МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Воронеж 2017

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.6я73
М34

Авторский коллектив:
М.Е. Семенов, Н.Н. Некрасова,
О.И. Канищева, А.И. Барсуков, М.А. Попов

Рецензенты:
кафедра математики и физики
Воронежского государственного аграрного университета
имени Императора Петра I;
В.В. Обуховский, проф., доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой
высшей математики, Воронежского государственного
педагогического университета

М34 **Математическое моделирование и дифференциальные уравнения :** учеб. пособие / М.Е. Семенов [и др.] ; ВГТУ. – Воронеж, 2017. – 151 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с учебными программами и тематическими планами изучения дисциплины «Математическое моделирование» для магистрантов всех направлений подготовки.

Изложение теоретического материала сопровождается подробными решениями примеров и задач. По каждой теме даны задачи для самостоятельного решения. Оно поможет студентам освоить основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

Предназначено для магистров, студентов и аспирантов.

Ил. 53. Библиогр.: 17 назв.

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.6я73

Печатается по решению учебно-методического совета ВГТУ

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для изучения объектов или процессов, протекающих в окружающем нас мире, широко используются методы математического моделирования. Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми.

Математические модели являются мощным средством познания окружающего мира. При этом следует заметить, что построенная математическая модель не может отразить все многообразные и сложные черты изучаемого явления. При моделировании что-то является главным, а что-то – второстепенным, чем можно пренебречь. Изучение большого круга задач естествознания, техники и механики, биологии, медицины и других отраслей научных знаний показывает, что решение многих из них сводится к математическому моделированию процессов в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости. Так, например, некоторые процессы в радиотехнике, кинетике химических реакций, динамике биологических популяций, движении космических объектов, колебании маятника, модели экономического развития исследуются с помощью уравнений, в которых, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержатся производные неизвестных функций (или их дифференциалы). Такие уравнения называются дифференциальными. Вот почему возможности применения дифференциальных уравнений для решения задач по дисциплинам естественнонаучного цикла довольно широки. Обыкновенные дифференциальные уравнения моделируют явления и процессы, которые описываются одной функцией или вектор-функцией одного переменного.

В заключение отметим, что аппарат дифференциальных уравнений нашел большое применение в математическом моделировании благодаря развитию вычислительной техники, а численное моделирование с использованием математических пакетов MATHCAD, MATLAB, SIMULINK и др. является эффективным средством решения таких уравнений. Поэтому изучение методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений остается по-прежнему актуальным.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии даются фундаментальные основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Авторы стремились изложить материал по возможности наиболее простым и доступным образом. Пособие содержит довольно много примеров и геометрических иллюстраций, характеризующих особенности вычислительных методов, даются задания для самостоятельной работы. При написании пособия авторы использовали многолетний опыт преподавания курса «Математическое моделирование» учебного плана подготовки магистрантов всех направлений.

Учебное пособие состоит из 5 разделов, которые читаются авторами студентам магистратуры в рамках учебной нагрузки.

В первом разделе приводятся общие сведения об обыкновенных дифференциальных уравнениях и системах. Второй содержит изложение основных особенностей и типов дифференциальных уравнений 1-го порядка, методы их решения и особенности устойчивости решения таких уравнений. В третьем разделе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Подробно описываются типы уравнений, линейные однородные и неоднородные уравнения, и структура их общего решения. Четвертый раздел посвящен системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучается структура общего решения, построение фундаментальной матрицы решений, устойчивость и асимптотическая устойчивость решения по Ляпунову. Пятый раздел посвящен численному интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка. Описываются метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера и метод Рунге-Кутта.

Пособие предназначено магистрантам и аспирантам технических вузов, изучающие вычислительные методы. Кроме того, оно будет полезно специалистам, которые занимаются вопросами моделирования сложных систем.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия

Обыкновенным **дифференциальным уравнением** $n-$**го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.1}$$

где $F-$ известная функция $(n+2)-x$ переменных, $x-$ независимая переменная из интервала (a,b), $y(x)-$ неизвестная функция. Число n называется порядком уравнения.

Функция $y(x)$ называется **решением** (или **интегралом**) дифференциального уравнения (1.1) на промежутке (a,b), если она n раз дифференцируема на этом промежутке и при подстановке в уравнение обращает его в истинное тождество.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной, называют уравнениями в **нормальной форме**:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x)). \tag{1.2}$$

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия. Для выделения единственного решения уравнения $n-$го порядка обычно задают n начальных условий:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{1.3}$$

Задачей Коши (или начальной задачей) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения (1.1) при $x > x_0$, удовлетворяющего условиям (1.3).

Условия (1.3) называются **начальными данными**, **начальными условиями** или **данными Коши**.

Любое конкретное решение $y = \varphi(x)$ уравнения n-го порядка (1.1) называется **частным решением**.

Общим решением дифференциального уравнения (1.1) называется функция $y = \Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, содержащая некоторые постоянные (параметры) $C_1, C_2, ..., C_n$ и обладающая следующими свойствами:

1. $\Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ является решением уравнения (1.1) при любых допустимых значениях $C_1,\ C_2, ..., C_n$;

2. При любых начальных данных (1.3), для которых задача Коши имеет единственное решение, существуют значения постоянных $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2, ..., C_n = A_n$ такие, что решение $y = \Phi(x, A_1, A_2, ..., A_n)$ удовлетворяет заданным начальным условиям.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: $f(x, y) = 0$ или $G(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$. Такие неявно заданные решения называются **частным интегралом** или **общим интегралом** уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется **интегрируемым в квадратурах**. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений – это исследование общих свойств решений, развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования уравнений.

Пример № 1.1. Пусть $f(x)-$ непрерывная на интервале (a,b) функция и $y(x)-$ ее первообразная. Тогда $y'(x) = f(x)$, т.е. для отыскания первообразной получено дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Решения этого уравнения известны:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C,$$

где $C-$ произвольная постоянная, $x \in (a,b)$, x_0 – некоторая точка из интервала (a,b). Чтобы выделить какое-то решение в задаче о вычислении первообразной, достаточно задать значение $y(x)$ в какой-нибудь точке интервала (a,b), например $y(x_0) = y_0$. Тогда решением задачи $y'(x) = f(x)$ при $y(x_0) = y_0$ является функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0.$$

Пример № 1.2. Движение материальной точки массы m под действием силы F описывается вторым законом Ньютона $ma = F$. Пусть точка движется по оси OX и $x(t)-$ ее абсцисса в момент времени t. Тогда функция $x(t)$ является решением дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t).$$

Чтобы записать одномерное уравнение движения материальной точки в нормальной форме, достаточно разделить обе его части на m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot F(x,t).$$

Чтобы определить положения материальной точки, движущейся по некоторому закону во все моменты времени t, достаточно знать ее положение x_0 и скорость v_0 в некоторый начальный момент времени t_0.

Иными словами, чтобы выделить единственное решение уравнения движения материальной точки, достаточно задать два начальных условия $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$.

Пример № 1.3. Для уравнения $(y'')^2 = (1+(y')^2)^3$ равенство $(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 - 1 = 0$ определяет общий интеграл, а $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет частный интеграл, соответствующий начальным данным $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Пример № 1.4. Уравнение движения материальной точки $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t)$ не интегрируется в квадратурах при произвольной правой части. Оно интегрируется в квадратурах, если сила F зависит только от одной переменной:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \text{ или } m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные и численные методы.

Пример № 1.5. На рис. 1.1 приведен график решения дифференциального уравнения 2-го порядка, описывающего изменение объема производства в некоторой замкнутой экономической системе:

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = 0, \quad k = 0{,}1; \quad \omega^2 = 0{,}25.$$

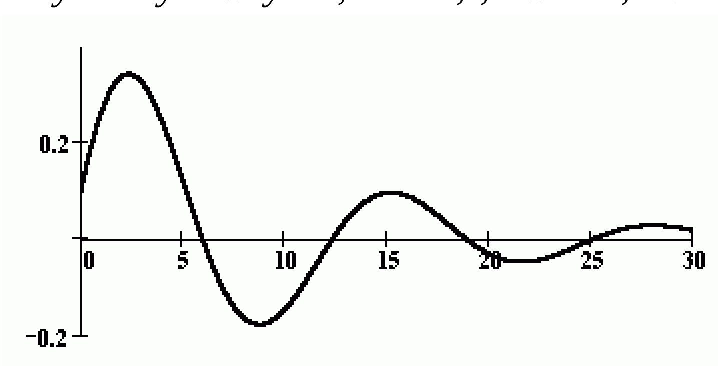


Рис. 1.1. Решение дифференциального уравнения

Колебания решений около нуля соответствуют периодам спада и подъема в экономике.

На рис. 1.2 приведены графики решений дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + 0,2y' + 0,25y = 0, \quad k = 0,2; \quad \omega^2 = 0,25,$$

для различных начальных условий, которые отмечены на каждом рис. 1.2.

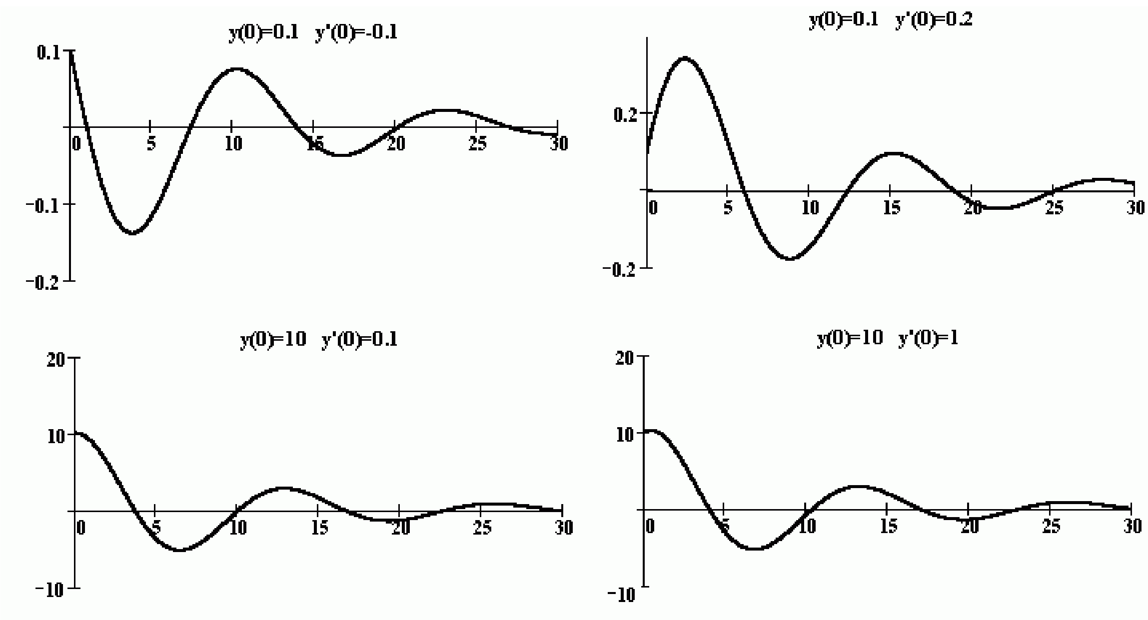


Рис. 1.2. Решение дифференциального уравнения с различными начальными условиями

Уравнения такого вида при различных значениях $k \geq 0$ и ω описывают затухающие колебания.

1.2. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основные понятия*

Системой ОДУ *n*-го порядка называется совокупность ДУ каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', y_2'',..., y_2^{(k_2)},..., y_n, y_n', y_n'',..., y_n^{(k_n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', y_2'',..., y_2^{(k_2)},..., y_n, y_n', y_n'',..., y_n^{(k_n)}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_n(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', y_2'',..., y_2^{(k_2)},..., y_n, y_n', y_n'',..., y_n^{(k_n)}) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

система (1.4) может быть записана в **канонической форме**:

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', y_2'',..., y_2^{(k_2-1)},..., y_n, y_n', y_n'',..., y_n^{(k_n-1)}), \\ y_2^{(k_1)} = f_2(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', y_2'',..., y_2^{(k_2-1)},..., y_n, y_n', y_n'',..., y_n^{(k_n-1)}), \\ ..., \\ y_n^{(k_n)} = f_n(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', y_2'',..., y_2^{(k_2-1)},..., y_n, y_n', y_n'',..., y_n^{(k_n-1)}), \end{cases} \tag{1.5}$$

в **нормальной форме:**

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2,..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2,..., y_n), \\ ..., \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2,..., y_n), \end{cases} \tag{1.6}$$

или в **векторной форме:**

$$\frac{dY}{dx} = F(x,Y) \text{ или } Y' = F(x,Y). \tag{1.7}$$

Здесь

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(x,Y) \\ f_2(x,Y) \\ ... \\ f_n(x,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2,..., y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2,..., y_n) \\ ... \\ f_n(x, y_1, y_2,..., y_n) \end{pmatrix}.$$

При описании систем дифференциальных уравнений удобнее пользоваться векторной формой записи (1.7).

Решением системы (1.7) обыкновенных дифференциальных уравнений называется вектор-функция $Y(x) = \Phi(x)$, которая определена и непрерывно дифференцируема на промежутке (a,b) и удовлетворяет системе (1.7) на этом промежутке.

Задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется следующая задача: найти решение $Y(x)$ системы (1.7)

такое, что $Y(x_0) = Y_0$, где $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}$.

Частным решением системы дифференциальных уравнений называется решение какой-нибудь ее задачи Коши.

Вектор-функция $Y = Y(x,C) = Y(x,C_1,C_2,...,C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$ называется **общим решением системы дифференциальных уравнений** на отрезке $[a,b]$, если:

– при любых допустимых значениях постоянных $C_1,C_2,...,C_n$ функция $Y(x,C)$ является решением системы (1.7) на отрезке $[a,b]$;

– какова бы ни была начальная точка (x_0,Y_0) из области определения правой части системы, существуют такие значения $C_1^*,C_2^*,...,C_n^*$ постоянных $C_1,C_2,...,C_n$, что функция $Y(x,C_1^*,C_2^*,...,C_n^*)$ является решением задачи Коши $Y(x_0) = Y_0$.

Пусть $Y(x) = \Phi(x) -$ решение системы (1.7), определенное на $[a,b]$. Тогда множество точек $\{\Phi(x)\}, \quad x \in [a,b] -$ кривая в пространстве R^n.

Эту кривую называют фазовой траекторией или просто траекторией системы, а пространство R^n, в котором расположены фазовые траектории, фазовым пространством системы.

Пусть $Y(x) = \Phi(x) -$ решение системы (1.7), определенное на отрезке $[a,b]$. Интегральная кривая системы определяется уравнением $Y(x) = \Phi(x)$ и изображается в $(n+1)-$мерном пространстве R^{n+1}. Фазовая траектория – проекция интегральной кривой на пространство R^n.

Пример № 1.6. Задана задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 - 0{,}1y_2(y_1^2 - 1), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0{,}5, \\ y_2(0) = 0{,}5. \end{cases}$$

В векторной форме эта задача записывается следующим образом:

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 - 0{,}1y_2(y_1^2 - 1) \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

или $\dfrac{dY}{dx} = F(x,Y), \qquad Y(x_0) = Y_0$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad F(x,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 - 0{,}1y_2(y_1^2 - 1) \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = 0.$$

На рис. 1.3 а, изображена интегральная кривая, а на рис. 1.3 б, фазовая траектория решения задачи Коши для исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

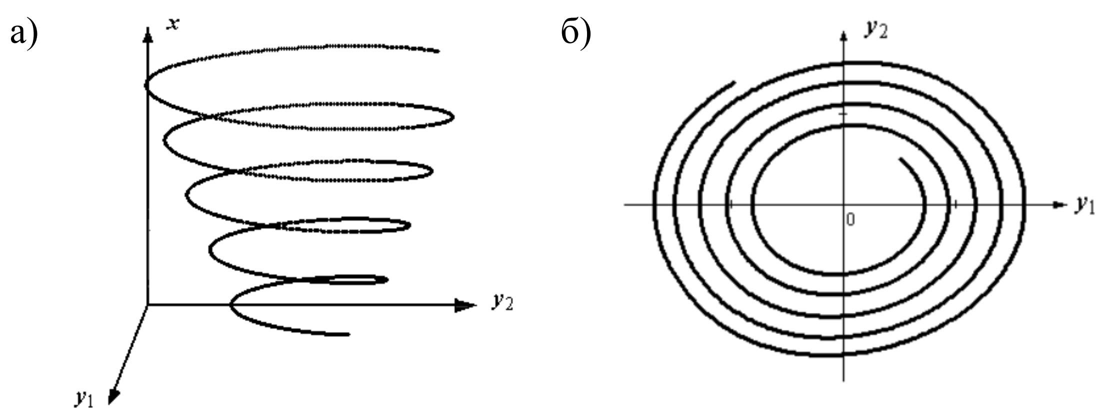


Рис. 1.3. Интегральная кривая (а) и фазовая траектория (б) частного решения системы ОДУ

1.3. *Связь ОДУ высших порядков и систем ОДУ*

Задача Коши для любого дифференциального уравнения *n*-го порядка, записанного в нормальной форме, может быть сведена к решению задаче Коши для **системы дифференциальных уравнений *n*– го** порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = 0, \tag{1.8}$$

с заданными начальными условиями (1.3). Обозначим через $z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y'(x), \quad z_3(x) = y''(x), ..., \quad z_n(x) = y^{(n-1)}(x).$

Тогда $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \equiv F(x, z_1, z_2, z_3, ..., z_n)$ и задача Коши для уравнения записывается в виде **задачи Коши для системы**

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2, \\ \dfrac{dz_2}{dx} = z_3, \\ .... \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = z_n, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = F(x, z_1, z_2, ..., z_n), \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1(x_0) = y_0, \\ z_2(x_0) = y_1, \\ .... \\ z_n(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Эта задача в векторной форме записывается в виде

$$\frac{dZ}{dx} = \Phi(x, Z), \qquad Z(x_0) = Z_0, \text{ где } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$\frac{dZ}{dx}=\begin{pmatrix}\frac{dz_1}{dx}\\ \frac{dz_2}{dx}\\ .....\\ \frac{dz_{n-1}}{dx}\\ \frac{dz_n}{dx}\end{pmatrix},\ \Phi(x,Z)=\Phi(x,z_1,z_2,...,z_n)=\begin{pmatrix}z_2\\ z_3\\ ...\\ z_n\\ F(x,z_1,z_2,...,z_n)\end{pmatrix},\quad Z_0=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ ...\\ y_{n-2}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Пример № 1.7. Движение материальной точки массы m под действием силы F описывается вторым законом Ньютона $ma=F$.

Пусть точка движется по оси OX и $x(t)$ – ее абсцисса в момент времени t. Тогда функция $x(t)$ является решением дифференциального уравнения 2-го порядка

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t).$$

Чтобы определить положение материальной точки, движущейся по некоторому закону во все моменты времени t, достаточно знать ее положение x_0 и скорость v_0 в некоторый начальный момент времени t_0. Иными словами, чтобы выделить единственное решение уравнения движения материальной точки, достаточно задать два начальных условия $x(t_0)=x_0, \qquad x'(t_0)=v_0$.

В нормальной форме соответствующая задача Коши записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}F(x,t), \qquad x(t_0)=x_0, \quad x'(t_0)=v_0.$$

Сформулируем эквивалентную задачу Коши для системы дифференциальных уравнений второго порядка. Будем использовать принятые в механике обозначения: $x(t)$ – абсцисса точки в момент времени t, $v(t)$ – скорость точки в момент времени t, x_0 и v_0 – абсцисса и скорость точки в момент времени t_0. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v(t),\\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{1}{m}F(x,t),\end{cases}\qquad \begin{cases}x(t_0)=x_0,\\ v(t_0)=v_0.\end{cases}$$

Имеем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Задачи и упражнения

1.1. Найти уравнение линии, проходящей через точку (1;3) и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x-3$.

1.2. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 с.

1.3. Сосуд вместимостью 100 л наполнен рассолом, содержащим 10 кг растворенной соли. За одну минуту в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же вместимости, первоначально наполненной водой, из которого избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах окажется одинаковым.

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

2.1. Основные понятия. Методы решения

Дифференциальное уравнение

$$F(x,y,y')=0, \tag{2.1}$$

где $y=y(x)-$ неизвестная, непрерывно дифференцируема на интервале (a,b) функция, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка**.

Функция $y=y(x)$ называется решением дифференциального уравнения (2.1), если она непрерывно дифференцируема на интервале (a,b) и $F(x,y(x),y'(x))\equiv 0$ для всех x из интервала (a,b).

Уравнение (2.1), разрешенное относительно производной, называют **ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной,** и записывают в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ или } y'=f(x,y). \tag{2.2}$$

График его решения называют **интегральной кривой дифференциального уравнения**.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет бесконечно много решений. Для того чтобы выделить единственное решение, нужно задать дополнительные (начальные) условия.

Задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, **называется задачей Коши** (или **начальной задачей**).

Условие $y(x_0) = y_0$ называют начальным условием и записывают в виде

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{2.3}$$

Любое конкретное решение $y = y(x)$ (решение задачи Коши) уравнения (2.2) называется **частным решением уравнения**.

Общее решение уравнения (2.1), записанное в неявной форме $\Phi(x, y) = C$, называется **общим интегралом уравнения**.

Частное решение уравнения (2.1), записанное в неявной форме $\Phi(x, y) = 0$, называется **частным интегралом уравнения**.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{2.4}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ − известные функции. Уравнение (2.4) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. решение может быть найдено как в виде $y = y(x)$, так и в виде $x = x(y)$.

Пример № 2.1. Решением уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ при всех $x \neq 0$ является функция $y = \dfrac{1}{x} + Cx$. Действительно, подставив выражение для $y(x)$ в левую часть

уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x} + Cx\right) = -\dfrac{1}{x^2} + C$ и в правую часть уравнения

$$\frac{y}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + Cx\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + C - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + C,$$

получили тождественное равенство $-\frac{1}{x^2}+C\equiv-\frac{1}{x^2}+C,$ справедливое при всех $x\neq 0$ и при произвольных значениях константы C.

Пример № 2.2. Решением задачи Коши $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{2}{x^2}, \quad y(1)=1, \quad x\neq 0$ является функция $y=\frac{1}{x}$. Действительно, подставив выражение для $y(x)$ в левую и в правую части уравнения, получим тождественное равенство:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}; \quad \frac{y}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^2}=-\frac{1}{x^2}; \quad -\frac{1}{x^2}\equiv-\frac{1}{x^2}, \quad x\neq 0.$$

Начальное условие тоже, очевидно, выполнено:

$$y(1)=y(x)\big|_{x=1}=\frac{1}{x}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример № 2.3. Равенство $\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}=C$ определяет при всех $x\neq 1$ общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y-5}{5x-5}$. Действительно, продифференцировав равенство для общего интеграла по x и вычислив производную искомого решения $y(x)$ по x, получим тождественное равенство, справедливое при всех $x\neq 1$ и при произвольных значениях константы C:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}\right)=\frac{dC}{dx}, \quad x\neq 1, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}\right)=0, \quad x\neq 1,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left((x-y)^5\right)\cdot(x-1)^3-(x-y)^5\cdot\frac{d}{dx}\left((x-1)^3\right)}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{-5(x-y)^4\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\cdot(x-1)^3-3(x-y)^5\cdot(x-1)^2}{(x-1)^6}=0,$$

$$-\frac{(x-y)^4\left(5\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\cdot(x-1)+3(x-y)\right)}{(x-1)^4}=0,$$

$$5\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\cdot(x-1)+3(x-y)=0,\quad x\neq y,\quad x\neq 1,$$

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{3(x-y)}{5(x-1)},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y-5}{5x-5}.$$

Пример № 2.4. Равенство $\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}=12$ определяет при всех $x\neq 1$ частный интеграл задачи Коши $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y-5}{5x-5},\qquad y(0)=1,\quad x\neq 1.$

Продифференцировав исходное равенство для частного интеграла по x и вычислив производную искомого решения $y(x)$ по x, получим тождественное равенство, справедливое при всех $x\neq 1$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}\right)=\frac{d12}{dx},\quad x\neq 1,\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}\right)=0,\quad x\neq 1.$$

Рассуждаем так же, как в примере 2.3. Условия Коши тоже, очевидно, выполнены: $\left.\frac{(x-y)^5}{(x-1)^3}\right|_{x=0,\,y=1}=\frac{(0-1)^5}{(0-1)^3}=1.$

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделенными переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx+g(y)dy=0 \tag{2.5}$$

с непрерывными функциями $f(x)$ и $g(y)$. Равенство

$$\int f(x)dx+\int g(y)dy=C,$$

где C – произвольная постоянная, определяет общий интеграл уравнения (2.5).

Начальное условие для уравнения (2.5) можно задавать в виде $y(x_0)=y_0$ или $x(y_0)=x_0$.

Уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\cdot g_1(y)dx+f_2(x)\cdot g_2(y)dy=0. \qquad (2.6)$$

Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ непрерывны в своих областях определения и $g_1(x)\cdot f_2(x)\neq 0$.

Разделив обе части уравнения (2.6) на произведение $g_1(x)\cdot f_2(x)\neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C.$$

Решение уравнения (2.6) в области, где $g_1(x)\cdot f_2(x)=0$, требует специального обсуждения.

Пример № 2.5. Равенство $2x^2-6x+3y^2=8$ определяет частный интеграл задачи Коши для уравнения с разделёнными переменными $(2x-3)dx+3ydy=0,\quad y(1)=2$. Действительно, поскольку

$$\int(2x-3)dx=x^2-3x+C,\quad \int 3ydy=\frac{3y^2}{2}+C,$$

то выражение $2x^2-6x+3y^2=C,$ где $C-$ произвольная постоянная, определяет **общий интеграл уравнения с разделёнными переменными**.

Подставив $x=1$ и $y=2$, найдем $C=8,$ т.е. $2x^2-6x+3y^2=8$ − это частный интеграл, задающий в неявной форме решение задачи Коши с начальным условием $y(1)=2.$ Равенство $2x^2-6x+3y^2=8$ определяет соответствующую интегральную кривую, т.е. линию на плоскости, проходящую через точку $M_0(1,2)$, рис. 2.1.

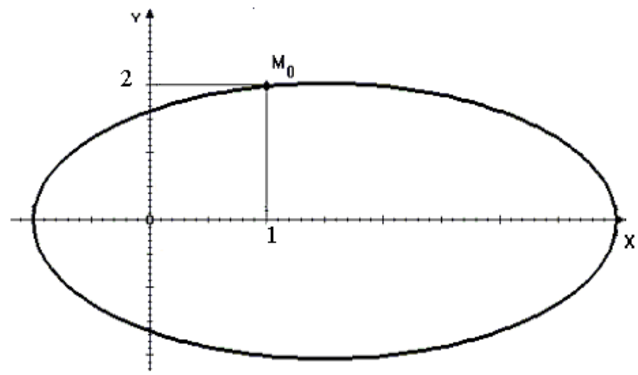


Рис. 2.1. Интегральная кривая, определяющая частное решение ДУ

Пример № 2.6. Решение уравнения с разделяющимися переменными $(x+2)\sqrt{y}dx-3xdy=0$ в неявной форме задаётся общим интегралом $\int\frac{x+2}{x}dx-\int\frac{3}{\sqrt{y}}dy=C$. Вычислив интегралы, получим решение уравнения:

$$x+2\ln|x|-6\sqrt{y}=C.$$

2.3. Однородные уравнения 1-го порядка

Однородным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (2.7)$$

Заменой $z=y/x$ уравнение (2.7) сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $z=z(x)$:

$$x\frac{dz}{dx}+z=F(z).$$

Пример № 2.7. Уравнение $xdy-\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx=0$ является однородным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}.$$

Обозначим $z = y(x)/x$, откуда имеем $y(x) = x \cdot z(x)$. Подставив в уравнение и выполнив простые преобразования, получим уравнение с разделёнными переменными относительно функции $z = z(x)$:

$$y(x) = x \cdot z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}, \qquad \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} = \sqrt{1+z^2} + z,$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2} + z, \qquad x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Вычислив соответствующие интегралы, легко получить решение этого последнего уравнения:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right| = \ln|x| + \ln C, \qquad z + \sqrt{1+z^2} = Cx.$$

И, наконец, после обратной подстановки $z = y/x$ имеем общий интеграл исходного однородного уравнения

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx$$

или, что то же самое, $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям

Уравнением, приводящимся к однородному уравнению, называется **дифференциальное уравнение вида**

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

Заменой $u = y - y_0$, $v = x - x_0$ уравнение (2.8) приводится к однородному уравнению

$$\frac{du}{dv} = F\left(\frac{u}{v}\right).$$

Здесь x_0 и y_0 – единственное решение линейной системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример № 2.8. Уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$ сводится к однородному уравнению $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1 - \frac{u}{v}}{1 + \frac{u}{v}}$, заменой $u = y - 2, \quad v = x - 1,$ поскольку $x_0 = 1, \quad y_0 = 2$ – решение системы $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$

Действительно, выполнив аккуратно замену, легко получаем уравнение с разделёнными переменными:

$$z = \frac{u}{v}, \quad u = v \cdot z, \quad \frac{du}{dv} = z + v\frac{dz}{dv}, \quad v\frac{dz}{dv} = \frac{1 - z}{1 + z} - z,$$

$$v\frac{dz}{dv} = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}, \quad \frac{(1 + z)dz}{z^2 + 2z - 1} = -\frac{dv}{v}.$$

Общий интеграл этого уравнения записывается после несложных вычислений:

$$\int \frac{(1 + z)dz}{z^2 + 2z - 1} = -\int \frac{dv}{v}, \qquad z^2 + 2z - 1 = \frac{C}{v^2}.$$

Выполнив обратную подстановку $z = \dfrac{u}{v} = \dfrac{y - 2}{x - 1},$ легко получаем общий интеграл исходного уравнения $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C.$

Поскольку при решении уравнения выполнялось довольно много вспомогательных вычислений, проверим правильность результата:

$$\frac{d(y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x)}{dx} = 0, \quad 2y\frac{dy}{dx} + 2y + 2x\frac{dy}{dx} - 2x - 6\frac{dy}{dx} - 2 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}.$$

Получено исходное уравнение. Задача решена, верно. Решение уравнения определяется в неявной форме общим интегралом

$$y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C.$$

2.4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \tag{2.9}$$

Здесь $a(x)$ и $b(x)$ – известные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Доказано, что если функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то для любой начальной точки (x_0, y_0) $(x_0 \in [a,b])$ задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

имеет единственное решение $y = y(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим однородные и неоднородные линейные уравнения 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad \frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x).$$

Общее решение линейного уравнения 1-го порядка (2.9) можно найти с помощью замены $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ или методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа).

Общее решение линейного дифференциального уравнения (2.9) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$, вычисленное методом вариации произвольной постоянной, записывается в виде

$$y(x) = C \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right) + \int_{x_0}^{x} b(s) \cdot \exp\left(\int_{s}^{x} a(t)dt\right) ds,$$

где C – произвольная постоянная, $x_0 \in [a,b], \quad x \in [a,b]$.

Пример № 2.9. Найдём общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка $\frac{dy}{dx} = y + x$ и решение задачи Коши $\frac{dy}{dx} = y + x, \quad y(1) = 2$.

Выполним в уравнении замену $y(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}, \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} = u \cdot v + x,$$

$$\frac{du}{dx}v+u\left(\frac{dv}{dx}-v\right)=x.$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению с разделяющимися переменными $v'-v=0$:

$$\frac{dv}{dx}-v=0,\quad \frac{dv}{v}=dx,\quad v=e^x.$$

Подставив вычисленное значение $v(x)$ в уравнение $\frac{du}{dx}v+u\left(\frac{dv}{dx}-v\right)=x,$ имеем

$$v=e^x,\quad \frac{du}{dx}e^x=x,\quad du=xe^{-x}dx.$$

Для функции $u(x)$ получили уравнение с разделёнными переменными, решение которого легко вычислить:

$$u=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C.$$

Выполнив обратную подстановку, получим общее решение уравнения:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)=\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C\right)e^x=-x-1+Ce^x.$$

На рис. 2.2 изображено несколько интегральных кривых уравнения.

Итак, найдено общее решение исходного линейного уравнения 1-го порядка

$$y=-x-1+Ce^x.$$

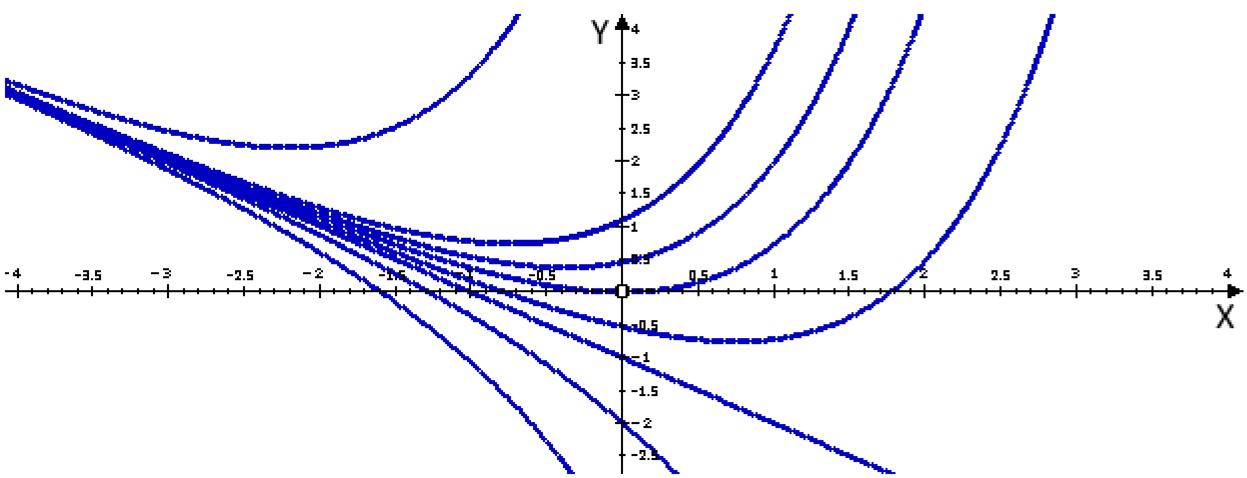


Рис. 2.2. Семейство интегральных кривых решения уравнения $y'=y+x$

Найдём решение задачи Коши, удовлетворяющее условию $y(1)=2$:

$$y(1)=\left(-x-1+Ce^{x}\right)\Big|_{x=1}=-1-1+Ce=2,\quad C=4e^{-1},\quad \Rightarrow\quad y=-x-1+4Ce^{x-1}.$$

На рис. 2.3 изображен график решения задачи Коши – интегральная кривая, проходящая через точку $M(1,\,2)$:

$$y=-x-1+4Ce^{x-1}.$$

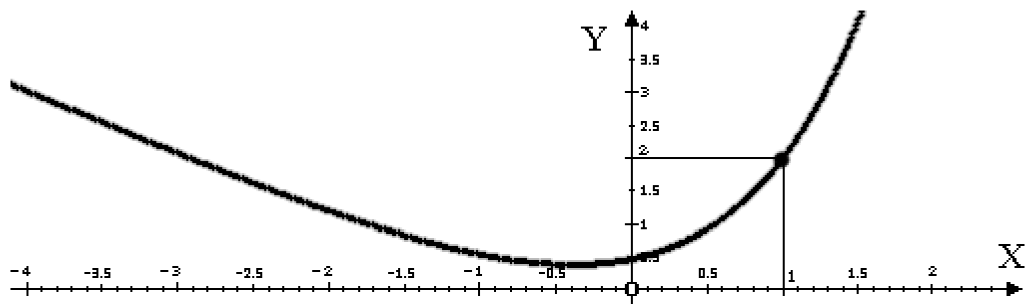


Рис.2.3. Интегральная кривая решения задачи Коши: $y'=y+x \quad y(1)=2$

Пример № 2.10. Найдём методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа) общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x}y+2x^{3}$ и решение задачи Коши при условии $y(-1)=-2.$

Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x}y.$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решение которого легко найти:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y,\quad \frac{dy}{y}=\frac{2}{x}dx,\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x}dx,\quad \ln|y|=2\ln|x|+\ln C,\quad \Rightarrow y=C\cdot x^{2},$$

где C – произвольная постоянная.

Теперь будем искать решение неоднородного линейного уравнения в виде $y=C(x)\cdot x^{2}$, где $C(x)-$ неизвестная функция. В этом собственно и состоит метод Лагранжа – метод вариации (изменения) произвольной постоянной.

Подставляя выражение для $y(x)$ в исходное неоднородное уравнение, получаем:

$$y=C(x)\cdot x^{2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}\cdot x^{2}+2C(x)\cdot x,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y+2x^{3},\quad \Rightarrow\quad \frac{dC(x)}{dx}\cdot x^{2}+2C(x)\cdot x=\frac{2}{x}C(x)\cdot x^{2}+2x^{3},$$

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot x^2 = 2x^3, \quad dC(x) = 2xdx, \quad \int_{x_0}^{x} dC(x) = \int_{x_0}^{x} 2xdx, \quad C(x) = x^2 + C,$$

$$y = C(x)\cdot x^2 = (x^2 + C)\cdot x^2 = x^4 + C\cdot x^2.$$

Общее решение уравнения будет в виде $y(x) = x^4 + C\cdot x^2$, где C – произвольная постоянная. Теперь найдём решение задачи Коши при $y(-1) = -2$.

$$y(-1) = (-1)^4 + C\cdot(-1)^2 = -2, \quad 1 + C = -2 \quad \Rightarrow \quad C = -3.$$

Таким образом, получено общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y(x) = x^4 + C\cdot x^2,$$

и решение задачи Коши:

$$y(x) = x^4 - 3x^2.$$

На рис. 2.4 изображены интегральные кривые уравнения (сплошная линия) и график решения задачи Коши (пунктирная линия).

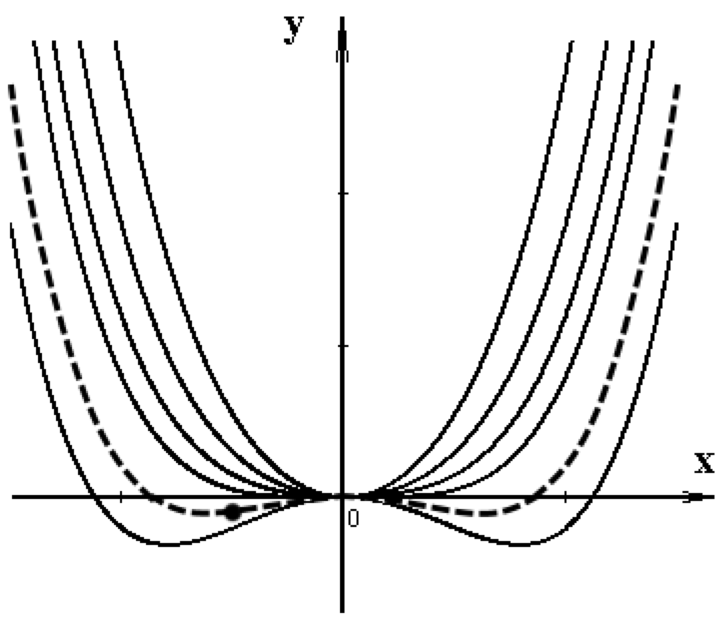


Рис. 2.4. Интегральные кривые общего и частного решений

2.5. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1-го порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^n. \tag{2.10}$$

Здесь $a(x)$ и $b(x)$ – известные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, $n>1.$

Заменой $z(x)=y^{1-n}(x)$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению относительно функции $z(x)$:

$z(x)=\dfrac{1}{y^{n-1}},\quad \dfrac{dz}{dx}=(1-n)\dfrac{1}{y^n}\cdot\dfrac{dy}{dx},$ тогда уравнение (2.10) сведётся к уравнению вида

$$\frac{1}{y^n}\cdot\frac{dy}{dx}=a(x)\cdot\frac{1}{y^{n-1}}+b(x),\ \frac{1}{y^n}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx},\quad \frac{1}{y^{n-1}}=z(x)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}=a(x)\cdot z+b(x).$$

Получили линейное относительно $z(x)$ уравнение:

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)\cdot a(x)\cdot z+(1-n)\cdot b(x).$$

Пример № 2.11. Уравнение Бернулли $\dfrac{dy}{dx}=y\cdot tgx+y^4\cdot\cos x$ заменой $z(x)=y^{-3}(x)$ при $y\neq 0$ сводится к линейному уравнению относительно функции $z(x)$:

$z(x)=\dfrac{1}{y^3},\quad \dfrac{dz}{dx}=-3\dfrac{1}{y^4}\cdot\dfrac{dy}{dx},\quad y\neq 0.$ Если разделить обе части исходного уравнения на y^4, то получим $\dfrac{1}{y^4}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y^3}tgx+\cos x,\quad \dfrac{1}{y^4}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{dz}{dx},\quad \dfrac{1}{y^3}=z(x),$ где $-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{dz}{dx}=z\cdot tgx+\cos x,\quad \dfrac{dz}{dx}=-3z\cdot tgx-3\cos x.$ Решим последнее уравнение методом Лагранжа (вариацией произвольной постоянной):

$$\frac{dz}{dx}=-3z\cdot tgx-3\cos x,\quad \frac{dz}{dx}=-3z\cdot tgx\quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z}=-3tgxdx\quad\Rightarrow\quad \int\frac{dz}{z}=-3\int tgxdx$$

$$\Rightarrow\quad \ln|z|=3\ln|\cos x|+\ln C,\quad \Rightarrow z=C(x)\cos^3 x.$$

$$z=C(x)\cos^3 x\quad\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}\cdot\cos^3 x-3C(x)\cos^2 x\cdot\sin x,$$

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot\cos^3 x-3C(x)\cos^2 x\cdot\sin x=-3C(x)\cdot tgx\cdot\cos^3 x-3\cos x,$$

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot\cos^3 x=-3\cos x\quad\Rightarrow dC(x)=-3\frac{dx}{\cos^2 x}\quad\Rightarrow\int dC(x)=-3\int\frac{dx}{\cos^2 x}\quad\Rightarrow$$

$$C(x) = -3tgx + C. \quad z = C(x)\cos^3 x = (-3tgx + C)\cdot\cos^3 x = -3\sin x\cdot\cos^2 x + C\cos^3 x,$$

$$\Rightarrow \quad z = -3\sin x\cdot\cos^2 x + C\cos^3 x.$$

Выполнив обратную подстановку $z(x) = y^{-3}(x)$, получим при $y \neq 0$ общий интеграл исходного уравнения:

$$y^{-3} = -3\sin x\cdot\cos^2 x + C\cos^3 x.$$

Не следует забывать, что $y = 0$ – ещё одно решение уравнения.

2.6. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.11}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если выражение в левой части уравнения является дифференциалом некоторой функции двух переменных $F(x,y)$, т.е. если

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{2.12}$$

Тогда $F(x,y) = C$ – общий интеграл уравнения. Здесь C – произвольная постоянная.

Уравнение (2.11) является уравнением в полных дифференциалах, тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.13}$$

Пусть выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ в левой части уравнения (2.11) является дифференциалом некоторой функции двух переменных $F(x,y)$, т.е. выполняется условие (2.12). Равенство (2.12) имеет место тогда и только тогда, когда функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой односвязной области:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \text{ и } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что уравнение (2.11) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.13).

Пример № 2.12. Уравнение $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах. Действительно, $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x,\quad \dfrac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial x}=2x,$ т.е. существует такая функция $F(x,y)$, что $dF(x,y)=2xydx+(x^2-y^2)dy.$ Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy,\quad \Rightarrow\ F(x,y)=\int\frac{\partial F}{\partial x}dx=\int 2xydx=x^2y+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ − неизвестная функция. Эту неизвестную функцию можно найти следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2-y^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+\varphi(y)\right)=x^2+\frac{d\varphi(y)}{dy}\quad \Rightarrow x^2+\frac{d\varphi(y)}{dy}=x^2-y^2,$$

$\dfrac{d\varphi(y)}{dy}=-y^2,\quad \varphi(y)=-\dfrac{1}{3}y^3.$ Тогда имеем $F(x,y)=x^2y-\dfrac{1}{3}y^3$ и можно записать общий интеграл уравнения: $x^2y-\dfrac{1}{3}y^3=C.$

2.7. Поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка

Напомним (см. раздел 2.1), что ОДУ 1-го порядка в нормальной форме имеет вид (2.2)

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

Областью определения уравнения называется область D определения правой части уравнения $f(x,y)$, $D\subset R^2$.

Функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0, \tag{2.14}$$

если функция $y=y(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,\ b]$ $(x,\ y(x))\in D$ для всех x из отрезка $[a,\ b]$, $y(x_0)=y_0$, $x_0\in[a,\ b]$ и при подстановке в исходное уравнение обращает его в истинное тождество: $\dfrac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)).$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Фундаментальным результатом теории ОДУ 1-го порядка является **теорема существования и единственности решения задачи Коши.**

Теорема 2.1. Пусть в уравнении (2.2) функция $f(x,y)$ и её частная производная $f_y'(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости XOY, содержащей точку с координатами (x_0,y_0). Тогда в некоторой окрестности $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ точки x_0 существует решение задачи Коши (2.14), причем если $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)-$ два решения задачи Коши, то $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ в окрестности $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Геометрически это означает, что если условия теоремы выполнены, то через каждую точку (x_0,y_0) области D проходит **единственная** интегральная кривая решения уравнения.

Бесконечное множество решений уравнения (2.2) можно рассматривать как однопараметрическое семейство функций $y=\varphi(x,x_0)-$ семейство решений задачи Коши (2.14), элементы которого различны для разных значений x_0. Иными словами, область D «расслаивается» на интегральные кривые $y=\varphi(x,x_0)$.

Важно понимать, что результат теоремы имеет **локальный** характер – существование и единственность решения гарантированы, вообще говоря, только в **малой** окрестности точки x_0. Важно также понимать, что условия теоремы существования и единственности − **достаточные условия**. Нарушение условий теоремы не означает, что решение задачи не существует либо что оно не единственно.

Пример № 2.13. Рассмотрим задачу Коши $\dfrac{dy}{dx}=y^2, \quad y(x_0)=y_0$. Условия теоремы существования и единственности задачи Коши выполнены на всей плоскости XOY: $f(x,y)=y^2$ и $f_y'(x,y)=2y$ непрерывны всюду. Общее решение уравнения имеет вид $y=-\dfrac{1}{x}+C$. Начальные условия $y(x_0)=3$ и $y(x_0)=-2$ определяют соответственно два решения $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x_0}+3$ и $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x_0}-2$. На рис. 2.5 изображено несколько интегральных кривых уравнения.

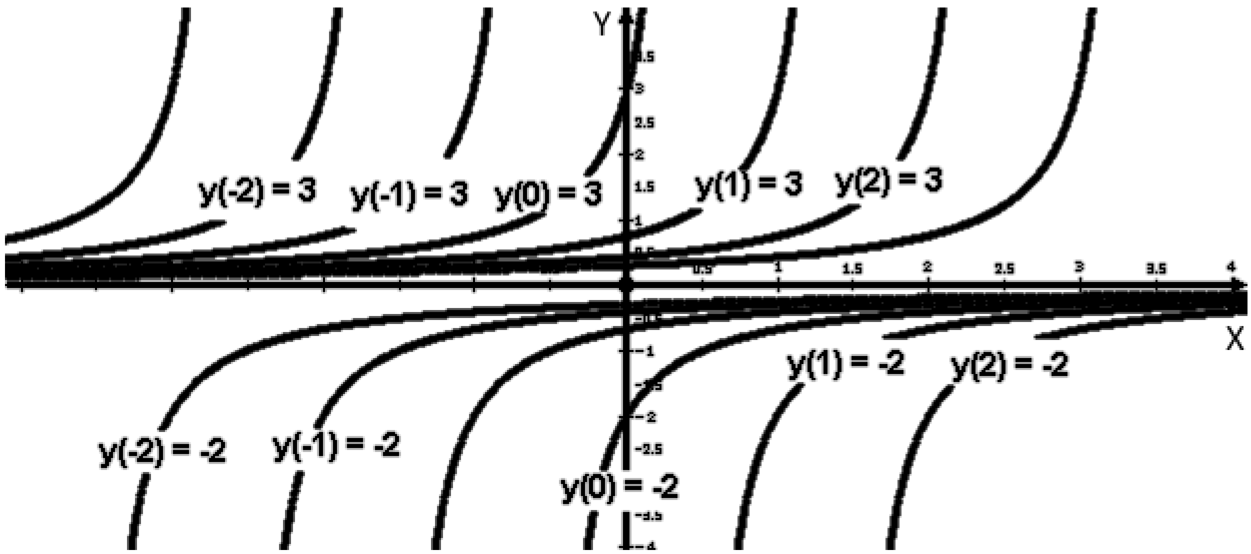


Рис. 2.5. Семейство интегральных кривых уравнения $y' = y^2$

Пример № 2.14. Рассмотрим задачу Коши $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y^2}, \quad y(x_0) = y_0.$

Здесь $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$. Правая часть уравнения $f(x,y)$ непрерывна на всей плоскости XOY, а производная $f'_y(x,y)$ непрерывна при $y \neq 0$. Начальное условие $y(0) = 0$ определяет интегральную кривую $y(x) = 0$, а условие $y(1) = 1$ − интегральную кривую $y = x^3$, т.е. через точку (0,0) проходят две интегральные кривые. В то же время через любую точку области D , не содержащую ось абсцисс ($y \neq 0$), проходит единственная интегральная кривая.

На рис. 2.6 изображены интегральные кривые задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 0$ и $y(1) = 1$.

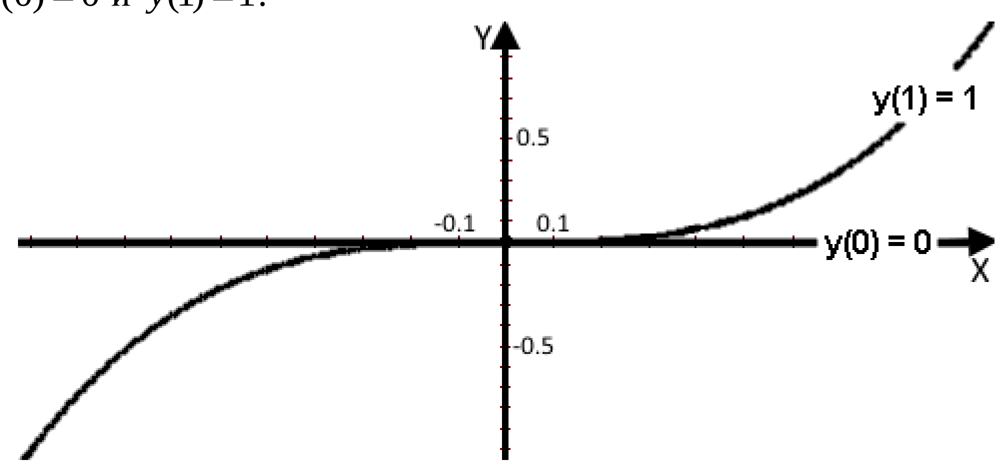


Рис. 2.6. Интегральные кривые задачи Коши: $y' = \sqrt[3]{y^2} \quad y(1) = 1 \quad y(0) = 0$

2.8. Уравнения 1-го порядка. Поле направлений

Рассмотрим ОДУ 1-го порядка (2.2) с правой частью $f(x, y)$, определённой в области $D \subset R^2$: здесь x − независимая переменная (аргумент), $y = y(x)$ − неизвестная функция. Если $y = y(x)$ − решение уравнения, то соответствующая интегральная кривая (график решения $y = y(x)$) в каждой своей точке $(x, y(x))$ имеет касательную с угловым коэффициентом

$$k = \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

Через **каждую** точку (x, y) области $D \subset R^2$ можно провести небольшой отрезок с угловым коэффициентом k . Выполнив такое построение для всех узлов некоторой прямоугольной сетки в области $D \subset R^2$, получим изображение **поля направлений**.

Если узлы сетки расположены «достаточно часто», поле направлений дает полную картину поведения интегральных кривых.

На рис. 2.7, а приведено изображение поля направлений, а на рис. 2.7, б поля направлений с несколькими интегральными кривыми.

Рассмотрев внимательно рис. 2.7, можно увидеть, что отрезки, изображающие поле направлений действительно указывают направление касательных к интегральным кривым. Можно видеть, что “аккуратно“ изображенное поле направлений дает достаточно полное представление о поведении интегральных кривых.

В инженерных задачах, для того чтобы сформулировать содержательные утверждения об исследуемом процессе, бывает достаточно внимательно изучить поле направлений.

Дифференциальное уравнение задает поле направлений, которое позволяет судить о наиболее характерных особенностях поведения решений уравнения.

Пример № 2.15. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$ с правой частью, определённой в области $y \neq 0$. На рис. 2.8, а приведены изображения поля направлений уравнения, а на рис.2.8, б поля направлений с несколькими интегральными кривыми.

На рис. 2.8, б видно, что в точках пересечения с осью абсцисс ($y = 0$) касательные к интегральным кривым перпендикулярны оси OY. Это означает, в частности, что в этих точках скорость изменения решения возрастает до бесконечности.

Видно также, что по мере удаления точки $(x,\ y(x))$ $(x \to \infty, y(x) \to \infty)$ скорость изменения решения стабилизируется $-$ есть основания предполагать, что интегральные кривые имеют наклонную асимптоту.

Пример №2.16. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка с правой частью, определённой в области $x \neq 0,\ x^2 + (y+0{,}5)^2 \geq 0{,}5$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + y}}{x}$.

а)

б)

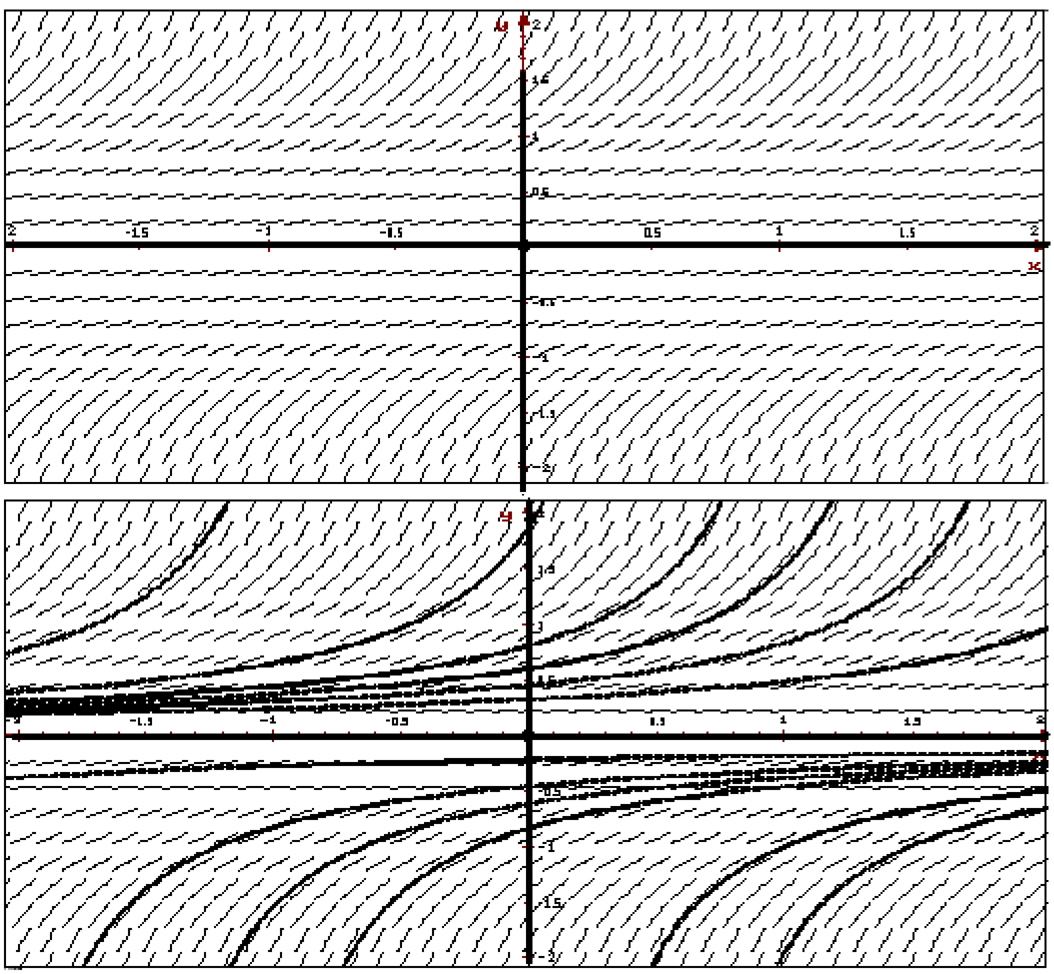


Рис. 2.7. а) поле направлений; б) интегральные кривые уравнения $y' = y^2$

а)

б)

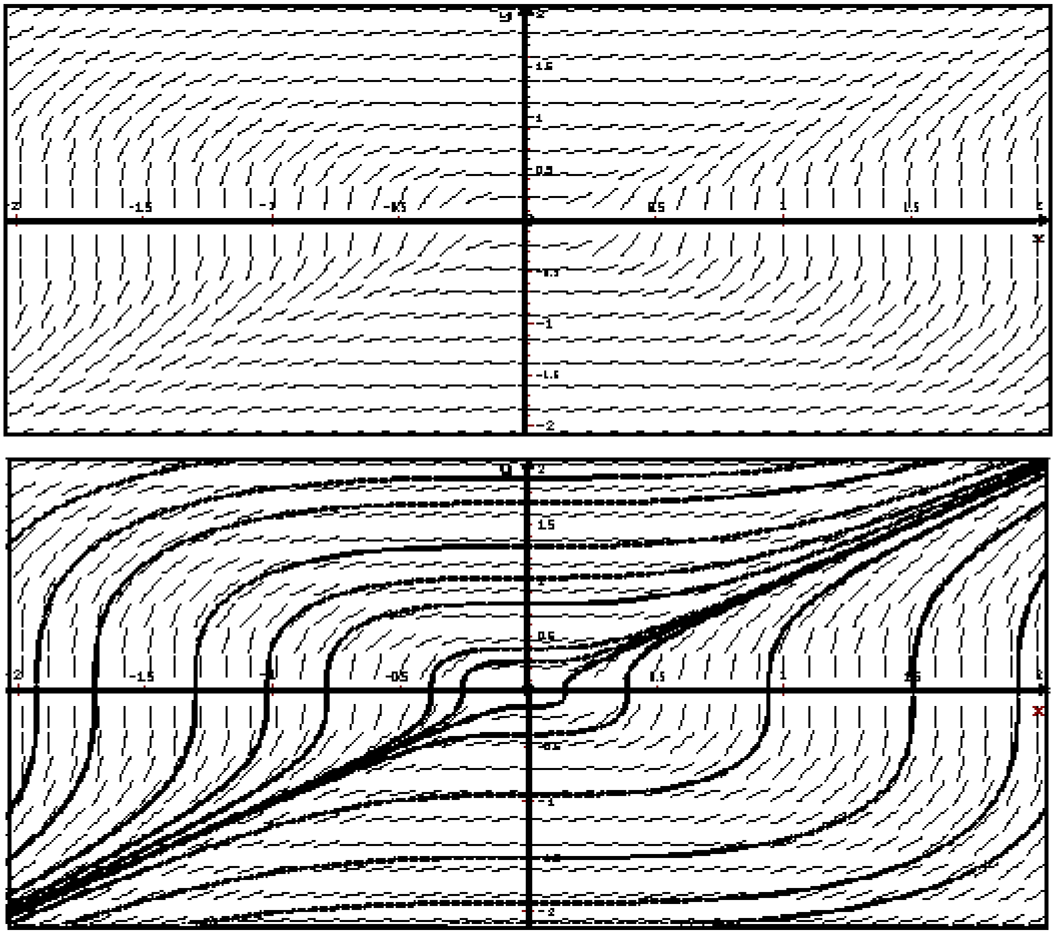


Рис.2.8. а) поле направлений; б) интегральные кривые уравнения $y' = x^2 / y^2$

На рис. 2.9 приведено изображение поля направлений уравнения в области, где определена правая часть уравнения.

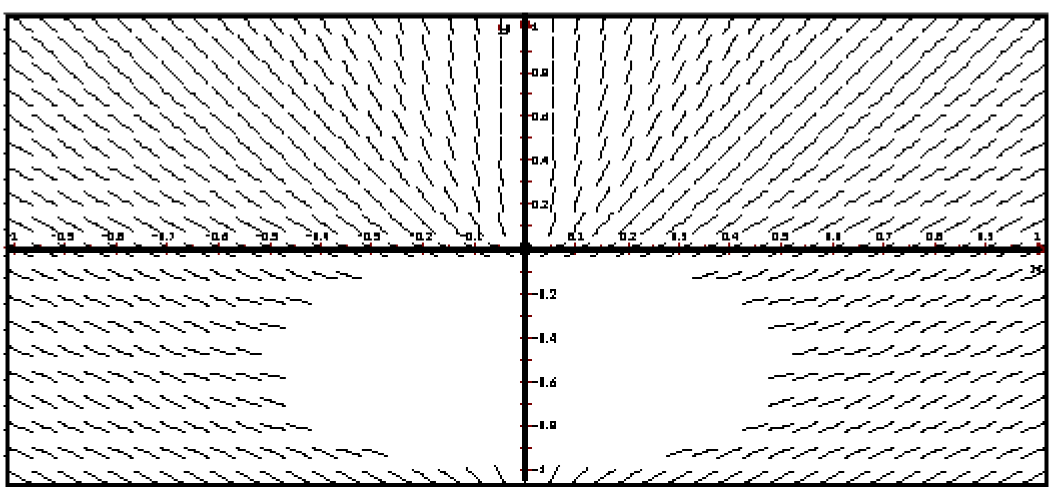


Рис. 2.9. Изображение поля направлений для примера 2.16

2.9. Автономные уравнения 1-го порядка

Автономным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{2.15}$$

правая часть $f(y)$ которого не зависит от x. Решение $y(x) \equiv 0$ называется **неподвижной точкой уравнения**.

Для автономного уравнения (2.15) решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.16}$$

определяется равенством $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = x - x_0$.

Например, дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} f(x)$ описывает движение материальной точки по оси OX под действием внешних сил $f(x)$. Координата точки $x(t)$ в момент времени t – решение дифференциального уравнения. Скорость движения точки задана функцией $f(x)$. В момент времени t координата $x(t)$ точки, которая в начальный момент t_0 имела координату x_0, определяется равенством

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} = t - t_0.$$

При $t \to \infty$ функция $x(t)$ может быть ограниченной, может стремиться к конечному пределу, может ”уходить на бесконечность” ($x(t) \to \infty$) или может быть неограниченной с каким-то более сложным поведением.

Пример № 2.17. Исследуем поведение решений дифференциального уравнения $y' = \cos \pi y$. В какой момент времени x_1 решение с начальным условием $y(0) = 0$ достигнет значения $0{,}5$? Является ли точка $y = 0{,}5$ неподвижной точкой? Решения каких типов имеет уравнение?

Время x_1, за которое решение задачи Коши $y' = \cos \pi y, \quad y(0) = 0$ достигнет значения $0{,}5$, определяется равенством $\int\limits_{0}^{0{,}5} \frac{dy}{\cos \pi y} = x_1$.

Этот интеграл расходится. Значит, точка, начавшая из нуля движение вдоль оси OX, никогда не придет в точку $y = 0{,}5$.

На рис. 2.10 видно, что интегральная кривая, проходящая через начало координат, асимптотически приближается снизу к прямой $y = 0{,}5$.

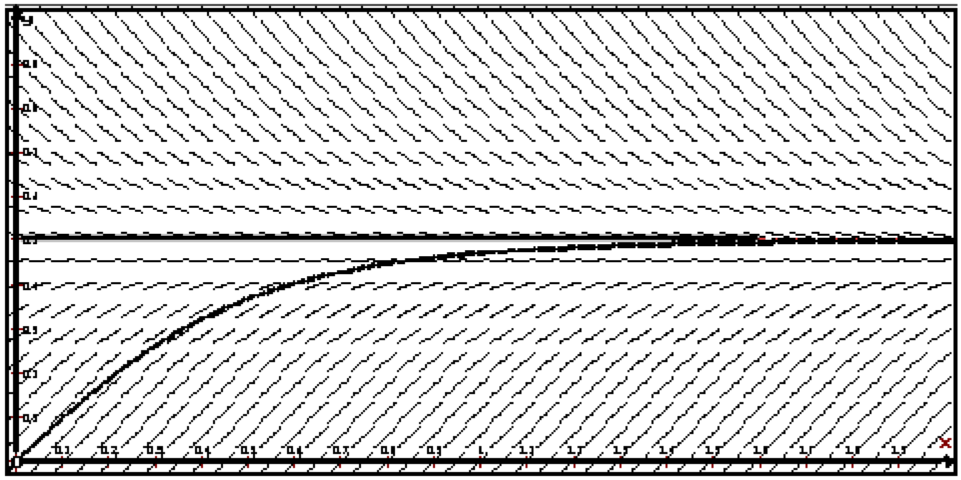


Рис. 2.10. Графическая иллюстрация к примеру 2.17

Точка $y = 0{,}5$ − неподвижная точка уравнения. Действительно, функция $y = 0{,}5$ является решением задачи Коши $y' = \cos \pi y, \quad y(0) = 0{,}5$. Это означает, что точка, начавшая движение из $y = 0{,}5$, остается на месте.

Для того чтобы ответить на вопрос о типах решений уравнения, изобразим его поле направлений, рис. 2.11.

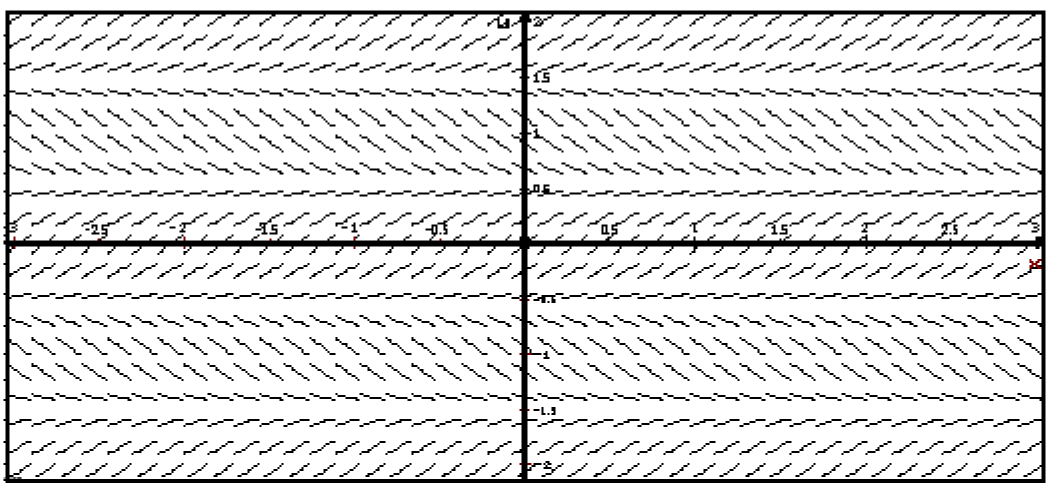


Рис.2.11. Изображение поля направлений для примера 2.17

Видно, что уравнение имеет ограниченные решения в областях

$$D_k = \left\{ (x, y) \middle| -\infty < x < \infty, \quad \frac{2k-1}{2} < y < \frac{2k+1}{2} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Уравнение имеет неподвижные точки:

$$y = \frac{2k+1}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2.10. Устойчивость решений ОДУ 1-го порядка

Любое дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений описывает с определенной степенью точности реальный физический процесс. Приборы, фиксирующие то или иное физическое явление, не совершенны.

Может оказаться, что малая погрешность измерения начальных данных вызывает «ощутимые» изменения решений уравнений. В этой ситуации нельзя гарантировать, что выбранная математическая модель реально отражает описываемое ею физическое явление.

И, наоборот, если малые возмущения начальных условий мало изменяют решения на всем промежутке их существования, то соответствующую математическую модель следует признать удачной.

Так возникает важный для приложений вопрос: при каких условиях, математическая модель, описываемая дифференциальными уравнениями, будет устойчивой.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.2): $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$. Пусть некоторое фиксированное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения существует при всех $x \geq x_0$.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения называется **устойчивым по Ляпунову** при $x \geq x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что:

– решение $y = y(x)$ задачи Коши с начальным условием $y(x_0)$, $\left|y(x_0) - \varphi(x_0)\right| < \delta$ существует при всех $x \geq x_0$;

– для всех таких решений справедливо неравенство $\left|y(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon,$ при всех $x > x_0$.

Геометрически это означает, что интегральные кривые $y = y(x)$, близкие в момент $x = x_0$ к интегральной кривой $y = \varphi(x)$, остаются близкими к ней и на всем промежутке $\left[x_0, \infty\right)$.

Пример № 2.18. Рассмотрим задачу Коши $y' = -y$, $y(1) = 1$. На рис. 2.12 изображено **устойчивое** решение задачи Коши (нужная кривая выходит за рамку рисунка). Видно, что все интегральные кривые, близкие к этому решению в начальный момент $x = 1,$ остаются вблизи него и при $x > 1$.

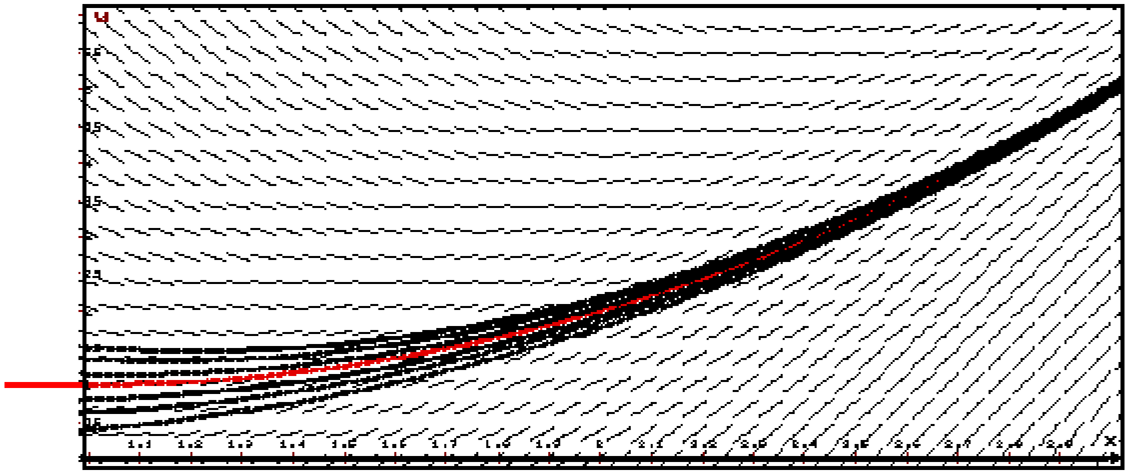


Рис. 2.12. Устойчивое решение задачи Коши $y' = -y$, $y(1) = 1$

Устойчивость решения можно доказать аналитически. Легко видеть, что общее решение уравнения $y' = -y$ имеет вид $y = C \cdot e^{-x}$. Решением задачи Коши при условии, что $y(1) = 1$ является функция $\varphi(x) = e^{1-x}$, а решение при $y(1) = y_0$ – функция $y(x) = y_0 \cdot e^{1-x}$. Все эти решения существуют при $x \geq 1$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon.$ Тогда, если $\left|y(x_0) - \varphi(x_0)\right| = \left|y_0 - 1\right| < \delta,$ то при всех $x > 1$ $\left|y(x) - \varphi(x)\right| = \left|y_0 e^{1-x} - e^{1-x}\right| =$ $= \left|y_0 - 1\right| \cdot e^{1-x} < \left|y_0 - 1\right| < \delta = \varepsilon,$ т.е. действительно, как показано на рис. 2.12, решение $\varphi(x) = e^{1-x}$ устойчиво по Ляпунову.

Решение $y = \varphi(x)$ называется **неустойчивым по Ляпунову** при $x \geq x_0$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся решения $y = y_\delta(x)$ и значение $x_1 = x_1(\delta) > x_0$ такие, что хотя $\left|y_\delta(x_0) - \varphi(x_0)\right| < \delta$, но $\left|y(x_1) - \varphi(x_1)\right| \geq \varepsilon.$

Пример № 2.19. Рассмотрим задачу Коши $y' = \sin^2 y, \quad y(0) = 0.$
На рис. 2.13 пунктиром изображено **неустойчивое** решение $y = 0$ этой задачи.

Видно, что интегральные кривые, близкие к $y = 0$ в начальный момент $x_0 = 0,$ удаляются от $y = 0$ с ростом $x > 1.$

Легко видеть, что функция $y = 0$ – решение задачи Коши $y' = \sin^2 y, \quad y(0) = 0$, что при $x \geq 0$ существует общее решение исходного уравнения, которое имеет вид $y = arcctg(x + C),$ и что решением задачи Коши при $y(0) = y_0$ является функция $y(x) = arcctg(x + ctgy_0).$

Положим $\varepsilon = \pi/2$. При всех $x \to \infty$ справедливо

$$\left|y(x)-\varphi(x)\right| = \left|arcctg(x+ctgy_0)-0\right| = \left|arcctg(x+ctgy_0)\right| \to \pi.$$

Но тогда, как бы ни было мало $\delta > 0$ такое, что

$$\left|y(x_0)-\varphi(x_0)\right| = \left|y(0)-\varphi(0)\right| = \left|y_0 - 0\right| = \left|y_0\right| < \delta,$$

найдётся такое $x_1 > 0$, что при всех $x > x_1$ будет справедливо равенство

$$\left|y(x)-\varphi(x)\right| > \pi/2 = \varepsilon.$$

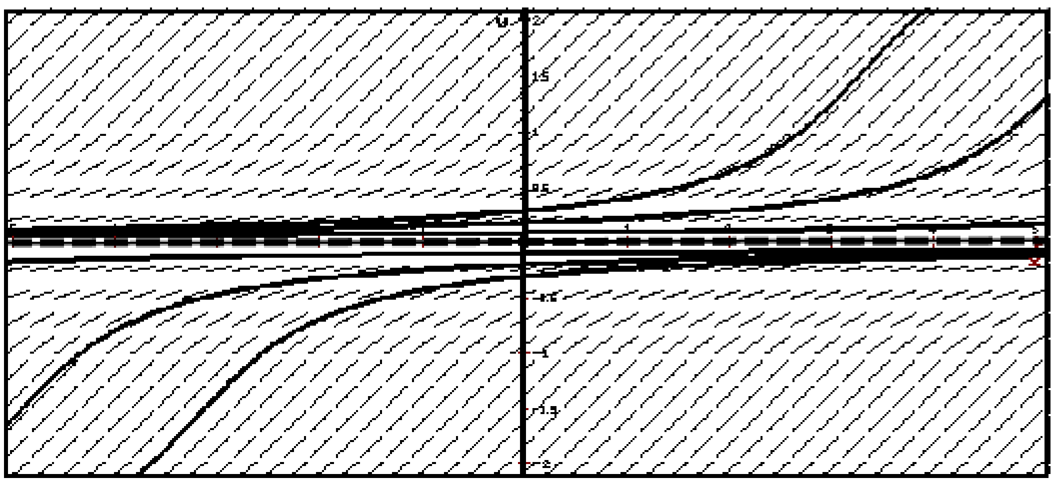


Рис. 2.13. Неустойчивое решение задачи Коши: $y' = \sin^2 y, \quad y(0) = 0$

Таким образом, мы показали аналитически, что решение $y = 0$ – **неустойчивое** решение уравнения.

2.11. Асимптотическая устойчивость решений ОДУ 1-го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.2). Пусть некоторое фиксированное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения существует при всех $x \ge x_0$.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения называется **асимптотически устойчивым по Ляпунову** при $x \to \infty$, если это решение устойчиво по Ляпунову при $x \ge x_0$ для любого $\delta > 0$ и для всех решений $y = y(x)$ задачи Коши с начальным условием $y(x_0)$, $\left|y(x_0)-\varphi(x_0)\right| < \delta$, разность $\left|y(x)-\varphi(x)\right| \to 0$ при $x \to \infty$.

Геометрически это означает, что интегральные кривые $y = y(x)$, близкие в момент $x = x_0$ к интегральной кривой $y = \varphi(x)$, становятся как угодно близкими к ней при $x \to \infty$.

Пример № 2.20. Рассмотрим задачу Коши из примера 2.18. На рис. 2.14 изображено **асимптотически устойчивое** решение этой задачи (нужная кривая выходит за рамку рисунка). Все интегральные кривые, близкие к этому решению в начальный момент $x = 1$, с ростом x приближаются к графику асимптотически устойчивого решения. В этом случае, как уже было показано в примере 2.18, решение устойчиво по Ляпунову.

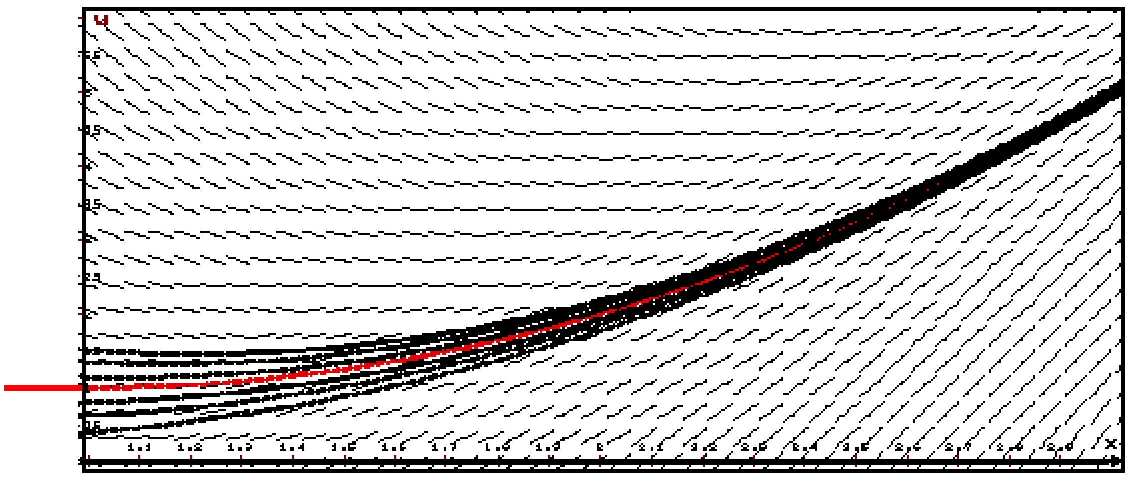


Рис. 2.14. Асимптотически устойчивое решение задачи Коши

При $x \to \infty$ разность $|y(x) - \varphi(x)| \to 0$: $|y(x) - \varphi(x)| = |y_0 e^{1-x} - e^{1-x}| =$ $= |y_0 - 1| \cdot e^{1-x} \to 0$, т.е. решение $\varphi(x) = e^{1-x}$ **асимптотически устойчиво по Ляпунову**.

2.12. Метод изоклин

Пусть $y = y(x)-$ решение уравнения (2.2). Интегральная кривая $y = y(x)$ имеет касательную с угловым коэффициентом $k = f(x, y(x))$. Это означает, что через каждую точку (x, y) области определения функции $f(x, y)$ можно провести небольшой отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x, y(x))$.

Выполнив такое построение для всех узлов некоторой прямоугольной сетки в области определения правой части уравнения, получим изображение **поля**

направлений. Когда узлы сетки расположены «достаточно часто», поле направлений дает полную картину поведения интегральных кривых.

Метод изоклин – приближенный графический метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Метод позволяет «вручную» (без использования компьютера) построить изображение поля направлений и по этому изображению построить интегральную кривую, проходящую через заданную точку.

Рассмотрим линии, в каждой точке которых угловой коэффициент интегральных кривых имеет одно и то же постоянное значение: $f(x,y)=k, \quad k=const$. Такие кривые называются **изоклинами** дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$. Равенство $f(x,y)=k$ – **уравнение изоклины**. В каждой точке (x,y) изоклины $f(x,y)=k$ интегральные кривые уравнения имеют один и тот же угол наклона $arctg\alpha=k$.

Метод изоклин состоит в следующем: строим достаточно густую сетку изоклин для различных значений k и на каждой изоклине изображаем небольшие отрезки с наклоном k. Затем, начиная из точки (x_0,y_0), проводим линию, которая будет пересекать каждую изоклину под углом, заданным полем направлений. Полученная таким образом кривая и будет приближенным изображением (эскизом) интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0,y_0).

На рис. 2.15 изображены изоклины для $k=1,2,...,15,16$ и интегральная кривая, проходящая через точку $(0,0)$.

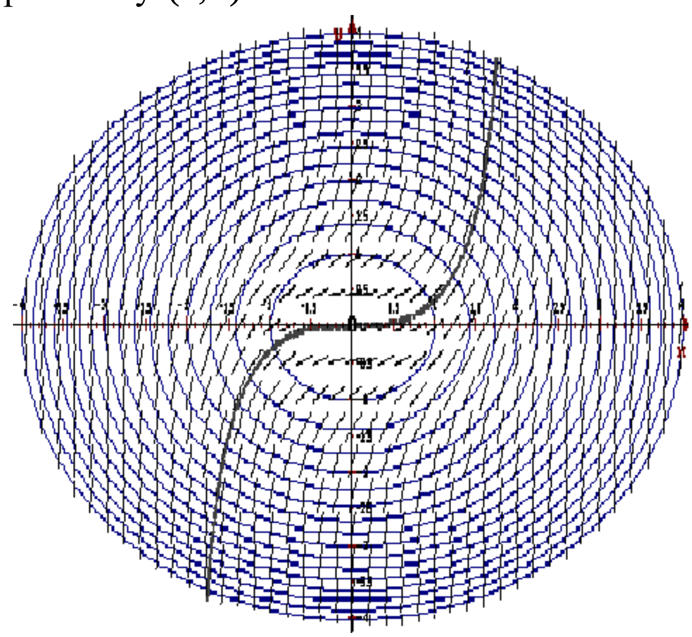


Рис.2.15. Изоклины, построенные для различных значений k

Метод изоклин как метод **приближенного решения задачи Коши** устарел. В его основе лежит алгоритм изображения фрагмента поля направления, а современные компьютеры могут мгновенно и как угодно подробно нарисовать поле направлений и достаточно точно изобразить интегральную кривую.

Однако метод изоклин эффективно работает как **инструмент исследования поведения решений**. Он позволяет изобразить области **характерного поведения интегральных кривых**. Например, изоклина $f(x,y)=0$ – геометрическое место стационарных точек решения дифференциального уравнения, изоклины $f(x,y)=k$ с большими значениями k показывают области быстрого роста решений и т.п.

На рис. 2.16 показано, как помогают изоклины «увидеть» точки экстремума интегральной кривой и судить о поведении решений дифференциального уравнения.

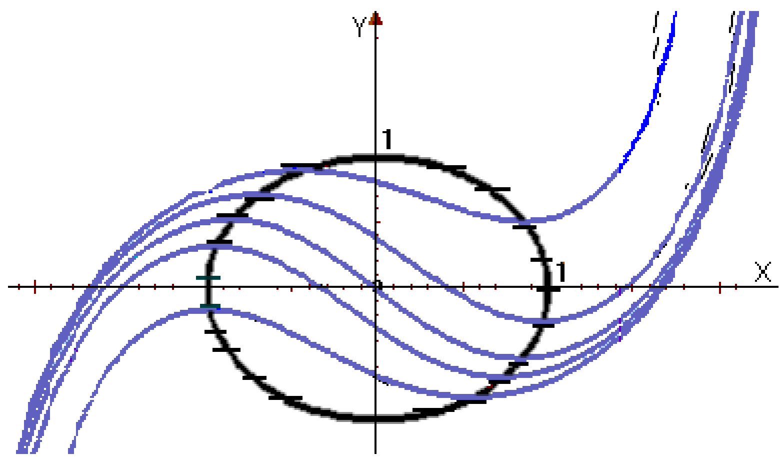


Рис.2.16. Экстремумы интегральной кривой

Пример № 2.21. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = x^2 + y^2$. Все изоклины этого уравнения – окружности, поскольку они описываются уравнениями $x^2 + y^2 = k$, $k > 0$. На рис. 2.17 изображены изоклины для $k = 1, 2, ..., 15, 16$ и интегральная кривая, проходящая через точку $(0,0)$. Чем больше радиус окружности−изоклины, тем быстрее растёт решение уравнения.

Пример № 2.22. Найдем изоклины уравнения $y' = y^2 - x$ и изобразим интегральную кривую, проходящую через точку (0,1). Изоклины уравнения определяются уравнениями $y^2 - x = k$. Это параболы $x = y^2 - k$. На рис. 2.18 изображены изоклины $y^2 - x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

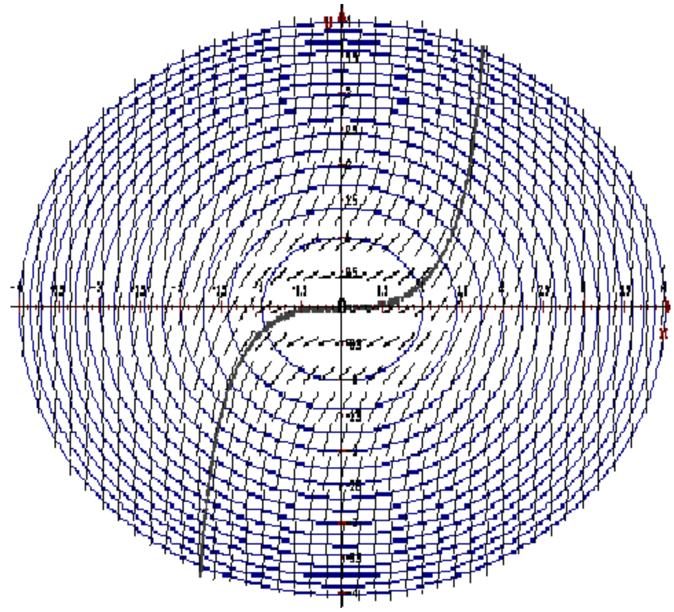


Рис.2.17. Изоклины и интегральная кривая уравнения $y' = x^2 + y^2$

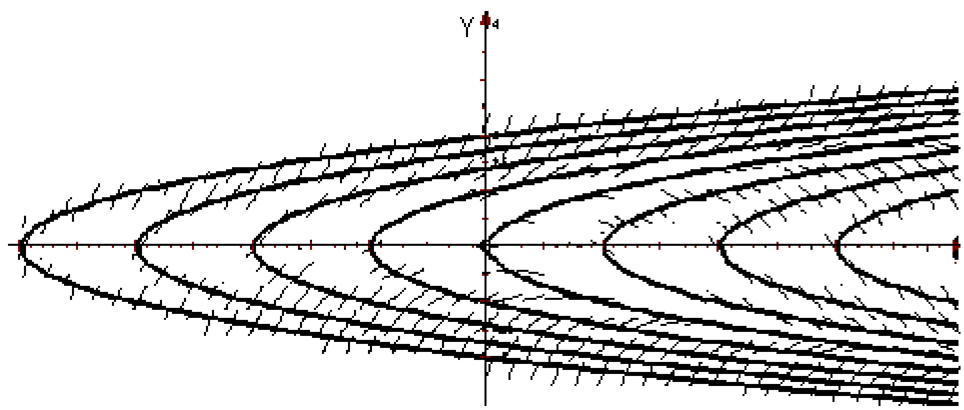


Рис. 2.18. Изоклины уравнения при заданных значениях k

Внимательно рассмотрев рисунок, легко провести интегральную кривую через точку $(0,1)$. Поле направлений, изоклины и интегральная кривая, проходящая через точку $(0,1)$, изображены на рис. 2.19.

Пример № 2.23. Найдем линию, на которой расположены точки перегиба интегральных кривых $y' = y^2 - x$ и изобразим интегральную кривую, проходящую через точку $(0,1)$. Точки перегиба графика функции $y = y(x)$ расположены на линии, удовлетворяющей уравнению $y''(x) = 0$.

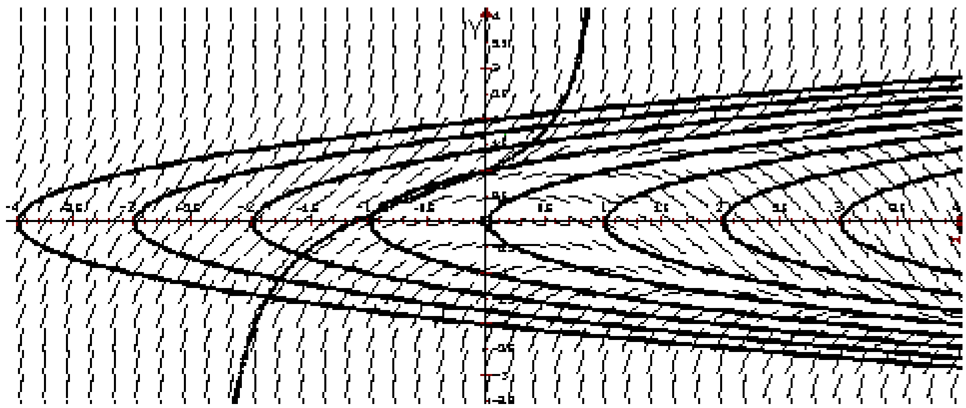


Рис. 2.19. Поле направлений, изоклины и интегральная кривая, проходящая через точку $(0,1)$

Для решений уравнения $y' = y^2 - x$ имеем: $y''(x) = (y')' = (y^2 - x)' = = 2y \cdot y' - 1 = 2y(y^2 - x) - 1 = 2y^3 - 2xy - 1.$

Следовательно, точки перегиба интегральных кривых лежат на линии, заданной уравнением $2y^3 - 2xy - 1 = 0$ или уравнением $y^3 - xy = 0{,}5.$

На рис. 2.20 изображено поле направлений уравнения, линия $y^3 - xy = 0{,}5$ (пунктирная линия) и несколько интегральных кривых уравнения.

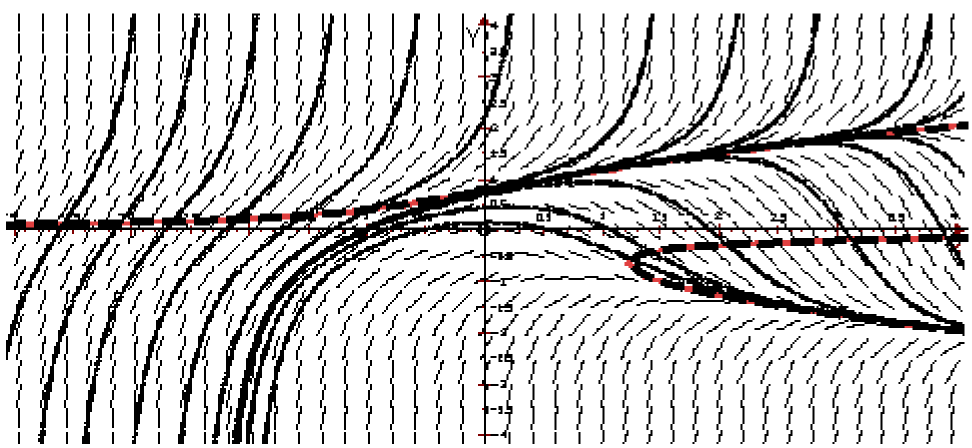


Рис. 2.20. Точки перегиба интегральных кривых

Видно, что точки перегиба действительно расположены на линии $y^3 - xy = 0{,}5.$

Задачи и упражнения

2.1. Решить уравнения с разделяющимися переменными:

$$1)\ (y+xy)dx+(x-xy)dy=0; \qquad 2)\ y'=\frac{y}{x}, \qquad y(4)=1.$$

2.2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$1)\ (x^2-y^2)dx+2xydy=0; \qquad 2)\ y'=\frac{x+y}{x-y}, \qquad y(1)=1.$$

2.3. Решить линейные уравнения первого порядка:

$$1)\ y'+2xy=2x; \qquad 2)\ y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x, \qquad y(0)=0.$$

2.4. Решить уравнения в полных дифференциалах:

$$1)\ (x^2-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0; \quad 2)\ (2xye^{x^2}+\ln y)dx+(e^{x^2}+\frac{x}{y})dy=0, \quad y(0)=1.$$

3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ОДУ) ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Основные понятия. Понижение порядка ОДУ

Если дифференциальное уравнение

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0 \tag{3.1}$$

содержит производную неизвестной функции $y=y(x)$ порядка n, т.е. выше первого, то его называют уравнением n-го порядка и относят к **уравнениям высших порядков**.

Если уравнение (3.1) возможно разрешить относительно старшей производной, то такое уравнение в нормальной форме имеет вид

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}). \tag{3.2}$$

Пусть D из пространства R^{n+1} есть область определения функции $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$. Функция $y=y(x)-$ называется **решением уравнения n-го порядка на отрезке** $[a,b]$, если:

– при всех $x\in[a,b]$ точка $(x,y(x),y'(x),...,y^{(n-1)}(x))$ принадлежит области D;

– функция $y = y(x)$ дифференцируема n раз на отрезке $[a,b]$ и при всех $x \in [a,b]$ выполняется тождество

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)).$$

График решения $y = y(x)$ называется **интегральной кривой уравнения**.

Для того чтобы найти вполне определенную интегральную кривую, нужно задать дополнительные условия. Для уравнения n-го порядка таких условий должно быть n.

Начальной задачей, т.е. **задачей Коши,** для уравнения n-го порядка (3.2) называется задача отыскания решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{10}, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}. \tag{3.3}$$

Здесь $(x_0, y_0, y_{10}, ..., y_{(n-1)0})$ – фиксированная точка области D.

Любое фиксированное решение $y = \varphi(x)$ – решение некоторой задачи Коши – называется **частным решением** уравнения.

Общим решением уравнения (3.2) n-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ и удовлетворяющая следующим требованиям:

– при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ является решением уравнения на отрезке $[a,b]$;

– какова бы ни была начальная точка $(x_0, y_0, y_{10}, ..., y_{(n-1)0}) \in D$, существуют значения постоянных $C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0, C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*) = y_0, \\ &\varphi'(x_0, C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*) = y_{10}, \\ &\quad .... \qquad ... \\ &\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*) = y_{(n-1)0}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Равенство $\Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ называется **общим интегралом** уравнения n-го порядка в области D, если оно неявно определяет общее решение уравнения.

Если в результате каких-либо преобразований порядок n уравнения (3.1) может быть понижен, то говорят, что уравнение **допускает понижение порядка**.

К уравнениям, допускающим понижение порядка, относятся, в частности, уравнения, не содержащие искомой функции и ее производных до некоторого порядка, т.е. уравнения вида

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right)=0.$$

Заменой $z(x)=y^{(k)}(x)$ такое уравнение сводится к уравнению $(n-k)$-го порядка:

$$F\left(x, z, z^{1}, ..., z^{(n-k)}\right)=0.$$

Если $z=z(x, C_1, ..., C_{n-k})$ решение этого уравнения, то общее решение уравнения n-го порядка может быть вычислено по формуле

$$y(x, C_1, C_2, ..., C_n)=\int\left(...\int\left(\int z(x, C_1, ..., C_{n-k})dx\right)dx...\right)dx+...+C_{n-1}x+C_n.$$

Простейшее уравнение, допускающее понижение порядка, – уравнение $y^{(n)}=f(x)$, его общее решение имеет вид

$$y(x, C_1, C_2, ..., C_n)=\int\left(...\int\left(\int f(x)dx\right)dx...\right)dx+...+C_{n-1}x+C_n.$$

Пример № 3.1. Решим уравнение 5-го порядка:

$$xy^{(5)}-y^{(4)}=0.$$

Выполнив в уравнении замену $y^{(4)}=z$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Это уравнение легко интегрируется:

$$xz'-z=0, \quad x\frac{dz}{dx}-z=0, \quad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}, \quad \ln|z|=\ln|x|+\ln C_1, \quad z=C_1x.$$

Проинтегрировав 4 раза выражение для z, получим общее решение исходного уравнения 5-го порядка:

$$y^{(4)}(x)=z(x)=C_1x, \quad y'''(x)=\int y^{(4)}(x)dx=\int C_1xdx=\frac{C_1}{2}x^2+C_2,$$

$$y''(x)=\int y'''(x)dx=\int\left(\frac{C_1}{2}x^2+C_2\right)dx=\frac{C_1}{2\cdot 3}x^3+C_2x+C_3,$$

$$y'(x)=\int y''(x)dx=\int\left(\frac{C_1}{2\cdot 3}x^3+C_2x+C_3\right)dx=\frac{C_1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4,$$

$$y(x)=\int y'(x)dx=\int\left(\frac{C_1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4\right)dx=$$

$$=\frac{C_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{C_2}{2\cdot 3}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5.$$

Поскольку C_1, C_2 и C_3 произвольные постоянные, можно переписать общее решение уравнения в виде

$$y(x)=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5.$$

3.2. Уравнения, не содержащие независимой переменной

К уравнениям, допускающим понижение порядка, относятся **уравнения, не содержащие независимой переменной,** т.е. уравнения вида

$$F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right)=0. \tag{3.5}$$

Порядок уравнения можно понизить, заменив $y'=p(y)$. После подстановки получим дифференциальное уравнение относительно функции $p=p(y)$, в котором порядок старшей производной от $p(y)$ будет на единицу меньше, чем порядок старшей производной от $y(x)$ в исходном уравнении.

Выполним в уравнении (3.5) замену $y'=p(y)$. Для этого выразим через $p(y)$ входящие в уравнение производные искомой функции $y=y(x)$:
$y'=p(y)$, где $y=y(x)$. Дифференцируя последовательно получаем

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(p(y)\right)}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'=\frac{dp}{dy}\cdot p,$$

$$y'''=\frac{d(y'')}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)=\frac{d^2p}{dy^2}\cdot\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot p+\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d^2p}{dy^2}\cdot\frac{dp}{dy}\cdot p^2+$$

$$+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\cdot p...$$

Понятно, что производная $k-$го порядка функции $y(x)$ выражается через производные не старше $(k-1)-$го порядка от функции $p(y)$.

Это означает, что после такой подстановки в исходное уравнение получим дифференциальное уравнение относительно функции $p=p(y)$, в котором порядок старшей производной от $p(y)$ будет на единицу меньше, чем порядок старшей производной от $y(x)$ в исходном уравнении:

$$F\left(y, p, p', ..., p^{(n-1)}\right)=0.$$

Пример № 3.2. Решим задачу Коши:

$$y'' = 2y^3,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$$

Обозначим $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(p(y)\right)}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot y' = \frac{dp}{dy}\cdot p$$

и $\quad p(y)\big|_{x=0} = y'(x)\big|_{x=0} = y'(0)=1,\ y(x)\big|_{x=0} = y(0)=1,$ т.е. $p(1)=1.$

Подставив, получим задачу Коши для уравнения первого порядка относительно $p(y)$:

$$p\frac{dp}{dy} = 2y^3,\quad p(1)=1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется:

$$pdp = 2y^3dy,\quad \int pdp = \int 2y^3dy,\quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^4}{2} + C_1,$$

константу определим из начального условия:

$$x=0,\ \ p=1,\ \ y=1\ \Rightarrow \frac{1^2}{2} = \frac{1^4}{2} + C_1,\ \Rightarrow C_1 = 0,$$

и поскольку $p(1)=1>0$, то $p = +\sqrt{y^4},\ \ p = y^2.$

Имеем ещё одно уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными $y' = y^2,\ \ y(0)=1$, которое также нетрудно решить:

$$\frac{dy}{dx} = y^2,\quad y(0)=1,\quad \frac{dy}{y^2} = dx,\quad \int\frac{dy}{y^2} = \int dx,\quad -\frac{1}{y} = x + C_2,$$

$$x=0,\quad y=1,\quad -\frac{1}{1} = 0 + C_2,\quad C_2 = -1,\quad -\frac{1}{y} = x-1.$$

Таким образом, $y = \dfrac{1}{1-x}$ − решение исходного уравнения.

3.3. Уравнения, не содержащие искомой функции

Уравнения, не содержащие искомой функции − это уравнения вида

$$F\left(x, y', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Оно также допускает понижение порядка заменой $y' = p(x)$. Выполним в уравнении (3.6) замену $y' = p(x)$. Для этого выразим через $p(x)$ входящие в уравнение производные искомой функции $y = y(x)$:

$$y' = p(x),\ \ y'' = p'(x), ..., y^{(k)} = p^{(k-1)}(x).$$

После такой подстановки получим уравнение на единицу меньшего порядка:

$$F\left(x, p, p', ..., p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Пример № 3.3. Решим уравнение $2xy'y'' = (y')^2 - 1.$

Обозначим $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и после подстановки в исходное уравнение получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$2xpp' = (p)^2 - 1.$$

Решаем полученное уравнение 1-го порядка:

$$2xp\frac{dp}{dx} = p^2 - 1, \quad \Rightarrow \quad 2p\frac{dp}{p^2 - 1} = \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad \int\frac{2pdp}{p^2 - 1} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{d\left(p^2 - 1\right)}{p^2 - 1} = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad \ln\left|p^2 - 1\right| = \ln|C_1 x|,$$

$$p^2 - 1 = C_1 x, \quad p = \pm\sqrt{C_1 x + 1}.$$

Имеем пару уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 x + 1},$$

решения которых легко получаем непосредственным интегрированием:

$$dy = \pm\sqrt{C_1 x + 1}dx, \quad \Rightarrow \int dy = \pm\int\sqrt{C_1 x + 1}dx, \quad y = \pm\frac{2}{3 \cdot C_1} \cdot \sqrt{\left(C_1 x + 1\right)^3} + C_2.$$

3.4. Уравнения с однородной правой частью

Если правая часть уравнения (3.1) удовлетворяет условию однородности

$$F\left(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}\right) = t^k F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right),$$

то это уравнение **однородное относительно неизвестной функции и всех ее производных**.

К уравнениям, допускающим понижение порядка, относятся уравнения **однородные относительно неизвестной функции и всех ее производных**.

Порядок такого уравнения можно понизить заменой

$$y(x) = \exp\left(\int z(x)dx\right) = e^{\int z(x)dx}. \qquad (3.7)$$

Выражение для первой производной от $y(x)$ не содержит производной от $z(x)$:

$$y'(x) = z(x) \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right).$$

Поэтому, заменив в исходном уравнении $y, y', ..., y^{(n)}$ их выражениями через $z(x)$, получим относительно $z(x)$ дифференциальное уравнение на единицу меньшего порядка.

Рассмотрим, например, уравнение третьего порядка, однородное относительно неизвестной функции и всех ее производных:

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

$$F(x, ty, ty', ty'', ty''') = t^4 F(x, y, y', y'', y''').$$

Посмотрим, как порядок такого уравнения можно понизить до второго, используя замену (3.7). Выразим y', y'', y''' через $z(x)$:

$$y(x) = \exp\left(\int z(x)dx\right), \qquad y'(x) = z \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right),$$

$$y''(x) = z' \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right) + z^2 \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right) = \left(z' + z^2\right) \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right),$$

$$y'''(x) = z'' \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right) + 3z \cdot z' \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right) + z^3 \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right) =$$

$$= \left(z'' + 3z \cdot z' + z^3\right) \cdot \exp\left(\int z(x)dx\right).$$

Произведя замену, получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$F\left(x, e^{\int z(x)dx}, z \cdot e^{\int z(x)dx}, \left(z' + z^2\right) \cdot e^{\int z(x)dx}, \left(z'' + 3z \cdot z' + z^3\right) \cdot e^{\int z(x)dx}\right) = 0,$$

$$\left(e^{\int z(x)dx}\right)^k \cdot F\left(x, 1, z, \left(z' + z^2\right), \left(z'' + 3z \cdot z' + z^3\right)\right) = 0, \quad \Rightarrow$$

$$F\left(x, 1, z, \left(z' + z^2\right), \left(z'' + 3z \cdot z' + z^3\right)\right) = 0.$$

В итоге получено дифференциальное уравнение второго порядка относительно $z(x)$: $\Phi(x, z, z', z'') = 0.$

Пример № 3.4. Решим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка: $yy' + x\left(y'\right)^2 + xyy'' = 0.$

Это уравнение, однородно относительно неизвестной функции и всех ее производных:

$$\left(ty\right)\left(ty'\right) + x\left(\left(ty'\right)\right)^2 + x\left(ty\right)\left(ty''\right) = t^2\left(yy' + x\left(y'\right)^2 + xyy''\right).$$

Используем стандартную для таких уравнений замену (3.7):

$$y\left(x\right) = \exp\left(\int z\left(x\right)dx\right), \quad y'\left(x\right) = z \cdot \exp\left(\int z\left(x\right)dx\right), \; y''\left(x\right) = \left(z' + z^2\right) \cdot \exp\left(\int z\left(x\right)dx\right).$$

Исходное уравнение примет вид

$$e^{\int z(x)dx} \cdot z \cdot e^{\int z(x)dx} + x\left(z \cdot e^{\int z(x)dx}\right)^2 + x \cdot e^{\int z(x)dx} \cdot \left(z' + z^2\right) \cdot e^{\int z(x)dx} = 0.$$

После преобразований получаем

$$e^{2\int z(x)dx} \cdot \left(z + xz^2 + x \cdot \left(z' + z^2\right)\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad z + xz^2 + x \cdot \left(z' + z^2\right) = 0,$$

$$xz' + z + 2xz^2 = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z - 2z^2.$$

Уравнение первого порядка $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x}z - 2z^2$ – это уравнение Бернулли, которое интегрируется стандартным для уравнений Бернулли способом.

3.5. Линейные ОДУ n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{3.8}$$

Коэффициенты уравнения $a_{n-1}(x), a_{n-2(x),}, \ldots, a_1(x), a_0(x)$ и правую часть $f(x)$ полагаем непрерывными на отрезке $[a,b]$.

Уравнение (3.8) является **линейным неоднородным дифференциальным уравнение *n*-го порядка**. Если $f(x) = 0$, то уравнение (3.8) имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.9}$$

и называется **однородным линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка**, Выражение в левой части уравнения называется **линейным дифференциальным оператором *n*-го порядка**:

$$\mathbf{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y. \tag{3.10}$$

$\mathbf{L}(y) = 0$ и $\mathbf{L}(y) = f(x)$ – соответственно однородное и неоднородное уравнения (3.8) и (3.9) в операторной записи.

При изучении линейных дифференциальных уравнений используются пространства $C[a,b]$– пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, и $C_k[a,b]$ – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, вместе со своими производными до *k*-го порядка включительно.

3.6. Свойства решений линейного уравнения. Принцип суперпозиции

Рассмотрим уравнение (3.8) с непрерывными коэффициентами $a_{n-1}(x), a_{n-2(x),}, ..., a_1(x), a_0(x)$ и непрерывной правой частью $f(x)$.

Принцип суперпозиции основан на следующих свойствах решений линейных дифференциальных уравнений:

1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения линейного однородного дифференциального уравнения (3.9), то любая их линейная комбинация

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

является решением этого однородного уравнения;

2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения линейного неоднородного уравнения (3.8), то их разность $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородного уравнения (3.9);

3. Любое решение неоднородного линейного уравнения $\mathbf{L}(y) = f(x)$ есть сумма любого фиксированного (частного) решения неоднородного уравнения и некоторого решения однородного уравнения;

4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения линейных неоднородных уравнений $\mathbf{L}(y) = f_1(x)$ и $\mathbf{L}(y) = f_2(x)$ соответственно, то их сумма $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением неоднородного уравнения $\mathbf{L}(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Обычно именно это последнее утверждение называют **принципом суперпозиции**.

Справедлива следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения (3.8).

Если в уравнении (3.8) все коэффициенты $a_{n-1}(x), a_{n-2(x)}, ..., a_1(x), a_0(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то задача Коши для этого уравнения с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{10}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0} \tag{3.11}$$

имеет единственное на всем отрезке $[a,b]$ решение $y = y(x)$.

Следует понимать, что теорема имеет «глобальный» характер – решение существует и единственно всюду, где непрерывны коэффициенты и правая часть уравнения.

3.7. Линейные уравнения второго порядка. Гармонические колебания

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка ($\omega > 0$ – постоянная величина):

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{3.12}$$

Общее решение уравнения (3.12) имеет вид

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Его можно записать в виде

$$y(t) = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos\varphi = \dfrac{C_1}{A}, \quad \sin\varphi = \dfrac{C_2}{A}.$

Для произвольной точки (t_0, y_0, y_1) решение задачи Коши $y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$ существует и единственно на всей числовой оси.

Пусть $t_0 = 0$. Решение задачи Коши $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$ имеет вид

$$y(t) = A\cos(\omega t - \varphi),$$

$$A = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 y_0^2 + y_1^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{\omega y_0}{\sqrt{\omega^2 y_0^2 + y_1^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y_1}{\sqrt{\omega^2 y_0^2 + y_1^2}}.$$

Будем считать, что $y(t)$ – координата частицы в момент времени t. Частица движется по оси y из начальной точки y_0 с положительной скоростью $y_1 > 0$.

Поскольку $|y(t)| = |A\cos(\omega t - \varphi)| \le A,$ то частица будет двигаться по оси внутри отрезка $[-A, A]$.

Сначала частица движется вправо до точки $y = A$. В точку $y = A$ она придет в момент времени $t = (\pi + \varphi)/\omega,$ когда $y(t) = A\cos(\omega t - \varphi) = A$.

Затем частица движется влево до точки $y = -A$. В точку $y = -A$ частица придет в момент времени $t = (2\pi + \varphi)/\omega,$ когда $y(t) = A\cos(\omega t - \varphi) = -A$.

Понятно, что частица совершает периодические колебания на отрезке $[-A, A]$ с ***периодом T* = 2*π*/*ω*** .

На рис. 3.1 изображены пути трех частиц, движение которых описывается уравнением $y'' + 4y = 0$. Частицы движутся со скоростью $y_1 = 1$ из начальных точек $y_0 = -2, -1, 0$.

Физическая система, которая описывается уравнением (3.12) называется **гармоническим осциллятором**.

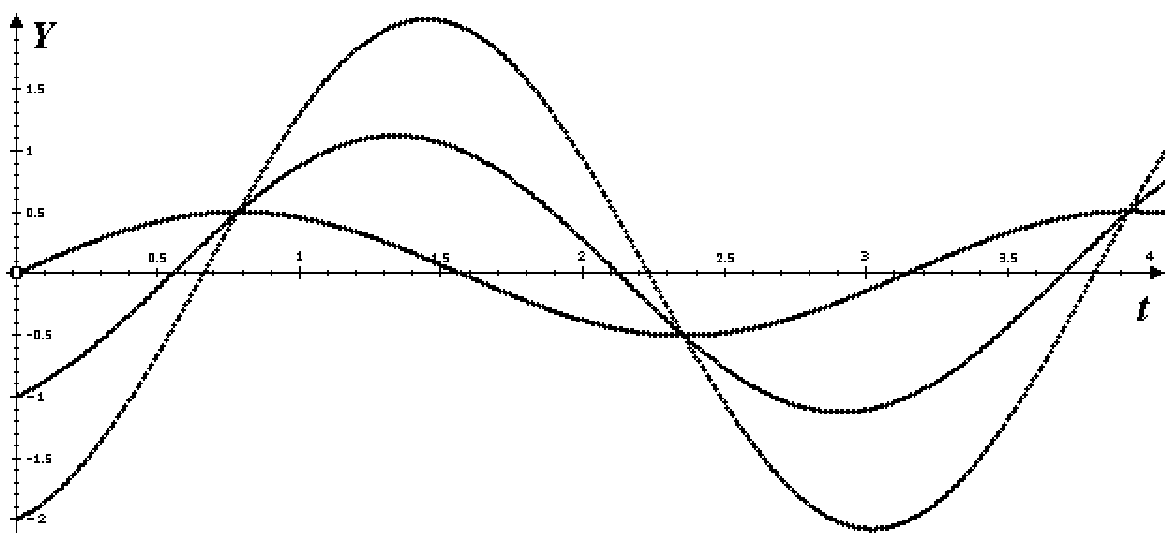


Рис. 3.1. Пути движения трех частиц

Это малые колебания маятника, малые колебания под действием силы тяжести груза, подвешенного на упругой пружине, электрические колебания в контуре, состоящем из емкости и индуктивности, и т.п.

Пример № 3.5. Запишем дифференциальное уравнение малых колебаний маятника с периодом колебаний $T = \pi/6$ и амплитудой 4.

Поскольку дифференциальное уравнение, описывающее малые колебания маятника с периодом $T = 2\pi/\omega$, имеет вид (3.13), то колебания маятника с периодом $T = \pi/6$ описываются уравнением с параметром $\omega = {}^{2\pi}\!/_{T} = 12$:

$$y'' + 144y = 0.$$

Амплитуду колебаний определим из начальных условий: $y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$

Действительно, поскольку $y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t),\ y(0) = C_1 \cos(0) + {}$ ${}+ C_2 \sin(0) = C_1 = 4,\ y'(0) = -\omega C_1 \sin(0) + \omega C_2 \cos(0) = \omega C_2 = 0,\ C_1 = 4, \quad C_2 = 0,$ $y(t) = 4\cos(12t),$ то амплитуда колебаний равна 4 .

Итак, малые колебания маятника с периодом колебаний $T = \pi/6$ и амплитудой 4 описываются решением $y(t) = 4\cos(12t)$ задачи Коши:

$$y'' + 144y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$$

На рис. 3.2 изображены колебания маятника, соответствующие рассмотренной задаче.

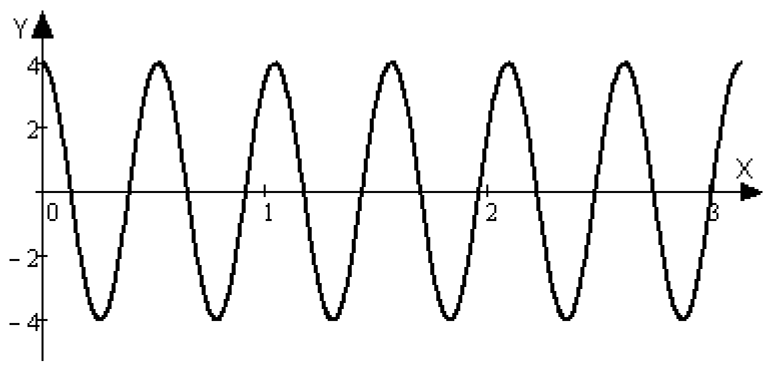


Рис. 3.2. Колебания маятника $y(x) = 4\cos(12x)$

3.8. Линейные уравнения 2-го порядка. Ангармонические колебания

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами *a* и *b*:

$$y'' + 2ay' + by = 0. \tag{3.13}$$

Если $a^2 < b$ и $a > 0$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-ax}(C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x), \quad \omega = \sqrt{b - a^2}. \tag{3.14}$$

Его можно записать в виде

$$y(x) = e^{-ax}\cos(\omega x - \varphi), \tag{3.15}$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos\varphi = \frac{C_1}{A}, \quad \sin\varphi = \frac{C_2}{A}.$$

Функция $y(x) = Ae^{-ax}\cos(\omega x - \varphi)$ – **непериодическая**, но ее нули, максимумы и минимумы повторяются с периодом $T = 2\pi/\omega$. Этот период равен периоду колебаний гармонического осциллятора с частотой ω.

Колебания $y(x) = Ae^{-ax}\cos(\omega x - \varphi)$ называются **затухающими колебаниями**, $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Величина Ae^{-ax} называется **амплитудой колебаний**; величина $\delta = a$ – **коэффициентом затухания**.

Коэффициент затухания δ записывают в виде $\delta = 1/\tau$, τ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Величина $d = \delta \cdot T = 2\pi\delta/\omega$ называется **логарифмическим декрементом затухания**. Она показывает, насколько уменьшится амплитуда за один период. Логарифмический декремент – естественная мера скорости затухания.

Колебания, которые описывает дифференциальное уравнение (3.13), называют **ангармоническими колебаниями**.

На рис. 3.3 приведены графики решений уравнения $y'' + y' + 4y = 0$, проходящих через точку (0,0) с различными начальными скоростями y '(0).

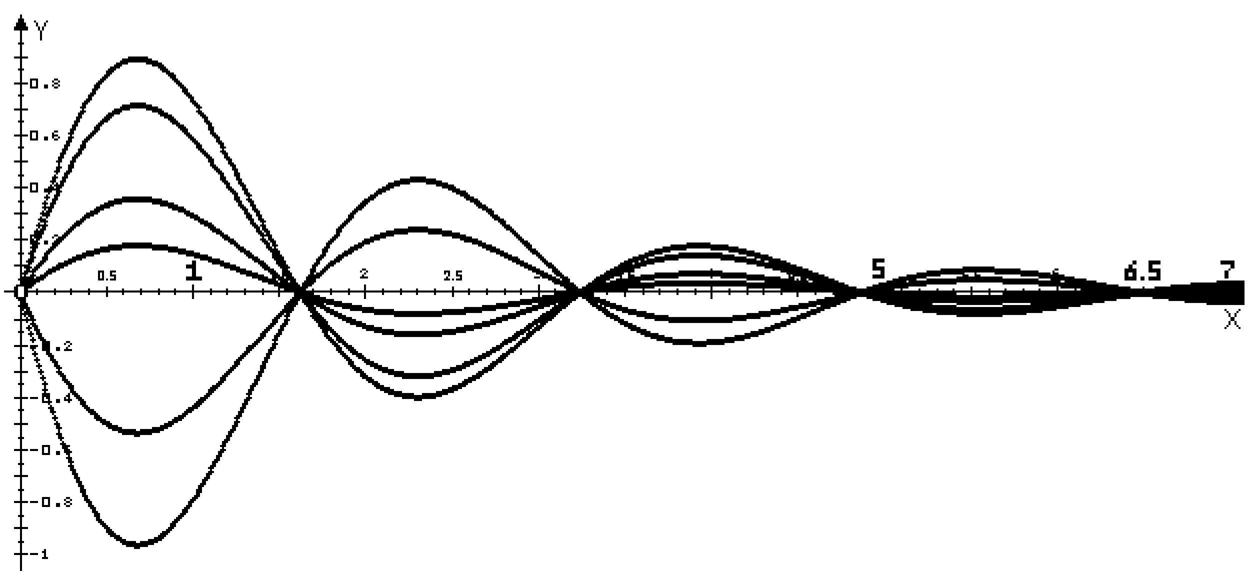


Рис. 3.3. Графики решения уравнения $y'' + y' + 4y = 0$

Пример № 3.6. Найдем коэффициент затухания и логарифмический декремент для уравнения $y''+y'+4y=0$. Здесь параметры a, b, ω имеют значения $a=0{,}5$, $b=4$, $\omega=\sqrt{b-a^2}=\sqrt{4-0{,}25}\approx 1{,}94$. Вычислим коэффициент затухания δ и логарифмический декремент d:

$$\delta=a=0{,}5,\quad T=\frac{2\pi}{\omega},\quad d=\delta\cdot T=\delta\cdot\frac{2\pi}{\omega}\approx 0{,}5\cdot\frac{2\pi}{1{,}94}\approx 1{,}62.$$

Итак, коэффициент затухания $\delta=0{,}5$, логарифмический декремент $d\approx 1{,}62$.
На рис. 3.4 отражено графическое решение данной задачи.

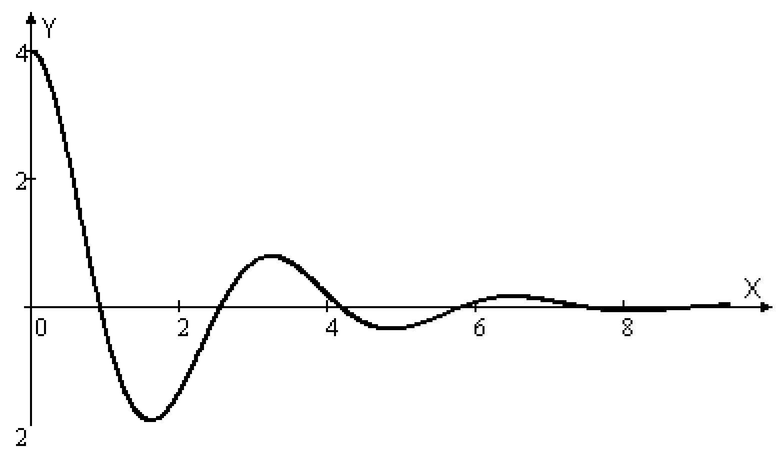


Рис. 3.4. Графическое решение задачи $y''+y'+4y=0 \;\; y(0)=0 \;\; y(0)=4$

3.9. Линейные уравнения 2-го порядка. Уравнение Ньютона

Уравнением Ньютона называют линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$y''+\omega_0^2 y=F\cos\omega x. \tag{3.16}$$

Известно, что однородное уравнение $y''+\omega_0 y=0$ описывает свободные колебания материальной точки с частотой колебаний ω_0:

$$y(x)=C_1\cos\omega_0 x+C_2\sin\omega_0 x.$$

На рис. 3.5 приведен график решения однородного уравнения свободных колебаний с частотой $\omega_0=0{,}1$

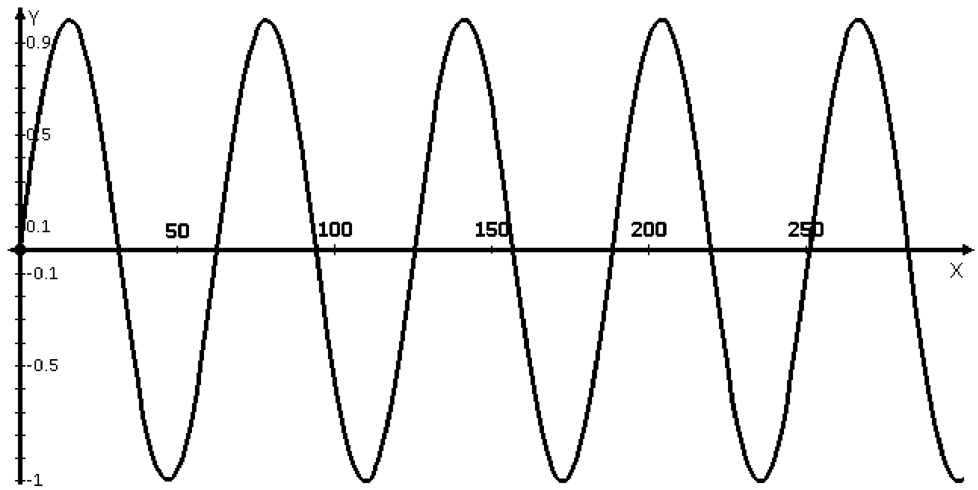


Рис. 3.5. Решение однородного уравнения $y'' + 0,01y = 0$

Неоднородное уравнение с правой частью $F\cos\omega x$ описывает колебания материальной точки под действием внешней периодической силы, частота которой ω.

Если $\omega_0 \neq \omega$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos\omega_0 x + C_2 \sin\omega_0 x + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos\omega x.$$

Если $\omega_0 = \omega$, то

$$y(x) = C_1 \cos\omega_0 x + C_2 \sin\omega_0 x + \frac{Fx}{2\omega_0} \cdot \sin\omega_0 x.$$

На рис. 3.6 приведены решения уравнений Ньютона для различных частот свободных колебаний и частот внешней силы. На рис. 3.6, а изображено графическое решение уравнения при частоте свободных колебаний $\omega_0 = 3$ и частоте внешней силы $\omega = 3{,}1$. На рис. 3.6, б показан резонансный случай – частота свободных колебаний $\omega_0 = 3$ совпадает с частотой внешней силы $\omega = 3$. График решения уравнения для $\omega_0 = 7$ и $\omega = 5$ приведен на рис. 3.6, в.

Графические изображения решений уравнения Ньютона иллюстрируют принцип суперпозиции и модулирование амплитуды колебаний.

Пример № 3.7. Исследуем поведение решения задачи Коши для уравнения Ньютона с частотой свободных колебаний $\omega_0 = 5$ и частотой внешней силы $\omega = 5{,}1$:

$$y'' + 5^2 y = \cos 5{,}1x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \qquad (3.17)$$

Поскольку $\omega_0 \neq \omega$ $(5 \neq 5{,}1)$, то общее решение уравнения Ньютона имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos\omega_0 x + C_2 \sin\omega_0 x + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos\omega x.$$

Вычислив решение задачи Коши (3.17) по этой формуле, получим

$$y(x) = \frac{1}{5^2 - 5{,}1^2}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{5^2 - 5{,}1^2} \cdot \cos 5{,}1x.$$

Для исследования решение удобнее записать в виде произведения амплитуды $A(x)$ и периодически изменяющейся компоненты $\cos(5x - \varphi(x))$: $y(x) = A(x)\cos(5x - \varphi(x))$. Выполнив несложные, но громоздкие тригонометрические преобразования имеем

$y(x) = A(x)\cos(5x - \varphi(x)),$ где $a = -\dfrac{1}{5^2 - 5{,}1^2}$, $b = \dfrac{1}{5}$, $A_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$A_1 = -a = \frac{1}{5^2 - 5{,}1^2}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{a}{A_0}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{b}{A_0},$$

$$A(x) = \sqrt{(A_0\cos\varphi_0 + A_1\cos 0{,}1x)^2 + (A_0\sin\varphi_0 + A_1\sin 0{,}1x)^2},$$

$$\cos\varphi(x) = \frac{A_0\cos\varphi_0 + A_1\cos 0{,}1x}{A(x)}, \quad \sin\varphi(x) = \frac{A_0\sin\varphi_0 + A_1\sin 0{,}1x}{A(x)}.$$

На рис. 3.8, а приведен график медленно меняющейся амплитуды $A(x)$, график быстро меняющихся колебаний $\cos(5x - \varphi(x))$ представлен на рис. 3.8, б и график их произведения − график решения задачи Коши для уравнения Ньютона приведен на рис. 3.8, в. Такое поведение решения уравнения Ньютона, представленное на рис. 3.8, называют «биением».

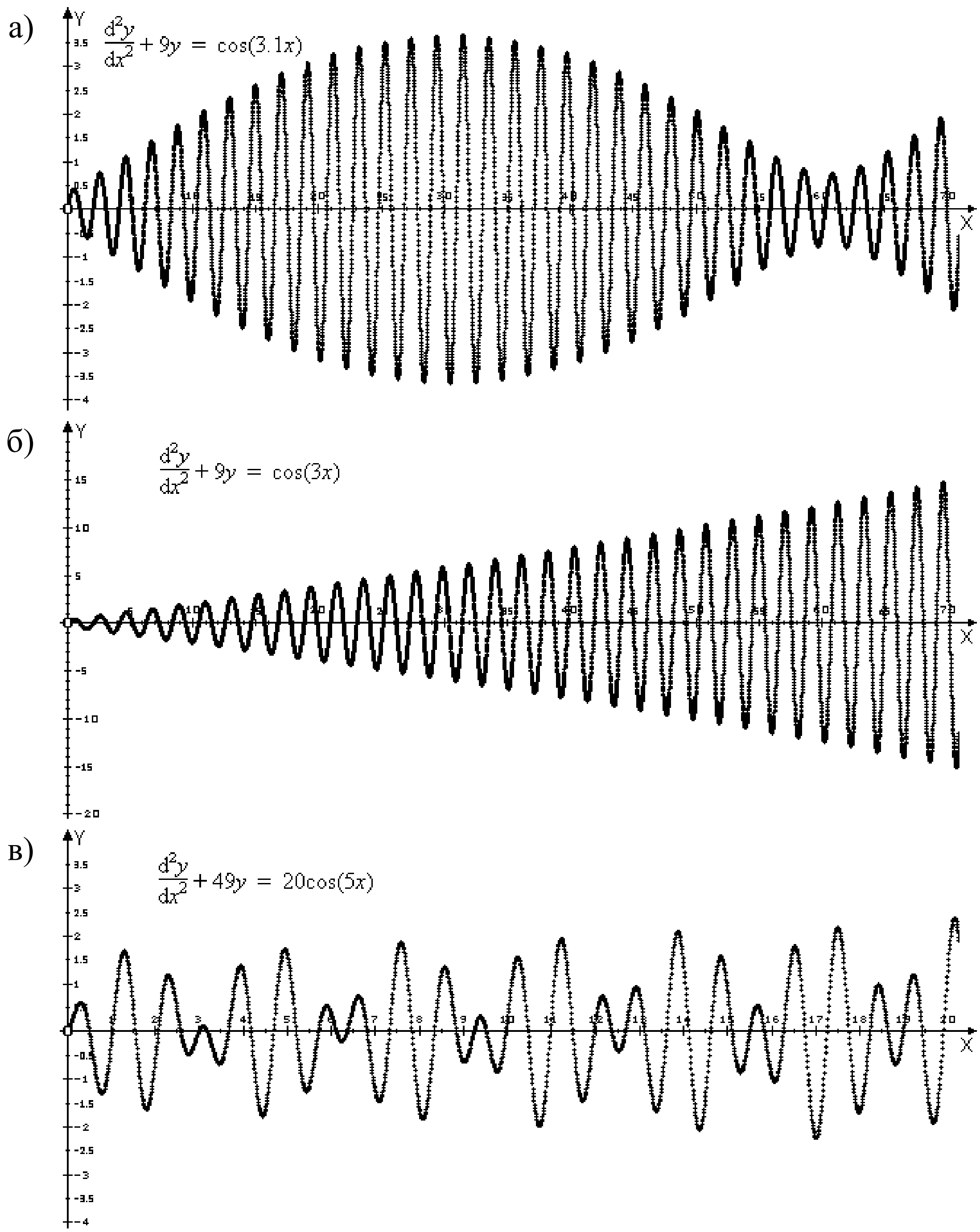
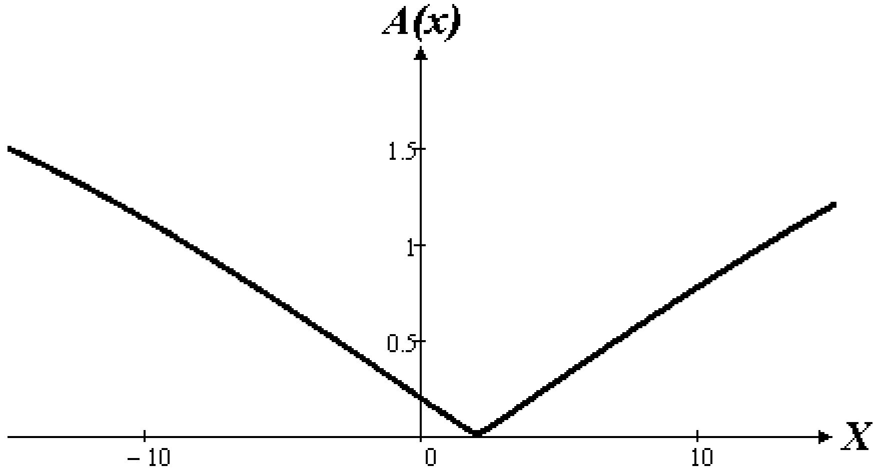
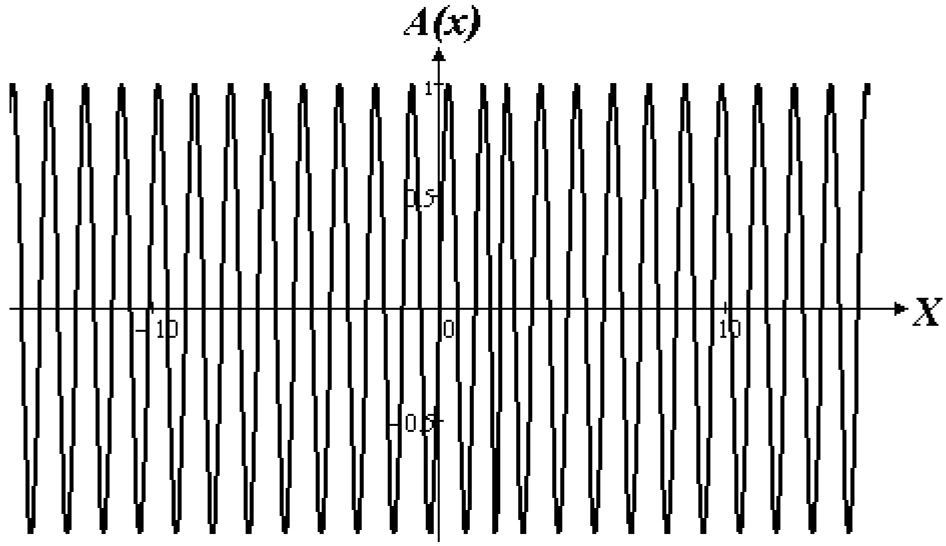


Рис. 3.6. Графические иллюстрации решений уравнения Ньютона для различных частот свободных колебаний и различных частот внешней силы

а)



б)



в)

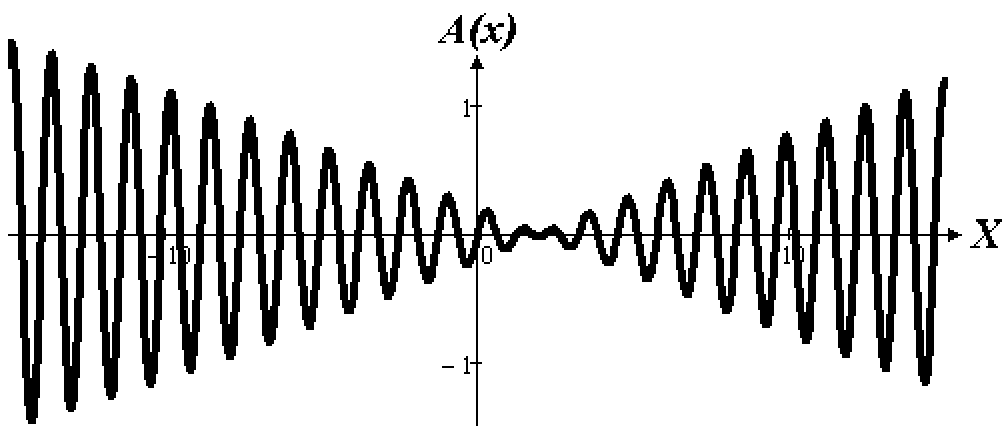


Рис. 3.8. Решения уравнения Ньютона − "биение "

3.10. Линейная зависимость и линейная независимость системы функций

Функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x),$ определённые на отрезке $[a,b]$, называются **линейно зависимыми** на этом отрезке $[a,b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$$

для всех x из отрезка $[a,b]$.

В противном случае функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ называются **линейно независимыми**.

Линейную зависимость и линейную независимость функций определяют также на (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, на бесконечных промежутках.

Справедливо следующее утверждение.

Функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией других на этом отрезке.

Очевидны также утверждения, что

• если среди функций $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ есть нулевая функция, то функции линейно зависимы;

• если функции $y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)$ **линейно зависимы**, то при любых $y_{k+1}(x), y_{k+2}(x),..., y_n(x)$ функции $y_1(x), y_2(x),..., y_k, y_{k+1}(x), y_{k+2}(x),..., y_n(x)$ также линейно зависимы;

• если функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то они линейно зависимы и на любом отрезке, лежащем внутри $[a,b]$;

• если функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно независимы на $[a,b]$, то они линейно независимы и на любом отрезке, содержащем отрезок $[a,b]$ (если они определены на этом отрезке).

Вектор-функции $Y_1(x), Y_2(x),..., Y_n(x),$ где

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ ... \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ ... \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, ..., \quad Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ ... \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

называются **линейно зависимыми на отрезке** $[a,b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + ... + \alpha_n Y_n(x) = 0$$

для всех x из отрезка $[a,b]$. В противном случае функции $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$ называются **линейно независимыми.**

Пример № 3.8. Докажем линейную независимость на всей числовой оси функций $1, x, x^2, ..., x^n$. Допустим противное, т.е. что существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$, не равные нулю одновременно и такие, что для всех x справедливо равенство

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_{n+1} \cdot x^n = 0.$$

Последнее равенство для всех x возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n+1} = 0.$$

Это последнее равенство противоречит предположению, что постоянные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ не равны нулю одновременно. Утверждение доказано.

Пример № 3.9. Докажем линейную зависимость на всей числовой оси функций $\sin^2 x, \quad \cos^2 x, \quad 1$. Поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$, т. е. $\quad 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 1 = 0$, коэффициенты линейной комбинации не равны нулю, и, следовательно, функции $\sin^2 x, \quad \cos^2 x, \quad 1 -$ линейно зависимы. Утверждение доказано.

Пример № 3.10. Докажем линейную независимость на всей числовой оси функций $e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_n$.

Докажем утверждение по индукции. Пусть утверждение справедливо для $k = 1$:

$$k = 1, \quad \alpha_1 e^{\lambda_1 x} = 0, \quad \forall x \quad \Rightarrow \alpha_1.$$

Предположим теперь, что линейная независимость доказана для $k-1$ функций $e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_{k-1} x}$. А для k функций

$$e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_{k-1} x} \quad e^{\lambda_k x}, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_{k-1} \neq \lambda_k.$$

Допустим противное, т.е. что существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не равные нулю одновременно и такие, что для всех *x* справедливо

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + ... + \alpha_{k-1} e^{\lambda_{k-1} x} + \alpha_k e^{\lambda_k x} \equiv 0.$$

Разделим обе части равенства на $e^{\lambda_k x}$:

$$\alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_k)x} + ... + \alpha_{k-1} e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x} + \alpha_k \equiv 0,$$

и продифференцируем последнее тождество по *x*:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e^{(\lambda_2 - \lambda_k)x} + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x} \equiv 0.$$

Но входящие в равенство $k-1$ функции по нашему индуктивному предположению линейно независимы и $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$. Следовательно, последнее равенство возможно, только если все входящие в него коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k-1} = 0.$$

Но тогда $\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + ... + \alpha_{k-1} e^{\lambda_{k-1} x} + \alpha_k e^{\lambda_k x} \equiv \alpha_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \quad \Rightarrow \alpha_k$ и

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0.$$

Получили противоречие (предполагалось, что не все коэффициенты равны нулю). Это противоречие доказывает линейную независимость *k* функций. А отсюда, в свою очередь, по индукции следует линейная независимость всей исследуемой системы функций.

3.11. Определитель Вронского

Определителем Вронского $W(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ называется определитель, первая строка которого образована функциями $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ из множества $C_{n-1}[a,b]$, а последующие строки образованы производными от функций предыдущей строки:

$$W(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (3.18)$$

Справедливо следующее **необходимое условие линейной зависимости функций**.

Если функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского тождественно равен нулю на этом отрезке: $W(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$.

Важно понимать, что обратное утверждение неверно. Определитель Вронского линейно независимой системы функций может быть тождественно равен нулю.

Однако если определитель Вронского системы функций на некотором отрезке отличен от тождественного нуля, то система функций линейно независима на этом отрезке.

Рассмотрим две функции:

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2, \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Эти функции линейно независимы на отрезке $[0,2]$. Действительно:

$$x \in [0,1]: \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 (x-1)^2 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 0,$$

$$x \in (1,2]: \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_2 (x-1)^2 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 = 0,$$

$$x \in [1,2]: \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

Вычислим определитель Вронского $W(x, y_1(x), y_2(x))$ на отрезке $[0,2]$:

$$x \in [0,1]: \quad W(x, y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 0 \\ 2(x-1) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$x \in (1,2]: \quad W(x, y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} 0 & (x-1)^2 \\ 0 & 2(x-1) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Итак, функции линейно независимы на отрезке $[0,2]$, а $W(x, y_1(x), y_2(x)) \equiv 0$ на этом отрезке.

Этот пример означает, что тождественное равенство нулю определителя Вронского системы функций является необходимым условием линейной зависимости системы функций, но **не является достаточным условием** линейной зависимости системы функций.

С другой стороны, **отличие от тождественного нуля** определителя Вронского системы функций является **достаточным условием линейной независимости системы функций**.

(Ведь если бы она была бы линейно зависима, то определитель Вронского был бы тождественно равен нулю).

Определителем Вронского вектор-функций $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$,

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ ... \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ ... \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, ..., \quad Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ ... \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

называется определитель $W[x, Y_1, Y_2, ..., Y_n]$, заданный равенством

$$W[x, Y_1, Y_2, ..., Y_n], = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & ... & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & ... & y_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x)... & & y_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Пример № 3.11. Вычислим на всей числовой оси определитель Вронского $W(x, 1, x, x^2, ..., x^n)$ – определитель Вронского системы функций $1, x, x^2, ..., x^n$.

$$W(x, 1, x, x^2, ..., x^n) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^n \\ 0 & 1 & 2x & ... & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & ... & n(n-1)x^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n! \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n! \neq 0.$$

Определитель Вронского на всей числовой оси отличен от нуля, следовательно, функции $1, \quad x, \quad x^2,...,x^n$ линейно независимы на всей числовой оси.

Пример № 3.12. Вычислим на всей числовой оси определитель Вронского линейно зависимой системы функций $\sin^2 x, \quad \cos^2 x, \quad 1$ – определитель Вронского $W(x, \sin^2 x, \cos^2 x, 1)$:

$$W(x,\sin^2 x,\cos^2 x,1)=\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ 2\sin x\cos x & -2\cos x\sin x & 0 \\ 2\cos^2 x-2\sin^2 x & 2\sin^2 x-2\cos^2 x & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin 2x & -\sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 2x \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}\equiv 0.$$

В полном соответствии с необходимым условием линейной зависимости определитель Вронского линейно зависимой на всей числовой оси системы функций $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ тождественно равен нулю на всей числовой оси.

3.12. Исследование линейной независимости системы функций

Справедливо следующее необходимое условие линейной зависимости функций: если функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского тождественно обращается в нуль на этом отрезке:

$$W(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \equiv 0\,.$$

Обратное утверждение неверно: *из равенства нулю определителя Вронского не следует линейная зависимость функций.*

Однако если определитель Вронского функций отличен от нуля хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$, то функции линейно независимы.

Это последнее утверждение – **достаточное условие линейной независимости функций**.

Определитель Вронского используют для исследования линейной зависимости функций: если хотя бы в одной точке $W(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \neq 0$, то функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$.

Если же $W(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \equiv 0$, то следует продолжить исследование линейной зависимости функций. Например, по определению.

3.13. Линейная независимость решений линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ)

Вспомним линейное однородное дифференциальное уравнение (3.9):

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Справедливо следующее **необходимое и достаточное условие линейной независимости решений** этого уравнения.

Решения $y_1(x), \quad y_2(x),..., y_n(x)$ уравнения (3.9) линейно независимы на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда определитель Вронского этих функций $W(x, y_1(x), \quad y_2(x),..., y_n(x))$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$.

Для определителя Вронского (3.18) решений $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами (3.9) справедлива **формула Остроградского-Лиувилля**:

$$W(x, y_1, y_2,..., y_n) = W(x_0, y_1, y_2,..., y_n) \cdot e^{(-\int a_{n-1}(t)dt)}. \tag{3.19}$$

Из формулы (3.19), в частности, следует, что

− если $W(x_0, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) = 0, \quad x_0 \in [a,b],$ то определитель Вронского $W(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$;

− если же $W(x_0, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \neq 0, \quad x_0 \in [a,b],$ то определитель Вронского $W(x, y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$.

3.14. Структура решения ЛОДУ n-го порядка

Фундаментальная система решений ЛОДУ

Фундаментальной системой решений уравнения (3.9) называется упорядоченный набор из n линейно независимых решений уравнения.

Иными словами, любые n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ (3.9) образуют фундаментальную систему решений.

Доказано, что у однородного линейного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами существует фундаментальная система решений.

Пусть задана некоторая линейно независимая система n векторов из $\mathbf{R}^n$:

$$\overline{e_1}=\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{n1} \end{pmatrix},\quad \overline{e_2}=\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \dots \\ e_{n2} \end{pmatrix},\dots,\quad \overline{e_3}=\begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \dots \\ e_{nn} \end{pmatrix}.$$

И пусть функции $y_1(x),\quad y_2(x),\dots,y_n(x)$ – решения уравнения (3.9) с начальными условиями:

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0)=e_{11}, & y_2(x_0)=e_{12}, & y_i(x_0)=e_{1i}, & y_n(x_0)=e_{1n}, \\ y_1{}'(x_0)=e_{21}, & y_2{}'(x_0)=e_{22}, & y_i{}'(x_0)=e_{2i}, & y_n{}'(x_0)=e_{2n}, \\ \quad\dots & \quad\dots & \quad\dots & \quad\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)=e_{n1}, & y_2^{(n-1)}(x_0)=e_{n2}, & y_i^{(n-1)}(x_0)=e_{ni}, & y_n^{(n-1)}(x_0)=e_{nn}. \end{array}$$

Функции $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения.

Пример № 3.13. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с непрерывными на интервале (e,∞) коэффициентами

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=0,$$

функция $y_1(x)=\ln x$ является решением на интервале (e,∞) задачи Коши:

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=0,\quad y_1(e)=1,\quad y_1{}'(e)=e^{-1},$$

а функция $y_2(x)=x$ является решением на (e,∞) задачи Коши:

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=0,\quad y_2(e)=e,\quad y_2{}'(e)=1.$$

Эти функции линейно независимы на (e,∞), поскольку их определитель Вронского отличен от нуля:

$$W(x,y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\ln x & x\\ \frac{1}{x} & 1\end{vmatrix}=\ln x-1>0 \text{ на } (e,\infty).$$

Отсюда следует, что функции $y_1(x)=\ln x$, $y_2(x)=x$ образуют фундаментальную систему решений исследуемого уравнения.

Структура общего решения ЛОДУ

Общим решением уравнения (3.9) на отрезке $[a,b]$ называется функция $y=\Phi(x,C_1,...,C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1,...,C_n$ и удовлетворяющая следующим условиям:

− при любых допустимых значениях постоянных $C_1,...,C_n$ функция $y=\Phi(x,C_1,...,C_n)$ является решением уравнения на $[a,b]$;

− какова бы ни была начальная точка $(x_0,y_0,y_{10},...,y_{n-10})$, $x_0\in[a,b]$, существуют такие значения постоянных $C_1=C_{10},...,C_n=C_{n0}$, что функция $y=\Phi(x,C_{10},...,C_{n0})$ удовлетворяет начальным условиям:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{10},\ ....\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-10}. \tag{3.20}$$

Теорема 3.1. (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). Если все коэффициенты уравнения линейного однородного дифференциального уравнения непрерывны на отрезке $[a,b]$, а функции $y_1(x),\ y_2(x),...,y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений этого уравнения, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x,C_1,...,C_n)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x), \tag{3.21}$$

где $C_1,...,C_n$ − произвольные постоянные.

Пример № 3.14. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с непрерывными на интервале (e,∞) коэффициентами из примера 3.13. Функции $y_1(x)=\ln x$ и $y_2(x)=x$ образуют фундаментальную систему решений.

Общим решением уравнения является функция

$$y(x,C_1,C_2)=C_1\ln x+C_2x.$$

3.15. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ)

Напомним линейное неоднородное дифференциальное уравнение (3.8):

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x).$$

Общим решением уравнения (3.8) на отрезке $[a,b]$ называется функция $y=\Phi(x,C_1,...,C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1,...,C_n$ и удовлетворяющая следующим условиям:

− при любых допустимых значениях постоянных $C_1,\dots,C_n$ функция $y=\Phi(x,C_1,...,C_n)$ является решением уравнения на $[a,b]$;

− какова бы ни была начальная точка $(x_0,y_0,y_{10},...,y_{n-10})$, $x_0\in[a,b]$, существуют такие значения постоянных $C_1=C_{10},...,C_n=C_{n0}$, что функция $y=\Phi(x,C_{10},...,C_{n0})$ удовлетворяет начальным условиям:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{10},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-10}.$$

Теорема 3.2. (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). Если все коэффициенты уравнения линейного однородного дифференциального уравнения непрерывны на отрезке $[a,b]$, а функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x,C_1,...,C_n)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)+y*(x), \tag{3.22}$$

где $C_1,...,C_n$ − произвольные постоянные, $y*(x)$− частное решение неоднородного уравнения.

Пример № 3.12. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с непрерывными на интервале (e,∞) коэффициентами и непрерывной правой частью:

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=\frac{1-\ln x}{x^3},$$

частным решением, которого является функция $y*(x)=\dfrac{1-2\ln x}{4x}$.

Фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения образуют функции $y_1(x)=\ln x$, $y_2(x)=x$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x,C_1,C_2)=C_1\ln x+C_2x+\frac{1-2\ln x}{4x}.$$

3.16. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения

Задача состоит в вычислении какого-либо частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (3.8) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами и непрерывной правой частью.

Предположим, что известна фундаментальная система $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ решений соответствующего однородного уравнения (3.9).

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y*(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+...+C_n(x)y_n(x), \tag{3.23}$$

где $C_1(x), C_2(x),...,C_n(x)-$ неизвестные, n раз дифференцируемые на $[a,b]$ функции. Их называют **варьируемые постоянные** общего решения однородного уравнения.

Справедливо следующее утверждение. Пусть $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)-$ фундаментальная система решений однородного уравнения (3.9) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами. Если правая часть $f(x)$ неоднородного уравнения (3.8) непрерывна на $[a,b]$, то его частное решение можно искать в виде (3.23).

Неизвестные функции $C_1(x), C_2(x),...,C_n(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2+...+C_n'y_n=0, \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+...+C_n'y_n'=0, \\ C_1'y_1''+C_2'y_2''+...+C_n'y_n''=0, \\ .... \\ C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+...+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases} \tag{3.24}$$

Такой метод отыскания частного решения неоднородного уравнения называется **методом вариации произвольных постоянных** или **методом Лагранжа**.

Найдем методом Лагранжа частное решение для уравнения 2-го порядка $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью.

Предположим, что известна фундаментальная система $y_1(x),\ y_2(x)$ решений соответствующего однородного уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где $C_1(x),\ C_2(x)-$ такие неизвестные, дважды дифференцируемые на $[a,b]$ функции.

Для того чтобы подставить функцию $y*(x)$ в исходное уравнение, найдём сначала первую производную $y*(x)$:

$$(y*(x))' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Будем искать $C_1(x),\ C_2(x)$ такими, чтобы $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$ и, следовательно,

$$(y*(x))' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

$$(y*(x))'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставим выражения для производных в уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \equiv C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$
$$+a_1(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + a_0(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x).$$

После простых преобразований имеем

$$C_1(x)(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + C_2(x)(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) +$$
$$+C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Но поскольку $y_1(x),\ y_2(x)$ – решения однородного уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$ то $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$

Для неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ получили систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой линейной относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ системы – это отличный от нуля на $[a,b]$ вронскиан фундаментальной системы решений.

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно выписать в явном виде (имеем два дифференциальных уравнения первого порядка):

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}, \\ C_2' = \dfrac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}. \end{cases}$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными легко интегрируются:

$$\begin{cases} C_1 = \displaystyle\int \frac{y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx, \\ C_2' = \displaystyle\int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx. \end{cases}$$

Неизвестные, варьируемые постоянные найдены – найдено частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка.

Пример № 3.13. Найдём методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных) частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка из примера 3.12.

Фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения образуют функции $y_1(x) = \ln x$, $y_2(x) = x$.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y*(x) = C_1(x)\ln x + C_2(x)x.$$

$y'(x) = C_1' \ln x + C_1 \dfrac{1}{x} + C_2' x + C_2$, т.к. $C_1' \ln x + C_2' x = 0$,

$$y''(x) = C_1'\frac{1}{x} + C_1\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_2'.$$

Подставим выражения для производных в уравнение

$$C_1'\frac{1}{x} + C_1\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_2' + \frac{1}{x(1-\ln x)}\left(C_1\frac{1}{x} + C_2\right) -$$

$$-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}(C_1(x)\ln x + C_2(x)x) = \frac{1-\ln x}{x^3},$$

$$C_1\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2(1-\ln x)} - \frac{\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)}\right) + C_2\left(\frac{1}{x(1-\ln x)} - \frac{x}{x^2(1-\ln x)}\right) +$$

$$+C_1'\frac{1}{x} + C_2' = \frac{1-\ln x}{x^3}, \qquad C_1'\frac{1}{x} + C_2' = \frac{1-\ln x}{x^3}.$$

Для неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ получили систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} C_1'\ln x + C_2'x = 0, \\ C_1'\dfrac{1}{x} + C_2' = \dfrac{1-\ln x}{x^3}. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{x^2}, \\ C_2' = -\dfrac{\ln x}{x^3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx, \\ C_2 = -\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{x}, \\ C_2 = \dfrac{\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{4x^2}. \end{cases}$$

И тогда частным решением исходного уравнения второго порядка является функция $y*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$:

$$y*(x) = \frac{1-2\ln x}{4x}.$$

3.17. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0. \qquad (3.25)$$

Коэффициенты $a_{n-1},...,a_1, a_0$ – постоянные действительные числа. Найдем решение уравнения в виде $y(x)=e^{\lambda x}$.

Продифференцируем и подставим функцию $y(x)=e^{\lambda x}$ в уравнение (3.25),

$y(x)=e^{\lambda x},\ y'(x)=\lambda e^{\lambda x},\ y''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x},...,\ y^{(n)}(x)=\lambda^n e^{\lambda x},$

$\lambda^n e^{\lambda x}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+...+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0 e^{\lambda x}=0,$

$e^{\lambda x}(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0)=0.$

Поскольку $e^{\lambda x}\neq 0$ функция $y(x)=e^{\lambda x}$ будет решением линейного однородного уравнения тогда и только тогда, когда

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0. \qquad (3.26)$$

Уравнение (3.26) называется **характеристическим уравнением** линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (3.25).

Многочлен n-й степени $P_n(x)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0$ называется **характеристическим многочленом** уравнения.

Справедливо следующее утверждение (**теорема Эйлера**).

Для того чтобы функция $y(x)=e^{\lambda_0 x}$ была решением уравнения (3.25) необходимо и достаточно, чтобы число λ_0 было корнем характеристического уравнения (3.26).

Из теоремы Эйлера следует следующее утверждение.

Если числа $\lambda_1\neq\lambda_2\neq...\neq\lambda_n$ − различные действительные корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то функции $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},...,e^{\lambda_n x}$ образуют фундаментальную систему решений этого уравнения и общее решение уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+...+C_ne^{\lambda_n x}.$$

Корни характеристического уравнения (3.26) могут быть как **действительными**, так и **комплексными** числами, могут быть **простыми** и **кратными**.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если числа $\lambda_1\neq\lambda_2\neq...\neq\lambda_n$ − различные действительные корни характеристического уравнения, то функции $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},...,e^{\lambda_n x}$ образуют **фундаментальную систему решений** уравнения;

2. Если $\lambda=\lambda_0$ − действительный корень характеристического уравнения кратности r, то r функций

$e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$, $x^2 e^{\lambda_0 x}, ..., x^{r-1}e^{\lambda_0 x}$ − **линейно независимые решения** уравнения;

3. Если $\lambda=\lambda_0=\alpha\pm\beta i$ − комплексно сопряженная пара корней характеристического уравнения, то функции $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ − **линейно независимые решения** уравнения;

4. Если $\lambda=\lambda_0=\alpha\pm\beta i$ − комплексно сопряженная пара корней характеристического уравнения кратности r , то $2r$ функций

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\quad e^{\alpha x}\sin(\beta x),\quad xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\quad xe^{\alpha x}\sin(\beta x),...$$

$$..., x^{r-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\quad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

− **линейно независимые решения** уравнения.

Пример № 3.14. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y''+y'-2y=0.$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-2=0$ имеет два различных действительных корня $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=1.$

Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции $e^{\lambda_1 x}=e^{-2x}$ и $e^{\lambda_2 x}=e^{x}.$

Общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}.$

Пример № 3.15. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y''-2y'=0.$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda=0$ имеет два различных действительных корня: $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=2.$

Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции $e^{\lambda_1 x}=1$ и $e^{\lambda_2 x}=e^{2x}.$

Общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1+C_2e^{2x}.$

Пример № 3.16. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y^{(IV)}-2y'''-9y''+2y'+8=0.$

Его характеристическое уравнение $\lambda^4-2\lambda^3-9\lambda^2+2\lambda+8=0$ имеет 4 различных действительных корня: $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-2,\quad \lambda_4=3.$

Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции $e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad e^{\lambda_2 x} = e^{-x}, \quad e^{\lambda_3 x} = e^{-2x}, \quad e^{\lambda_4 x} = e^{3x}.$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{3x}.$$

Пример № 3.17. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение, имеющее два комплексно-сопряжённых корня: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i.$

Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции

$$e^{2x} \cdot \cos 2x, \quad e^{2x} \cdot \sin 2x.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x.$

Пример № 3.18. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y^{(IV)} - y = 0.$

Его характеристическое уравнение $\lambda^4 - \lambda = 0$ имеет 2 действительных и два комплексных корня: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i.$

Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции: $e^x, \; e^{-x}, \; \cos x, \quad \sin x.$ Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

Пример № 3.19. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y^{(V)} - 6y^{(IV)} + 9y''' = 0.$

Его характеристическое уравнение $\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$ имеет 5 действительных корней: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 3.$ Фундаментальную систему решений этого уравнения образуют функции: $1, \quad x, \quad x^2, \quad e^{3x}, \quad xe^{3x}.$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x}.$$

3.18. Метод подбора построения частного решения Неоднородного уравнения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x). \tag{3.27}$$

Коэффициенты $a_{n-1},...,a_1, a_0$ – постоянные действительные числа, $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ правая часть.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y*(x), \qquad (3.28)$$

где $C_1, C_2,...,C_n$ – произвольные постоянные, $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ – **фундаментальная система решений** однородного уравнения, $y*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение $y*(x)$ можно найти **методом подбора**, если правая часть уравнения (3.27) − **квазимногочлен** − функция вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(M_m(x)\cos(\beta x) + N_n(x)\sin(\beta x)). \qquad (3.29)$$

Здесь $M_m(x)$ − многочлен степени m, $N_n(x)$ − многочлен степени n, α и β − действительные числа.

Метод подбора вычисления частного решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части состоит в том, что частное решение уравнения отыскивают в виде

$$y*(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_k(x)\sin(\beta x))x^r, \qquad (3.30)$$

где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ – многочлены степени $k = \max(n,m)$ с неизвестными коэффициентами,

$P_k(x) = p_k x^k + p_{k-1}x^{k-1} + ... + p_1 x + p_0$, $Q_k(x) = q_k x^k + q_{k-1}x^{k-1} + ... + q_1 x + q_0$.

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты многочленов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, подставляем (3.30) в уравнение и приравниваем в правой и левой части полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x),..., x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{gathered} \qquad (3.31)$$

Полученная таким образом система $2k+2$ уравнений относительно $2k+2$ неизвестных имеет единственное решение.

Метод подбора применяется к ограниченному, но достаточно широкому классу правых частей, поскольку квазимногочленами являются функции вида

$$M_k(x),\quad M_k(x)e^{\alpha x},\quad M_k(x)\cos(\beta x),\quad M_k(x)\sin(\beta x),$$
$$e^{\alpha x}(M_m(x)\cos(\beta x)+N_n(x)\sin(\beta x)).$$

Метод подбора вычисления частного решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части состоит в следующем. Рассмотрим правую часть уравнения и записываем число $\alpha+\beta i$. Затем составим характеристическое уравнение однородного уравнения и найдем его корни. Возможны два случая: среди корней характеристического многочлена нет корня, равного числу $\alpha+\beta i$ (**нерезонансный случай**) и среди корней характеристического многочлена есть r корней, равных числу $\alpha+\beta i$ (**резонансный случай**).

Рассмотрим **нерезонансный случай** (среди корней характеристического многочлена нет корня, равного числу $\alpha+\beta i$). Тогда частное решение уравнения найдем в виде

$$y*(x)=e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x)+Q_k(x)\sin(\beta x)),$$

где $P_k(x)$ и $Q_k(x)-$ многочлены степени $k=\max(n,m)$ с неизвестными коэффициентами,

$$P_k(x)=p_kx^k+p_{k-1}x^{k-1}+...+p_1x+p_0,\ Q_k(x)=q_kx^k+q_{k-1}x^{k-1}+...+q_1x+q_0.$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты многочленов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, подставим $y*(x)=e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x)+Q_k(x)\sin(\beta x))$ в уравнение и приравняем коэффициенты при функциях (3.31). Доказано, что полученная таким образом система $2k+2$ уравнений относительно $2k+2$ неизвестных имеет единственное решение.

Рассмотрим **резонансный случай** (среди корней характеристического многочлена есть r корней, равных числу $\alpha+\beta i$). Тогда частное решение уравнения будем искать в виде (3.30). Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты многочленов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, подставляем (3.30) в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях (3.31).

Пример № 3.20. **Уравнением колебаний** называют линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''+\omega_0^2y=F\cos\omega x.$$

Однородное уравнение $y''+\omega_0^2y=0$ описывает свободные колебания материальной точки с частотой ω_0^2. **Неоднородное уравнение** − колебания материальной точки под действием внешней периодической силы $F\cos\omega x$, частота которой равна ω.

Найдём общее решение уравнения колебаний в случае, когда частота свободных колебаний не совпадает с частотой внешней вынуждающей силы.

Характеристическое уравнение однородного уравнения $\lambda^2+\omega_0^2=0$ имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$.

Фундаментальную систему решений однородного уравнения образуют функции $\cos\omega_0 x$, $\sin\omega_0 x$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x,C_1,C_2)=C_1\cos\omega_0 x+C_2\sin\omega_0 x.$$

Правая часть уравнения − имеет вид $e^{\alpha x}(M_m(x)\cos(\beta x)+$ $+N_n(x)\sin(\beta x))=F\cos\omega x$, у которого $\alpha=0$, $\beta=\omega$, $M_m(x)=M_0=F$, $N_n(x)=0$, $\alpha+\beta i=i\omega$.

Поскольку $\omega\neq\omega_0$, среди корней характеристического уравнения нет корня, равного корню характеристического уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения $y*(x)$ в виде

$$y*(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x.$$

Продифференцируем дважды частное решение и подставим в уравнение: $y'=-A\omega\sin\omega x+B\omega\cos\omega x$, $y''=-A\omega^2\sin\omega x-B\omega^2\sin\omega x$,

$$y''+\omega_0^2 y=-A\omega^2\sin\omega x-B\omega^2\sin\omega x+\omega_0^2(A\cos\omega x+B\omega sin\omega x)=$$

$$=A(-\omega^2+\omega_0^2)\cos\omega x+B(-\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega x=F\cos\omega x.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой части уравнения

$$A(-\omega^2+\omega_0^2)\cos\omega x+B(-\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega x=F\cos\omega x,$$

получим систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l|l} \cos\omega x & \\ \sin\omega x & \end{array}\begin{cases} A(-\omega^2+\omega_0^2)=F, \\ B(-\omega^2+\omega_0^2)=0, \end{cases}$$

решение которой $B=0$, $A=F\big/(-\omega^2+\omega_0^2)$, и тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y*(x)=\frac{F}{(-\omega^2+\omega_0^2)}\cos\omega x.$$

Теперь можно записать общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x)=C_1\sin\omega_0 x+C_2\cos\omega_0 x+\frac{F}{(-\omega^2+\omega_0^2)}\cos\omega x.$$

3.19. Уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера называется однородное дифференциальное уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 x y = 0. \qquad (3.32)$$

Коэффициенты $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ − постоянные действительные числа.

Если функция $y(x)$− решение уравнения Эйлера, то функция $Cy(x)$ тоже является решением уравнения.

Уравнение Эйлера заменой $x = e^t$ сводится к однородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Выполним замену $x = e^t$, перейдём к новой переменной $t = \ln x$:

$$x = e^t, \quad t = \ln x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t} \Rightarrow \quad y(x) = y(e^t) = g(t),$$

$$xy' = x\frac{dy}{dx} = x\frac{dg}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = x\frac{dg}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \frac{dg}{dt},$$

$$x^2 y'' = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dt} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^2 \left(\frac{d^2 g}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dg}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \frac{d^2 g}{dt^2} - \frac{dg}{dt},$$

…

$$x^k y^{(k)} = x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \frac{d^k g}{dt^k} + \alpha_{k,k-1} \frac{d^{k-1} g}{dt^{k-1}} + ... + \alpha_{k,1} \frac{dg}{dt},$$

$$x^n y^{(n)} = x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n g}{dt^n} + \alpha_{n,n-1} \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + ... + \alpha_{n,1} \frac{dg}{dt}.$$

Здесь α_{ij} − коэффициенты, которые легко вычисляются при последовательном дифференцировании.

После подстановки в уравнение имеем

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \tilde{\alpha}_{n,n-1} \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + ... + \tilde{\alpha}_{n,1} \frac{dg}{dt} + \tilde{\alpha}_0 g = 0.$$

Решим это однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами − его общее решение $g = g(t, C_1, C_2, ...C_n)$. Вернувшись к переменной x, получим общее решение уравнения Эйлера (3.32):

$$y(x, C_1, C_2, ...C_n) = g(\ln x, C_1, C_2, ...C_n).$$

Пример № 3.21. Найдём общее решение уравнения Эйлера

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Выполним замену $x = e^t$, перейдём к новой переменной $t = \ln x$:

$$x = e^t, \quad t = \ln x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t} \Rightarrow \quad y(x) = y(e^t) = g(t),$$

$$xy' = x\frac{dy}{dx} = x\frac{dg}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = x\frac{dg}{dt}\cdot\frac{1}{x} = \frac{dg}{dt},$$

$$x^2y'' = x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right) = x^2\left(\frac{d^2g}{dt^2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{dg}{dt}\cdot\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d^2g}{dt^2} - \frac{dg}{dt}.$$

После подстановки в уравнение имеем: $g'' + 2g' + g = 0.$ Составим и решим характеристическое уравнение

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения образуют функции e^{-t} и te^{-t}, а общее решение $g = g(t, C_1, C_2) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$.

Вернувшись к переменной x, $t = \ln x$, получим общее решение уравнения Эйлера:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1e^{-\ln x} + C_2\ln x e^{-\ln x},$$

$$y(x, C_1, C_2) = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}\ln x = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}.$$

Задачи и упражнения

3.1. Решить уравнения, допускающие понижения порядка:

$$1)\, y^{IV} = \sin 2x; \quad 2)\, y''' = e^{4x+1}; \quad 3)\, y'' - \frac{y'}{x} = 0; \quad 4)\, y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0.$$

3.2. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:

$$1)\, y'' - 5y' + 6y = 0; \qquad 2)\, y'' - 6y' + 25y = 0;$$
$$3)\, y'' - 9y' = 0; \qquad 4)\, y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

3.3. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

$$1)\, y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x; \qquad 2)\, y'' - 2y' + y = 2;$$
$$3)\, y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x; \qquad 4)\, y'' - 3y' = x^2 - 2x + 4.$$

4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные понятия

Рассмотрим **систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка**

$$Y' = F(x,Y) \text{ или } \frac{dY}{dx} = F(x,Y), \text{ где} \tag{4.1}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Задачей Коши для этой системы называется следующая задача: найти такое решение $Y = Y(x)$ системы (4.1), что $Y(x_0) = Y_0$, где Y_0 − некоторый постоянный вектор.

Вектор-функция $Y = Y(x,C)$, зависящая от произвольного вектора C, называется **общим решением системы (4.1)**, если:

− при любом векторе C вектор-функция $Y(x,C)$ является решением системы;

− какова бы ни была начальная точка (x_0, Y_0), существует такой вектор $C^{(0)}$, что $Y\left(x^{(0)}, C^{(0)}\right) = Y_0$.

Пример № 4.1. Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка относительно двух неизвестных функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$\begin{cases} x'' + y' + x = 0, \\ x' + y'' = 0. \end{cases}$$

Запишем эту систему в канонической форме: $\begin{cases} x'' = -y' - x, \\ y'' = -x'. \end{cases}$

Обозначив $x(t) = z_1(t)$, $y(t) = z_2(t)$, $x'(t) = z_3(t)$, $y'(t) = z_4(t)$, можно записать систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_3, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = z_4, \\ \dfrac{dz_3}{dt} = -z_4 - z_1, \\ \dfrac{dz_4}{dt} = -z_3. \end{cases}$$

И, безусловно, удобнее всего записывать систему в векторной форме:

$Z' = F(t, Z)$, где

$$Z = Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}, \ Z' = Z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix}, \ F(t, Z) = \begin{pmatrix} z_3(t) \\ z_4(t) \\ -z_4(t) - z_1(t) \\ -z_3(t) \end{pmatrix}.$$

4.2. Фазовое пространство. Фазовые траектории

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка (4.1), и пусть вектор-функция $Y = \Phi(x)$ − решение системы, определённое на промежутке $[a, b]$.

Множество точек $\Phi(x)$, $x \in [a; b]$ есть кривая в пространстве R_{Y^n}. Эту кривую называют **фазовой траекторией системы** (или просто **траекторией**, или **фазовой кривой**), а пространство R_{Y^n}, в котором расположены фазовые траектории, называют **фазовым пространством системы**.

Интегральная кривая системы определяется уравнением $Y = \Phi(x)$, $x \in [a, b]$ и изображается в $(n+1)$ − мерном пространстве $R_{Y, x^{n+1}}$.

Фазовая траектория − это проекция интегральной кривой на пространство R_{Y^n}.

На рис. 4.1, а изображена интегральная кривая в пространстве $R_{Y,x^{2+1}}$ и фазовая траектория в пространстве R_{Y^2} изображена на рис. 4.1, б:

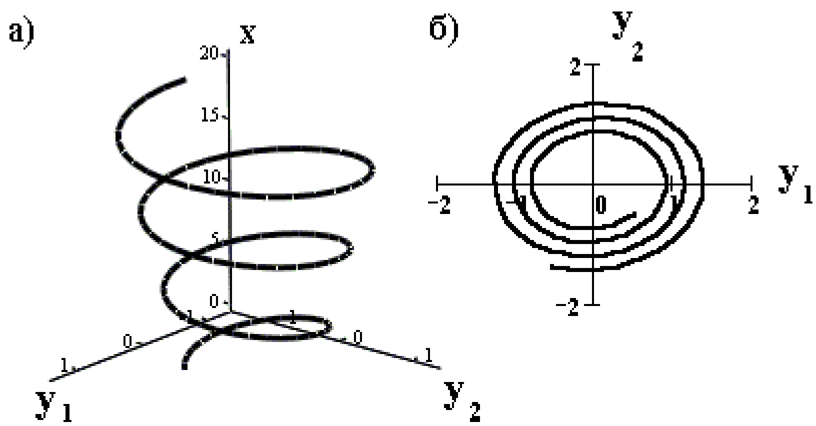


Рис. 4.1. а) − интегральная кривая; б) − фазовая траектория системы

Пример № 4.2. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, записанную в нормальной и в векторной форме:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 4y_2, \\ y_2' = -3y_1 - 3y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1, \end{cases} \quad Y = \begin{pmatrix} 3y_1 + 4y_2 \\ -3y_1 - 3y_2 \end{pmatrix}; \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение этой задачи можно также записать в обычной аналитической и в векторной форме:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + \cos\sqrt{3}x, \\ y_2(x) = -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x, \end{cases} \quad Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + \cos\sqrt{3}x \\ -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.2, а приведено изображение соответствующей интегральной кривой, расположенной в пространстве $R_{Y,x^{2+1}}$, а на рис. 4.2, б − фазовая траектория, расположенная в пространстве R_{Y^2}.

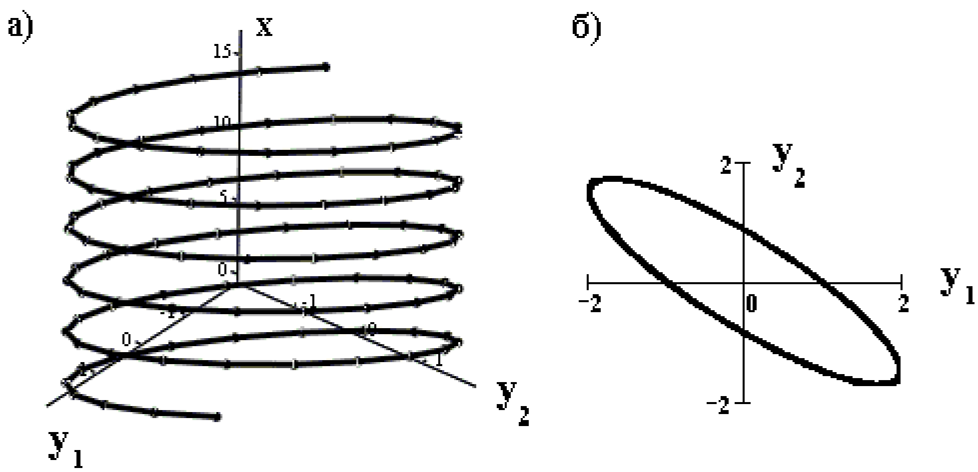


Рис. 4.2. а) − интегральная кривая; б) − фазовая траектория для системы из примера 4.2

4.3. Существование и единственность решения задачи Коши

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений *n*-го порядка (4.1).

Пусть задана **задача Коши** для этой системы

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y), \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где Y_0 − некоторый постоянный вектор.

Справедлива следующая **теорема о существовании и единственности решения задачи Коши**.

Теорема 4.1. Пусть в области D из R^{n+1} непрерывны все компоненты вектора правой части $F(x,Y)$ и их частные производные по Y:

$$F(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{pmatrix}, \ \frac{\partial f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда, какова бы ни была начальная точка $(x_0, Y_0) \equiv (x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \in D$, существует такой отрезок $[x_0 - h; x_0 + h]$, что задача Коши (4.2) имеет единственное решение.

Важно понимать, что эта теорема имеет локальный характер: существование решения $Y = Y(x)$ гарантируется лишь в достаточно малой окрестности точки x_0 ($h > 0$ может оказаться достаточно малым).

Важно также понимать, что теорема содержит только достаточные условия существования и единственности решения − при нарушении условий теоремы задача Коши может иметь или не иметь решений, может иметь несколько решений.

Пример № 4.3. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \sqrt{y_1}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что задача имеет два решения:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{где } y_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Нарушение единственности объясняется тем, что нарушены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Действительно,

$$\frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_1} = \frac{\partial \sqrt{y_1}}{\partial y_1} = \frac{1}{2\sqrt{y_1}}.$$

Частная производная функции $f_1(x, y_1, y_2)$ по y_1 разрывна в начальной точке $(0,0,0)$.

4.4. Интегрирование систем дифференциальных уравнений методом исключения

Системы дифференциальных уравнений n-го порядка можно решать сведением к уравнению *n*-го порядка. Такой метод решения систем называется **методом исключения**.

Рассмотрим, например, нормальную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

Исключим функцию y_2. Для этого сначала выразим y_2 через x и y_1 из первого уравнения системы, затем продифференцируем по x первое уравнение системы, заменяя y_2 полученным для него выражением, а производную y_2 – правой частью второго уравнения системы.

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \Rightarrow y_2(x) = F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right).$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(f_1(x, y_1, y_2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1(x, y_1, y_2)\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(f_1(x, y_1, y_2)\right)\frac{dy_1}{dx} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(f_1(x, y_1, y_2)\right)\frac{dy_2}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(f_1\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right)\right) f_1(x, y_1, y_2) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(f_2\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right)\right) f_2\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right).$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1(x, y_1, F(x, y_1, y_1'))\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(f_1(x, y_1, F(x, y_1, y_1'))\right) f_1(x, y_1, y_2) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(f_2(x, y_1, F(x, y_1, y_1'))\right) f_2(x, y_1, F(x, y_1, y_1')).$$

Таким же образом решают методом исключения произвольные системы n-го порядка: дифференцируют уравнения системы и, последовательно исключая функции $y_2, \ldots, y_n$ и их производные, сводят систему к одному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно y_1.

Пример № 4.4. Рассмотрим, например, нормальную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + 1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 1. \end{cases}$$

Исключим искомую функцию y_2. Для этого сначала найдём y_2 из первого уравнения системы, а затем продифференцируем первое уравнение системы, исключив из него y_2 (для выражения производной используем второе уравнение системы):

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = \frac{dy_1}{dx} - 1,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y_2 + 1) = \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 1.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = y_1 + 1.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами $y_1'' - y_1 = 1$ нетрудно решить методом Эйлера (методом подбора). Его решение: $y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1$. Теперь легко найти y_2: $y_2(x) = y_1' - 1 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1$.

Так методом исключения получено решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1, \\ y_2(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1. \end{cases}$$

Проверить правильность решения можно устно.

4.5. Линейные системы ОДУ. Основные понятия

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (4.3), где $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ − известные, а $y_j(x)$ − неизвестные функции, $i = (1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называется **линейной системой дифференциальных уравнений**.

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\
\dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\
\ldots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x).
\end{cases} \tag{4.3}
$$

При описании линейных систем дифференциальных уравнений удобнее пользоваться векторной (матричной) формой записи. Обозначим

$$
Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},\ Y' = \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix},\ A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \ldots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.
$$

Тогда линейная система дифференциальных уравнений в векторной (матричной) форме записывается в виде

$$
Y' = A(x)Y + b(x) \text{ или } \frac{dY}{dx} = A(x)Y + b(x). \tag{4.4}
$$

Матрица A называется **матрицей системы**, а вектор-функция $b(x)$ − неоднородностью системы.

Система (4.4) называется **неоднородной линейной системой дифференциальных уравнений**, а система $Y' = A(x)Y$ − **однородной линейной системой**.

Теорема 4.2. (существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений). Если $A(x)$ и $b(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то какова бы ни была начальная точка (x_0, Y_0) из R^{n+1}, задача Коши $Y' = A(x)Y + b(x)$, $Y(x_0) = Y_0$ имеет единственное на $[a,b]$ решение $Y = Y(x)$.

Важно отметить, что для линейной системы дифференциальных уравнений разрешимость задачи Коши глобальная: решение существует всюду, где непрерывны коэффициенты и неоднородность системы.

Нетрудно показать, что для решений линейных систем дифференциальных уравнений $Y'=A(x)Y+b(x)$ и $Y'=A(x)Y$ справедливо:

1) если $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ – два решения однородной системы, то при произвольных значениях постоянных C_1 и C_2 функция $Y=C_1Y^{(1)}+C_2Y^{(2)}$ является решением этой системы;

2) если $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ – два решения неоднородной системы, то функция $Y=Y^{(1)}+Y^{(2)}$ является решением однородной системы;

3) однородная система дифференциальных уравнений $Y'=A(x)Y$ имеет тривиальное (нулевое) решение $Y\equiv 0$. Это тривиальное решение называют точкой покоя системы или положением равновесия системы.

При изучении систем линейных дифференциальных уравнений важную роль играют свойства линейной зависимости и линейной независимости решений и связанный с этими свойствами определитель Вронского.

Пример № 4.5. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=y_1, \end{cases}$$

которую удобнее записать в векторной форме:

$$Y'=A\cdot Y,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ Y'=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Решение этой простой системы нетрудно найти, например, **методом исключения**:

$$Y(x,C_1,C_2)=\begin{pmatrix} C_1e^{-x}+C_2e^{x} \\ -C_1e^{-x}+C_2e^{x} \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём решения $Y^{(1)}(x)$ и $Y^{(2)}(x)$ двух задач Коши для этой системы:

$$Y'=A\cdot Y,\quad Y^{(1)}(0)=Y_0,\ Y_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ и } Y^{(2)}(0)=Y_1,\ Y_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Y^{(1)}(x)=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \end{pmatrix},\quad Y^{(2)}(x)=\begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Пример № 4.6. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1. \end{cases}$$

В векторной форме эта система имеет вид

$$Y' = A \cdot Y, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Решение этой простой системы нетрудно найти, например, **методом исключения**:

$$Y(x, C_1, C_2) = \begin{pmatrix} C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ -C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём решения $Y^{(1)}(x)$ и $Y^{(2)}(x)$ двух задач Коши для этой системы:

$$Y' = A \cdot Y, \quad Y^{(1)}(0) = Y_0, \; Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ и } Y^{(2)}(0) = Y_1, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad Y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Эти решения **линейно независимы** всюду, так как их определитель Вронского нигде не обращается в нуль:

$$W\left[x, Y^{(1)}, Y^{(2)}\right] = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

4.6. Фундаментальная матрица решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\
\dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\
\ldots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n.
\end{cases} \tag{4.5}
$$

Система (4.5) в **векторной форме** записывается в виде

$$
\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \tag{4.6}
$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\quad Y' = \dfrac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}$, $\quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$.

Матрица Φ, столбцами которой являются n линейно независимых на $[a,b]$ решений $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ однородной линейной системы (4.6) называется фундаментальной матрицей решений системы:

$$
\Phi(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}. \tag{4.7}
$$

Фундаментальная матрица решений (4.7) однородной линейной системы (4.6) удовлетворяет матричному уравнению $\Phi' = A(x)\Phi$.

Здесь

$$\Phi'(x)=\begin{vmatrix} y_{11}'(x) & y_{12}'(x) & \dots & y_{1n}'(x) \\ y_{21}'(x) & y_{22}'(x) & \dots & y_{2n}'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}'(x) & y_{n2}'(x) & \dots & y_{nn}'(x) \end{vmatrix}.$$

Напомним, что определитель Вронского линейно независимых на отрезке $[a,b]$ решений $Y_1(x),Y_2(x),\dots,Y_n(x)$ отличен от нуля на этом отрезке $[a,b]$.

У любой однородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений существует фундаментальная матрица решений.

Действительно. Пусть Φ_0 – произвольная числовая квадратная матрица с отличным от нуля определителем $(\det(\Phi_0)\neq 0)$. Рассмотрим n решений $Y_1(x),Y_2(x),\dots,Y_n(x)$ задач Коши вида $Y'=A(x)Y$, $Y(x_0)=\Phi_0(j)$, где $\Phi_0(j)$ – j-й столбец матрицы Φ, $j=1,2,\dots,n$. Эти решения линейно независимы, т.к. их определитель Вронского отличен от нуля, $W[x_0;Y_1,Y_2,\dots,Y_n]=\det(\Phi_0)\neq 0$.

Матрица $\Phi(x)$, столбцами которой являются решения $Y_1(x),Y_2(x),\dots,Y_n(x)$, – искомая фундаментальная матрица решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений.

Пример № 4.7. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка из примера 4.6: $\begin{cases} y_1'=-y_2, \\ y_2'=y_1. \end{cases}$

Фундаментальная матрица решений системы имеет вид:

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что фундаментальная матрица решений удовлетворяет матричному уравнению $\Phi'=A\cdot\Phi$:

$$\Phi'(x)=\begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix},$$

$$A\cdot\Phi(x)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix},$$

$$\Phi'=A\cdot\Phi(x).$$

Пример № 4.8. Построим фундаментальную матрицу решений и общее решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1. \end{cases}$$

В векторной форме система примет вид:

$$Y' = A\cdot Y, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad Y'=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Найдём **собственные значения и собственные векторы** матрицы системы:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2-1=0, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=-1;$$

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная матрица системы:

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} e_{11}\cdot e^{\lambda_1 x} & e_{12}\cdot e^{\lambda_2 x} & \dots & e_{1n}\cdot e^{\lambda_n x} \\ e_{21}\cdot e^{\lambda_1 x} & e_{22}\cdot e^{\lambda_2 x} & \dots & e_{2n}\cdot e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1}\cdot e^{\lambda_1 x} & e_{n2}\cdot e^{\lambda_2 x} & \dots & e_{nn}\cdot e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_{11}\cdot e^{\lambda_1 x} & e_{12}\cdot e^{\lambda_2 x} \\ e_{21}\cdot e^{\lambda_1 x} & e_{22}\cdot e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Легко также записать общее решение системы:

$$Y(x,C_1,C_2)=C_1e_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2e_2\cdot e^{\lambda_2 x}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x}=\begin{pmatrix} C_1e^{-x}+C_2e^{-x} \\ C_1e^{x}-C_2e^{-x} \end{pmatrix},$$

$$Y(x,C_1,C_2)=\begin{pmatrix} C_1e^{-x}+C_2e^{-x} \\ C_1e^{x}-C_2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Правильность решения легко проверить подстановкой в исходную систему.

4.7. Структура общего решения однородной линейной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка (4.6). Справедлива следующая теорема **о структуре общего решения** этой системы.

Теорема 4.3. Если матрица $A(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то общее решение системы (4.6) имеет вид

$$Y(x)=\Phi(x)C\equiv C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\ldots+C_nY_n(x), \tag{4.8}$$

где $\Phi(x)$ − фундаментальная матрица решений однородной линейной системы, $Y_1(x),Y_2(x),\ldots,Y_n(x)$ − столбцы этой фундаментальной матрицы решений, C − произвольный постоянный вектор-столбец.

Пример № 4.9. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка из примера 4.8. Фундаментальная матрица решений этой системы имеет вид

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}.$$

Поскольку фундаментальная матрица системы известна, то, опираясь на теорему 4.3 о структуре общего решения линейной системы ОДУ, можно записать общее решение системы:

$$Y(x,C_1,C_2)=C_1\Phi^{(1)}+C_2\Phi^{(2)}=C_1\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x\\ \operatorname{sh}x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix},$$

$$Y(x,C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix}.$$

Проверим:

$$Y(x,C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix},\ Y'(x,C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\\ C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\end{pmatrix},$$

$$A\cdot Y'(x,C_1,C_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\\ C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\end{pmatrix}\equiv Y'(x,C_1,C_2).$$

Действительно, построенное нами общее решение удовлетворят системе $Y' = A \cdot Y$ при всех произвольных значениях входящих в выражение общего решения констант.

4.8. Структура общего решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим неоднородную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка (4.4):

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y + b(x).$$

Справедлива следующая теорема **о структуре общего решения** этой неоднородной линейной системы ОДУ.

Теорема 4.4. Если матрица $A(x)$ и вектор-функция $b(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и $\Phi(x)$ − фундаментальная матрица решений однородной линейной системы (4.6), то общее решение неоднородной системы (4.4) имеет вид

$$Y(x) = \Phi(x)C + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)b(t)dt,$$

где C − произвольный постоянный вектор-столбец, x_0 − произвольная фиксированная точка из отрезка $[a,b]$.

Из приведенной формулы легко получить формулу решения задачи Коши для линейной неоднородной системы ОДУ − **формулу Коши**. Решением задачи Коши $Y' = A(x)Y + b(x)$, $Y(x_0) = Y_0$ является вектор-функция

$$Y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)Y_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)b(t)dt. \tag{4.9}$$

Пример № 4.10. Рассмотрим линейную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка из примера 4.4

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + 1, \\ y_2' = y_1 + 1. \end{cases}$$

В векторной форме она запишется так : $\dfrac{dY}{dx} = A(x)Y + b(x)$, где

$$A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad b(x)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы $Y'=A(x)Y$ имеет вид

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}.$$

Найдём общее решение неоднородной системы, опираясь на утверждение теоремы 4.4 о структуре общего решения для таких систем:

$$Y(x)=\Phi(x)C+\Phi(x)\int\limits_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)b(t)dt=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t & \operatorname{sh}t\\ \operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t & -\operatorname{sh}t\\ -\operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\int\limits_0^x\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t\\ -\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t\end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}x\\ -\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\\ \operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\end{pmatrix}.$$

Итак, получено выражение для общего решения заданной неоднородной системы:

$$Y(x)=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\end{pmatrix}.$$

Проверим: $Y'=A(x)Y+b(x)$,

$$A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ b(x)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ Y(x)=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\end{pmatrix};$$

$$Y'(x)=\begin{pmatrix}\left(C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\right)'\\ \left(C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\right)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x\\ C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x\end{pmatrix};$$

$$A(x)Y+b(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\\ C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x\\ C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x\end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow\qquad Y'(x)\equiv A(x)Y(x)+b(x).$$

Пример № 4.11. Найдём решение задачи Коши для линейной неоднородной системы из примера 4.10:

$$\begin{cases}y_1'=y_2+1,\\ y_2'=y_1+1,\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1(1)=-1,\\ y_2(1)=0.\end{cases}$$

Найдём общее решение неоднородной системы, опираясь на формулу Коши (4.9):

$$Y(x)=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)Y_0+\Phi(x)\int\limits_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)b(t)\,dt=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x&\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x&\operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\operatorname{ch}1&\operatorname{sh}1\\ \operatorname{sh}1&\operatorname{ch}1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x&\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x&\operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\int\limits_1^x\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t&\operatorname{sh}t\\ \operatorname{sh}t&\operatorname{ch}t\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x&\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x&\operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\operatorname{ch}1&-\operatorname{sh}1\\ -\operatorname{sh}1&\operatorname{ch}1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x&\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x&\operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\int\limits_1^x\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t\\ -\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t\end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x&\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x&\operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\operatorname{ch}1\\ \operatorname{sh}1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x&\operatorname{sh}x\\ \operatorname{sh}x&\operatorname{ch}x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1\\ -\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}1\\ -\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}1+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}1\\ -1-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}1+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}1-\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\operatorname{ch}(x-1)\\-\operatorname{sh}(x-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1+\operatorname{sh}(x-1)+\operatorname{ch}(x-1)\\-1+\operatorname{sh}(x-1)+\operatorname{ch}(x-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-1)-1\\\operatorname{ch}(x-1)-1\end{pmatrix}.$$

Итак, получено выражение для общего решения заданной неоднородной системы:

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-1)-1\\\operatorname{ch}(x-1)-1\end{pmatrix}.$$

Проверим: $A(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad b(x)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad Y(x)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-1)-1\\\operatorname{ch}(x-1)-1\end{pmatrix},\quad Y_0=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix};$

$$Y'(x)=\begin{pmatrix}(\operatorname{sh}(x-1)-1)'\\(\operatorname{ch}(x-1)-1)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(x-1)\\\operatorname{sh}(x-1)\end{pmatrix};$$

$$A(x)Y+b(x)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-1)-1\\\operatorname{ch}(x-1)-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(x-1)\\\operatorname{sh}(x-1)\end{pmatrix};$$

$$Y(1)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(1-1)-1\\\operatorname{ch}(1-1)-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(0)-1\\\operatorname{ch}(0)-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow\quad Y'\equiv A(x)Y(x)+b(x),\ Y(1)=Y_0.$$

4.9. Построение фундаментальной матрицы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами вида (4.6).

Теорема 4.5. (о фундаментальной матрице решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (метод Эйлера)). Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\ldots\neq\lambda_n$ и пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ − соответствующие собственные векторы

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда фундаментальная матрица решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами (4.6) имеет вид

$$\Phi(t) = \left[e_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, e_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \ldots, e_n \cdot e^{\lambda_n t} \right].$$

Заметим, что общее решение неоднородной системы с постоянными коэффициентами в этом случае можно записать в виде:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{e_i} \cdot e^{\lambda_i t} \text{ или } Y(t) = C^T \Phi(t), \ \overline{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}. \qquad (4.11)$$

Пример № 4.12. Построим фундаментальную матрицу решений и общее решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, которая была решена в примерах 4.8, 4.9: $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1. \end{cases}$.

Общее решение системы запишется в виде:

$$Y(x, C_1, C_2) = C_1 e_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 e_2 \cdot e^{\lambda_2 x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad Y(x, C_1, C_2) = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Правильность решения легко проверить подстановкой в исходную систему.

4.10. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

Любая система дифференциальных уравнений описывает с определенной степенью точности реальный физический процесс.

Приборы, фиксирующие то или иное физическое явление, не совершенны. Может оказаться, что малая погрешность измерения начальных данных вызывает «ощутимые» изменения решений уравнений. В этой ситуации нельзя гарантировать, что выбранная математическая модель реально отражает описываемое ею физическое явление.

И, наоборот, если малые возмущения начальных условий мало изменяют решения на всем промежутке их существования, то соответствующую математическую модель следует признать удачной.

Так возникает важный для приложений вопрос, при каких условиях, математическая модель, описываемая системой дифференциальных уравнений, будет устойчивой.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad t \ge t_0, \quad x \in R^n, \quad F(t,x) \in R^n. \tag{4.12}$$

Полагаем, что выполнены условия **теоремы 4.1 существования и единственности решения задачи Коши**.

Пусть некоторое фиксированное решение $x = \varphi(t)$ этой системы существует при всех $t \ge t_0$.

Решение $x = \varphi(t)$ системы называется **устойчивым по Ляпунову** при $t \ge t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что:

− решение $x = x(t)$ задачи Коши с начальным условием $x(t_0)$, $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$, существует при всех $t \ge t_0$;

− для всех таких решений справедливо неравенство $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$, при всех $t \ge t_0$.

Геометрически это означает, что интегральные кривые $x = x(t)$, близкие в момент $t = t_0$ к интегральной кривой $x = \varphi(t)$, остаются близкими к ней и на всем промежутке $[t_0, \infty)$.

Интегральные кривые и **фазовые траектории**, отвечающие устойчивым решениям, тоже называются **устойчивыми**.

На рис. 4.3 сплошной линией изображена устойчивая фазовая траектория, некой системы дифференциальных уравнений второго порядка, которая начинается в точке (1,0), и две начинающиеся вблизи её траектории изображены пунктиром.

Решение $x = \varphi(t)$ называется **неустойчивым по Ляпунову** при $t \ge t_0$, если оно не является устойчивым по Ляпунову, т.е. если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся решения $x = x_\delta(t)$ и такое $t_1 = t_1(\delta)$, что $|x_\delta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ и $|x_\delta(t_0) - \varphi(t_0)| \ge \varepsilon$.

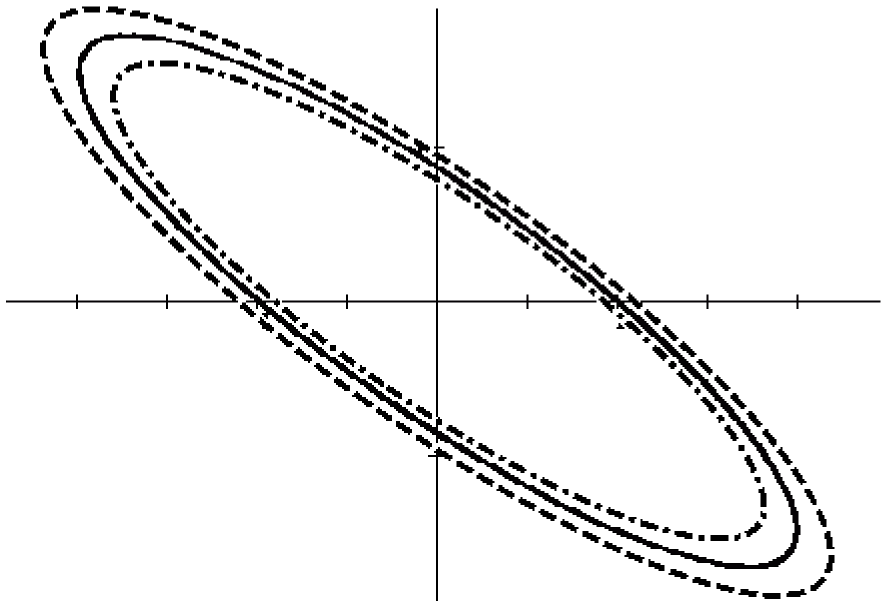


Рис. 4.3. Устойчивая фазовая траектория, начинающаяся в точке (1,0)

Геометрически это означает, что интегральные кривые $x = x(t)$, близкие в момент $t = t_0$ к интегральной кривой $x = \varphi(t)$, "удаляются" от неё при $t \to \infty$.

Интегральные кривые и **фазовые траектории**, отвечающие неустойчивым решениям, тоже называются **неустойчивыми**.

На рис. 4.4 сплошной линией изображена неустойчивая фазовая траектория, некой системы дифференциальных уравнений второго порядка, которая начинается в точке (0,2; 0), и две начинающиеся вблизи её траектории (пунктирные линии).

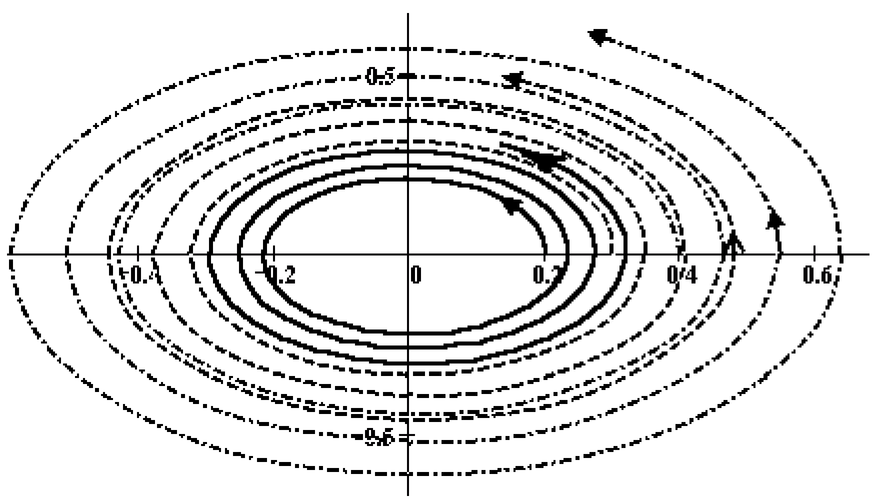


Рис.4.4. Неустойчивая фазовая траектория, начинающаяся в точке (0,2;0)

Пример № 4.13. Исследуем на устойчивость решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что решение задачи − тривиальное решение, **точка покоя** системы $\varphi(t) \equiv 0$, (т.е. $\varphi_1(t) \equiv 0$, $\varphi_2(t) \equiv 0$). Докажем, что это тривиальное решение устойчиво при t > 0.

Решение системы, проходящее через точку (0, $x_1(0)$, $x_2(0)$), имеет вид

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)\cos\, t - x_2(0)\sin\, t \\ x_1(0)\sin\, t + x_2(0)\cos\, t \end{pmatrix}.$$

Возьмём произвольное ε >0 и рассмотрим поведение при $t > 0$ тех решений $x = x(t)$, которые удовлетворяют условию $|x(0) - \varphi(0)| < \delta$, где $\delta = \varepsilon > 0$:

$$|x(0) - \varphi(0)| = \sqrt{\left(x_1(0) - \varphi_1(0)\right)^2 + \left(x_2(0) - \varphi_2(0)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} = |x(0)| < \delta$$

$$|x(t) - \varphi(t)| = \sqrt{\left(x_1(0) - 0\right)^2 + \left(x_2(0) - 0\right)^2} = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1(0)\cos t + x_2(0)\sin t\right)^2 + \left(x_1(0)\sin t + x_2(0)\cos t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} = |x(0)| < \delta = \varepsilon.$$

Последнее неравенство справедливо при всех $t > 0$. Получили, что все близкие в начальный момент к точке покоя решения остаются вблизи неё всё последующее время. То есть точка покоя − устойчивое по Ляпунову решение системы.

На рис. 4.5 изображено несколько **фазовых кривых** системы (это эллипсы). Видно, что те из них, которые начинаются вблизи нуля, всегда вблизи нуля остаются.

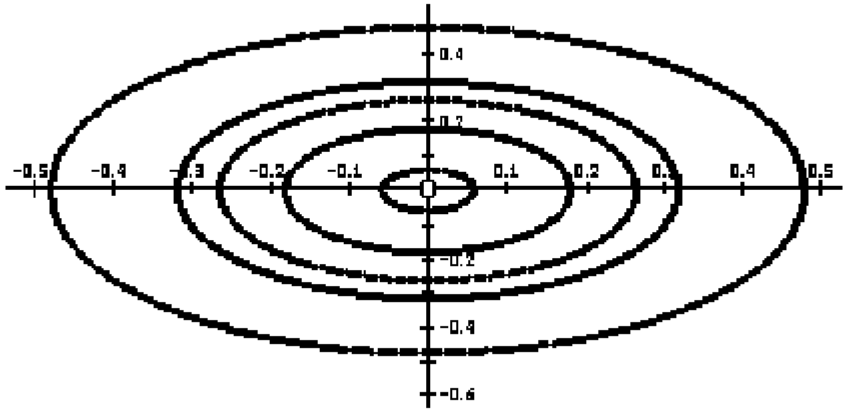


Рис. 4.5. Устойчивое по Ляпунову решение системы

Пример № 4.14. Исследуем на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0{,}1x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 0{,}1x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что это решение задачи − тривиальное решение, **точка покоя системы** $\varphi(t) = 0$, (т.е. $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_2(t) = 0$).

Докажем, что это нулевое решение не устойчиво при $t > 0$. Легко видеть, что решение системы, проходящее через точку $(0, x_1(0)\,, x_2(0))$, имеет вид

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(x_1(0)\cos 4t - x_2(0)\sin 4t\right) \cdot e^{0{,}1t} \\ \left(x_1(0)\sin 4t + x_2(0)\cos 4t\right) \cdot e^{0{,}1t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим поведение при $t > 0$ тех решений $x = x(t)$, которые удовлетворяют условию $\left|x(0) - \varphi(0)\right| < \delta$, где $\delta > 0$:

$$\left|x(0) - \varphi(0)\right| = \sqrt{\left(x_1(0) - \varphi_1(0)\right)^2 + \left(x_2(0) - \varphi_2(0)\right)^2} = \sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} = \left|x(0)\right| < \delta$$

$$\left|x(t) - \varphi(t)\right| = \sqrt{\left(x_1(0) - 0\right)^2 + \left(x_2(0) - 0\right)^2} = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1(0)\cos 4t + x_2(0)\sin 4t\right)^2 e^{0{,}2t} + \left(x_1(0)\sin 4t + x_2(0)\cos 4t\right)^2 e^{0{,}2t}} =$$

$$= e^{0{,}1t}\sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2}.$$

Выберем t достаточно большим, таким, чтобы

$$e^{0,1t} > \frac{1}{\sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2}} > \frac{1}{\delta}.$$

Отсюда следует, что как бы ни было мало $\delta > 0$, существуют $\varepsilon = 1$, и $t_1 = t_1(\delta) = -\ln(\delta)$ и такое решение $x(t)$, что при $t \geq t_1$ справедливо неравенство $|x(t) - 0| > \varepsilon$, т.е. тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$ неустойчиво.

На рис. 4.6 видно, что **фазовые кривые**, которые начинаются вблизи нуля, через некоторое время покинут любую окрестность нуля.

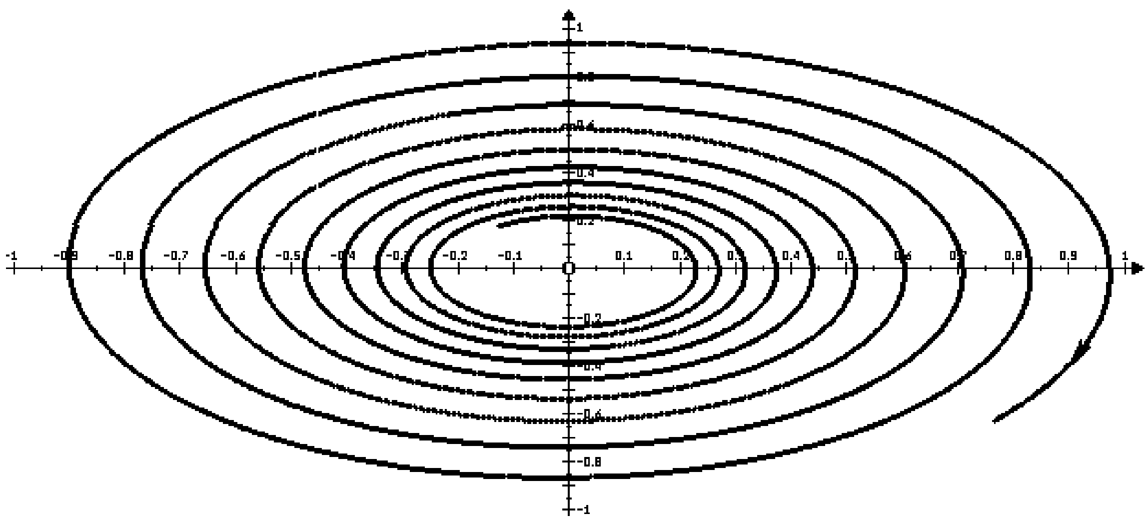


Рис.4.6. Неустойчивое по Ляпунову решение системы

4.11. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (4.12). Полагаем, что выполнены условия теоремы 4.1 существования и единственности решения задачи Коши. Пусть некоторое фиксированное решение $x = \varphi(t)$ этой системы существует при всех $t \geq t_0$.

Решение $x = \varphi(t)$ системы называется **асимптотически устойчивым по Ляпунову** при $t \geq t_0$, если:

– решение $x = \varphi(t)$ **устойчиво по Ляпунову** при $t \geq t_0$;

– существует такое число $\Delta > 0$, что любое решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее условию $\left|x(t_0)-\varphi(t_0)\right|<\Delta$, с ростом t стремится к нулю: $\left|x(t_0)-\varphi(t_0)\right|\to 0$ при $t\to\infty$.

Геометрически это означает, что интегральные кривые $x=x(t)$, близкие в момент $t=t_0$ к интегральной кривой $x=\varphi(t)$, приближаются к ней с ростом t.

Интегральные кривые и **фазовые траектории**, отвечающие асимптотически устойчивым решениям, тоже называются **асимптотически устойчивыми**.

На рис. 4.7 чёрным изображена **асимптотически устойчивая фазовая траектория**, некой системы дифференциальных уравнений второго порядка, которая начинается в точке $(0{,}3;0)$, и две начинающиеся вблизи неё, траектории изображены пунктирными линиями.

Пример № 4.15. Исследуем на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-0{,}1x_1+4x_2,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1-0{,}1x_2,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1(0)=0,\\ x_2(0)=0.\end{cases}$$

Очевидно, что это решение задачи − тривиальное решение, **точка покоя системы**, $\varphi(t)=0$ (т.е. $\varphi_1(t)=0$, $\varphi_2(t)=0$).

Докажем, что это нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t\to\infty$.

Решение системы, проходящее через точку $(0, x_1(0), x_2(0))$, имеет вид:

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(x_1(0)\cos 4t-x_2(0)\sin 4t\right)\cdot e^{-0{,}1t}\\ \left(x_1(0)\sin 4t+x_2(0)\cos 4t\right)\cdot e^{-0{,}1t}\end{pmatrix}.$$

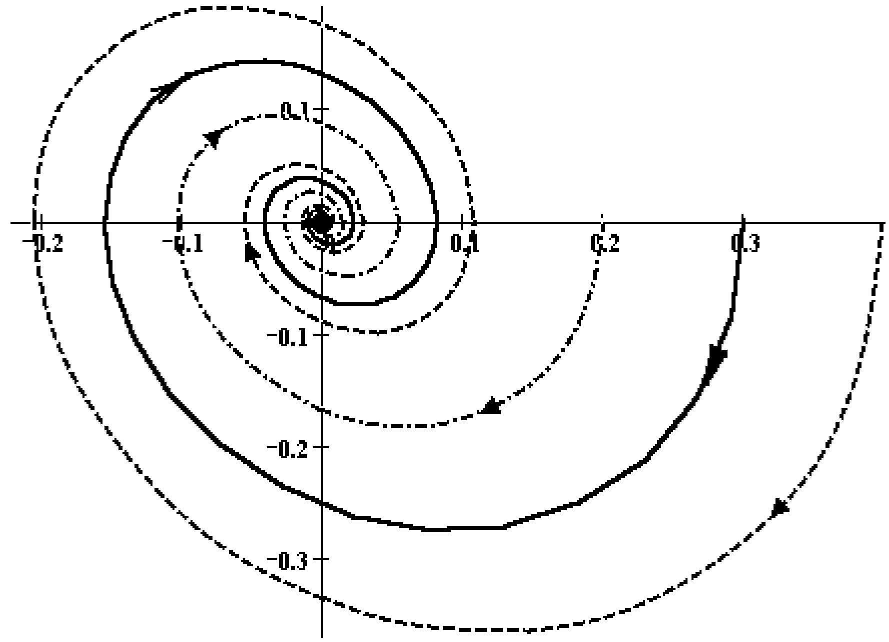


Рис. 4.7. Асимптотически устойчивая фазовая траектория, некой системы дифференциальных уравнений

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ и исследуем поведение при $t \to \infty$ тех решений $x = x(t)$, которые удовлетворяют условию $\left|x(0) - \varphi(0)\right| < \delta$, $\delta > 0$:

$$\left|x(0) - \varphi(0)\right| = \sqrt{\left(x_1(0) - \varphi_1(0)\right)^2 + \left(x_2(0) - \varphi_2(0)\right)^2} = \sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} = \left|x(0)\right| < \delta$$

$$\left|x(t) - \varphi(t)\right| = \sqrt{\left(x_1(0) - 0\right)^2 + \left(x_2(0) - 0\right)^2} = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1(0)\cos 4t + x_2(0)\sin 4t\right)^2 e^{-0,2t} + \left(x_1(0)\sin 4t + x_2(0)\cos 4t\right)^2 e^{-0,2t}} =$$

$$= e^{-0,1t}\sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} < \sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} < \delta = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. На рис. 4.8 видно, как **фазовые кривые** устремляются к нулю.

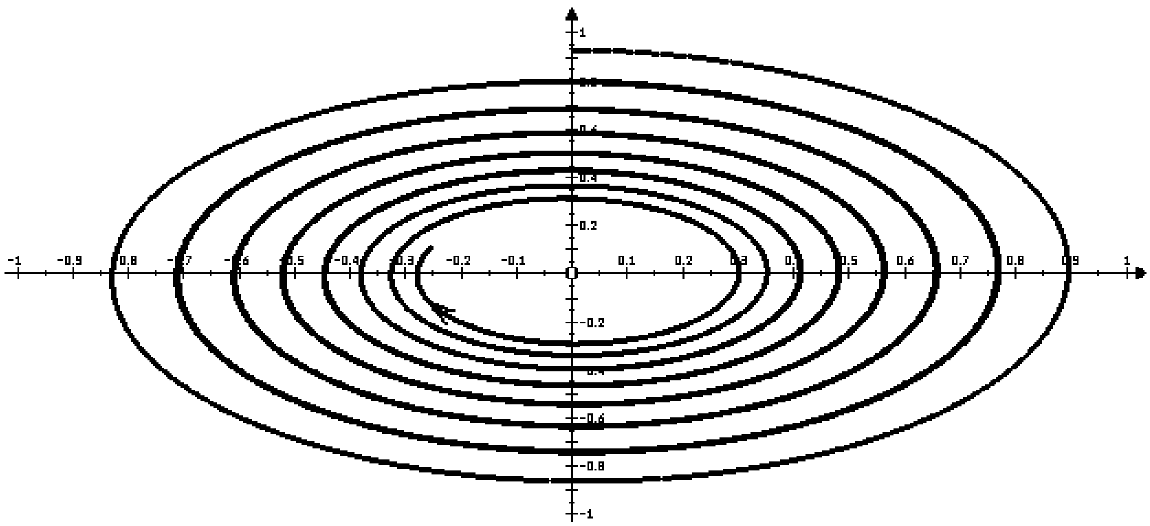


Рис. 4.8. Асимптотически устойчивое решение задачи Коши

4.12. Устойчивость положения равновесия линейных систем ОДУ

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений *n*-го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), x \in R^n, b(t) \in R^n.$$

Линейная система устойчива по Ляпунову при $t \geq t_0$, если каждое её решение $x = \varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову при $t \geq t_0$.

Линейная система асимптотически устойчива по Ляпунову при $t \to \infty$, если каждое её решение $x = \varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.

Решения линейной системы либо **все одновременно устойчивы**, либо **все неустойчивы**. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.6. (об устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений). Пусть в неоднородной линейной системе $x' = A(t)x + b(t)$ матрица $A(t)$ и вектор-функция $b(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$. Система устойчива при $t \geq t_0$, тогда и только тогда, когда тривиальное решение $x = 0$ однородной системы $x' = A(t)x$ устойчиво при $t \geq t_0$.

Теорема 4.7. (об асимптотической устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений). Пусть в неоднородной линейной системе $x' = A(t)x + b(t)$ матрица $A(t)$ и вектор-функция $b(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$. Система асимптотически устойчива при $t \to \infty$, тогда и только тогда, когда тривиальное решение $x = 0$ (**точка покоя**) однородной системы $x' = A(t)x$ асимптотически устойчиво при $t \to \infty$.

Эти утверждения означают, что **для исследования устойчивости линейной системы достаточно исследовать устойчивость точки покоя** соответствующей однородной системы.

Рассмотрим однородную линейную систему дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянной матрицей $x' = A \cdot x$.

Исследование такой системы на устойчивость не составляет труда, поскольку справедливы следующие утверждения:

1) для того чтобы тривиальное решение $x \equiv 0$ однородной системы $x' = A \cdot x$ было асимптотически устойчиво при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A имели отрицательные действительные части;

2) если собственные значения матрицы A различны, то для устойчивости тривиального решения $x \equiv 0$ однородной системы $x' = A \cdot x$ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех собственных значений матрицы A были неотрицательны;

3) если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную действительную часть, то тривиальное решение $x \equiv 0$ однородной системы $x' = A \cdot x$ неустойчиво.

Пример № 4.16. Исследуем на устойчивость линейную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases}$$

Поскольку тривиальное решение (**точка покоя** системы $\varphi(t) \equiv 0$, т.е. $\varphi_1(t) \equiv 0$, $\varphi_2(t) \equiv 0$) **устойчиво при** $t > 0$, все решения системы устойчивы,− исследуемая система устойчива.

На рис. 4.9 изображено несколько **фазовых кривых** системы (это эллипсы). Видно, что те из них, которые начинаются вблизи нуля, всегда вблизи нуля остаются.

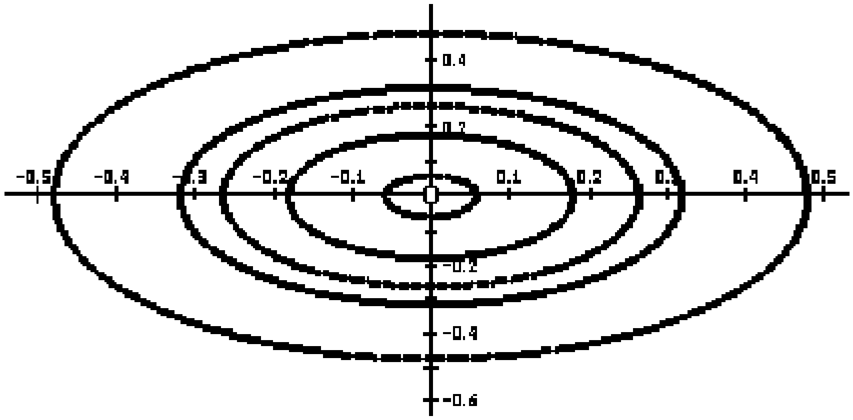


Рис. 4.9. Фазовые кривые устойчивого решения системы

Пример № 4.17. Исследуем на устойчивость линейную систему из примера 4.15:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0{,}1x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 0{,}1x_2. \end{cases}$$

Поскольку тривиальное решение (**точка покоя системы**, $\varphi(t) = 0$, т.е. $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_2(t) = 0$) **асимптотически устойчиво** по Ляпунову при $t \to \infty$, то и все решения системы асимптотически устойчивы. Следовательно, исследуемая система асимптотически устойчива.

На рис. 4.10 видно, что **фазовые кривые**, которые начинаются вблизи нуля, устремляются со временем в нуль.

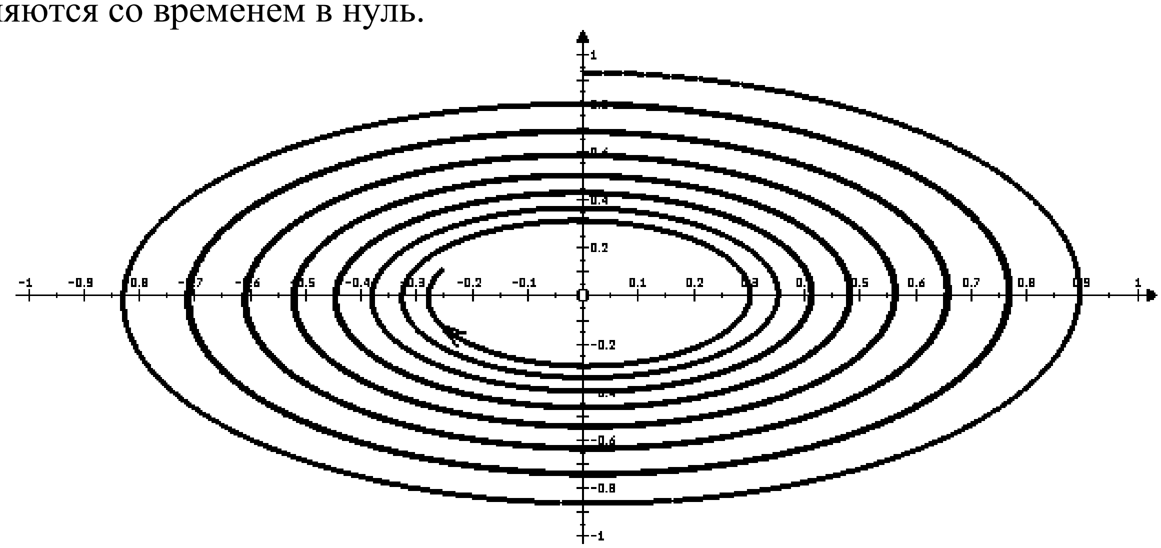


Рис. 4.10. Фазовые кривые асимптотически устойчивого решения системы

4.13. Устойчивость точек покоя нелинейных систем по линейному приближению

Вернемся к нелинейной системе дифференциальных уравнений (4.12):

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x), t\ge t_0, x\in R^n, F(t,x)\in R^n,$$

где $F(t,x)=\begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ \ldots\\ f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}$, $x=x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \ldots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$, $x'=\begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\\ \ldots\\ x_n'\end{pmatrix}$.

Полагаем, что выполнены условия теоремы 4.1 существования и единственности решения задачи Коши. Положим также, что при $t\ge t_0$ существует некоторое решение системы $x=\varphi(t)$.

Точка $x\equiv a$ называется **точкой покоя (положением равновесия)** системы (4.12), если $F(t,a)=0$ при всех $t\ge t_0$. Точка покоя системы, очевидно, является решением системы.

Поскольку $F(t,x)$ непрерывно-дифференцируема и $F(t,a)=0$, то при всех $t\ge t_0$, можно записать:

$$F(t,x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial f_1(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n}(x_n-a_n)\\ \frac{\partial f_2(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial f_2(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n}(x_n-a_n)\\ \ldots\\ \frac{\partial f_n(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial f_n(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n}(x_n-a_n)\end{pmatrix}+R(t,x,a),$$

$$|R(t,x,a)|=o(|x-a|).$$

Обозначив $A(t)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$,

$$z = x - a, \quad R(t,x,a) = R(t,z),$$

получим $\frac{dz}{dt} = A(t)z + R(t,z)$.

Системой 1-го (линейного) приближения для системы $x' = F(t,x)$ называется линейная система

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\cdot z.$$

Очевидно, что тривиальное решение $z \equiv 0$ − точка покоя этой системы. Оказывается, что если точка покоя $z \equiv 0$ системы первого приближения асимптотически устойчива при $t \to \infty$, то точка покоя $x \equiv a$ системы $x' = F(t,x)$ также асимптотически устойчива при $t \to \infty$.

Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.8. (об устойчивости точки покоя по линейному приближению). Пусть $x \equiv a$ − точка покоя системы (4.12). Пусть $F(t,x) = A(t)z + R(t,z)$, $z = x - a$. Вектор-функция $R(t,z)$ непрерывно дифференцируема при $t \ge t_0$, $|z| < \rho$ и $R(t,z) = o(|z|)$ при $|z| \to 0$, равномерно по t при $t \ge t_0$.

Если матрица $A(t) = A$ − постоянная матрица, действительные части всех собственных значений которой отрицательны, то точка покоя $x \equiv a$ системы $x' = F(t,x)$ асимптотически устойчива. При этом если $|x(0) - a|$ достаточно мало, то при $t \ge t_0$ справедлива оценка $|x(t) - a| \le C \cdot e^{-\alpha(t - t_0)}$, $\alpha > 0$, $C > 0$.

Пример № 4.18. Исследуем на устойчивость нелинейную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0{,}1x_1 + 4x_2 - x_1^3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 0{,}1x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

Очевидно, что точка $x \equiv 0$ − **точка покоя системы**. Запишем **систему первого приближения**:

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} -0{,}1x_1 + 4x_2 - x_1^3 \\ -4x_1 - 0{,}1x_2 - x_2^3 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left(-0{,}1x_1 + 4x_2 - x_1^3\right)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial\left(-0{,}1x_1 + 4x_2 - x_1^3\right)}{\partial x_2} x_2 \\ \dfrac{\partial\left(-4x_1 - 0{,}1x_2 - x_2^3\right)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial\left(-4x_1 - 0{,}1x_2 - x_2^3\right)}{\partial x_2} x_2 \end{pmatrix}\right|_{x=0} = \begin{pmatrix} -0{,}1x_1 + 4x_2 \\ -4x_1 - 0{,}1x_2 \end{pmatrix},$$

$$F(t,x) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left(-0{,}1x_1 + 4x_2 - x_1^3\right)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial\left(-0{,}1x_1 + 4x_2 - x_1^3\right)}{\partial x_2} x_2 \\ \dfrac{\partial\left(-4x_1 - 0{,}1x_2 - x_2^3\right)}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial\left(-4x_1 - 0{,}1x_2 - x_2^3\right)}{\partial x_2} x_2 \end{pmatrix}\right|_{x=0} + R(t,x) =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}1x_1 + 4x_2 \\ -4x_1 - 0{,}1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}, \qquad x' = A(t)x + R(t,x),$$

$$A(t) \equiv A \equiv \begin{pmatrix} -0{,}1 & 4 \\ -4 & -0{,}1 \end{pmatrix},\ R(t,x) = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ -x_2^3 \end{pmatrix},$$

$$\left|R(t,x)\right| = \sqrt{x_1^6 + x_2^6} \to 0,\ \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to 0.$$

Получили систему первого приближения, удовлетворяющую условиям теоремы 4.7 об асимптотической устойчивости по первому приближению:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0{,}1x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 0{,}1x_2. \end{cases}$$

Точка покоя системы первого приближения $x \equiv 0$ **асимптотически устойчива**:

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 4 \\ -4 & -0{,}1 \end{pmatrix}, \ \det\left(A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} -0{,}1-\lambda & 4 \\ -4 & -0{,}1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda_{1,2} = -0{,}1 \pm 4i.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 4.8 об устойчивости точки покоя по линейному приближению точка покоя $x \equiv 0$ исследуемой системы также асимптотически устойчива.

На рис. 4.11 изображены фазовая траектория исследуемой нелинейной системы (пунктирная линия) и фазовая траектория системы первого приближения (сплошная линия). Обе траектории начинаются в точке (1, 0).

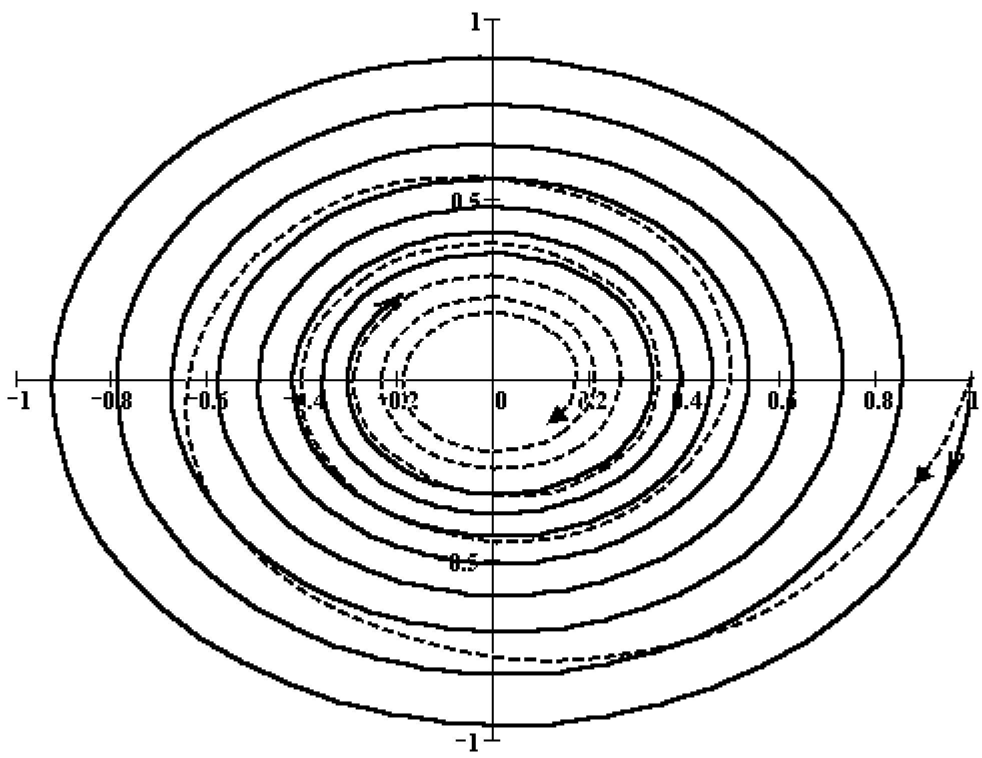


Рис. 4.11. Асимптотически устойчивое изображение решения

4.14. Неустойчивость по линейному приближению точек покоя нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений (4.12). Полагаем, что выполнены условия теоремы 4.1 существования и единственности решения задачи Коши. Пусть $x \equiv a$ − точка покоя системы.

Предположим, что **системой первого (линейного) приближения** для системы $x' = F(t,x)$ называется линейная система

$$\frac{dz}{dt} = A(t) \cdot z.$$

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(t,a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$z = x - a,\ R(t,x,a) = R(t,z).$$

Оказывается, что о неустойчивости точки покоя нелинейной системы можно судить по неустойчивости точки покоя её линейной системы первого приближения.

Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.9. (о неустойчивости точки покоя по линейному приближению). Пусть $x \equiv a$ − точка покоя системы $x' = F(t,x)$. Пусть $F(t,x) = A(t)z + R(t,z)$, $z = x - a$. Вектор-функция $R(t,z)$ непрерывно дифференцируема при $t \ge t_0$, $|z| < H$ и $R(t,z) \le C|z|^{\alpha}$.

Если $A(t) = A$ постоянная матрица и если неустойчива точка покоя $z \equiv 0$ системы первого приближения $z' = A \cdot z$, то неустойчива и точка покоя $x \equiv a$ системы $x' = F(t,x)$.

Пример № 4.19. Исследуем на устойчивость нелинейную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - 5x_2^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 + 0,5x_1^3. \end{cases}$$

Очевидно, что точка $x \equiv 0$ − **точка покоя системы**. Запишем **систему первого приближения**:

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 5x_2^2 \\ 3x_1 + x_2 + 0,5x_1^3 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left(2x_1 + x_2 - 5x_2^2\right)}{\partial x_1} x_1 & \dfrac{\partial\left(2x_1 + x_2 - 5x_2^2\right)}{\partial x_2} x_2 \\ \dfrac{\partial\left(3x_1 + x_2 + 0,5x_1^3\right)}{\partial x_1} x_1 & \dfrac{\partial\left(3x_1 + x_2 + 0,5x_1^3\right)}{\partial x_2} x_2 \end{pmatrix}\right|_{x=0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F(t,x) = A \cdot x + R(t,x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5x_2^2 \\ 0,5x_1^3 \end{pmatrix},$$

$$x' = A(t)x + R(t,x).$$

Получили систему первого приближения, удовлетворяющую условиям теоремы 4.7 об асимптотической устойчивости по первому приближению:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2. \end{cases}$$

Точка покоя системы первого приближения $x \equiv 0$ **неустойчива**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2},\ \operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} > 0.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 4.9 о неустойчивости точки покоя по линейному приближению точка покоя $x \equiv 0$ исследуемой системы также неустойчива.

На рис. 4.12 изображены фазовая траектория исследуемой нелинейной системы (пунктирная линия) и фазовая траектория системы первого приближения (сплошная линия). Обе траектории начинаются в точке $(0,01;0)$.

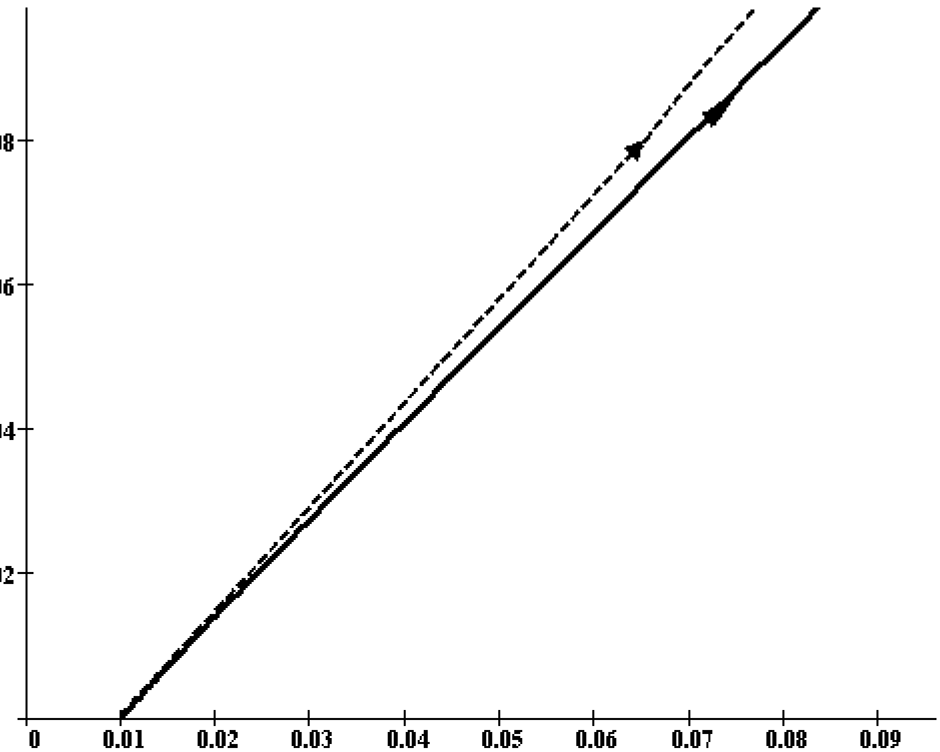


Рис. 4.12. Изображение фазовых траекторий нелинейной системы из примера 4.19

4.15. Автономные системы дифференциальных уравнений. Основные понятия

Автономной системой дифференциальных уравнений n-го порядка называется система, которая в нормальной форме записывается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \end{cases} \tag{4.13}$$

В векторной форе автономная система имеет вид $x' = F\left(x\right)$ (не зависит от *t*), где

$$x=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x'=\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix}, \quad F(x)=\begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \\ f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \dots \\ f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Название автономная система связано с тем, что поскольку производная x' зависит только от x и не зависит от t, то решение само управляет своим изменением. Автономные системы называют также **динамическими системами**.

Любую систему дифференциальных уравнений, записанную в нормальной форме, можно свести к автономной системе, увеличив число неизвестных функций на единицу:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ \qquad\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(x_1,x_2,\dots,x_n), \end{cases} \qquad x_{n+1}=t, \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ \qquad\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dt}=1. \end{cases}$$

Будем полагать, что для рассматриваемых автономных систем выполнены условия теоремы 4.1 существования и единственности решения задачи Коши.

Пусть $x=\varphi(t)$ − решение автономной системы, определенное на отрезке $[a,b]$. Множество точек $x=\varphi(t),\ t\in[a,b]$ − кривая в пространстве R_{x^n}. Эту кривую называют **фазовой траекторией** или просто **траекторией системы**, а пространство R_{x^n}, в котором расположены фазовые траектории, называют **фазовым пространством автономной системы**.

Точка ***a*** называется **положением равновесия (точкой покоя) автономной системы**, если $F(a)=0$.

Равенство $x=\varphi(t),\quad t\in[a,b]$ − параметрические уравнения фазовой траектории.

Интегральная кривая системы изображается в $(n+1)$−мерном пространстве $R_{x,t^{n+1}}$ и может быть определена уравнениями

$$\begin{cases} t=t \\ x=\varphi(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad t=t, \\ x_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n), \\ x_2=\varphi_2(x_1,\ldots,x_n),\ t\in[a,b], \\ \qquad \ldots \\ x_n=\varphi_n(x_1,\ldots,x_n). \end{cases}$$

Ясно, что соответствующая фазовая траектория − проекция интегральной кривой на пространство R_x.

На рис. 4.13, а приведено изображение интегральной кривой автономной системы и соответствующей фазовой траектории (рис.4.13, б).

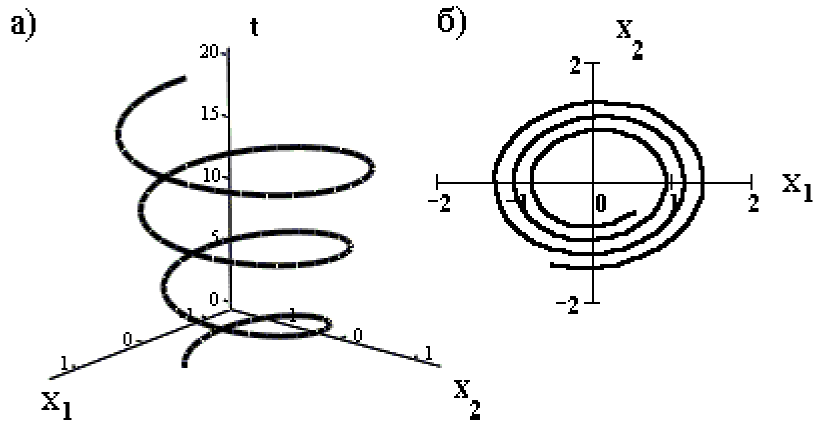


Рис. 4.13. Изображение фазовой траектории автономной системы

Пример № 4.20. Построим интегральную кривую и фазовую траекторию решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=3x_1+4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-3x_1-3x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0)=1, \\ x_2(0)=0. \end{cases}$$

Задачу решим **методом исключения**:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 3\dfrac{dx_1}{dt} + 4\dfrac{dx_2}{dt}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 3x_2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 3\dfrac{dx_1}{dt} + 4\left(-3x_1 - 3x_2\right), \\ \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 4x_2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1 = 0, \\ x_1\left(0\right) = 1, \\ x_1'\left(0\right) = 3. \end{cases}$$

Решим задачи Коши для полученного линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами $x_1'' + 3x_1 = 0$: $\lambda^2 + 3 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$.

$$x_1\left(t\right) = C_1 \sin\left(\sqrt{3}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{3}t\right),\ x_2\left(t\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{dx_1}{dt} - 3x_1\right),$$

$$x_2\left(t\right) = \frac{1}{4}\left(C_1\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}t\right) - C_2\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) - 3\left(C_1 \sin\left(\sqrt{3}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right)\right).$$

При $\begin{cases} x_1\left(0\right) = 1, \\ x_2\left(t\right) = 0, \end{cases}$ имеем $\begin{cases} x_1\left(t\right) = \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + \cos\left(\sqrt{3}t\right), \\ x_2\left(t\right) = -\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right). \end{cases}$

Соответствующая интегральная кривая определяется в пространстве $R_{x,x,t}$ уравнениями

$$\begin{cases} t = t, \\ x_1\left(t\right) = \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + \cos\left(\sqrt{3}t\right), \\ x_2\left(t\right) = -\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right). \end{cases}$$

Фазовая кривая, которая является проекцией интегральной кривой на пространство R_{x_1, x_2^2}, определяется уравнениями

$$\begin{cases} x_1\left(t\right) = \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + \cos\left(\sqrt{3}t\right), \\ x_2\left(t\right) = -\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right). \end{cases}$$

На рис. 4.14 приведены изображения интегральной кривой (а) и соответствующей фазовой кривой (б).

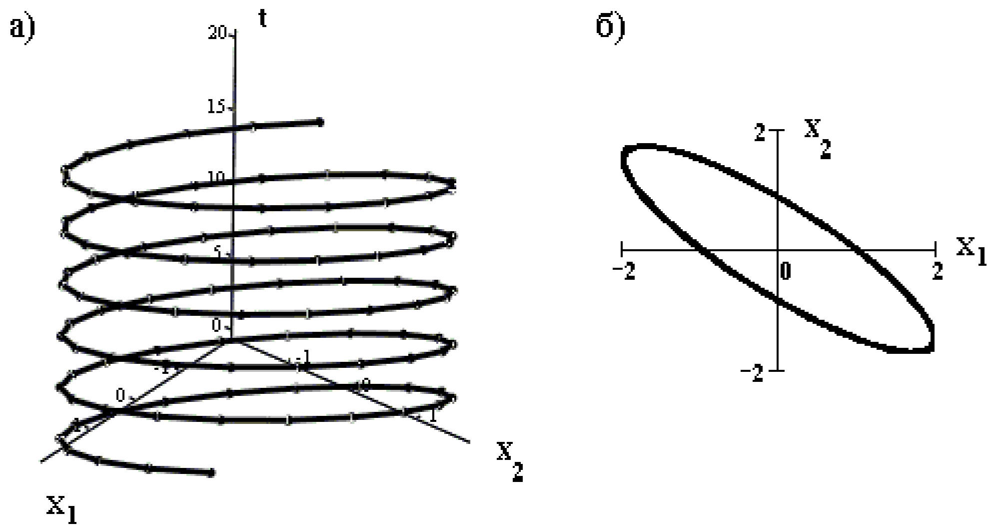


Рис. 4.14. Изображения интегральной и фазовой кривой

4.16. Свойства фазовых траекторий

Рассмотрим автономную систему (4.13) с непрерывно дифференцируемой правой частью. Уравнение $x = \varphi(t)$ − $t \in [a,b]$ − параметрическое уравнение фазовой траектории системы.

Важнейшим свойством решений автономных систем является следующее: *если вектор-функция* $x = \varphi(t)$ − *решение автономной системы, то при любой постоянной C вектор-функция* $x = \varphi(t + C)$ *тоже является решением системы.*

Свойства фазовых траекторий:

1. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Это свойство фазовых траекторий означает, что фазовое пространство "расслаивается" на непересекающиеся фазовые траектории;

2. Если $\boldsymbol{a}$ − точка равновесия автономной системы, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ − фазовая траектория системы. Положение равновесия называют **точкой покоя автономной системы;**

3. Фазовая траектория, отличная от точки − гладкая кривая (в каждой точке этой кривой существует ненулевой касательный вектор);

4. Пусть $x(t; x(0))$ − решение задачи Коши $x' = F(x)$, $x(0) = x^{(0)}$. Тогда $x\left(t_1 + t_2; x^{(0)}\right) = x\left(t_2; x\left(t_1; x^{(0)}\right)\right) = x\left(t_1; x\left(t_2; x^{(0)}\right)\right)$ и $x\left(-t; x\left(t; x^{(0)}\right)\right) = x^{(0)}$.

Полную информацию о свойствах решений системы дают интегральные кривые. Однако во многих приложениях достаточно информации, которую дают фазовые траектории.

Более того, некоторые свойства решений ярче проявляются при исследовании фазовых траекторий (фазового пространства системы).

4.17. Фазовая плоскость, фазовые кривые, фазовый портрет автономной системы 2-го порядка

Рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = F(x),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}, \ F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

для которой справедлива теорема 4.1 существования и единственности решения задачи Коши.

При описании интегральных кривых, фазовых траекторий и фазовой плоскости автономной системы 2-го порядка привычнее вместо переменных (x_1, x_2) использовать переменные (x, y). В дальнейшем будем записывать автономные системы 2-го порядка в виде

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \text{ где } x = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_1(x, y) \end{pmatrix}. \qquad (4.14)$$

Пусть $x = \varphi(t)$ − решение автономной системы, определенное на отрезке $[a,b]$. Множество точек $x = \varphi(t)$, $t \in [a,b]$ − кривая в пространстве R_{x,y^2} − фазовая траектория системы, а пространство R_{x,y^2} − **фазовая плоскость автономной системы**.

Точка ***a*** называется **положением равновесия (точкой покоя)** автономной системы, если $F(a) = 0$.

Равенство $x = \varphi(t)$, $t \in [a,b]$, или, что то же самое,

$$\begin{cases} x=\varphi_1(t), \\ y=\varphi_2(t), \end{cases} \quad t\in[a,b]$$ − **параметрические уравнения фазовой траектории**.

Интегральная кривая системы изображается в 3- мерном пространстве R_{x,y,t^2}. Она задается уравнением

$$\begin{cases} t=t, \\ x=\varphi_1(t), \quad t\in[a,b] \\ y=\varphi_2(t). \end{cases}$$

Соответствующая фазовая траектория – это проекция интегральной кривой на фазовую плоскость.

Изобразив на фазовой плоскости несколько фазовых траекторий так, чтобы можно было убедительно предсказать поведение фазовой траектории, проходящей через любую точку фазовой плоскости (некоторой области фазовой плоскости), получим **фазовый портрет** автономной системы.

На рис. 4.15 приведено изображение фазовых портретов двух автономных систем. Видно, что траектории представленных систем ведут себя по-разному. На рис. 4.15, а приведен фазовый портрет системы, описывающей колебания математического маятника «без трения», на рис. 4.15, б − колебания математического маятника «с трением».

4.18. Векторное поле автономной системы 2-го порядка

Если в каждой точке области G из пространства R^n задан n-мерный вектор $F(x),\ x\in G$, то говорят, что в области G задано **векторное поле**.

Векторное поле непрерывно дифференцируемо, если непрерывно дифференцируема функция $F(x)$.

Точки векторного поля, в которых $F(x)=0$, называют **особыми точками векторного поля**.

Точка покоя автономной системы − особая точка векторного поля системы. Автономная система (4.13) полностью определяется векторным полем $F(x)$.

Рассмотрим автономную систему второго порядка (4.14). Пусть $x=\varphi(t)$ − решение автономной системы, определенное на отрезке $[a,b]$. Фазовая траектория, соответствующая решению системы $x=\varphi(t)$, определяется параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $t \in [a,b]$. В каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ этой гладкой фазовой кривой существует касательный вектор $\left(x'(t_0), y'(x_0)\right) = F(M_0)$.

Иными словами, векторное поле $F(x)$ автономной системы задаёт в каждой точке направление касательной к фазовой кривой, проходящей через эту точку.

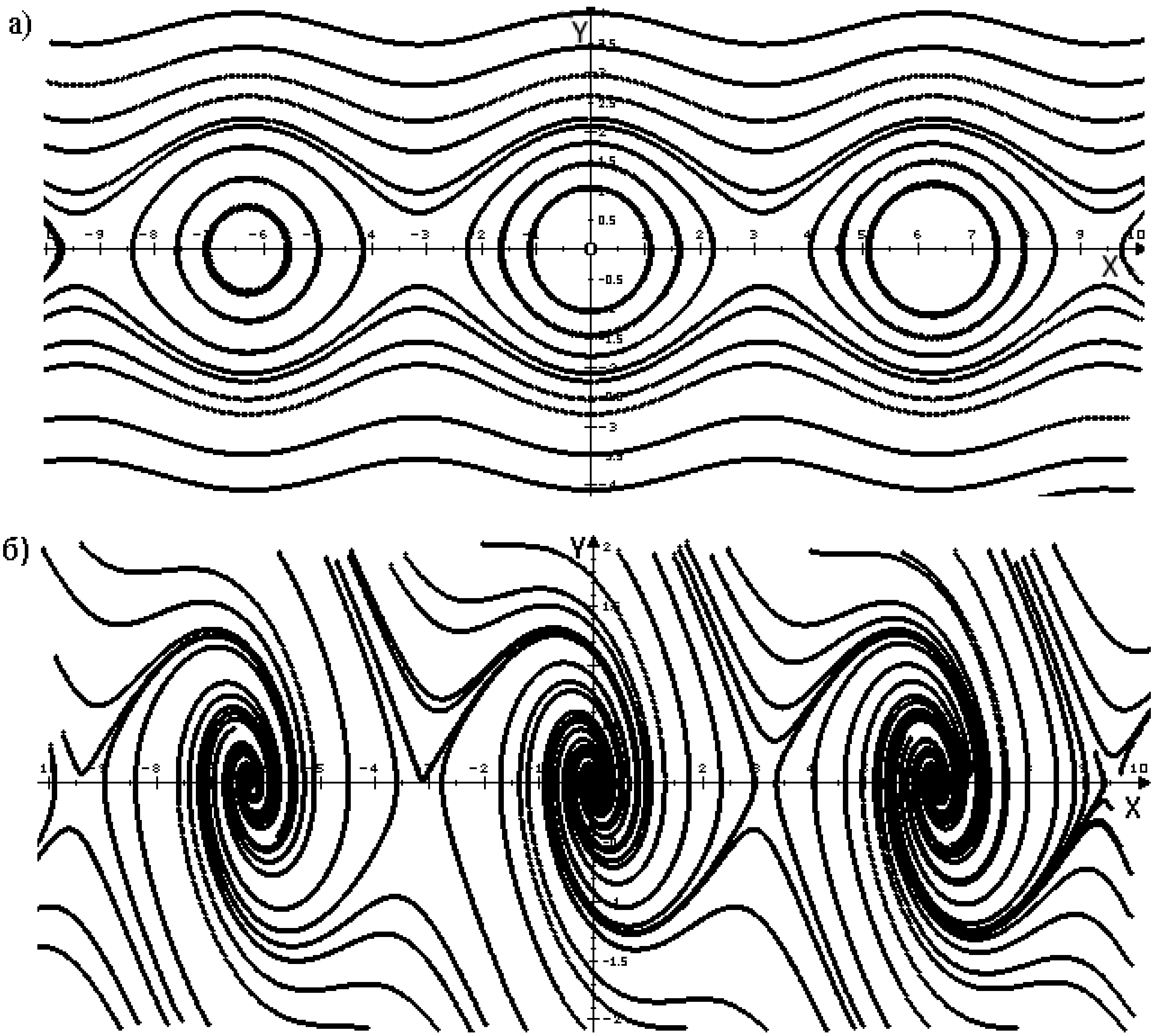


Рис. 4.15. Портреты двух автономных систем

На рис. 4.16 приведены фрагменты векторных полей автономных систем и соответствующих фазовых портретов автономных систем с точками покоя разных типов.

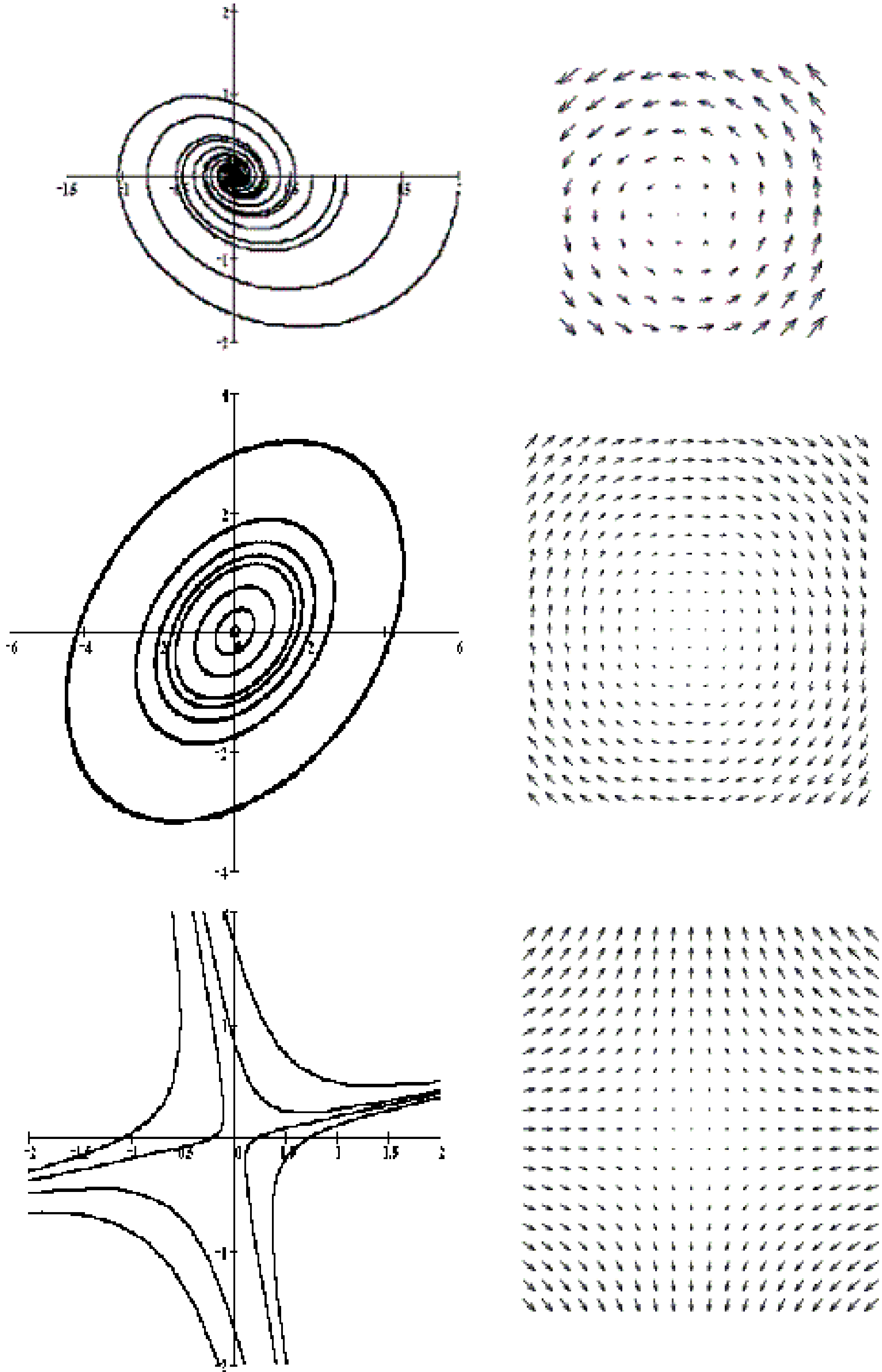


Рис. 4.16. Векторные поля и соответствующие фазовые портреты автономных систем с разными точками покоя

Пример № 4.21. Найдём в точках (0;1), (1;0) и (1;1) векторное поле автономной системы:

$$\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

Вычислим векторное поле в заданных точках:

$$M_0(x_0, y_0), \qquad F(M_0) = F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -x_0 + 3y_0 \\ -x_0 + y_0 \end{pmatrix},$$

$$F(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad F(1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad F(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.17 изображён фрагмент векторного поля в окрестности точки покоя системы, содержащий среди прочих и вычисленные векторы.

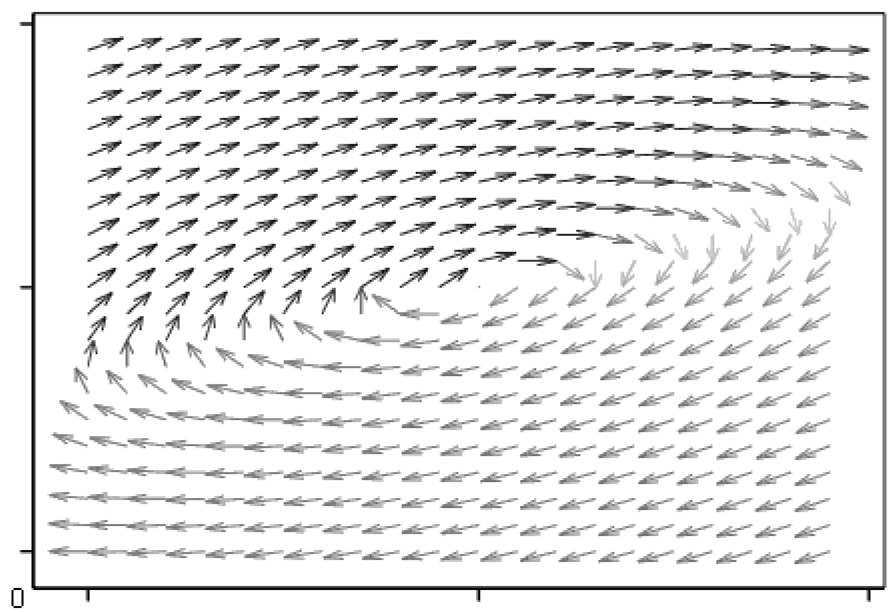


Рис. 4.17. Фрагмент векторного поля в окрестности точки покоя

4.19. Точки покоя линейной автономной системы 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную автономную систему 2-го порядка с постоянными коэффициентами $x' = A \cdot x$:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Такая система имеет *единственную точку покоя* $x = 0,\ y = 0$.

Характер точки покоя (*её устойчивость, асимптотическую устойчивость, неустойчивость*) можно установить по собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2$ матрицы системы $\boldsymbol{A}$.

Если $\lambda_1,\ \lambda_2$ – **разные действительные отрицательные числа**, то **точка покоя асимптотически устойчива**, такая точка покоя называется **устойчивый узел**.

На рис. 4.18 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности устойчивого узла.

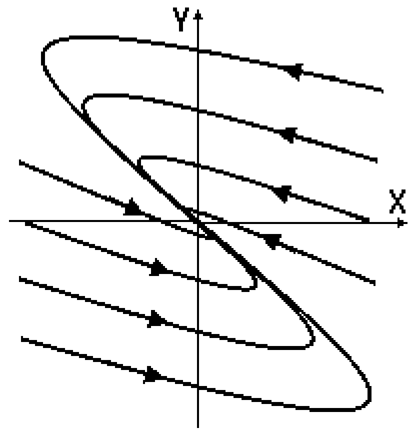


Рис. 4.18. Фазовый портрет в окрестности устойчивого узла

Если $\lambda_1,\ \lambda_2$ – **разные действительные положительные числа**, то **точка покоя неустойчива**, такая точка покоя называется **неустойчивый узел**.

На рис. 4.19 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности неустойчивого узла.

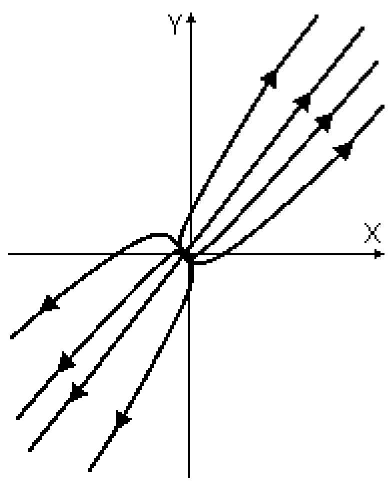


Рис. 4.19. Фазовый портрет в окрестности неустойчивого узла

Если λ_1, λ_2 – **действительные числа разных знаков**, то **точка покоя неустойчива**, такая точка покоя называется **седлом**.

На рис. 4.20 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности седла.

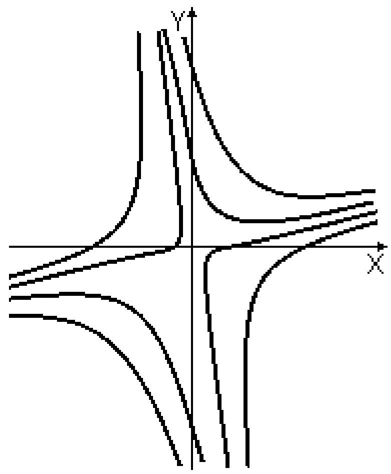


Рис. 4.20. Фрагмент фазового портрета в окрестности седла

Если λ_1, λ_2 – **комплексные числа**, $\lambda_{1,2} = \mathrm{Re}\lambda \pm i\,\mathrm{Im}\lambda$ и $\mathrm{Re}\lambda \le 0$, то **точка покоя ус**тойчива.

Если λ_1, λ_2 – **комплексные числа**, $\lambda_{1,2} = \mathrm{Re}\lambda \pm i\,\mathrm{Im}\lambda$ и $\mathrm{Re}\lambda = 0$, то **точка покоя устойчива, но не асимптотически устойчива**, такая точка покоя называется **центром**.

На рис. 4.21 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности центра.

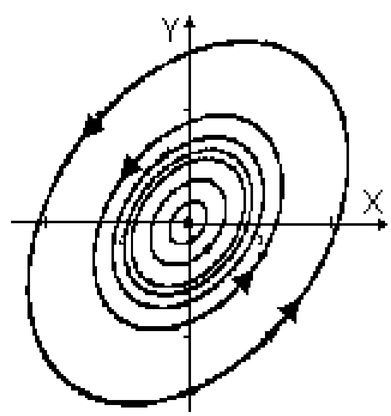


Рис. 4.21. Фрагмент фазового портрета в окрестности центра

Если λ_1, λ_2 − **комплексные числа**, $\lambda_{1,2} = \mathrm{Re}\lambda \pm i\,\mathrm{Im}\lambda$ и $\mathrm{Re}\lambda < 0$, то **точка покоя асимптотически устойчива**, такая точка покоя называется **устойчивым фокусом**.

На рис. 4.22 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности устойчивого фокуса.

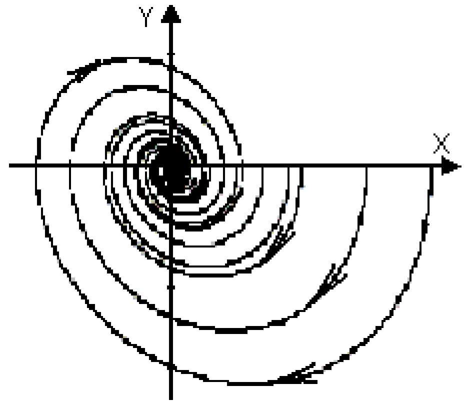


Рис. 4.22. Фрагмент фазового портрета в окрестности устойчивого фокуса

Если λ_1, λ_2 − комплексные числа, $\lambda_{1,2} = \mathrm{Re}\lambda \pm i\,\mathrm{Im}\lambda$ и $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то точка покоя неустойчива, такая точка покоя называется **неустойчивым фокусом**.

На рис. 4.23 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности неустойчивого фокуса.

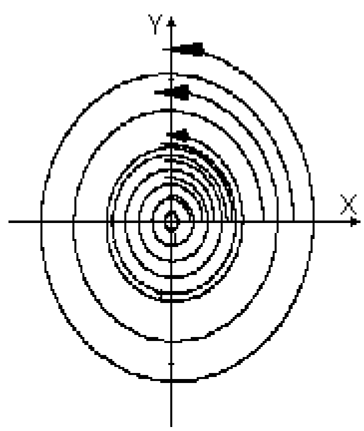


Рис. 4.23. Фрагмент фазового портрета в окрестности неустойчивого фокуса

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ − действительные положительные числа, то точка − узел специального вида − **диакритический узел**;

при $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ − устойчивый диакритический узел;

при $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ − неустойчивый диакритический узел.

На рис. 4.24 приведен фрагмент фазового портрета в окрестности устойчивого диакритического узла.

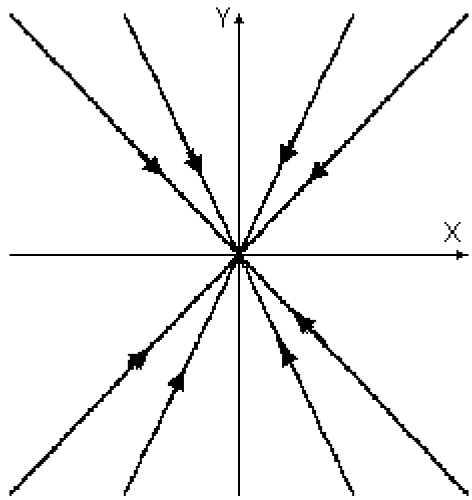


Рис. 4.24. Фрагмент фазового портрета в окрестности устойчивого диакритического узла

Если $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$, то существует прямая, проходящая через начало координат, все точки которой являются точками покоя.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то все точки плоскости являются точками покоя системы.

Пример № 4.21. Исследуем характер точки покоя автономной системы

$$\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

Найдём собственные значения матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Поскольку $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, то точка покоя − центр. На рис. 4.25 приведены фрагменты фазового портрета (а) и векторного поля в окрестности центра (б).

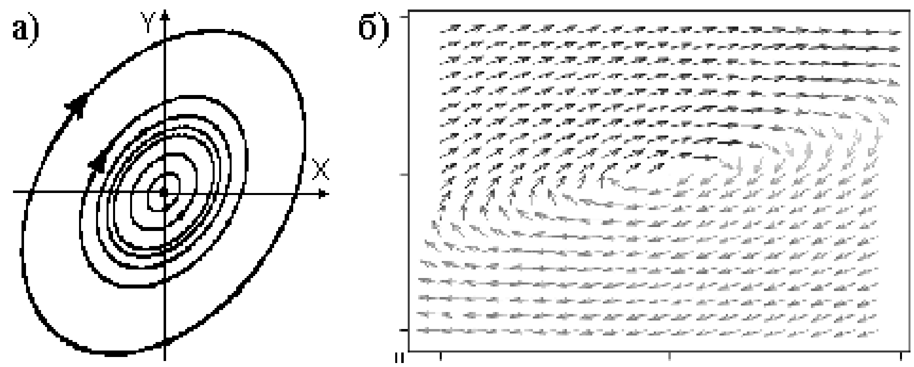


Рис. 4.25. а) − фазовый портрет; б) − векторное поле в окрестности центра

Задачи и упражнения

4.1. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4.2. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 5, \\ y(0) = 8. \end{cases}$$

4.3. Найти частное решение системы линейных дифференциальных уравнений, соответствующее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 3, \\ y' = 5x - 6y + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 6, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

4.4. Найти частное решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений, соответствующее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА

5.1. Постановка задачи. Задача Коши. Общие замечания

Для дифференциального уравнения *n*-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{5.1}$$

задача Коши заключается в отыскании решения $y = y(x)$ уравнения (5.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{5.2}$$

где $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ − заданные числа.

Если функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна, а ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ ограничены в области, содержащей точку $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$, то **существует единственное решение задачи Коши** (5.1)− (5.2).

Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y, ..., y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y, ..., y_n), \end{cases} \tag{5.3}$$

заключается в отыскании решения $y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$ системы (5.3), удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1(x_0)=y_{10}, y_2(x_0)=y_{20},..., y_n(x_0)=y_{n0}, \tag{5.4}$$

где $x_0, y_{10}, y_{20},..., y_{n0}$ – заданные числа. Если функции $f_i(x, y_1,..., y_n)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j=\overline{1,n}$ в некоторой области, содержащей точку $(x_0, y_{10}, y_{20},..., y_{n0})$, то существует единственное решение задачи Коши (5.3)−(5.4).

Известно, что систему дифференциальных уравнений, содержащую производные высших порядков и разрешенную относительно старших производных искомой функции, можно привести к системе вида (5.3) путем введения новых неизвестных функций. В частности, дифференциальное уравнение n-го порядка (5.1) приводится к системе вида (5.3) с помощью замены

$$y_1=y',\ y_2=y'',...,\ y_{n-1}=y^{(n-1)},$$

которая приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} y'=y_1, \\ y'_1=y_2, \\ .... \\ y'_{n-2}=y_{n-1}, \\ y'_{n-1}=f(x, y, y_1,..., y_{n-1}). \end{cases} \tag{5.5}$$

То есть приходим к системе n дифференциальных уравнений первого порядка, правая часть которых не зависит от производных искомых функций. Поэтому численные методы решения дифференциальных уравнений традиционно изучают для уравнений первого порядка вида $y'=f(x,y)$, а затем, как правило, без труда распространяют на нормальные системы дифференциальных уравнений вида (5.3).

Итак, дано дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной с заданными начальными условиями:

$$y'=f(x,y)\ \ y(x_0)=y_0. \tag{5.6}$$

Требуется численно решить задачу Коши (5.6) на отрезке $[x_0,b]$. Это решение будет состоять в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2,..., y_n$ искомого решения $y=y(x)$ в точках $x_1, x_2,..., x_n=b$, где $y_i \approx y(x_i)$, $i=\overline{1,n}$. Для этого отрезок $[x_0,b]$ делят на n равных частей длины

$h = \dfrac{b - x_0}{n}$, так что $x_i = x_0 + ih,$ где $i = \overline{0,n}$. Величина h называется ***шагом интегрирования***.

5.2. Метод Эйлера

Будем считать, что шаг интегрирования h настолько мал, что для всех $x \in (x_0, x_1)$ значения искомой функции $y(x)$ мало отличается от y_0. Тогда для $x \in (x_0, x_1)$ можно написать

$$y = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0).$$

Иными словами, на этом участке интегрирования кривая $y(x)$ заменяется отрезком касательной к ней в точке x_0.

Для $x = x_1$ получим

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Аналогично, для $x = x_2$ будем иметь

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Продолжая строить значения приближенного решения по тому же закону, получаем

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Используя известные обозначения, схему метода Эйлера можно представить формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = hf(x_i, y_i), \qquad i = \overline{0, n-1}. \tag{5.7}$$

Геометрический смысл метода Эйлера заключается в том, что искомая интегральная кривая $y = y(x)$ заменяется ломаной, соединяющей точки $M_0(x_0, y_0)$, $i = \overline{0,n}$ (рис. 5.1). Причем первое звено ломаной касается истинной интегральной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Эта ломаная называется ломаной Эйлера. При $h \to 0$ последовательность ломаных Эйлера на отрезке $[x_0, b]$ стремится к искомой интегральной кривой.

Оценку точности метода Эйлера, если неизвестно точное решение, проводят с помощью двойного пересчета – с шагом h и с шагом $\dfrac{h}{2}$. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает основание считать их верными.

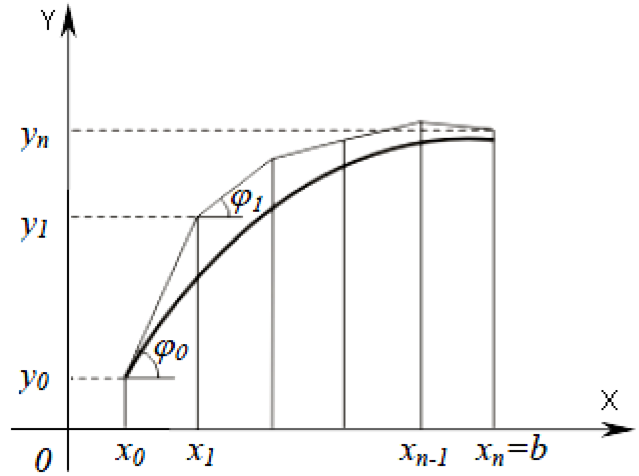


Рис. 5.1. Ломаная Эйлера

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений (5.3) и на дифференциальные уравнения высших порядков (5.1), которые должны быть предварительно приведены к нормальной системе (переход от (4.1) к (4.5)).

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases} \tag{5.8}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$. Приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i), \end{cases} \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{5.9}$$

5.3. Модифицированный метод Эйлера

Рассматриваемый метод является более точным методом по сравнению с предыдущим. Модификация метода направлена на то, чтобы точно определить направление перехода из точки (x_i, y_i) в точку (x_{i+1}, y_{i+1}). Для чего производятся дополнительные промежуточные вычисления, в результате которых определяются координаты промежуточной точки

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \tag{5.10}$$

с помощью которых и определяется следующее приближенное значение искомого решения по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\ \Delta y_i = hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}). \qquad (5.11)$$

Геометрический смысл модифицированного метода Эйлера показан на рис. 5.2. Исходя из точки $M_0(x_0, y_0)$, получаем для точки $x = x_{\frac{1}{2}}$, по методу Эйлера, точку $M_{\frac{1}{2}}$. Для точки $x = x_1$, применяя метод Эйлера, получили бы точку $\overline{M_1}$, находящуюся на касательной к интегральной кривой в точке M_0.

Модифицированный метод состоит в том, что из точки проводится отрезок M_0M_1, параллельный отрезку $M_{\frac{1}{2}}\overline{\overline{M_1}}$, направленному в соответствии со значением углового коэффициента в точке $\overline{M_1}$. Точка M_1, которая получена по модифицированному методу Эйлера, находится ближе к истинной кривой, чем точка M_0.

Следовательно, модифицированный метод Эйлера будет обеспечивать большую точность, чем метод Эйлера при одном и том же числе n разбиения отрезка интегрирования.

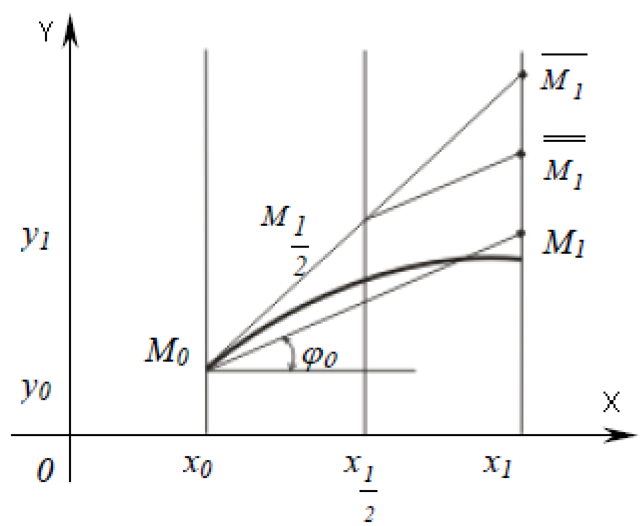


Рис. 5.2. Геометрическое изображение модифицированного метода Эйлера

Модифицированный метод Эйлера можно легко распространить на нормальную систему дифференциальных уравнений (5.3). Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases}$$

с начальными условиями $y_0 = y(x_0),\ z_0 = z(x_0)$.

Приближенные значения $y(x_i) \approx y_i,\ z\left(x_i\right) \approx z_i$ вычисляются последовательно по формулам (5.9), где

$$\Delta y_i = hf_1(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}),\ \Delta z_i = hf_2(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}),$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2},\ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_1(x_i, y_i, z_i),\ z_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{h}{2} f_2(x_i, y_i, z_i).$$

5.4. Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта – наиболее известный и широко используемый метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера можно рассматривать в качестве представителей метода Рунге-Кутта или как упрощенные его варианты.

Согласно методу Рунге-Кутта, приближенные значения y_{i+1} искомого решения $y = y(x)$ определяются по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad i = \overline{0, n-1}, \text{ где} \tag{5.12}$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + K_3^{(i)} + K_4^{(i)}),$$

$$\begin{cases} K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\ K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\ K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right). \end{cases}$$

Значение y_{i+1} приближенного решения дифференциального уравнения (4.6) определяется в усредненном по формуле (4.15) направлении, составляющими которого являются четыре направления, определяемые углами $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, a_4^{(i)}$, для которых

$$tg\, a_1^{(i)} = f(x_i, y_i), \qquad tg\, a_2^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}),$$

$$tg\, a_3^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}), \qquad tg\, a_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}),$$

что значительно повышает точность метода Рунге−Кутта.

Для сравнения: в методе Эйлера y_{i+1} вычисляется в направлении, определяемом углом φ_i, для которого $tg\varphi_i = f(x_i, y_i)$ (рис.5.1); в модифицированном методе Эйлера вычисляется в уже подправленном с помощью средней точки текущего отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ направлении, определяемом углом, для которого $tg\varphi_i = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ (рис. 5.2).

Метод Рунге−Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке $[x_0, b]$. Эффективная оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета по формуле

$$| y_n^* - y(x_n) | \approx \frac{| y_n^* - y_n |}{15},$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения (5.1) в точке x_n а y_n^*, y_n – приближенные значения, полученные с шагом h.

Для определения правильности выбора шага h на практике применяют двойной просчет с шагом h и шагом $\frac{h}{2}$. Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности, то шаг h для следующей точки удваивается, в противном случае берут половинный шаг.

Метод Рунге−Кутта обладает значительной точностью и, несмотря на свою трудоемкость, очень широко используется при численных решениях дифференциальных уравнений на ЭВМ. Важным преимуществом этого метода является возможность на любом этапе вычисления изменить шаг интегрирования при условии заданной точности. Распространим метод Рунге−Кутта на нормальную систему дифференциальных уравнений (5.3). Рассмотрим схему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f_1(x,y,z), \\ z' = f_2(x,y,z). \end{cases}$$

Начальные условия $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$. Приближенные значения $y_i = y(x_i)$, $z_i = z(x_i)$ вычисляются последовательно по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \end{cases}, \ i = \overline{0, n-1}, \text{ где } \Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + K_3^{(i)} + K_4^{(i)}),$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6}(l_1^{(i)} + l_2^{(i)} + l_3^{(i)} + l_4^{(i)}), \ K_1^{(i)} = hf_1(x_i, y_i, z_i), \ l_1^{(i)} = hf_2(x_i, y_i, z_i),$$

$$K_2^{(i)} = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}), \ l_2^{(i)} = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}),$$

$$K_3^{(i)} = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}), \ l_3^{(i)} = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}),$$

$$K_4^{(i)} = hf_1(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}), \ l_4^{(i)} = hf_2(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}).$$

Пример 5.1. Численно решить дифференциальное уравнение

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \ y(0) = 1$$

на отрезке [0;1] с шагом $h = 0,2$ методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге−Кутта. Найти точное решение $y = y(x)$ и сравнить значения точного и приближенных решений в точке $x = 1$. Найти абсолютную и относительную погрешности в этой точке для каждого метода. Вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

Шагом интегрирования $h = 0,2$ отрезок [0;1] разбивается на пять равных частей точками $x_0 = 0$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$; $x_5 = 1,0$.

Решение уравнения методом Эйлера

Приближенные значения $y_1, y_2, ..., y_5$ решения исходного уравнения в точках $x_1, x_2, ..., x_5$ вычислим по формуле (5.7), в которой $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$. Результаты вычисления будем заносить в табл. 5.1.

Заполняется она следующим образом: в первой строчке при $i = 0$ записываются начальные значения $x_0 = 0,0$, $y_0 = 1,0000$, и по ним вычисляется $f(x_0, y_0) = 1,0000$, а затем $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0,2 \cdot 1,000 = 0,2000$. Тогда по формуле (5.7) при $i = 0$ находим $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,0000 + 0,2000 = 1,2000$.

Во второй строчке при $i=1$ записываем значения $x_1=0,2$; $y_1=1,2000$. Используя эти значения, вычислим $f(x_1,y_1)=0,8667$, затем $\Delta y_1=hf(x_1,y_1)=0,2\cdot 0,8667=0,1733$. И по формуле (5.7) получаем $y_2=y_1+\Delta y_1=1,2000+0,1733=1,3733$. При $i=2,3,4,5$ вычисления ведутся аналогично.

Таблица 5.1

i	x_i	y_i	Вычисления $f(x_i,y_i)$		Δy_i
			$\frac{2x_i}{y_i}$	$y_i-\frac{2x_i}{y_i}$	
0	0,0	1,0000	0	1,0000	0,2000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451
5	1,0	1,8237			

Решение уравнения модифицированным методом Эйлера

Приближенные значения $y_1,y_2,...,y_5$ решения исходного уравнения в точках $x_1,x_2,...,x_5$ вычисляем по формулам (5.10) и (5.11), в которых $f(x,y)=y-\frac{2x}{y}$. Результаты вычислений будем заносить в табл. 5.2. Заполняется она следующим образом: в первой строке записываем $i=0$, $x_0=0,0$, $y_0=1,0000$. Вычисляем

$$x_0=x_0+\frac{h}{2}=0,0+0,1=0,1; \qquad f_0=f(x_0,y_0)=1,0000.$$

Далее находим $y_{0+\frac{1}{2}}=y_0+\frac{hf_0}{2}=1,0000+\frac{0,2\cdot 1,0000}{2}=1,1000$;

$$f\left(x_{0+\frac{1}{2}},y_{0+\frac{1}{2}}\right)=0,9182; \quad \Delta y_0=hf\left(x_{0+\frac{1}{2}},y_{0+\frac{1}{2}}\right)=0,1836.$$

Тогда по формуле (5.11) при $i=0$ имеем

$$y_1=y_0+\Delta y_0=1,0000+0,1836=1,1836.$$

Используя этот результат, записываем во второй строчке $i=1$, $x_1=0,2$, $y_1=1,1836$ и последовательно находим

$$x_{1+\frac{1}{2}}=x_1+\frac{h}{2}=0,3; \qquad f_1=f(x_1,y_1)=0,8457;$$

$$y_{1+\frac{1}{2}} = y_1 + \frac{hf_1}{2} = 1{,}2682;\ f\left(x_{1+\frac{1}{2}}, y_{1+\frac{1}{2}}\right) = 0{,}7942;$$

$$\Delta y_1 hf\left(x_{1+\frac{1}{2}}, y_{1+\frac{1}{2}}\right) = 0{,}1590.$$

Тогда по формуле (4.11) при $i = 1$ имеем $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1836 + 0{,}1590 = 1{,}3426.$ Заполнение табл. 5.2 при $i = 2, 3, 4, 5$ проводится аналогично.

Таблица 5.2

i	x_i	x_i	$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$	$f_i = f(x_i, y_i)$	$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{hf_i}{2}$	$\Delta y_i = hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$
0	0,0	1,0000	0,1	1,0000	1,0000	0,1836
1	0,2	1,1836	0,3	0,8457	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,5	0,7467	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,7	0,6769	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,9	0,6246	1,6778	0,1210
5	1,0	1,7362				

Решение уравнения методом Рунге-Кутта

Приближенные значения $y_1, y_2, ..., y_5$ решения исходного уравнения будем вычислять по формулам (5.12), где результаты вычислений помещаем в табл. 5.3, заполняя ее в следующем порядке. При $i = 0$:

1. Записываем в первом строке $x_0 = 0{,}0$, $y_0 = 1{,}0000.$
2. Вычисляем $f(x_0, y_0) = 1{,}0000;$ $K_1^{(0)} = 0{,}2 \cdot 1{,}0000 = 0{,}2000.$
3. Записываем во второй строке $x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}1;$ $y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} = 1{,}1000.$
4. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = 0{,}9182;$ тогда $K_2^{(0)} = 0{,}1836.$
5. Записываем в третьей строке $x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}1;$ $y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} = 1{,}0918.$
6. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = 0{,}9086;$ тогда $K_3^{(0)} = 0{,}1817.$
7. Записываем в четвертой строке $x_0 + h = 0{,}2;$ $y_0 + K_3^{(0)} = 1{,}1817.$

8. Вычисляем $f\left(x_0+h, y_0+K_3^{(0)}\right)=0{,}8432$; тогда $K_4^{(0)}=0{,}1686$.

9. В столбце Δy записываем числа $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$.

10. Вычисляем $\Delta y_0=\frac{1}{6}\left(K_1^{(0)}+2K_2^{(0)}+2K_3^{(0)}+K_4^{(0)}\right)=0{,}1832$.

11. Получаем $y_1=y_0+\Delta y_0=1{,}1832$.

Значения $x_1=0{,}1$, $y_1=1{,}1832$ заносим в строку, помеченную индексом $i=1$, и снова проводим вычисления по формулам (5.12).

Таблица 5.3

i	x	y	$K=hf(x,y)$	Δy
0	0,0	1,0000	0,2000	0,2000
	0,1	1,1000	0,1836	0,3672
	0,1	1,0918	0,1817	0,3634
	0,2	1,1817	0,1686	0,1686
				0,1832
1	0,2	1,1832	0,1690	0,1690
	0,3	1,2677	0,1588	0,3178
	0,3	1,2627	0,1575	0,3150
	0,4	1,3407	0,1488	0,1488
				0,1584
2	0,4	1,3417	0,1490	0,1490
	0,5	1,4162	0,1420	0,2840
	0,5	1,4127	0,1409	0,2819
	0,6	1,4826	0,1346	0,1346
				0,1416
3	0,6	1,4833	0,1348	0,1348
	0,7	1,5507	0,1296	0,2592
	0,7	1,5481	0,1287	0,2575
	0,8	1,6120	0,1239	0,1239
				0,1292
4	0,8	1,6125	0,1241	0,1241
	0,9	1,6745	0,1199	0,2398
	0,9	1,6725	0,1192	0,2385
	1,0	1,7317	0,1154	0,1154
				0,1196
5	1,0	1,7321		

Аналитическое решение заданного уравнения

Уравнение $y' - y = -2xy^{-1}$ – уравнение Бернулли. Проинтегрируем его, для чего положим $y = uv$, где u и v две неизвестные функции аргумента x. Тогда исходное уравнение преобразуется к следующему:

$$u'v + uv' - uv = -2x(uv)^{-1}$$

или

$$u(v' - v) + u'v = -2x(uv)^{-1}. \qquad (*)$$

Функцию v выберем из условия $v' - v = 0$, причем возьмем частное решение этого дифференциального уравнения $v = e^x$. Подставим в уравнение (*), получаем, $u'e^x = -2xu^{-1}e^{-x}$, а это – уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его, находим

$$u^2 = c + 2xe^{-2x} + e^{-2x}.$$

Так как решение исходного уравнения есть произведение функции u и v, то получаем

$$y = \sqrt{ce^{2x} + 2x + 1}.$$

Используя начальное условие $y(0) = 1$, получим $1 = \sqrt{c+1}$, $c = 0$.

Таким образом, искомое частное решение есть $y = \sqrt{2x+1}$.

Сравнение точного решения и приближенных решений исходного дифференциального уравнения

Таблица 5.4

Решение	x=0,2	x=0,4	x=0,6	x=0,8	x=1,0	В точке x=1,0	
						Абсолют. погрешн.	Относит. погрешн.
Точное	1,1832	1,3416	1,4832	1,6124	1,7320		
Метод Эйлера	1,2000	1,3733	1,5294	1,6786	1,8237	0,0917	5,3 %
Модиф. метод Эйлера	1,1836	1,3426	1,4850	1,6152	1,7362	0,0042	0,24 %
Метод Рунге-Кутта	1,1832	1,3417	1,4833	1,6125	1,7321	0,0001	0,006 %

Задачи и упражнения

5.1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 2y = x^2$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$, методом Эйлера на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0{,}1$. Построить таблицу и график приближённого решения.

5.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 2y = x^2$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$, усовершенствованным методом Эйлера на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0{,}1$. Построить таблицу и график приближённого решения.

5.3. Используя метод Рунге–Кутта, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = 0{,}2x + 3y^2$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0{,}2$ на отрезке $[0;0{,}5]$ с шагом $h = 0{,}1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками и расположить их в таблицу.

5.4. Вычислить тремя методами: усовершенствованным методом Эйлера, Рунге-Кутта и Эйлера интеграл дифференциального уравнения $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0;0{,}5]$ с шагом интегрирования $h = 0{,}1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Широкое применение дифференциальных уравнений достаточно актуально в современном научном мире. Практически любой процесс может быть описан с помощью дифференциального уравнения. Поэтому трудно переоценить значение теории дифференциальных уравнений в математическом моделировании. Предлагаемое учебное пособие позволит изучить основные понятия и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, освоить понятия устойчивости, асимптотической устойчивости численных решений, а также некоторые приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В целом, пособие ориентировано на разнообразные инженерные приложения дифференциальных уравнений в математическом моделировании.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 447 с.

2. Боровских, А.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.В. Боровских, А.И. Перов. – М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Институт компьютерных исследований, 2004. – 540 с.

3. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – 10-е изд., доп. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 207 с.

4. Эльсгольц, Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – СПб.: Лань, 2002. – 218 с.

5. Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин. – Изд. 4-е, стер. – М.: УРСС, 2007. – 206 с.

6. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.

7. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин.− М.: «Наука». Главное издательство физико-математической литературы, 1987. − 235 с.

8. Самарский, А.А. Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов . - 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

9. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. - М.: Наука, 2008. − 176 с.

10. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. − 240 с.

11. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. - М.: Наука, 1986. – 288 с.

12. Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / Перевод с англ. И.С. Емельяновой. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. – 432 с.

13. Просветов, Г.И. Дифференциальные уравнения: задачи и решения. Учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – М.: Изд-во «Альфа-Пресс», 2011. – 88 с.

14. Егоров, А. И. Дифференциальные уравнения для инженерных направлений / А. И. Егоров, Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева. - Казань: Изд. КГУ, 2013. − 52 с.

15. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения. Введение в математическое моделирование / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. Изд-во: Университетская книга, Логос, 2007 в 2-х ч. – Ч. 2.

16. Мышенков, В.И. Численные методы: ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб.-пособ. для студ. спец. 073000/ В.И. Мышенков, Е.В. Мышенков. – М.: МГУЛ, 2005. – 109 с.

17. Горелов, Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге–Кутта): учеб. пособие/ Ю.Н. Горелов. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 48 с.

Учебное издание

СЕМЕНОВ Михаил Евгеньевич
НЕКРАСОВА Наталия Николаевна
КАНИЩЕВА Олеся Ивановна
БАРСУКОВ Андрей Иванович
ПОПОВ Михаил Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

для магистрантов всех направлений подготовки

В авторской редакции

Подписано в печать 07.07.2017. Формат 60х84 1/16.
Усл.-печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 10,9. Бумага для множительных аппаратов.
Тираж 100 экз. Заказ № 86 .

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026, Воронеж, Московский проспект,14
Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026, Воронеж, Московский проспект,14