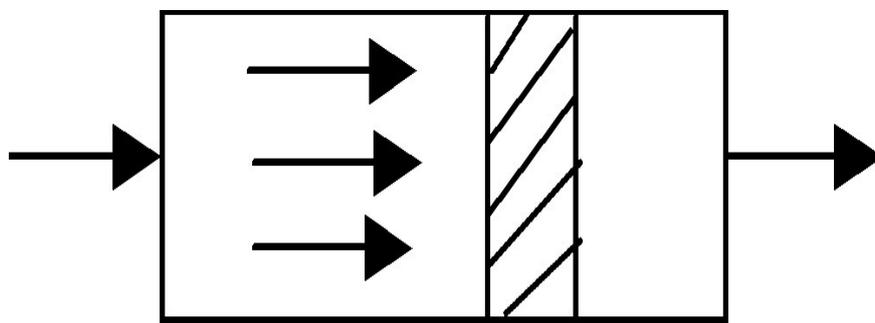


В. И. Ряжских, А. В. Ряжских, Е. А. Соболева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие



Воронеж 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

В. И. Ряжских, А. В. Ряжских, Е. А. Соболева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Воронеж 2024

УДК 517(075.8)
ББК 87.256.631.0я7
P989

Рецензенты:

*кафедра информационных и управляющих систем
Воронежского государственного университета инженерных технологий
(зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. И. А. Хаустов);
М. А. Артемов, д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой программного
обеспечения и администрирования информационных систем,
Воронежского государственного университета*

Ряжских, В. И.

Математическое моделирование: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (2,5 Мб) / В. И. Ряжских, А. В. Ряжских, Е. А. Соболева. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2024. - 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows 10; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-1213-6

Учебное пособие содержит основные теоретические сведения по курсу «Математическое моделирование». Особое внимание уделено синтезу и анализу математических моделей явлений переноса различных по своей природе полей потенциалов. Построение математических моделей основывается на фундаментальных законах переноса тепла, массы и импульса. Материал иллюстрируется достаточным количеством конкретных примеров, которые позволяют более детально применять аппарат математического моделирования при решении различных предметно-ориентированных задач.

Издание предназначено для студентов специальности 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения.

Ил. 3. Библиогр.: 3 назв.

**УДК 517(075.8)
ББК 87.256.631.0я7**

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-1213-6

© Ряжских В. И., Ряжских А. В., Соболева Е. А.,
2024

© ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет», 2024

ВВЕДЕНИЕ

Современные запросы техники и технологии выдвигают на первый план стратегию замены натурального эксперимента вычислительным, что создает условие для быстреего внедрения в производство различных новаций без дополнительных финансовых расходов. В основу такого подхода, как правило, полагается применение метода математического моделирования, который реализуется через этапы синтеза, формализованной физической постановки проблемы с помощью выбранного математического специализированного обеспечения и последующего анализа планируемого вычислительного эксперимента с подтверждением корректности и адекватности принятых допущений и упрощений при идеализации моделируемого объекта или явления.

Данное учебное пособие ориентировано на проектировщиков сложных производственно-технических систем и изделий, в частности специалистов, принимающих участие в разработке элементов аэрокосмической техники, в контексте специальности подготовки 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения.

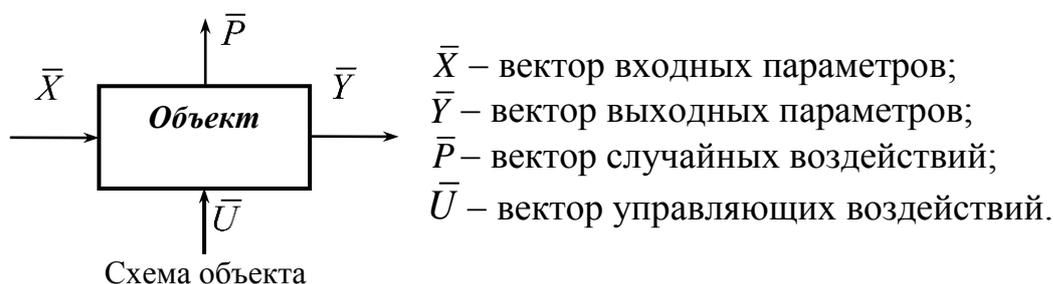
ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Понятие математической модели

Определение Математическое моделирование является методом научного исследования, который основан на познании изучаемых процессов с помощью математической модели.

Определение Математическая модель – это математическая формализация, которая отражает определенные свойства реальных процессов и позволяет изучать эти свойства.

Рассмотрим объект произвольной природы, который взаимодействует с внешней средой (или системой) через так называемые связи:

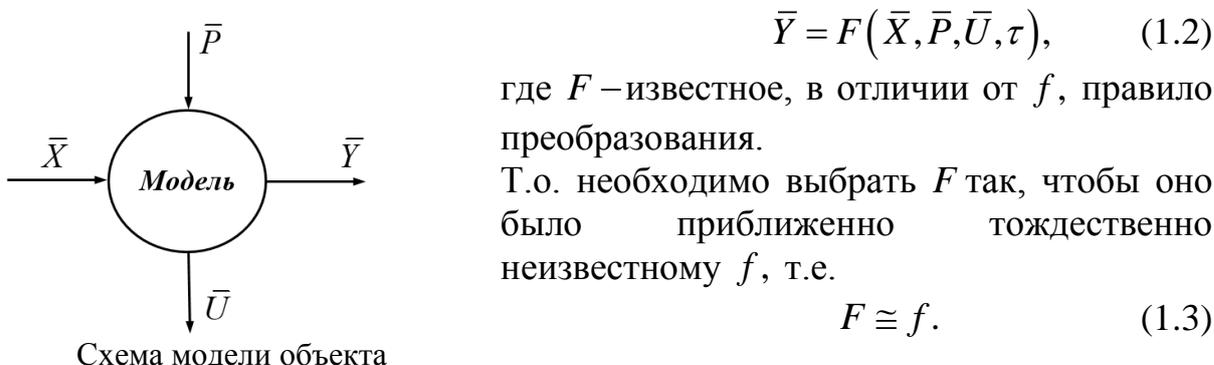


Функционирование объекта подчиняется функциональной связи

$$\bar{Y} = f(\bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau), \quad (1.1)$$

где τ – время, f – правило преобразования, которое практически всегда неизвестно. Возникает вопрос – каким образом познать объект через закономерности его функционирования?

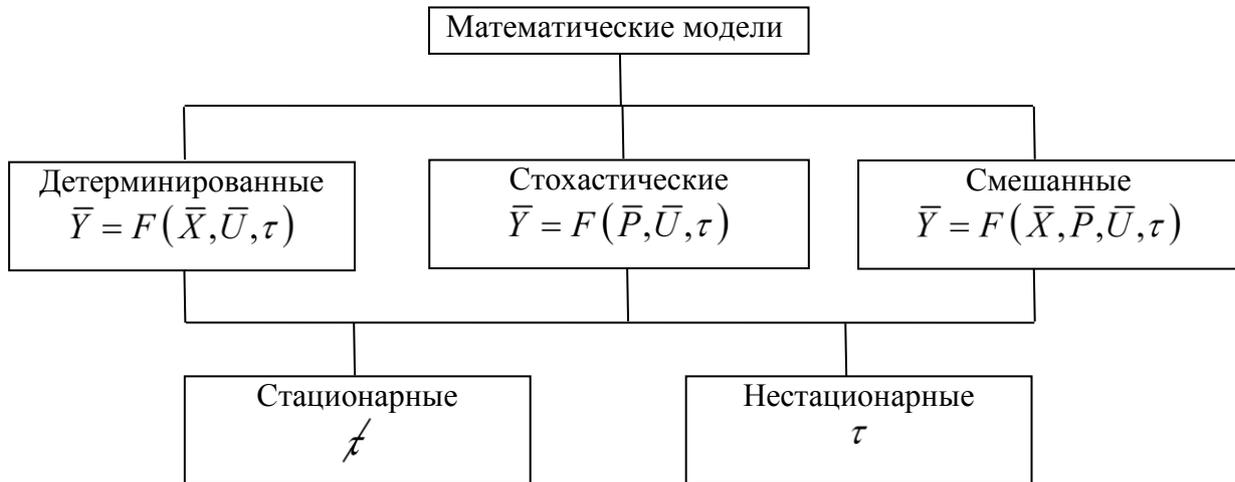
Для этого логично рассматривать вместо реального объекта так называемый виртуальный объект, имеющий более упрощенную внутреннюю структуру, и который как раз и есть математическая модель изучаемого объекта. При этом функционирование модели описывается зависимостью



Решению такой задачи как раз и посвящен данный курс.

1.2. Классификация математических моделей

Классификация математических моделей проводится на основании обобщенной структуры F , формула (1.2).



Детерминированные модели как правило выражаются дифференциальными и/или интегральными уравнениями.

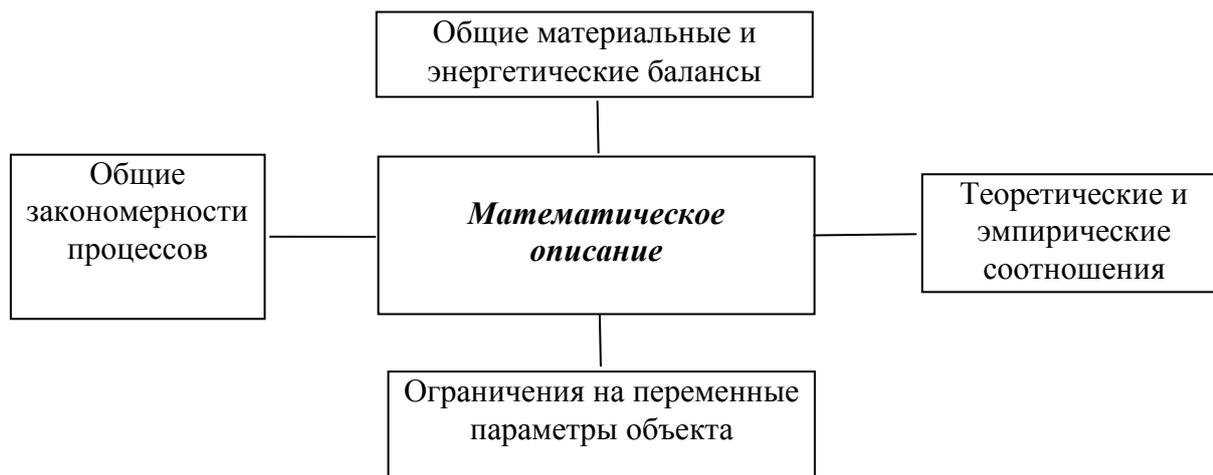
Стохастические модели формируются с помощью функций распределения и функций плотностей распределения, а также в виде различных регрессионных уравнений.

Смешанные модели содержат в своем описании элементы детерминированного и стохастического подходов.

В качестве дополнительной классификационной составляющей математические модели подразделяются на стационарные, т.е. не зависящие от текущего времени τ и соответственно нестационарные.

1.3. Состав математического описания

Подбор правила преобразования F , соотношения (1.2) носит не формализуемый характер, т.е. творческий, но платформа, на которой этот подбор осуществляется, является инвариантной к объекту моделирования.



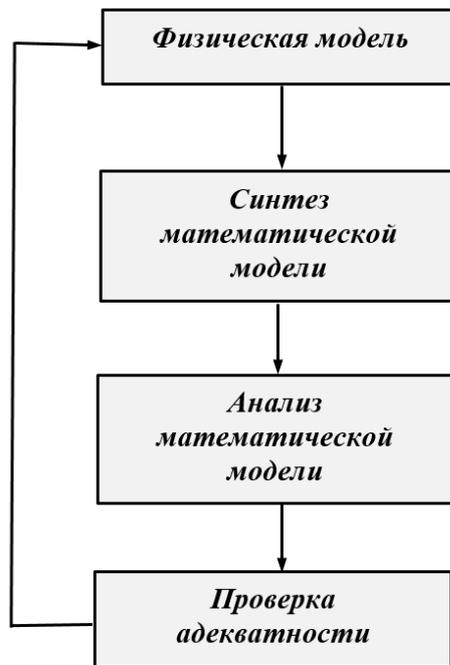
Эта платформа состоит из общих материальных и энергетических балансов, т.е. математическая модель должна удовлетворять законам сохранения; из общих закономерностей процессов, происходящих в объекте, которым должны удовлетворять различные характеристики, получаемые из модели. Например, если теплота согласно модели, переходит от «холодного» тела к «горячему», то это противоречит фундаментальным законам термодинамики.

Составным элементом математического описания являются математические формализации основных закономерностей явлений переноса и экспериментально установленные соотношения между параметрами модели.

Очевидным элементом математического описания является система ограничений на основные параметры модели, т.е. это означает, что всеобщая математическая модель не может быть разработана в принципе.

1.4. Алгоритм математического моделирования

Несмотря на то, что в процессе построения математической модели не формализуем, тем не менее общие этапы процедуры можно представить в виде следующей схемы:



На этапе «*физическая модель*» должны быть уяснены физические явления, происходящие в моделируемом объекте, а также определены их взаимосвязь и совокупность законов явлений переноса субстанций различной природы. На выходе должна быть сформулирована физическая модель, которая не противоречит современным представлениям о функционировании объекта.

На этапе «*синтез математической модели*» с использованием выбранного математического аппарата устанавливаются количественные связи между основными параметрами объекта в виде, как правило, дифференциальных уравнений или их систем и формулируются соответствующие начальные и граничные условия. На выходе этого этапа должна быть сформулирована корректная начально-краевая задача.

На этапе «*анализ математической модели*» выбирается аналитический или численный метод решения сформулированной начально-краевой задачи. Далее производится вычислительный эксперимент с формированием результатов в виде таблиц, графиков и т.д.

На этапе «*проверка адекватности*» производится сравнительный анализ с имеющимися экспериментальными данными или с тестами и устанавливается точность соответствия полученных результатов известным данным.

Если эта точность не удовлетворяет критериям точности, то переходят к корректировке физической модели и все этапы повторяются вновь.

Такой итерационный процесс в силу своей эвристичности может и не являться сходящимся, тогда требуется уточнение уже самих физических закономерностей.

1.5. Общие закономерности процессов

В дальнейшем сосредоточимся на дифференциальной форме основных закономерностей явлений переноса.

Перенос теплоты будем описывать законом Фурье

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

который говорит о том, что плотность теплового потока q при переносе теплоты от более нагретого тела к менее нагретому прямо пропорциональна градиенту температуры в данной точке пространства, причем коэффициент пропорциональности λ является коэффициентом теплопроводности, определяемый экспериментально.

Перенос вещества будем описывать законом Фика

$$j = -D \operatorname{grad} c,$$

который говорит о том, что плотность потока массы j при переносе вещества из области с большей концентрацией c к области с меньшей концентрацией прямо пропорциональна градиенту концентрации вещества в точке пространства, причем коэффициент пропорциональности D является коэффициентом диффузии, определяемый также экспериментально.

Перенос количества движения подчиняется реологическому закону ньютоновской жидкости

$$f_{mp} = -\mu \operatorname{grad} \bar{v},$$

который говорит о том, что касательное напряжение (трение) между слоями жидкости пропорционально градиенту скорости течения, а коэффициент пропорциональности является коэффициентом динамической вязкости, который также определяется экспериментально.

Заметим, что все перечисленные законы имеют одну и ту же математическую формулировку.

1.6. Общие материальные и энергетические балансы

Простейшая запись законов сохранения выражается для выделенного объема объекта символической записью

$$[\text{приход}] - [\text{расход}] = [\text{накопление}].$$

1.7. Дифференциальные уравнения как инструмент моделирования

Учитывая дифференциальную форму представления основных законов явлений переноса, а также запись законов сохранения для так называемых «элементарных объемов» имеющих малые, но конечные размеры, позволяющие воспользоваться гипотезой непрерывности континуума, математические модели в этом случае выражаются в виде дифференциальных уравнений.

Если выходной скалярный параметр Y является функцией одной переменной, то такие модели описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\Phi(x, Y, Y', Y'', \dots) = 0.$$

Если выходной скалярный параметр Y является функцией многих переменных, то такие модели описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, например, пусть $Y = Y(x, y)$, тогда

$$\Phi \left[x, y, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}, \dots \right] = 0.$$

Модели, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, называются **моделями с сосредоточенными параметрами**.

Модели, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называются **моделями с распределенными параметрами**.

1.8. Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Преобразование Лапласа определяется оператором L , который имеет следующую структуру

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \Phi(p),$$

где $f(t)$ – называется оригиналом, $\Phi(p)$ – изображением оригинала, p – параметр.

Пример.

Пусть $f(t) = A = const$, тогда

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Процедура нахождения оригинала по изображению называется обратным преобразованием Лапласа с оператором, имеющим следующую структуру

$$L^{-1}[\Phi(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p) e^{-pt} dt.$$

Идея преобразования Лапласа состоит в том, чтобы поместить исходное дифференциальное уравнение в более простое функциональное пространство, в котором достаточно просто его решить. Очевидно, что основная проблема будет в возвращении к оригиналу.

1.9. Основные свойства преобразования Лапласа

Линейность:

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{\cdot} \alpha \Phi_1(p) + \beta \Phi_2(p);$$

Дифференцирование оригинала:

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\cdot} p^n \Phi(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots;$$

Интегрирование интеграла:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\cdot} \frac{\Phi(p)}{p};$$

Изменение масштаба:

$$f(at) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{p}{a}\right);$$

Сдвиг аргумента у оригинала:

$$f(t-b) \xrightarrow{\cdot} \Phi(p) e^{-bp};$$

Свертка оригиналов:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\cdot} \Phi_1(p) \Phi_2(p);,$$

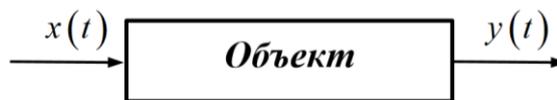
Дифференцирование и интегрирование по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha); \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha \rightarrow \frac{\partial \Phi(p, \alpha)}{\partial \alpha}; \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(p, \alpha) d\alpha.$$

1.10. Понятие передаточной функции

В подавляющем большинстве случаев математические модели объектов можно представить моделями с сосредоточенными параметрами. Во многих случаях удается заменить модели с распределенными параметрами совокупностью взаимосвязанных моделей с сосредоточенными параметрами.

В связи с этим вводится понятие передаточной функции. Пусть объект представляется набором входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ параметров,



тогда передаточной функцией назовем функцию вида

$$W(p) = \frac{L[y(t)]}{L[x(t)]} = \frac{Y(p)}{X(p)};$$

т.е. это есть по существу отношение изображений выходного параметра к изображению входного параметра.

Пример

Пусть математическая модель объекта выражается в виде модели с сосредоточенными параметрами

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t),$$

где $a_0, a_1, a_2 = const$. Найти передаточную функцию такого объекта.

Решение:

Применим оператор Лапласа к математической модели

$$a_2 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = X(p),$$

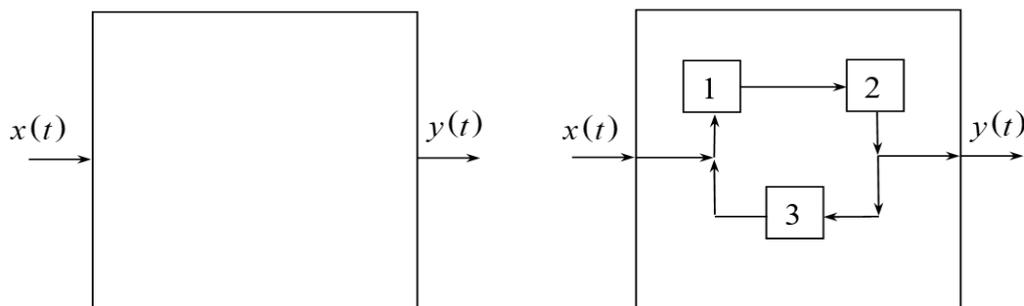
откуда

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

1.11. Идея метода декомпозиции объекта

Введение передаточной функции позволяет сформулировать фундаментальный метод математического моделирования – метод декомпозиции, суть которого состоит в том, что сложный объект разбивается на взаимосвязанную систему подобъектов с известными моделями, после чего производится сборка и возврат к исходному объекту как целого.

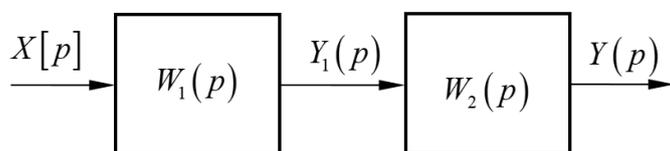
Ниже приведена графическая интерпретация метода декомпозиции.



1.12. Решение задач

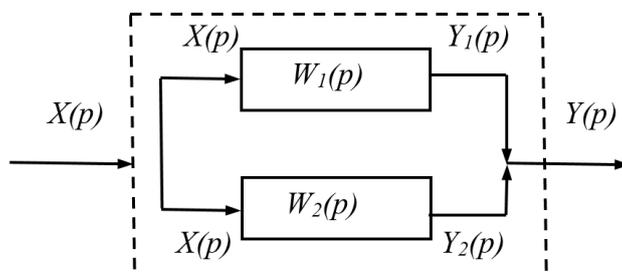
Типовые соединения в структурных схемах

Последовательное соединение элементов



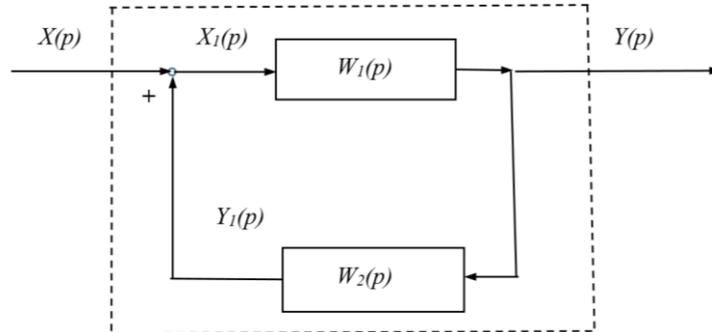
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y(p)}{Y_1(p)} \cdot \frac{Y_1(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p).$$

Параллельное соединение элементов



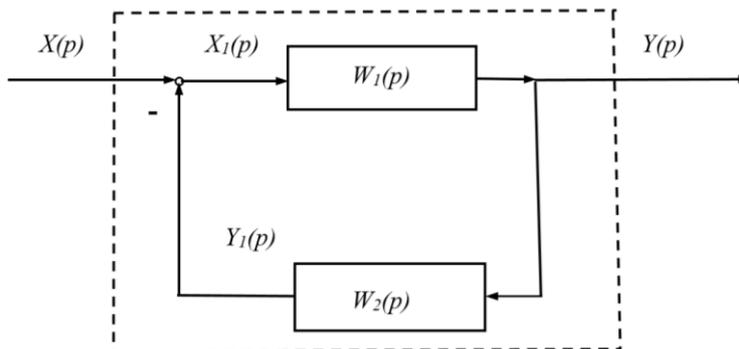
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p) + Y_2(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p)}{X(p)} + \frac{Y_2(p)}{X(p)} = W_1(p) + W_2(p).$$

Положительная обратная связь



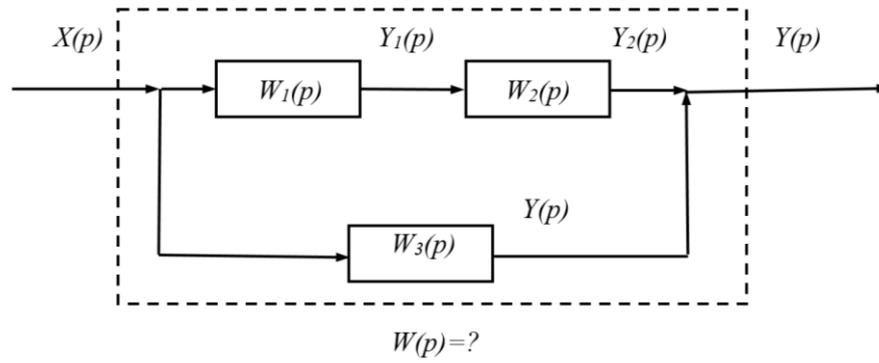
$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y(p)}{X_1(p)} \cdot \frac{X_1(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)X_1(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)X_1(p)}{X_1(p) - Y_1(p)} = \\ &= \frac{W_1(p)}{1 - \frac{Y_1(p)}{X_1(p)}} = \frac{W_1(p)}{1 - \frac{Y(p)}{X_1(p)} \cdot \frac{Y_1(p)}{Y(p)}} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \end{aligned}$$

Отрицательная обратная связь



$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

Пример.



Решение:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_2(p) + Y_3(p)}{X(p)} = \frac{Y_2(p)}{Y_1(p)} \cdot \frac{Y_1(p)}{X(p)} + \frac{Y_3(p)}{X(p)} = \\ &= W_1(p)W_2(p) + W_3(p). \end{aligned}$$

ТЕМА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА (ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ)

2.1. Модели структуры потоков и требования к ним

Структура движущейся среды в элементе какого-либо технического устройства характеризуется степенью перемешивания частиц потока, которая определяет поля концентраций и температуры. Это обстоятельство служит предпосылкой установления типов моделей движущихся потоков по признаку перемешивания.

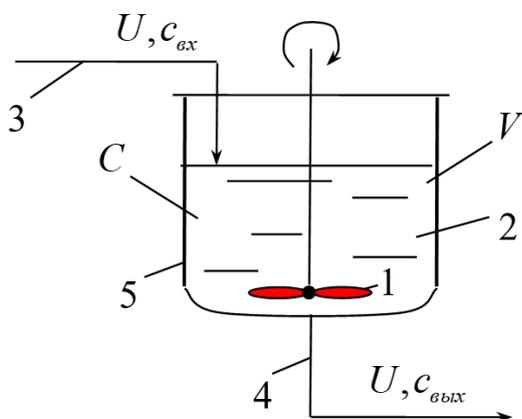
Модели структуры потоков (гидродинамические модели) математически записываются в виде дифференциальных уравнений, которые выражают связь между характерными параметрами процесса.

Требования при построении модели структуры потоков таковы:

- 1) Отражать физическую сущность реального потока и иметь достаточно простое математическое описание;
- 2) Давать возможность определить ее параметры (коэффициенты уравнений экспериментальным или расчетным способом);
- 3) Быть удобной для использования при расчетах теплоэнергетических процессов.

2.2. Физическая модель идеального перемешивания

Гидродинамическая установка в элементе какого-либо технического устройства при идеальном перемешивании характеризуется такой степенью перемешивания, что, например, концентрация вещества, входящего вместе с потоком на входе мгновенно распределяется с одинаковой концентрацией по всему объему элемента. Это позволяет принять следующую расчетную схему:



Расчетная схема элемента с идеальным перемешиванием:

- 1 – перемешивающее устройство; 2 – среда; 3,4 – входной и выходной потоки среды; 5 – корпус аппарата.

Потоки среды с объемным расходом $U [м^3/с]$, содержащим растворенное вещество с концентрацией $c_{вх} [кг/м^3]$, подается на вход элемента объемом $V [м^3]$ с мешалкой. В силу интенсивности вращения мешалки концентрация вещества мгновенно распределяется по объему. Причем среда выходит из элемента с тем же объемным расходом U .

Таким образом, физическая модель выражается следующей формализацией

$$\boxed{c_{вх} \xrightarrow[\text{скачок}]{\text{мгновенный}} c = c_{вых}}$$

2.3. Синтез математической модели идеального перемешивания

Прежде всего по определению массовый расход G вещества в потоке выражается через объемный по формуле:

$$G = Uc. [кг/с] \quad (2.1)$$

Пусть t – время, c ; $G_{вх}, G_{вых}, G$ – массовые расходы потока на входе, выходе и в элементе.

Воспользуемся общим балансовым соотношением для всего объема элемента:

$$[\text{накопление}] = [\text{приход}] - [\text{расход}];$$

считая $U = const$. Масса вещества, накопившегося за время dt в элементе составит

$$dM = (dG_{вх} - dG_{вых}) dt. \quad (2.2)$$

С помощью (2.1) балансовое соотношение (2.2) запишется в виде

$$dM = U(c_{вх} - c_{вых}) dt. \quad (2.3)$$

Разделим обе части (2.3) на объем элемента V

$$\frac{dM}{V} = \frac{U}{V}(c_{вх} - c_{вых}) dt, \quad (2.4)$$

но по определению концентрации имеем

$$dc = \frac{dM}{V}$$

и обозначая через $\tau = V/U$ – время пребывания потока в элементе, получаем после деления (2.4) на dt уравнение модели

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [c_{\text{ex}}(t) - c_{\text{вх}}(t)],$$

а согласно физической модели $c_{\text{вх}}(t) = c(t)$, поэтому модель идеального перемешивания есть

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [c_{\text{ex}}(t) - c(t)] \quad (2.5)$$

с очевидным начальным условием

$$c(0) = c_0. \quad (2.6)$$

Замечание. Т.к. явления переноса описываются одинаковыми по структуре математическими выражениями, то для переноса теплоты получим аналогичную модель

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [T_{\text{ex}}(t) - T(t)]; \quad (2.7)$$

$$T(0) = T_0. \quad (2.8)$$

Отметим также, что полученные модели относятся к классу математических моделей с сосредоточенными параметрами и представляют собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

2.4. Анализ модели идеального перемешивания

Подвергнем анализу, например, модель (2.5), (2.6), предварительно приведя ее к виду с нулевым начальным условием:

$$\frac{d(c - c_0)}{dt} = \frac{1}{\tau} [(c_{\text{ex}} - c_0) - (c - c_0)]; \quad (2.9)$$

$$c(0) - c_0 = 0. \quad (2.10)$$

Введем обозначения

$$c^* = c - c_0, \theta = t/\tau, \quad (2.11)$$

тогда задача (2.9), (2.10) переписется следующим образом:

$$\frac{dc^*}{d\theta} = c_{ex}^* - c^*; \quad (2.12)$$

$$c^*(0) = 0. \quad (2.13)$$

Применим к (2.12), (2.13) преобразование Лапласа:

$$pc^*(p) = c_{ex}^*(p) - c^*(p).$$

Т.к. $c^*(p) = c_{вых}^*(p)$, то по определению передаточной функции имеем передаточную функцию модели идеального перемешивания

$$W(p) = \frac{c_{вых}^*(p)}{c_{ex}^*(p)} = \frac{1}{p+1}.$$

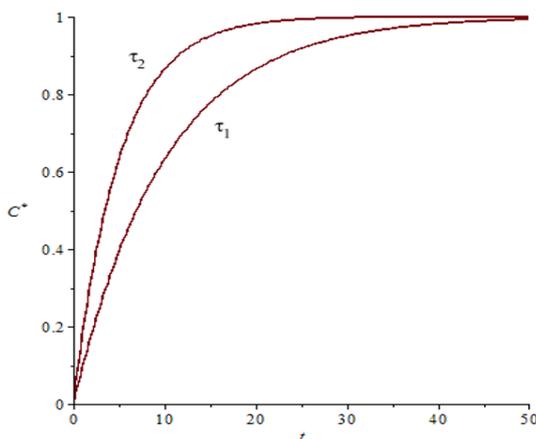
Рассмотрим случай непрерывной постоянной подачи потока. Пусть концентрация вещества на входе равна условной единице, т.е.

$$c_{ex}^*(\theta) = 1,$$

тогда $c_{ex}^*(p) = 1/p$, откуда

$$c_{вых}^*(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p} \right] = 1 - \exp(-t/\tau).$$

Качественный график изменения концентрации вещества в потоке имеет следующий вид для различных τ ($\tau_1 > \tau_2$).



Очевидно, что для меньшего времени пребывания в потоке, концентрация вещества на выходе быстрее достигает значения входной концентрации.

Рассмотрим случай возмущения концентрации вещества на входе, т.е.

$$c_{ex}^*(\theta) = \delta(\theta),$$

где $\delta(t)$ – функция Дирака, определяемая так

$$\delta(\theta) = \begin{cases} \infty, & \theta = 0; \\ 0, & \theta \neq 0, \end{cases}$$

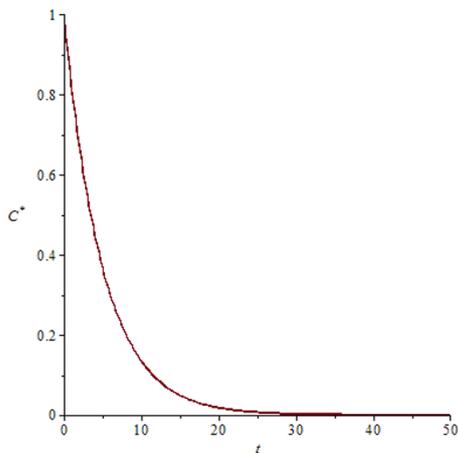
тогда

$$c_{ex}^*(p) = 1,$$

поэтому

$$c_{вых}^*(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \cdot 1 \right] = \exp(-t/\tau).$$

Качественное изменение концентрации в элементе показано на нижеследующем рис. 1, из которого легко определить нивелирование



возмущения в элементе, т.е. через какое примерное время система перейдет в устойчивое состояние.

Рис. 1. График изменения концентрации в элементе

2.5. Решение задач

Пример. Через аппарат объемом $V=1\text{м}^3$, в котором наблюдается гидродинамическая обстановка, близкая к идеальному перемешиванию, подается поток жидкости с объемным расходом $U=0,1\text{м}^3/\text{с}$ с имеющейся температурой на входе по закону

$$T_{ex}(t) = 50[1 + \exp(-t)], \quad [^{\circ}\text{C}].$$

Начальная температура среды в аппарате перед подачей составляет $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$. Определить время выхода работы аппарата на стационарный режим.

Решение:

1) Т.к. в аппарате наблюдается идеальное перемешивание, то запишем математическую модель идеального перемешивания для теплопереноса:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [T_{ex}(t) - T(t)];$$

$$T(0) = T_0$$

и представим ее в относительном виде с помощью замен:

$$T^*(t) = T(t) - T_0; \quad \theta = t/\tau,$$

т.е.

$$\frac{dT^*(\theta)}{d\theta} = T_{ex}^*(t) - T^*(t);$$

$$T^*(0) = 0.$$

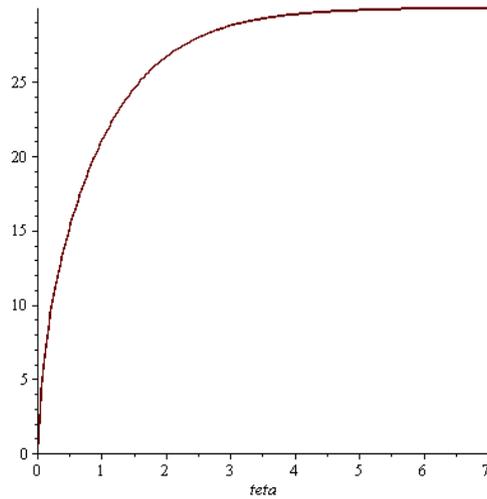
В нашем случае

$T_{ex}^*(\theta) = T_{ex}(t) - T_0 = 50[1 + \exp(-\tau\theta)] - 20$, но $\tau = V/U = 1/0,1 = 10$, тогда окончательно $T_{ex}^*(\theta) = 50[1 + \exp(-10\theta)] - 20$.

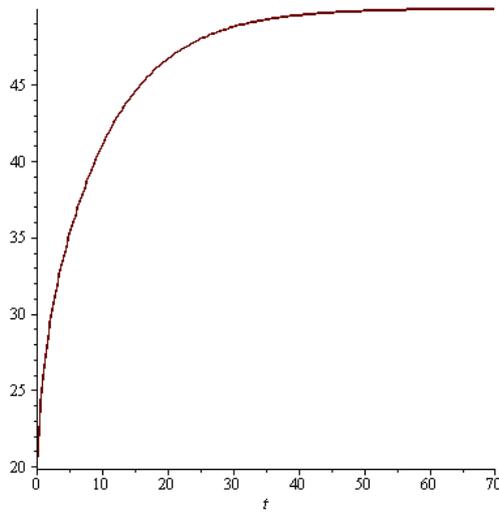
2) Воспользуемся математическим пакетом Maple, предварительно записав, что

$$T^*(\theta) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} L[T_{ex}^*(\theta)] \right\}.$$

```
> restart;
> with(inttrans):
> laplace(50*(1+exp(-10*teta))-20,teta,p);
      20 (4 p + 15)
      p (p + 10)
> invlaplace((20*(4*p+15))/(p*(p+10))*1/(p+1),p,teta);
30 - 220/9 e-teta - 50/9 e-10 teta
> with(plots):
> plot(30-(220/9)*exp(-teta)-(50/9)*exp(-10*teta),teta=0..7);
```



```
> plot(20+30-(220/9)*exp(-t/10)-(50/9)*exp(-t), t=0..70);
```

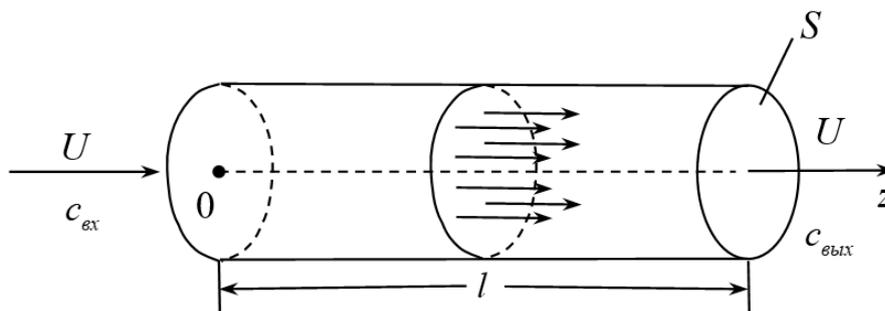


Из результирующего графика определяем время выхода на стационарный режим $t_{cm} \approx 60c$.

ТЕМА 3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ

3.1. Физическая модель идеального вытеснения

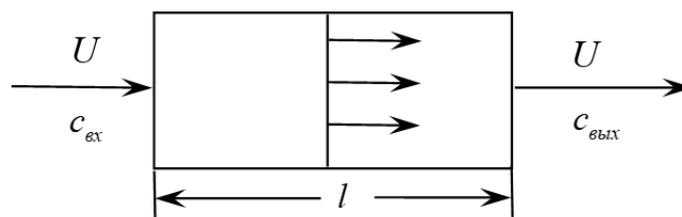
Модель идеального вытеснения – это теоретическая модель с идеализированной структурой движущегося потока. В соответствии с моделью идеального вытеснения принимается поршневое течение без перемешивания вдоль потока при равномерном распределении концентрации (температуры) вещества в направлении, перпендикулярном движению.



При этом время пребывания всех частиц в зоне идеального вытеснения одинаково и равно отношению объема зоны вытеснения $V = Sl$ к объемному расходу жидкости (газа)

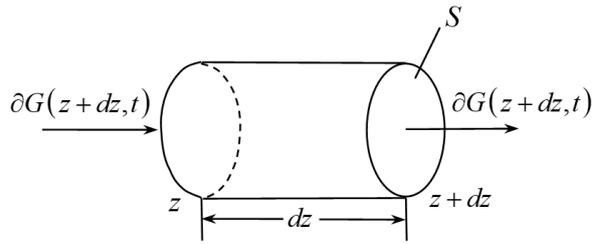
$$\tau = \frac{V}{U}.$$

Схематическое изображение:



3.2. Синтез математической модели идеального вытеснения

Рассмотрим элементарный объем в зоне идеального вытеснения



длиной по потоку dz и площадью поперечного сечения S и составим баланс вещества:

$$\partial M(z, t) = [\partial G(z, t) - \partial G(z + dz, t)] \partial t; \quad (3.1)$$

означающий, какое количество вещества накопится в элементарном объеме за время ∂t .

Т.к.

$$G = cU,$$

то (3.1) перепишем в виде

$$\partial M(z, t) = [Uc(z, t) - Uc(z + dz, t)] \partial t; \quad (3.2)$$

разложим в ряд Тейлора $c(z + dz, t)$ в окрестности точки z , ограничиваясь линейным слагаемым:

$$c(z + dz, t) \approx c(z, t) + \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} dz. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3), соотношение (3.2) будет

$$\partial M(z, t) = U \left[c(z, t) - c(z, t) + \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} dz \right] \partial t = -U \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} dz \partial t, \quad (3.4)$$

но

$$\partial c(z, t) = \frac{\partial M(z, t)}{S \partial z},$$

поэтому (3.4) трансформируется в

$$\frac{\partial c(z, t)}{\partial t} = -\frac{U}{S} \frac{\partial c(z, t)}{\partial z},$$

а т.к. $u = U/S$ [м/с] – скорость, то окончательно получим уравнение модели

$$\frac{\partial c(z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial c(z, t)}{\partial z}, \quad (3.5)$$

к которому добавляется начальное условие

$$c(z, 0) = c_0 \quad (3.6)$$

и граничные условия на входе

$$c(0, t) = c_{ex}(t). \quad (3.7)$$

Т.к. замены переноса вещества и температуры аналогичны по форме записи законов Фика и Фурье, то если рассматривается температура потока, то

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}; \quad (3.8)$$

$$T(z, 0) = T_0; \quad (3.9)$$

$$T(0, t) = T_{ex}(t). \quad (3.10)$$

3.3. Решение уравнения модели

Приведем, например, систему (3.8)–(3.10) к безразмерному виду, вводя обозначения: $\theta = ut/l$; $Z = z/l$; $\Omega(Z, \theta) = [T(z, t) - T_0]/T_0$, где $(T_0 \neq 0)$, тогда получим

$$\frac{\partial \Omega(Z, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Omega(Z, \theta)}{\partial Z}; \quad (3.11)$$

$$\Omega(Z, 0) = 0; \quad (3.12)$$

$$\Omega(0, \theta) = \Omega_{ex}(\theta). \quad (3.13)$$

Применим к (3.11)–(3.13) интегральное преобразование Лапласа по переменной θ :

$$p\Omega_L(Z, p) = -\frac{d\Omega_L(Z, p)}{dZ}; \quad (3.14)$$

$$\Omega_L(0, p) = L[\Omega_{ex}(\theta)]. \quad (3.15)$$

Найдем общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.14)

$$\frac{d\Omega_L(Z, p)}{dZ} = -p\Omega_L(Z, p),$$

откуда

$$\frac{d\Omega_L(Z, p)}{\Omega_L(Z, p)} = -pdZ;$$

или

$$d \ln \Omega_L(Z, p) = -pdZ,$$

тогда

$$\int d \ln \Omega_L(Z, p) = -p \int dZ,$$

т.е.

$$\ln \Omega_L(Z, p) = -pZ + C, \quad \text{где } C = \text{const},$$

поэтому

$$\Omega_L(Z, p) = C \exp(-pZ),$$

а с учетом граничного условия (3.15) получим окончательно в изображениях

$$\Omega_L(Z, p) = L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)] \exp(-pZ). \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует вид передаточной функции для модели идеального вытеснения

$$W(p) = \Omega_L(1, p) / L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)] = \exp(-p). \quad (3.17)$$

Пусть $T_{\text{ex}}(t) = 2T_0$, тогда $L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)] = \frac{1}{p}$ и согласно (3.16), возвращаясь к оригиналу

$$\Omega(Z, \theta) = L^{-1}[\Omega_L(Z, p)] = L^{-1}\{L[T_{\text{ex}}(\theta)] \exp(-pZ)\} = L^{-1}\left[\frac{1}{p} \exp(-pZ)\right] = 1(\theta - Z).$$

Вернемся к размерным величинам

$$T(z, t) = T_0 + T_0[1(ut - z)] = T_0[1 + 1(ut - z)].$$

3.4. Пример применения модели идеального вытеснения

Пусть по трубе движется газовзвесь монодисперсных (одинаковых по размеру) частиц. Объемный расход несущей среды U [$\text{м}^3/\text{с}$]; радиус трубы r_0 ; счетная концентрация частиц на входе в трубу составляет n_0 (в начальный

момент частицы отсутствовали в трубе). Осаждение частиц в трубе происходит по закону kn . Определить концентрацию частиц на выходе из трубы, считая гидродинамический режим газозвеси идеальным вытеснением, если ее длина l .

В этом случае модель примет вид

$$\frac{\partial n(z,t)}{\partial t} = -u \frac{\partial n(z,t)}{\partial z} - kn(z,t); \quad (3.18)$$

$$n(z,0) = 0; \quad (3.19)$$

$$n(0,t) = n_0. \quad (3.20)$$

Введем безразмерные переменные: $\theta = ut/l \left[u = U / (\pi r_0^2) \right]$; $Z = z/l$; $N(Z,\theta) = n(z,t)/n_0$, тогда (3.18)–(3.20) запишется в виде:

$$\frac{\partial N(Z,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial N(Z,\theta)}{\partial Z} - KN(Z,\theta); \quad (3.21)$$

$$N(Z,0) = 0; \quad (3.22)$$

$$N(0,\theta) = 1, \quad (3.23)$$

где

$$K = \frac{lkn_0}{u}.$$

Применим преобразование Лапласа к системе (3.21)–(3.23)

$$pN_L(Z,p) = -\frac{\partial N_L(Z,p)}{\partial Z} - KN_L(Z,p)$$

или

$$\frac{dN_L(Z,p)}{dZ} = -(p+K)N_L(Z,p); \quad (3.24)$$

$$N(0,p) = \frac{1}{p}. \quad (3.25)$$

Решим (3.24), (3.25):

$$d \ln N_L(Z,p) = -(p+K)dZ;$$

$$N_L(Z, p) = C \exp[-(p + K)Z];$$

или

$$N_L(Z, p) = \frac{1}{p} \exp(-pZ) \exp(-KZ).$$

Оригинал есть

$$N(Z, \theta) = 1(\theta - Z) \exp(-KZ).$$

На выходе из трубы

$$N(1, \theta) = 1(\theta - 1) \exp(-K),$$

в размерном виде

$$n(l, t) = n_0 1(tu - l) \exp\left(-\frac{lk n_0}{u}\right).$$

3.5. Решение задач

Пример 1. По охлаждаемой трубе радиусом r_0 и длиной l движется среда в режиме идеального вытеснения с объемным расходом U . Закон охлаждения пропорционален температуре с коэффициентом пропорциональности K .

Температура среды на входе меняется по закону $T_0 \exp(-ut/l)$. Начальная температура в трубе T_0 . Найти температуру на выходе из трубы.

Решение:

Запишем математическую модель в размерном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - KT(z, t); \\ T(z, 0) = T_0; \\ T(0, t) = T_0 f(t), \end{array} \right.$$

где $u = U/(\pi r_0^2)$; $f(t) = \exp(-ut/l)$.

Приведем уравнения модели к безразмерному виду с помощью относительных величин: $\theta = ut/l$; $Z = z/l$; $\Omega(Z, \theta) = T(z, t)/T_0$; $K = \frac{kT_0 l}{u}$.

В итоге получим запись математической модели в безразмерном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega(Z, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Omega(Z, \theta)}{\partial Z} - K\Omega(Z, \theta); \\ \Omega(Z, 0) = 1; \\ \Omega(0, \theta) = \exp(-\theta), \end{array} \right.$$

Применим преобразование Лапласа по θ :

$$p\Omega_L(Z, p) - 1 = -\frac{d\Omega_L(Z, p)}{dZ} - K\Omega_L(Z, p);$$

$$\Omega_L(0, p) = 1/(1 + p),$$

или

$$\frac{d\Omega_L(Z, p)}{dZ} + (p + K) \cdot \Omega_L(Z, p) = 1;$$

$$\Omega_L(0, p) = 1/(1 + p).$$

Решение полученного уравнения имеет вид:

$$\Omega_L(Z, p) = \exp[-(p + K)Z] \cdot \left\{ \frac{1}{1 + p} + \int_0^Z \exp[(p + K)Z] dZ \right\} =$$

$$= \exp[-(p + K)Z] \cdot \left\{ \frac{1}{1 + p} + \frac{1}{p + K} \exp[(p + K)Z] \Big|_0^Z \right\} =$$

$$= \exp[-(p + K)Z] \cdot \left\langle \frac{1}{1 + p} + \frac{1}{p + K} \{ \exp[(p + K)Z] - 1 \} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{1 + p} \exp[-(p + K)Z] + \frac{1}{p + K} \{ 1 - \exp[-(p + K)Z] \}.$$

Найдем оригинал:

$$\Omega(Z, \theta) = L^{-1}[\Omega_L(Z, p)] = L^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + p} \cdot \exp[-(p + K)Z] \right\} + L^{-1} \left[\frac{1}{p + K} \right] -$$

$$- L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + K} \exp[-(p + K)Z] \right\}.$$

$$1) \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{1+p} \cdot \exp[-(p+K)Z] \right\} = \exp(-KZ) L^{-1} \left\{ \frac{1}{1+p} \cdot \exp[-pZ] \right\} = \\ = \exp(-KZ) 1(\theta - Z) \exp(Z - \theta).$$

$$2) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{p+K} \right] = \exp(-K\theta).$$

$$3) \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+K} \exp[-(p+K)Z] \right\} = \exp(-KZ) L^{-1} \left[\frac{1}{p+K} \exp(-pZ) \right] = \\ = 1(\theta - Z) \exp(-K\theta + KZ) = 1(\theta - Z) \exp[-K[\theta - Z]].$$

Т.е. решение есть

$$\Omega(Z, \theta) = \exp(-KZ) 1(\theta - Z) \exp(Z - \theta) + \exp(-K\theta) - 1(\theta - Z) \exp[-K[\theta - Z]].$$

На выходе:

$$\Omega(1, \theta) = \exp(-K) 1(\theta - 1) \exp(1 - \theta) + \exp(-K\theta) - 1(\theta - 1) \exp[-K[\theta - 1]],$$

для $\theta > 1$

$$\Omega(1, \theta) = \exp(-K) \exp(1 - \theta) + \exp(-K\theta) - \exp[-K[\theta - 1]].$$

Пример 2. Найти температуру потока на выходе из канала $T_{\text{вых}}$, если его температура на входе $T_{\text{вх}}$; площадь поперечного сечения канала S ; длина канала l ; объемный расход U ; константа охлаждения k ; начальная температура в канале T_0 ; через время t_0 .

Решение:

Запишем математическую модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - kT(z, t); \\ T(z, 0) = T_0; \\ T(0, t) = T_{\text{вх}}. \end{array} \right.$$

Приведем систему к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \left(\frac{T - T_0}{T_{ex} - T_0} \right)}{\partial \left(\frac{tu}{l} \right)} = - \frac{\partial \left(\frac{T - T_0}{T_{ex} - T_0} \right)}{\partial \left(\frac{z}{l} \right)} - \frac{kl}{u} \left(\frac{T - T_0}{T_{ex} - T_0} \right) + \frac{kl}{u} \frac{T_0}{T_{ex} - T_0};$$

$$\frac{T(z, 0) - T_0}{T_{ex} - T_0} = 0;$$

$$\frac{T(0, t) - T_0}{T_{ex} - T_0} = 1.$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - K \Omega + K A_T; \\ \Omega(Z, 0) = 0; \\ \Omega(0, \theta) = 1, \end{cases}$$

где

$$\theta = tu/l; \quad Z = z/l; \quad \Omega = (T - T_0)/(T_{ex} - T_0); \quad K = kl/u;$$

$$A_T = T_0/(T_{ex} - T_0).$$

Применим преобразование Лапласа к полученной системе:

$$s \Omega_L = - \frac{d \Omega_L}{d Z} - K \Omega_L + K A_T \frac{1}{s};$$

$$\Omega_L(0, s) = \frac{1}{s},$$

или

$$\frac{d \Omega_L}{d Z} + (K + s) \cdot \Omega_L = K A_T \frac{1}{s};$$

$$\Omega_L(0, s) = \frac{1}{s}.$$

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= \exp[-(K+s)Z] \cdot \left\{ \frac{1}{s} + \int_0^Z KA_T \frac{1}{s} \exp[(K+s)Z] dZ \right\} = \\
&= \exp[-(K+s)Z] \cdot \left\{ \frac{1}{s} + \frac{KA_T}{s(K+s)} \exp[(K+s)Z] \Big|_0^Z \right\} = \\
&= \frac{1}{s} \exp[-(K+s)Z] + \frac{KA_T}{s(K+s)} \{1 - \exp[-(K+s)Z]\} = \\
&= \exp(-KZ) \frac{1}{s} \exp(-Zs) + \frac{KA_T}{s(K+s)} - KA_T \exp(-KZ) \cdot \frac{1}{s(K+s)} \exp(-Zs).
\end{aligned}$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} \exp(-Zs) \right] = 1(\theta - Z);$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(K+s)} \right] = -\frac{1}{K} \exp(-K\theta) + \frac{1}{K} = \frac{1}{K} [1 - \exp(-K\theta)];$$

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left[\frac{1}{s(K+s)} \exp(-Zs) \right] &= L^{-1} \left[\frac{1}{Ks} \exp(-Zs) - \frac{1}{K(K+s)} \exp(-Zs) \right] = \\
&= \frac{1}{K} 1(\theta - Z) - \frac{1}{K} 1(\theta - Z) \exp[-K(\theta - Z)] = \\
&= \frac{1}{K} 1(\theta - Z) \{1 - \exp[-K(\theta - Z)]\}.
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\Omega(Z, \theta) = 1(\theta - Z) \exp(-KZ) + A_T [1 - \exp(-K\theta)] - A_T 1(\theta - Z) \{1 - \exp[-K(\theta - Z)]\}.$$

Далее вычисляем:

$$u = U/s; \quad K = kl/u; \quad A_T = T_0 / (T_{\text{ex}} - T_0).$$

$$\text{Рассчитываем: } \theta_0 = t_0 u / l; \quad Z_0 = z / l.$$

Если $\theta_0 > Z_0$, то

$$\Omega(Z_0, \theta_0) = \exp(-KZ_0) + A_T [1 - \exp(-K\theta_0)] - A_T \{1 - \exp[-K(\theta_0 - Z_0)]\}.$$

$$\text{Если } \theta_0 < Z_0, \text{ то } \Omega(Z_0, \theta_0) = A_T [1 - \exp(-K\theta_0)].$$

$$\text{Окончательно: } T_{\text{был}} = T_0 + (T_{\text{ex}} - T_0) \Omega(Z_0, \theta_0).$$

ТЕМА 4. ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ

4.1. Физические свойства диффузионной модели

В прошлых темах нами рассмотрены идеальные модели по признаку перемешивания: модель идеального перемешивания характеризуется бесконечно интенсивным перемешиванием; модель идеального вытеснения отсутствием перемешивания вообще. Возникает вопрос: а существует ли возможность построить математическую модель, которая учитывала бы количественно меру перемешивания? При этом идеальные модели были бы крайними (частными) случаями этой модели.

Для положительного ответа на этот вопрос существуют предпосылки в виде закона Фурье

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T \quad (4.1)$$

и закона Фика

$$j = -D \operatorname{grad} c, \quad (4.2)$$

для переноса субстанций теплоты и массы, характеризуемые температурой T и концентрацией c .

По своему физическому смыслу законы (4.1) и (4.2) характеризуют перенос под действием градиента и если законы (4.1) и (4.2) записать для движущейся среды со скоростью u , то получим

$$q = c_p \rho u T - \lambda \operatorname{grad} T, \quad (4.3)$$

$$j = uc - D \operatorname{grad} c, \quad (4.4)$$

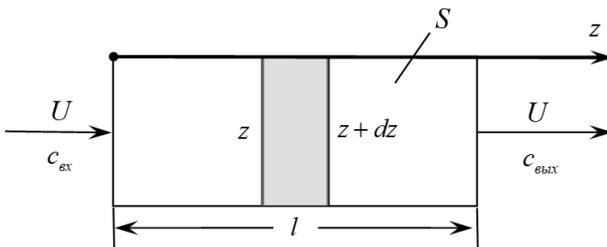
где c_p – массовая теплоемкость среды, Дж/(кгК); ρ – плотность среды, кг/м³; λ – теплоемкость среды, Вт/(м·К); D – коэффициент диффузии, м²/с.

Пусть $\lambda = D = 0$, то, очевидно, получим идеальное перемешивание, а при $\lambda = D = \infty$ получим, что $\operatorname{grad} T$ и $\operatorname{grad} c$ константы, т.е. константы T и c , а это означает однородность полей и эта ситуация соответствует идеальному перемешиванию.

4.2. Синтез диффузионной модели

Рассмотрим канал, по которому движется среда с объемным расходом U с концентрацией вещества на входе $c_{\text{вх}}$. Выделим идеальный объем, считая, как и в случае идеального вытеснения однонаправленность движения среды.

Масса вещества, входящего в этот элементарный объем через сечение z (oz -координатная ось, направленная от входа в канал по направлению движения среды) за время ∂t составляет



$$M(z, t) = \left[uc(z, t) - D \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} \right] S \partial t$$

в соответствии с (4.4). Масса вещества, выходящая из этого элементарного объема, т.е. через сечение $z + dz$ за время ∂t составляет

$$M(z + dz, t) = \left[uc(z + dz, t) - D \frac{\partial c(z + dz, t)}{\partial z} \right] S \partial t.$$

Если ограничиваться линейными составляющими в разложении в ряд Тейлора; т.е.

$$c(z + dz, t) \approx c(z, t) + \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} dz;$$

$$\frac{\partial c(z + dz, t)}{\partial z} \approx \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 c(z, t)}{\partial z^2} dz,$$

то приращение массы вещества в элементарном объеме может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\partial M(z,t) &= M(z,t) - M(z+dz,t) = \\
&= \left[\cancel{uc(z,t)} - D \frac{\cancel{\partial c(z,t)}}{\partial z} - \cancel{uc(z,t)} - u \frac{\partial c(z,t)}{\partial z} dz + \right. \\
&\quad \left. + D \frac{\cancel{\partial c(z,t)}}{\partial z} + D \frac{\partial^2 c(z,t)}{\partial z^2} \right] S \partial t = \\
&= \left[-u \frac{\partial c(z,t)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 c(z,t)}{\partial z^2} \right] S dz \partial t.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Разделив (4.5) на $S dz \partial t$ и имея в виду, что

$$\frac{\partial M(z,t)}{S dz \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial M(z,t)}{\partial V} \right] = \frac{\partial c(z,t)}{\partial t},$$

получим уравнение диффузионной модели для переноса вещества

$$\frac{\partial c(z,t)}{\partial t} = -u \frac{\partial c(z,t)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 c(z,t)}{\partial z^2}; \tag{4.6}$$

которое замыкается начальным условием

$$c(z,0) = c_0(z); \tag{4.7}$$

и граничными условиями

$$c(0,t) = c_{ex}(t); \quad \frac{\partial c(l,t)}{\partial z} = 0. \tag{4.8}$$

Учитывая аналогия между переносом вещества и теплоты, а также идентичную математическую запись законов переноса в форме (4.3) и (4.4), запишем уравнение диффузионной модели для переноса теплоты:

$$c_p \rho \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = -c_p \rho u \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}; \tag{4.9}$$

$$T(z,0) = T_0(z); \tag{4.10}$$

$$T(0,t) = T_{ex}(t); \quad \frac{\partial T(l,t)}{\partial z} = 0. \tag{4.11}$$

4.3. Решение уравнения диффузионной модели

На практике наиболее часто встречается случай, когда

$$c_0(z) = c_0 = const; \quad c(0, t) = c_{\text{ex}} = const,$$

тогда уравнения (4.6)–(4.9) примут вид:

$$\frac{\partial c(z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 c(z, t)}{\partial z^2}; \quad (4.12)$$

$$c(z, 0) = c_0; \quad (4.13)$$

$$c(0, t) = c_{\text{ex}}; \quad \frac{\partial c(l, t)}{\partial z} = 0. \quad (4.14)$$

Прежде чем решать (4.12)–(4.14) приведем уравнение, начальное и граничное условие к безразмерному виду с помощью относительных независимых и зависимых переменных: $\theta = tu/l$; $Z = z/l$; $C(Z, \theta) = [c(z, t) - c_0] / (c_{\text{ex}} - c_0)$; $Pe = lu/D$ – диффузионное число Пекле.

$$\frac{\partial C(Z, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial C(Z, \theta)}{\partial Z} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C(Z, \theta)}{\partial Z^2}; \quad (4.15)$$

$$C(Z, 0) = 0; \quad (4.16)$$

$$C(0, \theta) = 1; \quad \frac{\partial C(1, \theta)}{\partial Z} = 0. \quad (4.17)$$

Применим к (4.15)–(4.17) преобразование Лапласа по переменной θ :

$$L\left[\frac{\partial C(Z, \theta)}{\partial \theta}\right] = -L\left[\frac{\partial C(Z, \theta)}{\partial Z}\right] + L\left[\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C(Z, \theta)}{\partial Z^2}\right];$$

$$L[C(Z, 0)] = 0;$$

$$L[C(0, \theta)] = L[1]; \quad L\left[\frac{\partial C(1, \theta)}{\partial Z}\right] = 0.$$

Т.к.

$$L\left[\frac{\partial C(Z,\theta)}{\partial \theta}\right] = pC_L(Z,p); \quad L\left[\frac{\partial C(Z,\theta)}{\partial Z}\right] = \frac{dC_L(Z,\theta)}{dZ};$$

$$L\left[\frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C(Z,\theta)}{\partial Z^2}\right] = \frac{1}{Pe} \frac{d^2 C_L(Z,p)}{dZ^2}; \quad L[1] = \frac{1}{p};$$

то

$$\frac{d^2 C_L(Z,p)}{dZ^2} - Pe \frac{dC_L(Z,p)}{dZ} - pPe C_L(Z,p) = 0; \quad (4.18)$$

$$C_L(0,p) = \frac{1}{p}; \quad \frac{\partial C_L(1,p)}{\partial Z} = 0. \quad (4.19)$$

(для справки)

Составим характеристическое уравнение для (4.18):

$$k^2 - Pe k - pPe = 0,$$

решение которого

$$k_{1,2} = \frac{Pe}{2} \pm \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe},$$

тогда общее решение имеет вид

$$C_L(Z,p) = C_1 \exp\left[\left(\frac{Pe}{2} + \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe}\right)Z\right] +$$

$$+ C_2 \exp\left[\left(\frac{Pe}{2} - \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe}\right)Z\right] =$$

$$= \left[C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z\right) \right] \exp\left(\frac{Pe}{2}Z\right) =$$

$$= \left[C_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z\right) + C_2 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z\right) \right] \exp\left(\frac{Pe}{2}Z\right).$$

Найдем $dC_L(Z,p)/dZ$:

$$\begin{aligned} \frac{dC_L(Z, p)}{dZ} = & \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \left[C_1 ch \left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z \right) + \right. \\ & \left. + C_2 sh \left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z \right) \right] \exp\left(\frac{Pe}{2} Z\right) + \\ & + \frac{Pe}{2} \left[C_1 sh \left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z \right) + C_2 ch \left(\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \cdot Z \right) \right] \exp\left(\frac{Pe}{2} Z\right). \end{aligned}$$

Из условий (4.19) имеем:

$$C_L(0, p) = C_2 = \frac{1}{p};$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_L(1, p)}{dZ} = & \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \left(C_1 ch \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} + \frac{1}{p} sh \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \right) \exp\left(\frac{Pe}{2}\right) + \\ & + \frac{Pe}{2} \left(C_1 sh \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} + \frac{1}{p} ch \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} \right) \exp\left(\frac{Pe}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe} = \alpha,$$

тогда

$$\alpha \left(C_1 ch \alpha + \frac{1}{p} sh \alpha \right) + \frac{Pe}{2} \left(C_1 sh \alpha + \frac{1}{p} ch \alpha \right) = 0;$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{p} \cdot \frac{\alpha sh \alpha + Pe/2 ch \alpha}{\alpha ch \alpha + Pe/2 sh \alpha}.$$

Частное решение в итоге будет:

$$C_L(Z, p) = \frac{1}{p} \cdot \left[-\frac{\alpha sh \alpha + Pe/2 ch \alpha}{\alpha ch \alpha + Pe/2 sh \alpha} sh(\alpha Z) + ch(\alpha Z) \right] \exp\left(\frac{Pe}{2} Z\right).$$

Решение задачи в изображениях (4.18), (4.19) таково:

$$C_L(Z, p) = \frac{1}{p} \cdot \left[-\frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha + Pe/2 \operatorname{ch} \alpha}{\alpha \operatorname{ch} \alpha + Pe/2 \operatorname{sh} \alpha} \operatorname{sh}(\alpha Z) + \operatorname{ch}(\alpha Z) \right] \exp\left(\frac{Pe}{2} Z\right), \quad (4.20)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{Pe^2}{4} + pPe}.$$

(для справки)

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha + Pe/2 \operatorname{ch} \alpha}{\alpha \operatorname{ch} \alpha + Pe/2 \operatorname{sh} \alpha} \operatorname{sh}(\alpha Z) + \operatorname{ch}(\alpha Z) \right] = \left[-\alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha Z) - \right. \\ & \left. -\frac{Pe}{2} \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh}(\alpha Z) + \alpha \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch}(\alpha Z) + \frac{Pe}{2} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch}(\alpha Z) \right] / (\alpha \operatorname{ch} \alpha + Pe/2 \operatorname{sh} \alpha) = \\ & = \left\{ \alpha \left[\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch}(\alpha Z) - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(\alpha Z) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{Pe}{2} \left[\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch}(\alpha Z) - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh}(\alpha Z) \right] \right\} / \left(\alpha \operatorname{ch} \alpha + \frac{Pe}{2} \operatorname{sh} \alpha \right) = \\ & = \left\{ \alpha \operatorname{ch}[\alpha(1-Z)] + \frac{Pe}{2} \operatorname{sh}[\alpha(1-Z)] \right\} / \left(\alpha \operatorname{ch} \alpha + \frac{Pe}{2} \operatorname{sh} \alpha \right) = \\ & = \left\{ \operatorname{ch}[\alpha(1-Z)] + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh}[\alpha(1-Z)] \right\} / \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh} \alpha \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_L(Z, p) = \exp\left(\frac{Pe}{2} Z\right) \cdot \left\{ \operatorname{ch}[\alpha(1-Z)] + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh}[\alpha(1-Z)] \right\} / \\ / \left[p \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh} \alpha \right) \right]; \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \varphi(Z, p) &= \operatorname{ch}[\alpha(1-Z)] + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh}[\alpha(1-Z)]; \\ \psi(p) &= p \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh} \alpha \right). \end{aligned}$$

Найдем корни знаменателя: $\psi(p) = 0$

$$p \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{sh} \alpha \right) = 0$$

1) $p = 0$;

2) корень уравнения $th\alpha = -\frac{2\alpha}{Pe}$;

3) $\alpha = \mu i$: $ch \mu i + \frac{Pe}{2\mu i} sh \mu i = 0$; $th \mu = -\frac{2\mu}{Pe}$.

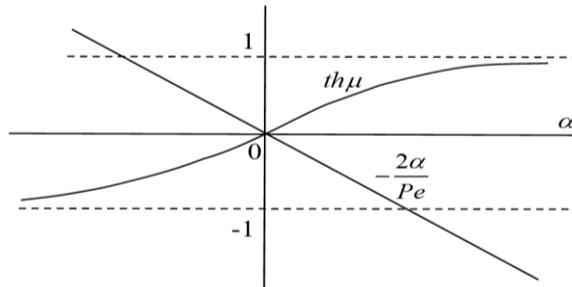


Рис. 2. Корни знаменателя (случай 2)

Из рис. 2 следует, что действительных корней нет в случае 2

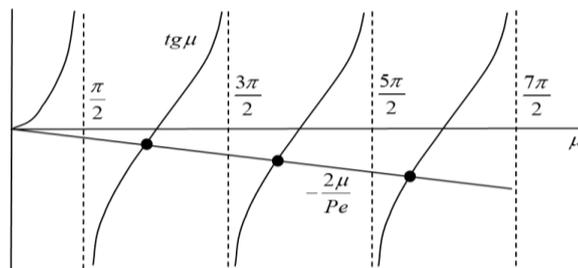


Рис. 3. Корни знаменателя (случай 3)

Из рис. 3 следует, что в случае 3 число корней бесконечно много и они счетные.

Воспользуемся формулой обращения изображения согласно 2-й теореме Ващенко-Захарченко

$$C(Z, \theta) = \frac{\varphi(Z, 0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(Z, \mu_n)}{\psi'(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 \theta).$$

Найдем $\psi'(p)$:

$$\begin{aligned} \psi'(p) &= ch \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} sh \alpha + p \left(sh \alpha \cdot \alpha'_p - \frac{Pe}{2} \frac{\alpha'_p}{\alpha^2} sh \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} ch \alpha \cdot \alpha'_p \right) = \\ &= ch \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} sh \alpha + p \alpha'_p \left(sh \alpha - \frac{Pe}{2\alpha^2} sh \alpha + \frac{Pe}{2\alpha} ch \alpha \right); \quad \alpha'_p = \frac{Pe}{2\alpha} \end{aligned}$$

$$\psi'(p) = ch\alpha + \frac{Pe}{2\alpha} sh\alpha + \frac{pPe}{2\alpha} \left(sh\alpha - \frac{Pe}{2\alpha^2} sh\alpha + \frac{Pe}{2\alpha} ch\alpha \right).$$

Найдем $[\alpha(0) = Pe/2]$.

$$\begin{aligned} \varphi(Z, 0) &= ch[\alpha(0)(1-Z)] + \frac{Pe}{2\alpha(0)} sh[\alpha(0)(1-Z)] = \\ &= ch\left[\frac{Pe}{2}(1-Z)\right] + sh\left[\frac{Pe}{2}(1-Z)\right] = \exp\left[\frac{Pe}{2}(1-Z)\right]. \end{aligned}$$

$$\psi'(0) = ch\frac{Pe}{2} + sh\frac{Pe}{2} = \exp\frac{Pe}{2}.$$

$$\frac{\varphi(Z, 0)}{\psi'(0)} = \exp\left[\frac{Pe}{2}(1-Z)\right] / \exp\frac{Pe}{2} = \exp\left(-\frac{Pe}{2}Z\right).$$

$$\begin{aligned} \varphi(Z, \mu_n) &= ch[\mu_n i(1-Z)] + \frac{Pe}{2\mu_n i} sh[\mu_n i(1-Z)] = \\ &= \cos[\mu_n(1-Z)] - \frac{Pe}{2\mu_n} \sin[\mu_n(1-Z)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'(\mu_n) &= -\left(\frac{\mu_n^2}{Pe} + \frac{Pe}{4}\right) \frac{Pe}{2\mu_n i} sh\mu_n i + \left(\frac{\mu_n^2}{Pe} + \frac{Pe}{4}\right) \frac{Pe^2}{4(\mu_n i)^3} sh\mu_n i - \\ &- \left(\frac{\mu_n^2}{Pe} + \frac{Pe}{4}\right) \frac{Pe^2}{4(\mu_n i)^2} ch\mu_n i = -\left(\frac{\mu_n^2}{Pe} + \frac{Pe}{4}\right) \left(\frac{Pe}{2\mu_n} \sin \mu_n - \frac{Pe^2}{4\mu_n^3} \sin \mu_n + \frac{Pe^2}{4\mu_n^2} \cos \mu_n\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(Z, \mu_n)}{\psi'(\mu_n)} &= \left\{ \cos[\mu_n(1-Z)] - \frac{Pe}{2\mu_n} \sin[\mu_n(1-Z)] \right\} / \\ &/ \left[-\left(\frac{\mu_n^2}{Pe} + \frac{Pe}{4}\right) \left(\frac{Pe}{2\mu_n} \sin \mu_n - \frac{Pe^2}{4\mu_n^3} \sin \mu_n + \frac{Pe^2}{4\mu_n^2} \cos \mu_n\right) \right]. \end{aligned}$$

Оригинал (4.20) будет:

$$\begin{aligned} C(Z, \theta) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos[\mu_n(1-Z)] - \frac{Pe}{2\mu_n} \sin[\mu_n(1-Z)] \right\} \exp\left(\frac{Pe}{2}Z - \mu_n^2\theta\right) / \\ &/ \left[\left(\frac{\mu_n^2}{Pe} + \frac{Pe}{4}\right) \left(\frac{Pe}{2\mu_n} \sin \mu_n - \frac{Pe^2}{4\mu_n^3} \sin \mu_n + \frac{Pe^2}{4\mu_n^2} \cos \mu_n\right) \right]; \text{ где } \mu_n \text{ — корни уравнения} \end{aligned}$$

$$th\mu_n = -\frac{2\mu_n}{Pe}.$$

ТЕМА 5. КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Общая характеристика комбинированных моделей

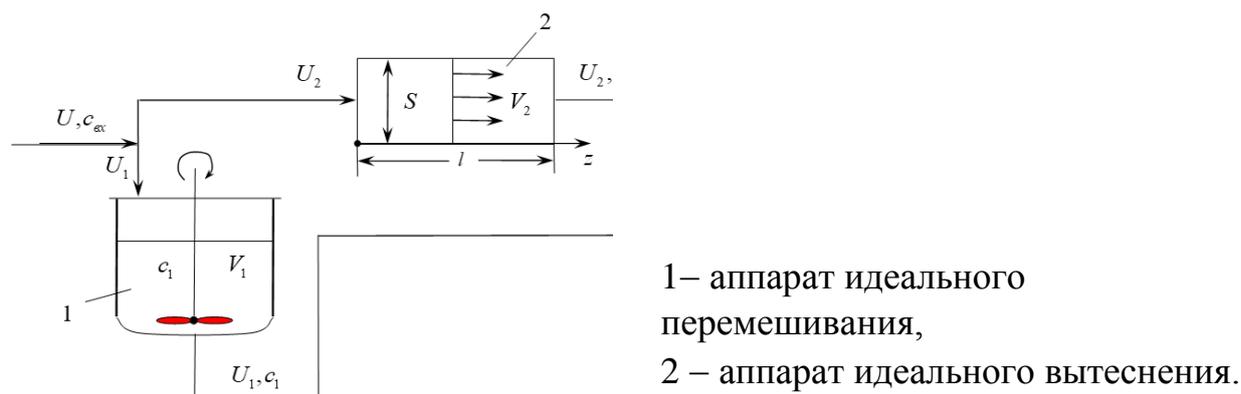
Принцип построения комбинированных моделей состоит в том, что исследуемый процесс рассматривается расчлененным на отдельные участки (зоны), соединенные последовательно, параллельно или по схеме с обратной связью, которые отличаются неодинаковой структурой потоков.

Застойная зона – область аппарата медленно обменивается импульсом, массой или теплотой с основным объемом.

Байпасный поток – часть потока, движущегося параллельно аппарату. В результате чего часть потока попадает на выход аппарата, не претерпевая никаких изменений.

Циркуляционные потоки – это возврат потока, т.е. часть потока выводится за пределы аппарата и возвращается в него снова.

5.2. Моделирование объекта, сочетающего параллельные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения



Уравнение для участка идеального перемешивания есть

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} [c_{\text{ex}}(t) - c_1(t)] \quad (5.1)$$

с начальным условием

$$c_1(0) = c_0. \quad (5.2)$$

Уравнение для участка идеального вытеснения есть

$$\frac{dc_2(z,t)}{dt} = -u \frac{dc_2(z,t)}{dz} \quad (5.3)$$

с начальным условием

$$c_2(0) = c_0 \quad (5.4)$$

и граничным условием

$$c_2(0, t) = c_{ex}(t). \quad (5.5)$$

В точке M запишем для массового расхода на выходе

$$G_{\text{вых}}(t) = G_1(t) + G_2(t), \quad (5.6)$$

где $G_1(t), G_2(t)$ – массовые расходы по участку идеального перемешивания и идеального вытеснения; которое перепишем в виде

$$Uc_{\text{вых}}(t) = U_1c_1(t) + U_2c_2(l, t),$$

откуда

$$c_{\text{вых}}(t) = (1 - \beta)c_1(t) + \beta c_2(l, t), \quad (5.7)$$

где $\frac{U_1}{U} = 1 - \beta$; $\frac{U_2}{U} = \beta$; $\tau_1 = V_1/U_1$; $u = U_2/S$; $l = \frac{V_l}{S}$.

Система (5.1)–(5.7) является математической моделью рассматриваемого объекта. Учитывая ее несопряженный характер, т.е. подсистемы (5.1), (5.2) и (5.3)–(5.5) можно решать отдельно друг от друга, тогда

$$c_1(\theta_1) = c_0 + L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \cdot L[c_{ex}(\theta_1)] \right\}, \quad (5.8)$$

где $\theta_1 = t/\tau_1$;

$$c_2(1, \theta_2) = c_0 \left\langle 1 + L^{-1} \left\{ \exp(-p) L[c_{ex}(\theta_2)] \right\} \right\rangle, \quad (5.9)$$

где $\theta_2 = ut/l$.

Подставляя (5.8) и (5.9) в (5.7) получаем окончательное решение, которое проиллюстрируем на следующем примере.

Пусть

$$c_{ex}(t) = 1,$$

тогда

$$L[c_{ex}(t)] = \frac{1}{p}. \quad (5.10)$$

Из (5.8) и (5.10) следует

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right] = 1 - \exp(-\theta_1) = 1 - \exp(-t/\tau_1)$$

и

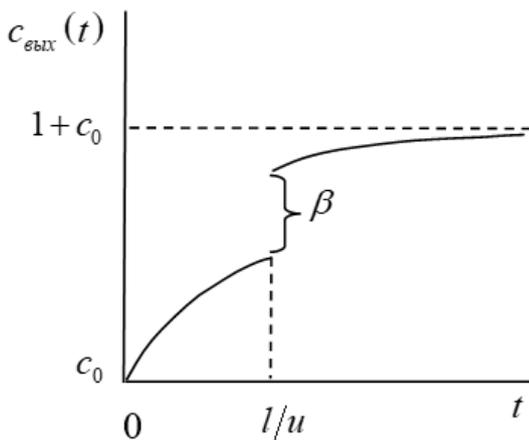
$$c_1(t) = c_0 + 1 - \exp(-t/\tau_1). \quad (5.11)$$

Из (5.9) и (5.10) следует

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p} \exp(-p)\right] = 1(u/l - 1) \quad (5.12)$$

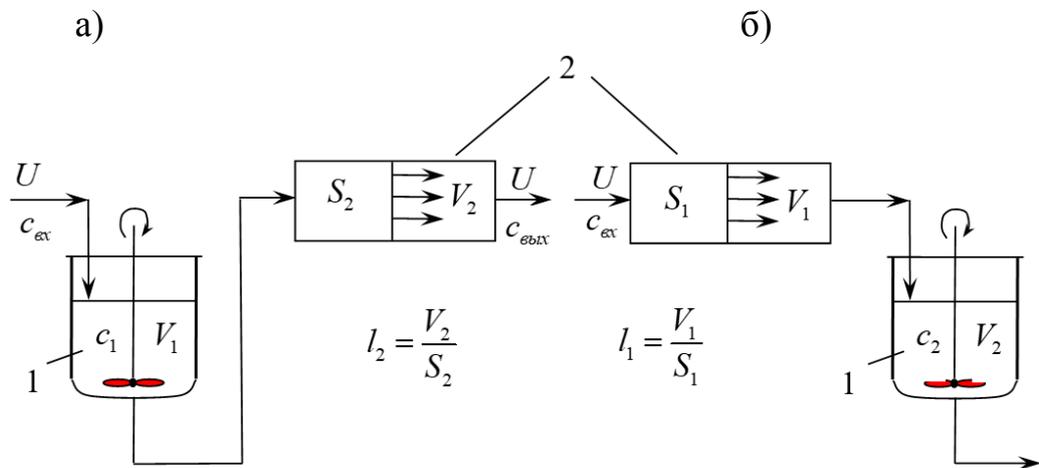
Окончательно из (5.7), (5.11) и (5.12) следует

$$c_{\text{вых}}(t) = (1 - \beta)[c_0 + 1 - \exp(-t/\tau_1)] + \beta c_0 [1 + 1(u/l - 1)]. \quad (5.13)$$



Приведенный график иллюстрирует полученное решение.

5.3. Моделирование объекта, сочетающего последовательно расположенные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения



1 – аппараты идеального перемешивания;
2 – аппараты идеального вытеснения.

Математическая модель для схемы а):

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} [c_{\text{вх}}(t) - c_1(t)]; \quad (5.14)$$

$$c_1(0) = c_0; \quad (5.15)$$

$$\frac{dc_2(z,t)}{dt} = -u \frac{dc_2(z,t)}{dz}; \quad (5.16)$$

$$c_2(0) = c_0; \quad (5.17)$$

$$c_2(0,t) = c_{\text{вх}}(t), \quad (5.18)$$

где $\tau_1 = V_1/U$; $u = U/S_2$; $l_2 = V_2/S_2$.

Система уравнений является полусопряженной, т.е. вначале нужно решать подсистему (5.14), (5.15), а затем (5.16)–(5.18).

Представим систему (5.14)–(5.18) в безразмерном виде:

$$\frac{d\Omega_1(\theta)}{d\theta} = \Omega_{\text{вх}}(\theta) - \Omega_1(\theta); \quad (5.19)$$

$$\Omega_1(0) = 0; \quad (5.20)$$

$$\frac{d\Omega_2(Z, \theta)}{d\theta} = -\frac{d\Omega_2(Z, \theta)}{dZ}; \quad (5.21)$$

$$\Omega_2(0) = 0; \quad (5.22)$$

$$\Omega_2(0, \theta) = \Omega_1(\theta), \quad (5.23)$$

где $\theta = t/\tau_1$; $Z = z/(u\tau_1)$; $\Omega_{1,2} = (c_{1,2} - c_0)/c_0$.

Передаточная функция аппарата идеального перемешивания есть:

$$W_1(p) = \frac{1}{p+1};$$

передаточная функция аппарата идеального вытеснения есть

$$W_2(p) = \exp(-Z_l p),$$

Т.к. они соединены последовательно, то передаточная функция всей системы есть

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{1}{p+1} \exp(-Z_l p).$$

Отсюда следует, что расположение аппаратов идеального перемешивания и вытеснения не влияет на решение, т.е. схемы а) и б) эквивалентны.

Окончательно решение будет:

$$c_{\text{вых}}(t) = c_0 \left\langle 1 + L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \exp(-Z_l p) L[c_{\text{ex}}(t)] \right\} \right\rangle.$$

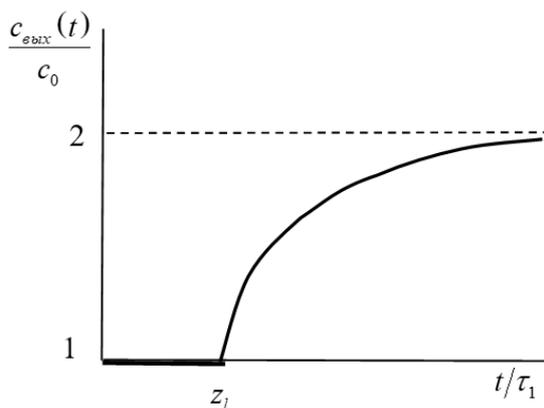
Пусть $c_{\text{ex}}(t) = 1$, тогда

$$L[c_{\text{ex}}(t)] = \frac{1}{p}$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{p(p+1)} \exp(-Z_l p) \right] = [1 - \exp(Z_l - t/\tau_1)] \cdot 1(Z_l - t/\tau_1),$$

тогда окончательно можно записать решение в следующем виде

$$c_{\text{вых}}(t) = c_0 \left\{ 1 + [1 - \exp(Z_l - t/\tau_1)] \cdot 1(Z_l - t/\tau_1) \right\}.$$



Приведенный график качественно иллюстрирует полученное решение.

5.4. Моделирование объекта, сочетающего зоны идеального перемешивания и байпасирования

Из схемы следует, что входящий поток с объемным расходом U раздваивается: часть потока поступает в аппарат идеального перемешивания; другая часть – байпасный поток – не претерпевает никаких изменений, минуя аппарат идеального перемешивания и поступает на выход системы.

Рассмотрим баланс в точке M :

$$G_{\text{вых}}(t) = G_1(t) + G_2(t), \quad (5.24)$$

где $G_1(t), G_2(t), G_{\text{вых}}(t)$ – массовые расходы потоков через аппарат идеального перемешивания; через байпас и на выходе из системы.

Т.к. $G(t) = U c(t)$, то из (5.24) следует

$$U c_{\text{вых}}(t) = U_1 c_1(t) + U_2 c_2(t). \quad (5.25)$$

Разделив (5.25) на U и вводя обозначения

$$U_1/U = 1 - \beta; \quad U_2/U = \beta,$$

получим

$$c_{\text{вых}}(t) = (1 - \beta)c_1(t) + \beta c_2(t),$$

но $c_2(t) = c_{\text{вх}}(t)$, поэтому

$$c_{\text{вых}}(t) = (1 - \beta)c_1(t) + \beta c_{\text{вх}}(t). \quad (5.26)$$

Для аппарата идеального перемешивания запишем (тема 2, формулы (2.5) и (2.6)):

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} [c_{ex}(t) - c_1(t)]; \quad (5.27)$$

$$c_1(0) = c_0, \quad (5.28)$$

где $\tau_1 = V_1/U_1$.

В безразмерном виде (5.27)–(5.28) есть:

$$\frac{d\Omega_1(\theta)}{d\theta} = \Omega_{ex}(\theta) - \Omega_1(\theta); \quad (5.29)$$

$$\Omega_1(0) = 0, \quad (5.30)$$

где $\Omega_1(\theta) = c_1(t) - c_0$; $\Omega_{ex}(\theta) = c_{ex}(t) - c_0$; $\theta = t/\tau_1$.

Из (5.29), (5.30) после применения преобразования Лапласа следует выражение для передаточной функции

$$W_1(p) = \frac{L[\Omega_1(\theta)]}{L[\Omega_{ex}(\theta)]} = \frac{1}{p+1}. \quad (5.31)$$

Далее приведем (5.26) к безразмерному виду:

$$c_{вых}(t) - c_0 + c_0 = (1 - \beta)[c_1(t) - c_0 + c_0] + \beta[c_{ex}(t) - c_0 + c_0],$$

или

$$\Omega_{вых}(\theta) + c_0 = (1 - \beta)\Omega_1(\theta) + (1 - \beta)c_0 + \beta\Omega_{ex}(\theta) + \beta c_0;$$

т.е.

$$\Omega_{вых}(\theta) = (1 - \beta)\Omega_1(\theta) + \beta\Omega_{ex}(\theta). \quad (5.32)$$

Применяя к (5.32) преобразование Лапласа, получим

$$L[\Omega_{вых}(\theta)] = (1 - \beta)L[\Omega_1(\theta)] + \beta L[\Omega_{ex}(\theta)], \quad (5.33)$$

но из (5.31)

$$L[\Omega_1(\theta)] = \frac{1}{p+1} L[\Omega_{ex}(\theta)],$$

тогда (5.33) запишется

$$W(p) = \frac{L[\Omega_1(\theta)]}{L[\Omega_{ex}(\theta)]} = \frac{1-\beta}{p+1} + \beta. \quad (5.34)$$

Пример. Пусть $c_{ex}(t) = c_{ex}^0 \cdot 1(t)$, где $1(t)$ – функция Хевисайда ($c_{ex}^0 = const$)

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

тогда

$$\Omega_{ex}(\theta) = c_{ex}(t) - c_0 \text{ и } L[\Omega_{ex}(\theta)] = L[c_{ex}^0 1(t) - c_0] = (c_{ex}^0 - c_0)/p.$$

Т.к. по определению

$$W(p) = \frac{L[\Omega_{был}(\theta)]}{L[\Omega_{ex}(\theta)]},$$

то

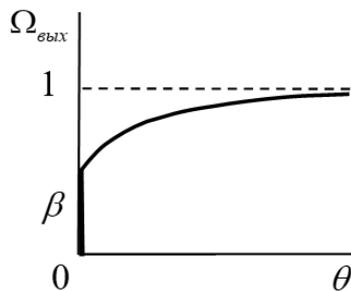
$$L[\Omega_{был}(\theta)] = \left(\frac{1-\beta}{p+1} + \beta \right) L[\Omega_{ex}(\theta)] = \left(\frac{1-\beta}{p+1} + \beta \right) \left(\frac{c_{ex}^0 - c_0}{p} \right). \quad (5.35)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (5.35), имеем

$$\Omega_{был}(\theta) = (c_{ex}^0 - c_0) [1 - (1-\beta)\exp(-\theta)],$$

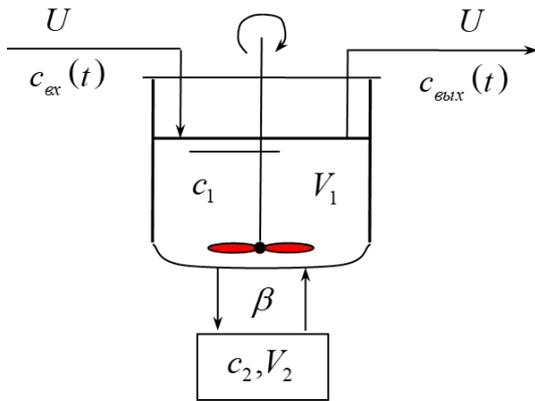
или в размерном виде

$$c_{был}(t) = c_0 + (c_{ex}^0 - c_0) [1 - (1-\beta)\exp(-t/\tau_1)]. \quad (5.36)$$



Наличие байпасного потока приводит к скачку концентрации (температуры) на выходе, причем величина этого скачка определяется величиной доли входного потока β , идущего на байпас.

5.5. Моделирование объекта, сочетающего участки идеального перемешивания и застойной зоны



Для вывода уравнений математической модели воспользуемся уравнением закона сохранения массы в дифференциальной форме:

$$dM_1(t) = [G_{\text{ex}}(t) - G_{\text{облх}}(t)] dt. \quad (5.37)$$

С другой стороны,

$$G_{\text{ex}}(t) = U c_{\text{ex}}(t); \quad (5.38)$$

$$G_{\text{облх}}(t) = U c_{\text{облх}}(t) + \beta U [c_{\text{облх}}(t) - c_2(t)]. \quad (5.39)$$

Из (5.37)–(5.38) следует:

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = U c_{\text{ex}}(t) - U c_{\text{облх}}(t) - \beta U [c_{\text{облх}}(t) - c_2(t)]. \quad (5.40)$$

Разделим (5.40) на V_1 :

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} [c_{\text{ex}}(t) - (1 + \beta)c_{\text{облх}}(t) + \beta c_2(t)]. \quad (5.41)$$

Теперь составим материальный баланс для застойной зоны:

$$dM_2(t) = [G_{\text{облх}}(t) - G_2(t)] dt = \beta U [c_{\text{облх}}(t) - c_2(t)] dt. \quad (5.42)$$

Разделив (5.42) на $V_2 dt$, получим

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = \frac{\beta}{\tau_2} [c_{\text{облх}}(t) - c_2(t)], \quad (5.43)$$

но $c_{\text{облх}}(t) = c_1(t)$, поэтому (5.41) и (5.43) запишутся в окончательном виде:

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} [c_{\text{ex}}(t) - (1 + \beta)c_1(t) + \beta c_2(t)]; \quad (5.44)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = \frac{\beta}{\tau_2} [c_1(t) - c_2(t)]; \quad (5.45)$$

с начальными условиями

$$c_1(0) = c_2(0) = c_0. \quad (5.46)$$

Уравнения (5.44)–(5.46) и представляют искомую математическую модель, которая в безразмерном виде запишется:

$$\frac{d\Omega_1(\theta)}{d\theta} = \Omega_{\text{ex}}(\theta) - (1 + \beta)\Omega_1(\theta) + \beta\Omega_2(\theta); \quad (5.47)$$

$$\frac{d\Omega_2(\theta)}{d\theta} = \beta\tau [\Omega_1(\theta) - \Omega_2(\theta)]; \quad (5.48)$$

$$\Omega_1(0) = \Omega_2(0) = 0, \quad (5.49)$$

где $\Omega_{\text{ex}}(\theta) = c_{\text{ex}}(t) - c_0$; $\Omega_{1,2}(\theta) = c_{1,2}(t) - c_0$; $\theta = t/\tau_1$; $\tau_1/\tau_2 = \tau$.

Применим к (5.47)–(5.49) преобразование Лапласа:

$$p\Omega_1^L(p) = \Omega_{\text{ex}}^L(p) - (1 + \beta)\Omega_1^L(p) + \beta\Omega_2^L(p); \quad (5.50)$$

$$p\Omega_2^L(p) = \beta\tau [\Omega_1^L(p) - \Omega_2^L(p)]. \quad (5.51)$$

Решение системы (5.50), (5.51) относительно $\Omega_1^L(p)$ и $\Omega_2^L(p)$ есть:

$$\Omega_1^L(p) = \frac{p + \beta\tau}{(p + 1 + \beta)(p + \beta\tau) - \beta^2\tau} \Omega_{\text{ex}}^L(p); \quad (5.52)$$

$$\Omega_2^L(p) = \frac{\beta\tau(p + \beta\tau)}{p + 1 + \beta - \beta^2\tau(p + \beta\tau)} \Omega_{\text{ex}}^L(p), \quad (5.53)$$

где $\Omega_{\text{ex}}^L(p) = L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)]$; $\Omega_{1,2}^L(p) = L[\Omega_{1,2}(\theta)]$.

Из (5.52) следует выражение передаточной функции всей системы:

$$W(p) = \frac{\Omega_1^L(p)}{\Omega_{\text{ex}}^L(p)} = \frac{p + \beta\tau}{(p + 1 + \beta)(p + \beta\tau) - \beta^2\tau}. \quad (5.54)$$

Пример. Пусть $c_{\text{ex}}(t) = c_{\text{ex}}^0 1(t)$, тогда

$$\Omega_{\text{ex}}^L(p) = L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)] = L[c_{\text{ex}}^0 1(t) - c_0] = (c_{\text{ex}}^0 - c_0)/p.$$

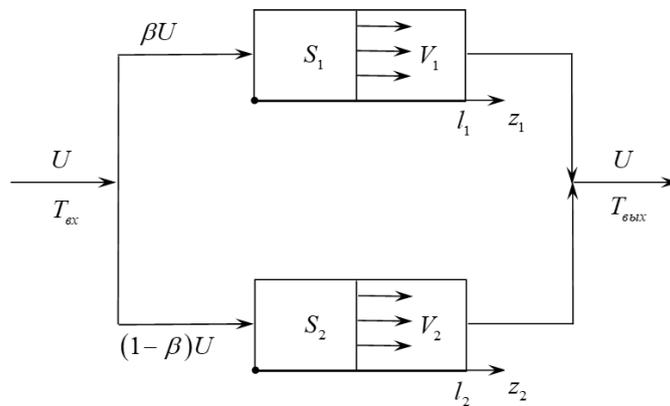
В соответствии с (5.54)

$$\begin{aligned} \Omega_1(\theta) &= L^{-1}[W(p)\Omega_{\text{ex}}^L(p)] = L^{-1}\left[\frac{p + \beta\tau}{(p + 1 + \beta)(p + \beta\tau) - \beta^2\tau} \cdot \frac{c_{\text{ex}}^0 - c_0}{p}\right] = \\ &= (c_{\text{ex}}^0 - c_0) \cdot \left\langle A^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{A}{2}\theta\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}[1 + \beta(1 + \tau)]\right\} [1 - \beta(1 + \tau)] + 1 - \right. \\ &\quad \left. - ch\left(\frac{A}{2}\theta\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}[1 + \beta(1 + \tau)]\right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

где $A = \sqrt{\beta^2\tau^2 - 2(1 + \beta)\beta\tau + (1 + \beta)^2 + 4\beta^2\tau}$.

5.6. Решение задач

Пример. Имеется система, состоящая из двух аппаратов идеального вытеснения, соединенных параллельно.



На вход подается поток с объемным расходом $U = 0,01 \text{ м}^3/\text{с}$ и температурой, изменяющейся по закону

$$T_{\text{ex}}(t) = 40[1 + \exp(-0,1t)],$$

который делится на входе, т.е. $\beta = 0,3$. Геометрические характеристики аппаратов таковы: площади проточных поперечных сечений $S_1 = 0,2 \text{ м}^2$; $S_2 = 0,3 \text{ м}^2$; их объемы составляют $V_1 = 0,1 \text{ м}^3$; $V_2 = 0,3 \text{ м}^3$; $T_0 = 20^\circ \text{C}$.

Построить график изменения температуры на выходе из системы $T_{\text{вых}}(t)$.

Решение:

1. *Запишем уравнение математической модели.* Для этого воспользуемся уже готовой математической моделью для аппарата с идеальным перемешиванием потока (см. тема 3, формулы (3.8)–(3.10)), которую запишем в отдельности для каждого аппарата:

$$\frac{dT_1(z_1, t)}{dt} = -u_1 \frac{dT_1(z_1, t)}{dz_1}; \quad (5.55)$$

$$T_1(z_1, 0) = T_0; \quad (5.56)$$

$$T_1(0, t) = T_{ex}(t); \quad (5.57)$$

$$\frac{dT_2(z_2, t)}{dt} = -u_2 \frac{dT_2(z_2, t)}{dz_2}; \quad (5.58)$$

$$T_2(z_2, 0) = T_0; \quad (5.59)$$

$$T_2(0, t) = T_{ex}(t); \quad (5.60)$$

$$T_{обл}(t) = \beta T_1(l_1, t) + (1 - \beta) T_2(l_2, t), \quad (5.61)$$

где $u_1 = \beta U / S_1$ – скорость потока в 1-ом аппарате;

$u_2 = (1 - \beta) U / S_2$ – скорость потока в 2-ом аппарате;

$l_1 = V_1 / S_1$ – линейный масштаб 1-го аппарата;

$l_2 = V_2 / S_2$ – линейный масштаб 2-го аппарата.

Система уравнений (5.55)–(5.61) и есть математическая модель рассматриваемой системы.

2. *Приведем систему к безразмерному виду с единым масштабом по времени и координате.*

Введем безразмерную длину аппаратов:

$$Z = z_1 / l_1; \quad Z = z_2 / l_1;$$

безразмерное время

$$\theta = t / \bar{t}; \quad \text{где } \bar{t} = l_1 / u_1;$$

безразмерные температуры:

$$\Omega_1(Z, \theta) = \frac{T_1(Z, \theta) - T_0}{T_0}; \quad \Omega_2(Z, \theta) = \frac{T_2(Z, \theta) - T_0}{T_0};$$

$$\Omega_{ex}(\theta) = \frac{T_{ex}(t) - T_0}{T_0}.$$

С учетом введенных безразмерных зависимых и независимых переменных система (5.55)–(5.62) переписывается в виде:

$$\frac{d\Omega_1(Z, \theta)}{d\theta} = -u \frac{d\Omega_1(Z, \theta)}{dZ}; \quad (5.62)$$

$$\Omega_1(Z, 0) = 0; \quad (5.63)$$

$$\Omega_1(0, \theta) = \Omega_{ex}(\theta); \quad (5.64)$$

$$\frac{d\Omega_2(Z, \theta)}{d\theta} = -\xi \frac{d\Omega_2(Z, \theta)}{dZ}; \quad (5.65)$$

$$\Omega_2(Z, 0) = 0; \quad (5.66)$$

$$\Omega_2(0, \theta) = \Omega_{ex}(\theta); \quad (5.67)$$

$$\Omega_{ex}(\theta) = \beta \Omega_1(1, \theta) + (1 - \beta) \Omega_2(\eta, \theta), \quad (5.68)$$

где $\xi = (1 - \beta)S_1/S_2$; $\eta = S_1V_2/(S_2V_1)$.

3. Алгоритм решения системы (5.62)–(5.68).

Передаточная функция для 1-го аппарата есть:

$$W_1(p) = \exp(-p); \quad (5.69)$$

передаточная функция для 2-го аппарата

$$W_2(p) = \exp(-\eta p/\xi). \quad (5.70)$$

Т.к. их соединение параллельное, то передаточная функция всей системы будет

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) = \exp(-p) + \exp(-\eta p). \quad (5.71)$$

Имея ввиду, что

$$\Omega_1(1, \theta) = L^{-1} \{W_1(p) L[\Omega_{ex}(\theta)]\} = L^{-1} \{\exp(-p) [\Omega_{ex}(\theta)]\};$$

$$\Omega_2(\eta, \theta) = L^{-1} \{W_2(p) L[\Omega_{ex}(\theta)]\} = L^{-1} \{\exp(-\eta p/\xi) [\Omega_{ex}(\theta)]\},$$

и с учетом (5.68) запишем решение исходной задачи в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{вых}}(\theta) = & \beta L^{-1} \left\{ \exp(-p) L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)] \right\} + \\ & + (1 - \beta) L^{-1} \left\{ \exp(-\eta p / \xi) L[\Omega_{\text{ex}}(\theta)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

4. Вычислительный эксперимент.

Приведем $T_{\text{ex}}(t)$ из условия задачи к безразмерному виду:

$$\Omega_{\text{ex}}(\theta) = \frac{40[1 + \exp(-0,1\bar{t}\theta)] - 20}{20} = 2[1 + \exp(-0,1\bar{t}\theta)] - 1. \quad (5.73)$$

Т.к. $\bar{t} = l_1/u_1 = \frac{V_1}{S_1} \frac{S_1}{\beta U} = V_1/(\beta U) = 0,1/(0,3 \cdot 0,01) = 33,3$ с, то (5.73) запишется в виде

$$\Omega_{\text{ex}}(\theta) = 2[1 + \exp(-3,33\theta)] - 1; \quad (5.74)$$

$$\xi = (1 - \beta)S_1/S_2 = (1 - 0,3)0,2/0,3 \approx 0,47;$$

$$\eta = S_1V_2/(S_2V_1) = 0,2 \cdot 0,3/(0,3 \cdot 0,1) = 2.$$

Ход вычислительного эксперимента представлен программой на MAPLE-РД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечень рассмотренных постановок задач, связанных с идеализацией явлений переноса в различных элементах технических устройств, имеющих локальные неоднородности гидродинамических и температурных полей. Совокупность подхода к инвариантному описанию различных потенциальных распределений в сопряженной совокупности составляющих сложной топологией объектов явилась эффективным инструментом создания виртуальных образов реальных явлений (объектов), с помощью которых возможно эффективно проводить параметрический и структурный анализ и идентифицировать оптимальные режимы функционирования технических устройств при модернизации существующего оборудования и вновь проектируемого.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бондарь А.Г. Математическое моделирование в химической технологии. 1973. 280 с.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z -преобразования. – М.: Физматгиз, 1971. – 288с.
3. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для студ. техн. спец. ВУЗов / В.П. Тарасик .— Минск : ДизайнПро, 1997 .— 623с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	4
1.1. Понятие математической модели.....	4
1.2. Классификация математических моделей.....	5
1.3. Состав математического описания.....	5
1.4. Алгоритм математического моделирования.....	6
1.5. Общие закономерности процессов.....	8
1.6. Общие материальные и энергетические балансы.....	8
1.7. Дифференциальные уравнения как инструмент моделирования.....	9
1.8. Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений.....	9
1.9. Основные свойства преобразования Лапласа.....	10
1.10. Понятие передаточной функции.....	11
1.11. Идея метода декомпозиции объекта.....	12
1.12. Решение задач.....	12
ТЕМА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА (ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ).....	15
2.1. Модели структуры потоков и требования к ним.....	15
2.2. Физическая модель идеального перемешивания.....	15
2.3. Синтез математической модели идеального перемешивания.....	16
2.4. Анализ модели идеального перемешивания.....	17
2.5. Решение задач.....	19
ТЕМА 3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ.....	22
3.1. Физическая модель идеального вытеснения.....	22
3.2. Синтез математической модели идеального вытеснения.....	22
3.3. Решение уравнения модели.....	24
3.4. Пример применения модели идеального вытеснения.....	25
3.5. Решение задач.....	27
ТЕМА 4. ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ.....	32
4.1. Физические свойства диффузионной модели.....	32
4.2. Синтез диффузионной модели.....	33
4.3. Решение уравнения диффузионной модели.....	35

ТЕМА 5. КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ	41
5.1. Общая характеристика комбинированных моделей.....	41
5.2. Моделирование объекта, сочетающего параллельные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения	41
5.3. Моделирование объекта, сочетающего последовательно расположенные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения	44
5.4. Моделирование объекта, сочетающего зоны идеального перемешивания и байпасирования	46
5.5. Моделирование объекта, сочетающего участки идеального перемешивания и застойной зоны	49
5.6. Решение задач.....	51
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	55
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	56

Учебное издание

Ряжских Виктор Иванович
Ряжских Александр Викторович
Соболева Елена Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 27.12.2024.

Объем данных 2,5 Мб.

Тираж 10 экз.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84