

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

Н.Н. Некрасова

**ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
МОДЕЛИРОВАНИЮ**

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 519.85(075)

ББК 22.166я7

Н48

Рецензенты:

кафедра математического моделирования

Воронежского государственного университета

(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор В.А. Костин);

д-р тех. наук, профессор, зав. кафедрой информатики и графики

ВГТУ В.П. Авдеев

Некрасова, Н.Н.

Н48 Практикум по математическому моделированию: учеб.
пособие / Н.Н. Некрасова. – Воронеж: ФГБОУ ВО
«Воронежский государственный технический университет»,
2018. – 88 с.

ISBN

Пособие содержит подходы в применении аналитических и вычислительных математических методов к решению практических и инженерных задач, ориентированных на использование компьютеров.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по дисциплине «Математическое моделирование» и предназначено для магистров строительных направлений.

Ил.13. Библиогр.: 12 назв.

УДК 519.85(075)

ББК 22.166я7

ISBN

© Некрасова Н.Н., 2018

© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2018

ВВЕДЕНИЕ

Современному инженеру-специалисту для решения различных задач теоретического и прикладного характера необходимо знать и уметь применять на практике основные понятия и методы математического моделирования. Цель дисциплины «Математическое моделирование», изложить подходы в применении математики к решению практических, инженерных задач. Эти подходы в последние десятилетия приобретают явные черты технологии, как правило, ориентированной на использование компьютеров. И в настоящем учебном пособии рассматриваются поэтапные действия при математическом моделировании, от постановки практической задачи, до истолкования результатов ее решения, полученных математическим путем.

Содержание пособия представлено в виде семи глав. Первая глава посвящена методам приближенного вычисления определенных интегралов, которые чаще всего встречаются в различных приложениях. Во второй главе дается постановка задачи аппроксимации функции одной переменной. Определяется решающий эту задачу интерполяционный многочлен Лагранжа. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений разобраны в третьей главе. Четвертая посвящена приближенным методам решения нелинейных уравнений. Последние три главы посвящены изучению численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши) и дифференциальным уравнениям в частных производных.

В пособии представлены различные варианты практических заданий для закрепления теоретических знаний.

Предназначено для магистрантов строительных специальностей ВГТУ как учебное пособие по курсу «Математическое моделирование», а так же для изучения других дисциплин, излагающих применение аналитических и вычислительных математических методов при решении прикладных инженерных задач.

Все приведенные в пособии иллюстрации – авторские.

Содержание

Введение	3
1. Численное интегрирование	6
1.1. Формулы прямоугольников	6
1.2. Формула трапеций	8
1.3. Формула Симпсона (метод парабол)	9
2. Полиномиальная интерполяция	16
2.1. Задача аппроксимации функций	16
2.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа	17
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	25
3.1. Формула Крамера решения СЛАУ	29
3.2. Метод последовательных исключений Гаусса	30
3.3. Решение произвольных систем линейных уравнений	35
4. Решение нелинейных уравнений	43
4.1. Метод простых итераций	44
4.2. Метод половинного деления (метод дихотомии)	46
4.3. Метод Ньютона	48
4.4. Обобщение методов решения нелинейных уравнений на системы нелинейных уравнений	50
5. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	533
5.1. Постановка задачи Коши	53
5.2. Типы задач для ОДУ	55
5.3. Методы решения задачи Коши	55
5.4. Численные методы решения задачи Коши	58
5.4.1. Метод Эйлера	59
5.4.2. Неявный метод Эйлера	60
5.4.3 Метод трапеций	61
6. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	63
6.1. Метод конечных разностей	64

6.2. Метод прогонки	688
7. Дифференциальные уравнения в частных производных.....	733
7.1. Примеры и классификация уравнений в частных производных...	73
7.2. Постановка задач для уравнений математической физики	75
7.3. Некоторые разностные схемы для уравнения теплопроводности.....	78
7.4. Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения теплопроводности	81
7.5. Анализ устойчивости	822
7.6. Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности	83
Заключение.....	87
Библиографический список.....	88

1. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть требуется найти значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

для некоторой заданной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$.

В курсе математического анализа обосновывается аналитический способ нахождения значения интеграла с помощью формулы Ньютона – Лейбница

$$I = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная для данной функции $f(x)$.

К сожалению, применение такого подхода к вычислению I наталкивается на несколько серьезных препятствий. Кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. Например, таким способом не удастся вычислить интегралы вида:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln x} \quad \text{и т.д.}$$

Поэтому для вычисления I более эффективным является применение специальных приближенных формул – квадратурных формул или формул численного интегрирования. Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления – формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

1.1. Формулы прямоугольников

Пусть на отрезке $[a, b]$, $a < b$, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$, численно равный площади фигуры, заключенной между графиком функции и осью абсцисс.

При численном интегрировании поступают следующим образом:

отрезок $[a, b]$ разбивают на несколько частей $(N-1)$, т.е. вводят разбиение, состоящее из N узлов (рис.1.1): $x_i, i = \overline{1, N}; x_1 = a, \dots, x_N = b$. Будем считать узлы равноотстоящими, с

шагом разбиения h , вычисляемым по формуле $h = \frac{b-a}{N-1}$.

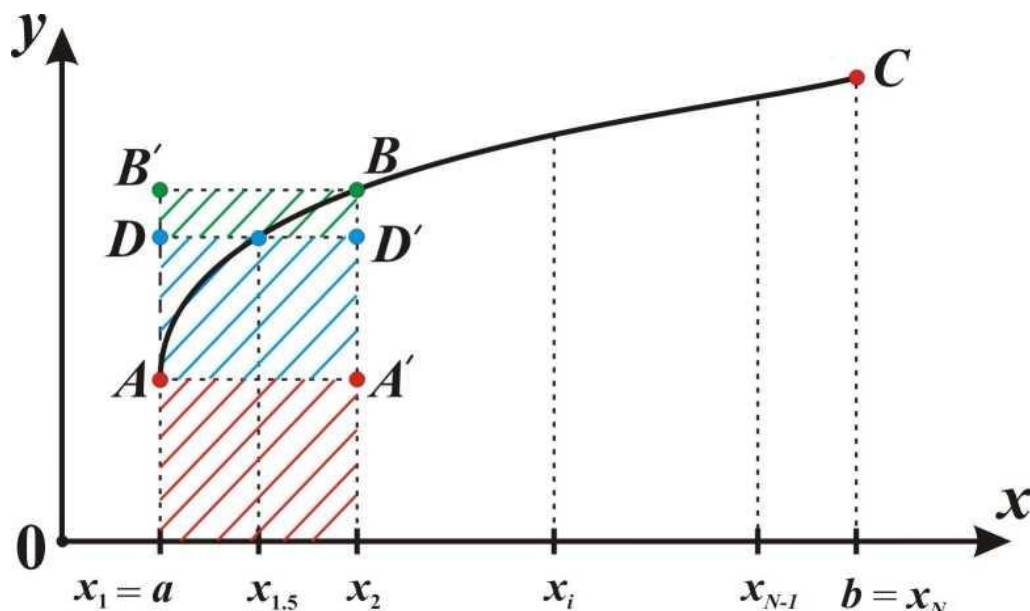


Рис. 1.1. Графическая иллюстрация метода прямоугольников

Далее рассматривают полученные прямоугольники: $x_1x_2A'A$, или x_1x_2BB' , или вводят новый промежуточный узел

$$x_{1.5} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{h}{2}.$$

Соответственно площадь всей фигуры $aACb$ складывается из площадей образованных прямоугольников:

а) если рассматривать прямоугольники вида $x_1A'Ax_2$, то получается формула левых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \dots + h \cdot f(x_{N-1}) = h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i); \quad (1.1)$$

б) если рассматривать прямоугольники вида $x_1B'Bx_2$, то имеем формулу правых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \dots + h \cdot f(x_N) = h \sum_{i=2}^N f(x_i); \quad (1.2)$$

в) если рассматривать прямоугольники вида $x_1DD'x_2$, получаем формулу средних прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \dots + h \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) = h \sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right). \quad (1.3)$$

1.2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Также отрезок $[a, b]$ разбивают на $(N-1)$ частей длины $h = \frac{b-a}{N-1}$,

(рис. 1.2.) получаем N узлов: $x_i, i = \overline{1, N}; x_1 = a, \dots, x_N = b$.

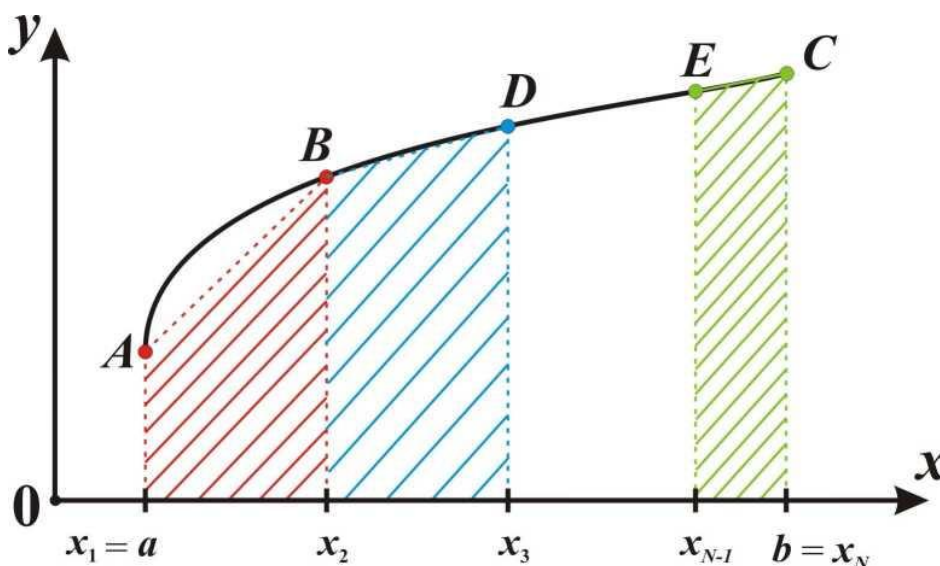


Рис. 1.2. Графическая иллюстрация формулы трапеций

Далее будем рассматривать не прямоугольники, а трапеции.

Например, $aABx_2$, x_2BDx_3 , $x_{N-1}ECb$. При этом площадь фигуры $aACb$ будет равна сумме площадей образованных трапеций:

$$S_{aABx_2} = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + f_2);$$

$$S_{x_2BDx_3} = \frac{h}{2} \cdot (f_2 + f_3);$$

.....

$$S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} (f_{N-1} + f_N);$$

$$I = S_{aABx_2} + S_{x_2BDx_3} + \dots + S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{N-1} + f_N).$$

В общем виде формула трапеций имеет вид:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=2}^{N-1} f(x_i) \right). \quad (1.4)$$

1.3. Формула Симпсона (метод парабол)

Если заменить график $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения не отрезками прямых, как в методе трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления для интеграла I .

Также отрезок $[a, b]$ разбивают на $(N-1)$ частей (рис. 1.3.), т.е. вводим разбиение, состоящее из N узлов: x_i , $i = \overline{1, N}$; $x_1 = a, \dots, x_N = b$,

с шагом $h = \frac{b-a}{N-1}$.

В формуле прямоугольников и трапеций рассматривались фигуры, состоящие на оси Ox из двух узлов (x_i, x_{i+1}) . В формуле Симпсона в фигуре участвуют сразу три узла (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) . Через три точки проводят ветвь параболы.

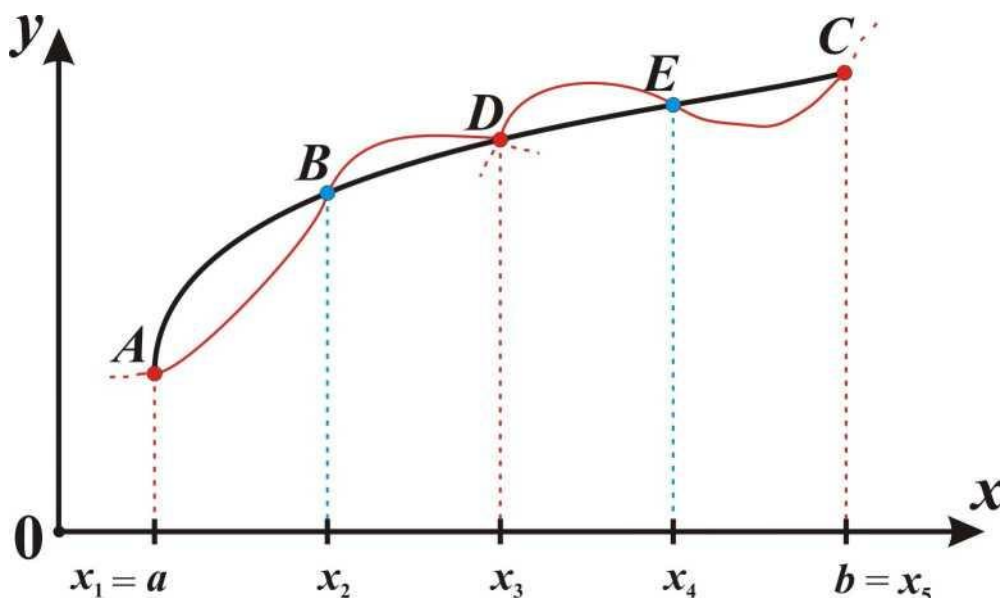


Рис. 1.3. Графическая иллюстрация формулы парабол

При выводе формулы Симпсона необходимо, чтобы число элементарных промежутков было четным, т.е. $N-1=2m \Rightarrow N$ — нечетное.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{j=2}^m f(x_{2j}) + 2 \sum_{j=2}^m f(x_{2j-1}) \right). \quad (1.5)$$

Формулу (1.5) называют формулой парабол (Симпсона).

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_a^b (2x - 1) dx$, $x \in [1, 5]$ с

использованием формул прямоугольников, трапеций и Симпсона при $N=5$ (N — число узлов). Проанализировать результат при изменении числа узлов.

Решение.

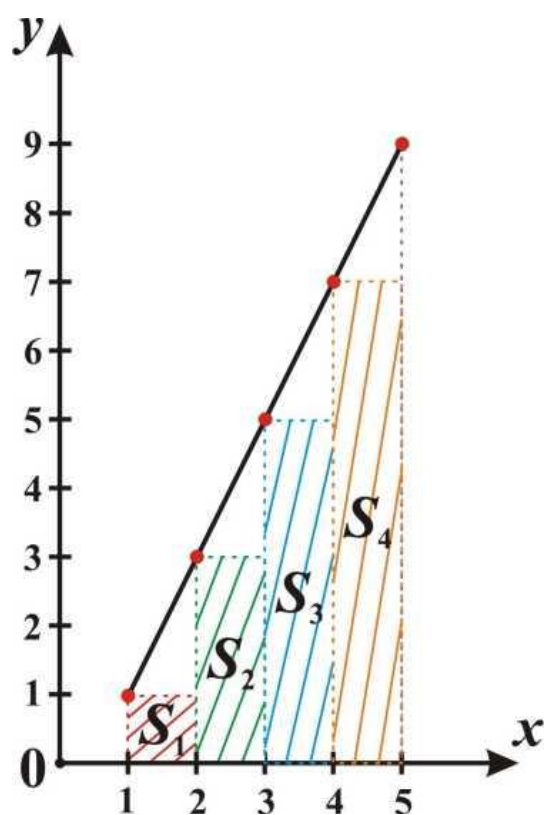
Сначала проведем вычисление интеграла аналитически на основе формулы Ньютона–Лейбница: $I = \int_1^5 (2x - 1) dx = \left(x^2 - x \right) \Big|_1^5 = 20$.

При численной реализации всех квадратурных формул приближенного интегрирования необходима сетка, поэтому

определим шаг интегрирования: $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{5-1} = 1$.

На рис. 1.4 – 1.6 представлены графические изображения и вычисления данного интеграла по формулам прямоугольников.

На рис. 1.7 показано графическое и аналитическое решение интеграла методом трапеций. А на рис. 1.8 – методом парабол (Симпсона).



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_1 \cdot h = 1;$$

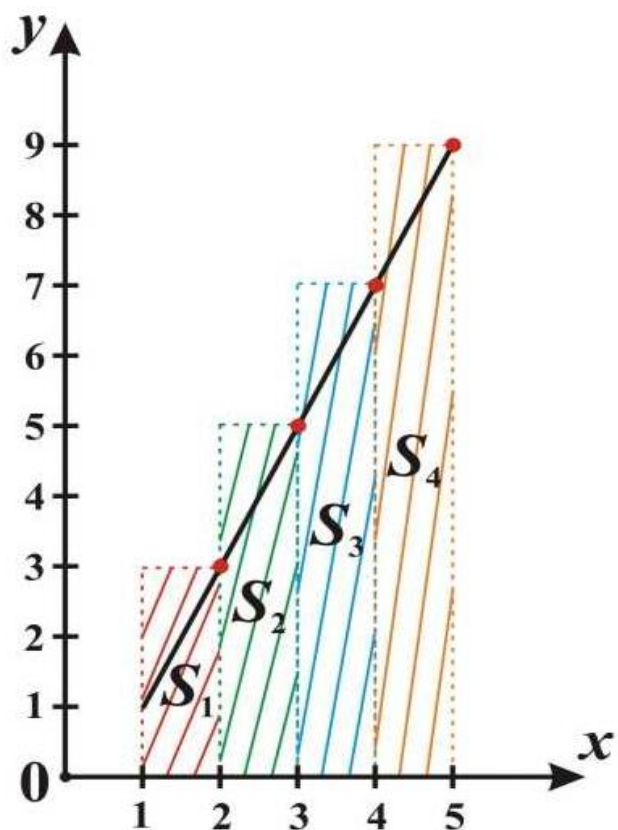
$$S_2 = y_2 \cdot h = 3;$$

$$S_3 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_4 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$I = \sum_i S_i = 16.$$

Рис. 1.4. Метод левых прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_2 \cdot h = 3;$$

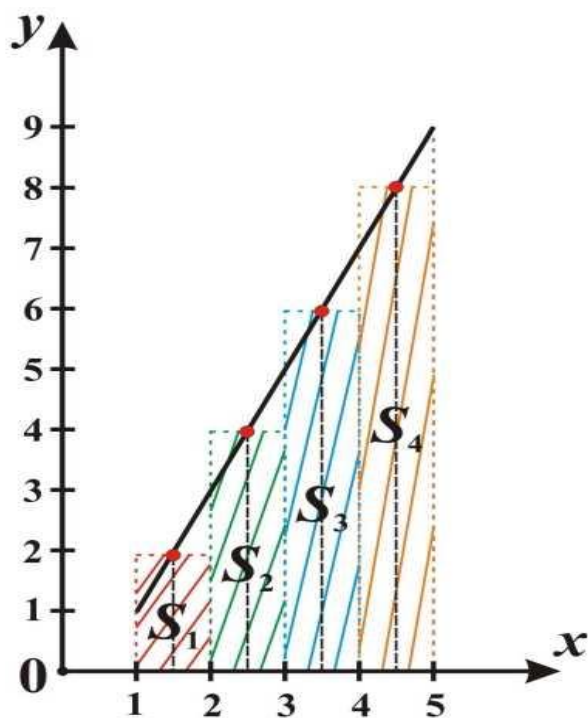
$$S_2 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_3 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$S_4 = y_5 \cdot h = 9;$$

$$I = \sum_i S_i = 24.$$

Рис. 1.5. Метод правых прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = f(x_{1,5}) \cdot h = 2;$$

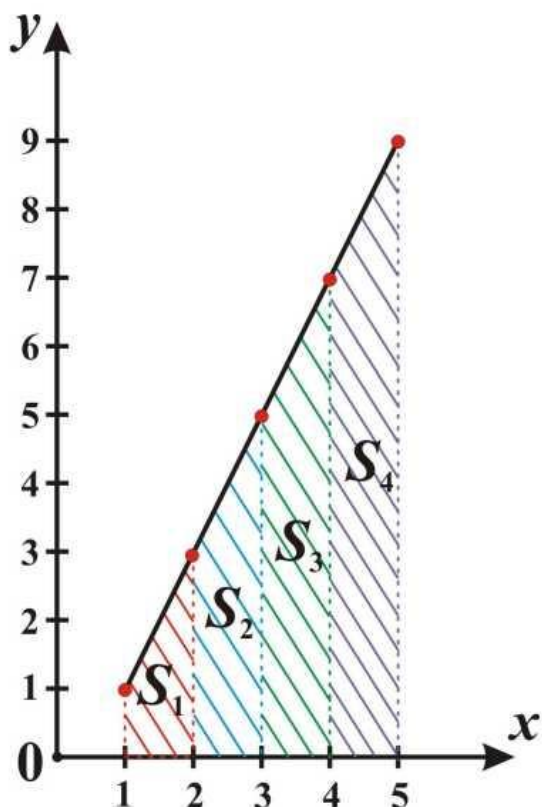
$$S_2 = f(x_{2,5}) \cdot h = 4;$$

$$S_3 = f(x_{3,5}) \cdot h = 6;$$

$$S_4 = f(x_{4,5}) \cdot h = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Рис. 1.6. Метод средних прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = 2;$$

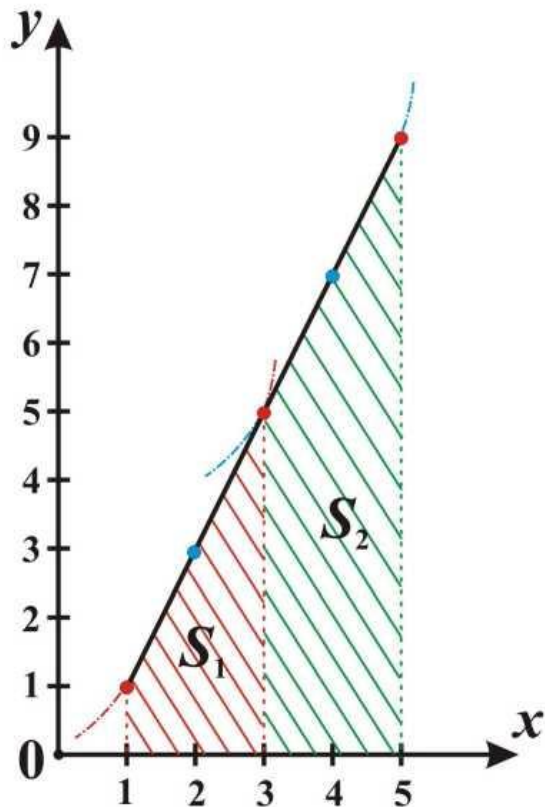
$$S_2 = \frac{h}{2}(f_2 + f_3) = 4;$$

$$S_3 = \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = 6;$$

$$S_4 = \frac{h}{2}(f_4 + f_5) = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Рис. 1.7. Метод парабол



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + f_3) = 6;$$

$$S_2 = \frac{h}{3}(f_2 + 4f_4 + f_5) = 14;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Рис. 1.8. Метод Симпсона (метод парабол)

Увеличим число узлов до $N = 11$: $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{11-1} = 0,4$.

x_i	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0
y_i	1,0	1,8	2,6	3,4	4,2	5,0	5,8	6,6	7,4	8,2	9,0

По формуле левых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} y_i = 18,4.$$

По формуле правых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=2}^N f(x_i) = h \cdot \sum_{i=2}^N y_i = 21,6.$$

Увеличение количества узлов приводит к уточнению определенного интеграла.

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Вычислить определенные интегралы по формулам численного интегрирования (N – число узлов, n – количество интервалов, ε – задаваемая точность):

1) $\int_1^2 \sqrt{x} dx$, $n = 10$ – методом прямоугольников, трапеций и парабол;

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $n = 5$, $\varepsilon = 0,01$ – методом трапеций и парабол;

3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$, $n = 4$, $\varepsilon = 0,01$ – методом средних прямоугольников и парабол;

4) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx$, $n = 6$, $\varepsilon = 0,01$ – методом трапеций и левых прямоугольников;

$$5) \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad n=4, \quad \varepsilon=0,01 - \text{методом трапеций и правых}$$

прямоугольников;

$$6) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad n=8 - \text{методом правых прямоугольников и}$$

Симпсона;

$$7) \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, \quad \varepsilon=0,01, \quad h=0,5 - \text{методом прямоугольников,}$$

трапеций и парабол;

$$8) \int_0^5 \frac{x dx}{x^4 + 4}, \quad n=5 - \text{методом средних прямоугольников и}$$

Симпсона;

$$9) \int_0^\pi \left(\sin \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx, \quad n=5, \quad \varepsilon=0,001 - \text{методом парабол и}$$

трапеций;

$$10) \int_0^2 x^3 dx, \quad n=4 - \text{методом прямоугольников;}$$

$$11) \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}, \quad n=5, \quad \varepsilon=0,01 - \text{методом средних прямоугольников}$$

и парабол;

$$12) \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx, \quad n=4, \quad \varepsilon=0,01 - \text{методом трапеций и левых}$$

прямоугольников;

$$13) \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad n=10, \quad \varepsilon=0,01 - \text{методом прямоугольников,}$$

трапеций и парабол;

$$14) \int_0^1 \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx, \quad n=10, \quad \varepsilon=0,01 - \text{методом трапеций и}$$

парабол;

$$15) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}}, \quad n = 4, \quad \varepsilon = 0,01 - \text{методом прямоугольников,}$$

трапеций и парабол;

$$16) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx, \quad n = 6, \quad \varepsilon = 0,01 - \text{методом парабол и средних}$$

прямоугольников;

$$17) \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad n = 4, \quad \varepsilon = 0,01 - \text{методом парабол и левых}$$

прямоугольников;

$$18) \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}, \quad n = 5, \quad \varepsilon = 0,01 - \text{методом правых прямоугольников}$$

и трапеций;

$$19) \int_0^1 \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx, \quad n = 10, \quad \varepsilon = 0,01 - \text{методом левых, правых}$$

и средних прямоугольников;

$$20) \int_0^2 x^3 dx, \quad n = 4 - \text{методом парабол и трапеций.}$$

2. ПОЛИНОМИНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

2.1. Задача аппроксимации функций

В основе большинства, численных методов математического анализа лежит подмена одной функции $f(x)$ другой функцией $\varphi(x)$, близкой к $f(x)$ и обладающей «хорошими» свойствами, позволяющими легко производить над нею те или иные аналитические или вычислительные операции. Будем называть такую подмену *аппроксимацией* или просто приближением функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$.

Задача аппроксимации функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ состоит в построении для заданной функции $f(x)$ такой функции $\varphi(x)$, что $f(x) \approx \varphi(x)$, причем под знаком « $\approx$ » понимается некоторый критерий согласия (близости) между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$.

2.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Будем считать, что аппроксимация функции $f(x)$ производится с помощью многочленов степени n .

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана табличная (сеточная) функция. Т.е. известны значения функции $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, где $x_i, i = \overline{1, n}$ – узлы:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array} \quad (2.1)$$

Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей или интерполяционной для $f(x)$ на $[a,b]$, если ее значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, т.е. со значениями функции $y_0, y_1, \dots, y_n$:

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

$$\varphi(x_1) = y_1,$$

.....

$$\varphi(x_n) = y_n.$$

Геометрически факт интерполирования означает, что график функции $\varphi(x)$ проходит так, что, по меньшей мере, в $n+1$ заданных точках он пересекает или касается графика функции $f(x)$ (рис. 2.1).

Легко понять, что графиков $\varphi(x)$, проходящих через заданные точки, можно изобразить сколько угодно, и они могут отличаться от графика $f(x)$ сколь угодно сильно, если не накладывать на функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ определенных ограничений.

Функцию $\varphi(x)$ будем искать в виде многочлена степени n .

Тогда задача полиномиальной интерполяции формулируется так: для функции $f(x)$, заданной таблично (2.1) найти многочлен $P_n(x)$ такой, что выполняется совокупность условий интерполяции

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (2.2)$$

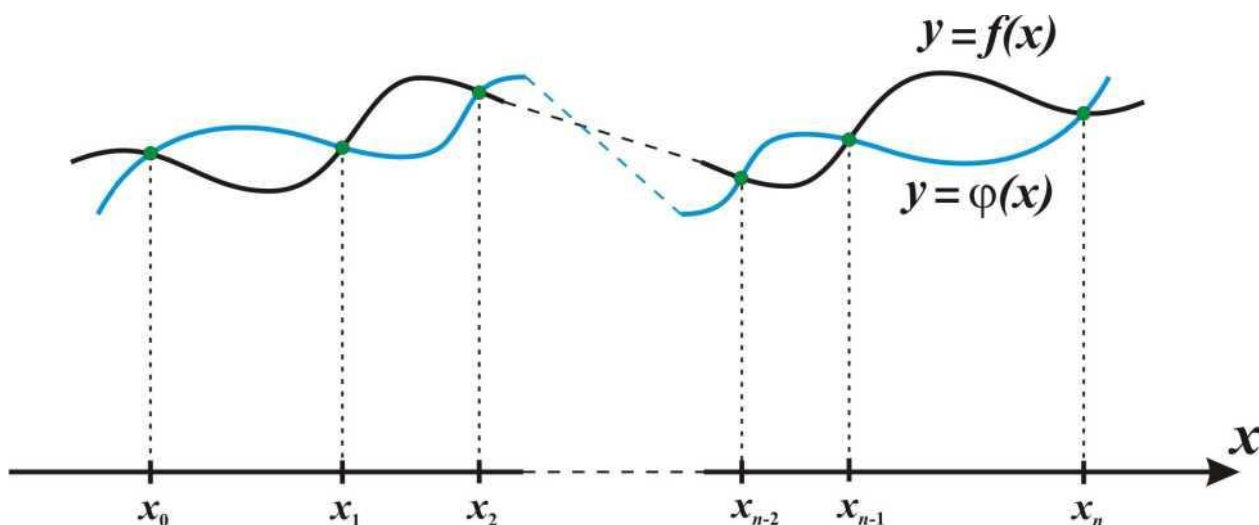


Рис. 2.1. Геометрическая иллюстрация полиномиальной интерполяции

Найти многочлен $P_n(x)$ – это значит, учитывая его каноническую форму

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (2.3)$$

найти его $n+1$ коэффициент $a_0, a_1, \dots, a_n$. Для этого имеется как раз $n+1$ условие (2.2). Таким образом, чтобы многочлен (2.3) был интерполяционным для функции (2.1), нужно, чтобы его коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ удовлетворяли системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = y_1, \\ \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = y_n. \end{array} \right.$$

Но если воспользоваться таким подходом, то это будет малоэффективно. Поэтому выберем другой путь.

Будем строить многочлен n -й степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации $\sum_{i=0}^n c_i l_i(x)$ многочленов n -й степени $l_i(x)$ (i – номер многочлена).

Для того чтобы такой многочлен был интерполяционным для

функции $f(x)$, достаточно зафиксировать в качестве коэффициентов c_i этой линейной комбинации заданные в таблице (2.1) значения $y_i = f(x_i)$, а от базисных многочленов $l_i(x)$ потребовать выполнение условия:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \forall i, j = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

В таком случае для многочлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^i y_i l_i(x)$$

в каждом узле x_j ($j = \overline{1, n}$) в силу (2.4) получим

$$\begin{aligned} L_n(x_j) &= l_0(x_j) \cdot y_0 + \dots + l_{j-1}(x_j) \cdot y_{j-1} + l_j(x_j) \cdot y_j + \\ &+ l_{j+1}(x_j) \cdot y_{j+1} + \dots + l_n(x_j) \cdot y_n = \\ &= 0 + \dots + 0 + y_j + 0 + \dots + 0 = y_j, \end{aligned}$$

То есть выполняется условие интерполирования (2.2).

Чтобы конкретизировать базисные многочлены $l_i(x)$, учтем, что они должны удовлетворять условиям (2.4). Равенство нулю i -го многочлена во всех узлах, кроме i -го, означает, что $l_i(x)$ можно записать в виде:

$$l_i(x) = A_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

а коэффициент A_i этого представления легко получается из содержащегося в (2.4) требования $l_i(x) = 1$. Подставляя в выражение для $l_i(x)$ значения $x = x_i$ и приравнивая результат к единице, получим:

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}.$$

Таким образом, базисные многочлены Лагранжа имеют вид:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)},$$

а искомый интерполяционный многочлен Лагранжа примет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}. \quad (2.5)$$

В качестве примера запишем интерполяционные многочлены Лагранжа первой и второй степени.

При $n = 1$ информация об интерполируемой функции $y = f(x)$ сосредоточена в двух точках: (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Многочлен Лагранжа в этом случае составляется с помощью двух базисных многочленов первой степени ($l_0(x)$ и $l_1(x)$) и имеет вид:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot y_1.$$

При $n = 2$ по трехточечной таблице

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

можно образовать три базисных многочлена ($l_0(x)$, $l_1(x)$ и $l_2(x)$) и, соответственно, интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} \cdot y_2.$$

Приближенные равенства

$$f(x) \approx L_1(x) \text{ и } f(x) \approx L_2(x)$$

называют соответственно формулами линейной и квадратичной интерполяции.

Пример. Дано: $f(x) = x^2 - 3$: $R \rightarrow R$, $x \in [2, 4]$ – число узлов.

Найти значение функции $f(x)$ в точках несовпадающих с узлами интерполирования (2,6; 3,4) с помощью многочлена Лагранжа первой и второй степени.

Решение. Затабулируем функцию $f(x)$. Для этого вычислим шаг разбиения и занесем значения функции в таблицу:

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{4-2}{5-1} = 0,5$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	1,0	3,25	6,0	9,25	13,0

Воспользуемся многочленом Лагранжа первой степени для точки $x = 2,6 \in (x_1, x_2)$

$$\varphi(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2.$$

Тогда $\varphi(2,6) = \frac{2,6-3}{2,5-3} \cdot 3,25 + \frac{2,6-2,5}{3,0-2,5} \cdot 6 = 3,8$. При этом

точное значение $f(2,6) = 3,76$.

Для точки $x = 3,4 \in (x_2, x_3)$ линейная интерполяция дает следующий вывод:

$$\varphi(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} y_3.$$

Тогда $\varphi(3,4) = \frac{3,4-3,5}{3,0-3,5} \cdot 6,0 + \frac{3,4-3,0}{3,5-3,0} \cdot 9,25 = 8,6$. При этом

точное значение $f(3,4) = 8,56$.

Далее воспользуемся многочленом Лагранжа второй степени для точки $x = 2,6 \in (x_0, x_1, x_2)$. Очевидно, что многочлен Лагранжа второй степени должен дать точное значение, поскольку анализируемая нами функция является квадратичной.

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} y_1 + \\ + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} y_2.$$

Тогда

$$\varphi(2,6) = \frac{(2,6-2,5) \cdot (2,6-3,0)}{(2,0-2,5) \cdot (2,0-3,0)} \cdot 1,0 + \frac{(2,6-2,0) \cdot (2,6-3,0)}{(2,5-2,0) \cdot (2,5-3,0)} \cdot 3,25 + \\ + \frac{(2,6-2,0) \cdot (2,6-2,5)}{(3,0-2,0) \cdot (3,0-2,5)} \cdot 6,0 = 3,76 \equiv f(2,6).$$

Покажем, что значение многочлена Лагранжа не зависит от выбора промежутка интерполирования. Пусть $x = 2,6 \in (x_1, x_2, x_3)$.

Тогда

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3)}{(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3)} y_2 + \\ + \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2)} y_3.$$

Тогда

$$\varphi(2,6) = \frac{(2,6-3,0) \cdot (2,6-3,5)}{(2,5-3,0) \cdot (2,5-3,5)} \cdot 3,25 + \frac{(2,6-2,5) \cdot (2,6-3,5)}{(3,0-2,5) \cdot (3,0-3,5)} \cdot 6,0 + \\ + \frac{(2,6-2,5) \cdot (2,6-3,0)}{(3,5-2,5) \cdot (3,5-2,6)} \cdot 9,25 = 3,76 \equiv f(2,6).$$

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Для функций заданных таблично вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение функции в заданной точке

$$(x^*, f(x^*)).$$

$$1. \quad f(x^*) = f(1,63)$$

x_i	1,62	1,64	1,65	1,67	1,68
$f(x_i)$	1,172	1,179	1,182	1,186	1,189

2. $f(x^*) = f(1,86)$

x_i	1,84	1,85	1,87	1,89	1,91
$f(x_i)$	1,225	1,228	1,232	1,236	1,241

3. $f(x^*) = f(2,25)$

x_i	2,23	2,26	2,27	2,29	2,32
$f(x_i)$	1,306	1,312	1,314	1,318	1,324

4. $f(x^*) = f(1,64)$

x_i	1,60	1,62	1,63	1,65	1,67
$f(x_i)$	0,2019	0,1979	0,1959	0,1920	0,1882

5. $f(x^*) = f(2,39)$

x_i	2,35	2,37	2,38	2,40	2,41
$f(x_i)$	2,864	2,872	2,876	2,884	2,888

6. $f(x^*) = f(2,52)$

x_i	2,50	2,51	2,53	2,54	2,56
$f(x_i)$	5,000	5,010	5,030	5,040	5,060

7. $f(x^*) = f(1,51)$

x_i	1,50	1,52	1,53	1,55	1,57
$f(x_i)$	3,873	3,899	3,912	3,937	3,962

8. $f(x^*) = f(0,87)$

x_i	0,85	0,86	0,88	0,90	0,91
$f(x_i)$	0,4274	0,4232	0,4148	0,4066	0,4025

9. $f(x^*) = f(0,42)$

x_i	1,10	1,12	1,13	1,15	1,18
$f(x_i)$	0,7287	0,7373	0,7415	0,7499	0,7620

10. $f(x^*) = f(1,14)$

x_i	1,10	1,12	1,13	1,15	1,18
$f(x_i)$	0,7287	0,7373	0,7415	0,7499	0,7620

11. $f(x^*) = f(2,10)$

x_i	2,00	2,05	2,15	2,20	2,25
$f(x_i)$	0,9545	0,9596	0,9684	0,9712	0,9756

12. $f(x^*) = f(0,09)$

x_i	0,05	0,07	0,08	0,10	0,12
$f(x_i)$	0,0399	0,0558	0,0638	0,0797	0,0955

13. $f(x^*) = f(2,6)$

x_i	2,5	2,7	2,9	3,0	3,2
$f(x_i)$	0,9163	0,9933	1,0647	1,0986	1,1632

14. $f(x^*) = f(7,0)$

x_i	6,9	7,1	7,2	7,4	7,5
$f(x_i)$	992,27	1212,0	1339,4	1636,0	1808,0

15. $f(x^*) = f(1,40)$

x_i	1,39	1,41	1,42	1,45	1,47
$f(x_i)$	4,0149	4,0960	4,1371	4,2631	4,3492

16. $f(x^*) = f(1,28)$

x_i	1,25	1,27	1,29	1,31	1,33
$f(x_i)$	3,4903	3,5609	3,6328	3,7062	3,7263

17. $f(x^*) = f(1,41)$

x_i	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48
$f(x_i)$	4,0552	4,1371	4,2207	4,3060	4,3929

18. $f(x^*) = f(1,04)$

x_i	1,01	1,03	1,05	1,07	1,09
$f(x_i)$	2,7456	2,8011	2,8577	2,9154	2,9743

19. $f(x^*) = f(1,16)$

x_i	1,15	1,17	1,19	1,21	1,23
$f(x_i)$	3,1582	3,2220	3,2871	3,3535	3,4272

20. $f(x^*) = f(0,81)$

x_i	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88
$f(x_i)$	2,2255	2,2705	2,3164	2,3632	2,4108

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Большинство расчетных математических задач приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений (в дальнейшем, СЛАУ). Это не удивительно, так как математические модели тех или иных явлений или процессов либо сразу строятся как линейные алгебраические, либо сводятся к таковым посредством дискретизации и/или линеаризации. Поэтому трудно переоценить роль, которую играет выбор эффективного (в том или ином смысле) способа решения СЛАУ. Современная вычислительная математика располагает

большим арсеналом методов, а математическое обеспечение ЭВМ – многими пакетами прикладных программ, позволяющих решать различные возникающие на практике линейные системы. Чтобы ориентироваться среди методов и программ и в нужный момент сделать оптимальный выбор, нужно разбираться в основах построений методов и алгоритмов, учитывающих специфику постановок задач, знать их сильные и слабые стороны и границы применимости.

Все методы решения линейных алгебраических задач (наряду с задачами решения СЛАУ, это и вычисление определителей, и обращение матриц) можно разбить на два класса: прямые и итерационные.

Прямые методы – методы, которые приводят к решению за конечное число арифметических операций.

Итерационные методы – методы, в которых точное решение может быть получено лишь в результате бесконечного повторения единообразных (как правило, простых) действий.

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \quad (3.1)$$

или в векторно–матричной форме

$$A \cdot X = B, \quad (3.2)$$

где $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

B – вектор свободных членов; X – вектор неизвестных; A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Если $B = 0$, то система (3.1) называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Решением системы (3.2) называется всякий n – компонентный

вектор-столбец X , обращающий матричное уравнение (3.2) в равенство.

Система называется *совместной*, если у нее существует, по крайней мере, одно решение, в противном случае она называется *несовместной*.

Прежде чем приступить к анализу методов решения СЛАУ освежим в памяти свойства матриц и операции над матрицами.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов, где $m \times n$ – порядок матрицы.

Главная диагональ матрицы выходит из левого верхнего в правый нижний угол и состоит из элементов $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$.

Побочная (второстепенная) диагональ определяется элементами $(a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1})$.

Операции над матрицами:

а) сложение $C = A + B$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

б) умножение на число $C = \alpha \cdot A$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$;

с) перемножение матриц $C = A \cdot B$, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Если $m = n$ – матрица называется *квадратной*. Рассмотрим вначале квадратные матрицы второго и третьего порядков, т.е. системы линейных алгебраических уравнений будут иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определение. Определителем (детерминантом) матрицы A n -го порядка называется число Δ образующееся из n^2 чисел a_{ij} , расположенных в матрице

$$\Delta = |a_{ij}| = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega},$$

$\alpha, \beta, \dots, \omega$ – пробегают все возможные $n!$ Перестановок из чисел $1, 2, \dots, n$, k – число инверсий.

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, образованный из данного вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор со своим знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Вычисление определителей второго порядка проводится по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Для вычисления определителей третьего порядка можно применять правило Саррюса (приписываются первые два столбца)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Определитель n -го порядка можно вычислить, проведя разложение по строчке или столбцу

$$\Delta = |A| = \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M_j^i}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} 12 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

3.1. Формула Крамера решения СЛАУ

Применение формулы Крамера для решения СЛАУ вида (3.1) связано с вычислением определителей. Вначале вычисляется определитель Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$ то система (3.1) является определенной и ее решение можно определить по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_j – определители, получающиеся из Δ , заменой столбца с номером j столбцом свободных членов b_i .

Если $\Delta = 0$ и $\exists j \Delta_j \neq 0$, то система является несовместной (т.е.

не имеет решений).

Если $\Delta = 0$ и $\forall j \Delta_j = 0$, то система является совместной, но неопределенной (т.е. имеет множество решений).

Пример использования формулы Крамера для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9, \\ x - 2y + z = -2, \\ 3x + 2y + 2z = 7. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

$$\text{Таким образом, } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3.$$

3.2. Метод последовательных исключений Гаусса

Наиболее известным и популярным способом решения СЛАУ является метод Гаусса. Суть его проста – это последовательное исключение неизвестных.

Для этого будем поэтапно приводить систему (3.1) к диагональному виду, исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, ..., n -го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, ..., n -го уравнений и т.д.

На первом этапе заменим второе, третье, ... уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым,

умноженным соответственно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

Результатом этого этапа преобразований будет:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)} \cdot x_n = b_3^{(1)}, \\ \hline a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = b_n^{(1)}. \end{array} \right.$$

Коэффициенты которой имеют следующий вид:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1,$$

где $i, j = 2, 3, \dots, n$. При этом полагаем, что $a_{11} \neq 0$.

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом этапе, с подсистемой системы (3.1), получающейся исключением первого уравнения. В результате, после второго этапа получим следующую эквивалентную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} \cdot x_n = b_3^{(2)}, \\ \hline a_{n3}^{(2)} \cdot x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)} \cdot x_n = b_n^{(2)}, \end{array} \right.$$

$$\text{где } a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)}; \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_2^{(1)}, \quad i, j = 3, \dots, n.$$

Продолжая этот процесс, на $(n-1)$ -м этапе так называемого прямого хода метода Гаусса систему (3.1) приведем к треугольному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} \cdot x_n = b_3^{(2)}, \\ \dots \\ a_{nn}^{(n-1)} \cdot x_n = b_n^{(n-1)}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

И при этом коэффициенты системы (3.3) будут иметь вид:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot b_k^{(k-1)}, \quad (3.4)$$

$$k = 1, \dots, n-1, \quad i, j = k+1, \dots, n.$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}; \quad b_i^{(0)} = b_i.$$

Тогда из системы (3.3) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}} \\ \text{---} \\ x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)} \cdot x_n}{a_{22}^{(1)}}, \\ x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \dots - a_{1n} \cdot x_n}{a_{11}}. \end{array} \right.$$

Этот процесс последовательного вычисления значений неизвестных называют обратным ходом метода Гаусса.

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} \cdot x_j \right), \quad (3.5)$$

где $k = n, n-1, \dots, 2, 1$.

Итак, решение системы (3.1) методом Гаусса сводится к последовательной реализации вычислений по формулам (3.4) и (3.5).

Поскольку реальные машинные вычисления производятся не с

точными, а округленными числами, то анализируя, например, формулы (3.4), можно сделать вывод о том, что выполнение алгоритма может прекратиться или привести к неверным результатам, если знаменатели дробей на каком-то этапе окажутся равными нулю или очень маленькими числами.

Чтобы уменьшить влияние ошибок округлений и исключить деление на нуль на каждом этапе прямого хода уравнения системы представляют так, чтобы деление производилось на наибольший по модулю в данном столбце элемент.

Тогда алгоритм решения линейных систем (3.1) методом Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента примет вид:

1) для $k = 1, 2, \dots, n-1$

2) выбор *max* элемента в k -ом столбце и перестановка строк

$$p := a_{kk}; \quad l := k;$$

для $i := k + 1, \dots, n$

$$\text{если } |p| < |a_{ik}|, \text{ то } \begin{cases} l := i \\ p := a_{ik} \end{cases}$$

перестановка

для $j := k, \dots, n$

$$p := a_{kj}; \quad a_{kj} := a_{lj}; \quad a_{lj} := p;$$

$$p := b_k; \quad b_k := b_l; \quad b_l := p;$$

3) для $i := k + 1, \dots, n$

4) для $j := k, \dots, n$

$$5) \quad a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \cdot a_{kj};$$

$$6) \quad b_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \cdot b_k;$$

$$7) \quad x_n = \frac{b_n}{a_{nn}};$$

8) для $k = n-1, n-2, \dots, 2, 1$

$$9) \quad x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{ik} \cdot x_j \right) / a_{kk}.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5, \\ x - y + z = 4, \\ 2x + y + 4z = 1, \end{cases} \quad n = 3.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

$$\text{При } k = 1 \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -0,5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{При } k = 2 \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -0,5 \\ 0 & -1 & 1,25 \end{pmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \\ -4,75 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5, \\ -2y - 0,5z = 1,5, \\ 1,25z = -4,75. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 0,2, \\ z = -3,8. \end{cases}$$

3.3. Решение произвольных систем линейных уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m; \end{cases} \quad (3.6)$$

или в матричной форме

$$A \cdot X = B, \quad (3.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основная матрица системы};$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) - \text{расширенная матрица системы}.$$

Определение. Рангом матрицы A называется наибольший порядок её миноров, отличных от нуля. Ранг матрицы будем обозначать $\text{rang}(A)$ или $r(A)$.

Очевидно, что $r(A) \leq \min\{m, n\}$, где $\min\{m, n\}$ – меньшее двух чисел m (число строк матрицы A) и n (число столбцов матрицы A).

Так, например, у матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}$

все миноры третьего порядка, как легко проверить, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 19 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 19 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

А среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля, например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$. Следовательно, ранг матрицы $r(A) = 2$.

Определение ранга матрицы путем непосредственного вычисления определителей различных порядков приводит к большим

вычислениям. Поэтому на практике пользуются другим методом вычисления ранга, используя элементарные преобразования от которых ранг матрицы не меняется.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- а) перемени местами двух строк (столбцов);
- б) умножение элементов строки (столбца) на одно и тоже число, отличное от нуля;
- в) прибавление к элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

Определение. Две системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

В качестве примера рассмотрим предыдущую матрицу. Прибавим ко второй строке этой матрицы первую, умноженную на -2 , получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке первую, умноженную на -8 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -21 & -21 & -21 \end{pmatrix}.$$

Наконец, прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг этой матрицы меньше трех, т.к. имеются миноры второго порядка, отличные от нуля, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того, чтобы система (3.6) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(\tilde{A}). \quad (3.8)$$

При решении системы (3.6) возможны два случая:

- 1) $\text{rang}(A) < \text{rang}(\tilde{A})$, то система несовместна;

- 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(\tilde{A})$, система совместна и имеет единственное решение если ранг равен числу неизвестных ($r = n$); если $r < n$ – система имеет бесчисленное множество решений.

Определение. Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Не ограничивая общности, можно считать, что базисный минор располагается в первых r ($1 \leq r \leq \min\{m, n\}$) строчках и столбцах матрицы A .

Отбросив последние $(m - r)$ уравнений системы (3.6), запишем укороченную систему:

[illegible]

которая эквивалентна исходной.

Неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ называют базисными, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ – свободными. Переносим слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (3.9), получаем систему относительно базисных неизвестных:

[illegible]

Система, которая для каждого набора значений свободных переменных $x_{r+1} = C_1, \dots, x_n = C_{n-1}$ имеет единственное решение:

$$x_1(C_1, \dots, C_{n-r}), \dots, x_r(C_1, \dots, C_{n-r}).$$

Соответствующее решение укороченной, а следовательно, и исходной системы имеет вид

$$x(C_1, \dots, C_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(C_1, \dots, C_{n-1}) \\ x_2(C_1, \dots, C_{n-1}) \\ \dots\dots\dots \\ x_r(C_1, \dots, C_{n-1}) \\ C_1 \\ \dots \\ C_{n-r} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Формула (3.10), выражающая произвольное решение системы (3.6) в виде вектор-функции от $(n-r)$ свободных неизвестных, называется общим решением системы (3.6).

Пример. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицы A и $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 1 & -4 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Легко видеть, что третье уравнение системы является следствием первых двух (получается в результате умножения первого уравнения на 2 и сложением со вторым). Так как $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$, то система совместна и имеет бесчисленное множество решений ($r < n$).

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5$.

Тогда неизвестные x_1 и x_2 – базисные, а x_3, x_4, x_5 – свободные. Укороченная система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 + 3x_4 - x_5, \\ x_1 - 3x_2 = -3 - x_3 + 2x_4 - x_5. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_3$ и решая укороченную систему относительно базисных неизвестных, получаем

$$\begin{cases} x_1 = -3/5 - C_1 + 13/5 C_2 - C_3, \\ x_2 = 4/5 + C_2/5. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение системы запишется

$$x(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} -3/5 - C_1 + 13/5 C_2 - C_3 \\ 4/5 + C_2/5 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Найти ранг матрицы и указать какой-нибудь базисный минор:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -8 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & -4 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4) $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -14 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$8) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10) \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 13 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$13) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$14) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$15) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -8 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$16) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$17) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$19) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$20) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -6 & -5 & 9 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача отыскания корней нелинейного уравнения с одним неизвестным вида

$$f(x) = 0 \quad (4.1)$$

имеет многовековую историю, но не потеряла своей актуальности и в наши дни. Она часто возникает как элементарный шаг при решении различных научных и технических проблем.

Определение. Совокупность значений переменной x , при которых уравнение (4.1) обращается в истинное тождество, называется *решением* этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности – *корнем уравнения*.

Для справедливости большинства рассуждений данного раздела достаточно предположить, что в окрестности каждого из искомых корней функции $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

В зависимости от вида функции $f(x)$ уравнения вида (4.1) делят на *трансцендентные* и *алгебраические*.

Определение. Функцию $f(x)$ называют *трансцендентной функцией*, если она содержит показательную функцию ($y = a^x$), логарифмическую функцию ($y = \log_a x$), тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), обратные тригонометрические функции ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) и другие.

Предположим, что (4.1) имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня такого уравнения существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Задача о нахождении приближенных значений действительных корней (4.1) предусматривает предварительное *отделение корня*, т.е. установление промежутка, в котором других корней данного уравнения нет и уточнение корней уравнения с заданной точностью.

На этапе отделения корней область допустимых значений x разбивается на отрезки, на каждом из которых содержится только лишь один корень. Существует два метода отделения корней: *графический* и *аналитический*.

Так как действительными корнями уравнения (4.1) являются абсциссы точек пересечения кривой $y = f(x)$ с осью OX , то корень

можно отделить графически. Иногда бывает полезно уравнение (4.1) записать в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Затем строят графики функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Абсциссы точек их пересечения и являются корнями данного уравнения.

В первом и втором подходах с графиков снимают числа a и b , между которыми расположен корень уравнения (4.1).

Аналитически корни уравнения (4.1) отделяют с помощью известной теоремы математического анализа.

Теорема 4.1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка существует, по крайней мере, один корень уравнения (4.1).

Далее рассмотрим три метода приближенного вычисления корней нелинейных уравнений.

4.1. Метод простых итераций

Функцию $f(x)$ представим в виде $f(x) = x - g(x)$.

Соответственно, необходимо решить уравнение вида:

$$x = g(x).$$

Поступают следующим образом, корень ищут в виде последовательности приближений $x_{k+1} = g(x_k)$, где k – номер итерации. При этом $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$, $\xi = g(\xi)$ или $f(\xi) = 0$, x_0 – начальное приближение, которое берут из отрезка $[a, b]$ (в котором находится изолированный корень), можно взять левую границу, т.е. точку a .

Ясно, что подобранное хорошее начальное приближение позволит за малое число итераций найти корень с заданной точностью ε . Условия окончания вычисления элементов последовательности $\{x_k\}_{k \geq 0}$:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \text{ или } |f(x_k)| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим пример, необходимо решить уравнение $x^3 + 3x - 2 = 0$, $x \in (0,1)$ с точностью $\varepsilon = 0,01$, т.е. $\left| f(x^*) \right| \leq \varepsilon$.

Решение. Методом простых итераций найдем корень. Для этого построим последовательность приближений в виде: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(2 - x_k^3)$.

$$x_0 = 0; \quad x_1 \approx 0,667 \Rightarrow f(x_1) \approx 0,298;$$

$$x_2 \approx 0,568 \Rightarrow f(x_2) \approx -0,113;$$

$$x_3 \approx 0,606 \Rightarrow f(x_3) \approx 0,041;$$

$$x_4 \approx 0,592 \Rightarrow f(x_4) \approx -0,017;$$

$$x_5 \approx 0,598 \Rightarrow f(x_5) \approx 0,008 < \varepsilon.$$

Таким образом, $x_5 \approx 0,598 \approx x^*$, потребовалось пять итераций.

Замечание. Для решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ совершается переход от функции $f(x)$ к функции $x - \varphi(x)$ и тогда организуется итерационный процесс

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим вопрос поиска функции $\varphi(x)$. Решение уравнения $x = \varphi(x)$ представляет самостоятельный интерес; нахождение его корней называется задачей о неподвижной точке. Это название связано с тем, что точка $x^* = \varphi(x^*)$ при отображении с помощью $\varphi(x)$ из $\square$ в $\square$ остается на месте.

Существование и единственность корня уравнения $x = \varphi(x)$ основывается на принципе сжимающих отображений или, иначе, принципе неподвижной точки.

Определение. Непрерывная функция $\varphi(x)$ называется сжимающей (функцией сжатия) на отрезке $[a, b]$, если:

$$1. \varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b];$$

$$2. \exists q \in (0, 1): \quad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq q|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Теорема 4.2. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и

дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, если выполняются условия:

$$\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{и} \quad \exists q: |\varphi'(x)| \leq q \leq 1 \quad \forall x \in [a, b],$$

то уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный на $[a, b]$ корень x^* .

К этому корню сходится определяемая методом простых итераций $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ последовательность, $(x_k)_{k=0,1,2,\dots}$, начинающаяся с любого $x_0 \in [a, b]$; при этом справедливы оценки погрешности ($\forall k \in \mathbb{N}$):

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| \quad \text{или} \quad |x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Переход от уравнения $f(x) = 0$ к уравнению $x = \varphi(x)$ осуществляется следующим образом: уравнение сначала переписывают в виде $x = x - \lambda f(x)$, где $\lambda = \text{const}$, которую необходимо найти. Этот коэффициент можно найти из условия $\varphi'(x_0) = 0$, где x_0 – начальное приближение.

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x) \Rightarrow \varphi'(x_0) = 1 - \lambda f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Или же можно провести иную оценку на основе $|\varphi'(x)| < 1$:

$$|\varphi'(x)| < 1 \Rightarrow |1 - \lambda f'(x)| < 1; \quad -1 < (1 - \lambda f'(x)) < 1; \quad 0 < \lambda < \frac{2}{f'(x)}$$

при условии, что $f'(x) > 0$.

В противном случае вместо уравнения $f(x) = 0$ рассматривается уравнение $-f(x) = 0$, если известно, что

$$0 < a' \leq f'(x) \leq \gamma < \infty, \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{то} \quad \lambda = \frac{1}{\gamma}.$$

4.2. Метод половинного деления (метод дихотомии)

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то по теореме 4.1 $\exists \xi \in (a, b) | f(\xi) = 0$.

Для нахождения ξ поступают следующим образом. Возьмем

произвольную точку $c_1 \in (a, b)$ и рассмотрим $f(c_1)$ (c_1 – пробная точка)

а) $f(a) \cdot f(c_1) < 0 \Rightarrow \xi \in (a, c_1)$,

б) $f(b) \cdot f(c_1) < 0 \Rightarrow \xi \in (c_1, b)$,

в) $f(c_1) = 0 \Rightarrow \xi = c_1$.

Далее анализируют отрезок, в который попал корень. Например, если $f(a) \cdot f(c_1) < 0$, то выбирают точку $c_2 \in (a, c_1)$ и также рассматривают значения $f(c_2)$ и значения $f(a)$ и $f(c_1)$. Прodelываем это до тех пор пока не выполнится условие $|f(c_i)| < \delta$, где δ – точность вычислений (рис.4.1).

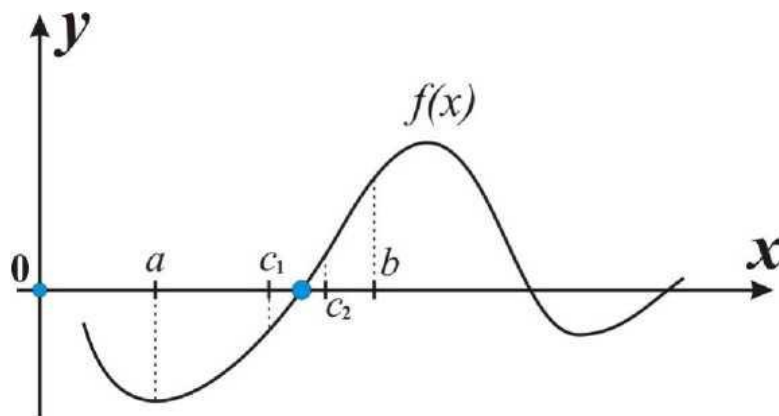


Рис. 4.1. Графическая иллюстрация метода дихотомии

Если способ задания пробных точек c_i определен так, что последовательность длин получающихся в этом процессе промежутков существования корня стремится к нулю, то методом дихотомии можно найти какой-либо корень уравнения (4.1).

Наиболее распространенным частным случаем метода дихотомии является метод половинного деления, реализующий простой способ выбора пробной точки – деление промежутка корня пополам, т.е. $c_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_2 = \frac{a+c_1}{2}$ или $c_2 = \frac{c_1+b}{2}$...

Пример. Решить уравнение: $x^3 + 3x - 2 = 0$, $x \in (0, 1)$ с точностью $\varepsilon = 0,01$, т.е. $|f(x^*)| \leq \varepsilon$.

Решение. Начнем поиск корня:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= -2, \quad f(1) = 2; \quad c_1 = \frac{a+b}{2} = 0,5; \quad f(c_1) = -0,375; \\
 x^* \in (0; 5,1) &\Rightarrow c_2 = 0,75; \quad f(c_2) \approx 0,67; \\
 x^* \in (0,5; 0,75) &\Rightarrow c_3 = 0,625; \quad f(c_3) \approx 0,119; \\
 x^* \in (0,5; 0,625) &\Rightarrow c_4 = 0,5625; \quad f(c_4) \approx -0,13; \\
 x^* \in (0,5625; 0,625) &\Rightarrow c_5 = 0,59375; \quad f(c_5) \approx -0,009; \\
 |f(c_5)| &\approx 0,009 < \varepsilon \Rightarrow c_5 = 0,59375 \approx x^*.
 \end{aligned}$$

4.3. Метод Ньютона

Одним из популярнейших итерационных методов решения нелинейных уравнений, что связано с его идейной простотой и быстрой сходимостью, является метод Ньютона.

Будем считать, что $f(x)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$, $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = 0$.

Необходимо построить последовательность x_k , такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

Пусть $x_k \in [a, b]$ – некоторый член последовательности. По формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k) \cdot (x - x_k)^2,$$

$\theta_k \in (a, b)$ между точками x и x_k . Тогда

$$f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) + \frac{1}{2} f''(\bar{\theta}_k) \cdot (\xi - x_k)^2 = 0.$$

Если $\bar{\theta}_k$ известна, то ξ находится из уравнения

$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) + \frac{1}{2} f''(\bar{\theta}_k) \cdot (\xi - x_k)^2 = 0.$$

Будем считать, что x_k близко к ξ , то $|x_k - \xi|$ – мала, а $|x_k - \xi|^2$ еще меньше и поэтому этим слагаемым можно пренебречь. При этом

будет найден не корень ξ , а некоторая другая точка x_{k+1} – следующий член последовательности.

Таким образом, итерационный процесс Ньютона определяется линейным уравнением

$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0. \quad (4.2)$$

или в явной форме

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

x_k находим до тех пор, пока не выполнится условие $|f(x_k)| < \delta$.

Если в равенстве (4.2) фиксированную точку x_{k+1} заменить переменной x , а 0 в правой части – переменной y , то получим уравнение касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной к ней в точке $(x_k, f(x_k))$. Отсюда геометрический смысл метода Ньютона: приближения к корню ξ совершаются по абсциссам точек пересечения касательных к графику данной функции, проводимых в точках, соответствующих предыдущим приближениям.

Поэтому метод Ньютона называют также методом касательных.

Поскольку процесс итерационный, то необходимо задать начальное приближение: x_0 графическим методом.

Например, $\xi \in (a, b) \Rightarrow x_0 = a$.

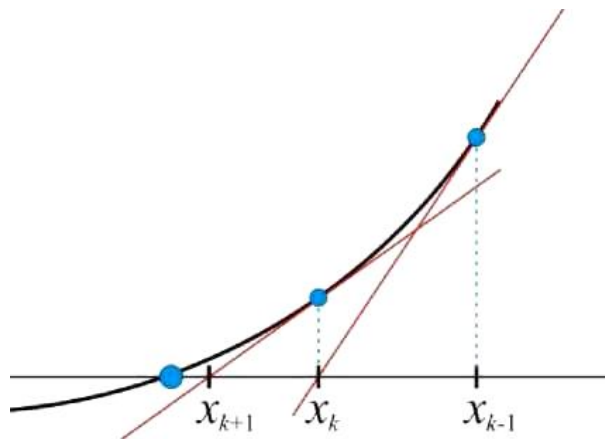


Рис. 4.2. Графическая иллюстрация метода Ньютона

Пример. Решить уравнение: $x^3 + 3x - 2 = 0$, $x \in (0,1)$ с точностью $\varepsilon = 0,01$, т.е. $\left| f(x^*) \right| \leq \varepsilon$.

Решение. Методом Ньютона найдем корень с заданной точностью. Для этого построим последовательность приближений в виде:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 + 3x_k - 2}{3x_k^2 + 3}.$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -2,0; \quad x_1 \approx 0,667 \Rightarrow f(x_1) \approx 0,298;$$

$$x_2 \approx 0,598 \Rightarrow f(x_2) \approx 0,008 < \varepsilon.$$

Следовательно, искомый корень с заданной точностью равен $x_2 = 0,598 \approx x^*$. Потребовались две итерации.

4.4. Обобщение методов решения нелинейных уравнений на системы нелинейных уравнений

Задача отыскания решений системы нелинейных уравнений, существенно более сложная, чем задача отыскания решения одного нелинейного уравнения или системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть требуется решить систему уравнений

[illegible]

где f_i , $i = \overline{1, n}$ – нелинейные функции.

В матричной форме записи система (4.3) принимает вид

$$F(X) = 0,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два итерационных метода для получения приближенного решения системы (4.3).

Метод простых итераций

Преобразуем систему (4.3) к следующему эквивалентному виду (к виду, удобному для итераций):

[illegible]

Методы простых итераций: $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Вычисления проводятся до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\max_i \left| f_i \left(x^{(k+1)} \right) \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Итак, задавая начальное приближение

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

находим последующие приближения по формулам: $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)})$.

Метод Ньютона

Обобщим метод Ньютона для решения одного нелинейного уравнения на решение систем нелинейных уравнений.

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[F'(X^{(k)}) \right]^{-1} \cdot F(X^{(k)}),$$

где

$$F'(X) = J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad - \text{ матрица Якоби.}$$

Существует модификация метода Ньютона.

Чтобы на каждой итерации не вычислять обратную матрицу Якоби можно рассмотреть приближение вида:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[F'(X^{(0)}) \right]^{-1} \cdot F(X^{(k)}).$$

Задачи для самостоятельной работы

4.1. Методом половинного деления найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

4.2. Решить предыдущий пример методом Ньютона.

4.3. Методом половинного деления найти приближенное значение корня уравнения $x^3 + x^2 - 11 = 0$, изолированного в промежутке $(1; 2)$, с точностью $\varepsilon = 0,001$.

4.4. Методом итераций найти приближенное значение корня уравнения $2 - \lg x - x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

4.5. Методом Ньютона найти приближенное значение корня уравнения $x^3 + 2x - 7 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

4.6. Методом итераций найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 12x - 5 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

4.7. Методом половинного деления найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

4.8. Методом итераций найти приближенное значение корня уравнения $x^3 + 2x - 7 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

4.9. Методом половинного деления найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 12x - 5 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

4.10. Методом Ньютона найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

5. ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ)

5.1. Постановка задачи Коши

При решении научных и инженерных задач исследователь часто сталкивается с проблемой математического описания анализируемой динамической системы. При этом не всегда удается найти закон, устанавливающий в явном виде зависимость между величинами, хотя известно, как взаимосвязаны производные этих величин по времени и по координате в виде дифференциальных уравнений. Известно много аналитических методов решения дифференциальных уравнений, когда решение записывается в виде интеграла. Но при решении практических задач интегралы часто не выражаются в элементарных функциях. В этом случае необходимо использовать численные методы решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \in (t_0, c) \quad (5.1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0, \quad (5.2)$$

где $f(t, y)$ – некоторая заданная, в общем случае, нелинейная функция двух переменных.

Сформулированная задача (5.1), (5.2) называется *начальной задачей или задачей Коши*.

Несмотря на внешнюю простоту уравнения (5.1), решить его аналитически, т.е. найти общее решение $y = y(t, c)$ с тем, чтобы затем выделить из него интегральную кривую $y = y(t)$, проходящую через заданную точку (t_0, y_0) , удастся лишь для некоторых специальных типов таких уравнений. Поэтому приходится использовать приближенные способы решения начальных задач для ОДУ, которые можно разделить на 3 группы:

- 1) приближенно–аналитические методы;
- 2) графические или машинно–графические методы;
- 3) численные методы.

К методам первой группы относят такие, которые позволяют находить приближенные решения $y(t)$ сразу в виде некоторой функции $\varphi(t)$. Например, широко известен метод степенных рядов, в одну из реализаций которого заложено представление искомой функции $y(t)$ отрезком ряда Тейлора, где тейлоровские коэффициенты, содержащие производные высших порядков, находят последовательным дифференцированием самого уравнения.

Название графические методы говорит о приближенном представлении искомого решения $y(t)$ на промежутке (t_0, c) в виде графика, который можно строить по тем или иным правилам, связанным с графическим толкованием данной задачи.

Наиболее значимыми в настоящее время являются численные методы решения дифференциальных уравнений, предполагающие получение числовой таблицы приближенных значений y_i искомого решения $y(t)$ на некоторой сетке $t_i \in [t_0, c]$ значений аргумента t . Это связано с бурным развитием цифровой вычислительной техники.

5.2. Типы задач для ОДУ

Задачи для ОДУ можно разделить на две группы:

- а) начальные задачи (задачи Коши);
- б) краевые задачи.

Краевые задачи рассмотрим на примере ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{d_2 t} + p(t) \cdot \frac{dy}{dt} + q(t) \cdot y = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.3)$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \quad (5.4)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (5.5)$$

где к коэффициентам краевых условий (5.4) и (5.5) предъявляются требования

$$\begin{cases} |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Функции $p = p(t)$, $q = q(t)$, и $f = f(t)$, в уравнении (5.3) должны быть такими, чтобы данная задача имела единственное решение $y = y(t)$.

Краевые условия (5.4), (5.5) определяют так называемую третью или, иначе, смешанную краевую задачу для уравнения (5.3), содержащую в себе первую (когда $\alpha_1 = \beta_1 = 0$) или вторую (при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$) краевые задачи.

5.3. Методы решения задачи Коши

Прежде всего рассмотрим один приближенно–аналитический способ решения задачи Коши (5.1) – (5.2) в котором искомое решение $y = y(t)$ в некоторой правой окрестности точки t_0 является пределом последовательности получаемых определенным образом функций $y_n(t)$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (5.1) в

границах от t_0 до t

$$\int_{t_0}^t y'(x) dx = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$$

Отсюда получим

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (5.1) с начальным условием (5.2) преобразовали в интегральное уравнение.

Полученное уравнение имеет вид задачи о неподвижной точке

$$y = \varphi(y),$$

где $\varphi(y) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$

Формально к этой задаче можно применить метод простых итераций

$$y_{n+1} = \varphi(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где в качестве $y_0(t)$ можно взять y_0 из условия (5.2).

Тогда

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_0) dx,$$

затем

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_1(x)) dx.$$

И так далее, пока не выполнится условие вида:

$$\max_t |y_{n+1}(t) - y_n(t)| < \varepsilon.$$

Таким образом, этот приближенно–аналитический метод называется методом последовательных приближений или методом Пикара,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_n(x)) dx,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $y_0(t) \equiv y_0$.

Теорема 5.1. Если в некоторой области G такой, что $(t_0, y_0) \in G$ и $|f(t, x)| \leq c$, $|f'_y(t, y)| \leq c_1$, то $\exists h > 0$, $h = \text{const}$ такая, что на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ последовательность функций $y_n(t)$ определяемая методом Пикара, равномерно сходится к решению $y(t)$ задачи Коши (5.1) – (5.2) и справедлива оценка погрешности

$$|y(t) - y_n(t)| \leq c \cdot c_1^n \cdot \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пример. Решить задачу Коши $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \cdot t^2, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$

методом Пикара.

Решение. Аналитическое решение задачи имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot t^2 \Rightarrow \frac{dy}{y} = t^2 dt \Rightarrow \ln y = \frac{t^3}{3} + \ln C \Rightarrow y = C \exp\left(\frac{t^3}{3}\right).$$

Поскольку $y(0) = 1$, то $C = 1$. Тогда частное решение примет вид

$$y = \exp\left(\frac{t^3}{3}\right)$$

Воспользуемся методом Пикара

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_n(x)) dx.$$

В нашем случае

$$y_{n+1}(t) = 1 + \int_{t_0}^t (x^2 \cdot y_n(x)) dx.$$

Итак,

$$n=0, \quad y_0=1, \quad y_1=1+\int_{t_0}^t (x^2 \cdot 1) dx = 1 + \frac{t^3}{3};$$

$$n=1, \quad y_2=1+\int_0^t x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^3}{3}\right) dx = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \cdot 6};$$

$$n=2, \quad y_3=1+\int_0^t x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3 \cdot 6}\right) dx = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \cdot 6} + \frac{t^9}{3 \cdot 6 \cdot 9};$$

$$n=3, \quad y_4=1+\int_0^t x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3 \cdot 6} + \frac{x^9}{3 \cdot 6 \cdot 9}\right) dx =$$

$$= 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \cdot 6} + \frac{t^9}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{t^{12}}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12};$$

или если ввести обозначение $\frac{t^3}{3} \equiv z$, то

$$y_4 = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} = \sum_{k=0}^4 \frac{z^k}{k!}.$$

$$\text{Ясно, что } y_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(z).$$

Таким образом, $y(t) = \exp\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

5.4. Численные методы решения задачи Коши

Для решения ОДУ будем использовать пошаговые методы. Идея этих методов заключается в следующем: генерируется последовательность точек $t_i \in [t_0, c]$, $(0 \leq i \leq N)$ возможно с переменным шагом $h_i = t_{i+1} - t_i$. В каждой точке t_i решения $y(t_i)$ аппроксимируется значением y_i , которое вычисляется по предыдущим значениям. Разностный метод, определяющий формулу

для вычисления y_{i+1} по k предыдущим значениям $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k+1}$ называется k – шаговым методом. Примером одношагового метода является метод Эйлера.

5.4.1. Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

При этом будем считать, что вычисления проводятся с расчетным шагом $h = \frac{c - t_0}{N}$, расчетными точками (узлами) служат точки $t_i = t_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N$ промежутка $[t_0, c]$ и целью является построение таблицы

t	t_0	t_1	$\dots$	$t_N = c$
y	y_0	y_1	$\dots$	$y_N \cong y(c)$

приближенных значений y_i решения $y = y(t)$ задачи (5.1), (5.2) в расчетных точках t_i .

В окрестности точки t_0 функцию $y(t)$ разложим в ряд Тейлора

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot (t - t_0) + 0.5 y''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \dots, \quad (5.7)$$

который можно применить для приближенного определения искомой функции $y(t)$. В точке $(t_0 + h)$ при малых значениях h можно ограничиться двумя членами ряда (5.7), тогда

$$y(t_0 + h) = y_0 + h \cdot y'(t_0) + O(h^2) \quad (5.8)$$

где $O(h^2)$ – функция порядка h^2 .

Заменим производную $y'(t_0)$, входящую в формулу (5.8), на правую часть уравнения (5.1)

$$y(t_0 + h) = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0). \quad (5.9)$$

Теперь приближенное решение в точке $t_1 = t_0 + h$ можно вновь рассматривать как начальное условие для значения искомой функции в следующем узле и по формуле (5.9) найти значение функции в точке $t_2 = t_1 + h$. В результате получен простейший алгоритм решения задачи Коши, который называется методом Эйлера, или методом касательных. Последнее название связано с геометрической интерпретацией процесса рис. 5.1.

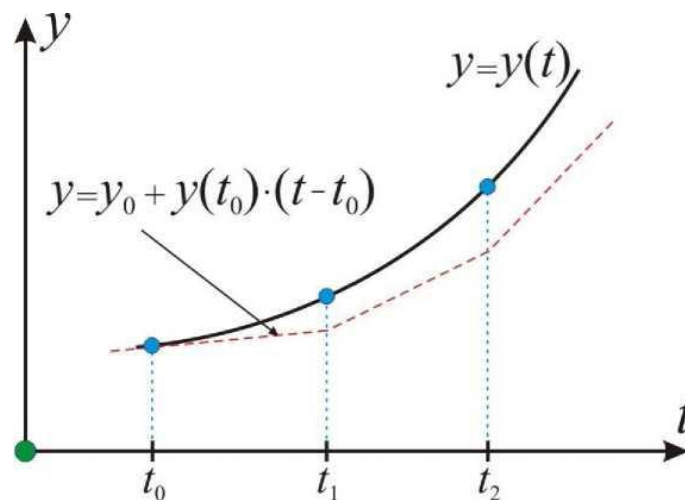


Рис. 5.1. Геометрическая иллюстрация метода Эйлера

Искомую функцию $y(t)$ заменяем ломаной линией, представляющей собой отрезки касательных к этой функции в узлах $t_0, t_1, t_2, \dots$

Таким образом, метод Эйлера примет, следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

5.4.2. Неявный метод Эйлера

Неявный (или обратный) метод Эйлера для ОДУ имеет

следующий вид:

$$y_{i+1} - y_i + h \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Этот метод называется неявным, поскольку для вычисления неизвестного значения $y_{i+1} \approx y(t_{i+1})$ по известному значению $y_i \approx y(t_i)$ требуется решить уравнение, в общем случае нелинейное. Этот метод также как и явный метод Эйлера дает первый порядок точности относительно h .

5.4.3. Метод трапеций

Метод трапеций – одна из модификаций метод Эйлера. Это тоже неявный метод и его реализация имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Порядок точности метода трапеций на единицу больше порядка точности методов Эйлера как явного, так и неявного, т.е. метод трапеций – это метод второго порядка точности.

Пример. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \cdot x^2, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

на сетке, состоящей из шести узлов

- 1) явным методом Эйлера;
- 2) неявным методом Эйлера;
- 3) методом трапеций.

Шаг сетки будет иметь значение $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{5} = 0,2$.

1) Явный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \text{ т.е. } y_{i+1} = y_i + h \cdot x_i^2 \cdot y_i = y_i \cdot (1 + h \cdot x_i^2).$$

2) Неявный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \text{ т.е. } y_{i+1} = y_i + h \cdot x_{i+1}^2 \cdot y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - h \cdot x_i^2}.$$

3) Метод трапеций:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \text{ т.е. } y_{i+1} =$$

$$= y_i + \frac{h}{2} \cdot [x_i^2 \cdot y_i + x_{i+1}^2 \cdot y_{i+1}] \Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i (2 + h \cdot x_i^2)}{2 - h \cdot x_{i+1}^2}.$$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
явный метод Эйлера	1	1	1,008	1,04	1,115	1,26
неявный метод Эйлера	1	1,008	1,041	1,122	1,587	1,61
метод трапеций	1	1,004	1,024	1,079	1,191	1,408
точное решение $y(x) = \exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$	1	1,003	1,022	1,075	1,186	1,396

Сравнение полученных результатов показывает, что точность метода трапеций, действительно, выше точности и явного, и неявного метода Эйлера.

Задачи для самостоятельной работы

5.1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 2y = x^2$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$, явным методом Эйлера на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$. Построить таблицу и график приближённого решения.

5.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 2y = x^2$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$, неявным методом Эйлера на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$. Построить таблицу и график приближённого решения.

5.3. Используя метод трапеций, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения

$y' = 0,2x + 3y^2$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0,2$ на отрезке $[0; 0,5]$ с шагом $h = 0,1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками и расположить их в таблицу.

5.4. Вычислить тремя методами: явным методом Эйлера, трапеций и неявным методом Эйлера интеграл дифференциального уравнения $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0,5]$ с шагом интегрирования $h = 0,1$.

5.5. Используя методы явный и неявный Эйлера и трапеций, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = \frac{x}{y} + 0,5y$ удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 1]$ с шагом $h = 0,1$. Все вычисления вести с тремя десятичными знаками и расположить их в таблицу.

6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать линейные краевые задачи второго порядка:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x) \quad x \in [a, b] \quad (6.1)$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \quad (6.2)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \quad (6.3)$$

Условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0. \end{cases}$$

Функции $p = p(x)$, $q = q(x)$, $f = f(x)$ выбираются таким образом, чтобы краевая задача имела единственное решение.

В зависимости от краевых условия краевые задачи делят на:

- а) первая краевая задача $\alpha_1 = \beta_1 = 0$;
- б) вторая краевая задача $\alpha_0 = \beta_0 = 0$;
- в) третья краевая задача или смешанная (6.2) – (6.3).

Как известно, точное (аналитическое) решение краевых задач вызывает еще большие трудности, чем решение задачи Коши. Отсюда – повышенный интерес и большое разнообразие приближенных методов решения.

Классификация приближенных методов решения краевых задач для ОДУ:

- 1) методы сведения к задаче Коши (метод пристрелки, метод дифференциальной прогонки, метод редукции);
- 2) метод конечных разностей;
- 3) метод балансов или интегро–интерполяционный метод;
- 4) метод коллокации;
- 5) проекционные методы (моментов, Галеркина);
- 6) вариационные методы (наименьших квадратов, Ритца);
- 7) проекционно–разностные методы (метод конечных элементов).

Методы 4) – 6) приводят к приближенному решению в виде функции заданного семейства (линейной комбинации некоторой системы линейно независимых функций).

Методы 1) – 3) и 7) генерируют таблицы численных значений приближенного решения.

6.1. Метод конечных разностей

Идея метода конечных разностей (МКР) решения краевых задач состоит в следующем: вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечно-разностные аппроксимации. Эта идея уже применялась при построении методов решения задачи Коши. При построении дискретных аппроксимаций краевых дифференциальных задач нужно стремиться увязать две цели: хорошее качество аппроксимации и эффективное и устойчивое решение получающихся при этом алгебраических систем.

Рассмотрим применение МКР для линейной краевой задачи

(6.1) – (6.3). Сначала на отрезке $[a, b]$ вводится сетка с шагом $h = \frac{b-a}{N}$, где $(N+1)$ – число узлов. На этой сетке определяются сеточные функции $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, отвечающие функциональным коэффициентам данного дифференциального уравнения, а также $y_i \approx y(x_i)$ при условии, что $y(x)$ – точное решение краевой задачи.

Фиксируя в уравнении (6.1) $x = x_i$ с учетом обозначений приходим к равенству:

$$y''(x_i) + p_i \cdot y'(x_i) + q_i \cdot y(x_i) = f_i \quad (6.4)$$

где $i = \overline{0, N}$.

Далее необходимо аппроксимировать производные: существует большое количество формул, отличающихся как внешним видом, так и порядком аппроксимации:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2); \\ y'(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{h} + O(h); \\ y'(x_i) &= \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} + O(h); \\ y''(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Будем использовать формулы вида $O(h^2)$, подставляя их в уравнение (6.4) получим:

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + p_i \cdot \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + q_i \cdot y(x_i) = f_i + O(h^2).$$

Это уравнение является точным отражением дифференциального уравнения (6.1), но в нем имеется неопределенное слагаемое $O(h^2)$.

Отбрасывая его, приходим к разностному уравнению

относительно приближенных значений решения:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i \cdot y_i = f_i.$$

Приведем это уравнение к классической форме трехточечного разностного уравнения второго порядка:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (6.5)$$

Видим, что в системе уравнений (6.5) $(N-1)$ уравнение, а неизвестных $N+1$. Два недостающих уравнения получают на основе краевых условий (6.2) и (6.3).

Будем рассматривать два варианта аппроксимации производных первого порядка:

$$y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} + O(h^2);$$

$$y'(b) = \frac{y(x_N) - y(x_{N-1})}{h} + O(h) = \frac{y(x_{N-2}) - 4y(x_{N-1}) + 3y(x_N)}{2h} + O(h^2).$$

В случае аппроксимации первого порядка относительно шага получим:

а) для условия (2) $\alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = A;$

б) для условия (3) $\beta_0 y(x_N) + \beta_1 \frac{y(x_N) - y(x_{N-1})}{h} + O(h) = B.$

Переходя к y_i получим

$$\left(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{h} \right) x_0 + \frac{\alpha_1}{h} + y_1 = A, \quad \left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{h} \right) x_N + \frac{\alpha_1}{h} + y_{N-1} = B.$$

В случае аппроксимации второго порядка $O(h^2)$ получим:

а) для условия (2)

$$\alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} + O(h^2) = A;$$

б) для условия (3)

$$\beta_0 y(x_N) + \beta_1 \frac{y(x_{N-2}) - 4y(x_{N-1}) + 3y(x_N)}{2h} + O(h^2) = B.$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} \left(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} \right) y_0 + \frac{2\alpha_1}{h} y_1 - \frac{\alpha_1}{2h} y_2 &= A, \\ \frac{\beta_1}{2h} y_{N-2} - \frac{2\beta_1}{h} y_{N-1} + \left(\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h} \right) y_N &= B. \end{aligned}$$

Таким образом, все соотношения получены.

Пример. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

$$y'' + xy' - 0,5 \frac{y}{x} = 1, \quad \begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2,3) = 2,15. \end{cases}$$

Решение.

Разбиваем отрезок $[2; 2,3]$ с шагом $h = 0,1$ на части. Получаем четыре узловые точки $x_0 = 2$; $x_1 = 2,1$; $x_2 = 2,2$; $x_3 = 2,3$. Узлы x_0 и x_3 являются граничными, x_1 и x_2 – внутренними. Данное уравнение во внутренних точках заменим конечно-разностным уравнением:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0,5 \frac{y_i}{x_i} = 1. \quad (i = 1, 2)$$

Из краевых условий составим конечно-разностные уравнения в граничных точках:

$$\begin{cases} y_0 + 2 \frac{-y_2 + 4y_1 + 3y_0}{2h} = 1, & (i = 0) \\ y_3 = 2,15. & (i = 3) \end{cases}$$

Данная задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 + 2 \frac{-y_2 + 4y_1 + 3y_0}{2h} = 1, \\ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0,01} + 2,1 \frac{y_2 - y_0}{0,2} - 0,5 \frac{y_1}{2,1} = 1, \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0,01} + 2,2 \frac{y_3 - y_1}{0,2} - 0,5 \frac{y_2}{2,2} = 1, \\ y_3 = 2,15. \end{cases}$$

Выполнив преобразования, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -2,9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0,1, \\ 375,9y_0 - 841y_1 + 464,1y_2 = 4,2, \\ 391,6y_1 - 881y_2 + 488,4y_3 = 4,4, \\ y_3 = 2,15. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, получим решение

$$\begin{array}{ccccc} x & 2,0 & 2,1 & 2,2 & 2,3 \\ y & 2,235 & 2,185 & 2,158 & 2,150. \end{array}$$

Рассмотрим наиболее эффективный метод решения трехточечных разностных уравнений второго порядка.

6.2. Метод прогонки

Итак, для решения уравнения вида

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (6.6)$$

предполагают, что существует зависимость $y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i$, т.е. трехточечное уравнение второго порядка сводят к двухточечному уравнению первого порядка.

Тогда

$$y_{i-1} = \delta_{i-1} y_i + \lambda_{i-1} \quad (6.7)$$

подставим (6.7) в уравнение (6.6), получим:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i \delta_{i-1} y_i + C_i \lambda_{i-1} = F_i.$$

Откуда

$$y_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}} y_{i+1} + \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}.$$

Сравнивая полученное соотношение с (6.7) можно записать

$$\delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо найти δ_0 и λ_0 на основе соотношения $y_0 = \delta_0 y_1 + \lambda_0$, т.е. δ_0 и λ_0 можно найти из краевого условия на левой границе.

В нашем случае два вида аппроксимации условий:

$$1. \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{2h} \right) y_0 + \frac{\alpha_1}{h} y_1 = A \Rightarrow y_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0 h} y_1 - \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h},$$

таким образом

$$\delta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0 h}; \quad \lambda_0 = \frac{Ah}{\alpha_0 h - \alpha_1};$$

$$2. \left(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} \right) y_0 + \frac{2\alpha_1}{h} y_1 - \frac{\alpha_1}{2h} y_2 = A.$$

Из этого отношения необходимо исключить y_2 , воспользуемся уравнением (6.5) при $i=1$:

$$A_1 y_2 - B_1 y_1 + C_1 y_0 = F_1, \quad A_1 = \frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}; \quad B_1 = \frac{2}{h^2} - q_1;$$

$$C_1 = \frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}; \quad F_1 = f_1; \quad y_2 = \frac{F_1}{A_1} + \frac{B_1}{A_1} y_1 - \frac{C_1}{A_1} y_0.$$

Подставляя это в краевое условие получим:

$$\left(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h}\right)y_0 + \frac{2\alpha_1}{h}y_1 - \frac{\alpha_1}{2h}\left[\frac{F_1}{A_1} + \frac{B_1}{A_1}y_1 - \frac{C_1}{A_1}y_0\right] = A;$$

$$y_0\left[\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} + \frac{\alpha_1 C_1}{2A_1 h}\right] + y_1\left[\frac{2\alpha_1}{h} - \frac{\alpha_1 B_1}{2A_1 h}\right] = A + \frac{\alpha_1 F_1}{2A_1 h};$$

$$y_0 = \frac{\alpha_1 B_1 - 4\alpha_1 A_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1} y_1 + \frac{2h A A_1 + \alpha_1 F_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1}.$$

Таким образом, в случае $O(h^2)$

$$\delta_0 = \frac{\alpha_1 B_1 - 4\alpha_1 A_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1}; \quad \lambda_0 = \frac{2h A A_1 + \alpha_1 F_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1}.$$

Когда δ_0 и λ_0 определили можно находить δ_i и λ_i , $i = \overline{1, N-1}$

$$\delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}.$$

Далее находят y_i по формулам

$$y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0.$$

1. С погрешностью аппроксимации $O(h)$

$$\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{h}\right)y_N - \frac{\beta_1}{h}y_{N-1} = B; \quad y_{N-1} = \delta_{N-1}y_N + \lambda_{N-1};$$

$$\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{h}\right)y_N - \frac{\beta_1}{h}\delta_{N-1}y_N - \frac{\beta_1}{h}\lambda_{N-1} = B;$$

$$y_N = \frac{\beta_1 \lambda_{N-1} + hB}{h\beta_0 + \beta_1 - \beta_1 \delta_{N-1}} + O(h).$$

2. С погрешностью аппроксимации $O(h^2)$

$$\frac{\beta_1}{2h}y_{N-2} - \frac{2\beta_1}{h}y_{N-1} + \left(\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h}\right)y_N = B.$$

Воспользуемся системой уравнений, полученной после

аппроксимации дифференциального уравнения (6.5) при $i = N - 1$.

$$A_{N-1}y_N - B_{N-1}y_{N-1} + C_{N-1}y_{N-2} = F_{N-1},$$

$$A_{N-1} = \frac{1}{h^2} + \frac{p_{N-1}}{2h}; \quad B_{N-1} = \frac{2}{h^2} - q_{N-1}; \quad C_{N-1} = \frac{1}{h^2} - \frac{p_{N-1}}{2h}; \quad F_{N-1} = f_{N-1};$$

$$y_{N-2} = \frac{F_{N-1}}{C_{N-1}} + \frac{B_{N-1}}{C_{N-1}} y_{N-1} - \frac{A_{N-1}}{C_{N-1}}.$$

Далее находят все y , $I = N - 1, 1$.

Таким образом, решение уравнения (6.5) описываемым способом, называемым методом прогонки, сводится к вычислениям по трем формулам:

1) нахождение прогоночных коэффициентов δ_i и λ_i

$$\delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}},$$

при $i = \overline{1, N - 1}$ – это прямая прогонка;

3) вычисление y_i по прогоночной формуле

$$y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i, \quad i = N - 1, N - 2, \dots, 0 \text{ – это обратная прогонка.}$$

Из левого граничного условия находят δ_0 и λ_0 , y_N находят из правого граничного условия.

Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникло ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть быстрого роста погрешностей округлений.

Определение. Будем называть прогонку *корректной*, если знаменатели прогоночных коэффициентов не обращаются в нуль, и *устойчивой*, если $|\delta_i| < 1 \quad \forall i = \overline{0, N - 1}$.

Достаточные условия корректности и устойчивости прогонки:

$$|B_i| > |A_i| + |C_i| \quad \forall i = \overline{1, N - 1} \text{ и } |\delta_0| < 1.$$

Задачи для самостоятельной работы

6.1. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи с шагом $h = 0,1$:

$$\begin{array}{ll} 1) \ y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x, & 2) \ y'' - xy' + 2y = x + 1, \\ \begin{cases} y(0,7) = 0,5, \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2. \end{cases} & \begin{cases} y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 2, \\ y(1,2) = 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3) \ y'' + xy' + y = x + 1, & 4) \ y'' - 2y' - \frac{y}{x} = 3, \\ \begin{cases} y(0,5) + 2y'(0,5) = 1, \\ y'(0,8) = 1,2. \end{cases} & \begin{cases} y(0,2) = 2, \\ 0,5y(0,5) - y'(0,5) = 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5) \ y'' + 2y' - xy = x^2, & 6) \ y'' - y' + \frac{2y}{x} = 0,4x, \\ \begin{cases} y'(0,6) = 0,7, \\ y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 1. \end{cases} & \begin{cases} y(1,1) - 0,5y'(1,1) = 2, \\ y'(1,4) = 4. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 7) \ y'' - 3y' + \frac{y}{x} = 1, & 8) \ y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1, \\ \begin{cases} y(0,4) = 2, \\ y(0,7) + 2y'(0,7) = 0,7. \end{cases} & \begin{cases} y'(1,2) = 1, \\ 2y(1,5) - y'(1,5) = 0,5. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 9) \ y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2, & 10) \ y'' + 1,5y' - xy = 0,5, \\ \begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0,5, \\ y(1,3) = 1. \end{cases} & \begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1, \\ y(1,6) = 3. \end{cases} \end{array}$$

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

7.1. Примеры и классификация уравнений в частных производных

При изучении большинства физических и иных процессов и явлений приходится сталкиваться с тем, что исследуемые свойства объекта описываются функциями не одной переменной, а нескольких. В таких случаях, при составлении математических моделей изучаемых явлений за ОДУ берут уравнения в частных производных. Независимыми переменными в таких уравнениях, как правило, выступают пространственные координаты и время, и эти уравнения описывают какое-то физическое явление или процесс. Такие уравнения называются уравнениями математической физики.

Рассмотрим несколько классических примеров уравнений математической физики.

1. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u = 0.$$

Это уравнение используется для описания плоских электростатических полей, магнитных полей постоянных токов, стационарных тепловых полей. Аналогичные пространственные поля описываются трехмерным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2. Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{или} \quad \Delta u = f.$$

Область применения – задачи электростатики, электронной оптики, теории упругости, гидродинамики.

3. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{или} \quad \Delta u = f.$$

Где a – коэффициент температуропроводности.

Данное уравнение описывает распространение тепла в тонком стержне. В общем случае: $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$. Это уравнение теплопроводности является однородным, т.е. без наличия различного рода источников или поглотителей тепла. Неоднородное уравнение теплопроводности имеет вид: $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + f(t, x, y, z)$.

4. Волновое уравнение (уравнение колебаний струны):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \text{свободные колебания};$$

если колебания происходят под действием внешней силы $f(x, t)$, то уравнение имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x)$.

Уравнение свободных колебаний однородной мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

5. Уравнения Навье–Стокса:

а) уравнение неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0, \bar{V} = u \bar{i} + v \bar{j};$

б) уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \end{aligned}$$

в) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Все представленные примеры, кроме уравнений Навье–Стокса, содержат неизвестные функции вида $u(x, y)$ или $u(t, x)$ в плоском случае. Тогда все эти уравнения можно считать частными случаями уравнения вида:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F. \quad (7.1)$$

Это общий вид линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$. В наиболее общем случае A, B, C, D, E, G и $F = f(x, y)$.

Если $F = 0$, то уравнение (7.1) однородное; если $F \neq 0$ уравнение (7.1) неоднородное.

Классификация уравнений второго порядка производится в зависимости от знака дискриминанта $B^2 - AC$:

1. $B^2 - AC < 0$ – уравнение эллиптического типа (уравнения Лапласа, Пуассона);
2. $B^2 - AC > 0$ – уравнение гиперболического типа (волновое уравнение);
3. $B^2 - AC = 0$ – уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности).

Если уравнение не содержит время в качестве независимой переменной, то оно называется стационарным, в противном случае нестационарным или эволюционным уравнением.

7.2. Постановка задач для уравнений математической физики

Каждое дифференциальное уравнение в частных производных имеет бесчисленное множество решений. Для получения частного решения некоторой задачи необходимо еще сформулировать дополнительные условия. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы эти дополнительные условия выделяли из общего решения

единственное частное решение, чтобы это частное решение существовало в заданном функциональном пространстве и чтобы оно мало изменялось при малых изменениях условий. Эти три требования – существование (разрешимость), единственность (однозначность) и непрерывная зависимость от исходных данных в совокупности характеризуют корректность постановки задачи.

Рассмотрим примеры постановок задач. Прежде всего отметим, что для дифференциальных уравнений в частных производных ставятся начальные и граничные условия. Если одна из независимых переменных играет роль времени, то условия, относящиеся к начальному моменту времени ($t = t_0$), называются начальными условиями (начальная задача). Условия, которые задаются при различных значениях пространственных переменных, называются граничными условиями (граничная задача). А если для задачи необходимо сформулировать и начальные, и граничные условия, то имеем смешанную задачу.

Например, если нам необходимо проанализировать нестационарное распределение температуры в пластине, то соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Если необходимо поставить задачу, значит, помимо дифференциального уравнения, нужно сформулировать граничные и начальные условия.

Начальное условие: $t = 0 \quad T = f(x, y)$, т.е. задано распределение температуры в области в начальный момент времени.

Граничные условия бывают 4 видов:

1) граничное условие 1 рода

$$T|_{\Gamma} = g(x, y, t),$$

т.е. это условие определяет неизвестную функцию температуры T через известные функции (например, $T|_{x=0} = T_h = \text{const}$).

2) Граничное условие 2 рода,

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = g(x, y, t),$$

т.е. на границе задается производная по нормали в нашем случае – это тепловой поток. Например, на границе $x = 0 - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q$ – закон Фурье.

2) Граничное условие 3 рода

$$T|_{\Gamma} + \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = g(x, y, t)$$

включает в себя и саму неизвестную функцию, и производную по нормали от нее. В случае уравнения энергии или уравнения теплопроводности, в частности, граничные условия 3 рода соответствуют закону Ньютона–Рихмана:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha (T^e - T|_{x=0}).$$

4) Граничное условие 4 рода рассматривается при наличии двух сред, отличающихся теплофизическими характеристиками. Например, имеем составной стержень рис. 7.1

на границе $x = x^*$
$$\begin{cases} T_1 = T_2; \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}. \end{cases}$$

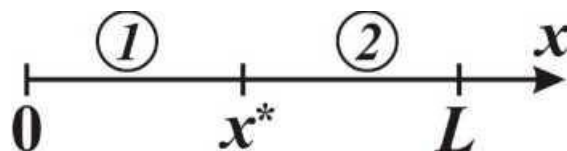


Рис. 7.1. Стержень, с разными теплофизическими характеристиками

Сформулируем нашу задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

$$t = 0: T(x, y) = T_0 = \text{const};$$

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad t > 0; \quad x = L: T(t, L, y) = T_h, \quad t > 0;$$

$$y = 0: \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad t > 0; \quad y = H: \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=H} = \alpha (T^e - T|_{y=H}) \quad t > 0.$$

Это сформулирована плоская нестационарная задача теплопроводности.

В настоящее время для решения подобных задач используют численные методы. Хотя существуют аналитические методы, например, метод разделения переменных или метод Фурье. Но, как и большинство аналитических методов, этот метод рассчитан на решение достаточно простых задач.

Для решения краевых задач используют три группы численных методов:

- 1) метод конечных разностей;
- 2) метод конечных элементов;
- 3) метод контрольного объема.

7.3. Некоторые разностные схемы для уравнения теплопроводности

Рассмотрим применение метода конечных разностей на примере однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, t^k] \quad (7.2)$$

$$T(x, 0) = \bar{T} = \text{const} \quad \text{при } x \in [0, L];$$

$$T(0, t) = \alpha(t), \quad T(L, t) = \beta(t) \quad \text{при } t \in [0, t^k].$$

Как видно, область, на которой определена функция T , представляет собой прямоугольник $(0, L) \times (0, t^k)$ в системе координат OXt рис. 7.2. Ее граница Γ состоит из отрезков прямых $x = 0$, $x = L$, $t = 0$. Поскольку используется МКР, то нам необходимо всю область покрыть сеткой. Проводятся прямые $x = x_i$ и $t = t_j$ параллельно осям Ot и OX , при этом

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{L}{N}, \quad i = 0, \dots, N;$$

$$t_j = j \cdot \tau, \quad \tau = \frac{t^k}{M}, \quad j = 0, \dots, M.$$

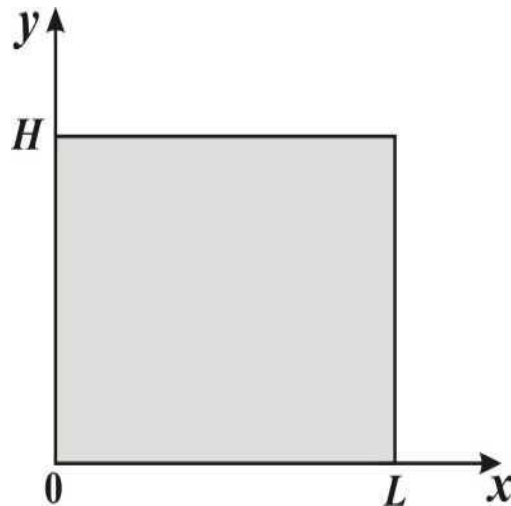


Рис. 7.2. Область на которой определена функция T

Точки (x_i, t_j) , лежащие на пересечениях этих прямых, называются *узлами*. Узлы, которые лежат внутри области называются *внутренними* и *граничными*, если они находятся на границе области. Совокупность всех узлов называется *сеткой*, h и τ – шагами сетки. Узлы, лежащие на одной прямой $t = t_j$ при фиксированном j , называют *слоем*. Далее на построенной сетке вводят сеточные функции – это функции определенные в узлах стеки:

$$T(x_i, t_j) = T_i^j, \quad \alpha(t_j) = \alpha^j, \quad \beta(t_j) = \beta^j.$$

Мы рассматриваем равномерную сетку, что позволяет привлекать конечноразностную аппроксимацию. Необходимо спроектировать задачу (7.2) на сетку, заменяя входящие в нее функции сеточными, а частные производные – их простейшими разностными аппроксимациями.

Рассмотрим аппроксимацию частных производных $\frac{\partial T}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} + O(h^2).$$

Для аппроксимации $\frac{\partial T}{\partial t}$ можно использовать следующие формулы:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} + O(\tau);$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\tau} + O(\tau);$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} + O(\tau^2).$$

Подставив эти аппроксимации в соотношение (7.2) получим сеточные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} &= a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, & \left| \begin{array}{l} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}; \end{array} \right. \\ \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\tau} &= a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, & \left| \begin{array}{l} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M}; \end{array} \right. \\ \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} &= a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, & \left| \begin{array}{l} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M-1}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

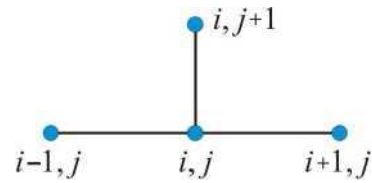
Эти уравнения дополняются аппроксимацией граничных условий:

$$T_i^0 = \bar{T}, \quad i = \overline{0, N}; \quad T_0^j = \alpha^j, \quad T_N^j = \beta^j, \quad j = \overline{0, M}.$$

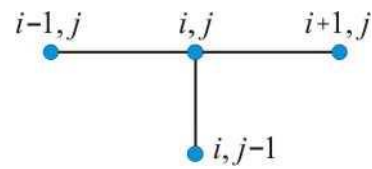
Сеточные уравнения в совокупности с аппроксимациями

начальных и граничных условий называются разностными схемами. Конфигурация узлов, которые участвуют в аппроксимации частных производных, называют шаблоном разностной схемы.

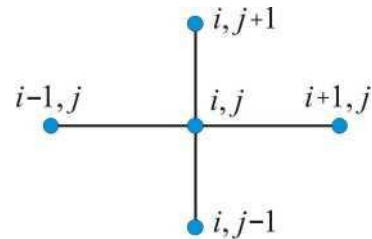
$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}; \end{cases} \quad (a)$$



$$\frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M}; \end{cases} \quad (б)$$



$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M-1}. \end{cases} \quad (в)$$



Определение. Если в разностной схеме присутствуют значения искомой функции на двух соседних слоях, то схема называется двухслойной (а) и (б). Соответственно, (в) – трехслойная схема.

Определение. Явная схема – это схема, представляющая собой формулу для непосредственного вычисления искомых значений очередного слоя (а) и (в). Неявная схема требует при переходе от слоя к слою решать СЛАУ (б).

7.4. Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения теплопроводности

Под аппроксимацией подразумевается замена частных производных соответствующими конечными разностями. При этом появляется понятие невязки или погрешности аппроксимации, которая представляет собой разность между точным решением и приближенным, т.е.

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j} - \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} \right| = \delta \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} + O(\tau),$$

где δ и $O(\tau)$ – невязка (погрешность аппроксимации).

Определение. Разностная схема называется устойчивой, если малые изменения правой части дифференциального уравнения приводят к незначительным отклонениям решения

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)} \quad \exists h_0 > 0, \delta > 0 \quad \forall h < h_0 \quad \forall \varepsilon^{(h)} \in F_h \quad \|\varepsilon^{(h)}\| < \delta.$$

$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$ имеет единственное решение такое, что

$$\|z^{(h)} - y^{(h)}\| \leq c \cdot h^k.$$

Теорема Лакса 7.1. (аппроксимация + устойчивость = сходимость). Если разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу и устойчива. Тогда решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

Возвращаясь к краевой задаче теплопроводности, а именно, к разностным схемам можно сделать некоторые замечания относительно погрешностей аппроксимации для каждой из введенных схем:

- а) двухслойная явная схема – $O(\tau + h^2)$;
- б) двухслойная неявная схема – $O(\tau + h^2)$;
- с) трехслойная явная схема – $O(\tau^2 + h^2)$.

7.5. Анализ устойчивости

Существует много методов, позволяющих проводить анализ устойчивости применяемых разностных схем. Например, решение представляют в виде члена ряда Фурье $T_i^j = \lambda^j \exp(ki\varphi)$, $k^2 = -1$ и если $|\lambda| \leq 1$, то схема устойчива.

Разностная схема, устойчивость которой связана с некоторым

ограничением на шаг, называется условно устойчивой. Например, явная двухслойная схема – условно устойчива $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$. Неявная двухслойная схема – безусловно или абсолютно устойчива, т.е. позволяет проводить расчеты при любых τ и h .

Таким образом, явная и неявная двухслойные схемы имеют погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$, обладают свойством устойчивости, соответственно, решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

7.6. Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, t^k] \\ T(x, 0) &= T_0 = \text{const при } x \in [0, L]; \\ T(0, t) &= T_h, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{при } t \in [0, t^k].\end{aligned}$$

Необходимо получить полк температуры в момент времени $t = t^k$.

Этапы решения задачи:

1) строим сетку

$$\begin{aligned}x_i &= i \cdot h, \quad h = \frac{L}{N}, \quad i = 0, \dots, N; \quad N + 1 - \text{число узлов по оси } x; \\ t_j &= j \cdot \tau, \quad \tau = \frac{t^k}{M}, \quad j = 0, \dots, M; \quad M + 1 - \text{число узлов по оси } t.\end{aligned}$$

2) Аппроксимируем производные (воспользуемся двухслойной неявной схемой)

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}; \end{cases}$$

$$T_i^0 = T^0 = \text{const}, \quad i = \overline{0, N}; \quad T_0^k = T_h = \text{const}, \quad k = \overline{1, M};$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_N^k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_N^k = \frac{T_N^k - T_{N-1}^k}{h} + O(h); \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_N^k = \frac{T_N^k - T_{N-1}^k}{h} + \frac{h}{2a\tau} (T_N^k - T_{N-1}^k) + O(\tau + h^2). \end{cases}$$

На втором этапе совершен переход от дифференциальной задачи к разностной.

3) Решаем разностную задачу:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}. \end{cases}$$

Задача является нестационарной, значит, на каждом шаге по времени необходимо решать систему для определения T_i . Самым эффективным методом решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей является метод прогонки.

$$A_i T_{i+1} - B_i T_i + C_i T_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$A_i = \frac{a}{h^2}; \quad B_i = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}; \quad C_i = \frac{a}{h^2}; \quad F_i = -\frac{T_i^k}{\tau}; \quad T_i = \alpha_i T_{i+1} + \beta_i;$$

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}; \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Начальные прогоночные коэффициенты находим на основе левого граничного условия:

$$x=0 \quad T_0 = T_h \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0; \\ \beta_0 = T_h. \end{cases}$$

После этого находим все прогоночные коэффициенты. Значение температуры на правой границе определяем, исходя из правого граничного условия $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$.

Получаем

$$T_N^k = \begin{cases} \frac{\beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1}} + O(h); \\ \frac{2a\tau\beta_{N-1} + h^2 T_N^{k-1}}{2a\tau(1 - \alpha_{N-1}) + h^2} + O(\tau + h^2). \end{cases}$$

Зная, T_N^k находим поле температуры на k -ом временном слое, после чего переходим на новый временной слой.

Пример. Решить начальную краевую задачу для уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1 \\ u(x, 0) = 4x(1 - x), & \sigma = 0,5; \quad h = 0,2 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим явную разностную схему, т.к.

$$\sigma = 0,5; \quad a^2 = 1, \quad \text{то} \quad \sigma = \frac{\tau a^2}{h^2} = \frac{\tau \cdot 1}{0,2^2} = \frac{\tau}{0,04} = \frac{1}{2}; \quad \delta = 0,02; \quad x_i = 0,2i;$$

$$t_j = 0,02j.$$

Составим схему

$$\begin{cases} u_{ij+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1j} + u_{i+1j}), \\ u_{i0} = 4 \cdot 0,2i(1 - 0,2i) = 0,8i(1 - 0,2i), \\ u_{0j} = u_{5j} = 0. \end{cases}$$

i	j						
x_i, t_j		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
	0,00	$u_{00} = 0$	$u_{10} = 0,64$	$u_{20} = 0,96$	$u_{30} = 0,36$	$u_{40} = 0,64$	$u_{50} = 0$
	0,02	$u_{01} = 0$	$u_{11} = 0,48$	0,80	0,08	0,48	$u_{51} = 0$

	0,04		0,40	0,64	0,64	0,40	
	0,06		0,32	0,52	0,52	0,32	
	0,08		0,26	0,42	0,42	0,26	
	0,10		0,21	0,34	0,34	0,21	

Первую строку заполним, используя начальное условие $u_{i0} = 0,8i(1 - 0,2i)$. Первый и последний столбцы заполним, используя краевые условия $u_{0j} = u_{5j} = 0$. Остальные строки и столбцы заполним, используя сеточное уравнение $u_{ij+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1j} + u_{i+1j})$.

Задачи для самостоятельной работы

7.1. Решить при помощи явной и неявной схем начальную краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, y), \quad x \in (0, l), \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ -\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_0 u|_{x=0} = g_0(t), \\ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1 u|_{x=0} = g_1(t), \end{array} \right.$$

где

$$1) \quad a = 2; \quad f = e^t \cdot \cos \frac{x}{2}; \quad u_0 = \pi - x; \quad \gamma_0 = 1; \quad \delta_0 = 0;$$

$$\gamma_1 = 0; \quad \delta_1 = 1; \quad g_0 = 1; \quad g_1 = 0; \quad l = \pi;$$

$$2) \quad a = 1; \quad f = e^t \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 1\right); \quad u_0 = 1 + \frac{x^2}{2}; \quad \gamma_0 = 1; \quad \delta_0 = 0;$$

$$\gamma_1 = 1; \quad \delta_1 = 0; \quad g_0 = 0; \quad g_1 = e^t; \quad l = 1;$$

$$3) \ a = 0,5; \ f = e^t; \ u_0 = 1 + \sin 3x; \ \gamma_0 = 0; \ \delta_0 = 1;$$

$$\gamma_1 = 1; \ \delta_1 = 0; \ g_0 = e^t; \ g_1 = 0; \ l = \frac{\pi}{2};$$

$$4) \ a = 1; \ f = 0; \ u_0 = 3 - \cos \frac{3\pi x}{4}; \ \gamma_0 = 1; \ \delta_0 = 0;$$

$$\gamma_1 = 0; \ \delta_1 = 1; \ g_0 = 1; \ g_1 = 1; \ l = 2;$$

$$5) \ a = 0,1; \ f = 0; \ u_0 = \cos \pi x + x^2 + x; \ \gamma_0 = 1; \ \delta_0 = 0;$$

$$\gamma_1 = 1; \ \delta_1 = 0; \ g_0 = -1; \ g_1 = 5; \ l = 2.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении следует отметить, что в пособии рассмотрены вычислительные методы, наиболее часто используемые в практике инженерных и научно-технических расчетов. Ограниченность объема пособия не позволяет отразить другие существующие методы и подходы к решению рассмотренных задач. Тем, кому интересно познакомиться с другими численными методами решения более подробно, рекомендую обратиться к книгам [2], [8], [12].

Предлагаемое учебное пособие может быть использовано для формирования фундаментальных основ теории моделирования и применения математического аппарата формализации процессов в сложных системах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения. Введение в математическое моделирование / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. Изд-во: Университетская книга, Логос, 2007 в 2-х ч. – Ч. 2.
2. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М: БИНОМ Лаборатория Базовых Знаний, 2006. – 636 с.
3. Вабищевич, П.Н. Численное моделирование / П.Н. Вабищевич. – М., Из-во: МГУ, 1993.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Часть 2. – М.: «Высшая школа», 1999. – 416 с.
5. Зайдель, А.Н. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация: учеб. пособие / А.Н. Зайдель. – СПб.: Лань, 2016. – 304 с.
6. Понтрягин, Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин.–Изд. 4-е, стер. –М.: УРСС, 2007. –206 с.
7. Рейзлин, В.И. Математическое моделирование: учеб. пособие для магистратуры / В.И. Рейзлин 2-е изд., пер. и доп. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 126 с.
8. Самарский, А.А. Математическое моделирование. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. - М.: Физматлит, 2007. – 320 с.
9. Советов, Б.Я. Моделирование систем. Комплект в 2-х томах. Учебник и практикум. / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Юрайт, 2014. – 638 с.
10. Сидоров, В.Н. Математическое моделирование в строительстве: учеб. пособие. / В.Н. Сидоров, В.К. Ахматов. – М.: АСВ, 2007. – 336 с.
11. Трусов, П.В. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие. / П.В. Трусов, – М.: Логос, 2005. – 440 с.
12. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. - М.: Наука, 1986. – 288 с.

Учебное издание

Некрасова Наталия Николаевна

**ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
МОДЕЛИРОВАНИЮ**

Подписано в печать _____ 2018.

Формат 60х84 1/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. _____. Тираж _____ экз. Заказ № _____.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

394026 Воронеж, Московский проспект, 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский проспект, 14