

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический  
университет»

В.И. Корольков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ САМОЛЕТОСТРОИТЕЛЬНОГО  
ПРОИЗВОДСТВА: КУРС ЛЕКЦИЙ

Часть 1

Утверждено Редакционно-издательским советом  
Университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2021

УДК 519.71

Корольков В.И. Математическое и компьютерное моделирование технологических процессов самолетостроительного производства: курс лекций / В.И. Корольков. Воронеж: ФГБОУВО «Воронежский государственный технический университет», 2021. Ч. 1. 165 с.

Учебное пособие посвящено методам математического моделирования, оптимизации механических систем и технологических процессов. Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 24.05.07 «Самолето- и вертолетостроение», дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование технологических процессов самолетостроительного производства».

Предназначено для студентов пятого курса очной формы обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе MS WORD и содержится в файле МКМТП. doc.

Табл. 30. Ил. 106. Библиогр.: 10 назв.

Рецензенты: Филиал ОАО «Корпорация «Иркут» в г. Воронеже  
(директор филиала канд. техн. наук В.А. Шалиткин);  
канд. техн. наук, доц. А.П. Будник

© В.И. Корольков, 2021  
© Оформление. ФГБОУВО  
«Воронежский государственный  
технический университет», 2021

## Лекция 1. Методы моделирования, модели, оптимизация

Моделирование – процесс замещения объекта исследования его моделью и проведение исследования на модели с целью получения необходимой информации об объекте.

Модель – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать основные физические свойства и характеристики объекта.



Рисунок 1 – Основные виды моделирования.

Математическая модель – это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого объекта.

Математическое моделирование (ММ) – процесс формирования ММ и использование ее для анализа и синтеза (вычислительный эксперимент).

Алгоритм – это предписание, определяющее последовательность выполнения операций вычислительного процесса.

Программная модель – алгоритм, записанный в форме, понятной ЭВМ.

Основные принципы методологии разработки сложной системы:

– **Макропроектирование** – разработка обобщенной модели функционирования системы, стратегия управления, взаимодействие с внешней средой

Анализ – построение модели объекта управления для оценки его характеристик (изучение объекта управления, модель взаимодействия с внешней средой, критерии оценки эффективности, ресурсы, необходимые ограничения).

Синтез – выбор стратегии управления на основе модели объекта.

– **Микропроектирование** – разработка моделей с целью создания эффективных подсистем.

Аналитический подход – построение замкнутой аналитической процедуры вычислений (моделирование простых элементов).

Имитационные модели – имитация реального процесса (универсальность описания, поиск оптимальных решений, повышение точности информации).

**Цель компьютерной системы** – устранить источники дефектов на этапе проектирования (50-70% дефектов связано с ошибками в проектных решениях; 20-30% - с недостатками технологических процессов; 5-15% - вина рабочего).

«...ошибку, допущенную при «завязке» проекта, уже не исправить совершенством инженерных расчетов...» Прохор Осипович Сухой.

### **Основные требования к технологической компьютерной системе:**

- Адекватность моделирования реальных процессов
- Генерация оптимальных решений
- Прогнозирование браковочных признаков и свойств детали (изделия)
- Максимально полное использование возможностей оборудования и материала
- Небольшие временные затраты на проектирование

## Лекция 2. Методология моделирования

Основа современной методологии моделирования – системный подход – последовательный переход от общего к частному, когда в основе лежит цель, а исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Обозначения:

**Система S** – целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы.

Внешняя среда E – множество существующих вне системы элементов.

Структура – упорядоченное множество элементов и их отношений.

Параметр – величина, характеризующая свойство или режим работы системы (или технического объекта ТО).

Параметры могут быть:

- внешние – характеризуют свойства внешней среды;
- внутренние – характеризуют свойства элементов ТО;
- выходные – характеризуют свойства ТО.

### Постановка задачи проектирования технического объекта

Техническое задание на проектирование обычно представляет собой вербальное (словесное) описание целей и задач создания данного объекта. Поэтому задача моделирования: определить структуру и внутренние параметры ТО, дающие экстремум некоторой функции  $F(x)$  при заданных ограничениях  $\varphi(x) > 0$ ,  $\psi(x) = 0$ . В данном случае функция  $F$  – целевая функция или функция качества.

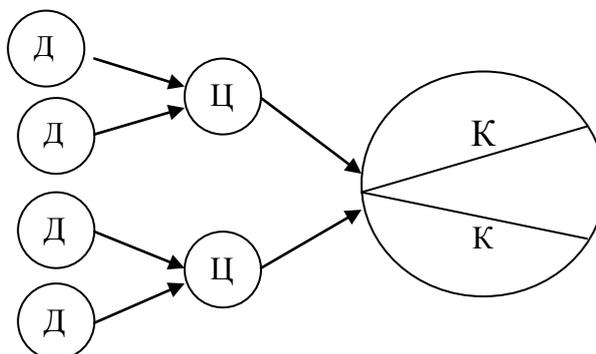
Моделирование ТО – это решение оптимизационной задачи.

### Синтез модели

1) Классический (индуктивный) подход.

Отдельные компоненты не связаны между собой.

Используется для сравнительно простых моделей.



Д - исходные данные; Ц - цели, отображающие отдельные стороны системы; К – компоненты модели

Рисунок 2 – Классический подход

2) Системный подход.

Система рассматривается как целое, состоящее из интегрированных подсистем.

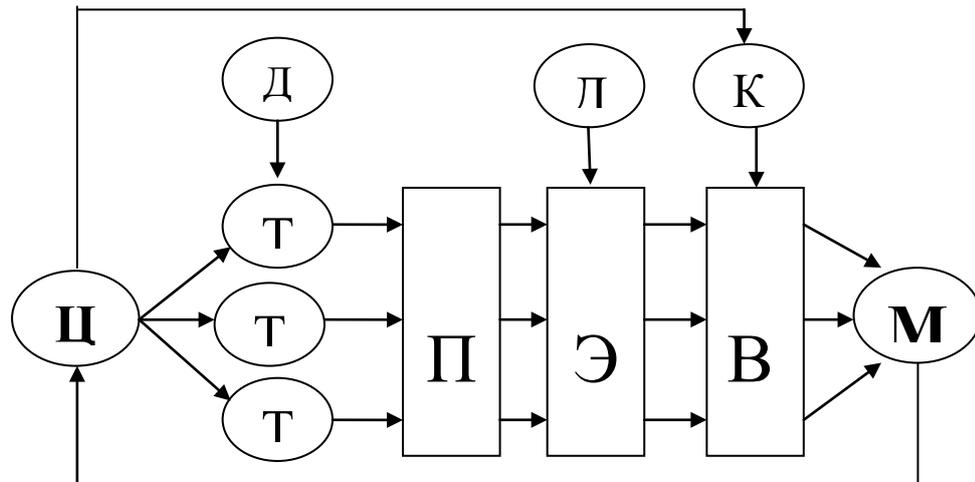


Рисунок 3 – Системный подход

На основе исходных данных и требований (Т) к модели, формируются подсистемы (П), элементы (Э) и осуществляется выбор (В) составляющих системы с помощью критериев выбора (КВ).

Таблица 1.Классификация видов моделирования систем

Моделирование	
Детерминированное	Стохастическое
Статическое	Динамическое
Дискретное	Дискретно-непрерывное
Мысленное	Непрерывное
Наглядное	Реальное
Символическое	Натурное
Математическое	Физическое
Гипотетическое	Научный эксперимент
Языковое	В реальном масштабе времени
Аналитическое	В нереальном масштабе времени
Аналоговое	Комплексные испытания
Знаковое	В нереальном масштабе времени
Комбинированное	Производственный эксперимент
Макетирование	
Имитационное	

**Имитационное моделирование**

Алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, имитируя элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности.

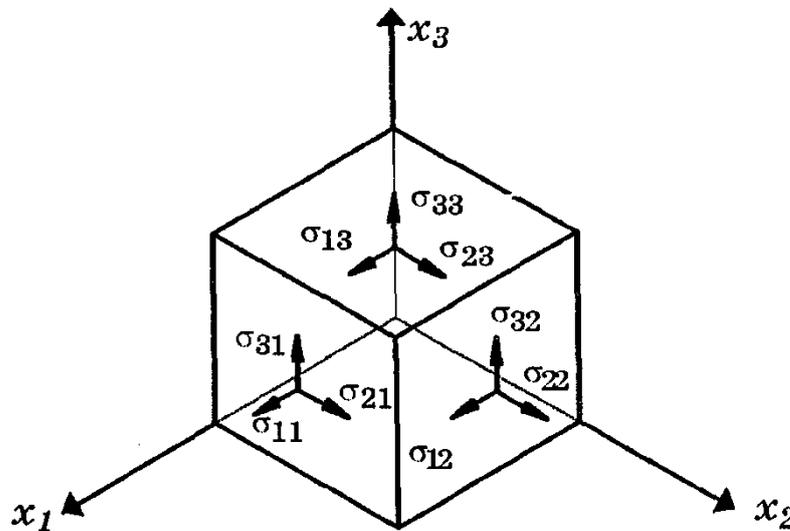
Преимущество. Возможность решения сложных задач.

### Лекция 3. Модели механических систем

Форма и размеры элементов механических систем и их взаимное расположение определяют важнейшие параметры технического объекта (ТО) – массу, габариты, показатели надежности и долговечности.

Для выбора геометрических параметров необходим анализ надежности и долговечности системы (НДС) его элементов. Математическая модель (ММ) анализа НДС элемента механической системы является основным уравнение теории упругости - уравнение Ламе.

Выделим в твердом теле элементарный параллелепипед согласно рисунку 4.



**Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда**

Рисунок 4 – Элемент тела

Условие равновесия - геометрическая сумма сил, приложенных к выделенному параллелепипеду, включая его силу инерции, равна нулю, тогда:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, i = 1,2,3; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \text{ при } i \neq j, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – деформация;

$\lambda, \mu$  - постоянные Ламе.

Деформация вычисляемая по следующей формуле:

$$\varepsilon_{ij} = 0,5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

Постоянные Ламе можно определить по следующим формулам:

$$\lambda = \frac{E\vartheta}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}; \quad (5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\vartheta)}, \quad (6)$$

где  $E$  - модуль упругости первого рода;

$\vartheta$  - коэффициент Пуассона.

Часто модели напряженного состояния оказываются более удобными в интегральной форме. Вариационный принцип Лагранжа гласит: потенциальная энергия системы получает стационарные значения на тех кинематически возможных перемещениях, отвечающих граничным условиям, которые удовлетворяют условиям равновесия. Поэтому модель можно представить в виде:

$$E_n = E_\partial - W, \quad (7)$$

где  $E_\partial = 0,5 \int_{\vec{R}} \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} d\vec{R}$ ;  $\vec{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})$  - вектор-строка деформаций;

$\vec{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$  - вектор-столбец напряжений;

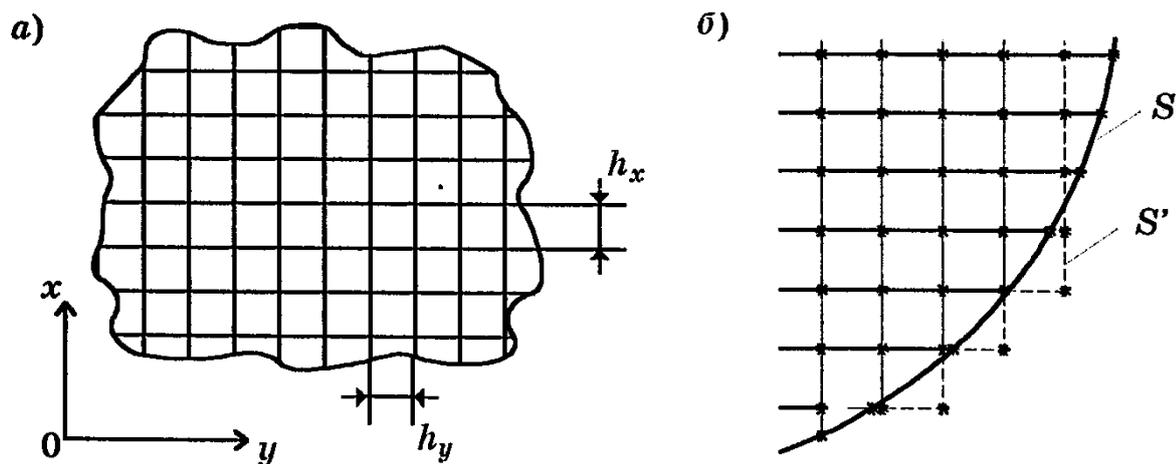
$\vec{R}$  - область определения искомой функции.

Вместо решения уравнения Ламе можно минимизировать функционал.

Точные решения дифференциальных краевых задач удается получить лишь для немногих частных случаев. Поэтому создают приближенные ММ. Один из подходов создания приближенной ММ – дискретизация задачи.

Дискретизация представляет собой замену областей непрерывного изменения координат  $x$  и времени дискретным множеством точек. Эти точки называют узлами сетки и в них определяют значения искомой функции. Используя эти значения можно заменить дифференциальные уравнения на алгебраические уравнения.

В зависимости от способа дискретизации различают два метода сеток метод конечных разностей МКР (рисунок 5а): и метод конечных элементов МКЭ (рисунок 5б).



**Дискретизация области определения объекта моделирования с помощью сетки (а) и аппроксимация границы области (б)**

Рисунок 5 – Методы сеток.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0, \quad (8)$$

или в компактной форме

$$L\varphi(\vec{Z}) = \theta(\vec{Z}), \quad (9)$$

где  $L$ - дифференциальный оператор;

$\varphi$  - искомая функция - фазовая координата;

$x_i$ - пространственные координаты;

$n$  - количество пространственных координат;

$t$  - время;

$\vec{Z}$  - вектор независимых переменных;

$\theta(\vec{Z})$  - известная функция независимых координат.

В свою очередь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi(\vec{X}) = \theta(\vec{X}, t), \quad (10)$$

где  $\vec{X}$  - вектор геометрических координат:  $\vec{X} = (x, y, z)^T$ .

Дифференциальный оператор  $L\varphi(\vec{X})$  может включать первые, вторые, третьи и т.д. производные функции  $\varphi$  по независимым переменным  $x, y, z$ . Эти производные при алгебраизации задачи заменяются отношениями конечных разностей.

Выполним алгебраизацию уравнения 1), полагая, что технический объект одномерный и моделируемый процесс стационарный, т.е.  $\dot{X} = x; \partial\varphi/\partial t = 0$ .

Предположим, что дифференциальный оператор  $L\varphi(x) = \partial\varphi/\partial t$ . Тогда исходное дифференциальное уравнение имеет вид  $\partial\varphi/\partial t = \theta(x)$ .

Частные производные аппроксимируются отношениями конечных разностей, выраженных через значения функции в узлах сетки. Схемы конечных разностей могут быть различными: по двум, трем и более точкам. Подставив выражение для производной в дифференциальное уравнение, получим систему алгебраических уравнений, которые можно решать математическими методами.

Осуществим дискретизацию независимой переменной  $x$ , введя сетку с постоянным шагом  $h$  и заменим частную производную  $\partial\varphi/\partial x$  следующим отношением конечной производной:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = [\varphi(x+h) - \varphi(x)]/h. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в исходное дифференциальное уравнение, получаем разностное уравнение:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\theta(x) = 0 \quad (12).$$

Пронумеруем узлы сетки от 0 до  $n+1$ . Узлы с номерами 0 и  $n+1$  будут граничными, а узлы до  $\overline{1, n}$  - внутренними. В результате дискретизации независимой переменной  $x$  они получают следующее значение в узлах сетки:  $x = 0, 2h, \dots, (n+1)h$ . Подставляя последовательно эти значения в уравнения (12), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(h) - \varphi(0) - h\theta(x) = 0 \\ \varphi[(n+1)h] - \varphi(nh) - h\theta(nh) = 0 \\ \varphi(2h) - \varphi(p) - h\theta(p) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

В системе уравнений (13)  $\theta(x)$  при  $x = 0, h, 2h, \dots$  - заданная функция, определяемая в узлах сетки, а  $\varphi(0)$  и  $\varphi[(n+1)h]$  - значения фазовой переменной  $\varphi$  в граничных узлах, определяемых из уравнения, описывающих граничные условия.

## МКЭ – метод конечных элементов

При решении задач, связанных с определением напряжений и деформаций в элементах конструкций технических объектов, наиболее часто используют МКЭ. Дискретизация такого объекта осуществляется с использованием конечных элементов. Область геометрического пространства разделяется на подобласти – конечные элементы (КЭ). В одномерных задачах КЭ – отрезки линий, в двумерных – треугольники или прямоугольники, в трехмерных – тетраэдры или параллелепеды. Для каждого КЭ выбираются аппроксимирующие функции. Малые размеры КЭ позволяют использовать простые аппроксимирующие функции, например:

$$\vartheta(\vec{X}) = \sum_{i=0}^r a_i x^i. \quad (14)$$

Функции  $\vartheta(\vec{X})$  в МКЭ представляют в форме:

$$\vartheta(\vec{X}) = \sum_{i=0}^r q_i \Phi_i(\vec{X}), \quad (15)$$

где коэффициенты  $q_i$  имеют вполне определенный физический смысл — это значения аппроксимирующей функции в узловых точках:  $\Phi_i$  — функции, называемые *координатными* (или *функциями формы*);  $r$  — число узловых точек в конечной элементе.

В общем случае аппроксимации в  $m$ -мерном пространстве выражение функции принимает вид:

$$V(x) = N(Q), \quad (16)$$

где  $V(x)$  – вектор размерности  $m \times 1$ ,

$Q$  – вектор размерности  $(mr) \times 1$ ,

$N$  – интерполяционная матрица порядка  $m \times (mr)$ .

Для механических систем в МКЭ минимизируют функционал, дифференцируя  $E_p$  по вектору  $Q$  и находят вектор перемещений.

Деформации  $\varepsilon_{ij}$  связаны с перемещениями  $u_i$  соотношениями, представленными ранее, что можно выразить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

или более лаконично

$$\vec{\varepsilon} = S\vec{U}(\vec{X}), \quad (18)$$

где  $S$  - матрица-оператор дифференцирования.

Заменяя вектор аппроксимацией  $\vec{V}(\vec{X})$ , получаем:

$$E_n = 0,5 \int_{\vec{R}} \vec{Q}^T B^T D B \vec{Q} d\vec{R} - W, \quad (19)$$

где  $B = SN$ .

Обозначим

$$K = \int_{\vec{R}} B^T D B d\vec{R}. \quad (20)$$

Матрицу  $K$  называют матрицей жесткости, тогда

$$E_n = 0,5 \vec{Q}^T K \vec{Q} - W. \quad (21)$$

В соответствии с принципом Лагранжа дифференцируем  $E_n$  по вектору  $\vec{Q}$ , и приравниваем нулю. В результате получаем систему алгебраических уравнений

$$K \vec{Q} = \vec{P} \quad (22)$$

где  $\vec{P} = \frac{\partial W}{\partial \vec{Q}}$  - вектор правых частей, называемый вектором нагрузок.

Матрица жесткости  $K$  всей исследуемой детали составляется из матриц жесткости  $K_{ij}$  отдельных КЭ. Матрицы  $K_{ij}$  несут информацию о конфигурации и упругих свойствах материала конечных элементов.

## Лекция 4. Методы оптимального проектирования

### Оптимальное решение

В производстве задачи оптимизации возникают при проектировании, разработке технологических процессов и в управлении. Что же такое оптимальное решение?

«История человечества делится на три эпохи — дикость, варварство и цивилизация» Льюис Генри Морган (1818—1881).

Что делать и из чего — это вопросы, которые должны быть решены на этапе, со временем названном проектированием. И совсем не важно, где производится проектирование — в больших зданиях или в голове. Вопросы решаются в принципе одни и те же: что, каких размеров, из какого материала делать?

Каким способом делать — это вопрос, на который отвечает целая наука, называемая **технологией**. Цель технологии — разработка технологического процесса, т. е. последовательности операций, которые превращают сырье в готовую продукцию. Несоблюдение требований технологии может привести к тому, что спроектированное изделие нельзя изготовить. И при проектировании изделия, и при разработке технологического процесса его изготовления возникает уйма вопросов.

Например, какой формы должен быть кувшин заданного объема, чтобы его стоимость была минимальной?

Пройдут годы, века, тысячелетия, а такая постановка задачи сохранится независимо от того, что будут изготавливать. Иными словами, при проектировании объективно существует одна из двух задач:

**ЛИБО СДЕЛАТЬ ИЗДЕЛИЕ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ; ЛИБО СДЕЛАТЬ ИЗДЕЛИЕ ЗАДАННОЙ СТОИМОСТИ С МАКСИМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ.**

Наилучшее решение этих задач может быть получено лишь с помощью методов оптимального проектирования.

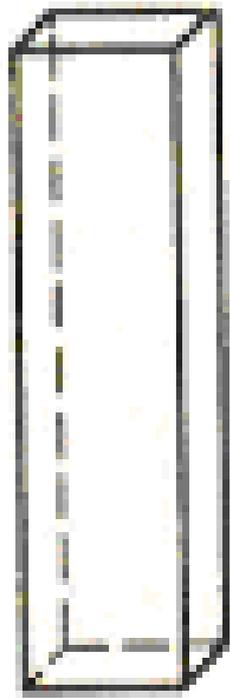
#### **Первая модель**

То, что мы хотим спроектировать, будем называть объектом проектирования (ОП). Каждый ОП обладает определенными свойствами. Эти свойства могут быть как количественными, так и качественными. Примерами количественных свойств могут быть масса, производительность, стоимость и т.д. Примерами качественных свойств — надежность, удобство эксплуатации и, наконец, само понятие «качество».

Рассмотрим проектирование прямоугольного бака объемом  $V=2000$ .

Объем  $V=abh$ , где  $a$ ,  $b$  — стороны основания,  $h$  — высота, рисунок 6.

При проектировочном расчете мы находим зависимость искомых параметров от заданных. В нашем случае такая зависимость будет, скажем,



$$h = V / (ab).$$

Рисунок 6– Эскиз бака

При заданном значении  $V$ , задаваясь различными  $a$  и  $b$ , будем получать различные варианты баков, рисунок 7. При этом все варианты будут заданного объема. Если мы зададимся одним вариантом значений  $a$  и  $b$ , то расчет будет одновариантным. Если таких значений будет несколько вариантов, то расчет будет многовариантным.

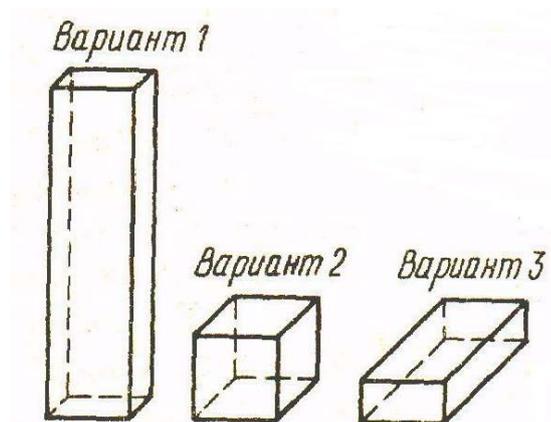


Рисунок 7– Варианты формы бака

Таблица 2

Вариант	a	b	h
1	10	5	40
2	10	25	10
3	10	35	5,7

Рассмотрим, что дает многовариантный расчет. В табл. приведено три варианта расчета бака объемом  $V = 2000$ .

*Правило: прежде чем получить результат, подумай, что ты с ним будешь делать!*

Следуя этому правилу прежде, чем приступать к проектированию, следует договориться том, по какому признаку будем выбирать наилучший вариант. В нашем случае принимаем, что бак выкраиваем из листа, а затем сгибаем и свариваем, рисунок 8. Для сравнения разных вариантов принимаем две величины: полную поверхность бака и длину сварного шва.

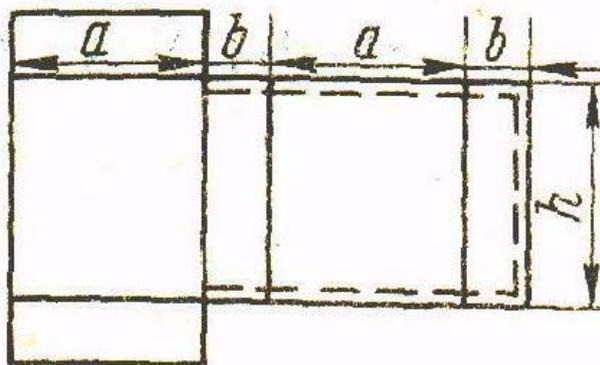


Рисунок 8– Схема раскроя

Таблица 3

Вариант	S	l
1	1300	80
2	1000	110
3	1213	166

$$\begin{aligned}
 S &= 2[ab + (a + b)h], \\
 l &= 2(a + 2b) + h.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Постановка задачи моделирования

Определить размеры бака объемом  $V=2000$ , чтобы на его изготовление требовалось как можно меньше материала.

$$\begin{aligned}
 F = S &\rightarrow \min, \\
 V &= 2000,
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

или

$$\begin{aligned}
 F &= 2(ab + (a + b)h) \rightarrow \min, \\
 abh &= 2000,
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

при этом должно выполняться условие  $0 < a, b, h < \infty$ .

Математическая модель нахождения оптимального решения будет следующей:

$$\begin{aligned} F &= 2(ab + (a + b)h) \rightarrow \min \rightarrow \text{ЦФ}, \\ abh &= 2000 \rightarrow \text{ОГР}, \\ 0 < a, b, h < \infty &\rightarrow \text{ГРУ}, \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что наша задача может быть решена и в другом варианте, в котором в качестве целевой функции принимается минимизация длины сварного шва. В этом случае модель будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F &= L \rightarrow \min, \\ V &= 2000, \\ 0 < a, b, h < \infty, \end{aligned} \quad (27)$$

или

$$\begin{aligned} F &= 2(a + 2b) + h \rightarrow \min \rightarrow \text{ЦФ}, \\ abh &= 2000 \rightarrow \text{ОГР}, \\ 0 < a, b, h < \infty &\rightarrow \text{ГРУ}, \end{aligned} \quad (28)$$

Таблица 4 – Результаты решения задач:

ЦФ	a	b	h	S	L
S → min	12,6	12,6	12,6	953	88
L → min	12,6	6,3	25,2	1111	76

Давайте сравним найденные оптимальные решения с наилучшими вариантами вариантного проектирования:

$$\Delta F = (F_{\text{вар}} - F_{\text{опт}}) / F_{\text{опт}} \times 100\%. \quad (29)$$

Таблица 5

Расчет	S	L
Вариантный	1000	80
Оптимальный	953	76
ΔF	4,9	5,8

Постановка задачи оптимизации в общем виде:

$$\begin{aligned} F &= 2(X_1X_2 + (X_1 + X_2)X_3) \rightarrow \min \rightarrow \text{ЦФ}, \\ X_1X_2X_3 - 2000 &= 0 \rightarrow \text{ОГР}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$0 < X_1, X_2, X_3 > \infty \rightarrow \text{ГРУ},$$

или в самом общем случае

$$\begin{aligned} F = f(x_j) &\rightarrow \max (\min) \rightarrow \text{ЦФ}, \\ g_i(x_j) &= 0 \rightarrow \text{ОГР}, \\ a_j \leq x_j \leq b_j &\rightarrow \text{ГРУ}, \\ i = 1 \dots m ; j &= 1 \dots n. \end{aligned} \quad (31)$$

Стремление к оптимизации — это естественное состояние человека. Человек по своей природе является прирожденным оптимизатором. Он занимается оптимизацией, потому что ему необходимо экономить свои ограниченные запасы энергии, ресурсов, времени. Он оптимизирует, чтобы минимизировать продолжительность работы или максимизировать ее результат. Каждый шаг человека, каждое принимаемое им решение — это зачастую неосознанное, но объективно существующее желание получить оптимальный результат. И не случайно это естественное поведение человека нашло отражение в пословицах: «Рыба ищет, где глубже, человек — где лучше» — для случая максимизации, «Из двух зол выбирают меньшее» — для минимизации.

Итак, чтобы задача имела оптимальное решение, она должна удовлетворять двум требованиям: должна быть реальная возможность иметь более одного решения, т. е. должны быть допустимые решения; должен быть принят критерий, показывающий, в каком смысле принимаемое решение должно быть наилучшим, т. е. оптимальным, из допустимых.

Таблица 6– Классификация задач оптимизации

Область применения	Управление	Проектирование	Разработка технологических процессов
Основные задачи	Задачи распределения ресурсов	Оптимизация параметров объекта проектирования Оптимизация структуры объекта проектирования Оптимизация функционирования	Оптимизация маршрута изготовления изделия Оптимизация параметров технологического процесса

## Лекция 4. Методы оптимального проектирования.

### Часть 2.

#### Распределение ресурсов

Пример 1. Составим модель распределения ресурсов на примере задачи о назначениях. Допустим, в распоряжении вождя племени Уго есть два дикаря: Дик 1 и Дик 2. Одного из них Уго хочет отправить на охоту, другого — на рыбную ловлю. В данном случае возможно два варианта назначения на работу, которые являются допустимыми решениями.

Таблица 7

Вариант 1	Вариант 2
Дик 1 — охота	Дик 1 — рыбная ловля
Дик 2 — рыбная ловля	Дик 2 — охота

Таблица 8

	Охота	Рыбная ловля
Дик 1	3	4
Дик 2	4	4

Выбираем вариант 2

Число возможных вариантов:  $N=n!$

Таблица 9

	Охота	Рыбная ловля	Приготовление пищи
Дик 1	3	4	5
Дик 2	4	4	2
Дик 3	2	4	3

Таблица 10

	Число возможных вариантов: $N=3!=1*2*3=6$					
Варианты:	1	2	3	4	5	6
Дик 1	3	3	4	4	5	5
Дик 2	4	2	4	2	4	4
Дик 3	3	4	3	2	4	2
	10	9	11	8	13	11

Пример 2. Тренер секции бальных танцев готовит команду для выступления на крупных соревнованиях. Ему необходимо оптимальным образом составить пары. Для этого он составил таблицу, в которой выставил оценки парам, составленным в различных комбинациях.

Таблица 11

	Андрей	Борис	Виктор	Гена	Дима	Жора	Иван	Костя	Леня
Аня	3	4	5	2	4	5	3	2	5
Валя	4	4	2	4	5	4	5	5	3
Галя	2	4	3	5	4	5	3	4	5
Даша	3	4	5	5	3	4	4	3	3
Женя	4	5	5	3	4	5	3	5	4
Зина	3	2	3	5	4	5	2	3	5
Ира	5	2	4	3	2	5	3	4	5
Лариса	3	3	2	5	4	4	5	5	4
Нина	4	5	2	3	4	4	3	5	4

$$N = 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880.$$

Для каждой пары танцующих введем обозначение  $x_{ij}$ , в котором индекс  $i$  означает номер девушки (строки), а индекс  $j$  — номер парня (столбца). Тогда можно записать: Аня + Андрей =  $x_{11}$ ; Аня + Борис =  $x_{12}$ ; Валя + Андрей =  $x_{21}$ , Валя + Борис =  $x_{22}$ . На все искомые переменные  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$  накладываем очень важное ограничение. Все эти переменные в результате решения не могут принимать никаких других значений, кроме 1 и 0.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если девушка танцует с } j\text{-м парнем} \\ 0 & \text{— в противном случае} \end{cases} \quad (31)$$

Таблица 12

i	j	
	Андрей (j=1)	Борис (j=2)
Аня (i=1)	$3x_{11}$	$4x_{12}$
Валя (i=2)	$4x_{21}$	$4x_{22}$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 1 & x_{11} + x_{21} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} &= 1 & x_{12} + x_{22} &= 1, \\ F &= 3x_{11} + 4x_{12} + 4x_{21} + 4x_{22} \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (32)$$

Решение данной оптимизационной задачи позволяет получить результат, представленный в таблице 13.

Таблица 13

	Андрей	Борис	Виктор	Гена	Дима	Жора	Иван	Костя	Леня
Аня									5
Валя					5				
Галя				5					
Даша			5						
Женя		5							
Зина						5			
Ира	5								
Лариса							5		
Нина								5	

### Многопараметрическая оптимизация

Задачи, в которых оптимизацию следует производить по нескольким параметрам, называют задачами многопараметрической оптимизации.

Пример. Завод выпускает три вида продукции. Трудоёмкость изготовления единицы продукции и объём выпуска можно оценить. Пусть для трех видов продукции требуется три вида ресурса. Эти данные представлены в таблице 14.

Таблица 14

	Вид продукции			Располагаемый ресурс
	П1	П2	П3	
О- объём выпуска	7	12	13	-
Т- трудоемкость	9	7	10	-
Ресурсы:				
Трудовые	0,2	0,3	0,4	35
Материальные	0,5	0,4	0,3	42
Финансовые	0,6	0,8	1,2	10

Оптимизационная задача формулируется таким образом. Здесь целевой функцией является объём выпуска продукции. Ограничениями выступают ресурсы и заданный уровень качества  $K$ , определяемый как суммарная трудоёмкость изготовления изделий.

$$\begin{aligned}
 O &= 7X_1 + 12X_2 + 13X_3 - \max, \\
 9X_1 + 7X_2 + 10X_3 &\geq K, \\
 0.2X_1 + 0.3X_2 + 0.4X_3 &\leq 35, \\
 0.5X_1 + 0.4X_2 + 0.4X_3 &\leq 42, \\
 0.6X_1 + 0.8X_2 + 1.2X_3 &\leq 100, \\
 X_i &\geq 0, \\
 j &= 1, 2, 3.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Задачу будем решать методом последовательных уступок. В таблице приведены результаты решения задачи при заданном уровне качества. При этом определён минимальный уровень качества 830.

Таблица 15

	Вариант		
	1	2	3
$K_{\text{зад}}$	$\infty$	900	970
$K$	830	900	970
О-объем выпуска	1340	1284	1198
П1	0	14	31,7
П2	90	62	29,5
П3	20	34	47,8
Резерв ресурсов:			
Трудовые	0	0	0,7
Материальные	0	0	0
Финансовые	4	1,2	0

### Постановка задачи оптимизации в общем виде

$$\begin{aligned}
 F &= 2(X_1 X_2 + (X_1 + X_2) X_3) \rightarrow \min \rightarrow \text{ЦФ}, \\
 X_1 X_2 X_3 - 2000 &= 0 \rightarrow \text{ОГР}, \\
 0 < X_1, X_2, X_3 < \infty &\rightarrow \text{ГРУ},
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

или в самом общем случае

$$\begin{aligned}
 F &= f(x_j) \rightarrow \max (\min) \rightarrow \text{ЦФ}, \\
 g_i (x_j) &= 0 \rightarrow \text{ОГР}, \\
 a_j \leq x_j \leq b_j &\rightarrow \text{ГРУ}, \\
 i &= 1 \dots m ; j = 1 \dots n.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

## **Лекция 5. Основные понятия и задачи оптимального проектирования конструкций**

### **Выбор расчетной схемы в теории оптимального проектирования**

В теории оптимального проектирования изучаются вопросы:

- 1) Наилучший выбор силовой схемы;
- 2) Оптимизация формы конструкции;
- 3) Выбор свойств материалов;
- 4) Наилучшие условия работы конструкции;
- 5) Исследуются общие закономерности экстремальных решений и

развиваются эффективные методы оптимизации.

В результате исследований по оптимальному проектированию выясняются предельные возможности улучшения конструкций, оценивается качество традиционных (неоптимальных) сооружений и выявляются наиболее эффективные способы их совершенствования.

Постановок задач оптимального проектирования может быть огромное количество.

Вопрос о выборе расчетной схемы (модели) является основным как при анализе конструкции, так и при ее оптимизации. Поэтому оптимальное проектирование невозможно без предварительной выработки представлений о существенных и несущественных аспектах поведения конструкции, схематизации условий функционирования и различного рода упрощений, сохраняющих адекватность схемы реальной конструкции. Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название расчетной схемы.

Основные применяемые в теории оптимального проектирования схематизации:

- сплошное трехмерное тело, характерные размеры которого во всех трех направлениях имеют одинаковый порядок;
- тела, один из размеров которых много больше двух других (балки, колонны, арки и стержневые системы);
- тела, один из размеров которых много меньше двух других (оболочки и пластинки).

### **О постановках задач оптимизации конструкций**

Задачи теории оптимального проектирования – это определение:

- формы конструкции;
- внутренних свойств конструкции;
- условий работы конструкций;

доставляющих экстремум (минимум или максимум) выбранной характеристики конструкций при ряде дополнительных ограничений. Строгая постановка задач оптимизации конструкций включает формулировку основных определяющих уравнений (выбор модели), оптимизируемого функционала, ограничений на функции состояния и искомые управляющие переменные. С

математической точки зрения эти задачи могут быть классифицированы в зависимости от типов рассматриваемых уравнений и граничных условий, вида оптимизируемых функционалов и учитываемых ограничений, размерности задачи, способов вхождения переменных проектирования в основные соотношения, полноты информации об исходных данных, характера экстремума (одноэкстремальные и многоэкстремальные задачи) и способа определения оптимума (однокритериальные и многокритериальные задачи) и других обстоятельств.

Существенным элементом постановки задачи является выбор механической модели. Сначала выбираются переменные состояния  $u$  и уравнения:

$$L(x, u, h, q) = 0, \quad (36)$$

Здесь  $u = \{u_1(x), \dots, u_m(x)\}$  — вектор-функция, определяющая состояние конструкции.  $L$ - дифференциальный оператор по пространственным координатам  $x_i$ . Оператор  $L$  зависит от вектор-функции проектирования  $h = \{h_1(x), \dots, h_n(x)\}$  и вектор-функции внешних воздействий  $q$ . Предполагается, что граничные условия, определяющие способ закрепления и нагружения конструкций, включены в оператор  $L$ .

*Система уравнений при заданных нагрузках и параметрах конструкции должна быть замкнутой и определять переменные состояния, характеризующие напряженное и деформированное состояние конструкций. Отыскание переменных состояния при заданных функциях проектирования будем называть прямой задачей.*

Если уравнения, определяющие состояние конструкции, являются отражением физических закономерностей, то выбор переменных проектирования рассматриваемых функционалов, в том числе оптимизируемого функционала (критерия качества) и системы ограничений, диктуется назначением и условиями работы конструкции, технологическими возможностями ее создания.

Функции  $h_i(x)$  определяют форму и физико-механические свойства материала конструкции. В качестве  $h_i(x)$  могут, например, выбираться распределения толщин и площадей сечений тела, функции, определяющие положение срединных поверхностей криволинейных стержней и оболочек, распределение концентрации армирующего материала по конструкции, углы, задающие ориентацию осей анизотропии в каждой точке упругого тела.

Кроме функций состояния и управляющих переменных, в задачах оптимального проектирования фигурируют функциональные характеристики — функционалы, зависящие от  $u, h, q$ :  $J_1 = J_1(u, h, q), \dots, J_r = J_r(u, h, q)$ .

В оптимальном проектировании рассматриваются функционалы двух типов: интегральные функционалы:

$$J_i = \int_{\Omega} f_i(x, u, h, q) d\Omega, \\ i = 1, \dots, r_1. \quad (37)$$

и локальные функционалы:

$$J_i = \max_x f_j(x, u(x), h(x), q(x)),$$

$$j = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2. \quad (38)$$

Интегрально или посредством комбинации интегралов вида (37) представляются такие характеристики конструкции, как вес, энергия упругих деформаций (податливость), частоты собственных колебаний, критическая нагрузка, под действием которой конструкция теряет устойчивость. Локальными характеристиками являются величина максимального прогиба, интенсивность напряжений.

Требования, предъявляемые к конструкции, приводят к ограничениям, накладываемым на управляющие переменные и функции состояния.

$$\psi(x, u, h, q, J_1, \dots, J_r) \leq 0. \quad (39)$$

Компоненты  $\psi_i$  вектора  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$  являются заданными функциями аргументов.

Один из рассматриваемых функционалов или их функция  $F(J_1, \dots, J_r)$  принимается в качестве оптимизируемого функционала.

Задача оптимизации заключается в отыскании функции  $h(x)$ , доставляющей минимум (максимум) функционалу

$$J = F(J_1, \dots, J_r). \quad (40)$$

Оптимизируемый функционал или критерий качества конструкции в каждой конкретной задаче вида только один. Так, например, при изгибе балки переменной толщины могут быть поставлены задачи минимизации веса балки при ограничении на прогибы или минимизации максимального прогиба при заданном весе.

### **Основные функционалы и критерии оптимизации**

Выбор функционалов, рассматриваемых при оптимальном проектировании, является частью постановок задач оптимизации. На этот выбор влияют многие обстоятельства: основное назначение конструкции, условия эксплуатации, технологические возможности ее создания, ограничения по стоимости, свойства модели, принимаемой для описания механического поведения конструкции, априорные свойства оптимальной задачи. Некоторые типичные функционалы, наиболее часто рассматриваемые при оптимизации конструкций.

Вес — одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений. Вес конструкции характеризует как расход материалов, необходимых для ее создания, так и некоторые ее эксплуатационные свойства.

Вес — интегральная характеристика конструкции. Для сплошных однородных тел вес пропорционален занимаемому ими объему:

$$J = \gamma \int_{\Omega} d\Omega, \quad (41)$$

Для тонкостенных конструкций из однородных материалов вес представляется интегралом от функции распределения «толщин»  $h$ :

$$J = \gamma \int_{\Omega} f(h) d\Omega, \quad (42)$$

Например, для сплошной пластинки, закрепленной по контуру  $\Gamma$  в плоскости  $x, y$  ( $x, y$  — декартовы координаты),  $f = h(x, y)$ ,  $Q$  — область, ограниченная контуром  $\Gamma$ . В этом случае уменьшения веса конструкции можно добиваться как изменением функции  $h(x, y)$  при фиксированной области  $Q$ , так и одновременным варьированием толщин и формы областей. Однако в задачах оптимизации конструкций материал делится на «конструктивный», количество и способ размещения которого по конструкции отыскиваются, и «неконструктивный», положение и количество которого заданы. Так, при проектировании трехслойных пластин наиболее часто рассматриваются задачи отыскания оптимального распределения толщин внешних армирующих слоев при фиксированном среднем слое.

Функционал веса  $J$  представляется в виде суммы интегралов  $J_a + J_c$  (от толщин армирующих слоев и срединного слоя пластинки), а минимизация  $J$  сводится к минимизации веса  $J$  внешних слоев.

В случае оптимизации неоднородных тел функционал веса зависит от структуры материала, например от концентрации связующего и армирующих добавок композитных материалов. Если обозначить через  $h_a, \gamma_a, h_c, \gamma_c$  концентрации и удельные веса армирующих и связующих компонент, то

$$J = \gamma \int_{\Omega} (\gamma_a h_a + \gamma_c h_c) d\Omega, \quad (43)$$

В качестве меры жесткостных свойств конструкции используется величина работы, производимой внешними силами при квазистатическом нагружении упругого тела. Этот функционал называется податливостью конструкции. Пусть упругое тело закреплено на части границы  $\Gamma_u$  а к другой части  $\Gamma_\sigma$  приложены нагрузки  $q$ . Тогда податливость определяется интегралом по  $\Gamma_\sigma$  от скалярного произведения векторов упругих смещений  $u$  и внешних сил:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\sigma} q u d\Gamma_\sigma \quad (44)$$

При более общем определении функционала податливости можно под  $q$  и соответственно понимать обобщенные силы и обобщенные перемещения. Например, в качестве обобщенных сил можно рассматривать распределение моментов сил, приложенных к балке, в качестве обобщенных смещений — углы поворотов поперечных сечений в соответствующих точках.

В теории оптимального проектирования тонкостенных конструкций, сжатых консервативными силами, также рассматриваются функционалы, определяющие критические значения параметров нагружения, для которых происходит потеря устойчивости. Обозначим через  $p$  параметр нагружения,  $pT$  — работу, совершаемую при приведении единицы объема конструкции в критическое состояние, а через  $\Pi$  — плотность потенциальной энергии упругих деформаций после потери устойчивости. С использованием классических представлений теории упругой устойчивости приходим к следующему выражению для критического значения  $p$ :

$$p = \frac{\int_{\Omega} \Pi(u, h) d\Omega}{\int_{\Omega} T(u, h) d\Omega}. \quad (45)$$

Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения  $p_0$  ( $p_0$  — минимальное из собственных значений) при заданном весе конструкции и задачи минимизации веса при ограничении  $p_0 \geq \mu$ , где  $\mu$  — заданное число.

Многие важные задачи приводят к функционалам, зависящим от значений функций состояния в заранее неизвестных точках. Локальный характер имеют основные прочностные и деформационные характеристики. К локальным функционалам относится такая характеристика жесткости конструкции, как максимальное смещение точек упругой среды. Применительно к изгибу балок и пластин жесткость оценивается величиной максимального прогиба

$$J = \max_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad (46)$$

а задача оптимизации жесткости при варьировании переменной проектирования естественно формулируется как задача минимизации максимального прогиба.

К локальным функционалам относятся и многие прочностные характеристики конструкции. Типичный функционал этого вида может быть записан следующим образом:

$$J = (f) \Omega_0 = \max_x f. \quad (47)$$

Здесь  $f = f(\sigma_{ij}(x))$  интенсивность напряжений  $\sigma_{ij}$  или другая мера напряженного состояния произвольной точки конструкции, а  $\Omega_0$  — множество точек, где реализуется максимум  $f$ .

## Переменные проектирования

Цель многих исследований по оптимальному проектированию состоит в том, чтобы выявить наиболее эффективный из способов оптимизации. Обычно при оптимальном проектировании конструкций имеется широкий выбор переменных проектирования, варьированием которых можно влиять на величину критерия качества. Например, уменьшение веса конструкции может быть достигнуто в результате распределения толщин, управления анизотропией материалов, армирования, создания предварительно напряженного состояния и т. д. Важно знать, какие способы оптимизации или их комбинации приводят к большему выигрышу по функционалу.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с введением переменных проектирования.

Размерность. Под размерностью векторных функций будем понимать не число компонент вектора, а количество независимых переменных, от которых зависят скалярные функции состояния. Размерность функции состояния зависит от многих факторов: формы конструкции, свойств материалов, характера внешних воздействий, условий закрепления конструкции и т. д.

При оптимальном проектировании балок часто рассматриваются задачи, когда поперечное сечение балки меняется вдоль пролета. Имеются различные возможности как задания типа поперечного сечения балки, так и способов изменения параметров сечения по пролету балки. Поэтому в качестве переменных проектирования могут приниматься одна или несколько функций, задание которых полностью определяет форму балки, т. е. вид поперечного сечения и закон изменения геометрических размеров (параметров) сечения по пролету. Основной жесткостной характеристикой балок, фигурирующей в дифференциальных уравнениях равновесия и граничных условиях, является величина  $EI$ , где  $E$  — модуль Юнга материала балки, а  $I$  — момент инерции поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба и проходящей через нейтральную линию балки.

$$EI(x) = A_\alpha h_\alpha(x), \quad (48)$$

где  $A_\alpha$  — константа, зависящая от типа поперечного сечения стержня и модуля Юнга.

Стержень постоянного прямоугольного сечения  $\alpha = 0$ ,  $A_0 = Eh_2 h_1^3 / 12$  ( $h_2$  — ширина,  $h_1$  — высота сечения).

Сплошной прямоугольный стержень переменной высоты  $h_1$  и постоянной ширины  $h_2$  имеем  $\alpha = 3$ ,  $h = h_1$ ,  $A_3 = Eh_2 / 12$ . В случае переменной ширины сечения  $h_2(x)$  и постоянной высоты  $\alpha = 1$ ,  $h = h_2$  и  $A_3 = Eh_1^3 / 12$ . Если отношение высоты сечения к ширине остается величиной постоянной ( $h_1 h_2 = \mu$ ) по пролету балки, а поперечные сечения представляют собой подобные прямоугольники, то  $\alpha = 4$ ,  $h = h_1$ ,  $A_4 = E / 12\mu$ .

Для трехслойных стержней с переменной толщиной внешних армирующих слоев  $0,5 h_1$  и постоянной толщиной  $H$  среднего слоя ( $H \gg \max h(x)$ ) имеем  $\alpha = 1$ ,  $h = h_1$ ,  $A_I = Eh_2 H/4$ , где  $h_2$  — ширина сечения.

## Лекция 6. Пример постановки задачи оптимального проектирования

### Проектирование балки

Описание задачи.

Балка А, рисунок 9, крепится на жесткой опоре В с помощью сварного соединения. Балка изготавливается из стали марки Ст.20 и должна выдерживать нагрузку  $F=6000$  Н. Размеры балки выбираются таким образом, чтобы полные затраты на ее изготовление были минимальными.

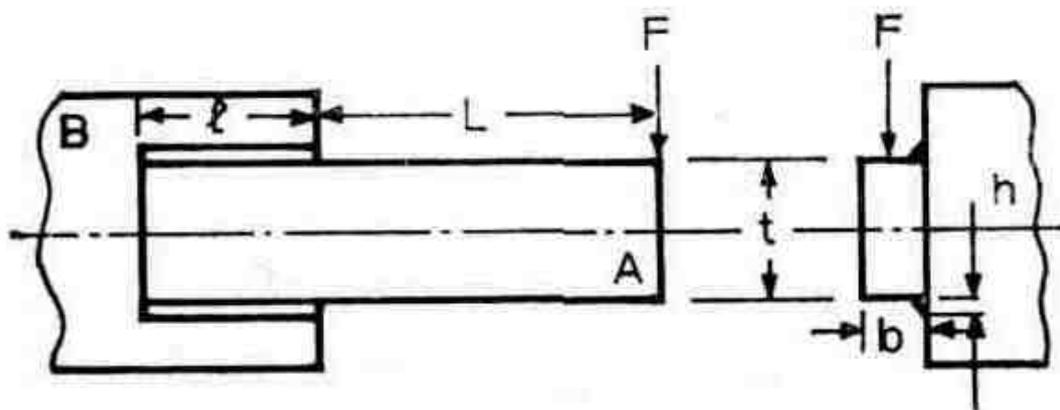


Рисунок 9 –Эскиз балки

Постановки задачи. Система состоит из балки А и сварного шва, необходимого для прикрепления балки к опоре В. Независимыми, или управляемыми, переменными служат размеры  $h, l, t$  и  $b$ . Длина балки  $L$  предполагается равной 500 мм. Для удобства записи представим введенные переменные как компоненты неизвестного вектора  $x$ :

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [h, l, t, b]. \quad (49)$$

Показателем качества проекта служат затраты на сварочные работы:

- затраты на подготовительные работы  $c_0$ ,
- затраты на сварочные работы  $c_1$ ,
- стоимость материалов  $c_2$ .

$$F(x) = c_0 + c_1 + c_2. \quad (50)$$

Затраты на сварочные работы  $c_1$ . Предположим, что сварка будет проводиться аппаратом, при использовании которого полные расходы составляют 300 руб./час (включая эксплуатационные расходы и издержки на техническое обслуживание и текущий ремонт). Далее пусть сварочный аппарат накладывает

один кубический см сварного шва за 6 мин. Тогда затраты на сварочные работы равны

$$c_1 = (300 / 60) * 6 * V_w, \quad (51)$$

где  $V_w$  - объем сварного шва в кубических см.

Стоимость материалов  $c_2$ .

$$\begin{aligned} V_\omega &= 2\left(\frac{1}{2}h^2l\right) = h^2l, \\ V_B &= tb(L + l). \end{aligned} \quad (52)$$

где  $c_3$ - стоимость  $\text{см}^3$  сварного шва;  $c_4$ - стоимость  $\text{см}^3$  балки;  $V_B$ - объем балки  $A$  в  $\text{см}^3$ . Из геометрических соотношений следует, что:

$$c_2 = c_3h^2l + c_4tb(L + l). \quad (53)$$

Следовательно, функция затрат принимает следующий вид:

$$F(x) = (1 + c_3)x_1^2x_2 + c_4x_3x_4(L + x_2), \quad (54)$$

или (если выразить ее через переменные  $x$ :

$$F(x) = h^2l + c_3h^2l + c_4tb(L + l). \quad (55)$$

Заметим, что все комбинации значений могут оказаться допустимыми, если балка выдерживает заданную нагрузку. Необходимо построить несколько функциональных соотношений между управляемыми переменными, позволяющих сузить область их допустимых значений. Эти соотношения, записанные в форме неравенств, представляют модель системы.

*Напряжение в сварном шве.* Напряжение в сварном шве можно разложить на две составляющие  $\tau'$  и  $\tau''$ , где  $\tau'$  — первичное напряжение в плоскости поперечного сечения сварного шва, а  $\tau''$  — вторичное напряжение при кручении:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{F}{\sqrt{2}x_1x_2}, \\ \tau'' &= \frac{MR}{J}. \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
M &= F \left[ L + \left( \frac{x_2}{2} \right) \right], \\
R &= \left\{ \frac{x_2^2}{4} + \left[ \frac{x_3 + x_1}{2} \right]^2 \right\}^{1/2}, \\
J &= 2 \left\{ 0,707 x_1 x_2 \left[ \frac{x_2^2}{12} + \left( \frac{x_3 + x_1}{2} \right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{57}$$

где  $M$  — момент силы  $F$  относительно центра тяжести сварной группы,  $J$  — полярный момент инерции сварной группы. Напряжение в сварном шве вычисляется в соответствии с формулой:

$$\tau(x) = \left[ (\tau')^2 + 2\tau'\tau''\cos\Theta + (\tau'')^2 \right]^{1/2}, \tag{58}$$

где  $\cos\theta = x_2/2R$ .

Напряжение при изгибе балки  $\sigma(x)$ . Можно показать, что максимальное напряжение при изгибе равно:

$$\sigma(X) = \frac{7FL}{x_4 x_3^2}. \tag{59}$$

Критическая нагрузка на балку  $P_c(x)$ . С ростом отношения  $t/b$  наблюдается тенденция к потере устойчивости балки. Для балок, близких к прямоугольным, критическая нагрузка приближенно описывается следующим выражением:

$$P_c(x) = \frac{4,013\sqrt{EI\alpha}}{L^2} \left[ 1 - \frac{x_3}{2L} \sqrt{\frac{EI}{\alpha}} \right], \tag{60}$$

где  $E$  — модуль Юнга  $2 \cdot 10^8$  МПа,  $I = (1/12)x_3x_4^3$ ,  $G$  — модуль сдвига  $7 \cdot 10^7$  МПа,  $\alpha = (1/3)Gx_3x_4^3$ .

Прогиб балки  $\delta(x)$ . Чтобы вычислить величину прогиба, предположим, что балка представляет собой консоль с вылетом  $L$ . Тогда

$$\delta(x) = \frac{4FL^3}{Ex_3^3x_4}, \tag{61}$$

Ограничения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \tau_d - \tau(x) \geq 0, \\
g_2(x) &= \sigma_d - \sigma(x) \geq 0, \\
g_3(x) &= x_4 - x_1 \geq 0, \\
g_4(x) &= x_2 \geq 0, \\
g_5(x) &= x_3 \geq 0, \\
g_6(x) &= P_C(x) - F \geq 0, \\
g_7(x) &= x_1 - 0,125 \geq 0, \\
g_8(x) &= 0,25 - \delta(x) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{62}$$

## Лекция 7. Методы безусловной минимизации функций многих переменных

### Прямые методы

Эффективность методов одномерной минимизации можно сравнивать, на основании гарантированной точности  $\varepsilon(N)$  нахождения точки  $x^*$ , которую они обеспечивают в результате определения  $N$  значений  $f(x)$ . Наиболее эффективным из сравниваемых методов является метод золотого сечения, за ним идут методы деления отрезка пополам и наименее эффективен метод перебора.

Таблица 16

Методы минимизации	Количество найденных значений $f(x)$			
	N=5	N=11	N=21	N=51
Метод золотого сечения	0,073	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-11}$
Методы деления отрезка пополам	0,125	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$
Метод перебора	0,250	0,100	0,050	0,020

### Минимизация функции многих переменных

Будем рассматривать функции многих переменных  $f=f(x_1, \dots, x_n)$  как функции, заданные в точках  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ :  $f=f(x)$ . Пусть функция  $n$  переменных  $f(x)$  определена во всем пространстве  $E_n$ .

1) Точка  $x^* \in E_n$ , называется точкой **глобального минимума** функции  $f(x)$ , если для всех  $x \in E_n$  выполняется неравенство  $f(x^*) \leq f(x)$ . Значение  $f(x^*) = \min f(x) = f^*$  называется **минимумом** функции. Множество всех точек глобального минимума функции  $f(x)$  будем обозначать через  $U^*$ .

2) Точка  $x \sim$  называется точкой **локального минимума** функции  $f(x)$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x \sim$  такая, что для всех  $x^* \in U_n(x \sim)$  выполняется неравенство  $f(x \sim) \leq f(x)$ .

3) Если допустимое множество  $U$  в задаче минимизации (максимизации) функции  $n$  переменных совпадает со всем пространством  $E_n$ , то говорят о задаче **безусловной оптимизации**

$$\begin{aligned}
 & f(x) \rightarrow \min(\max), \\
 & x \in E_n
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

Дифференцируемые функции

Многие алгоритмы минимизации и критерии оптимальности в  $E_n$  используются только для функций, дифференцируемых необходимое число раз.

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ:**

1. Если в точке  $\mathbf{x}_0 \in E_n$  функция  $f(\mathbf{x})$  дифференцируема и достигает локального минимума, то:

$$f'(\mathbf{x}^0) = 0 \quad (64)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{x}^0)}{dx_j} &= 0, \\ j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (65)$$

(необходимое условие минимума).

2. Если в стационарной точке  $\mathbf{x}^0 \in E_n$ , функция  $f(\mathbf{x})$  дважды дифференцируема и матрица ее вторых производных  $f''(\mathbf{x}^0)$  положительно определена, то  $\mathbf{x}^0$  есть точка локального минимума  $f(\mathbf{x})$  (*достаточное условие минимума*).

Классический метод минимизации функций, дифференцируемых во всем пространстве  $E_n$ .

Алгоритм метода.

**Шаг 1.** Решив систему уравнений  $\frac{df(\mathbf{x}^0)}{dx_j} = 0$ , найти все стационарные точки функции  $f(\mathbf{x})$ .

**Шаг 2.** Используя достаточные условия минимума, среди стационарных точек функции  $f(\mathbf{x})$  найти точки локального минимума и, сравнивая значения функции в них, определить точки глобального минимума.

**Пример 3.1.** Классический метод минимизации.

Решить задачу  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - x_3 - x_2x_3 \rightarrow \min$ .

**Шаг 1.** Запишем систему:

$$\begin{cases} \frac{df}{dx_1} = 2x_1 - 1 = 0, \\ \frac{df}{dx_2} = 2x_2 - x_3 = 0, \\ \frac{df}{dx_3} = 2x_3 - 1 - x_2 = 0. \end{cases} \quad (66)$$

Решив ее, получим стационарную точку  $x^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .

**Шаг 2.** Находим

$$f''(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Так как, эта матрица положительно определена, заключаем что  $x^0$  является точкой минимума функции  $f(x)$ .

Минимальное значение  $f^* \approx f(x^0) = -19/12$ .

С помощью классического метода найти точки минимума функций:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2, \quad (67)$$

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2x_3 + 6x_1 + 6x_2 + 4x_3. \quad (68)$$

## Прямые методы безусловной минимизации

### ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ $n$ -МЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Для численного решения задач безусловной минимизации:

$f(x) \rightarrow \min, x \in E_n$  разработано много алгоритмов, использующих итерационные процедуры, позволяющие при определенных условиях построить последовательность  $\{x^k\}$  такую, что:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \begin{cases} f^* = \min_{E_n} f(x), & \text{если } U^* = \emptyset, \\ f_* = \inf_{E_n} f(x), & \text{если } U^* = \emptyset, \end{cases} \quad (69)$$

Последовательность  $\{x^k\}$ , удовлетворяющая требованию сходимости, называется *минимизирующей* для функции  $f(x)$ .

Конкретный вычислительный алгоритм на основе, в котором может получаться бесконечная последовательность  $\{x^k\}$ , необходимо дополнять условием остановки (критерием окончания счета). На практике часто пользуются следующими условиями:

$$\begin{aligned} \rho(x^{k+1}, x^k) &< \varepsilon_1, \\ |f(x^{k+1}) - f(x^k)| &< \varepsilon_2, \\ \|f'(x^k)\| &< \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (70)$$

где  $\varepsilon_i$  — заранее заданные параметры точности.

Ниже будут рассмотрены вычислительные алгоритмы простейших процедур, основанные на рекуррентных формулах вида

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (71)$$

где  $p^k$  – направление поиска точки  $x^{k+1}$  из точки  $x^k$ , а число  $\alpha_k$  – величина шага, которая выбирается так, чтобы выполнялось условие:

$$f(x^{k+1}) < f(x^k). \quad (72)$$

Эти алгоритмы различаются способом построения вектора  $p^k$  и выбора шага  $\alpha_k$ .

Рассмотрим конкретные вычислительные алгоритмы решения задачи безусловной минимизации  $f(x) \rightarrow \min, x \in E_n$ , которые опираются только на вычисление значений функции  $f(x)$ , т.е. прямые методы минимизации. Важно отметить, что для их применения не требуется дифференцируемость целевой функции и даже ее аналитическое задание. Нужно лишь иметь возможность вычислять или измерять значения  $f(x)$  в произвольных точках. Такие ситуации часто встречаются в практически важных задачах оптимизации.

Остановимся сначала на вычислительных процедурах, в которых выбор нового приближения к точке минимума определяется сравнением значений функции в нескольких точках пространства  $E_n$ .

### Метод симплексов Минимизация по правильному симплексу

*Правильным симплексом* в пространстве  $E_n$  называется множество из  $n+1$  равноудаленных друг от друга точек (*вершин симплекса*). Отрезок, соединяющий две вершины, называется *ребром симплекса*.

В пространстве  $E_2$  правильным симплексом является совокупность вершин равностороннего треугольника, в  $E_3$  – правильного тетраэдра.

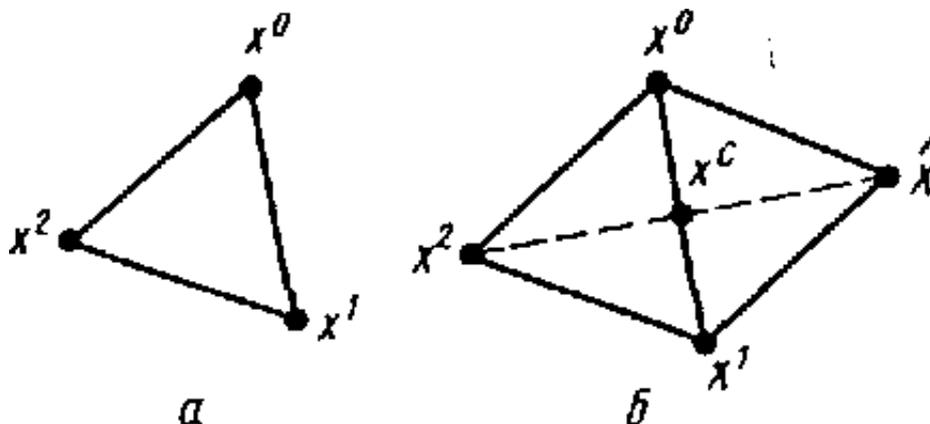
Если  $x^0$  – одна из вершин правильного симплекса в  $E_n$  то координаты остальных  $n$  вершин  $x_1, \dots, x_n$  можно найти, например, по формулам:

$$x^i_j = \begin{cases} x^0_j + d_1, & i \neq j, \\ x^0_j + d_2, & i = j, \end{cases} \quad (73)$$

где  $d_1 = a(\sqrt{n+1} - 1)/n\sqrt{2}$ ,  $d_2 = a(\sqrt{n+1} + n - 1)/n\sqrt{2}$ ,  $a$  – длина ребра. Вершину  $x^0$  симплекса, построенного по формулам, будем называть *базовой*.

В алгоритме симплексного метода используется следующее важное свойство правильного симплекса. По известному симплексу можно построить новый симплекс отражением какой-либо вершины, например,  $x^k$  симметрично относительно центра тяжести  $x^c$  остальных вершин симплекса. Новая и старая

вершины  $\hat{x}^k$  (рисунок 10) и  $x^k$  связаны соотношением:  $\frac{\hat{x}^k + x^k}{2} = x^c$ . В результате получается новый правильный симплекс с тем же ребром и вершинами  $\hat{x}^k = 2x^c - x^k$ ,  $x^i, i = 0, \dots, n, i \neq k$ . Таким образом, происходит перемещение симплекса в пространстве  $E_n$ . На рисунке 10 представлена иллюстрация этого свойства симплекса в пространстве  $E_2$ .



а — начальный симплекс  $x^0, x^1$ ,  
 б — новый симплекс  $x^0, x^1$ ; центр отражения — точка  $x^c = (x^0 + x^1)/2$   
 Рисунок 10– Построение нового симплекса в  $E_2$  отражением точки  $x$ .

Поиск точки минимума функции  $f(x)$  с помощью правильных симплексов производят следующим образом. На каждой итерации сравниваются значения  $f(x)$  в вершинах симплекса. Затем проводят описанную выше процедуру отражения для той вершины, в которой  $f(x)$  принимает наибольшее значение. Если в отраженной вершине получается меньшее значение функции, то переходят к новому симплексу. В противном случае выполняют еще одну попытку отражения для вершины со следующим по величине значением  $f(x)$ .

Если и она не приводит к уменьшению функции, то сокращают длину ребра симплекса, например, вдвое и строят новый симплекс с этим ребром. В качестве базовой выбирают ту вершину  $x^0$  старого симплекса, в которой функция принимает минимальное значение. Поиск точки минимума  $f(x)$  заканчивают, когда либо ребро симплекса, либо разность между значениями функции в вершинах симплекса становятся достаточно малыми. Опишем один из вариантов алгоритма этого метода.

**Шаг 0.** Выбрать параметр точности  $\epsilon$ , базовую точку  $x^0$ , ребро  $a$  и построить начальный симплекс. Вычислить  $f(x^0)$ .

**Шаг 1.** Вычислить значения  $f(x)$  в вершинах симплекса  $x^1, \dots, x^n$ .

**Шаг 2.** Упорядочить вершины симплекса  $x^0, \dots, x^n$  так, что бы:

$$f(x^0) \leq f(x^1) \leq f(x^{n-1}) \leq f(x^n). \quad (75)$$

**Шаг 3.** Проверить условие:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(x^i) - f(x^0)]^2 < \varepsilon^2. \quad (76)$$

Если оно выполнено, то вычисления прекратить, полагая  $x^* \approx x^0$ ,  $f^* \approx f(x^0)$ .  
В противном случае перейти к шагу 4.

**Шаг 4.** Найти

$$x^c = \frac{1}{n} \sum_{i \neq 1} x^i \quad (77)$$

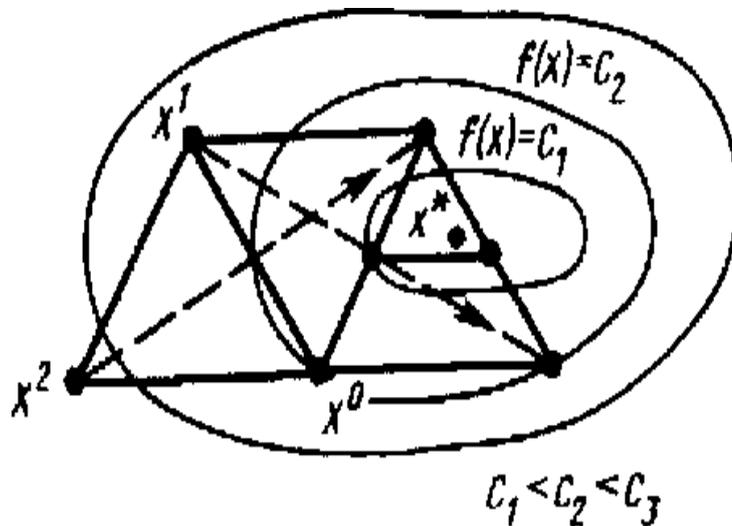
и выполнить отражение вершины  $x^n$ :  $x^{\sim n} = 2x^c - x^n$ . Если  $f(x^{\sim n}) < f(x^n)$ , то положить  $x^n = x^{\sim n}$  и перейти к шагу 2. Иначе – перейти к шагу 5.

**Шаг 5.** Найти

$$x^c = \frac{1}{n} \sum_{i \neq 1} x^i \quad (78)$$

и выполнить отражение вершины  $x^{n-1}$ :  $x^{\sim{n-1}} = 2x^c - x^{n-1}$ . Если  $f(x^{\sim{n-1}}) < f(x^{n-1})$ , то положить  $x^{n-1} = x^{\sim{n-1}}$  и перейти к шагу 2. Иначе – перейти к шагу 6.

**Шаг 6.** Перейти к новому правильному симплексу с вдвое меньшим ребром, считая базовой вершиной  $x^0$ . Остальные  $n$  вершин симплекса найти по формуле  $x^i = (x^i + x^0)/2$ ,  $i=1, \dots, n$ . Перейти к шагу 1.



$x^1$ ,  $x^2$  – вершины начального симплекса, а пунктиром указаны процедуры отражения.

Рисунок 11 – Геометрическая иллюстрация работы алгоритма в пространстве, где точки  $x^0$

Следует иметь в виду, что если функция  $f(x)$  многомодальна, то описанным методом может быть найдена точка локального, а не глобального минимума  $f(x)$ .

## Лекция 8. Моделирование технологических процессов

### Моделирование процесса

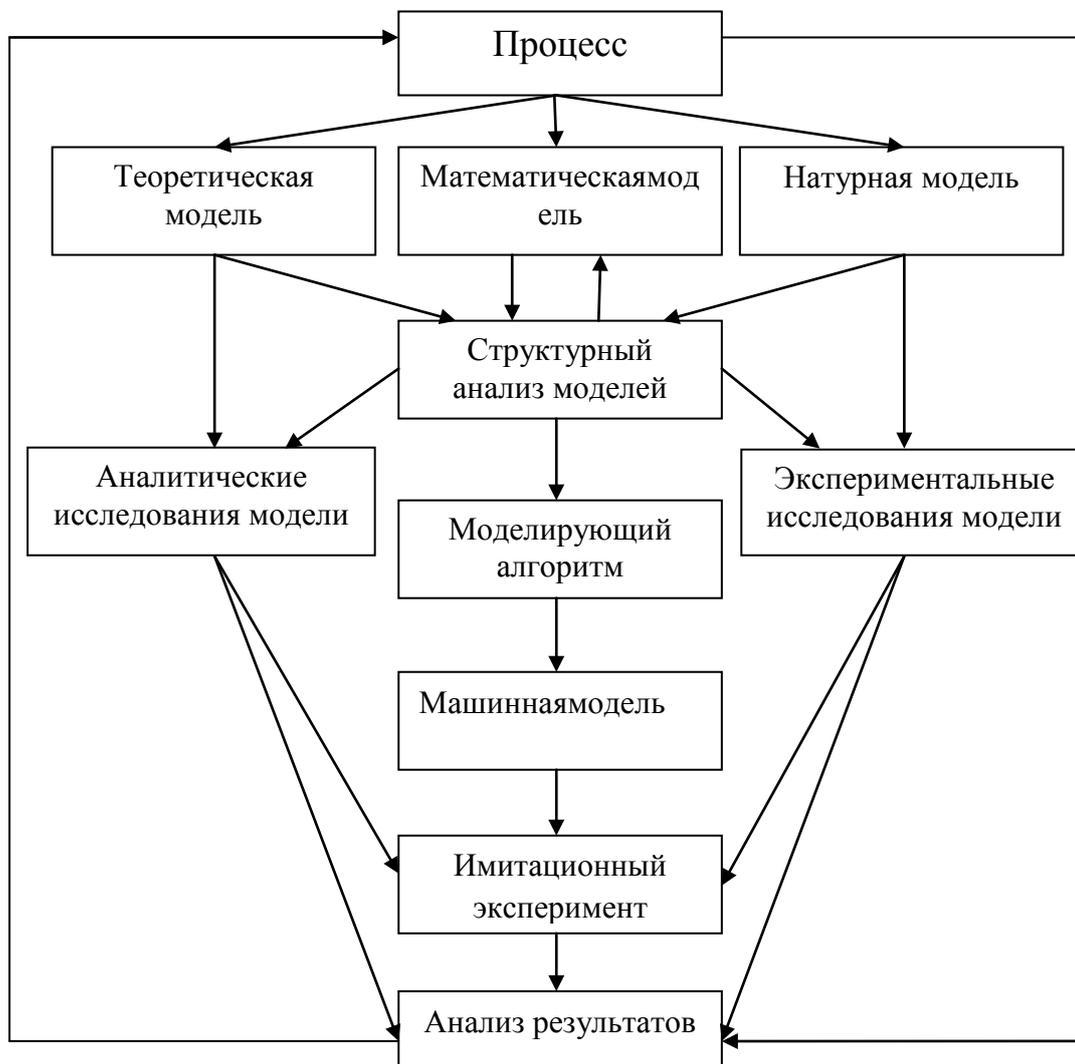


Рисунок 12– Принципиальная схема создания математической модели

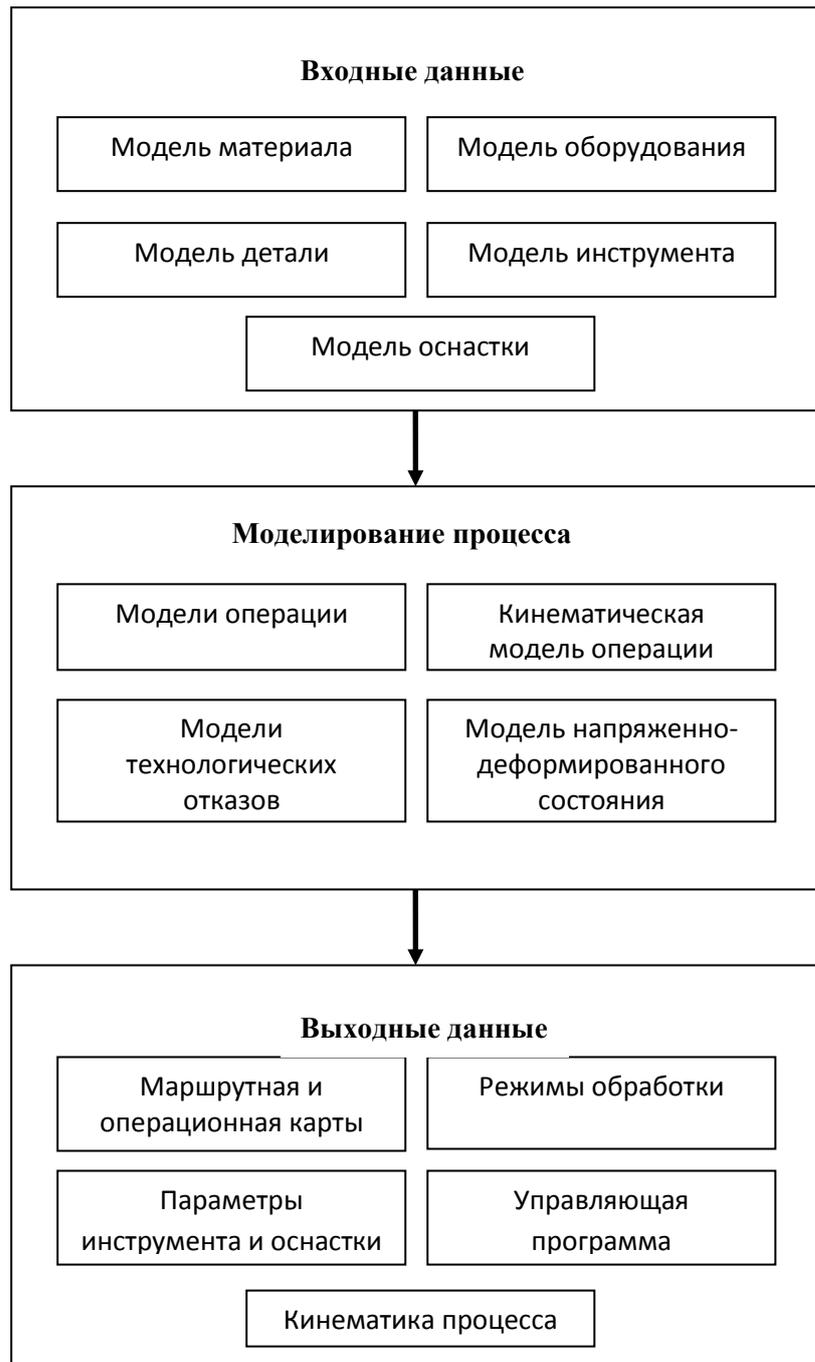


Рисунок 13– Структура данных для проектирования технологического процесса

**Ротационная вытяжка** - это технологический процесс последовательного формообразования плоских или полых осесимметричных вращающихся заготовок путем приложения локальной деформирующей нагрузки, перемещающейся по поверхности заготовки по винтовой линии, рисунок 14. Деформирующая нагрузка создается при помощи одного или нескольких свободно вращающихся давящих роликов, перемещающихся поступательно по заданной траектории. Заготовка

прижимается к вращающейся оправке. Давильный ролик перемещается по спирали относительно поверхности заготовки рисунок 15 и рисунок 16.

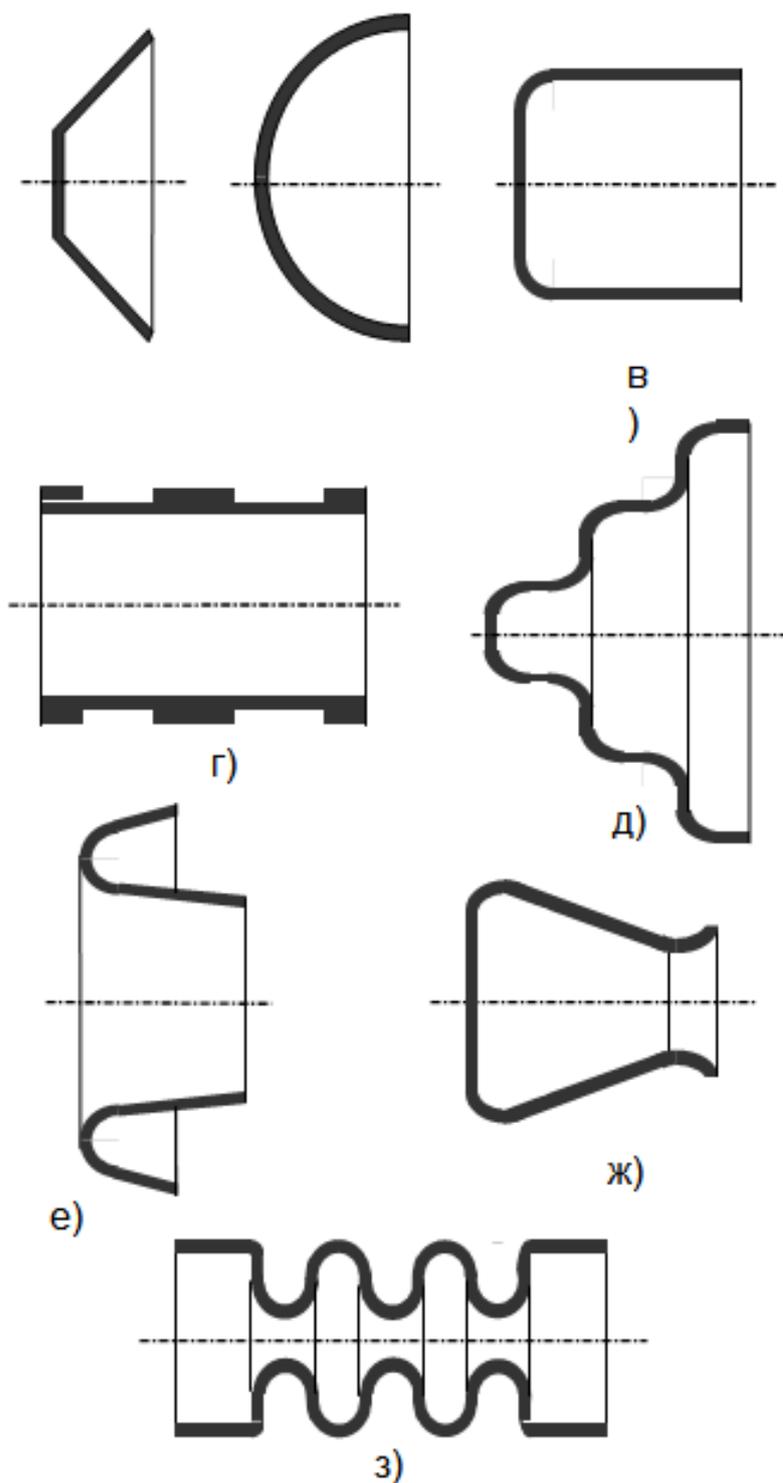


Рисунок 14– Основные типы изготавливаемых деталей

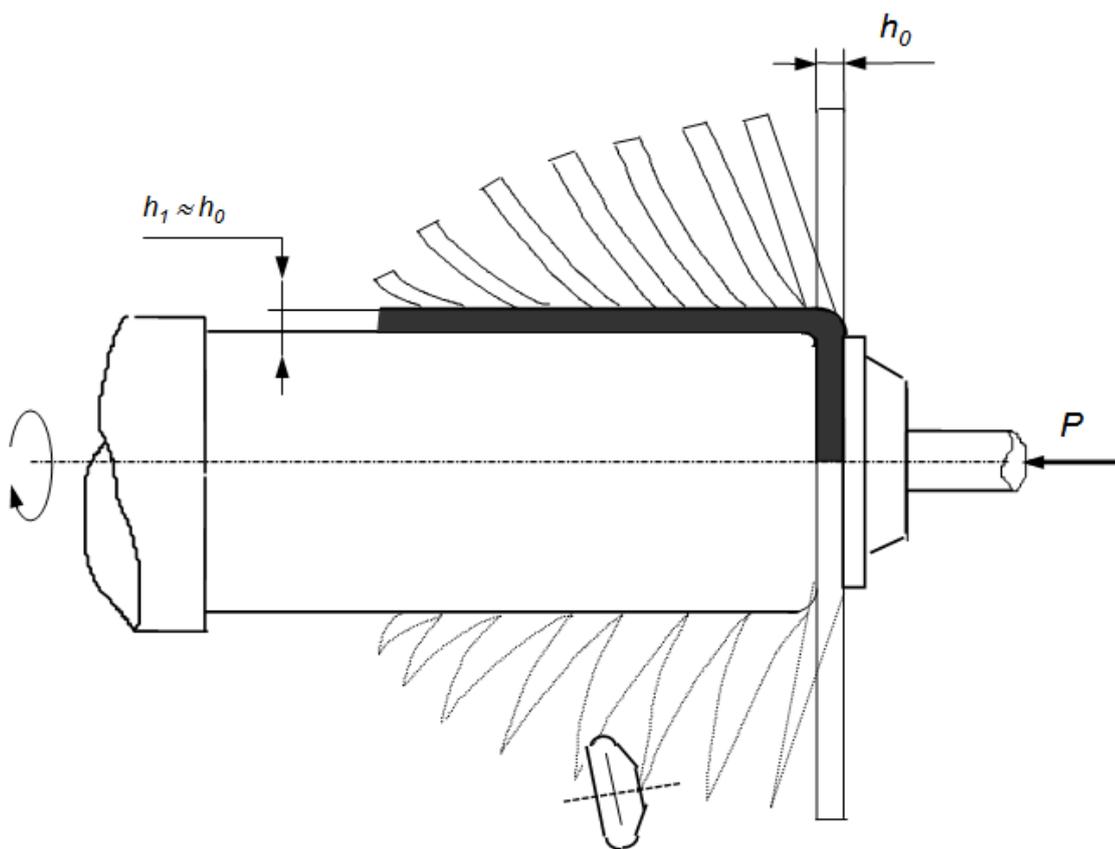


Рисунок 15– Схема ротационной вытяжки без преднамеренного утонения

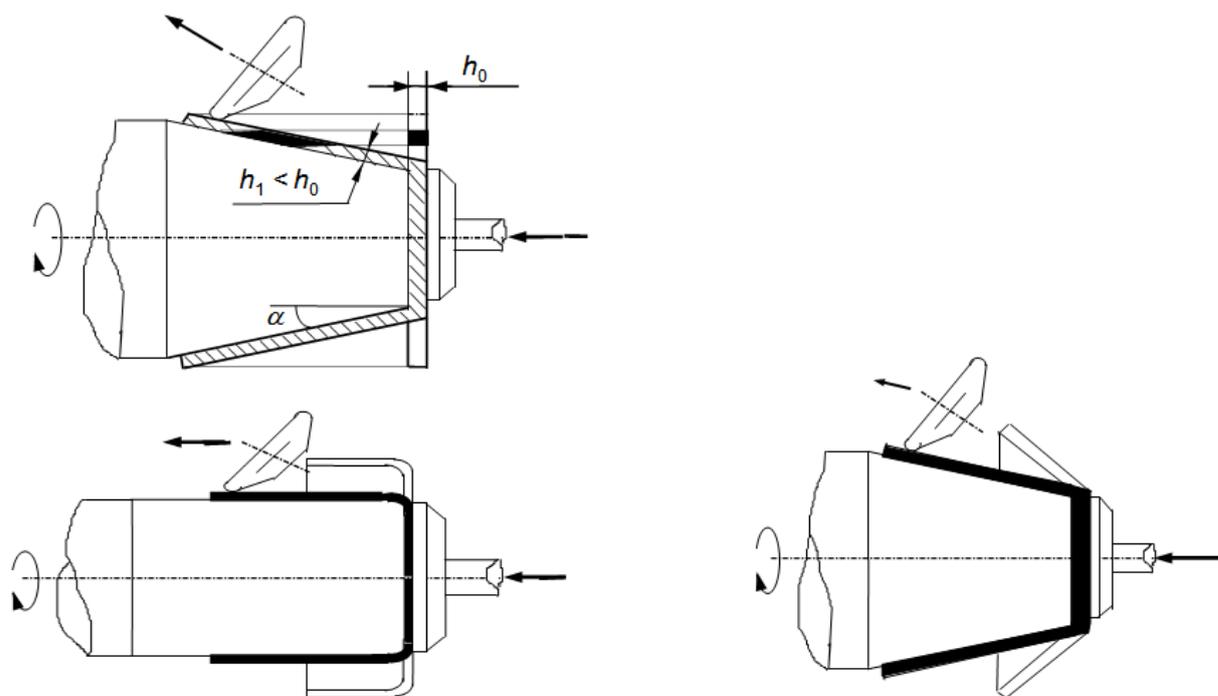


Рисунок 16– Схема однократной ротационной вытяжки

Под **технологической операцией** будем понимать комплекс действий одного вида по преобразованию формы или механических свойств заготовки на одном оборудовании. Вид, количество и последовательность операций определяется, в первую очередь, формой, точностью и техническими требованиями к детали. Чем сложнее форма детали и выше требования, тем большее число операций приходится выполнять.

Технологическая операция, рисунок 17, может состоять из одного или нескольких переходов. **Переходом** будем называть часть технологической операции, выполняемую с использованием одной оснастки без переустановки заготовки. Принято в понятие перехода включать также термообработку. Если термообработка или местный нагрев осуществляется на станке без съема заготовки, то будем считать его частью перехода. В противном случае термообработку между переходами будем относить к отдельной операции.

Формоизменение заготовки на переходе в некоторых процессах выполняется за несколько проходов. **Проход** - это формообразующее действие или движение, выполняемое одним инструментом в одном направлении. Проход будем относить к технологическому действию, не подлежащему дальнейшей детализации в технологической карте.

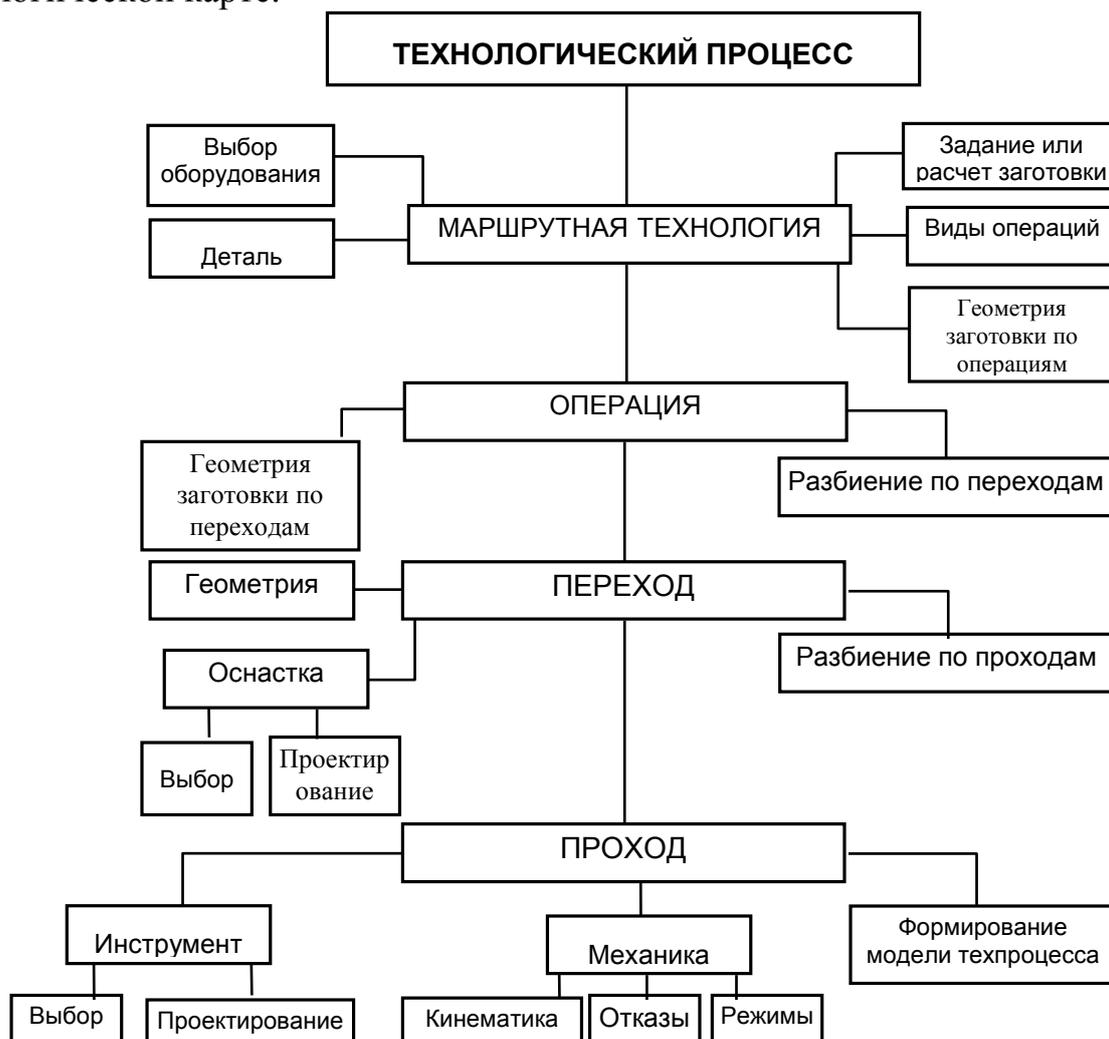


Рисунок 17–Структура проектирования технологического маршрута

Задача моделирования сводится к расчету операционных технологий, к увязке геометрических и физико-механических характеристик заготовки между операциями, анализу выполнимости и качества заданного варианта технологического процесса. Проектирование технологии с помощью моделей становится итерационным процессом по выбору рационального или близкого к оптимальному варианту.

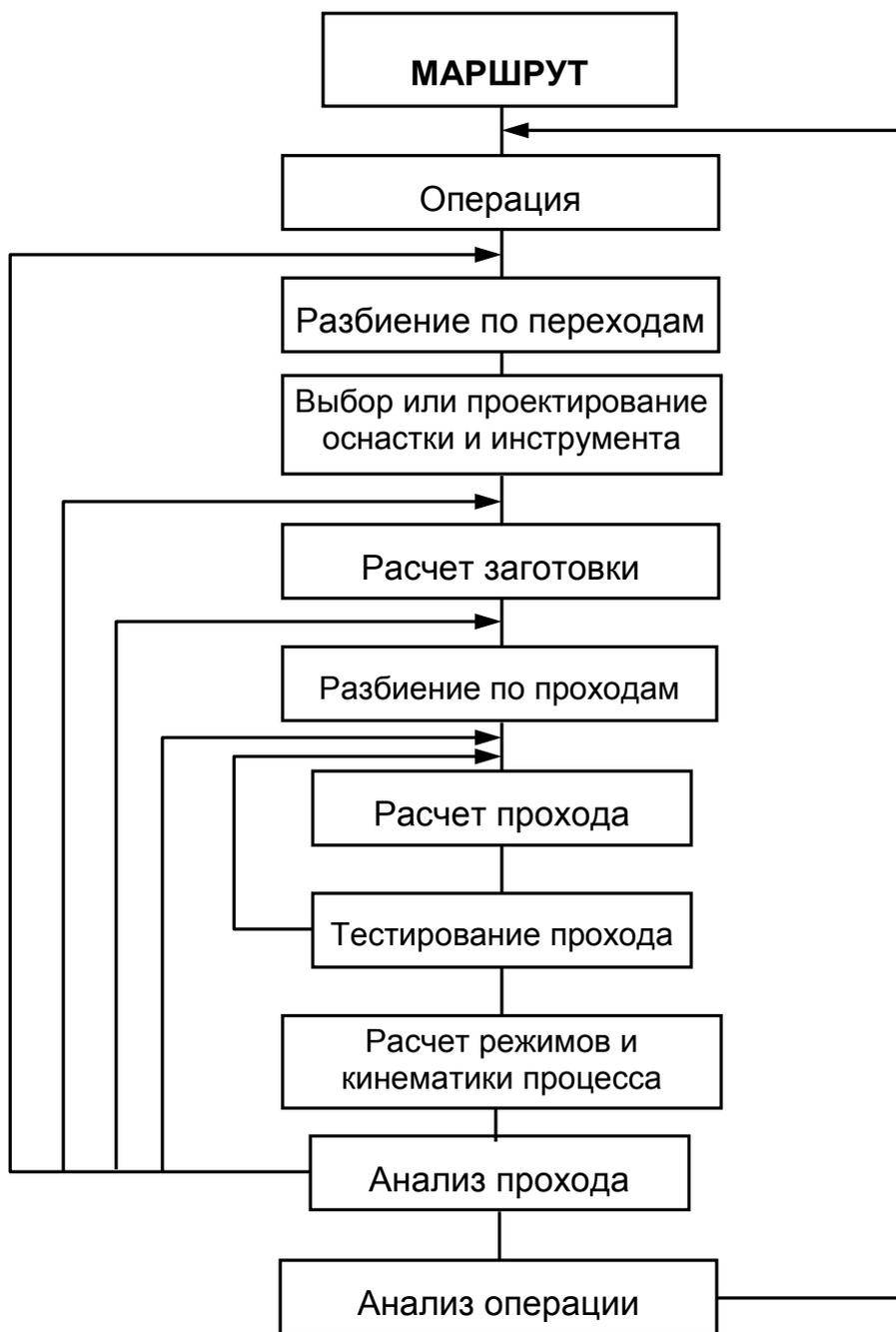


Рисунок 18– Схема расчета технологического маршрута.

## Модель детали

Модель детали, рисунок 19, представляет собой формализованное описание геометрии и технических требований к детали, содержит исчерпывающую информацию для ее изготовления и контроля.

Участок  $i$  базового контура детали задается координатами начала участка  $x_i^0$ ,  $y_i^0$ , радиусом кривизны  $R_i^0$ , координатами конца участка  $x_{i+1}^0$ ,  $y_{i+1}^0$ , и толщиной в начале участка  $h_i^0$  и в конце участка  $h_{i+1}^0$ . Число участков будем обозначать  $m_p$ . Примем правило знаков для радиуса кривизны: если дуга обращена выпуклостью в направлении оси  $X$ , то радиус кривизны считается положительным, и наоборот. Считается, что центральный угол дугового участка не более  $\pi/2$ , а радиус кривизны не меняет свой знак. В противном случае данный участок разбивается на два или более участков.

Точность размеров участка обозначим  $\sigma_i$ , соответствующим номеру качества точности (1...14), шероховатость поверхности на каждом участке - классом чистоты поверхности (1...14). Твердость поверхности будем задавать для каждого участка в единицах твердости по Роквеллу (HRC) или по Брюннелю (HB).

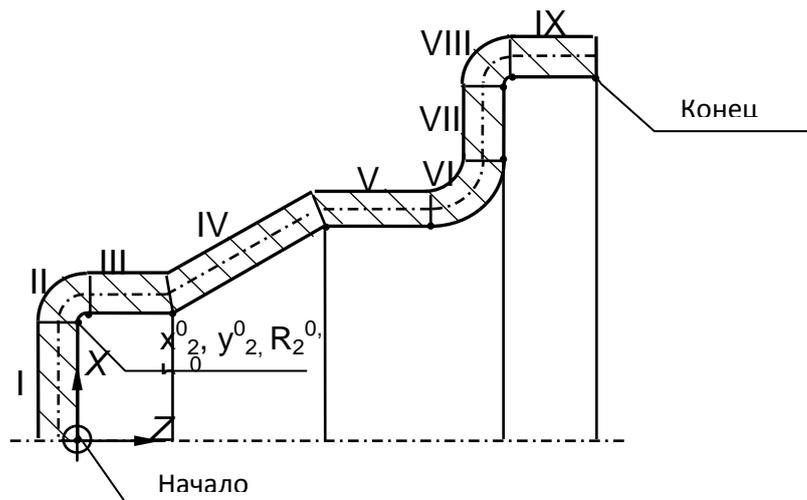


Рисунок 19– Модель детали.

## Модель материала.

Под моделью материала будем понимать математическое описание характеристик материала заготовки до, после и в процессе обработки.

$$\bar{\sigma} = A(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \quad (79)$$

Материалы, подвергаемые ротационной обработке, можно считать трансверсально-изотропными с изотропным упрочнением. Даже материалы, обладающие анизотропией свойств, в процессе локального приложения нагрузки проявляют свою анизотропию в незначительной степени, что подтверждается экспериментами.

Кривую течения материала будем описывать степенной зависимостью, где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  - эквивалентные напряжение и деформация;  $A$ ,  $\varepsilon_0$  - параметры кривой течения;  $n$  - показатель упрочнения.

Параметры  $A$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $n$  и параметр анизотропии  $r$  исходной заготовки определяются по результатам испытаний на одноосное растяжение по методике. В производственных условиях можно использовать стандартные характеристики материала и выразить через них параметры аппроксимации по формулам:

$$\varepsilon_0 = \delta_p \left( \frac{\sigma_{\square}}{\sigma_{\%0}} \right)^{1/n} / \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\square}}{\sigma_{\%0}} \right)^{1/n} \right] \quad (80)$$

$$A = \sigma_{\square} / \varepsilon_0^n \quad (81)$$

$$n = \ln(1 + \delta_p) \quad (82)$$

### Модель технологического оборудования

Для описания технологического оборудования необходимо знать его модель или тип; размеры рабочей зоны; диапазон режимов; энерго-силовые характеристики; тип управления; данные по суппортам и пиноли. Вся эта информация служит для выбора оборудования для изготовления заданной детали, подготовки управляющей программы или режимов и траекторий для управления процессом, проектирования копировальных шаблонов.

Размеры рабочей зоны определяются компоновкой станка и допустимой зоной работы суппортов, рисунок 20. К основным габаритным размерам относятся: максимальный диаметр заготовки; база станка; второй габаритный размер (обычно расстояние над суппортом).

Главный привод станка характеризуется мощностью  $W$  (кВт) и диапазоном допустимых оборотов в минуту  $S$  (min-max). Управление станком может быть трех видов: ручное, копировальное и числовое программное управление (ЧПУ).

Каждый суппорт характеризуется типом привода (механический или гидравлический); максимальным размером рабочей зоны, определяемым координатами ("с" обозначает номер суппорта); углами наклона оси давления суппорта и к поперечным координатным осям  $X$  и  $Y$ ; ходом  $\Delta z_c$ ,  $\Delta x_c$  по осям  $Z$  и  $X$ ; усилием  $P_c$  (кН); числом позиций  $k_c$ , если суппорт имеет револьверную головку.

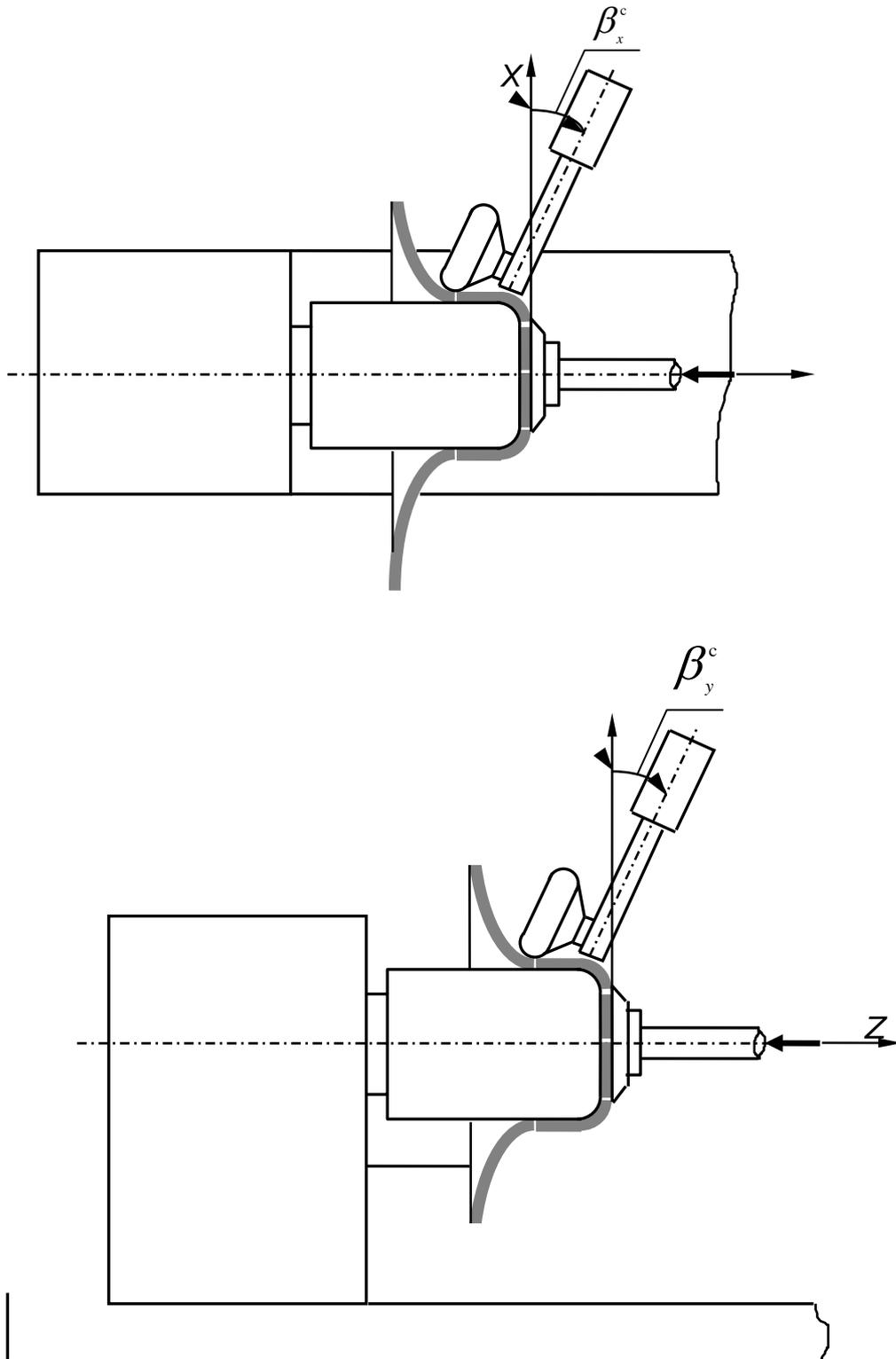


Рисунок 20– Схема положения оси давления суппорта.

Таблица 17

Модель	Размерно-силовой ряд давяльных станков									
	250	350	400	450	600	700	900	1200	1600	1800
Высота центров над станиной, мм	250	350	400	450	600	700	900	1200	1600	1800
Максимальный диаметр заготовки, мм	490	690	790	890	1190	1490	1790	2390	3200	4400
Межцентровое расстояние, мм	625	1125	1425	1525	1900	1225	3800	2750	2750	3200
Усилие продольное, кН	14	20	45	65	100	65	300	100	200	300
Усилие поперечное, кН	15	22	45	65	100	65	400	100	200	400
Мощность главного привода, кВт	4,4	5,5	19,8	24	30	24	90	45	57	110

### Модель оснастки

Под оснасткой обычно понимается комплект оправки с приспособлениями, необходимыми для формообразования детали. Основным элементом оснастки является давяльная оправка, обычно повторяющая внутренний или наружный контур детали.

Исходными данными для проектирования оправки, которые могут быть получены в результате расчета, являются: рабочий контур оправки, габаритные размеры ( $D_{оп}$ ,  $L_{оп}$ ); материал; радиус закругления торцевой части  $R_{оп}$ , присоединительные размеры.

Выходным расчетным данным будет также диаметр прижима  $D_{пр}$ .

Для проектирования оснастки важно знать присоединительные размеры шпинделя станка, рисунок 21. В подавляющем большинстве случаев давяльное оборудование имеет посадочный конус. Различается только крепление к шпинделю: или со стороны передней, или задней бабки. Опишем посадочный конус следующими параметрами: диаметр конуса  $d^c$ ; угол конусности  $\gamma^c$ ; высота конуса  $l^c$ ; число крепежных отверстий  $n^c$ ; диаметр расположения крепежных отверстий; диаметр отверстий; диаметр отверстия под шпонку; глубина шпоночного отверстия  $h^c$ ; угол, определяющий положение шпоночного отверстия  $\alpha^c$ .

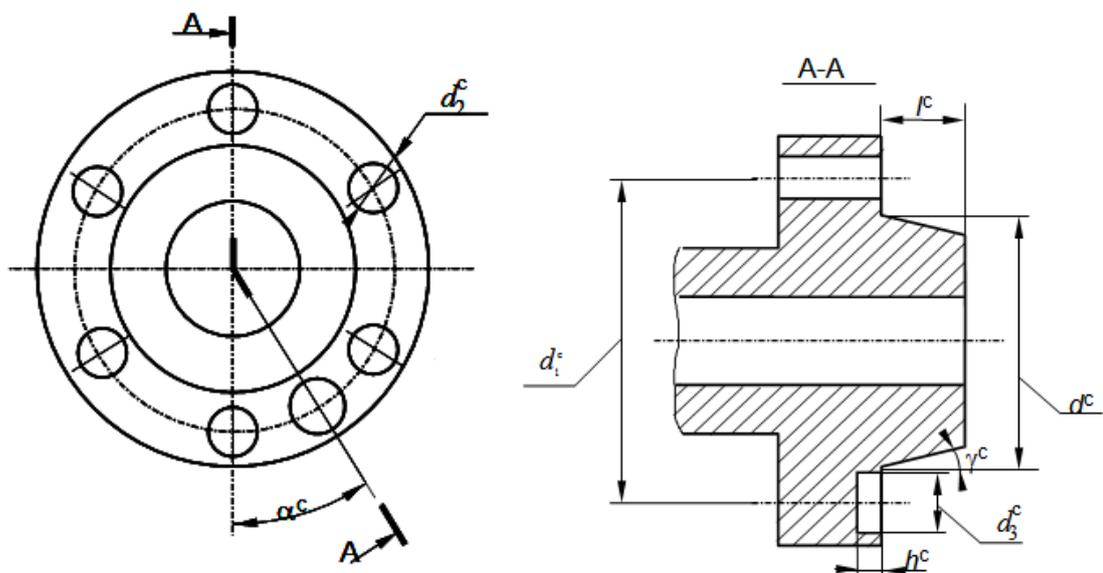


Рисунок 21– Эскиз шпинделя станка.

Для описания давящего инструмента будем указывать его тип; диаметр  $D_R$ , радиус рабочей части  $R_r$ , ширину ролика  $b$ , ширину обжимного участка  $e$ , передний угол  $\phi$ ; задний угол  $\phi_3$ ; угол наклона “крыши” фк; высоту переднего уступа  $l$ .

Для проектирования инструмента основными выходными данными расчета будут тип ролика; его диаметр  $D_R$  и радиус рабочей части  $R_r$ .

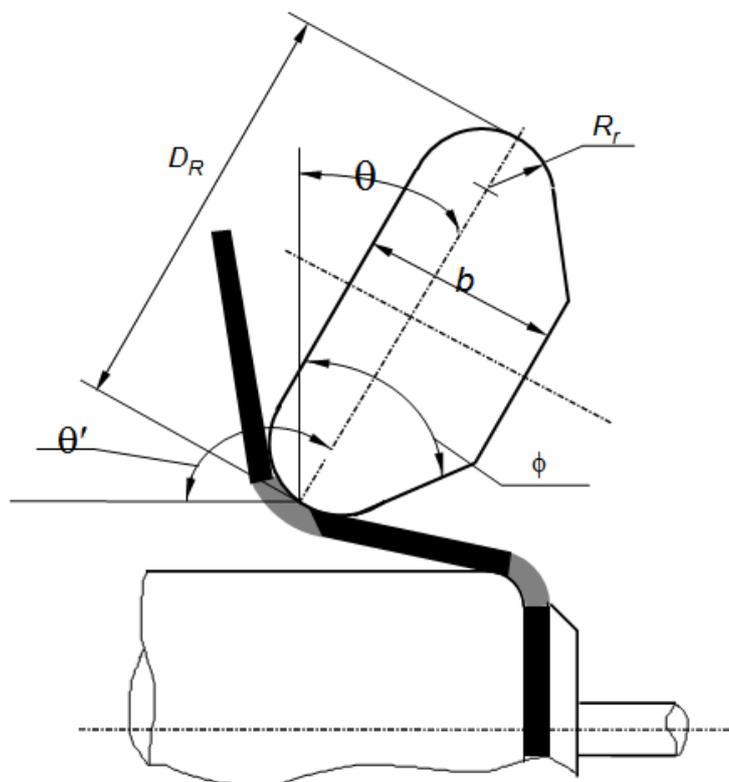


Рисунок 22- Схема установки давящего ролика

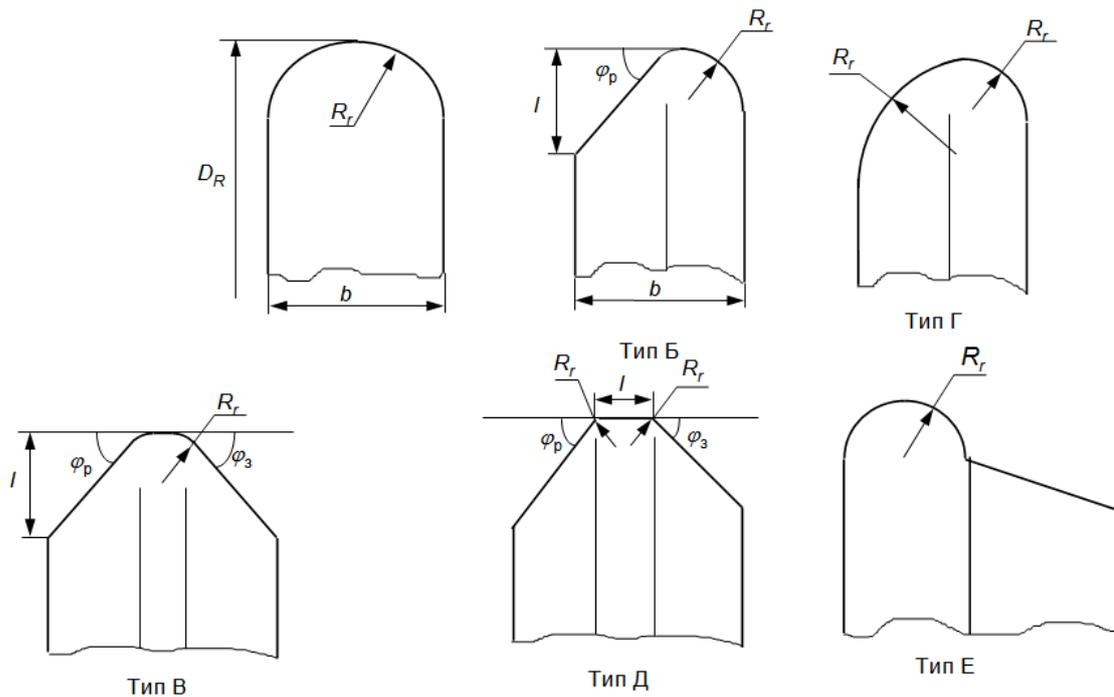
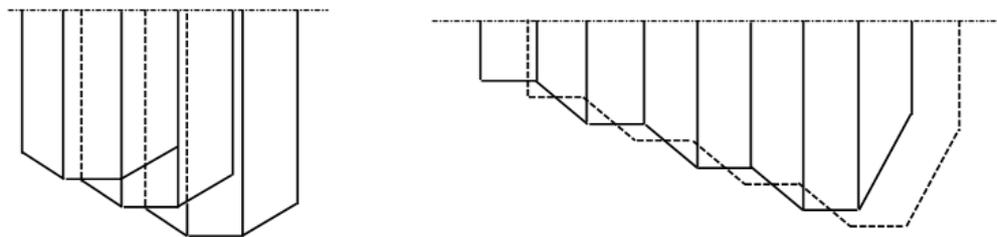


Рисунок 23– Основные типы формообразующих роликов.



а) смещение обжимных участков;

б) перекрещивание обжимных участков

Рисунок 24– Виды сложных роликов со смещением.

## Выводы

– Технологический процесс обычно включает в себя несколько основных и вспомогательных операций. Операция, в свою очередь, состоит из переходов и проходов. Поэтому модель процесса должна иметь структуру данных и маршрута. Структура проектирования технологического процесса представляет собой

расчленение всего комплекса действий по формообразованию детали на отдельные простейшие элементы. Собственно моделирование технологического процесса заключается в генерации цепочки маршрут-операция-переход-проход-кадр, расчета механики процесса и технологических параметров, анализа приемлемости полученного варианта технологии.

– Для моделирования процесса необходимо иметь разработанные модели: детали, материала, технологического оборудования, инструмента и оснастки.

– Данные модели содержат минимально необходимый набор параметров.

Описание различных видов деталей должно предусматриваться в модели детали. Для этого должны быть разработаны правила описания геометрии и технических требований к детали.

### Моделируемая операция

К рассматриваемому виду операции будем относить все формообразующие операции ротационной вытяжки, при выполнении которых заготовка в зоне очага пластической деформации в основном контактирует только с деформирующим инструментом. Поверхность, с которой не контактирует инструмент, не имеет опоры, за исключением отдельных зон.

Выделим несколько основных видов деформирования: внедрение ролика в заготовку; деформирование с подтягиванием фланца; деформирование с заневоленным фланцем и отбортовка отверстия.

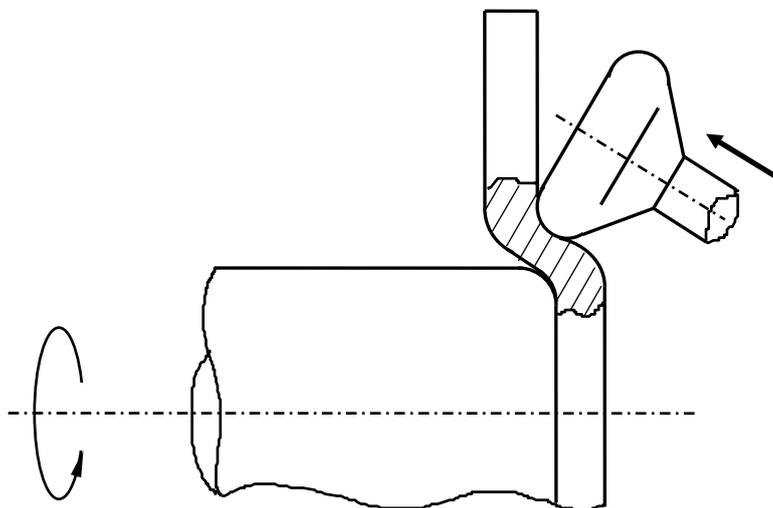
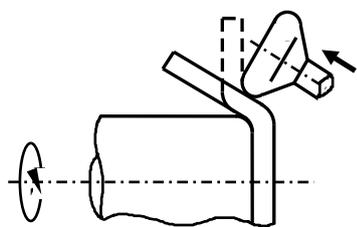


Рисунок 25– Внедрение ролика в заготовку.

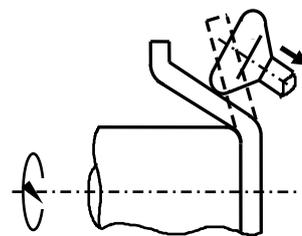
Будем рассматривать формообразование сравнительно тонкостенных оболочек без нагрева. Внедрение ролика в заготовку обычно характеризуется изгибом заготовки: с одной стороны - вокруг радиуса закругления оправки,  $R_{оп}$ ; с

другой стороны - вокруг радиуса рабочей кромки ролика  $R_r$ . Радиус  $R_{оп}$  должен быть не меньше  $1,5\rho^*$ . Деформация в этой зоне за счет изгиба достигает значительной величины, поэтому здесь наблюдается местное утонение, которое может привести к отрыву дна.

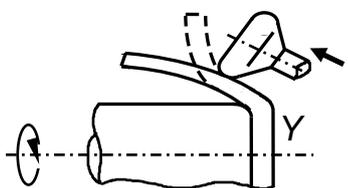
Деформирование с подтягиванием фланца - наиболее часто возникающая при формообразовании ситуация. При этом можно выделить несколько разновидностей. При перемещении ролика по конусу на прямом проходе деформированное состояние близко к плоскому, если фланец достаточно жесткий. Происходит растяжение металла на участке между роликом и оправкой. Если фланец не большой и не упрочненный, то он втягивается в зону пластической деформации, чем уменьшается степень утонения заготовки. При обратном проходе наблюдается аналогичная ситуация, с той лишь разницей, что растяжение происходит на участке между роликом и основанием фланца заготовки. При этом образуется некоторая волна металла перед роликом, которая перемещается к оправке, восстанавливая толщину заготовки.



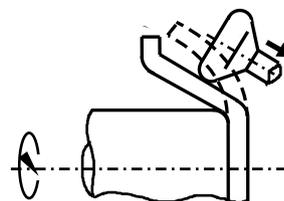
прямой проход по конусу



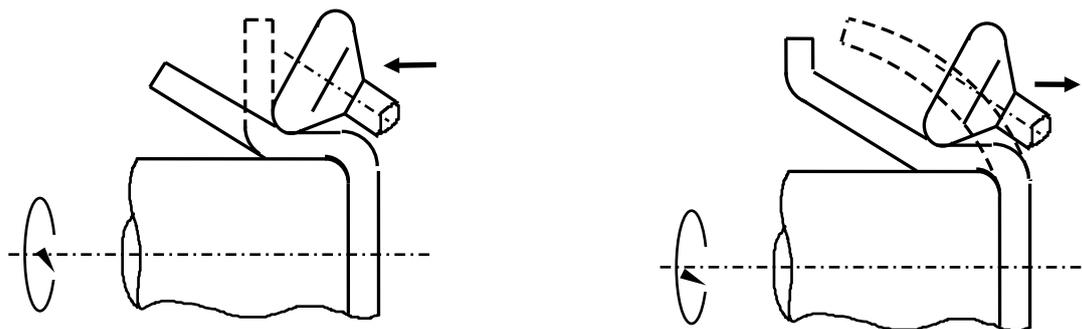
обратный проход по конусу



прямой проход с обжатием



обратный проход с обжатием



укладка на оправку на прямом проходе

укладка на оправку на обратном проходе

Рисунок 26– Элементы движения ролика

Многие детали, изготавливаемые ротационной вытяжкой, сочетают в себе элементы нескольких типов. В этом случае нельзя останавливаться на какой либо одной стратегии формообразования. Модель механики процесса ротационной вытяжки оболочек без преднамеренного утонения должна строиться на основе комбинации различных частных случаев и типов деталей.

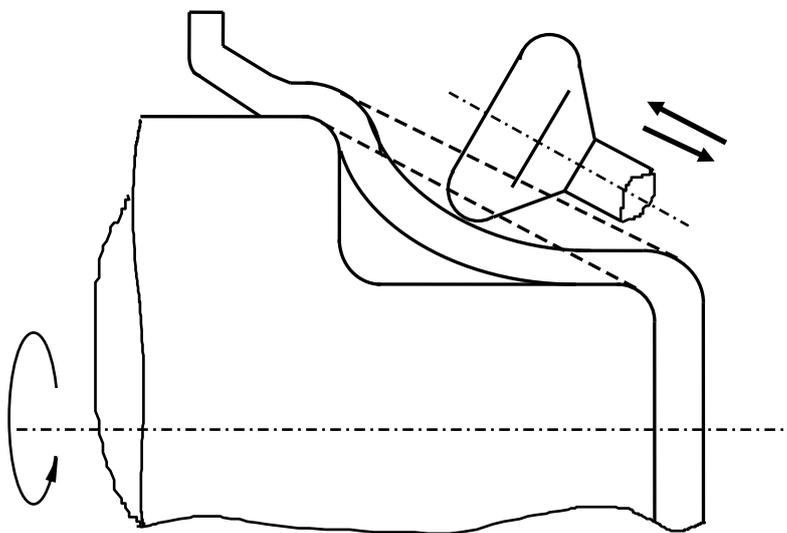


Рисунок 27– Растяжение без подтягивания материала.

Многие детали, изготавливаемые ротационной вытяжкой, сочетают в себе элементы нескольких типов. В этом случае нельзя останавливаться на какой либо одной стратегии формообразования. Модель механики процесса ротационной вытяжки оболочек без преднамеренного утонения должна строиться на основе комбинации различных частных случаев и типов деталей.

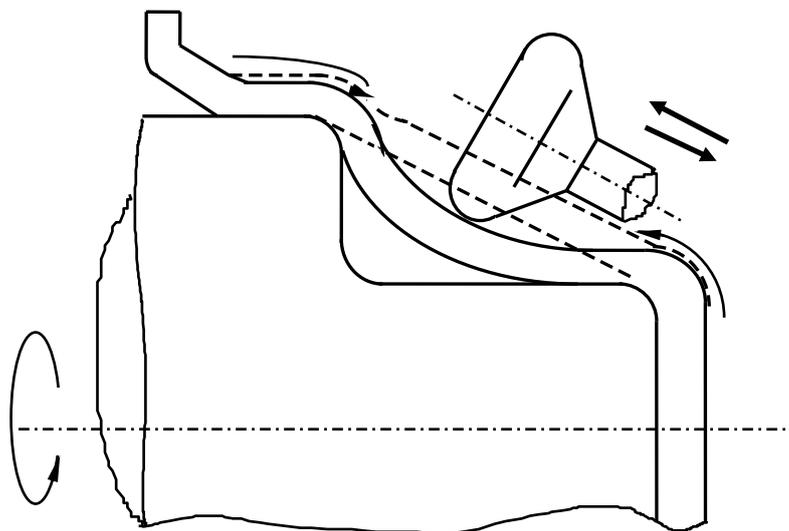


Рисунок 29 – Растяжение с подтягиванием материала.

Таким образом выделим следующие элементы операции:

- первый проход инструмента, особенностью которого является наличие жесткого фланца;
- формообразование консольной оболочки - наиболее часто встречающийся случай деформирования оболочки “по воздуху” между свободным фланцем и областью заготовки, находящейся в контакте с оправкой;
- деформирование фланца;
- деформирование области оболочки, находящейся между двумя зонами контакта (для упрощения терминологии будем называть этот случай формообразованием ступени или промежуточной зоной).

### Цилиндрические детали

На основании экспериментов установлено, что на первом проходе вследствие большой жесткости фланца реализуется плоское деформированное состояние, при котором окружные деформации  $\varepsilon_\phi$  равны нулю. В этом случае меридиональная деформация определяется по закону синуса в виде

$$\varepsilon_m = \ln\left(\frac{1}{\cos \vartheta}\right), \quad (83)$$

где  $\vartheta$  - угол между радиусом и касательной к оболочке в данной точке. Угол  $\vartheta$  равен  $(\pi/2 - \alpha)$ , где  $\alpha$  - угол между осью вращения и касательной к оболочке. Однако, при углах  $\vartheta > 30^\circ$  происходит отклонение от этой зависимости. Это, вероятно, обусловлено возрастанием усилий при сравнительно больших подачах, применяемых при многопроходной вытяжке.

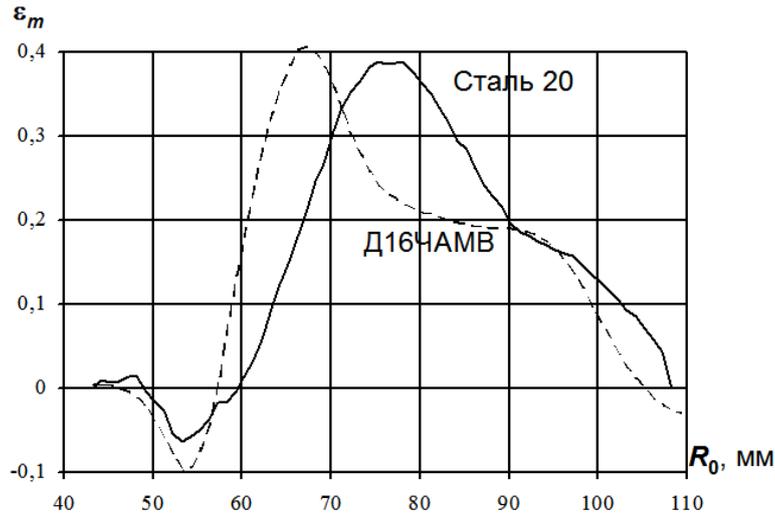


Рисунок 30 – Распределение меридиональной деформации в стальном и алюминиевом образцах после трех проходов.

Приблизненно распределение меридиональной деформации можно аппроксимировать трапецией и представить в виде:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^1 + (a + b\bar{x}) \cdot (\sin \vartheta - \sin \vartheta^1), \quad (84)$$

где  $\varepsilon_m^1$  – меридиональная деформация после первого прохода;  $a$  и  $b$  – эмпирические коэффициенты;  $\bar{x} = x/z$  - относительная координата;  $\vartheta$ ,  $\vartheta^1$  – углы наклона оболочки к оси  $X$  на данном проходе и после первого прохода, соответственно. Коэффициенты определяются, исходя из экспериментальных данных, аппроксимацией функции:

$$\Phi = a + b\bar{x} = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_m^1}{1 - \sin \vartheta^1} \quad (85)$$

Значения коэффициентов принимаются следующие:

$a = -0,25$ ;  $b = 2,3$  при  $\bar{x} \leq 0,45$ ;  $a = -0,2$ ;  $b = 1,2$  при  $\bar{x} > 0,45$ .

Сравнение адекватности модели по двум параметрам: длине образующей и максимальной меридиональной деформации показало, что среднеквадратичные отклонения расчетных параметров от экспериментальных на массиве из 52 экспериментов составили 4,44 мм для длины образующей (примерно 2,3 %) и 10,9 % - для максимальных меридиональных деформаций. Распределение меридиональной деформации в стальном и алюминиевом образцах после трех проходов

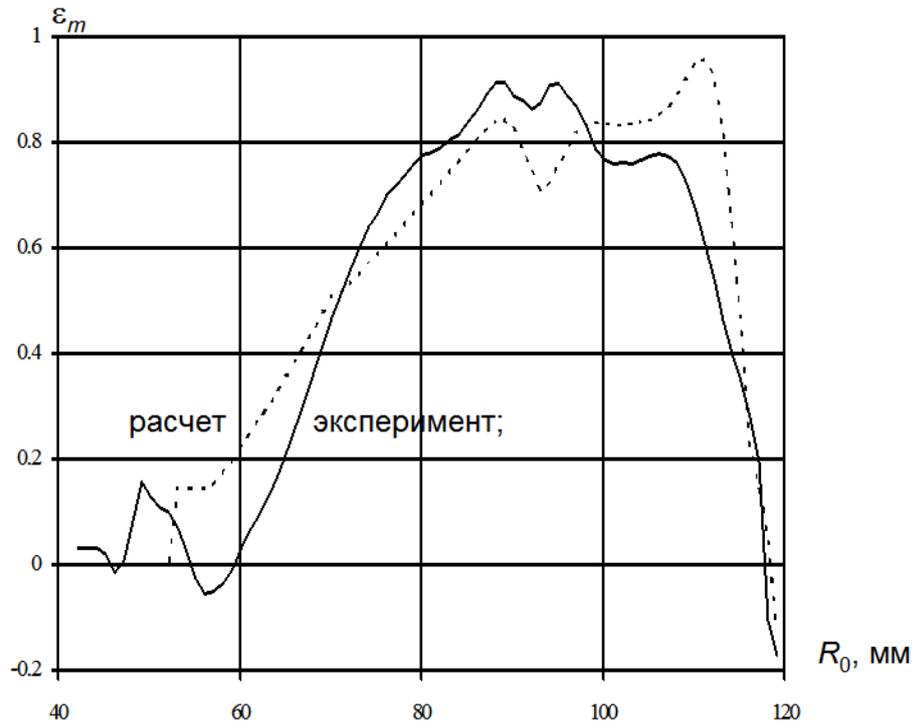


Рисунок 31 – Распределение меридиональной деформации после 16-ти проходов при вытяжке стального стакана

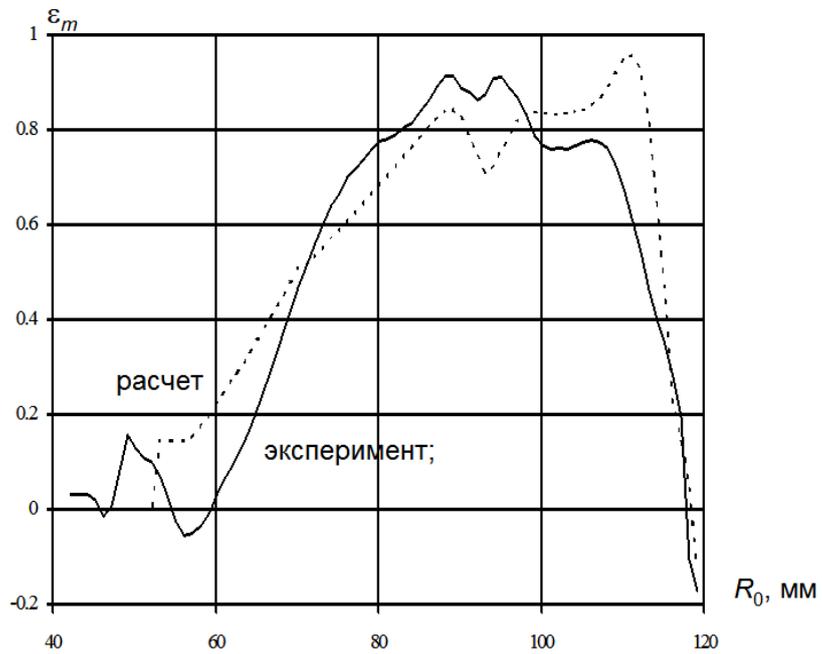


Рисунок 32 – Распределение меридиональной деформации после 16-ти проходов при вытяжке стального стакана

## Лекция 10. Гибка

### Моделирование процесса гибки

При изгибе моментом  $M$  часть слоев заготовки получает удлинение в тангенциальном направлении, а другая часть — сжатие. В любой данный момент деформирования (при данной кривизне заготовки) должна быть поверхность, разделяющая зоны растяжения и сжатия. Эту поверхность называют **нейтральной поверхностью напряжений**.

Учитывая допустимость использования гипотезы плоских сечений, можно полагать, что приращения деформаций при изменении кривизны линейно возрастают по мере удаления от нейтральной поверхности напряжений.

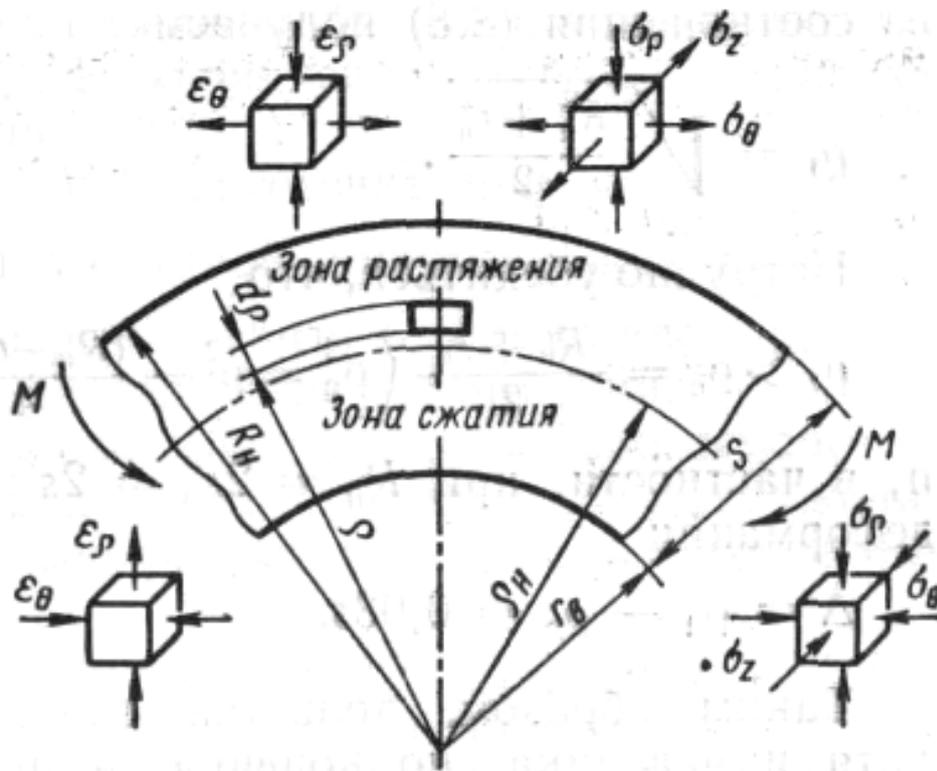


Рисунок 33 – Гибка.

Рассмотрим распределение напряжений в широкой полосе при пластическом изгибе моментом.

При пластическом изгибе зависимость величины нормальных напряжений  $\sigma$  от расстояния до нейтральной поверхности не является линейной, как при упругом изгибе, а имеет довольно сложный характер вследствие наличия пластических зон, а также вследствие влияния кривизны на распределение напряжений и схему напряженного состояния.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\sigma}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho}, \\
& \sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \beta \sigma_s, \\
& \sigma_\rho = -\beta \sigma_s \ln \frac{R_H}{\rho}, \\
& \sigma_\theta = \beta \sigma_s (1 - \ln \frac{R_H}{\rho}).
\end{aligned} \tag{86}$$

Зона сжатия:

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho = -\beta \sigma_s \ln \frac{\rho}{r_B}, \\
& \sigma_\theta = -\beta \sigma_s (1 + \ln \frac{\rho}{r_B})
\end{aligned} \tag{87}$$

Радиус кривизны нейтральной поверхности напряжений:

$$\rho_H = \sqrt{R_{HB}^r}. \tag{88}$$

при  $r_B \gg 5s$  схема напряженного состояния близка к линейной. С погрешностью, в среднем не превышающей 5%, можно считать также, что нейтральная поверхность напряжений совпадает со срединной поверхностью заготовки ( $\rho_H \approx r_B + 0,5s$ ). При  $r_B < 5s$  влияние  $\sigma_r$  на величину и распределение напряжений  $\sigma_\theta$  по толщине заготовки становится значительным, а нейтральная поверхность напряжений смещается от срединной поверхности к центру кривизны.

Получим величину смещения нейтральной поверхности напряжений от срединной поверхности:

$$\begin{aligned}
R_H &= r_B + s, \\
\rho_\theta &= \frac{R_H + r_B}{s}, \\
\eta &= \frac{\rho_c - \rho_H}{s} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{r_B}{s}} - \sqrt{\frac{r_B}{s}} \right)^2.
\end{aligned} \tag{89}$$

Представляет интерес оценка максимальной величины напряжения, действующего при изгибе:

$$\sigma_{\rho \max} = -\beta \sigma_s \ln \sqrt{\frac{R_H}{r_B}}. \quad (90)$$

Анализ процесса изгиба был выполнен без учета упрочнения, а следовательно, полученные зависимости справедливы для горячего деформирования.

В условиях холодного деформирования упрочнение приводит к увеличению напряжения текучести, а так как величины деформаций переменны по толщине, то и увеличение напряжения текучести от исходного значения также будет переменным по толщине.

Анализ распределения напряжений при гибке с учетом упрочнения проведем с использованием следующих допущений:

1) поворот сечений, перпендикулярных к срединной поверхности, происходит относительно точек, расположенных на нейтральной поверхности напряжений, в конечный момент деформации (пренебрегаем зоной немонотонной деформации);

2) материал заготовки одинаково упрочняется при сжатии и при растяжении;

3) по упрочняющему эффекту тангенциальная деформация при гибке эквивалентна линейной деформации при одноосном сжатии или растяжении.

Условие пластичности с учетом упрочнения получит вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho - \sigma_\theta &= \pm \beta [\sigma_{T0} \pm \Pi \delta], \\ \sigma_\rho &= -\beta \left( \sigma_{T0} + \frac{\Pi}{2} \ln \frac{\rho R_H}{\rho_H^2} \right) \ln \frac{R_H}{\rho}; \\ \sigma_\theta &= -\beta \left[ \sigma_{T0} \left( 1 + \ln \frac{\rho}{r_B} \right) + \frac{\Pi}{2} \left( 2 \ln \frac{\rho_H}{\rho} + \ln \frac{\rho_H^2}{\rho r_B} \ln \frac{\rho}{r_B} \right) \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

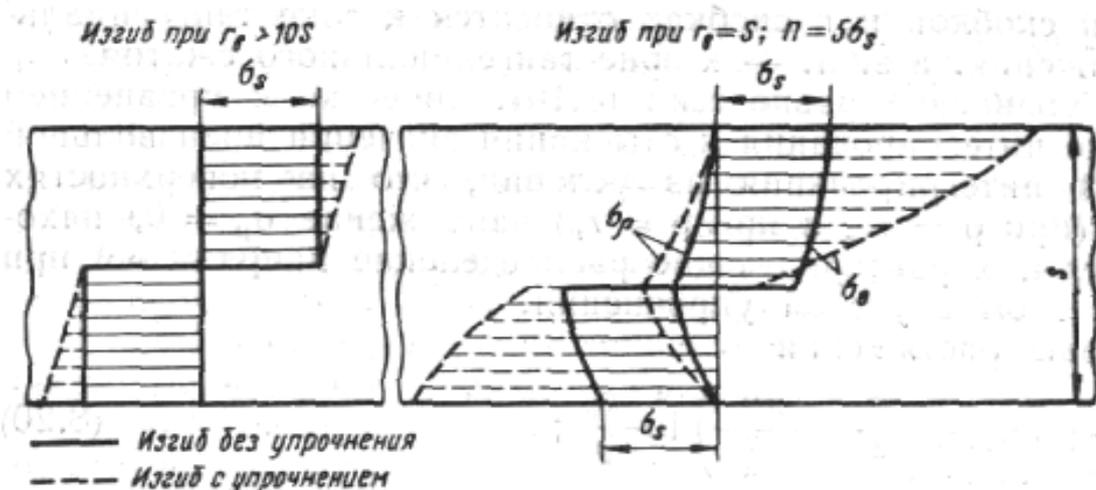


Рисунок 34 – Эпюры напряжений.

$$\begin{aligned}
M_H &= \beta \int_{\rho_B}^{R_H} \sigma_s \rho d\rho + \beta \int_{r_B}^{\rho_H} (-\sigma_s) \rho d\rho = \beta \sigma_s \frac{R_H^2 - \rho_B^2 - \rho_H^2 + r_B^2}{2} = \\
&= \beta \sigma_s \frac{s}{2} (R_H + \rho_B - \rho_H - r_B) = \beta \sigma_s \frac{s^2}{4}; \\
M_H &= \beta \sigma_s \left[ \int_{\rho_B}^{R_H} \left(1 - \ln \frac{R_H}{\rho}\right) \rho d\rho - \int_{r_B}^{\rho_H} \left(1 + \ln \frac{\rho}{r_B}\right) \rho d\rho \right] = \\
&= \beta \sigma_s \left( \frac{\rho_H^2}{2} \ln \frac{R_H r_B}{\rho_H^2} + \frac{R_H^2 - 2\rho_H^2 + r_B^2}{4} \right). \tag{92}
\end{aligned}$$

Величина пружинения при гибке:

$$\Delta \alpha = 3 \frac{\sigma_s}{E} \cdot \frac{\rho_c}{s} \alpha. \tag{93}$$

## Лекция 11. Процессы механической обработки

Назначение этапа технологической подготовки производства в основном сводится к решению следующих задач:

- разработка технологий изготовления изделия, инструментов, приспособлений и т.д. на основе их геометрических моделей, полученных на этапе проектирования;
- подготовка программ для станков с ЧПУ по спроектированным технологиям.

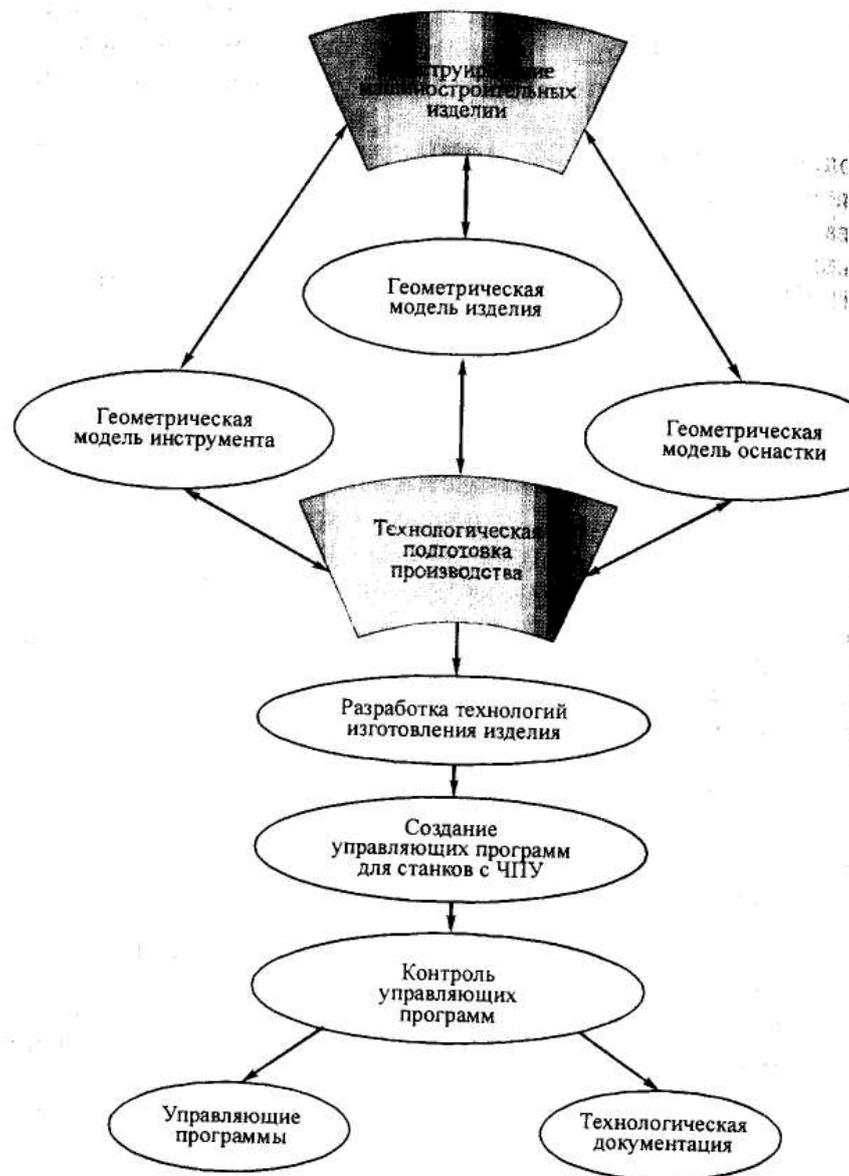


Рисунок 35 – Блок схема.

Программные среды, с помощью которых решаются задачи этого этапа, можно объединить в две группы. К первой из них следует отнести программные комплексы, специально разработанные для выполнения всего цикла или отдельных процедур технологической подготовки производства. Среди этой группы программного обеспечения можно выделить: ADEM, ArtCAM, EdgeCAM и некоторые разработки российских фирм: КОМПАС АВТОПРОЕКТ – проектирование технологических процессов механообработки, штамповки, сборки, термообработки; FLEXTехноПро (Топ Системы) – проектирование технологии механообработки, сборки, сварки, пайки, нанесения покрытий, штамповки,ковки, термообработки; СИТЕП МО (Станкин СОФТ) – механообработка; СИТЕП ЛШ – листовая штамповка; TECHCARD (Интермех) – комплексная система автоматизации технологической подготовки производства; ТехноПро (Вектор) – универсальная система автоматизации технологического проектирования; SprutCAM, СПРУТ-ТП (СПРУТ-Технологии) – система автоматизированного проектирования технологических процессов и др.

Другую группу программного обеспечения составляют программные системы сквозного проектирования и технологической подготовки производства: CATIA5, EUCLID3, Unigraphics, Pro/ENGINEER, CADDS5.

Контроль качества управляющих программ выполняют специальные программы, например, такие, как NCSimul, NCFormater и др.

В производстве машиностроительных и части приборостроительных изделий используются технологии, в основе которых лежат различные физические процессы: механообработка, электроэрозионная обработка, литье металлов и пластмасс и др.

В автоматизированных системах сквозного проектирования и подготовки производства наиболее часто реализованы следующие виды механообработки: 2,5-, 3- и 5-координатное фрезерование, токарная обработка, сверление, нарезание резьбы и др. Имеется возможность моделировать движение инструмента и снятие материала во время черновой и чистовой обработки поверхности изделия.

В модулях 3- и 5-координатного фрезерования программных систем сквозного проектирования и технологической подготовки производства реализованы практически все возможные способы обработки всех поверхностей изделий, например, такие, как фрезерование поверхности с управлением угла наклона инструмента, шлифующее резание с возможностью обдувки и др.

### **Проектирование технологии фрезерной обработки**

В системах сквозного проектирования и технологической подготовки производства различных фирм-разработчиков реализованы свои подходы к организации программ, свои алгоритмы и методы. Для более предметного изложения этой темы обратимся к основным этапам работы технолога в системах верхнего уровня на примере системы EUCLID3 фирмы EADSMATRADATAVISION (Франция). Приведем некоторые основные понятия, используемые в проектировании технологических процессов.

Удаляемый материал. Материал, удаляемый из заготовки детали в каком-либо цикле ее обработки, определяется геометрическим объектом, тип которого зависит от вида механической обработки. Таким геометрическим объектом может быть элемент одного из следующих типов:

- незамкнутая линия (например, для сверления);
- замкнутая линия или контур (например, для контурной обработки);
- призма (например, для обработки выемок);
- тело вращения.

### **Система базирования элементов оборудования.**

Одним из важных понятий в проектировании технологий является понятие *системы базирования* элементов оборудования. В системе EUCLID3 это понятие ассоциируется с понятием *trihedral*.

Системы базирования отвечают за взаимное расположение всех элементов оборудования: станка, инструмента, инструментальной оснастки, технологической оснастки (приспособления) и детали в процессе обработки. Система базирования элемента создается путем определения положений начала координат и направления осей XYZ. При этом на экране монитора указываются только оси Z и X. Ось Y не отображается, так как ее положение можно вычислить по правилу правой руки. В процессе описания того или иного элемента оборудования технолог самостоятельно определяет положение системы базирования. Назначение ее для того или иного элемента оборудования будем называть *определением* данного элемента. На всех приведенных далее рисунках в системах базирования ось Z будет изображаться сплошной линией, ось X - пунктирной. Система базирования существует как самостоятельный объект, имена этим объектам технолог назначает произвольно.

### **Среда обработки.**

В подсистеме проектирования процессов механообработки предварительно создается так называемая среда обработки. Элементами этой среды являются:

- описание имеющихся на предприятии фрезерных станков с ЧПУ;
- геометрически точные модели используемых инструментов;
- геометрически точные модели элементов установки инструмента (конусов, державок) в шпинделе станка;
- модели элементов установки заготовки детали на столе фрезерного станка;
- модель заготовки;
- модель конечной детали.

В среду обработки следует ввести сведения о материале, из которого будет изготавливаться конечная деталь. Система предоставляет выбор материала детали из списка возможных материалов.

Описание станка в базе данных содержит следующую информацию:  
название станка;

- описание архитектуры;
- технологические параметры станка;
- геометрические параметры;
- описание кинематической схемы.

Выбор станка можно выполнить одним из следующих способов:

- 1) вызвать из базы данных оригинальный, созданный ранее станок;
- 2) выбрать тип станка по образцу.

*Определение станка* заключается в назначении системы базирования шпинделя СБ1 и системы базирования положения технологической оснастки на его столе СБ2

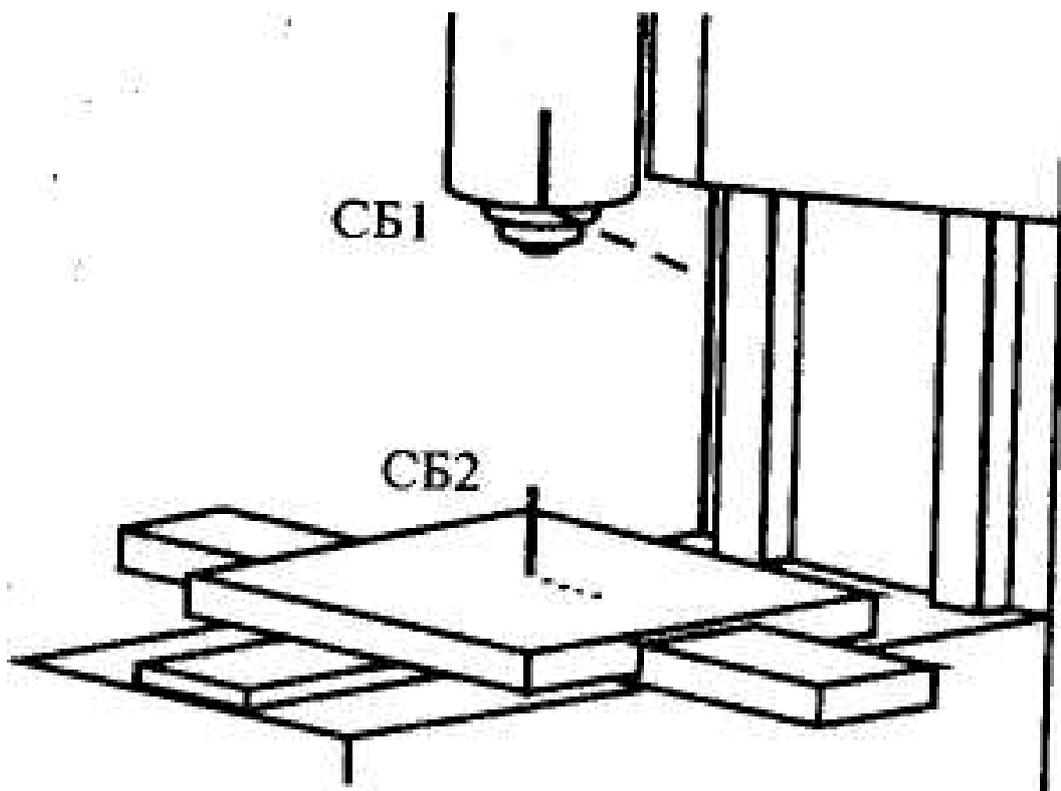


Рисунок 36 – Система базирования станка.

*Определение элементов инструментальной оснастки* состоит в указании систем базирования шпинделя и инструмента. Инструментальная оснастка может быть простой, т.е. состоять из одного элемента (например, из конуса), и комбинированной, состоящей из нескольких элементов (например, из переходника и конуса). В последнем случае каждому элементу оснастки определяется по две системы базирования.

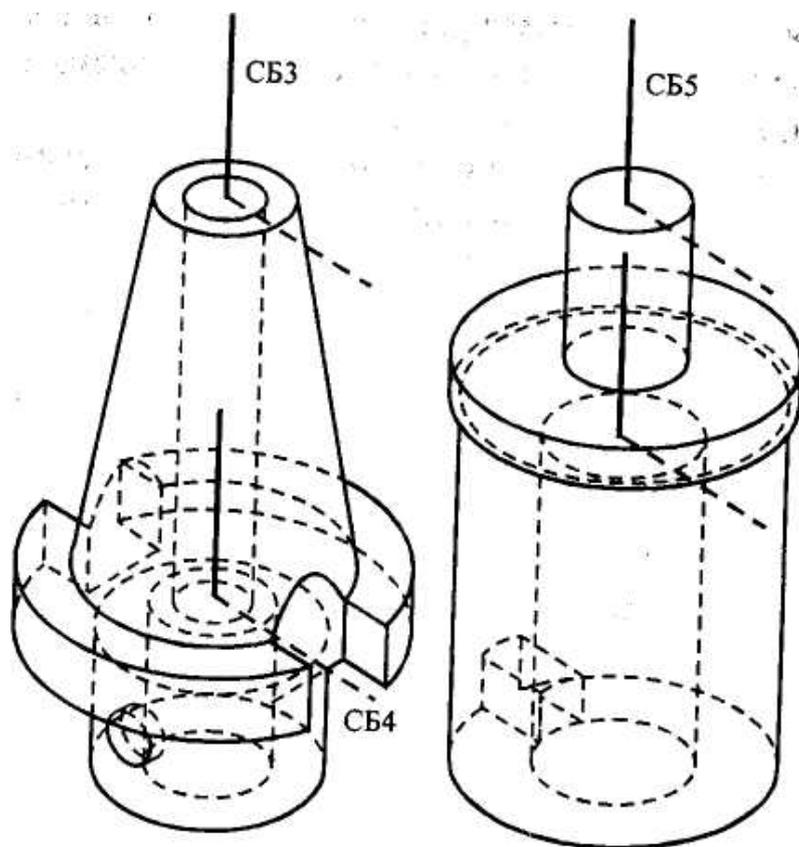


Рисунок 37 – Система базирования оснастки.

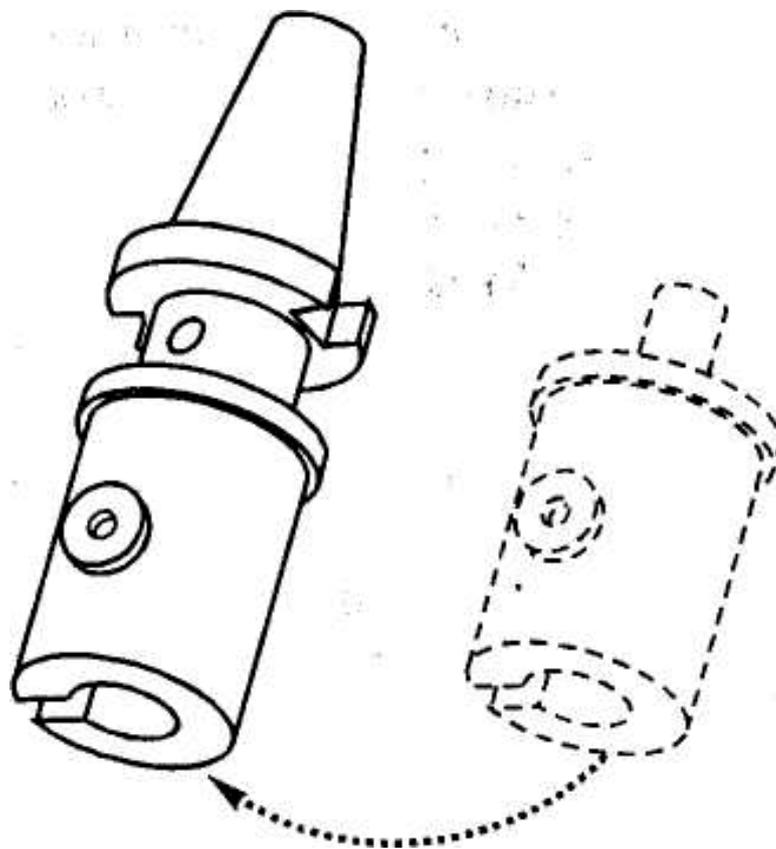


Рисунок 38 – Сборка элементов инструментальной оснастки.

*Определение инструмента* является продолжением описания кинематической схемы фрезерного станка и содержит следующую информацию:

- геометрическое описание, условное или реалистичное представление инструмента, являющееся моделью реального инструмента;
- система базирования державки (конуса), которая фиксирует инструмент в шпинделе;
- система базирования фрезы, которая определяет положение инструмента относительно обрабатываемой детали;
- параметры инструмента, соответствующие типу инструмента.

При определении инструмента необходимо выбрать систему базирования державки инструмента СБ7 и систему базировать фрезы СБ8

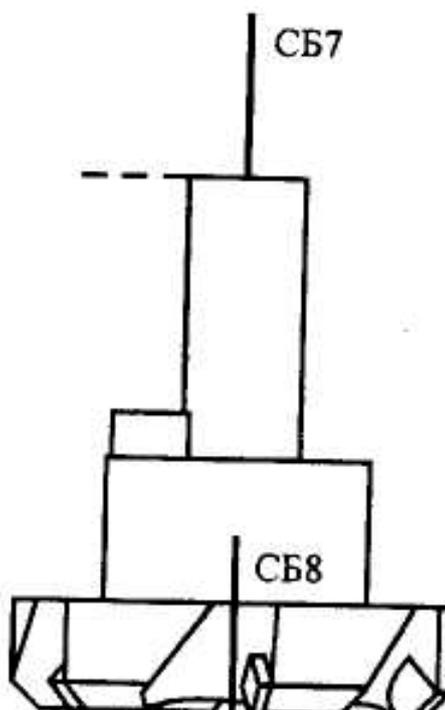


Рисунок 39 – Система базирования инструмента.

База данных инструментов содержит следующие типы инструмента: метчик, развертку, сверло, центровочное сверло, коническую фрезу, коническую зенковку, цилиндрическую зенковку, торцевую фрезу, концевую фрезу, концевую обдирочную фрезу, инструмент для гравировки, резцы, нестандартный и фасонный инструмент.

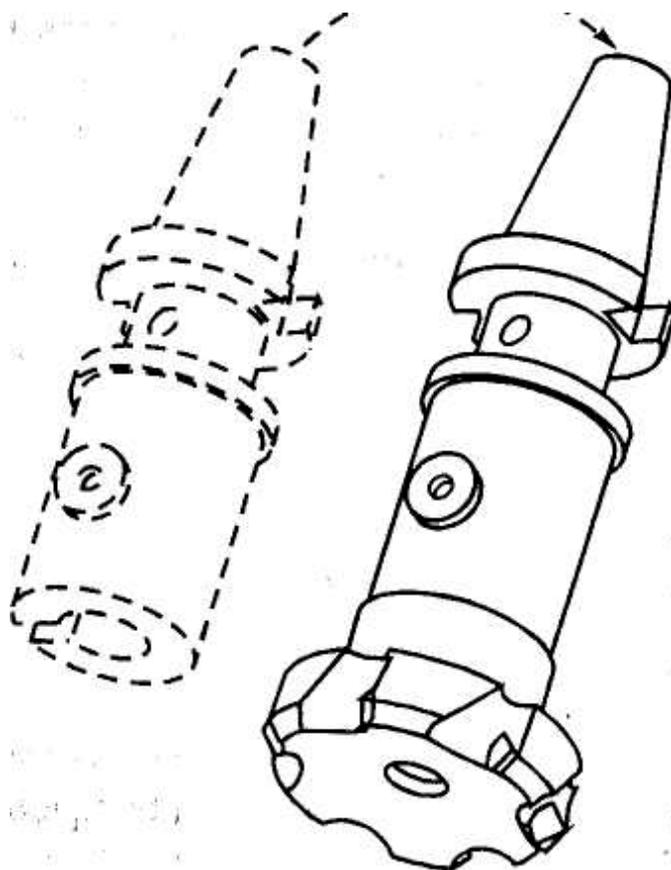


Рисунок 40 – Сборка инструмента с инструментальной оснасткой.

Для каждого типа инструмента определяются его параметры. Например, метчик будет описан следующими параметрами: диаметром метчика, шагом резьбы, длиной режущей части, его полной длиной и геометрической моделью метчика.

Концевая фреза описывается такими параметрами: диаметром фрезы, длиной режущих поверхностей по оси фрезы, глубиной резания, радиусом фрезы, максимальной глубиной обработки, полной длиной фрезы, количеством зубьев и геометрической моделью фрезы.

Для автоматического расчета режимов резания в процессе обработки учитываются свойства материала и параметры инструмента. В системе есть возможность создавать цепочки ассоциированных объектов «инструмент (тип и параметры) - материал - режим обработки». Можно выбрать другой материал и связать другой набор параметров с тем же типом инструмента. Инструмент с заданным режимом и заданным материалом как ассоциированный объект сохраняется в базе данных.

*Определение заготовки детали* содержит выбор системы базирования заготовки детали, которая позволяет однозначно зафиксировать заготовку относительно технологического приспособления. Система базирования заготовки (СБ13).

*Определение элементов технологической оснастки* заключается в назначении каждому элементу технологической оснастки его систем базирования. Элементы установки детали (крепежного приспособления) позволяют

зафиксировать заготовку на столе станка. С каждым элементом установки детали связаны две системы базирования: стола, которая определяет положение приспособления на столе, и заготовки детали, которая указывает положение заготовки относительно приспособления. Определение всех элементов технологической оснастки на станке дает возможность точно проконтролировать столкновения при имитации процесса фрезерования.

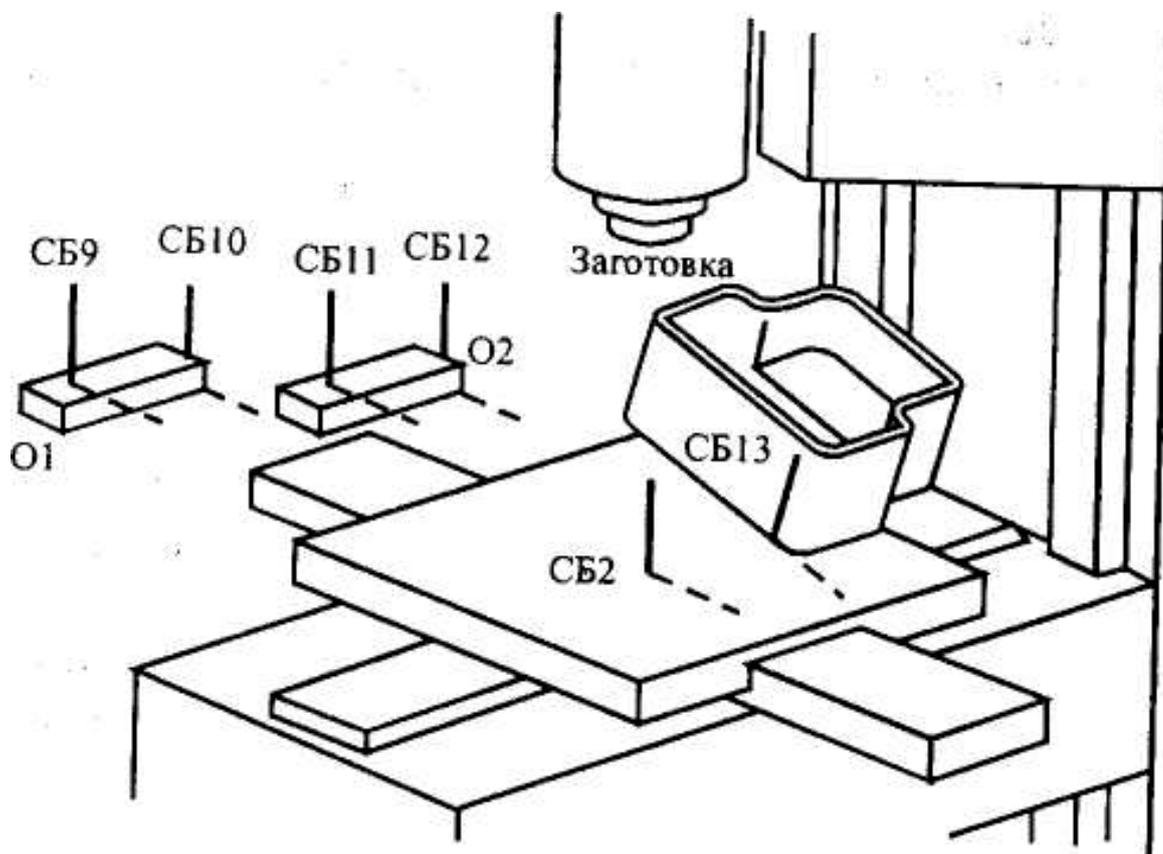


Рисунок 41 – Система базирования всех элементов станка, оснастки, инструмента, обрабатываемой детали.

### Циклы фрезерной обработки

Для определения цикла обработки в операции система автоматически предлагает перечень циклов, соответствующих типу установленного инструмента.

Существуют следующие циклы 2,5-, 3- и 5-координатной обработки:

Обработка отверстий; обработка каналов; обработка в одно и двух направлениях; обработка зигзагом по контуру; обработка призмы; обработка поверхностей вращения; обработка карманов, пазов и поверхности по спирали; сверление; сверление с периодическим отводом сверла или с выводом сверла и удалением стружки, зенкование и цекование глухих отверстий с отводом инструмента; нарезание резьбы метчиком; снятие фаски на отверстиях; обработка отверстий «от точки к точке»; битангенциальная обработка сопряжений;

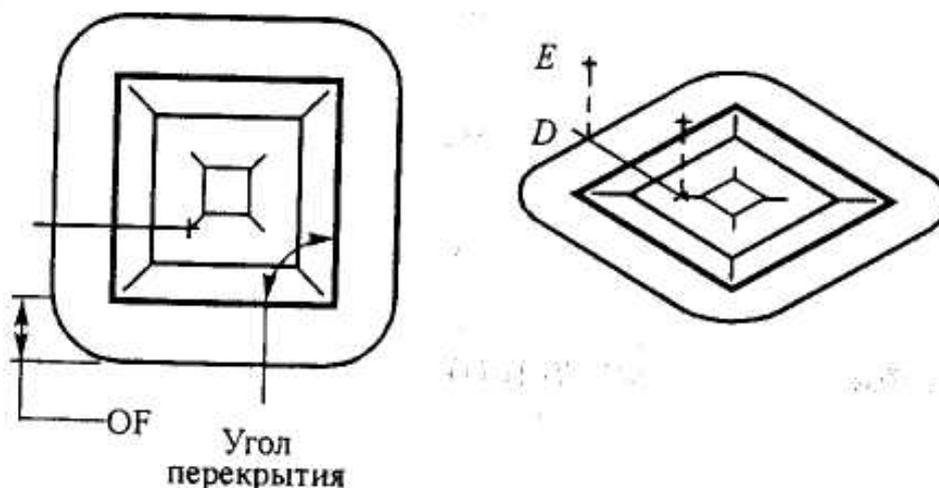
интерполяция между двумя линиями; обработка по параллельным плоскостям; обработка по сечениям горизонтальными или вертикальными плоскостями; черновая и чистовая обработка.

### Цикл 2,5-координатной обработки по спирали

Инструменты для выполнения этого цикла: фреза для обдирки поверхностей, торцевая фреза, цилиндрическая фреза.

Параметры цикла:

- удаляемый материал должен быть линией, перфорированным контуром, призмой или сборкой этих объектов;
- тип обработки: карман, паз или поверхность;
- глубина прохода инструмента в создаваемом цикле.



OF - величина выбега инструмента; DE - отвод инструмента; угол перекрытия равен  $90^\circ$

Рисунок 42 –Обработка поверхности по спирали.

- перекрытие проходов, задаваемое в процентах от диаметра инструмента;
- угол перекрытия – наибольший угол, для которого будут создаваться дополнительные перекрывающиеся участки траектории инструмента в углах;
- тип резания – тип обработки: «по ходу» или «навстречу»; предполагается, что шпиндель вращается по ходу часовой стрелки;
- обход углов – способ обработки вершин: «по радиусу» (а) или «углом» (б);
- припуски на обработку (только при обработке карманов) – толщина материала, которая остается в положительном и отрицательном направлениях по осям X и Z для циклов черновой и чистовой обработки;
- точность аппроксимации – используется теми станками, которые при вычислении траектории инструмента по кривой выполняют обработку «от точки к точке» и не выполняют интерполяцию по окружности.

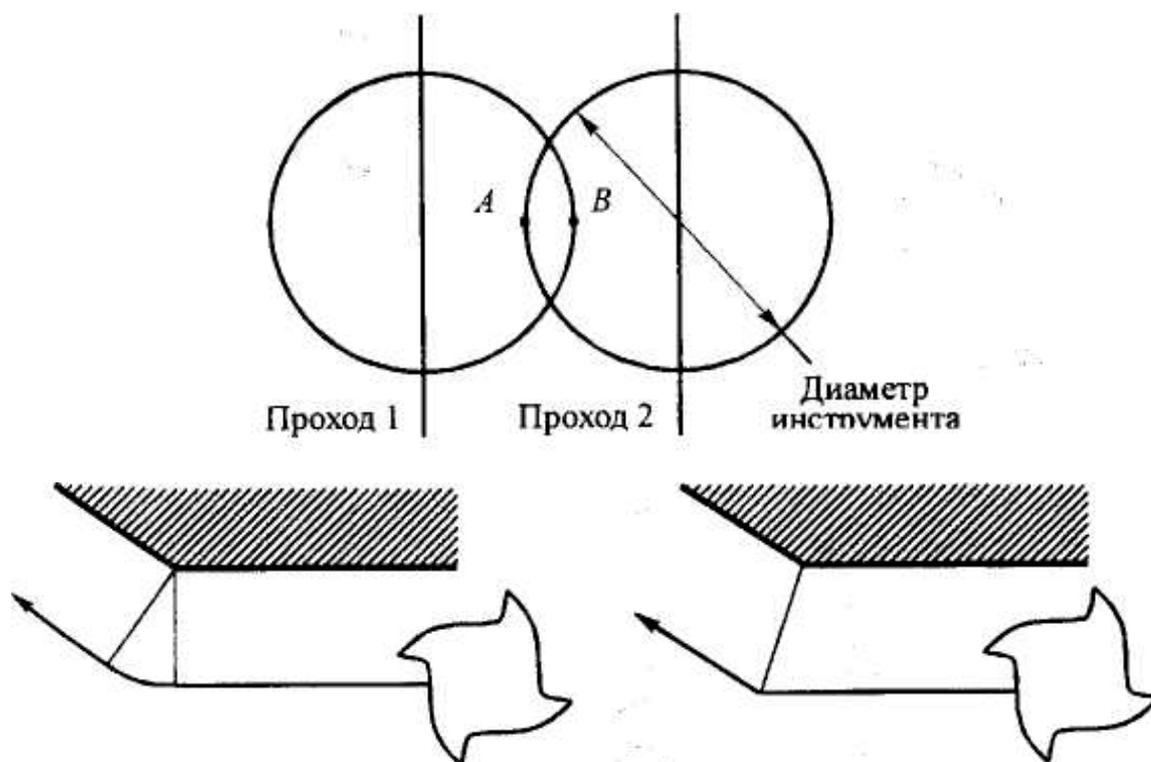


Рисунок 43 – Обход углов.



Рисунок 44 – Определение точности аппроксимации.

**Цикл сверления 2,5-координатной обработки.** Инструменты для выполнения этого цикла: торцевая фреза, сверло. Положение отверстий задается либо точками, либо удаляемым материалом.

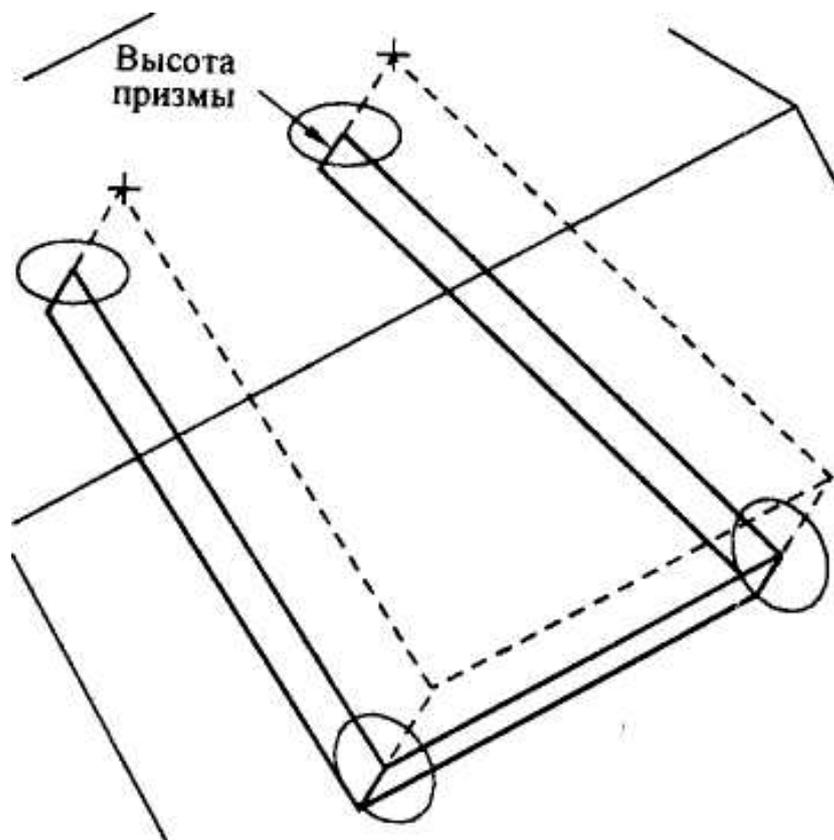


Рисунок 45 – Сверление по призме.

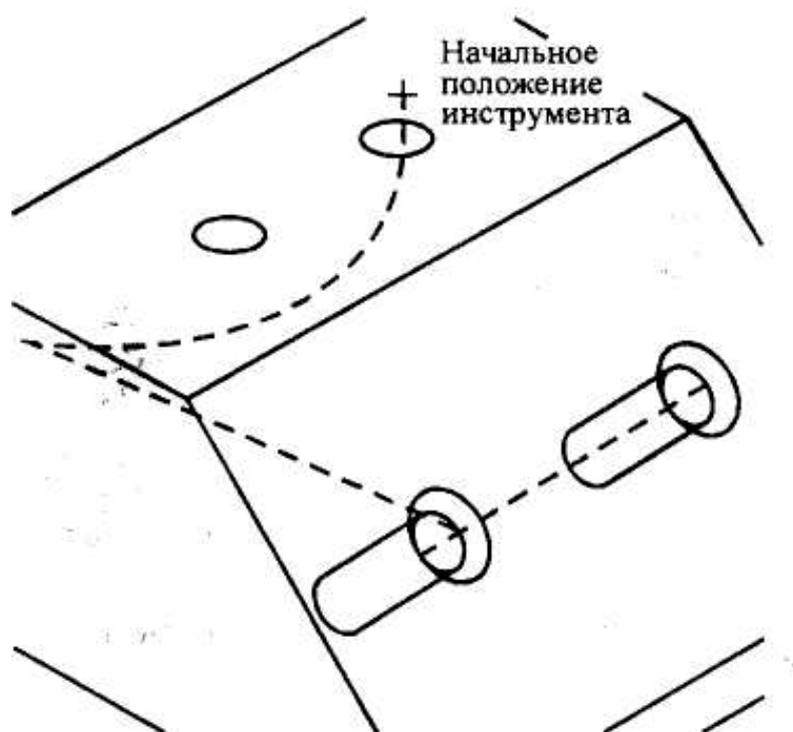


Рисунок 46 – Сверление по отверстиям.

**Цикл 2,5-координатной обработки поверхности по спирали вне/внутри контура.** Цикл предназначен для обработки поверхности заготовки из хрупкого материала по спирали вне/внутри контура.

Траектория инструмента формируется следующим образом:

- обработка начинается от заданной начальной точки;
- обработка заготовки вне контура выполняется для исключения образования внешних стенок при черновой обработке;
- острова обрабатываются по направлению изнутри к контуру;
- обработка эквидистант за границами детали выполняется снаружи к удаляемому материалу;
- обработка эквидистант в границах детали выполняется, по возможности, без отвода инструмента и образования островов.

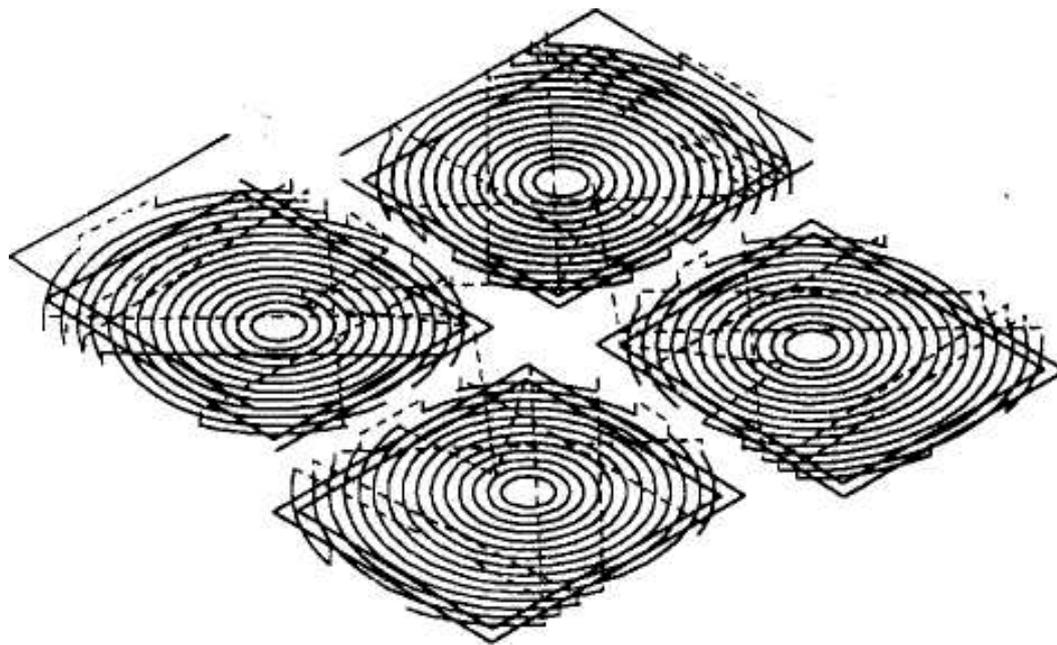


Рисунок 47 – Обработка по спирали островов.

**Цикл 3-координатной обработки по параллельным плоскостям.** Деталь может быть представлена поверхностью или телом.

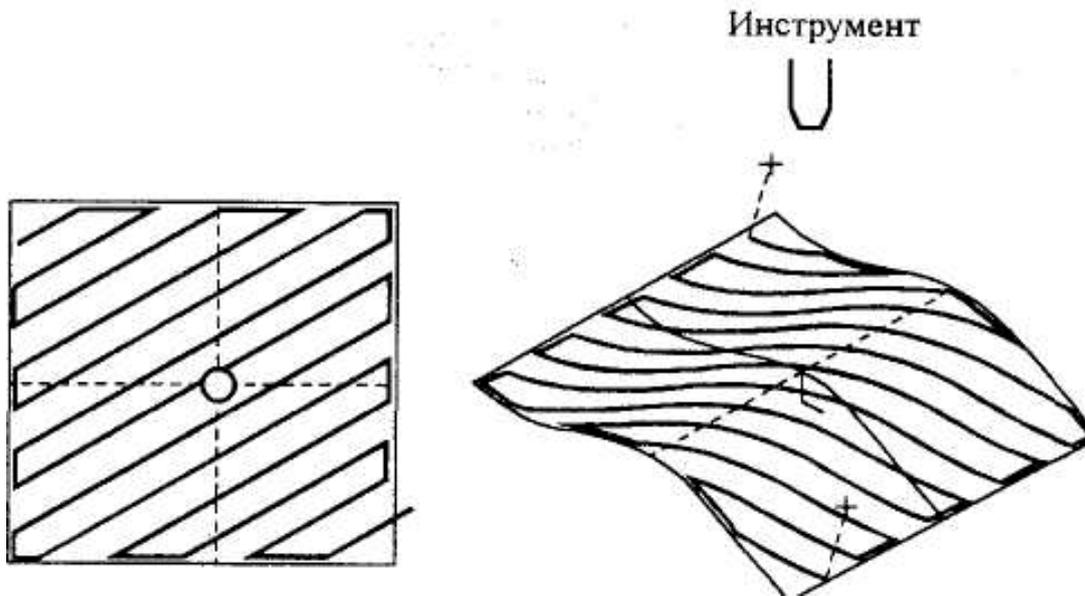


Рисунок 48 – Обработка поверхности Безье.

**Цикл 3-координатной битангенциальной обработки сопряжений.** Цикл предназначен для обработки детали по касательным к двум поверхностям (сопряжение поверхностей, необработанная область) Деталь может быть представлена поверхностью или телом.

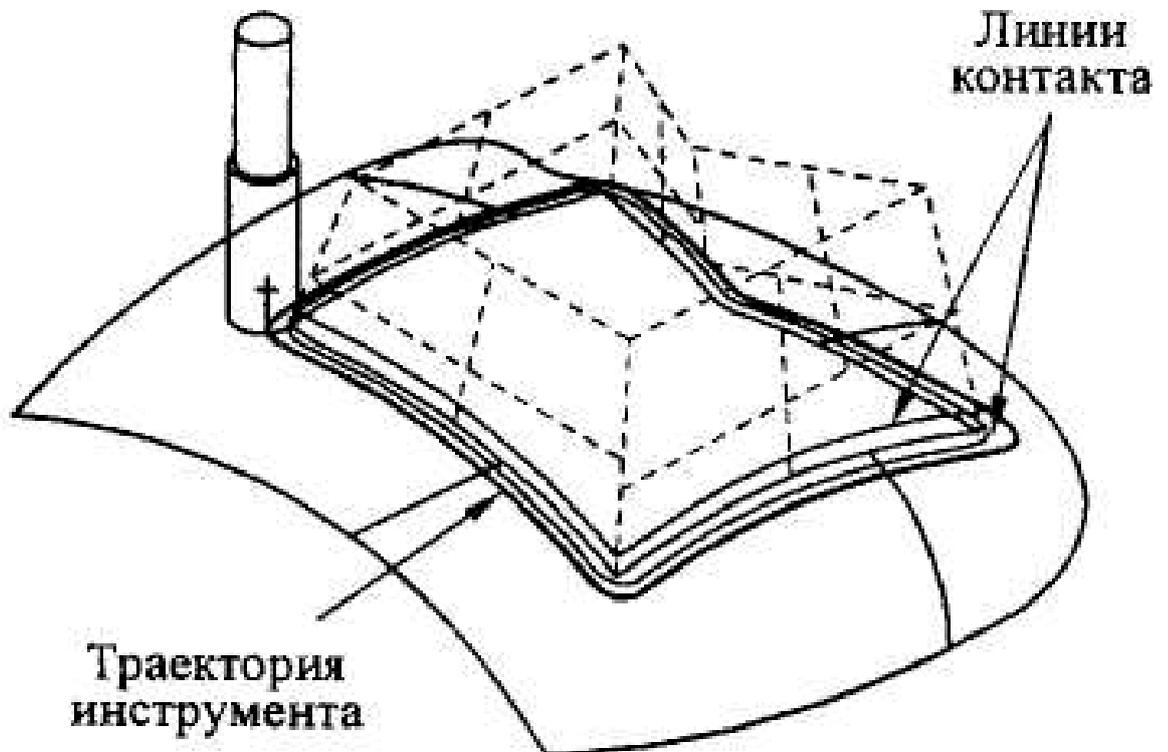


Рисунок 49 – Битангенциальная обработка.

**Цикл 3-координатной обработки путем интерполяции между двумя линиями.** Цикл предназначен для обработки поверхности детали интерполяцией между двумя линиями или сборкой линий. Эти линии представляют собой траекторию движения конца инструмента или контактной точки инструмента.

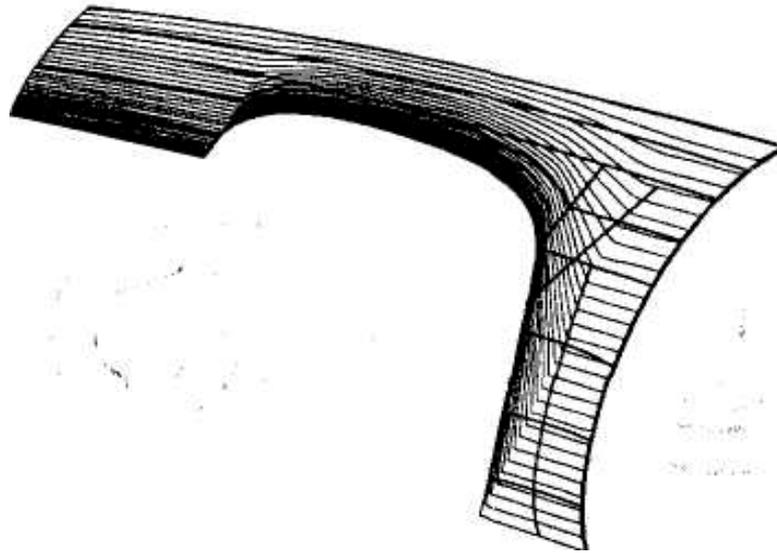


Рисунок 50 – Обработка поверхности интерполяцией.

**Цикл 3-координатной обработки по сечениям горизонтальными плоскостями.** Цикл предназначен для финишной обработки поверхности детали по ее сечениям горизонтальными плоскостями (точнее, плоскостями, перпендикулярными оси инструмента).

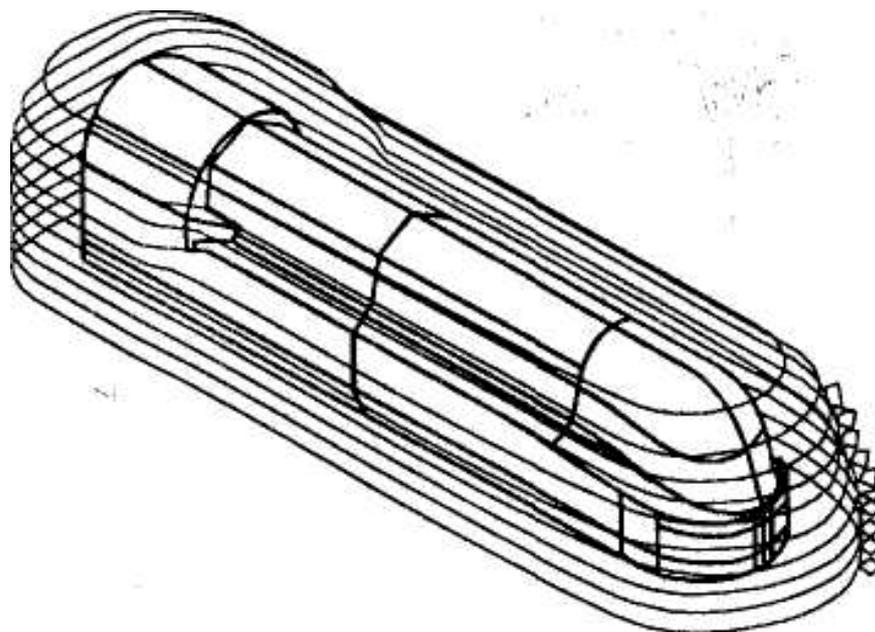


Рисунок 51 – Обработка по сечениям.

**Цикл 3-координатной обработки по контуру.** Цикл предназначен для обработки детали по плоскому или неплоскому контуру.

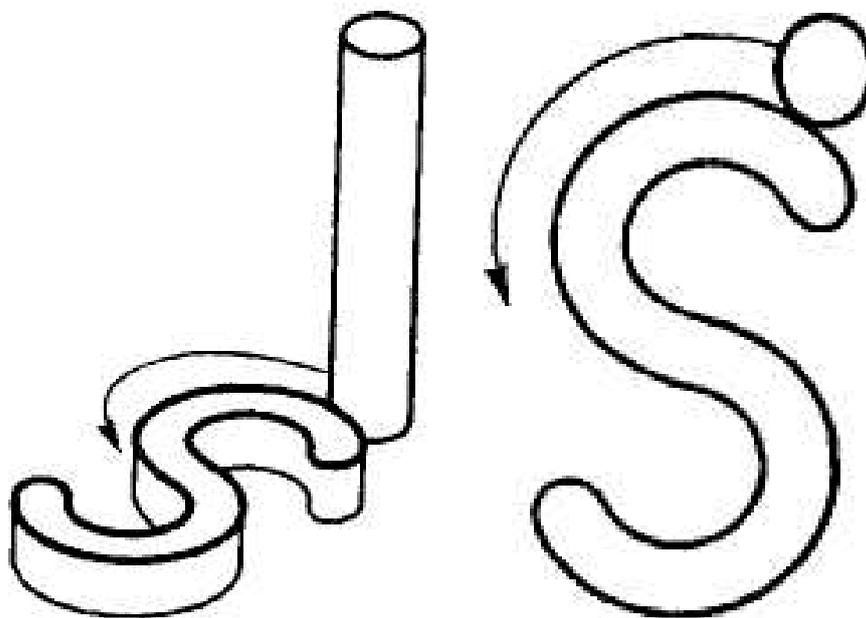


Рисунок 52 – Обработка по контуру.

**Цикл 3-координатной чистовой обработки.** Цикл предназначен для чистовой обработки детали движением инструмента в плоскости, перпендикулярной направляющей линии.

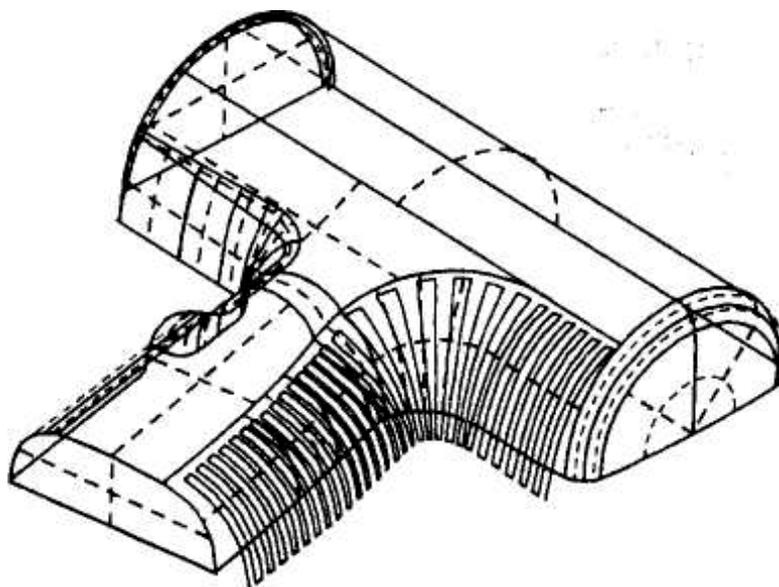


Рисунок 53 – Чистовая обработка.

**Цикл 5-координатной битангенциальной обработки сопряжений.** Цикл предназначен для обработки поверхности детали в области сопряжения двух частей поверхности: поверхности, направляющей инструмент, и поверхности, к которой инструмент располагается по касательной.

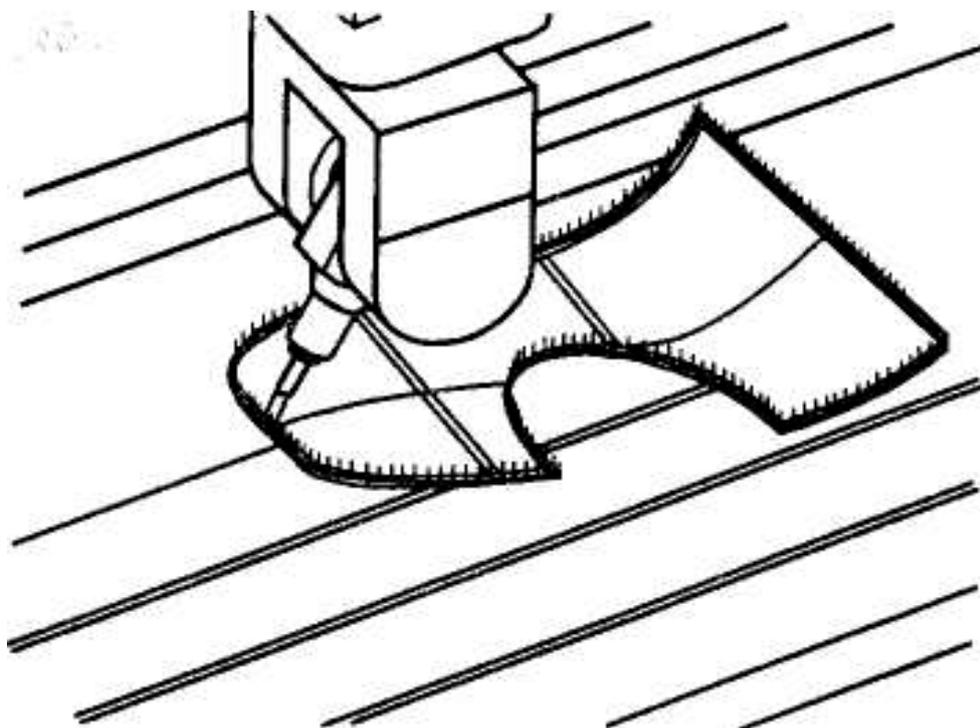


Рисунок 54 – Битангенциальная обработка сопряжений.

**Цикл 5-координатной чистовой обработки.** Цикл предназначен для чистовой обработки поверхности детали, в том числе с уклонами. Инструмент ориентируется по нормали к поверхности, с возможным отклонением в плоскости по направлению обработки и в перпендикулярной плоскости на заданные углы (фронтальное и поперечное отклонения).

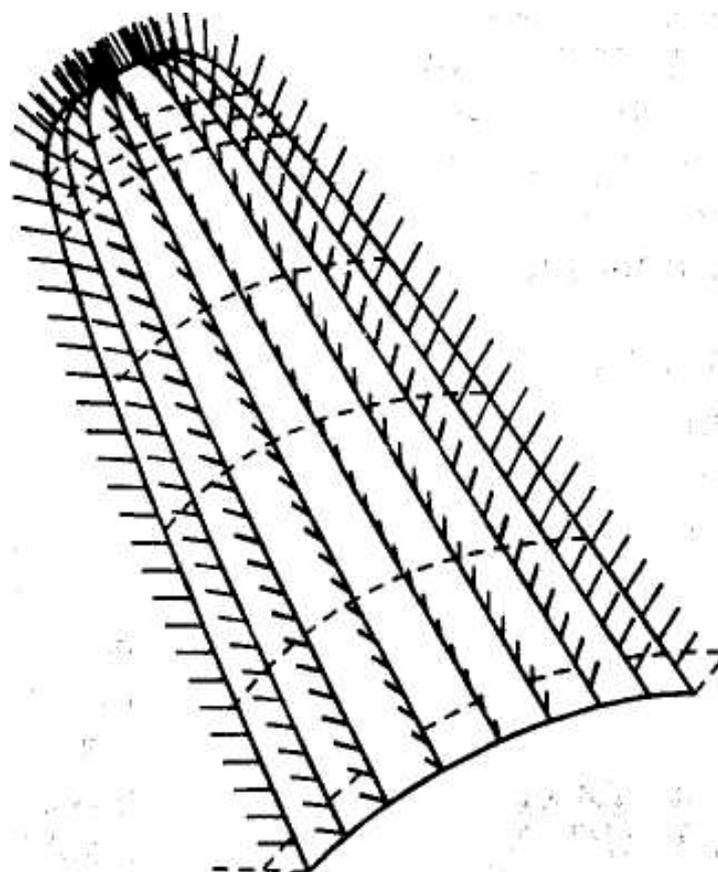


Рисунок 55 – Чистовая обработка поверхности.

## Лекция 12. Процессы токарной обработки

### Проектирование технологии токарной обработки

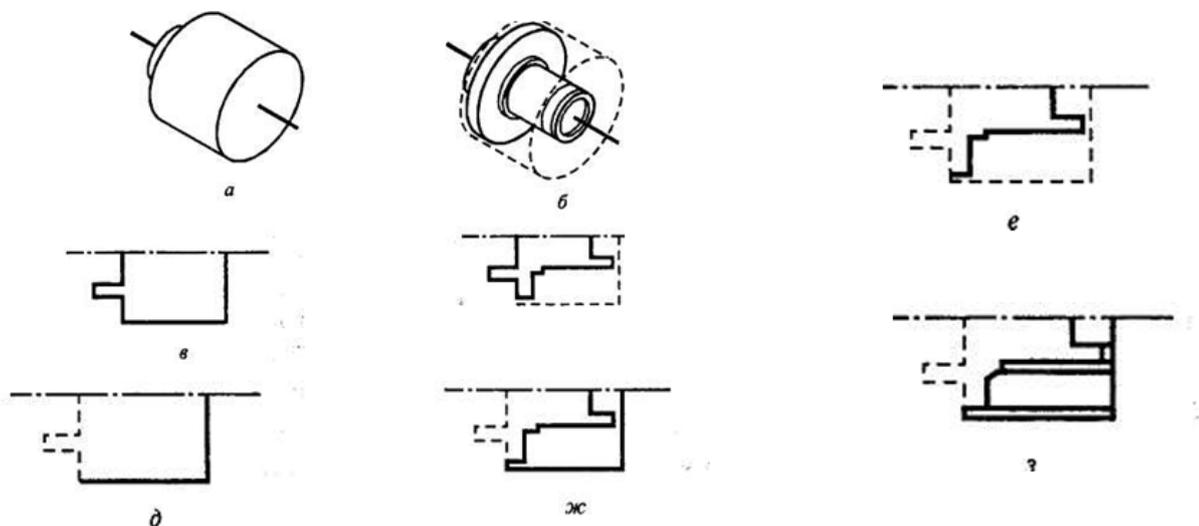
Рассмотрим основные понятия, используемые в проектировании технологического процесса токарной обработки.

Удаляемый материал. Это часть заготовки, удаляемая при обработке установленным инструментом в заданном цикле токарной обработки. Для таких циклов, как сверление и контурное точение, удаляемым материалом могут быть:

- незамкнутая линия, соответствующая траектории режущего инструмента;
- призма (например, для обработки выемок, используя точение по оси  $S$ );
- отверстие.

Для многопроходной обточки по контуру удаляемый материал определяется контуром, который состоит из обрабатываемого контура заготовки и обрабатываемого контура детали. Если существуют объемные модели заготовки и детали, то удаляемый материал выделяется из контуров их образующих.

### Моделирование процессов механической обработки



$a$  - заготовка;  $б$  - деталь;  $в$  и  $г$  - образующие соответственно заготовки и детали;  $д$  и  $е$  - обрабатываемые контуры соответственно заготовки и детали;  $ж$  - контур удаляемого материала;  $з$  - вариант разбиения удаляемого материала; ось  $Z$  станка

Рисунок 56 – Моделирование процесса механической обработки.

**Система базирования элементов оборудования.** Системы базирования отвечают за взаимное расположение всех элементов оборудования: токарного станка, инструмента, инструментальной оснастки, технологической оснастки (приспособления) и детали в процессе обработки.

Среда токарной обработки включает:

- описание имеющихся на предприятии токарных станков с ЧПУ;
- геометрические модели используемых инструментов;
- геометрические модели элементов инструментальной оснастки (резцедержатели, переходные патроны);
- модели элементов технологической оснастки токарного станка;
- модель заготовки;
- модель конечной детали.

Описание станка в базе данных содержит следующую информацию:

- название токарного станка; ,
- описание архитектуры;
- технологические параметры;
- геометрические параметры;
- описание кинематической схемы.

**Архитектура токарного станка.** Описание архитектуры станка определяет направления перемещения детали и инструмента станка (X, Z, C), а также положения упоров

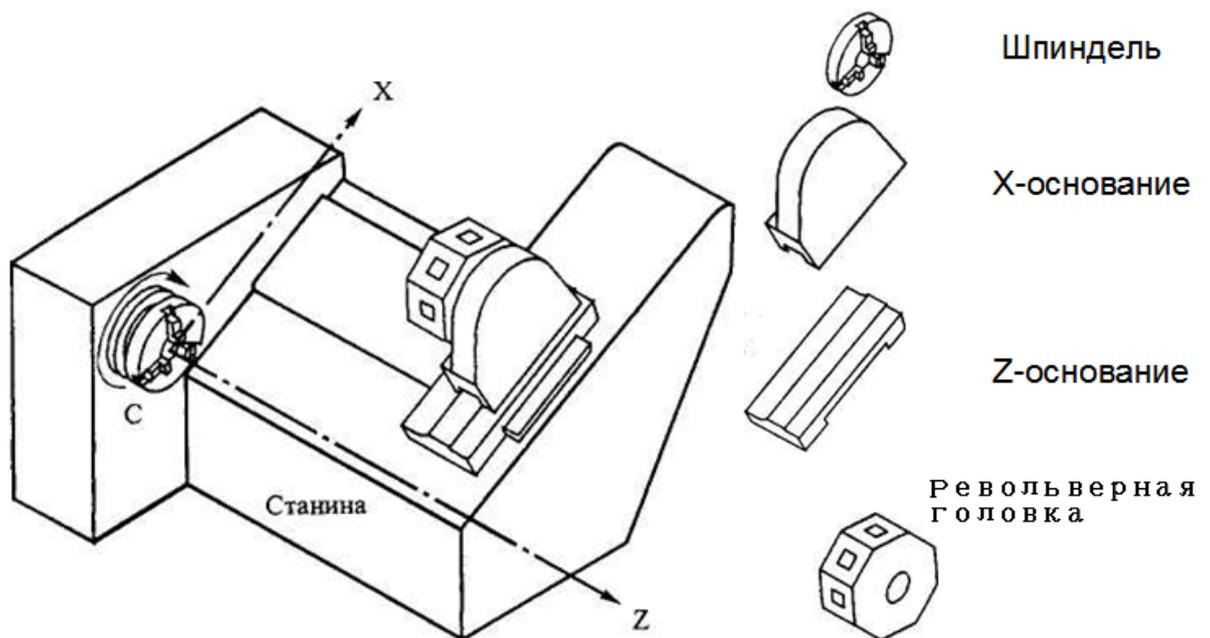


Рисунок 57 – Основные элементы токарного станка с ЧПУ.

**Технологические параметры токарного станка.** Существуют следующие технологические характеристики токарных станков:

- время на смену инструмента (с);
- максимальное число оборотов шпинделя в минуту (об/мин);
- максимальная подача (перемещение заготовки) в текущих единицах (мм или дюймы) в минуту (мм/мин);
- максимальная скорость перемещения вдоль осей X, Z в текущих единицах (мм или дюймы) в минуту (мм/мин);
- максимальное число оборотов в минуту вокруг оси C (об/мин);
- возможность подачи охлаждающей жидкости.

**Геометрические параметры станка.** Геометрические параметры используются для условного или геометрического представления токарного станка.

Для этого необходимо определить неподвижную часть (станину) и подвижные части станка:

- шпиндель;
- часть станка (стол), перемещающуюся вдоль оси Z (оси вращения шпинделя);
- часть станка (стол), перемещающуюся вдоль оси X.

**Кинематическая схема токарного станка.** Кинематика токарного станка определяет положение плоскости обработки, упоров, револьверной головки и возможность С-координатной обработки. Для создания кинематической схемы станка необходимо иметь ранее построенные и сохраненные в базе данных все элементы оборудования. Кинематическая схема является результатом нескольких операций определения:

- токарного станка;
- элементов инструментальной оснастки;
- инструмента;
- элементов технологической оснастки.

При *определении токарного станка* задаются положение и ориентация двух элементов: револьверной головки и шпинделя станка.

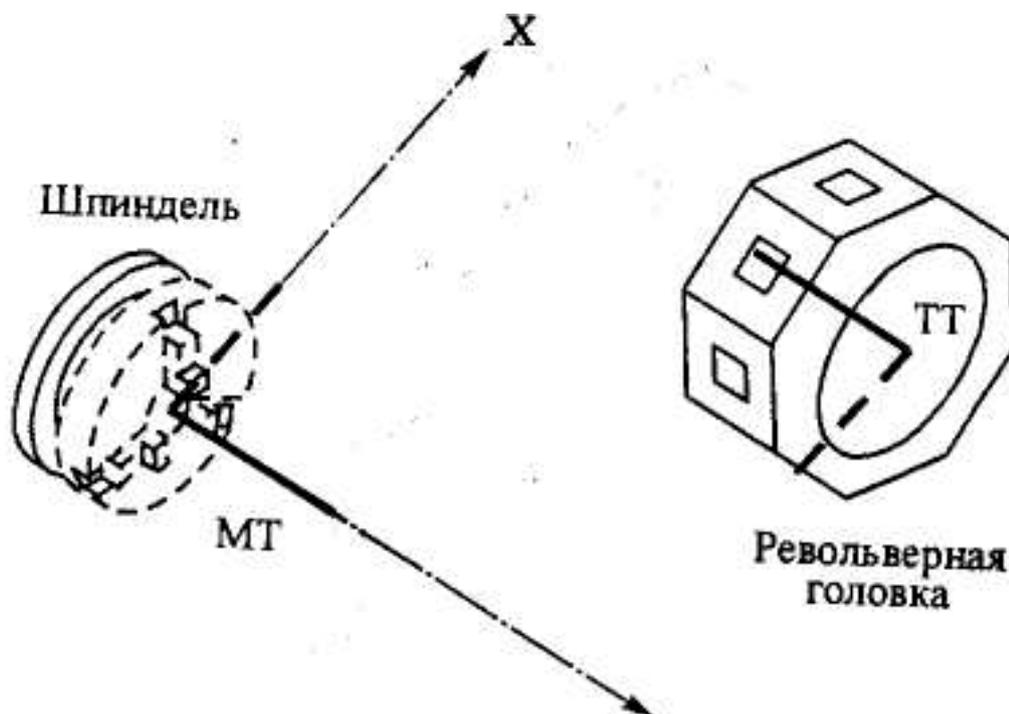


Рисунок 58 – Взаимное расположение шпинделя станка и инструментальной головки станка с ЧПУ.

**Система базирования станка включает:**

- 1) систему базирования шпинделя (MT), определяющую:
  - начало координат станка,
  - ось вращения шпинделя - направление оси Z станка,

– направление оси X станка,

– плоскость XOZ станка - плоскость обработки;

2) систему базирования револьверной головки (ТТ), определяющую ее положение и направление оси ее вращения Z

3) системы базирования инструмента (ТТ1—ТТ8)

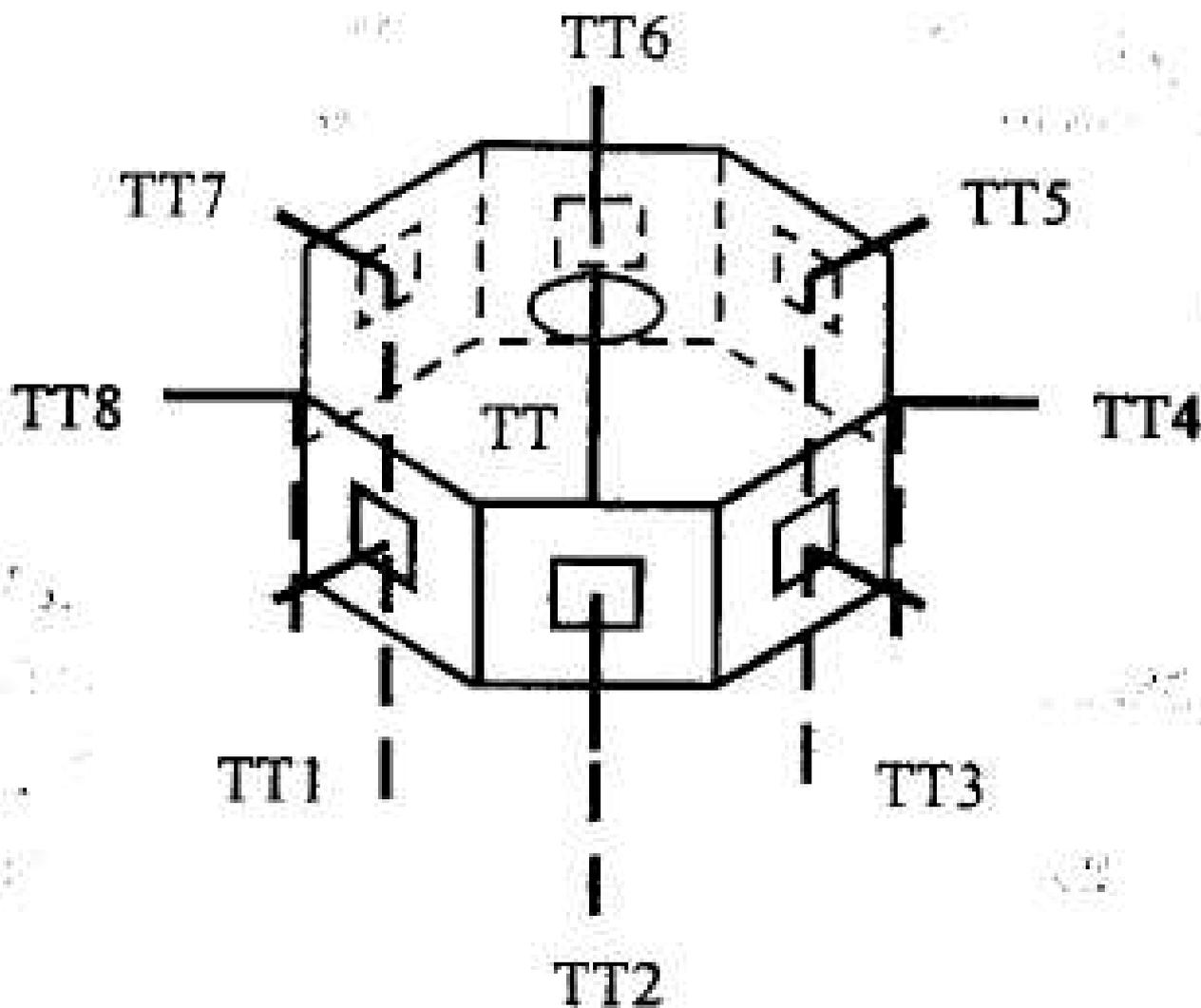


Рисунок 59 – Системы базирования револьверной головки и инструмента.

Чтобы обеспечить безопасную работу токарного станка, вводятся предельно допустимые положения одной или нескольких револьверных головок. Эти значения задаются в виде координат ближнего и дальнего упоров на оси шпинделя.

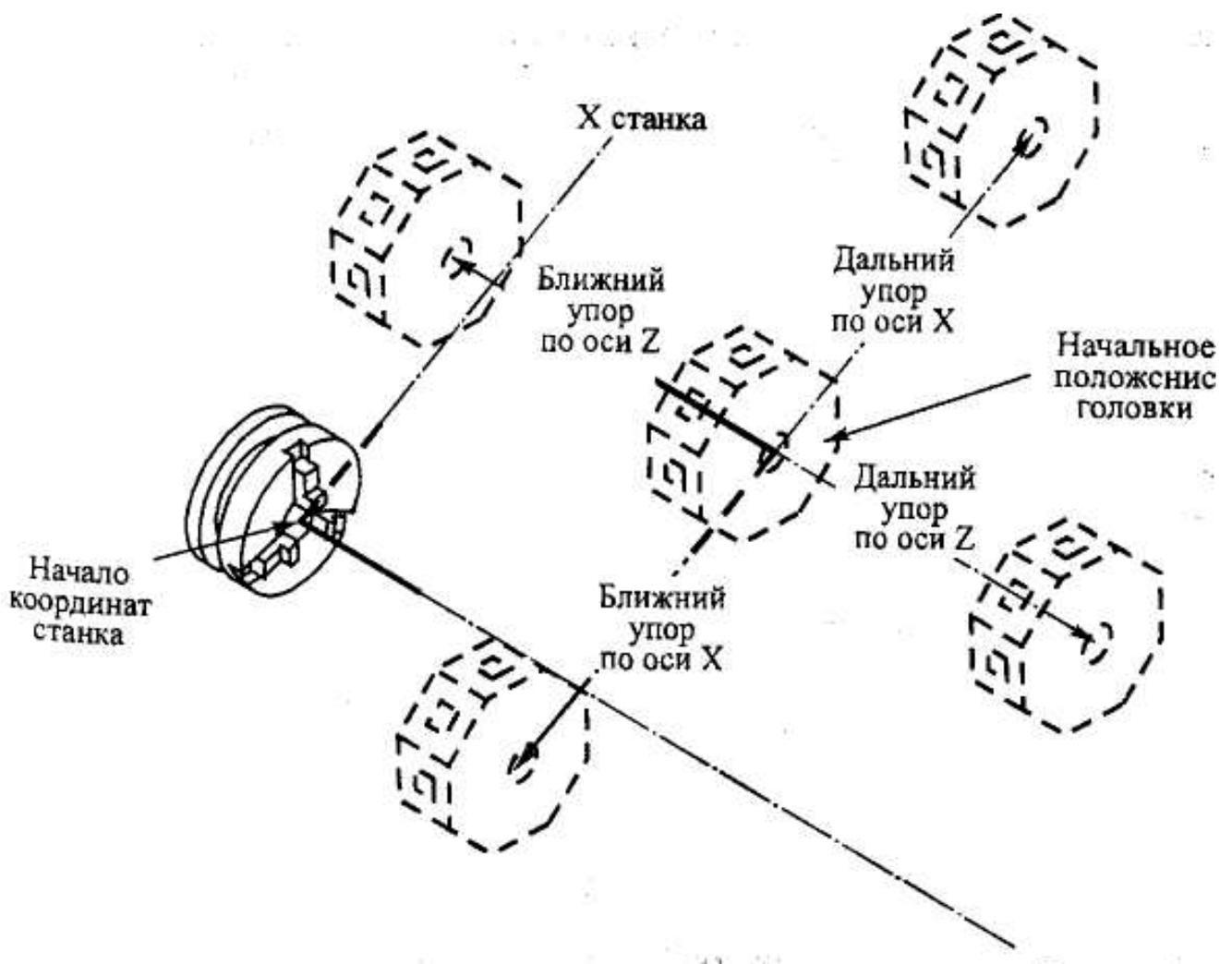


Рисунок 60 – Схема определения положения упоров.

*Определение инструментальной оснастки* состоит в указании системы базирования револьверной головки и инструмента на геометрических моделях элементов оснастки.

*Определение инструмента* является продолжением описания кинематической схемы токарного станка и содержит следующую

формуацию:

- геометрическое описание, условное или реалистичное представление инструмента, являющееся моделью реального токарного резца;
- систему базирования державки, с помощью которой резец фиксируется в инструментальной оснастке;
- систему базирования резца, которая определяет положение режущей кромки резца относительно обрабатываемой заготовки;
- параметры соответствующего типа резца.

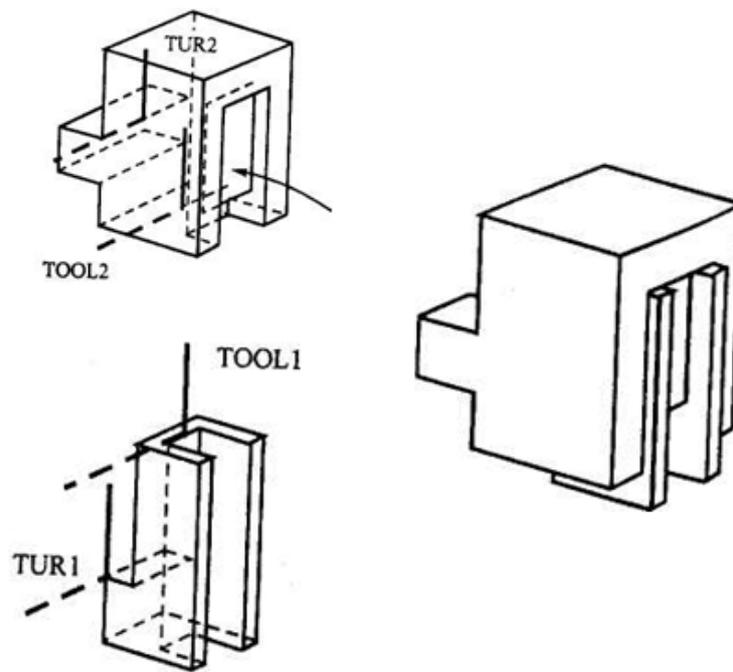
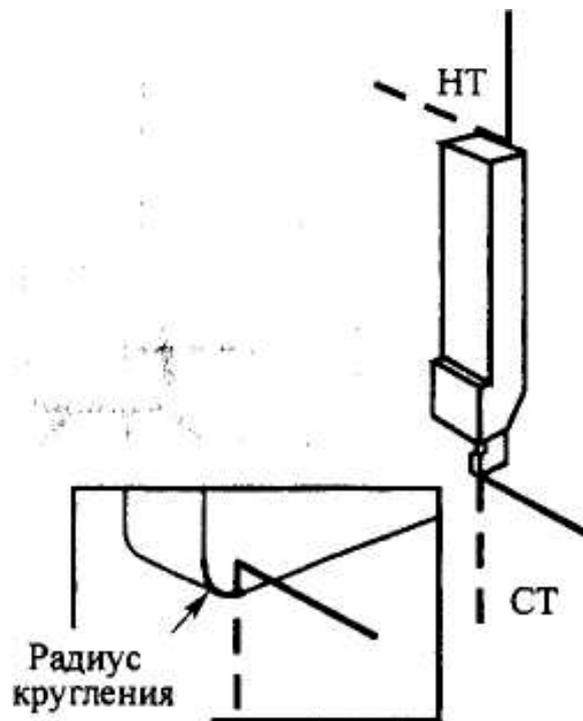


Рисунок 61 – Определение комбинированной инструментальной оснастки и ее сборки.



СТ - система базирования резца; НТ - система базирования державки инструмента

## Рисунок 62 – Системы базирования токарного резца.

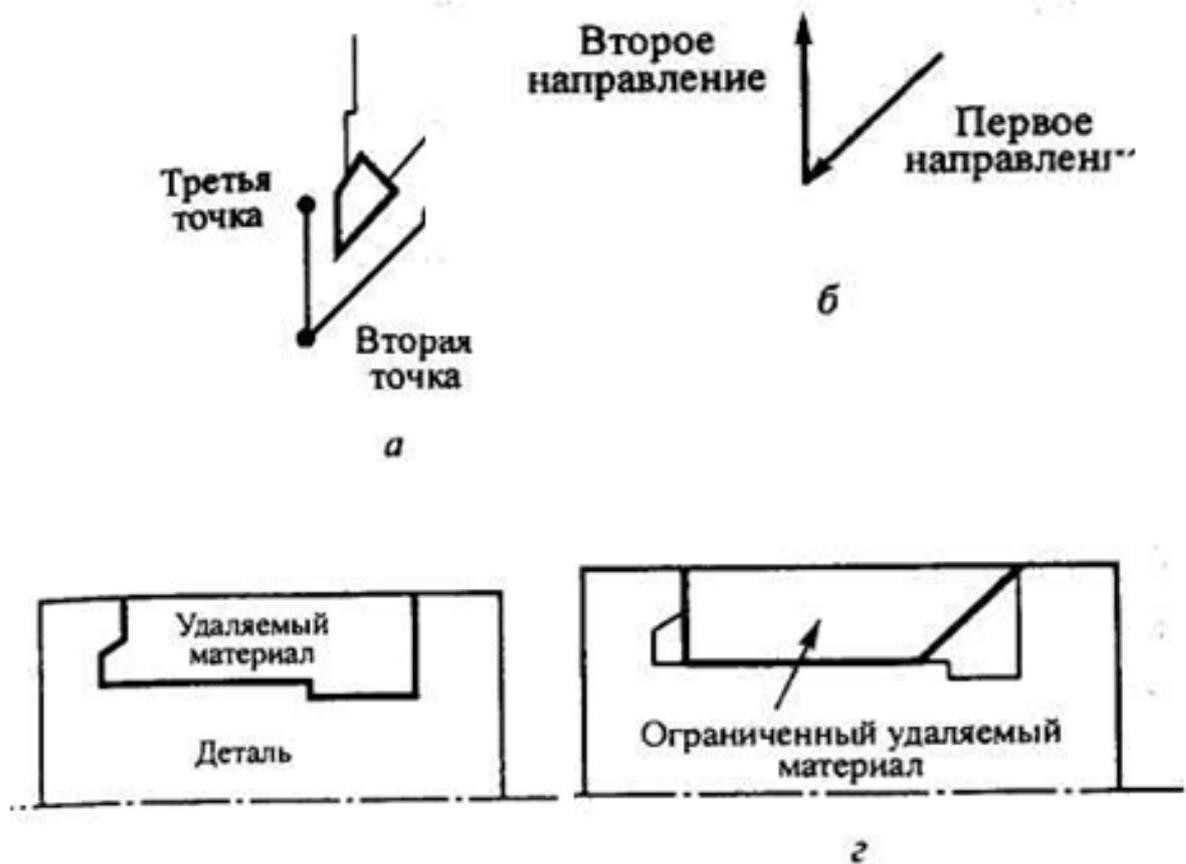
Для каждого типа инструмента определяются его параметры:

- форма режущей кромки, определяемая незамкнутой линией (ломаной и/или дугой);



Рисунок 63 – Параметры рабочей части резца.

- глубина резания в одном или двух направлениях, определяемая отрезком или ломаной из двух отрезков (границы обработки);
- направление обработки, определяемое двумя точками, или первое направление в случае нескольких направлений обработки;



*а* - указание трех точек; *б* - полученные два направления обработки;  
*в* - исходный удаляемый материал; *г* - получаемый после обработки удаляемый материал

Рисунок 64 – Определение границ обработки тремя точками.

- второе (возможное) и третье (возможное) направления обработки, определяемое двумя точками;
- максимальная глубина обработки.

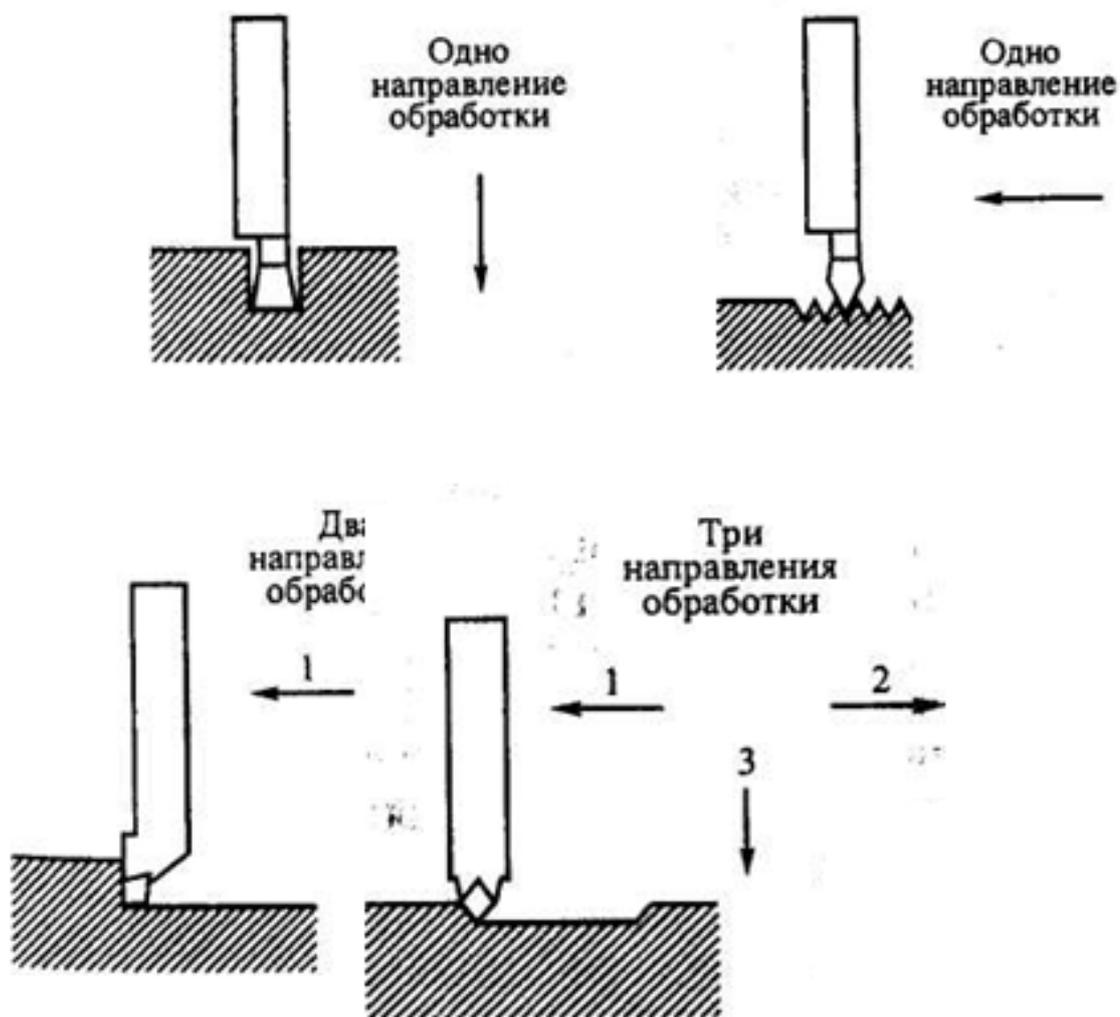


Рисунок 65 – Определение направлений обработки: гравировальным, резьбовым, проходным резцами и резцом для контурного точения.

*Определение элементов технологической оснастки* заключается в назначении каждому элементу технологической оснастки его систем базирования. С каждым элементом установки заготовки связаны две системы базирования: шпинделя, которая определяет положение приспособления, и заготовки детали, которая указывает положение заготовки относительно приспособления.

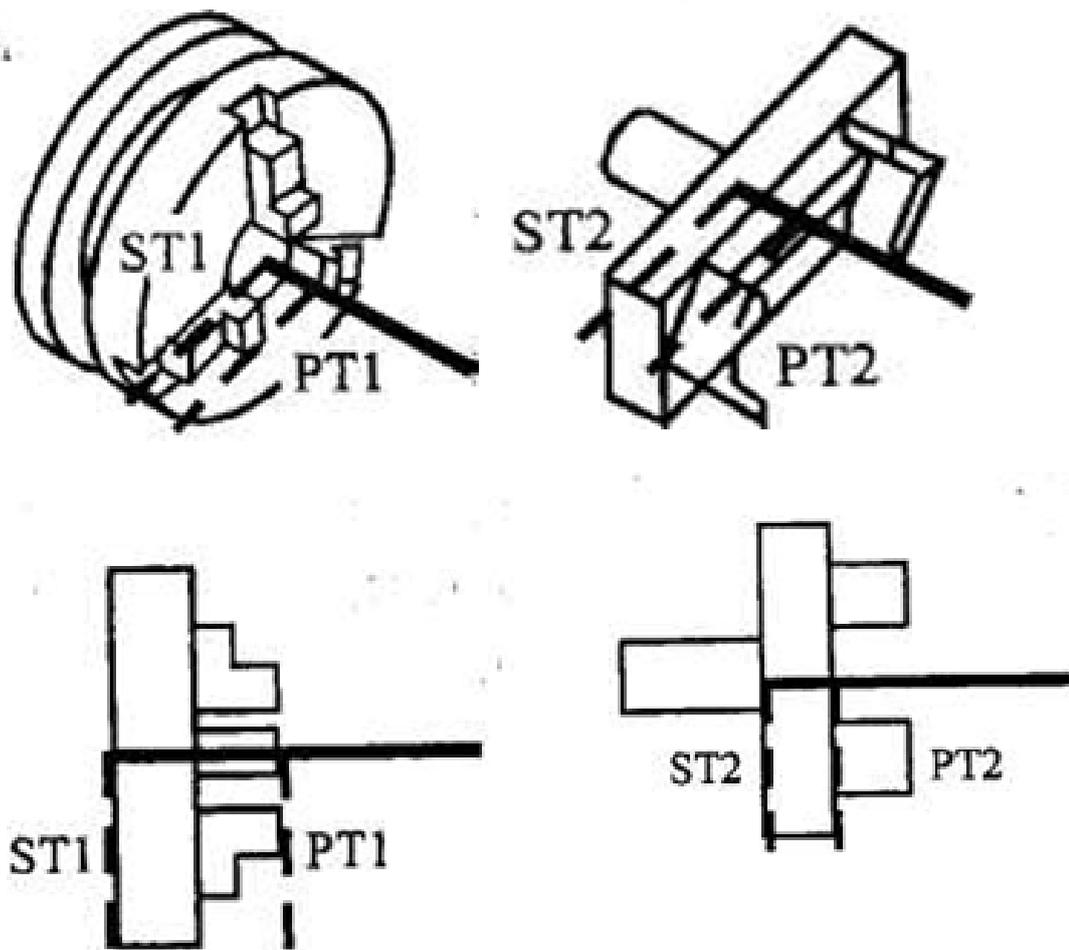


Рисунок 66 – Системы базирования элементов технологической оснастки.

Определение всех составляющих кинематической схемы позволяет собрать воедино все составляющие оборудования:

- монтировать инструмент с элементами инструментальной оснастки;
- автоматически закреплять элементы оснастки инструмента в револьверной головке или на суппорте в начале последовательности операций;
- автоматически устанавливать смонтированный инструмент в головку или на суппорт в начале операции;
- автоматически устанавливать станок в исходную позицию (первую точку) обработки детали в начале цикла.

Кинематическая схема оборудования (все ее системы базирования) образует кинематическую цепочку процесса обработки.

## Циклы токарной обработки

Циклы токарной обработки резцом: продольно-поперечная обточка, обточка с проходами в заданном направлении, по ограниченному контуру, многопроходная обточка по контуру, продольно-поперечная обточка с проходом по контуру, обточка с проходами в заданном направлении и с проходом по контуру.

Циклы С-координатной обработки: обработка каналов, обработка в одном или двух направлениях, обработка зигзагом, по спирали, по контуру, сверление, сверление с периодическим отводом сверла, сверление с выводом сверла и удалением стружки, оконтуривание, обработка по проекции контура, обработка призмы, обработка поверхностей вращения, обработка карманов и пазов по спирали, обработка поверхности по спирали, обработка поверхности по спирали вне/внутри контура, обработка поверхности зигзагом, черновая 2,5-координатная обработка, черновая 2,5-координатная обработка по спирали, обработка центровых отверстий, зенкование, цекование, зенкование и цекование с отводом инструмента зенкование и цекование глухих отверстий с отводом инструмента' разворачивание отверстий, нарезание резьбы метчиком, снятие фаски на отверстиях, обработка отверстий «от точки к точке».

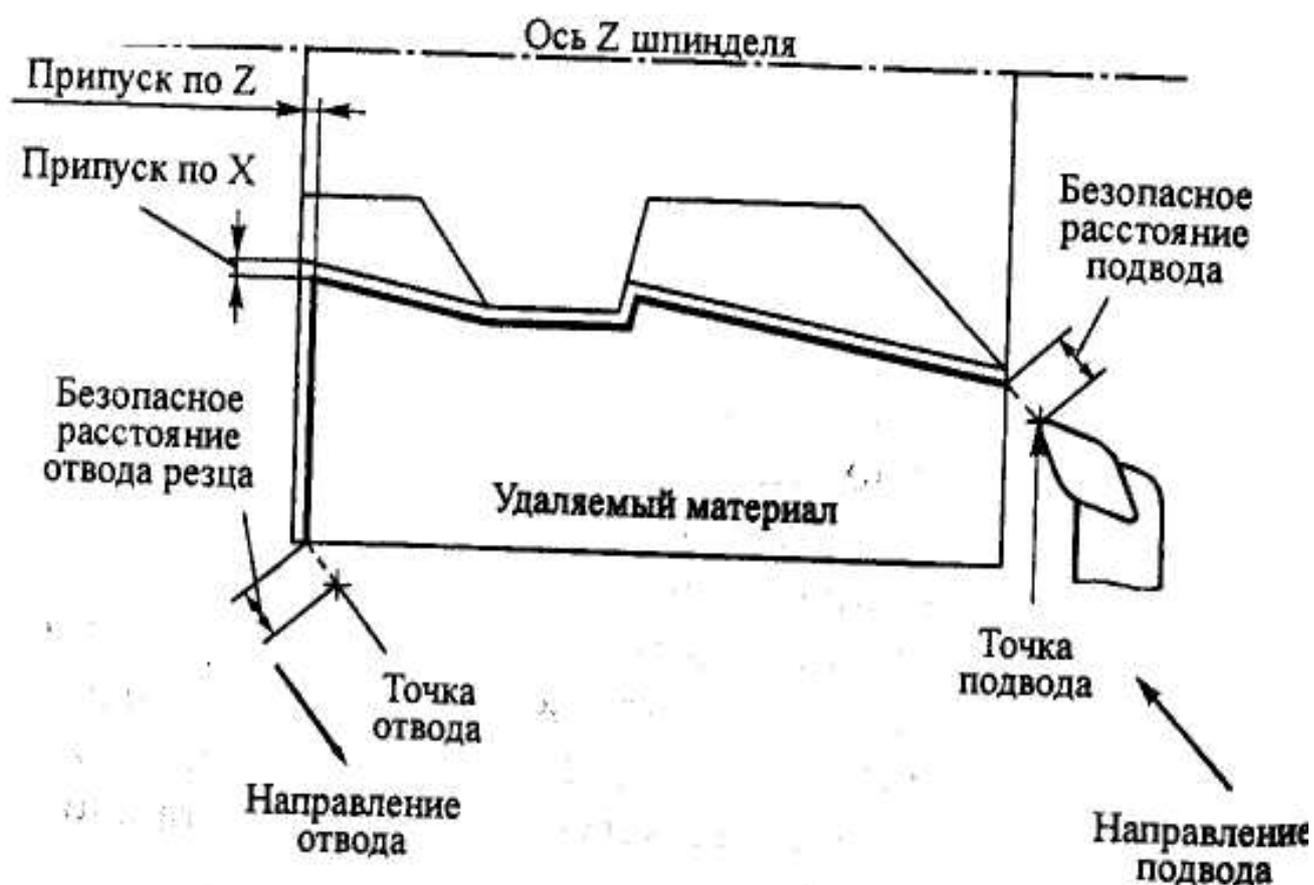


Рисунок 67 – Цикл токарной обточки заготовки резцом по контуру.

Параметры цикла:

- удаляемый материал. Контур удаляемого материала должен лежать в плоскости обработки;
- область выборки удаляемого материала: вне его контура;
- обработать слева или справа от контура удаляемого материала, если смотреть в направлении оси  $Y$  станка;
- направление подвода инструмента задается двумя точками;
- направление отвода инструмента задается двумя точками;
- безопасное расстояние медленного подвода инструмента;
- безопасное расстояние отвода инструмента;
- тип коррекции траектории движения инструмента:
  - 1) траектория центра с коррекцией;
  - 2) траектория центра без коррекции;
  - 3) траектория контура инструмента с коррекцией;
  - 4) траектория контура инструмента без коррекции;
- переключатель типа обработки изломов контура (вершин острых углов): по окружности (а), без скругления (б);

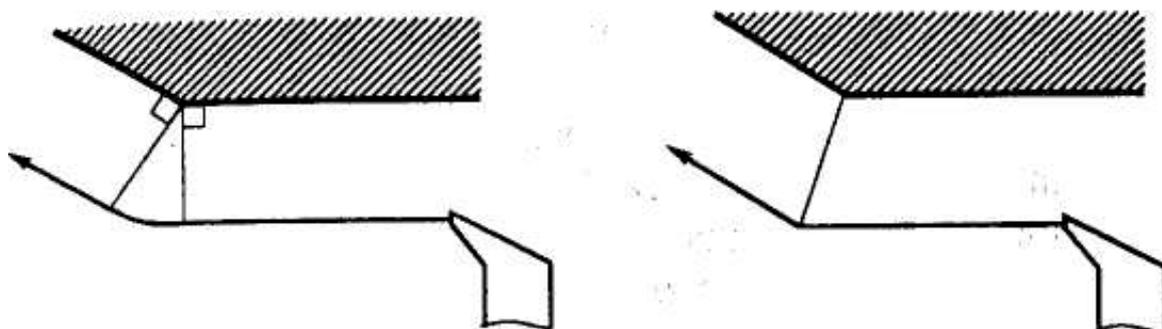


Рисунок 68 – Обход угловых контуров.

- расчет частей удаляемого материала в соответствии с границами глубины резания, определенными при создании модели резца, или без учета глубины резания;
- припуск на обработку по оси  $X$ ;
- припуск на обработку по оси  $Z$ ;

—

ТОЧНОСТЬ

аппроксимации.

## Часть 2

### Математическое моделирование на основе экспериментальных данных

#### Лекция 1. Планирование эксперимента

##### Планирование эксперимента

Затраты машинного времени можно значительно сократить, если на этапе оптимизации параметров использовать экспериментальную факторную математическую модель. *Экспериментальные факторные модели*, в отличие от теоретических, не используют физических законов, описывающих происходящие в объектах процессы, а представляют собой некоторые формальные зависимости выходных параметров от внутренних и внешних параметров объектов проектирования.

Экспериментальная факторная модель может быть построена на основе проведения экспериментов непосредственно на самом техническом объекте (*физические эксперименты*), либо *вычислительных экспериментов* на ЭВМ с теоретической моделью.



Рисунок 69 – Факторная модель.

При построении экспериментальной факторной модели объект моделирования (проектируемая техническая система) представляется в виде "черного ящика", на вход которого подаются некоторые переменные  $X$  и  $Z$ , а на выходе можно наблюдать и регистрировать переменные  $Y$ .

В процессе проведения эксперимента изменение переменных  $X$  и  $Z$  приводит к изменениям выходных переменных  $Y$ . Для построения факторной модели необходимо регистрировать эти изменения и осуществить необходимую их статистическую обработку для определения параметров модели.

При проведении физического эксперимента переменными  $X$  можно управлять, изменяя их величину по заданному закону. Переменные  $Z$  — неуправляемые, принимающие случайные значения. При этом значения переменных  $X$  и  $Z$  можно контролировать и регистрировать с помощью соответствующих измерительных приборов. Кроме того, на объект воздействуют некоторые переменные  $E$ , которые нельзя наблюдать и контролировать. Переменные  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют контролируемыми и управляемыми; переменные  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  — контролируемые, но неуправляемые, а переменные  $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)$  — неконтролируемые и неуправляемые.

Переменные  $X$  и  $Z$  называют факторами. Факторы  $X$  являются управляемыми и изменяются как детерминированные переменные, а факторы  $Z$  неуправляемые, изменяемые во времени случайным образом, т. е.  $Z$  представляют собой случайные процессы. Пространство контролируемых переменных — факторов  $X$  и  $Z$  — образует факторное пространство.

Выходная переменная  $Y$  представляет собой вектор зависимых переменных моделируемого объекта. Ее называют откликом, а зависимость  $Y$  от факторов  $X$  и  $Z$  — функцией отклика. Геометрическое представление функции отклика называют поверхностью отклика.

Переменная  $E$  действует в процессе эксперимента бесконтрольно. Если предположить, что факторы  $X$  и  $Z$  стабилизированы во времени и сохраняют постоянные значения, то под влиянием переменных  $E$  функция отклика  $Y$  может меняться как систематическим, так и случайным образом. В первом случае говорят о систематической помехе, а во втором — о случайной помехе. При этом полагают, что случайная помеха обладает вероятностными свойствами, не изменяемыми во времени.

Возникновение помех обусловлено ошибками методик проведения физических экспериментов, ошибками измерительных приборов, неконтролируемыми изменениями параметров и характеристик объекта и внешней среды.

В вычислительных экспериментах объектом исследования является теоретическая математическая модель, на основе которой необходимо получить экспериментальную факторную модель. Для ее получения необходимо определить структуру и численные значения параметров модели.

Под структурой модели понимается вид математических соотношений между факторами  $X$ ,  $Z$  и откликом  $Y$ . Параметры представляют собой коэффициенты уравнений факторной модели. Структуру модели обычно выбирают на основе априорной информации об объекте с учетом назначения и последующего использования модели. Задача определения параметров модели полностью формализована. Она решается методами регрессионного анализа. Экспериментальные факторные модели называют также регрессионными моделями.

Регрессионную модель можно представить выражением

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{Z}, \vec{B}), \quad (94)$$

где  $\vec{B}$  — вектор параметров факторной модели.

Вид вектор-функции  $\varphi$  определяется выбранной структурой модели и считается заданным, а параметры  $\vec{B}$  подлежат определению на основе результатов эксперимента.

***Эксперимент** — это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.*

***Опыт** — воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов. Опыт — отдельная элементарная часть эксперимента.*

*Различают эксперименты пассивные и активные.*

***Пассивным** называется такой эксперимент, когда значениями факторов управлять нельзя, и они принимают случайные значения. В таком эксперименте существуют только факторы  $Z$ . В процессе эксперимента в определенные моменты времени измеряются значения факторов  $Z$  и функций откликов  $Y$ . После проведения  $N$  опытов полученная информация обрабатывается статистическими методами, позволяющими определить параметры факторной модели. Такой подход к построению математической модели лежит в основе метода статистических испытаний (Монте-Карло).*

***Активным** называется такой эксперимент, когда значениями факторов задаются и поддерживают их неизменными в заданных уровнях в каждом опыте в соответствии с планом эксперимента. Следовательно, в этом случае существуют только управляемые факторы  $X$ .*

Основные особенности экспериментальных факторных моделей следующие: они статистические; представляют собой сравнительно простые функциональные зависимости между оценками математических ожиданий выходных параметров объекта от её внутренних и внешних параметров; дают адекватное описание установленных зависимостей лишь в области факторного пространства, в которой реализован эксперимент. Статистически регрессионная модель описывает поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства, которые в полной мере проявляются лишь при многократном повторении опытов в неизменных условиях.

### **Основные принципы планирования эксперимента**

Для получения адекватной математической модели необходимо обеспечить выполнение определенных условий проведения эксперимента. Модель называют *адекватной*, если в оговоренной области варьирования факторов  $X$  полученные с помощью модели значения функций отклика  $Y$  отличаются от истинных не более чем на заданную величину. Методы построения экспериментальных факторных моделей рассматриваются в *теории планирования эксперимента*.

**Цель планирования эксперимента** — получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. Такой подход обусловлен высокой стоимостью экспериментов, как физических, так и вычислительных, и вместе с тем необходимостью построения адекватной модели.

При планировании активных экспериментов используются следующие принципы:

- отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта;
- постепенное усложнение структуры математической модели;
- сопоставление результатов эксперимента с величиной случайных помех;
- рандомизация опытов;
- оптимальное планирование эксперимента.

Детальное представление о свойствах поверхности отклика может быть получено лишь при условии использования густой дискретной сетки значений факторов, покрывающей все факторное пространство. В узлах этой многомерной сетки находятся точки плана, в которых проводятся опыты. Выбор структуры факторной модели основан на постулировании определенной степени гладкости поверхности отклика. Поэтому с целью уменьшения количества опытов принимают небольшое число точек плана, для которых осуществляется реализация эксперимента.

При большом уровне случайной помехи получается большой разброс значений функции отклика  $Y$  в опытах, проведенных в одной и той же точке плана. В этом случае оказывается, что чем выше уровень помехи, тем с большей вероятностью простая модель окажется работоспособной. Чем меньше уровень помехи, тем точнее должна быть факторная модель.

Кроме случайной помехи при проведении эксперимента может иметь место систематическая помеха. Наличие этой помехи практически никак не обнаруживается и результат ее воздействия на функцию не поддается контролю. Однако если путем соответствующей организации проведения опытов искусственно создать случайную ситуацию, то систематическую помеху можно перевести в разряд случайных. Такой принцип организации эксперимента называют *рандомизацией* систематически действующих помех.

Наличие помех приводит к ошибкам эксперимента. *Ошибки* подразделяют на **систематические и случайные**, соответственно наименованиям вызывающих их факторов — помех.

Рандомизацию опытов осуществляют только в физических экспериментах. Следует отметить, что в этих экспериментах систематическую ошибку может породить наряду с отмеченными ранее факторами также неточное задание значений управляемых факторов, обусловленное некачественной калибровкой приборов для их измерения (инструментальная ошибка), конструктивными или технологическими факторами.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования. Они должны быть:

- **управляемыми**(установка заданных значений и поддержание постоянными в процессе опыта);
- **совместными**(их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);
- независимыми**(уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);
- **однозначными**(одни факторы не должны быть функцией других);
- **непосредственно** влияющими на выходные параметры.

Функции отклика должны быть:

- **численно измеряемыми**;
- **иметь четкий физический смысл**;
- **однозначными** (характеризовать только одно свойство объекта);
- **информативными**(полностью характеризовать определенное свойство объекта);
- **статистически эффективными**(измеряться с достаточной точностью с целью сокращения дублирования опытов).

## План эксперимента

При проведении активного эксперимента задается определенный план варьирования факторов, т. е. эксперимент заранее планируется

**План эксперимента**— совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

**Планирование эксперимента**— выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

**Точка плана**— упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, т. е. точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Точке плана с номером  $i$  соответствует вектор-строка:

$$\vec{X}_{i1} = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}). \quad (95)$$

Общая совокупность таких векторов  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  образует план эксперимента, а совокупность различных векторов, число которых обозначим  $N$ , — спектр плана.

В активном эксперименте факторы могут принимать только фиксированные значения. Фиксированное значение фактора называют **уровнем фактора**. Количество принимаемых уровней факторов зависит от выбранной структуры факторной модели и принятого плана эксперимента. Минимальный  $X_{j\min}$  и максимальный  $X_{j\max}$ ,  $j=1, n$  ( $n$  — число факторов) уровни всех факторов выделяют в факторном пространстве некоторый гиперпараллелепипед, представляющий собой **область планирования**. В области планирования находятся все возможные значения факторов, используемые в эксперименте.

Вектор  $\vec{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$  задает точку центра области планирования. Координаты этой точки  $X_j^0$  обычно выбирают из соотношения:

$$X_j^0 = \frac{(X_{j\max} + X_{j\min})}{2}. \quad (96)$$

Точку  $\vec{X}^0$  называют **центром эксперимента**. Она определяет основной уровень факторов  $X_j^0$ ,  $j = 1, n$ . Центр эксперимента стремятся выбрать как можно ближе к точке, которая соответствует искомым оптимальным значениям факторов. Для этого используется априорная информация об объекте.

**Интервалом** (или **шагом**) **варьирования фактора**  $X_j$  называют величину, вычисляемую по формуле:

$$\Delta X_j = \frac{(X_{j_{\max}} - X_{j_{\min}})}{2},$$

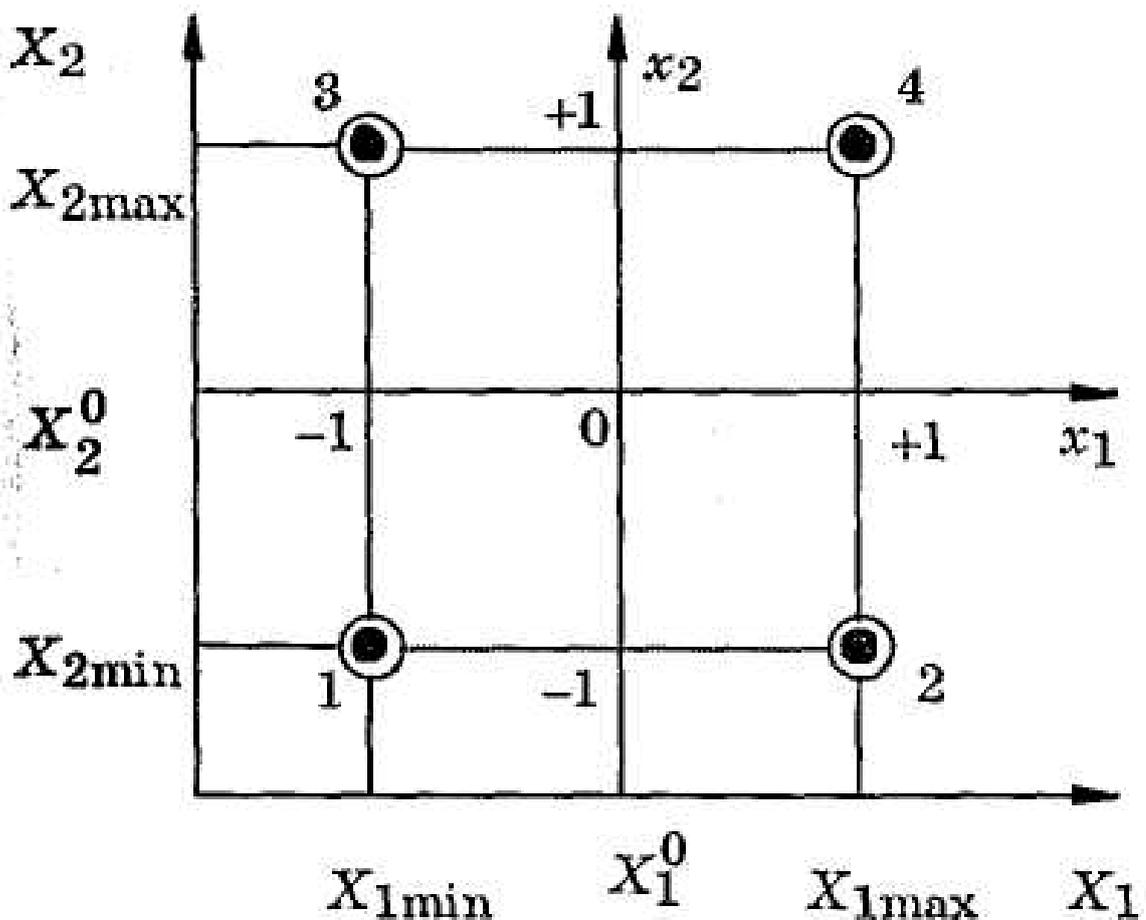
$$j = \overline{1, n}. \quad (97)$$

Факторы нормируют, а их уровни кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1,

нижний -1, а основной 0. Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = (x_j - X_j^0) / \Delta X_j, \quad (98)$$

$$j = \overline{1, n}.$$



1,2,3,4 являются точками плана эксперимента. На пример, значения факторов  $X_1$  и  $X_2$  в точке 1 равны соответственно  $X_{1\min}$  и  $X_{2\min}$ , а нормированные их значения  $x_{1\min} = -1$ ,  $x_{2\min} = -1$ .

Рисунок 70 – Геометрическое представление области планирования при двух факторах:  $X_1$  и  $X_2$

План эксперимента удобно представлять в матричной форме.

**Матрица плана** представляет собой прямоугольную таблицу, содержащую информацию о количестве и условиях проведения опытов. Строки матрицы плана соответствуют опытам, а столбцы — факторам. Размерность матрицы плана  $L \times n$ , где  $L$  — число опытов,  $n$  — число факторов. При проведении повторных (дублирующих) опытов в одних и тех же точках плана матрица плана содержит ряд совпадающих строк.

**Матрица спектра плана** — это матрица, в которую входят только различающиеся между собой строки матрицы плана. Размерность матрицы спектра плана  $N \times n$ , где  $N$  — число точек плана, различающихся между собой хотя бы одной координатой  $U$

Матрица спектра плана имеет вид.

$$X = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_i \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & & & & \\ X_{21} & X_{22} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{Nj} & \dots & X_{Nn} \end{pmatrix}. \quad (99)$$

## Лекция 2. Планирование эксперимента

Под структурой экспериментальной факторной математической модели понимается вид математических соотношений между факторами  $X$ ,  $Z$  и откликом  $Y$ . В качестве факторов принимают внутренние и внешние параметры технической системы, подлежащие оптимизации в процессе ее проектирования. Внутренние параметры системы — это параметры ее элементов, внешние — это параметры внешней среды, в условиях воздействий которой осуществляется функционирование системы. Функциями отклика  $Y$  являются выходные параметры технической системы, характеризующие ее эффективность и качество процессов функционирования. Выходные параметры системы принимаются в качестве критериев оптимальности.

Структура факторной модели выбирается на основе априорной информации, используя принцип постепенного ее усложнения. Параметры факторной математической модели определяются методами регрессионного анализа. При определении параметров этими методами нет необходимости различать виды факторов, т. е. подразделять факторы на управляемые  $X$  и неуправляемые  $Z$ . Поэтому в дальнейшем все они будут обозначаться буквой  $X$ . Тогда факторную модель можно представить векторным уравнением регрессии вида

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{B}). \quad (100)$$

Для определения параметров используются результаты эксперимента. Результаты эксперимента можно представить функцией вида

$$Y = \varphi(\vec{X}) + \varepsilon, \quad (101)$$

где  $\beta_j$  —  $j$ -ый элемент вектора искомых коэффициентов уравнения регрессии;  
 $f_j(x)$  -  $j$ -ая базисная функция.

В качестве базисных функций используют переменные простейших полиномов, системы ортогональных полиномов, тригонометрические функции. Наиболее часто пользуются простейшими полиномами первой и второй степеней. Например, полином первой степени, описывающий функцию отклика  $y$  при двух факторах  $x_1$  и  $x_2$ , может иметь вид

$$y=b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad (102)$$

или

$$y=b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2. \quad (103)$$

А полином второй степени будет иметь вид:

$$y=b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_2^2. \quad (104)$$

Базисные функции в случае использования последнего выражения имеют вид

$$f_0(X)=1; f_1(X)=x_1; f_2(X)=x_2; f_3(X)=x_1x_2; f_4(X)=x_1^2; f_5(X)=x_2^2. \quad (105)$$

### **Планы экспериментов и их свойства**

Для проведения активных экспериментов разработано множество различных планов. Планы учитывают как особенности структуры регрессионных моделей, так и требования их эффективности с позиций повышения точности получаемых моделей и снижения затрат на проведение эксперимента.

При построении линейных моделей или нелинейных, содержащих только взаимодействия факторов, но без квадратов этих факторов, каждый фактор можно варьировать только на двух уровнях. Для получения таких моделей используют *планы первого порядка*.

Известно несколько разновидностей планов первого порядка. Они предназначены для планирования следующих видов экспериментов:

**– однофакторного (классического) эксперимента;**

- *полного факторного эксперимента;*
- *дробного факторного эксперимента.*

Если в регрессионную модель входят факторы в квадрате или с более высокими степенями, то необходимо не менее трех уровней варьирования факторов. При построении квадратичных моделей применяют **планы второго порядка**.

Планы различают по степени насыщенности и композиционности. *План называют насыщенным*, если общее число точек плана равно числу неизвестных параметров регрессионной модели. Такой план позволяет получить экспериментальную факторную модель при минимальных затратах, так как обеспечивает минимум числа опытов.

*План называется композиционным*, если в спектр его в качестве составной части входят точки спектра плана, который был реализован при построении более простой модели. Композиционность плана позволяет реализовать принцип постепенного усложнения модели при минимальных затратах, так как при этом используются результаты опытов, выполненных для получения простой модели. Многие планы второго порядка являются композиционными.

### **План однофакторного эксперимента**

Однофакторный (классический) эксперимент предназначен для получения линейной экспериментальной факторной модели вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n. \quad (106)$$

Однофакторный эксперимент предусматривает поочередное варьирование каждого из факторов при фиксированных на некотором уровне значениях остальных факторов. Фактор  $X_i$  варьировать на двух уровнях  $X_{iВ}$  и  $X_{iН}$ , а все остальные при этом должны находиться в точке центра эксперимента  $X_j^0$ ,  $j \neq i$ . Для нормированных факторов  $x_{iВ} = +1$ ,  $x_{iН} = -1$ ,  $x_j = 0$ . С учетом этого составим матрицу спектра плана однофакторного эксперимента

$$X = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & +1 \end{vmatrix}. \quad (107)$$

Число точек плана в этом случае  $N = 2^n$ , где  $n$  — количество факторов.

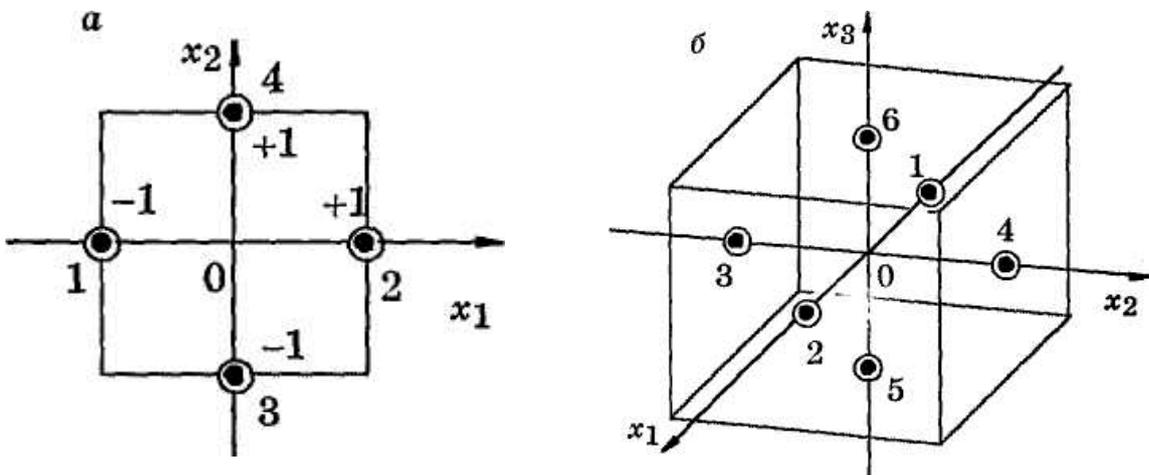


Рисунок 71 – Спектр плана.

Вектор базисных функций имеет вид

$$\vec{f}(\vec{X}) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (108)$$

### План полного факторного эксперимента

Спектр плана полного факторного эксперимента (ПФЭ) содержит все возможные комбинации значений факторов на всех уровнях их изменения. Число точек  $N$  спектра плана определяется по формуле

$$N = U^n, \quad (109)$$

где  $U$ — число уровней варьирования факторов;  $n$ — количество факторов.

Рассмотрим особенности и свойства ПФЭ, применяемых при построении линейных регрессий вида

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n b_{j,k} x_j x_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{j,k,l} x_j x_k x_l + \dots + b_{1,2,\dots,n} x_1 x_2 \dots x_n. \quad (110)$$

Для получения линейной регрессии достаточно варьировать факторы на двух уровнях, т. е.  $U=2$ . Тогда число точек спектра плана будет

$$N = 2^n. \quad (111)$$

Такой план принято обозначать ПФЭ $2^n$ .

Рассмотрим порядок составления матрицы спектра плана, полагая, что факторы нормированы и, следовательно, могут принимать значения только либо + 1, либо - 1.

Для составления матрицы спектра плана используется следующее простое правило: в первой строке матрицы все факторы равны - 1, в первом столбце знаки единиц меняются поочередно; во втором столбце они чередуются через два; в третьем — через 4; в четвертом — через 8 и т. д. по степеням двойки.

При  $n = 2$  число точек плана  $N = 2^2 = 4$ , а матрица спектра плана имеет вид

$$X = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix} \quad (112)$$

При  $n = 3$   $N=2^3 = 8$ , а матрица спектра плана имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Таблица 18

i	Факторы	
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Таблица 19

i	Факторы			i	Факторы		
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
1	-1	-1	-1	5	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1	6	+1	-1	+1
3	-1	+1	-1	7	-1	+1	+1
4	+1	+1	-1	8	+1	+1	+1

Точки плана ПФЭ<sup>2<sup>n</sup></sup> располагаются в вершинах *n*— мерного гиперкуба.

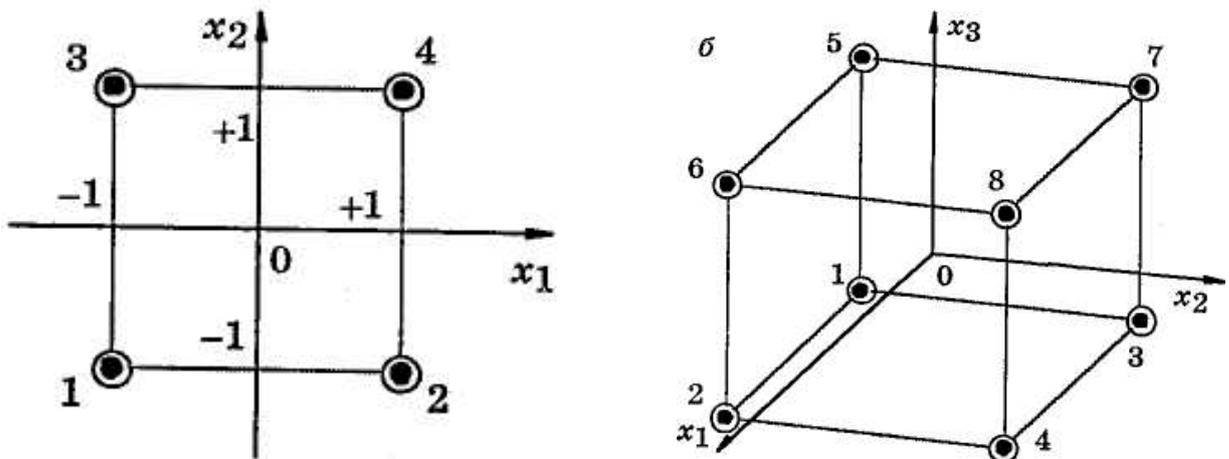


Рисунок 72 – Спектр плана.

Посредством ПФЭ можно построить как простейшую линейную модель технической системы вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad (114)$$

так и нелинейную.

Для этой модели система базисных функций очевидна:  $f_0(x) = 1$ ;  $f_1(x) = x_1$ ;  $f_2(x) = x_2$ ; ...;  $f_n(x) = x_n$ . Число базисных функций в этом случае равно  $n+1$ .

### Лекция 3. Планирование эксперимента

#### План дробного факторного эксперимента

Полный факторный эксперимент имеет существенный недостаток: увеличение количества факторов приводит к быстрому росту числа опытов. Например, при  $n=10$  спектр плана содержит  $N = 2^{10} = 1024$  опыта. Кроме того, необходимо дублирование опытов.

Обычно при построении многофакторной регрессионной модели ограничиваются парными или, в крайнем случае, отдельными тройными взаимодействиями факторов. В этом случае ПФЭ оказывается избыточным, так как число точек спектра плана  $N$  значительно больше количества коэффициентов регрессии  $N_B$ . В результате возникает возможность сокращения числа опытов.

Во многих случаях на начальной стадии моделирования технической системы в связи с отсутствием необходимой информации о влиянии на ее выходные параметры различных факторов (внутренних или внешних параметров) строят линейную модель. Например, при трех факторах выбирают модель в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (115)$$

В этом уравнении четыре коэффициента регрессии, а при  $n=3$  спектр плана ПФЭ, содержит 8 точек, т. е. предусматривает 8 опытов в различных точках факторного пространства. Следовательно, четыре опыта оказываются избыточными и их можно было бы исключить.

При построении математических моделей, использующих упрощенные уравнения регрессий, когда  $N > NB$ , применяют *дробные факторные эксперименты* (ДФЭ). Наибольшее распространение имеют регулярные планы ДФЭ типа  $2^{n-p}$ , т. е. ДФЭ  $2^{n-p}$ , где  $n$  — число факторов,  $p$  — степень дробности ДФЭ.

При построении матрицы спектра плана ДФЭ  $2^{n-p}$  число точек спектра плана определяется по формуле

$$N = 2^{n-p} \quad (116)$$

При выборе степени дробности ДФЭ должно выполняться условие

$$N > NB. \quad (117)$$

Процедура построения спектра плана ДФЭ  $2^{n-p}$  содержит четыре этапа:

1) Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ.

2) Выбор ведущих факторов и построение для них матрицы спектра плана, определяющую программу их изменения в ходе эксперимента.  $k = n - p$

Для выбранных ведущих факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  строят план ПФЭ  $2^k$ .

3) Построение матрицы спектра плана ДФЭ  $2^{n-p}$ .

Часть этой матрицы составляет матрица спектра плана ПФЭ  $2^k$ , а во вторую должны войти столбцы матрицы для остальных факторов  $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$ , количество которых равно  $p = n - k$ .

Столбцы матрицы  $X$ , соответствующие этим факторам, определяют путем перемножения соответствующих столбцов ведущих факторов. Для этого используют генерирующие соотношения. Генерирующим соотношением называется алгебраическое выражение, устанавливающее связь между одним из факторов  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  и произведением какой-либо комбинации ведущих факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Выбор генерирующих соотношений, вообще говоря, произволен. Однако в качестве генерирующих нельзя использовать те произведения ведущих факторов, которые входят в состав существенных переменных.

Генерирующее соотношение имеет вид

$$x_{k+i} = x_j x_i x_m \dots, \quad i = 1 \dots p, \quad (118)$$

где  $x_{k+1}$  — фактор, не включенный в число ведущих (для него определяется столбец матрицы  $X$  спектра плана ДФЭ $2_{n-p}$ );  $x_j, x_i, x_m, \dots$  — ведущие факторы.

Количество ведущих факторов, входящих в генерирующее соотношение, может быть произвольным, но соотношения для всех  $X_{ji}$  должны быть разными.

#### 4) Проверка пригодности полученного спектра плана.

Для этого необходимо построить матрицу базисных функций  $F$  и проверить, нет ли в ней совпадающих или полностью противоположных столбцов. Если в матрице  $F$  нет совпадающих или противоположных столбцов, полученный спектр плана ДФЭ $2_{n-p}$  пригоден для решения поставленной задачи. В противном случае выполняются последовательно следующие процедуры до тех пор, пока не будет обеспечена ортогональность:

- выбираются иные генерирующие соотношения;
- изменяется набор ведущих факторов;
- уменьшается степень дробности плана  $p$ .

При ограниченных возможностях проведения опытов степень дробности плана сохраняют, а изменяют структуру уравнения регрессии (например, используют иные взаимодействия факторов или исключают какую-либо базисную функцию, соответствующую одному из взаимодействий высшего порядка).

Таким образом, регулярные план ДФЭ $2^{n-p}$  обладают теми же свойствами, что и планы ПФЭ $2^n$ .

Пример 1. Получить спектр плана ДФЭ, предназначенного для оценки коэффициентов уравнения регрессии вида.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (119)$$

Так как число факторов в этом уравнении три ( $x_1, x_2, x_3$ ), то при проведении ПФЭ количество точек спектра плана было бы равно  $N = 2^3 = 8$ . В уравнении же всего четыре коэффициента, поэтому можно использовать полуреплику, т.е. ДФЭ $2^{3-1}$ , спектр плана которой содержит четыре точки:  $N = 2^{3-1} = 4$ .

Число ведущих факторов  $k = n - p = 3 - 1 = 2$ . Выберем в качестве ведущих факторов  $x_1$  и  $x_2$ . Значения элементов векторов-столбцов этих факторов получим на основе плана ПФЭ $2^2$ , используя метод чередования знаков. Для определения вектора-столбца фактора  $x_3$  примем генерирующее соотношение в виде  $x_3 = x_1x_2$ .

Полученный спектр плана ДФЭ $2^{3-1}$  выделен прямоугольником в табл., в которой приведена матрица базисных функций  $F$ .

Таблица 20

$i$	$f_0=1$	$f_1=x_1$	$f_2=x_2$	$f_3=x_3$
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

В матрице  $F$  нет совпадающих столбцов, следовательно, полученный спектр плана пригоден для решения поставленной задачи.

### Статистический анализ результатов активного эксперимента

Прежде чем определять оценки коэффициентов регрессии, необходимо выполнить статистический анализ результатов эксперимента с целью оценки их качества и пригодности для построения регрессионной модели. Статистический анализ включает оценку ошибок параллельных опытов, отсеивание грубых ошибок, проверку однородности дисперсий опытов и определение дисперсии воспроизводимости эксперимента.

**Ошибки параллельных опытов.** В условиях наличия случайных помех с целью уменьшения случайных погрешностей эксперимента и повышения точности получаемой регрессионной модели осуществляется дублирование опытов. Каждый опыт, предусмотренный матрицей спектра плана, повторяется  $m = 2...5$  раз. Рекомендуется число  $m$  принимать одинаковым для всех  $N$  точек плана. В результате проводится  $L = Nm$  опытов, в соответствии с матрицей плана, предусматривающей при этом рандомизацию опытов.

Повторные опыты в одной и той же точке плана при наличии помехи дают различные результаты при определении функции отклика.

Разброс результатов относительно оценки математического ожидания функции отклика называют *ошибкой воспроизводимости опыта*. Эту ошибку надо оценить.

Для каждой точки плана по результатам параллельных опытов находят *выборочное среднее*  $y_i$ , равное среднему арифметическому полученных опытных значений функции отклика

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}; \\ i &= \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (120)$$

где  $u$  — номер параллельного опыта;  $y_{iu}$  — значение функции отклика в  $u$ -м параллельном опыте  $i$ -ой точки спектра плана.

Для оценки отклонения функции отклика от ее среднего значения  $y_i$  вычисляется *дисперсия воспроизводимости* опыта по данным  $m$  параллельных опытов в каждой  $i$ -ой точке спектра плана

$$\begin{aligned} S_i^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2; \\ i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (121)$$

**Отсевание грубых ошибок.** Формула для *выборочного среднего*  $y_i$  справедлива лишь при нормальном распределении случайной величины  $y$ . При наличии грубых ошибок опыта распределение  $y$  отклоняется от нормального, что противоречит предпосылкам, положенным в основу регрессионного анализа. Поэтому грубые ошибки надо вначале исключить, а затем определять  $y_i$  и  $S_i^2$ . Грубые ошибки — это брак повторных опытов. Для обнаружения брака используют критерий Стьюдента

$$t_{iu} = \frac{y_{iu} - y_i^*}{S_i^*}. \quad (122)$$

Полученное значение  $t$ -критерия сравнивается с табличным  $t_T$  при выбранном уровне значимости  $q$  и числе степеней свободы  $k$ . Уровень значимости  $q$  характеризует вероятность ошибки. Если  $t > t_T$ , то это соответствует браку данного опыта и результат его не может быть использован. В этом случае опыт подлежит повторному проведению.

**Проверка однородности дисперсий.** Однородность дисперсии означает, что среди всех дисперсии  $S_i^2$  нет таких, которые бы значительно превышали все остальные. Для проверки однородности дисперсий во всех точках спектра плана используется либо критерий Кохрена  $G$ , либо критерий Фишера  $F$ .

Критерий Кохрена основан на распределении отношения максимальной дисперсии  $S_{i\max}^2$  к сумме всех дисперсий

$$G = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}. \quad (123)$$

Критерий Кохрена применяется, если количество сравниваемых дисперсий больше двух, а число повторных опытов во всех точках плана одинаково. Определив число степеней свободы  $k_1 = m - 1$  и  $k_2 = N$  ( $N$  — число точек спектра плана,  $m$  — количество повторных опытов в каждой точке плана), находят табличное значение критерия Кохрена  $G_T$ . Если  $G < G_T$ , гипотеза об однородности дисперсий и воспроизводимости результатов принимается.

Следовательно, полученные результаты эксперимента качественные и могут быть использованы для построения регрессионной модели. В противном случае следует увеличить число параллельных опытов или повторить эксперимент при строгом соблюдении методики и схемы проведения опытов, предприняв необходимые меры для исключения грубых ошибок.

Если выяснится, что непостоянство дисперсии помехи обусловлено внутренними свойствами объекта, то необходимы более сложные способы обработки результатов эксперимента. Можно, например, вводить некоторую функцию от  $y$ :  $\ln y$ ,  $\sqrt{y}$  и др.

Критерий Фишера можно применять при любом числе дисперсии  $S_i^2$ . Он определяется из соотношения

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}. \quad (124)$$

Дисперсии однородны, если  $F < F_T$ , где  $F_T$  — табличное значение критерия Фишера, определяемое при числах степеней свободы  $k_1$  и  $k_2$  и принятом уровне значимости  $q$ .

Следует отметить, что уровень значимости  $q$  по всем критериям, применяемым в процессе статистического анализа и обработки результатов эксперимента

(Кохрена, Стьюдента, Фишера) должен быть одинаков. Для технических систем рекомендуется принимать  $q=0,05$ .

### Дисперсия воспроизводимости эксперимента.

Если дисперсии  $S_i^2$  однородны, то их усредняют и находят *дисперсию воспроизводимости эксперимента*

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (125)$$

Дисперсия  $S_y^2$  представляет собой оценку дисперсии помехи. Число степеней свободы, связанное с оценкой  $S_y^2$ , вычисляется по формуле

$$k = N(m - 1). \quad (126)$$

Формула годится, если число повторных опытов во всех точках спектра плана одинаково. Если число опытов различно, используют формулу

$$S_y^2 = \frac{S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2 + \dots + S_N^2 k_N}{k_1 + k_2 + \dots + k_N} = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^2 k_i}{\sum_{i=1}^N k_i}; \quad (127)$$

где  $k_i$  — число степеней свободы в  $i$ -ой точке спектра плана;  $k_i = m_i - 1$ ;  $m_i$  — число параллельных опытов в этой точке.

Определение коэффициентов регрессионной модели и проверка их значимости

Параметрами регрессионной модели являются коэффициенты регрессии  $b_j$ . Значения коэффициентов регрессии можно получить, решив систему алгебраических уравнений. Выражение для определения всех коэффициентов уравнения регрессии одинаково и имеет простой вид:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_j(\bar{X}_i) \bar{y}_i; \quad (128)$$

где  $N$  — число точек спектра плана;  $f_j(X_i)$  — значение  $j$ -ой базисной функции в  $i$ -ой точке спектра плана;  $\bar{y}_i$  — выборочное среднее функции отклика в той же точке, определяемое по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}; \\ i &= \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (129)$$

где  $u$  — номер параллельного опыта;  $y_{iu}$  — значение функции отклика в  $u$ -м параллельном опыте  $i$ -ой точки спектра плана.

Значения базисных функций  $f_j(X_i)$  для отдельных факторов равны  $X_{ij}$ , а для взаимодействия факторов —  $X_{ik}X_{il}X_{im} \dots$

С учетом этого можно записать следующие формулы для вычисления значений коэффициентов уравнения регрессии:

– для коэффициентов при факторах  $x_j$ , включая также свободный член уравнения,

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} y_i; \\ j &= \overline{0, n}; \end{aligned} \quad (130)$$

где  $n$  — количество факторов.

– для коэффициентов при взаимодействиях факторов

$$\begin{aligned}
b_g &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ik} X_{il} X_{im} \dots \bar{y}_i \\
g &= \overline{n+1, d}; \\
k, l, m &= \overline{1, n}; \\
k &\neq l \neq m.
\end{aligned}
\tag{131}$$

Погрешность определения  $b_j$  оценивают дисперсией  $S_{b_j}^2$ .

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m};
\tag{132}$$

где  $m$  — число повторных опытов (значение  $m$  должно быть одинаковым для всех точек  $N$  спектра плана).

После определения коэффициентов регрессии  $b_j$  проверяют их значимость. Эта проверка осуществляется с использованием  $t$ -критерия Стьюдента, значение которого находят из соотношения

$$\begin{aligned}
t_j &= \frac{|b_j|}{S_{b_j}}; \\
j &= \overline{0, N_B - 1};
\end{aligned}
\tag{133}$$

где  $N_B$  — общее число коэффициентов уравнения регрессии, равное количеству используемых базисных функций для построения регрессии.

Полученное значение  $t_j$  для каждого коэффициента регрессии  $b_j$  сравнивают с табличным  $t_T$ , определяемым при принятом уровне значимости  $q$  и числе степеней свободы  $k = N(m - 1)$ . Если  $t_i < t_T$ , нулевая гипотеза о незначимости коэффициента  $b_j$  принимается и член уравнения регрессии, включающий этот коэффициент, исключается из математической модели. Если же  $t_j > t_T$ , полагают, что данный коэффициент значимо (неслучайно) отличается от нуля и его следует сохранить в регрессионной модели. В этом случае значение коэффициента  $b_j$  больше ошибки опыта, которую можно оценить величиной доверительного интервала  $\varepsilon_{b_j}$ . Доверительный интервал находят по формуле

$$\varepsilon_{b_j} = \pm t_T S_{b_j}. \quad (134)$$

Следует, отметить, что дисперсия воспроизводимости эксперимента  $S_y$  зависит от очень многих факторов: выбора центра эксперимента, интервалов варьирования факторов, наличия экстремумов функции отклика в области планирования, соотношения величины отклика и помехи (так называемое отношение сигнал-шум) и др. В этой связи при небольшом различии между  $t_j$  и  $t_T$  следует весьма осторожно относиться к оценке значимости коэффициентов регрессии.

Лучше такие коэффициенты сохранить в модели, а влияние соответствующего фактора (или взаимодействия факторов) проверить в дальнейшем на более сложной модели или в иных условиях планирования эксперимента.

После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии приобретает вид

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^{N_B^*-1} b_j f_j(\vec{X}); \quad (135)$$

где  $N_B^*$  — количество значимых коэффициентов регрессии.

Так как часть коэффициентов регрессии исключено из модели, то  $N_B^* < N_B$ .

Если все коэффициенты оказались значимыми, суммирование в формуле осуществляется до  $N_B - 1$ .

# Программирование обработки на станках с ЧПУ

## Часть 3.

### Лекция 1. Системы ЧПУ

В программном управлении станками широко применяют системы, которые значительно сокращают время переналадки станка, обеспечивают высокую точность и стабильность обработки. Программное управление станком — это автоматическое управление его работой по программе, заданной в виде чисел или символов, определяющих величины и характер перемещений его исполнительных органов.

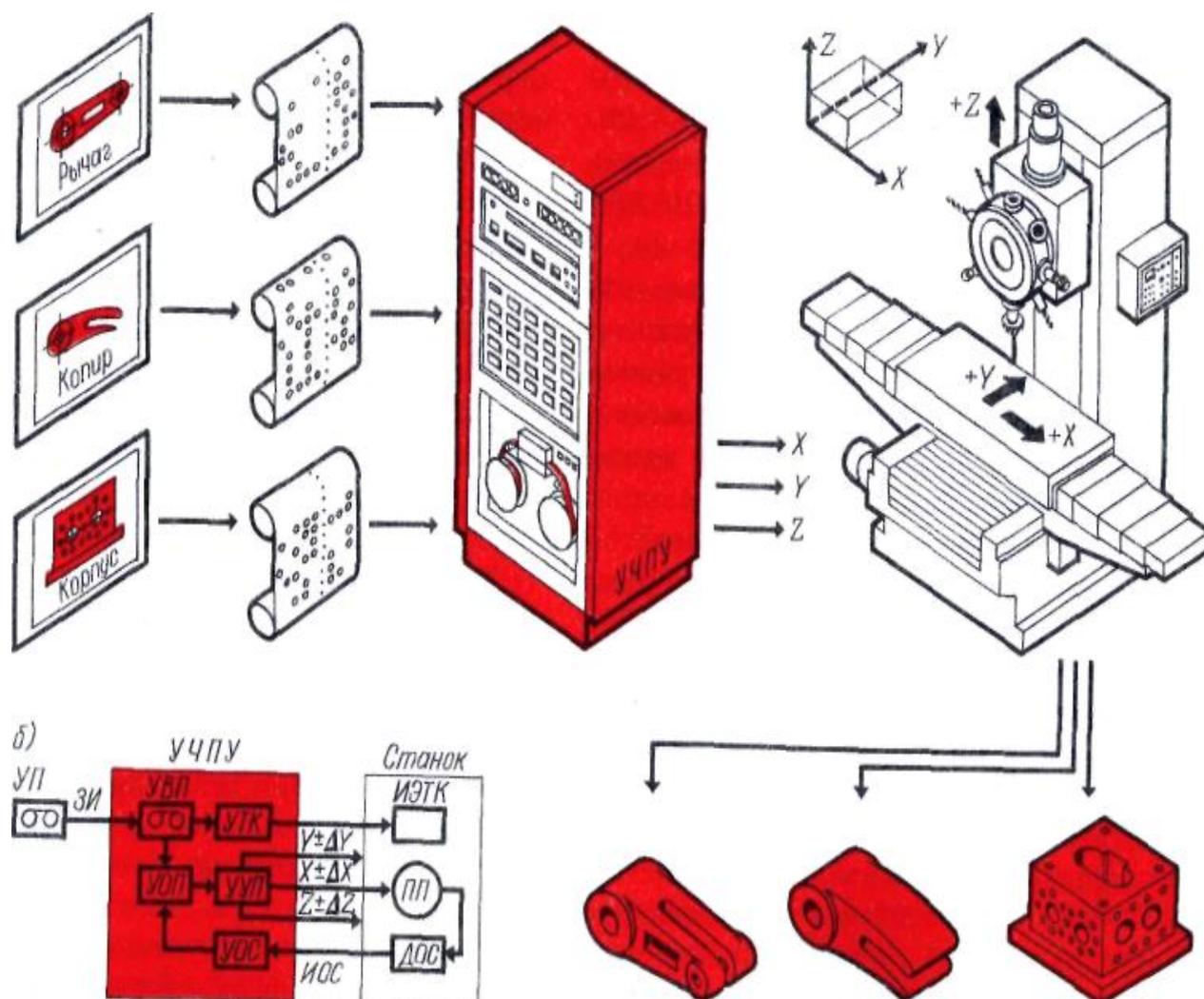


Рисунок 73 – Станок с ЧПУ.

Основная особенность станков с ЧПУ состоит в том, что программа, т. е. данные о величине, скорости и направлении перемещений рабочих органов, задается в виде символов, нанесенных на специальный программоноситель. Процесс подготовки программ для станков с ЧПУ отделен от детали во времени и пространстве.

- задающая информация (ЗИ);
- устройство ввода программы (УВП);
- устройство отработки программы (УОП);
- устройство управления приводом (УУП);
- привод подач (ПП);
- датчики обратной связи (ДОС);
- информация обратной связи (ИОС);
- устройства обратной связи (УОС);
- устройство технологических команд (УТК);
- исполнительные элементы технологических команд (ИЭТК).

**Основные преимущества станков с ЧПУ.** Применение станков с ЧПУ взамен универсального оборудования имеет существенные особенности и создает определенные преимущества, в частности следующие: сокращение сроков подготовки производства на 50—75 %; сокращение общей продолжительности цикла изготовления продукции на 50—60 %; экономию средств на проектирование и изготовление технологической оснастки на 30—85 %; повышение производительности труда за счет сокращения вспомогательного и основного времени обработки на станке и многое другое.

#### **Особенность технологической подготовки производства**

–значительно возрастают сложность задач и трудоемкость проектирования технологического процесса

– резко повышается требуемый уровень квалификации технологов

– технологические работы требуют иного подхода (проработка рабочих чертежей на технологичность, выбор инструмента и оснастки, выработка требований к заготовке)

Полученная в итоге УП представляет собой сумму указаний рабочим органам станка на выполнение в определенной последовательности действий, из которых складывается весь процесс обработки детали. Получением УП завершается первый этап процесса изготовления детали на станках с ЧПУ, начатый с предварительной подготовки данных, необходимых для программирования.

На втором этапе в соответствии с программой, записанной на программноносителе, деталь обрабатывается на станке.

Из всех работ в процессе программирования решающими являются сбор, упорядочение и обработка информации, перед тем как она будет нанесена на программноноситель. Подготовленная информация должна быть представлена в форме чисел, т. е. в форме, пригодной для записи программы данному станку.

## Системы счисления

Теория кодирования — раздел теории информации, изучающей способы отождествления сообщений с отображающими их сигналами. Кодирование применяют при передаче, хранении и преобразовании информации. Для кодирования сообщений используют набор символов.

Множество символов называют *алфавитом кода*:  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

Количество символов в алфавите обозначают буквой  $m$  и называют *основанием кода*. Десятичная система счисления является кодом с основанием  $m=10$  (т. е. количество значащих цифр равно десяти). При этом значащие цифры (их форма, вид) составляют алфавит: 0, 1, 2, 3, ..., 9. С помощью алфавита (значащих цифр) в системе счисления можно выразить (закодировать) любую числовую величину.

Код Морзе имеет основание  $m = 2$ ; следовательно, его алфавит состоит из двух символов — точки и тире (· —).

Выражение звуков языка тоже осуществляется определенным кодом. Так, для русского языка основание кода  $m = 33$ , а алфавит состоит из букв а, б, в, г, ..., я.

Любую упорядоченную выборку символов из алфавита называют *кодовым словом* или *кодовой комбинацией*:  $V = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}$ .

Количество (число) символов в кодовой комбинации обозначают буквой  $n$  и называют *длиной кодовой комбинации*.

**Кодом** называют любое упорядоченное множество кодовых комбинаций:  $(V_1, V_2, \dots, V_N)$ . Количество (число) кодовых комбинаций в коде называют *мощностью* или *объемом кода*. Максимальная мощность кода  $N = m^n$

## Представление информации кодом.

Элементы, положения, события и т. д., для которых характерны два устойчивых и противоположных состояния, удобно описывать кодом с основанием  $m = 2$ . Например, контакты реле могут быть замкнуты или разомкнуты, триод открыт или закрыт, деталь на станке установлена или снята, привод включен или выключен, самолет обнаружен или не обнаружен и т.п. Если одному состоянию элемента (положения, события) приписать значение 1 (единица), а другому 0 (нуль), то алфавит кода будет содержать всего два символа (знака) — 0 и 1, а кодовая комбинация — набор символов из этого алфавита. Например, режим включения шести реле ( $P_i$ ), определенный кодовой комбинацией 110111 (рисунок 74а), будет означать, что в заданный момент времени лишь контакты реле  $P_4$  не будут замкнуты.

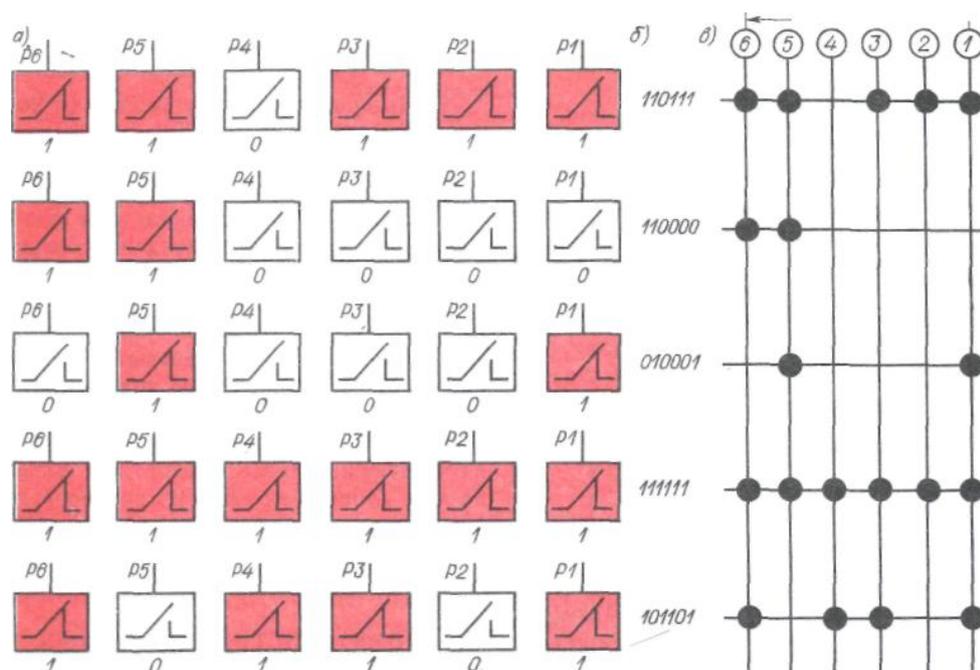


Рисунок 74 – Схема кодирования.

Комбинации 110000, 010001 и 111111 означают, что сработали соответственно шестое и пятое, первое и пятое, все реле и т.д.

Рассмотренную информацию можно записать на бумаге символами 1, 0 (рисунок 74б) или представить на бумажной ленте комбинацией отверстий (рисунок 74в), считая пробитое на ленте отверстие за 1, а отсутствие за 0. Расположение отверстий в строке на соответствующих дорожках определит состояние

рассматриваемых элементов. При этом полагают, что первая дорожка (счет справа налево) определяет состояние первого реле, вторая — второго, третья — третьего и т.д.

В данном случае длина всех рассмотренных комбинаций (110111, 110000 и т.д.) равна шести ( $n = 6$ ).

### Характеристики основных систем счисления

Коды, используемые для представления чисел посредством числовых знаков (цифр), определяются как системы счисления. Наиболее употребимы позиционные системы, запись произвольного числа  $A$  в которых при основании  $m$  базируется на представлении этого числа в виде полинома:

$$A = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_0 m^0 + a_{-1} m^{-1} + a_{-2} m^{-2} + \dots, \quad (136)$$

где  $a_i$  — коэффициент — один из символов (цифр) системы;  $m$  — основание системы;  $n$  — номер разряда.

При использовании системы счисления основание, как правило, не пишут, а число записывают путем перечисления всех коэффициентов (символов) полинома:

$A = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0, a_{-1} \dots$ . При этом запятая, отделяя целую часть числа от дробной, служит для фиксации значения каждой позиции (разряда) в последовательности цифр.

**Десятичная система счисления.** Это система — наиболее употребляемая. Основание системы — 10. В ней используют десять символов — десятичные цифры 0, 1, 2, 3, ... 9. В системе 10 единиц каждого разряда объединяют в одну единицу соседнего старшего разряда (выбор числа 10 в качестве основания общепринятой системы счисления исторически связан с числом пальцев на руках).

В десятичной системе последовательность цифр 3807,45 представляет собой сокращенную запись следующего полинома:  $3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$ . В десятичной системе при обычной записи указывают только коэффициенты; при этом предполагают, что их значимость (вес) различна и определяется разрядом, занимаемым данным коэффициентом (цифрой). Система является емкой, но для реализации в устройствах вычислительной техники мало пригодна, так как выполнение элемента с десятью четко различимыми состояниями представляет собой сложную техническую задачу.

**Унитарная (единая) система счисления.** Такая система имеет один цифровой знак (символ) — 1. Любое и только целое число в этой системе выражается набором единиц, например число 4 десятичной системы представляется в виде 1111, число 12 — в виде 1111111111 и т. д. Система простая и легко реализуется (она используется, в частности, для записи заданного количества импульсов на магнитных лентах, барабанах), но является очень громоздкой. Чтобы записать, например, число десятичной системы  $3586/10$ , нужно последовательно записать три тысячи пятьсот восемьдесят шесть единичных символов: 1111... 111... 1111... 111...

### Перевод чисел из одной системы счисления в другую.

Наиболее прост перевод чисел в двоичную систему и обратно из восьмеричной системы, что находит применение в устройствах вычислительной техники. Чтобы восьмеричное число перевести в двоичное, надо каждую восьмеричную цифру заменить эквивалентным ей трехразрядным двоичным числом — триадой:

Таблица 21

Восьмеричная цифра	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичная цифра	000	001	010	011	100	101	110	111

Соответственно для перевода из двоичной системы в восьмеричную число нужно разделить на триады влево и вправо от запятой и заменить триады восьмеричными цифрами. Если самая левая или самая правая триада окажется неполной, к ней надо приписать нули.

Пример 1. Восьмеричное число  $34,5_8$  перевести в двоичное. Восьмеричные цифры 3, 4, 5 в двоичной системе соответственно запишутся в виде 011, 100, 101, тогда все число будет  $11100,101_{/2}$ . Нуль впереди можно опустить.

Пример 2. Двоичное число  $11010111,110101_{/2}$  перевести в восьмеричное.

$$\frac{011}{3} \frac{010}{2} \frac{111}{7} \frac{110}{6} \frac{101}{5} = 327,65_{/8}$$

Целые числа, записанные в одной системе счисления, в новую систему счисления переводятся последовательным делением числа и получаемых частных на основании той системы, в которую оно переводится, до тех пор, пока не получится частное меньше основания системы. Результатом будут остатки от деления, прочитанные в порядке, обратном их получению, и последнее частное.

Пример 1. Перевести число  $47_{10}$  в двоичное

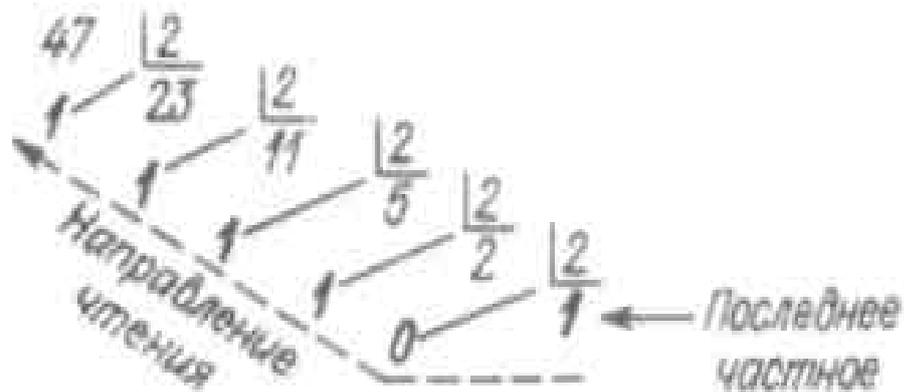


Рисунок 75 – Схема перевода из десятичного счисления в двоичный.

Таким образом,  $47_{10} = 101111_2$

## Лекция 2. Программирование обработки на станках с ЧПУ

### Программноносители.

Материальные носители информации для станков с ЧПУ — программноносители — можно условно разделить на внешние и внутренние.

К *внешним* программноносителям относят: перфокарты, перфоленты, киноплёнки, магнитные ленты, магнитную проволоку, магнитные барабаны и диски.

*Внутренние* программноносители — это штекерные панели и коммутаторы, панели с переключателями или кнопками, электронно-лучевые трубки и др.

Внешние программноносители можно быстро заменять, записывать на них программу и хранить отдельно от устройств ЧПУ, достаточно просто дублировать путем выполнения копий, использовать в однотипных устройствах и т. п. Внутренние программноносители обычно являются неотъемлемым элементом конкретного УЧПУ, конструктивно с ним связанным.

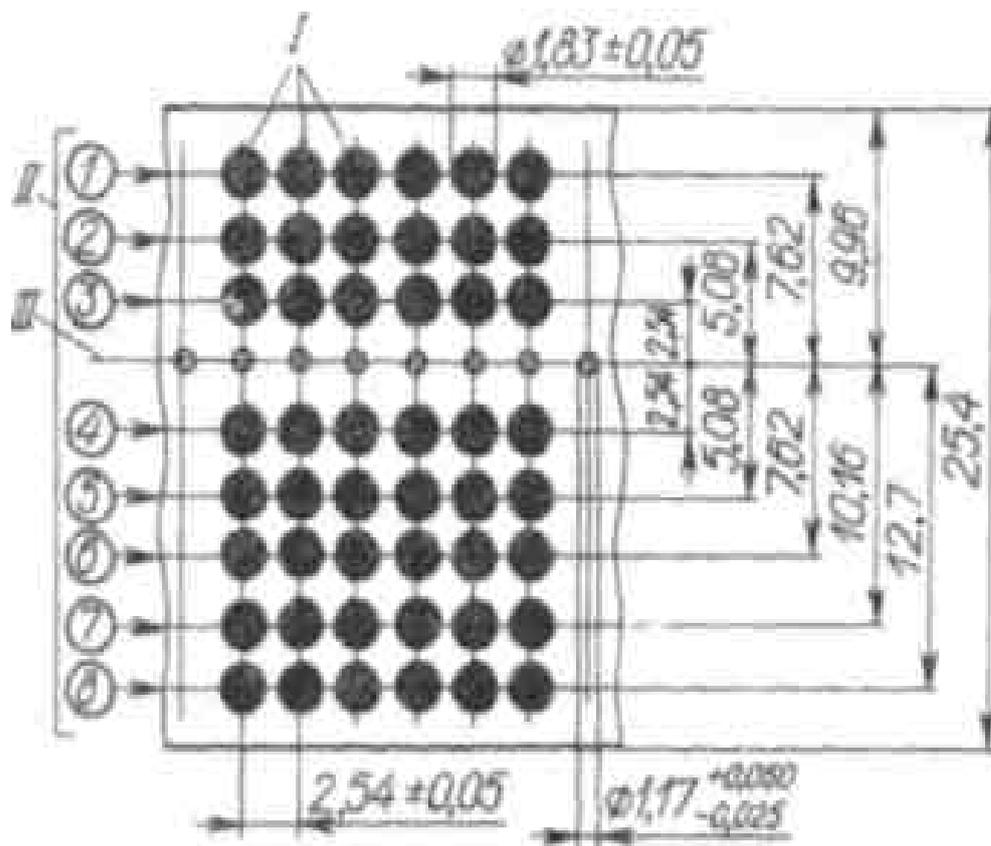
Все программноносители характеризуются по емкости, скорости записи информации на них и скорости считывания этой информации, по быстроте замены, долговечности, удобству хранения, стоимости.

### Внешние программноносители

**Перфокарты.** Стандартная перфокарта обычно выполняется из плотного картона толщиной 0,18 мм. Срезанный угол перфокарты определяет начало записи информации. Запись осуществляется в соответствии с определенным кодом путем нанесения (перфорирования) кодовых отверстий прямоугольной формы (3X1,5 мм) или круглой формы (диаметр 3 мм).

**Перфоленты.** В системах программного управления станками наиболее широко применяют перфоленты. Их изготавливают из бумаги толщиной 0,1 мм и шириной 17,5; 22,5 и 25,4 мм. Информация на перфолентах записывается пробивкой кодовых отверстий диаметром 1,83 мм с расстоянием между строками ( $2,54 \pm \pm 0,05$ ) мм. С соответствующим шагом на перфолентах наносят транспортную (ведущую) дорожку, диаметр отверстий которой равен 1,17 мм.

Стандартную перфоленту шириной 17,5 мм используют для записи информации на пяти дорожках, ленту шириной 22,5 мм применяют для записи информации на шести или семи дорожках, а лента шириной 25,4 мм позволяет перфорировать восемь дорожек.



/ — строчки: //—дорожки кодовых отверстий:

/// — транспортная дорожка

Рисунок 76 – Восьмидорожечная перфолента.

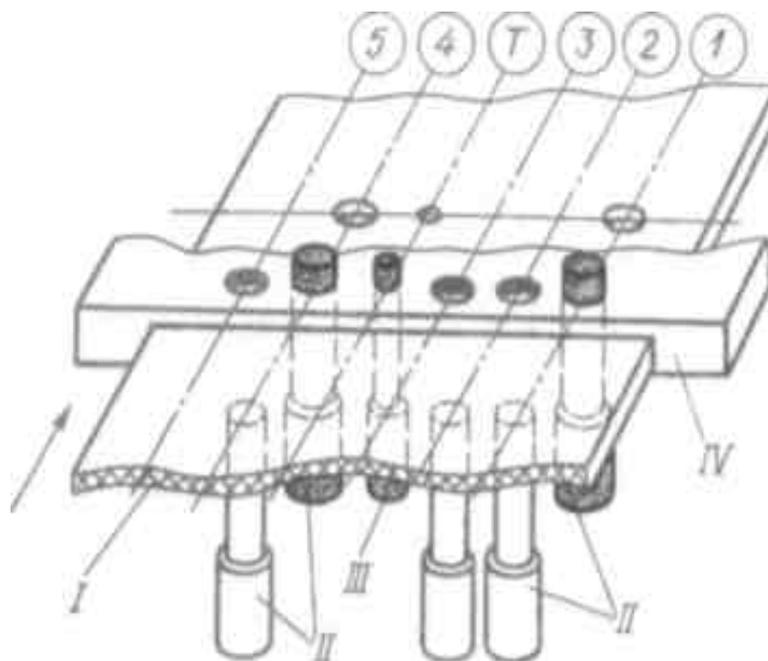


Рисунок 77 – Схема перфорирования отверстий.

## Магнитные носители

Магнитная лента, магнитная проволока, магнитные барабаны и диски экономичны, компактны, имеют большую емкость и надежность, их можно многократно использовать для записи и перезаписи информации.

**Магнитная лента** — лента двухслойной композиции с эластичной подложкой 3 (рис. 1.10, а) из полимерного материала (ацетилцеллюлозы и др.). На подложку нанесен рабочий ферромагнитный слой 2 — порошок из окислов железа, который закреплен на поверхности ленты с помощью специального связующего вещества. Размер зерен порошка 0,3—0,9 мкм, толщина подложки 60—120 мкм, ферромагнитного слоя — 5—20 мкм. Для станков с ЧПУ наибольшее применение получила лента шириной 35 мм. Она обладает высокой механической прочностью и, кроме того, при случайной размотке рулона не образует узлов, повреждающих ленту, как это имеет место при использовании узкой ленты. Лента выдерживает высокие скорости протягивания и перемотки (до 200 мм/с), позволяет осуществлять многоканальную запись с числом дорожек до 15.

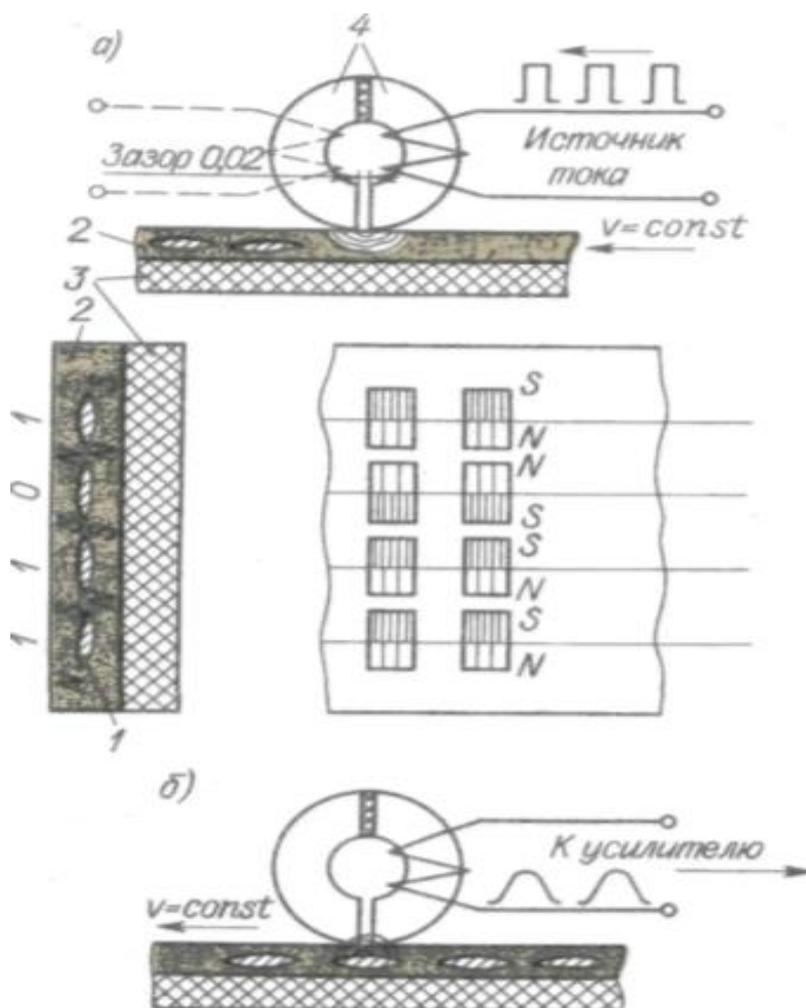
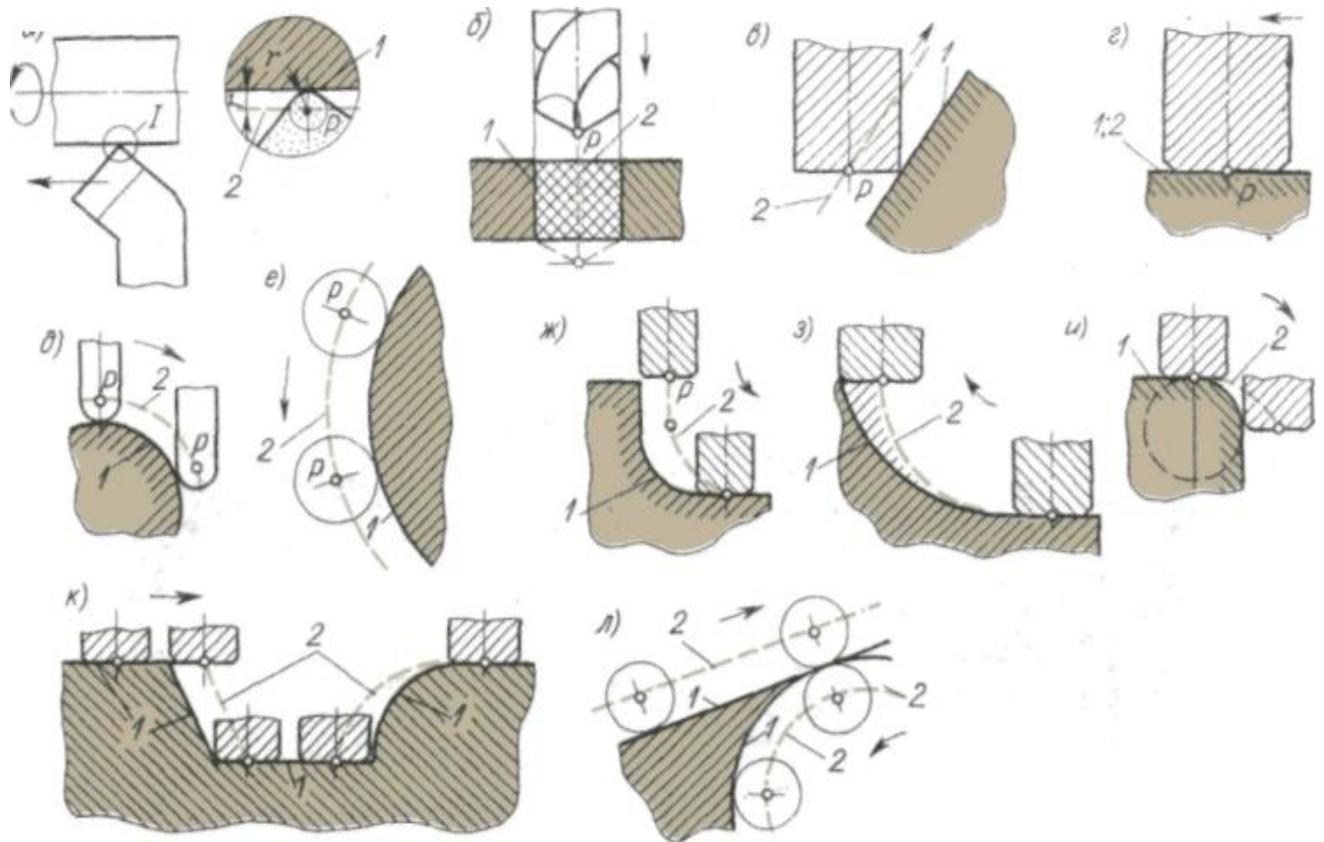


Рисунок 78 – Схемы записи (а) и считывания (б) информации при использовании магнитной ленты.

## Подготовка информации для управляющих программ

Представление траектории обработки. Детали, обрабатываемые на станках с ЧПУ, можно рассматривать как геометрические объекты. При обработке детали инструмент и заготовка перемещаются относительно друг друга по определенной траектории. Программа обработки детали задает (описывает) движение определенной точки инструмента — его центра ( $P$ ). Для концевой фрезы со сферическим торцом это центр полусферы, для концевой цилиндрической, сверла, зенкера, развертки — центр основания, для резцов — центр дуги окружности при вершине и т. д. Если принять, что радиус инструмента во время обработки детали по контуру остается постоянным, то траектория центра инструмента при контурной обработке является эквидистантной контуру детали (рис. а — е). Однако это встречается не всегда. Траектория движения центра инструмента может существенно отличаться от линий контура детали (рис. ж — л), так как в противном случае эквидистантное перемещение инструмента или перемещение инструмента точно по контуру привело бы к погрешности обработки. Поэтому в ряде случаев под эквидистантой понимают такую траекторию движения центра инструмента, при которой обеспечивается обработка заданного контура.



1 — контур детали; 2 — траектория движения центра инструмента

Рисунок 79 – Схемы траекторий центра инструмента:

Движение по эквидистанте относится только к траектории рабочих ходов. Перемещения центра инструмента при обработке детали могут быть также подготовительными и вспомогательными. Характер этих движений во многом зависит от задаваемого в начале программирования положения исходной (нулевой) точки, от расположения приспособления и т. д.

Из сказанного ясно, что для обработки детали по программе прежде всего необходимо определить рабочие, подготовительные и вспомогательные траектории перемещения центра принятого для работы инструмента.

Относительно контура обрабатываемой детали траектория движения центра инструмента при обработке может располагаться по-разному: совпадать с контуром, быть эквидистантной контуру, изменять положение относительно контура по определенному закону.

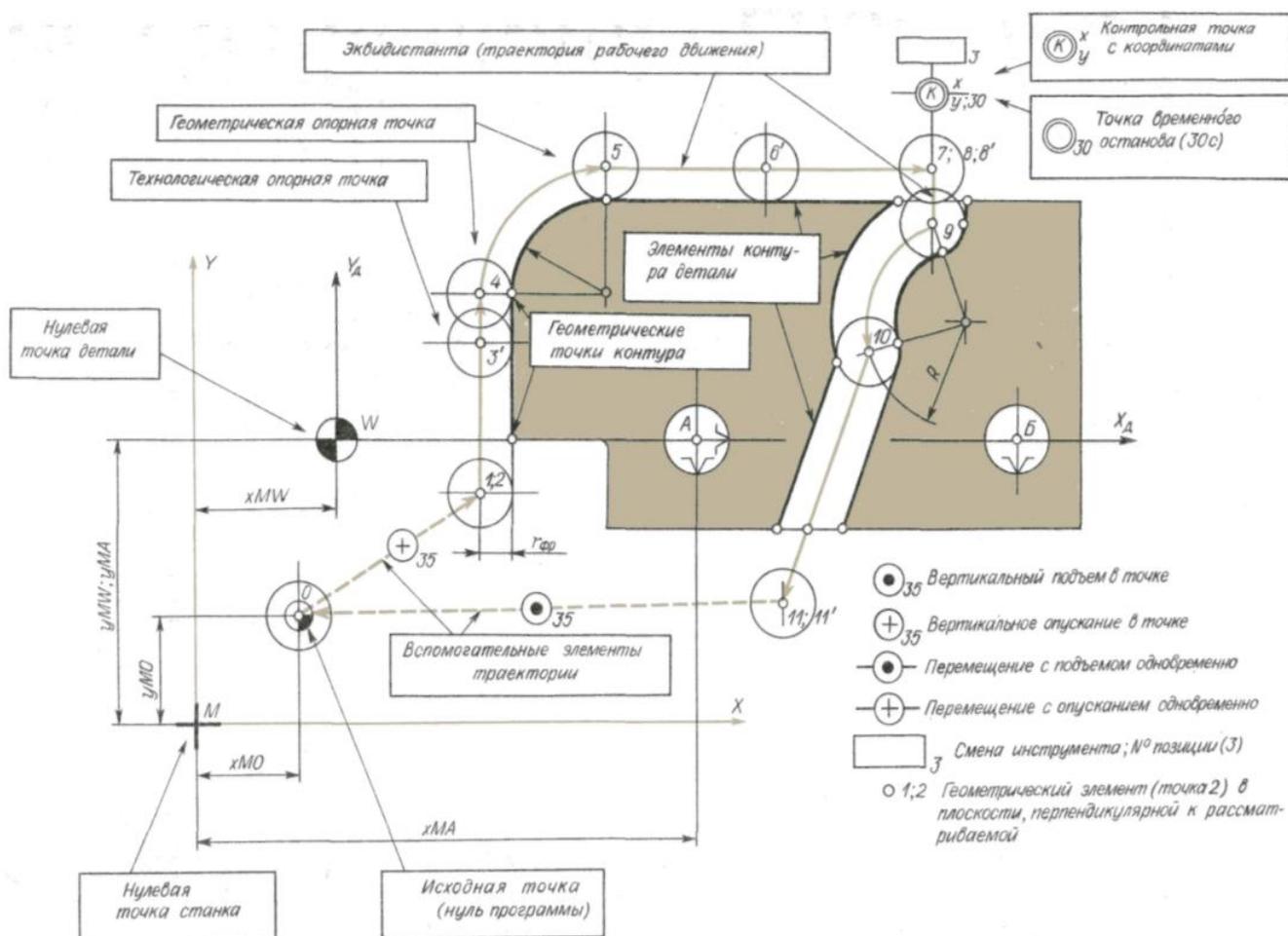


Рисунок 80 – Элементы траектории инструмента при программированной обработке.

Для полной обработки детали (для выполнения заданной операции) траектория движения центра инструмента должна быть непрерывной. Разработать (определить) ее сразу как единое целое практически очень трудно, поскольку в общем случае программируемая траектория является достаточно сложной, определяющей перемещения центра инструмента в пространстве. Поэтому в практике программирования траекторию инструмента представляют состоящей из отдельных, последовательно переходящих друг в друга участков, причем эти участки могут быть или участками контура детали, или участками эквидистанты.

Отдельные участки контура детали и эквидистанты называются геометрическими элементами. К ним относятся отрезки прямых, дуги окружностей, кривые второго и высших порядков. Точки пересечения элементов или перехода одного элемента в другой находят как геометрические опорные (узловые) точки. Эти точки в большинстве случаев являются определяющими при задании положения элементов контура (эквидистанты) в пространстве. Это положение, так же как и величина и направление движения инструмента, задается в системе координат с определенной заданной нулевой точкой. Такая точка может быть у станка — **нулевая точка станка** (нуль станка) или у детали — **нулевая точка детали** (нуль детали). Она является началом системы координат данной детали.

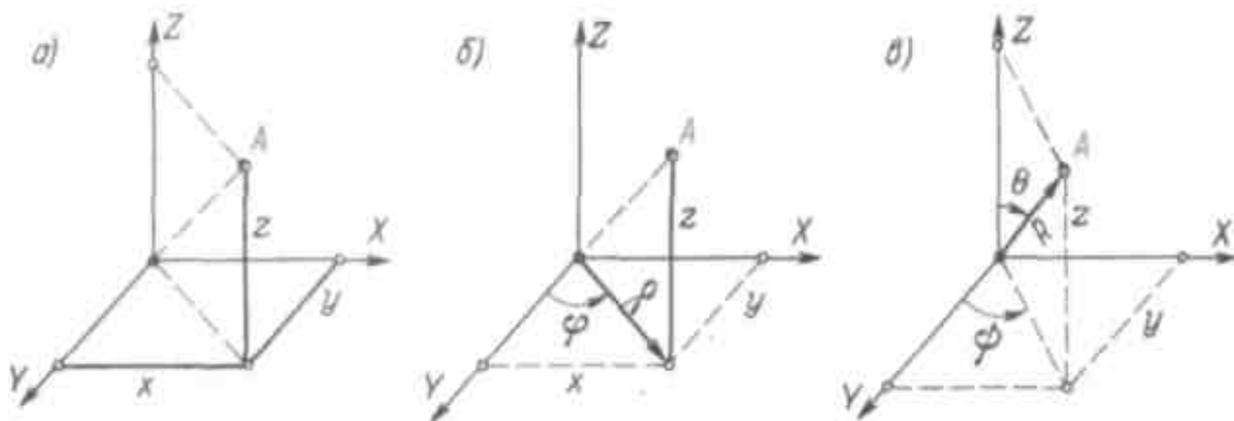


Рисунок 81 – Системы координат: *a* — прямоугольная; *б* — цилиндрическая; *в* — сферическая.

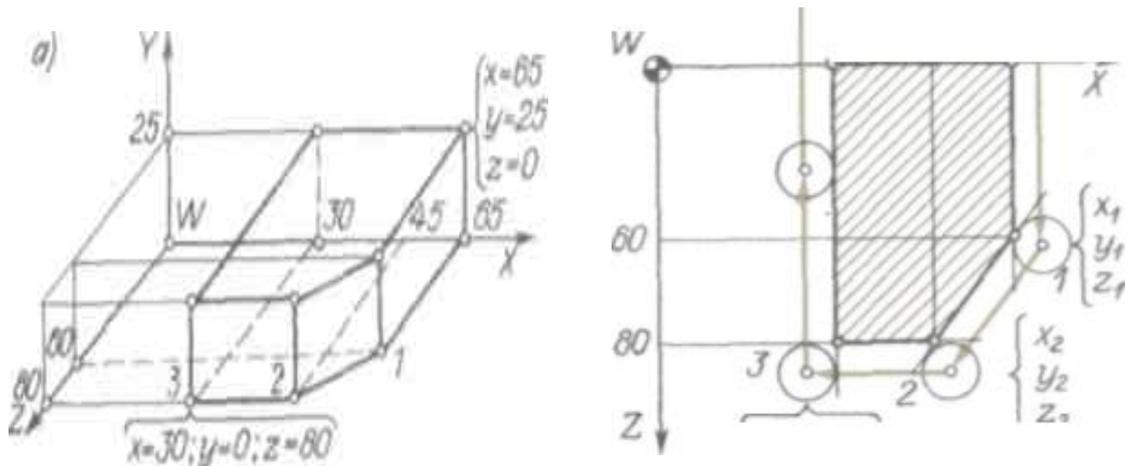
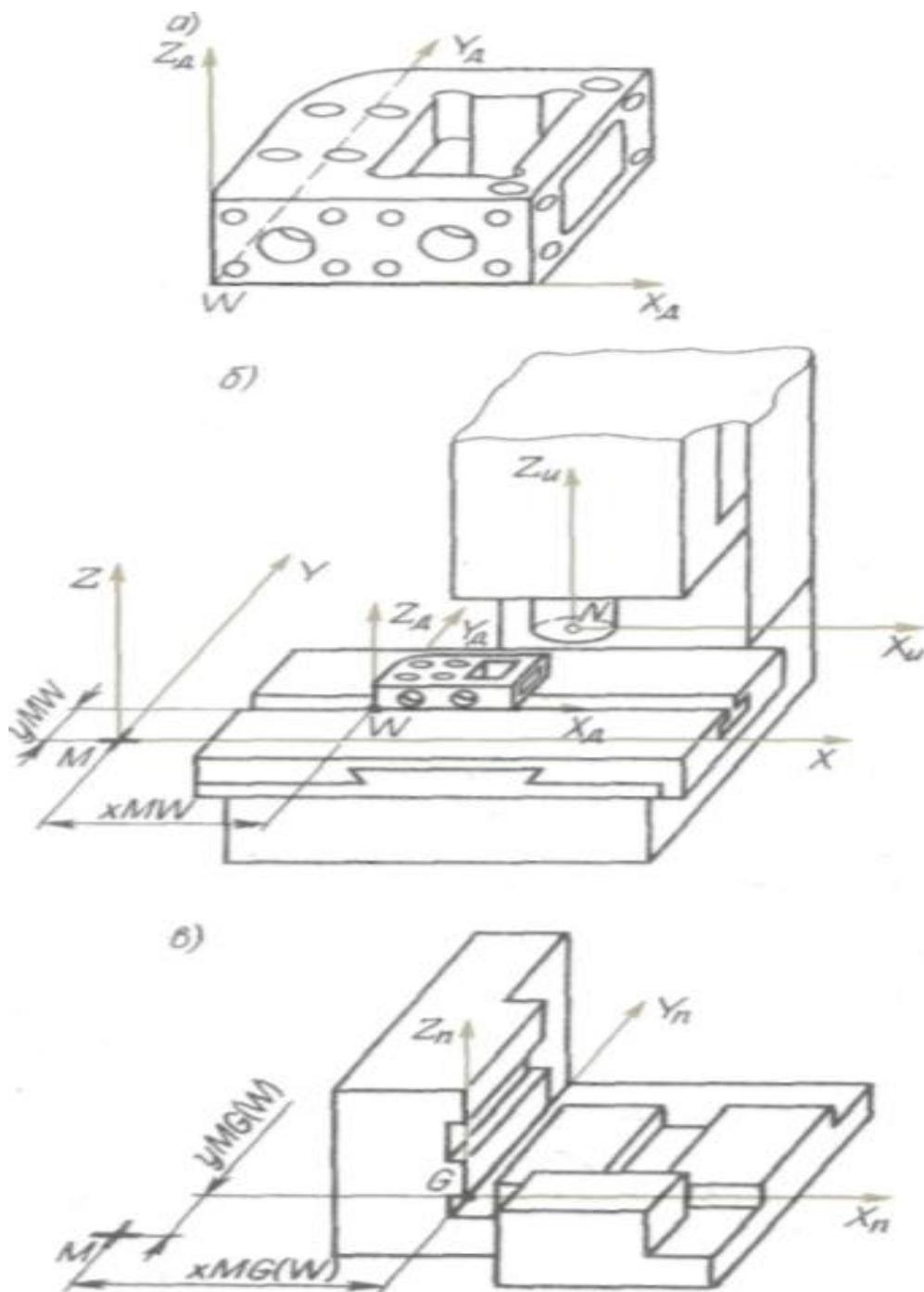


Рисунок 82 – Схема определения координат опорных точек контура детали (а) и траектории движения центра инструмента (б).

Таким образом, в определенной системе координат контур детали и траектория перемещения центра инструмента относительно этого контура могут быть представлены геометрическими элементами с **опорными точками**, заданными координатами или в пространстве, или на плоскости.

На траектории движения центра инструмента могут быть назначены также **технологические опорные точки**, т. е. точки, где изменяются какие-то технологические параметры, например подача инструмента и др., точки временного останова с указанием времени останова и т. д.

При обработке детали инструмент может перемещаться или в одной плоскости — плоская обработка, при которой используются две управляемые координаты, или иметь сложное перемещение в пространстве — объемная обработка. Однако чаще всего объемные поверхности деталей обрабатывают строчками, каждая из которых является плоской кривой.



*a* — деталь в системе координат детали; *б* — размещение детали на станке; *в* — система координат приспособления

Рисунок 83 – Схема расположения детали на станке.

В начале программирования в системе координат детали  $X_0Y_0Z_0$  задают положение базовых элементов заготовки. Относительно нуля детали (точка  $W$ )

задаются при программировании все опорные точки, определяющие траекторию движения центра инструмента при обработке.

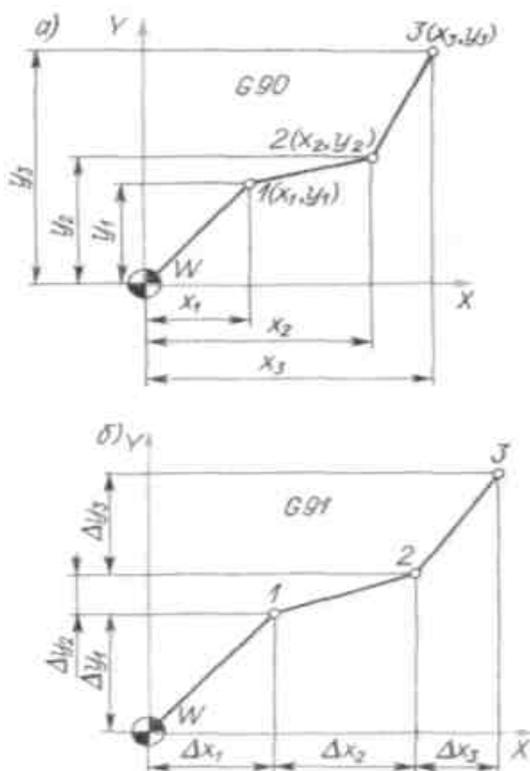
При установке детали на станок положение нуля детали (точки  $W$ ) будет зафиксировано относительно координатной системы станка  $XYZ$  координатами  $x_{MW}$ ,  $y_{MW}$ ,  $z_{MW}$ .

Если при обработке детали используют приспособление, то оно должно быть закоординировано на станке относительно нуля станка (точки  $M$ ).

Система  $ZuNXu$  определяет координатную систему инструмента.

Естественно, что при установке детали в приспособлении координатная система детали  $X_{\partial}WY_{\partial}$  должна совпадать с координатной системой приспособления  $X_{\Pi}GY_{\Pi}$ .

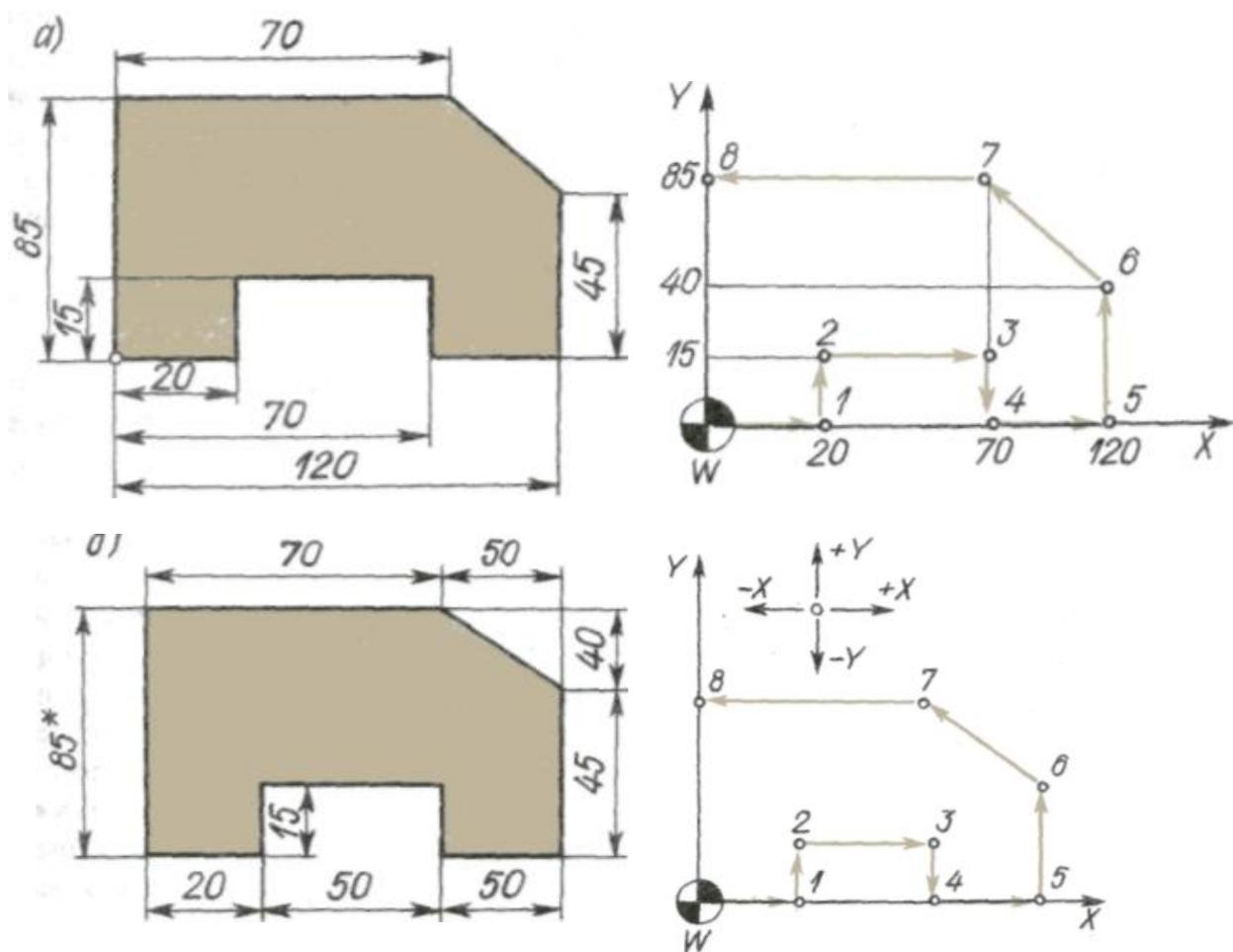
При обработке детали при движении по элементам траекторий (прямым, дугам, кривым) в промежутках между опорными точками инструмент в определенных случаях может перемещаться по траектории, несколько отличающейся от заданной. Однако можно задать такое число опорных точек, при котором отклонения фактической траектории от требуемой будут меньше некоторой наперед заданной величины и деталь будет обработана в пределах заданной точности



$a$  — абсолютные размеры;  $б$  — размеры в приращениях

Рисунок 84 – Схемы задания координат опорных точек 1—3

В большинстве систем ЧПУ работой станка управляют дискретно, с помощью импульсов. Цена одного импульса (наименьшее программируемое перемещение), или дискретность системы, отражает разрешающую способность комплекса, включающего систему ЧПУ, механизм подач и датчики обратной связи. Исходя из дискретности системы приращения координат между опорными точками траектории можно выразить не в мм, а количеством импульсов. Например, если дискретность по оси  $X$  составляет  $0,01$  мм/имп., а по оси  $Y$ —  $0,02$  мм/имп., то значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , равные, например, соответственно  $12,85$  мм и  $8,6$  мм, в импульсах будут выражены следующим образом:  $\Delta x=1285$  имп.,  $\Delta y = 430$  имп.



*a* — абсолютные размеры; *b* — относительные

Рисунок 85 – Схемы задания размеров детали.

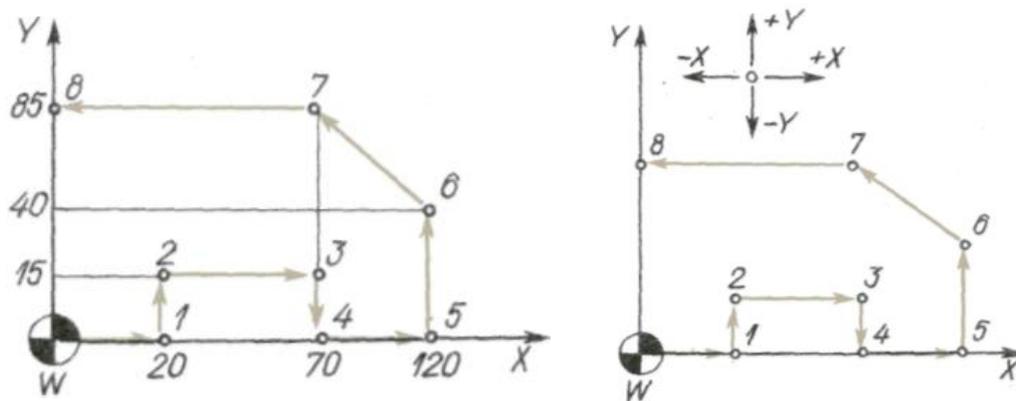


Рисунок 86 – Схема движения инструмента.

Таблица 22

Точка	x	y	$\Delta x$	$\Delta y$	Точка	x	y	$\Delta x$	$\Delta y$
	мм					мм			
W	0	0	0	0	5	120	0	+50	0
1	20	0	+20	0	6	120	40	0	+45
2	20	15	0	+15	7	70	85	-50	+40
3	70	15	+50	0	8	0	85	-70	0
4	70	0	0	-15					

Задание приращений по двум осям координат, однако, еще не определит заданного прямолинейного движения инструмента между точками. Даже при постоянной скорости подачи по осям вследствие неравенства координат заданной точки ( $\Delta x \neq \Delta y$ ) время движения по оси X не будет равно времени движения по оси Y и заданная траектория будет искаженной (на рис. показано штрихами). Как уже говорилось, приблизить фактическую траекторию к заданной можно введением дополнительных (промежуточных) опорных точек (точки 2 — 5 на рис.б) и заданием соответствующей последовательности перемещений инструменту между этими точками, например:  $(\Delta x, \Delta y)$ ;  $(2\Delta x)$ ;  $(2\Delta x, 2\Delta y)$ ;  $(\Delta x)$ ;  $(\Delta x, \Delta y)$ , т. е. траекторию по сравнению с ранее определенной (см. рис. а) приходится разбивать на более мелкие участки. Величина  $\delta$  определит ошибку в отработке.

При программировании введение дополнительных опорных точек приводит к резкому увеличению расчетов и объема программы. Поэтому в практике детальное представление заданной траектории движения инструмента между двумя опорными точками (с выдачей команд на соответствующие перемещения по осям) осуществляется с помощью специального вычислительного устройства — элемента УЧПУ — интерполятора.

Интерполятор непрерывно, т. е. в каждый данный момент, в процессе перемещения инструмента от одной опорной точки к другой поддерживает функциональную связь между координатами опорных точек, т. е. обеспечивает отработку траектории в зависимости от вида функции.

В большинстве существующих станков перемещение инструмента по заданной траектории осуществляется приближенно, путем включения подачи попеременно то вдоль одной, то вдоль другой оси. При этом интерполятор системы управления непрерывно оценивает отклонения от заданной траектории и стремится свести эти отклонения к минимуму. Скачки ступенчатой траектории при формировании заданной незначительны.

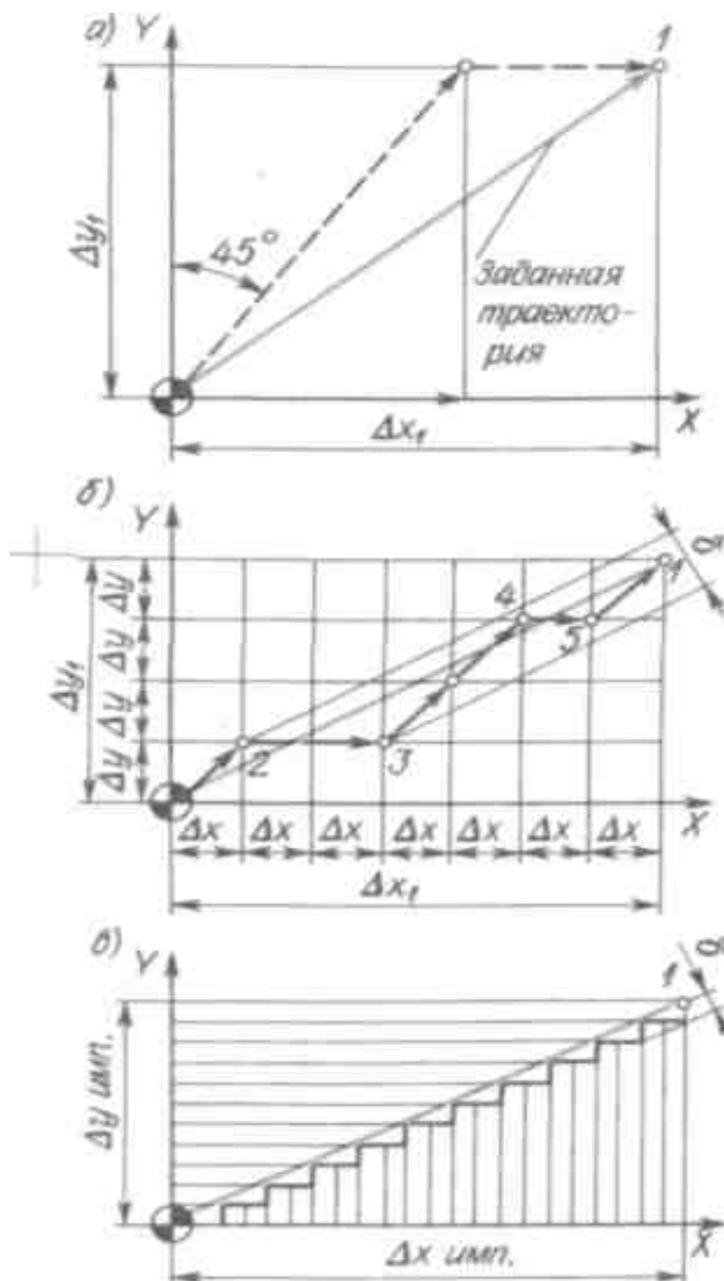


Рисунок 87 – Интерполяция траектории движения инструмента.

Например, прямая наклонная линия может формироваться попеременной подачей на приводы импульсов в такой последовательности: один импульс по оси  $Y$  и два импульса по оси  $X$  (рисунок 87). Поскольку в современных станках наиболее

часто цена импульса принимается равной 0,001 мм, то перемещение между двумя соседними опорными точками практически можно рассматривать как плавное. Интерполяция может быть также круговой, с помощью полиномов второй и высших степеней и др.

При программировании обработки кроме определения величины перемещения центра инструмента по траектории необходимо указать скорости перемещения инструмента между отдельными опорными точками, целый ряд вспомогательных технологических команд и др. Все это оформляется в виде расчетно-технологической карты (РТК) на обработку данной детали и карты кодирования программы.

В общем случае для составления УП необходимо иметь операционный эскиз детали, чертеж заготовки и РТК, дополненную таблицей координат опорных точек или расстояний между точками (приращений).

# Лекция 3. Программирование обработки на станках с ЧПУ

## Кодирование информации

Подготовленная исходная информация по обработке детали, т. е. программа, записывается на программноносителе (обычно на перфоленту) по определенной форме и состоит из набора кадров. Каждый кадр содержит геометрические и технологические данные, необходимые для обработки одного элементарного участка детали, чаще всего между двумя соседними опорными точками. Кадры состоят из слов — информации, определяющей программу работы отдельных исполнительных органов: перемещения по координатам  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , скорость подачи, работу механизмов смены инструмента и др. Каждое из слов записывается обычно на нескольких поперечных строчках перфоленты.

## Способ записи информации.

Различают два способа записи управляющей информации на перфолентах: *с постоянной и переменной длиной кадра*.

При *постоянной длине кадра* его объем остается постоянным по всей программе и занимает при записи постоянное число строк перфоленты. В постоянном кадре отводится место для записи всех слов (всех команд) вне зависимости от их повторяемости и числовых значений.

Информацию на перфоленте с постоянной длиной кадра обычно записывают при помощи двухпозиционного кода (двоичной системы счисления).

В настоящее время наиболее применима в системах ЧПУ запись *с переменной длиной кадра* как более удобная и краткая. Эта запись возможна при использовании алфавитно-цифровых кодов.

## Структура управляющей программы.

При построении УП в коде ИСО-7 бит в последовательности кадров программы записывается только та геометрическая, технологическая и вспомогательная информация, которая изменяется по отношению к предыдущему кадру. Другими словами для большинства команд, представляемых на перфоленте, действительно правило, согласно которому записанная в данном кадре команда не

повторяется в последующих кадрах и отменяется лишь другой командой из этой группы или специальной командой отмены, отменяющей все команды данной группы.

Каждая УП должна начинаться символом % — «начало программы», после которого должен стоять символ ПС — «конец кадра». (Для ряда действующих УЧПУ конец кадра в программах обозначается символом LF). Кадр с символом % не нумеруется. Нумерация кадров программы начинается с последующего кадра.

Любая группа символов, не подлежащая обработке на станке, должна быть заключена в круглые скобки. Внутри скобок не должны применяться символы ПС («начало программы») и : («главный кадр»). Например, группа символов, заключенная в скобки, может быть выведена на дисплей и служить в качестве указаний оператору.

Если необходимо обозначать УП, это обозначение должно находиться непосредственно за символом («начало программы» перед символом «конец кадра», например %012ПС, т. е. программа с условным номером двенадцать.

Управляющая программа должна заканчиваться символом «конец программы» или «конец информации». Информация, помещенная после этого символа, не должна восприниматься УЧПУ.

Таблица 23 – Значения символов адресов по ГОСТ 20999—83

Символ			Значение
X	Y	Z	Первичная длина перемещения, параллельного осям соответственно X, Y, Z
A	B	C	Угол поворота соответственно вокруг осей X, Y, Z
U	V	W	Вторичная длина перемещения, параллельного осям соответственно X, Y, Z
P	Q		Третичная длина перемещения, параллельного осям соответственно X, Y, Z
R			Перемещение на быстром ходу по оси Z или третичная длина перемещения, параллельного оси Z
G			Подготовительная функция
F	E		Первая (F) и вторая (E) функции подачи
S			Функция главного движения
N			Номер кадра
M			Вспомогательная функция
T	D		Первая (T) и вторая (D) функции инструмента
I	J	K	Параметр интерполяции или шаг резьбы параллельно осям соответственно X, Y, Z
%			Начало программы
LF(ПС)			Конец кадра

## Структура кадров управляющей программы.

К структуре кадра предъявляют определенные требования, в частности следующие.

1) Каждый кадр должен содержать слово «номер кадра». Формат лишь для некоторых УЧПУ позволяет это слово не использовать. Далее в кадре приводятся информационные слова или слово. Завершается кадр символом ПС («конец кадра»). Использование этого символа, как правило, обязательно.

При необходимости в кадре указывают символы табуляции. Их проставляют перед любым словом в кадре, кроме слова «номер кадра».

2) Информационные слова в кадре рекомендуется записывать в определенной последовательности:

– слово (или слова) «подготовительная функция»;

– слова «размерные перемещения», которые рекомендуется записывать в последовательности символов: X, Y, Z, U, V, W, P, Q, R, A, B, C;

– слова «параметр интерполяции или шаг резьбы»: I, J, K;

– слово (или слова) «функция подачи», которое относится только к определенной оси и должно следовать непосредственно за словом «размерное перемещение» по этой оси. Слово «функция подачи», относящееся к двум и более осям, должно следовать за последним словом «размерное перемещение», к которому оно относится;

– слово «функция главного движения»;

– слово (или слова) «вспомогательная функция».

3) В пределах одного кадра не должны повторяться слова «размерные перемещения» и «параметр интерполяции или шаг резьбы».

4) В пределах одного кадра не должны использоваться слова «подготовительная функция», входящие в одну группу.

Таблица 24 – Значения подготовительных функций по ГОСТ 20999—83.

Код функции	Наименование	Значение
G00	Быстрое позиционирование	
G01	Линейная интерполяция	
G02	Круговая интерполяция	Движение по часовой стрелке
G03	Круговая интерполяция	Движение против часовой стрелки
G04	Пауза	
G06	Параболическая интерполяция	
G08	Разгон	
G09	Торможение	Торможение
От G17 до G19	Выбор плоскости	
G41	Коррекция на фрезу — левая	
G42	Коррекция на фрезу — правая	
G43	Коррекция на положение инструмента — положительная	
G44	Коррекция на положение инструмента — отрицательная	

Таблица 25 – Значения подготовительных функций по ГОСТ 20999—83

Код функции	Наименование	Значение
G53	Отмена заданного смещения	
От G54 до G59	Заданное смещение нулевой точки детали относительно исходной точки станка	
G80	Отмена постоянного цикла	
От G81 до G89	Постоянные циклы	
G90	Абсолютный размер	
G91	Размер в приращениях	
G92	Установка абсолютных накопителей положения	
G93	Скорость подачи в функции, обратной времени	
G96	Постоянная скорость резания	

Указание, что число, следующее за адресом S, равно скорости резания в метрах в минуту. При этом скорость шпинделя регулируется автоматически в целях поддержания запрограммированной скорости резания.

Таблица 26 – Значения подготовительных функций по ГОСТ 20999—83

Код функции	Наименование	Значение
G97	Обороты в минуту	
G40...G59	коррекция размеров инструмента без отсчета, смещение осей	
G60...G79	вид и характер работы: точно, быстро	
G80...G89	постоянные (фиксированные) автоматические циклы	
G90...G99	особенности задания размеров, режимов обработки	

Уточненные значения команд с адресом G приводятся в конкретных руководствах по программированию для соответствующих моделей УЧПУ.

### **Запись слов в кадрах управляющей программы.**

Каждое слово в кадре УП должно содержать символ адреса (латинская прописная буква; математический знак «плюс» или «минус» 'при необходимости); последовательность цифр.

Слова в УП могут быть записаны одним из двух способов:

- без использования десятичного знака (подразумеваемое положение десятичной запятой):
- с использованием десятичного знака (явное положение десятичной запятой).

При записи слов с использованием десятичного знака те из них, в которых десятичный знак отсутствует, должны обрабатываться УЧПУ как целые числа. Незначащие нули, стоящие до и (или) после знака, могут быть опущены, например: запись X.08 означает размер 0,08 мм по оси X; X950 — размер 950,0 мм по оси X.

Например, размер оси X, равный 258,300 мм, может быть записан (в зависимости от конкретного УЧПУ) по-разному:

X00258300 — полная запись, без использования десятичного знака;

X258300 — опущены ведущие нули; здесь определение размеров ведется от младших разрядов:

X002583 — опущены последние нули; здесь определение разрядности ведется от ведущих разрядов;

X258.3 — запись с явной запятой.

**Размерные перемещения** в кадрах УП указываются или в абсолютных значениях, или в приращениях. Это и определяет использование в кадрах УП подготовительных функций G90 (абсолютный размер) или G91 — (размер в приращениях).

В УП для современных УЧПУ все линейные перемещения обычно указывают в миллиметрах и их десятичных долях.

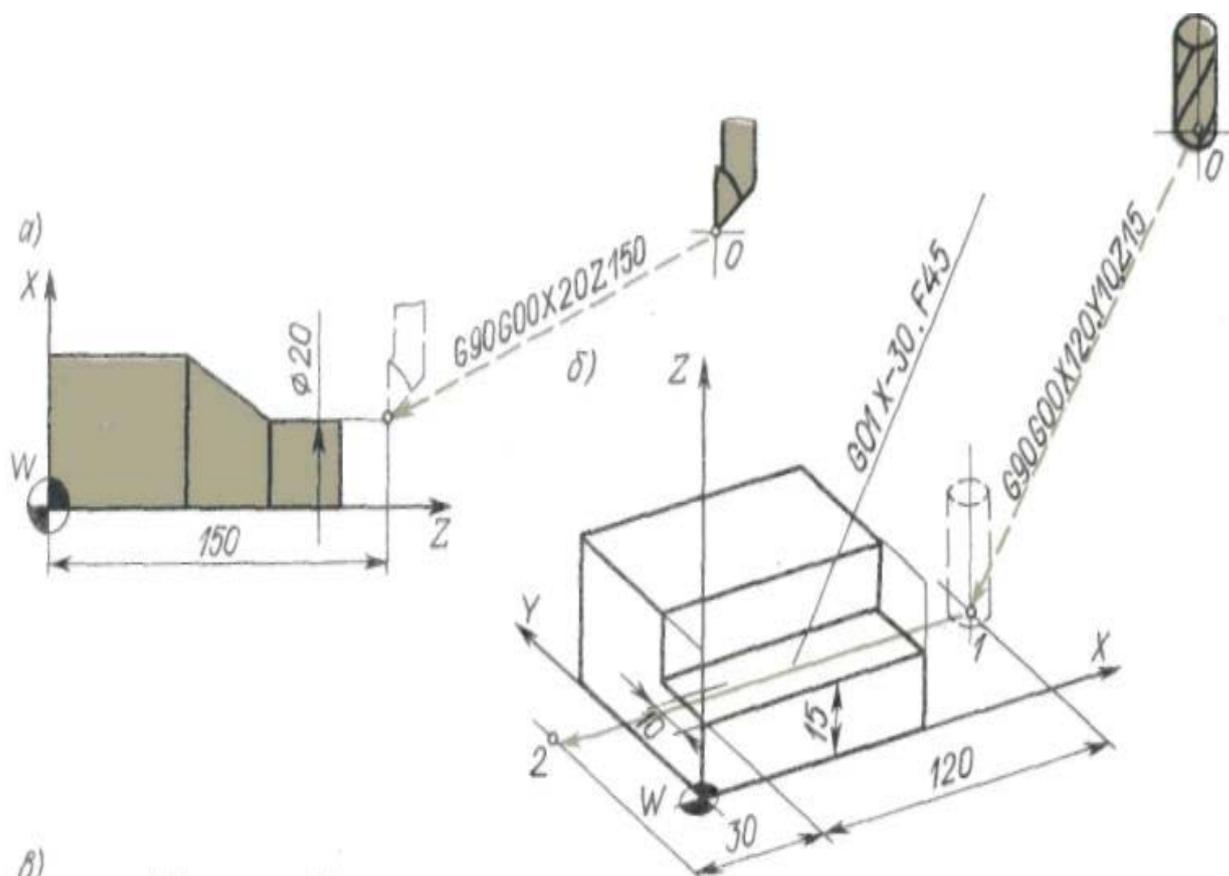


Рисунок 88 – Коды программы и траектория движения инструмента, описываемые этой программой.

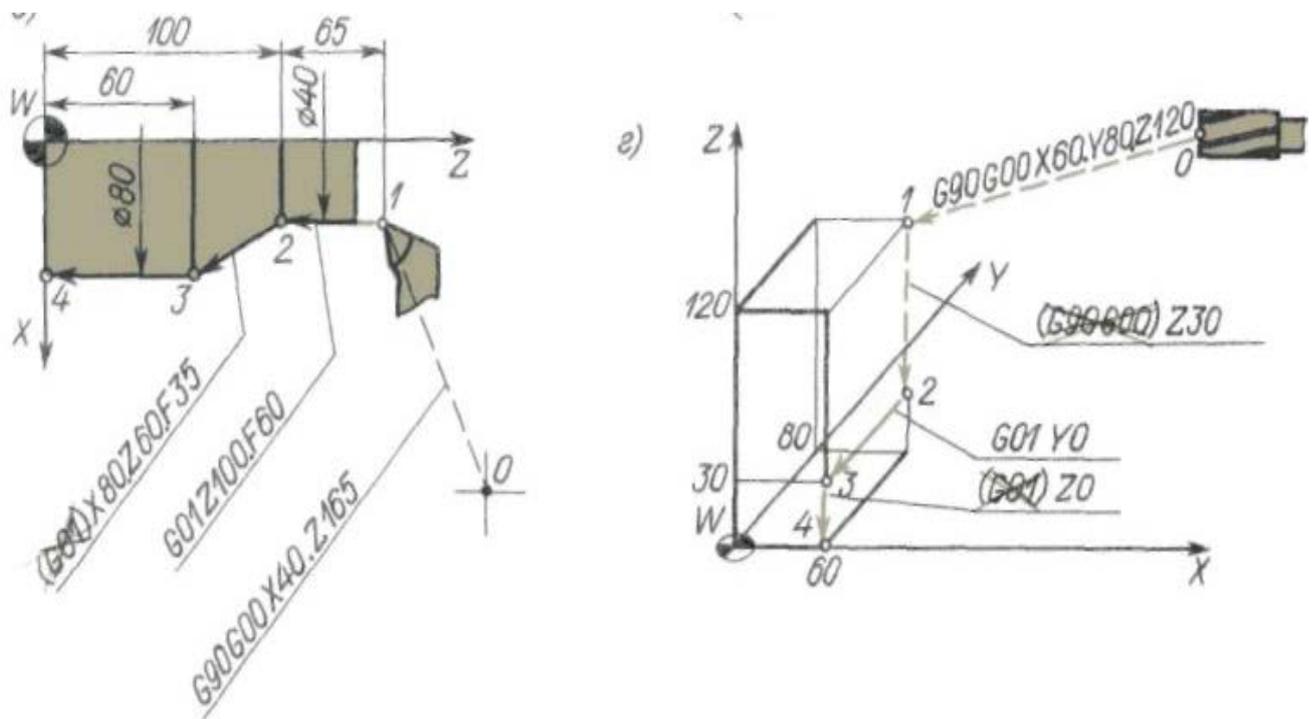


Рисунок 89 – Кадры программы и траектория движения инструмента токарного и фрезерного станка с ЧПУ.

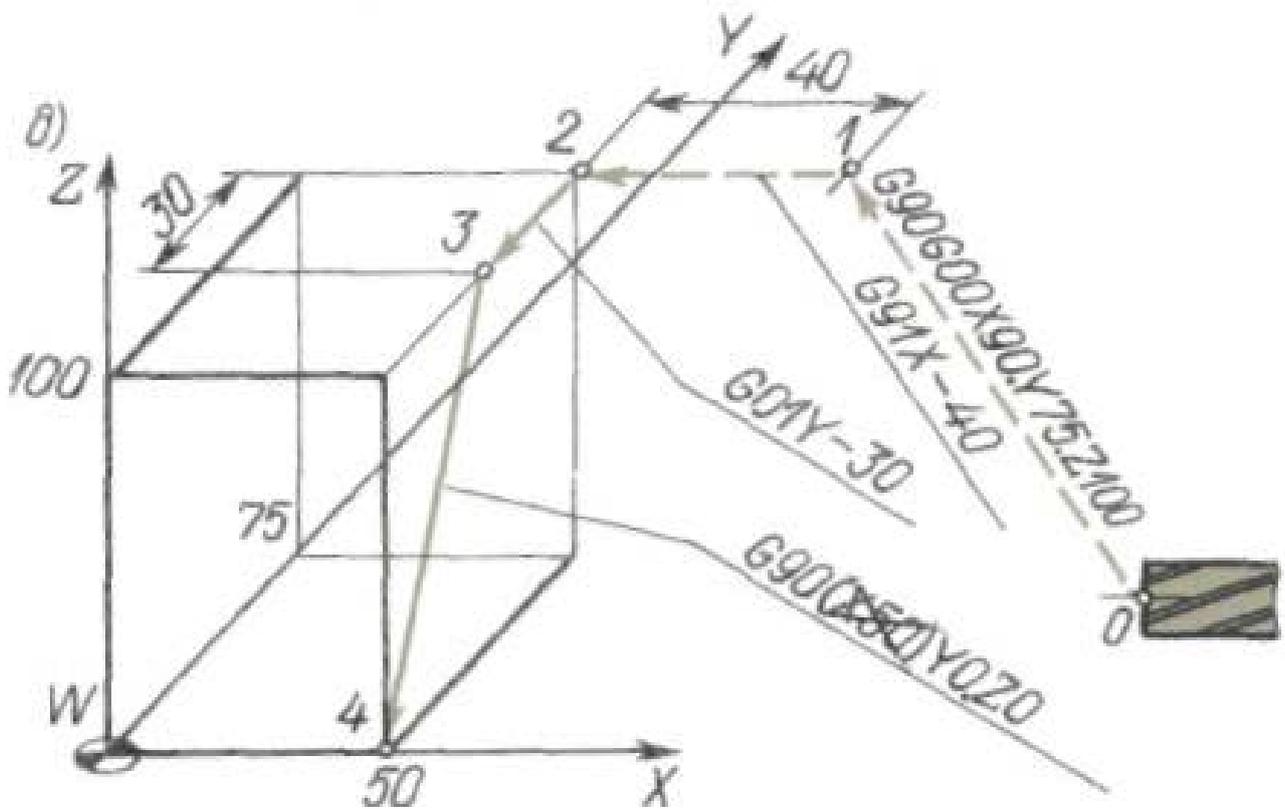


Рисунок 90 – Пример реализации программы на станке с ЧПУ.

## Лекция 4. Программирование обработки на станках с ЧПУ

Функции G02, G03 — режимы круговой интерполяции по и против часовой стрелки. Функции указываются в программах для УЧПУ, обеспечивающих круговую интерполяцию. Данные по круговой интерполяции зависят от задаваемой подготовительными функциями G17 — G19 (рисунок 91) плоскости интерполяции. Подготовительная функция G17 определяет круговую интерполяцию в плоскости XY с обозначением параметров интерполяции (координат точки) символами I и J. Подготовительные функции G18 и G19 определяют круговую интерполяцию соответственно в плоскостях XZ (параметры I, K) и YZ (параметры I, K).

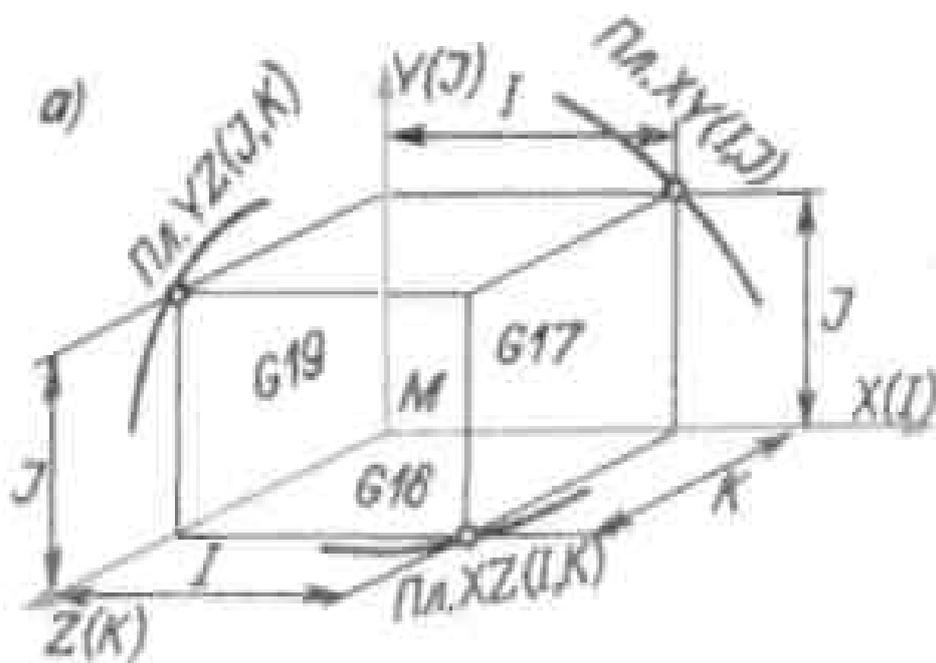


Рисунок 91 – Выбор плоскости для круговой интерполяции.

При определенных условиях (изменение направлений осей координат) значение функций G02 и G03 меняется на обратное (рисунок 92).

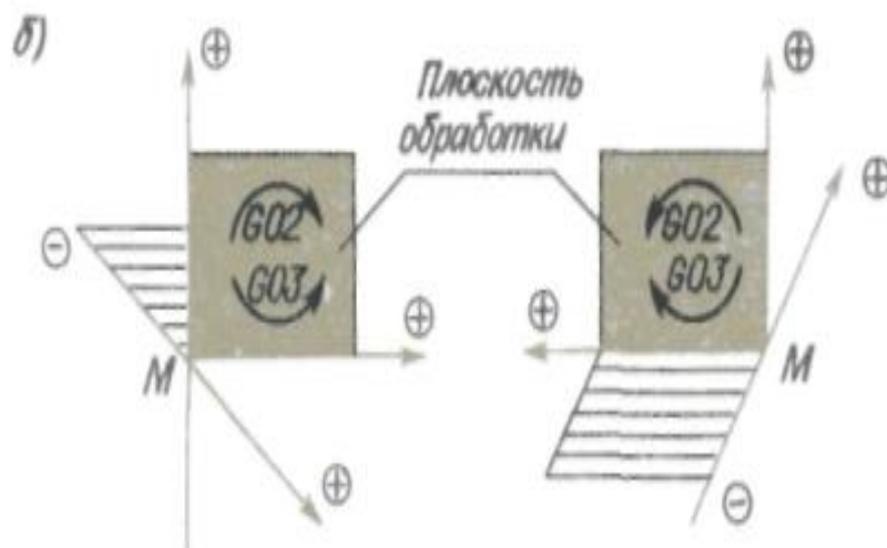


Рисунок 92 – Направление круговой интерполяции.

Траектория инструмента по дуге окружности (рисунок 93) задается у разных УЧПУ по-разному.

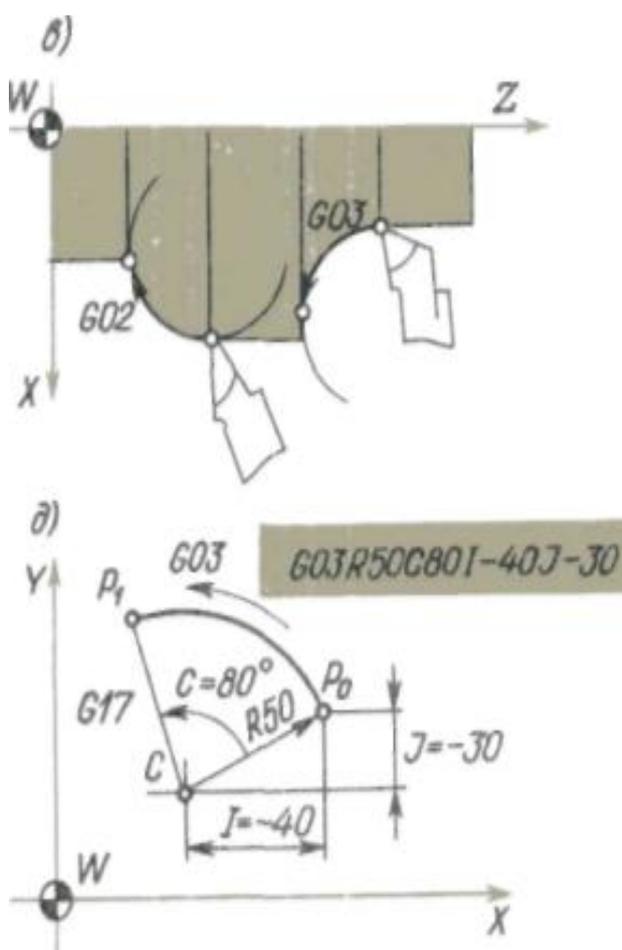


Рисунок 93 – Траектория круговой интерполяции

В общем случае дуга на плоскости (в системе координат) может быть определена следующими данными (рис. г): центром  $C$  с координатами  $x_c$  и  $y_c$ , радиусом  $R$ , начальной точкой  $P_0$  с координатами  $x_0$  и  $y_0$ , конечной точкой  $P_1$  с координатами  $x_1$  и  $y_1$ , центральным углом дуги  $\theta$  и углом  $\alpha$  между касательной к начальной точке и осью (в данном случае осью  $X$ ).

Для того чтобы однозначно определить дугу на плоскости, все эти данные приводить в программе нет необходимости. Обычно при выборе параметров, задающих интерполяцию, исходят из того, что известно положение начальной точки  $P_0$  дуги. Это естественно, поскольку приход в эту точку инструмента обусловлен предыдущими кадрами УП.

В полярной системе координат (рис. д) траектория задается функцией (G02 или G03), радиусом  $R$  и координатами центра  $C$  дуги относительно начальной точки  $P_0$ , т. е. значениями  $I, J$  (при G17) с соответствующими знаками, и углом (по адресу  $C$ ).

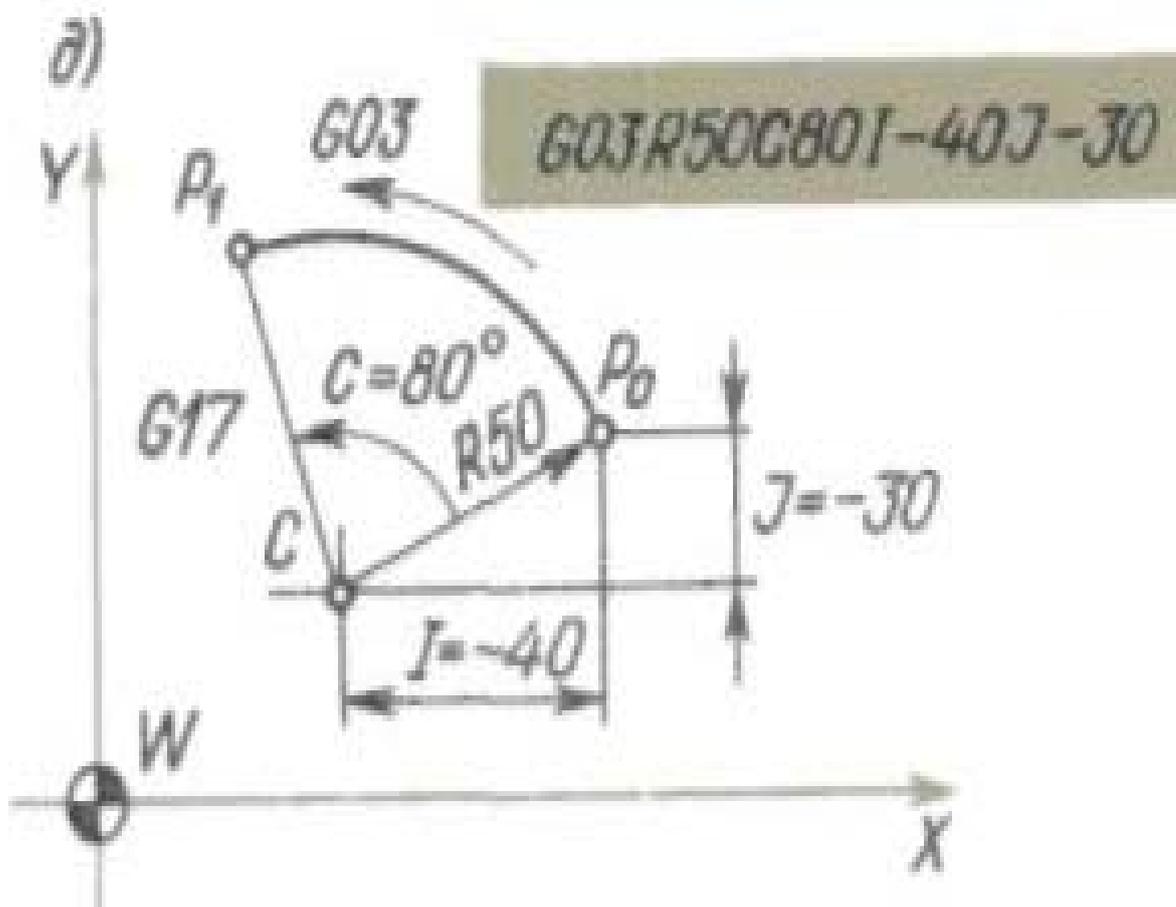


Рисунок 94 – Начало дуги относительно центра интерполяции окружности.

В прямоугольной системе координат при задании последних абсолютными размерами наиболее распространен способ задания дуги координатами конечной точки и центра дуги (рис. а). Координаты конечной точки  $P_1$  указывают с адресами  $X$  и  $Y$ , а координаты центра  $C$  дуги — с адресами  $I$  и  $J$  (для плоскости  $XOY$ ).

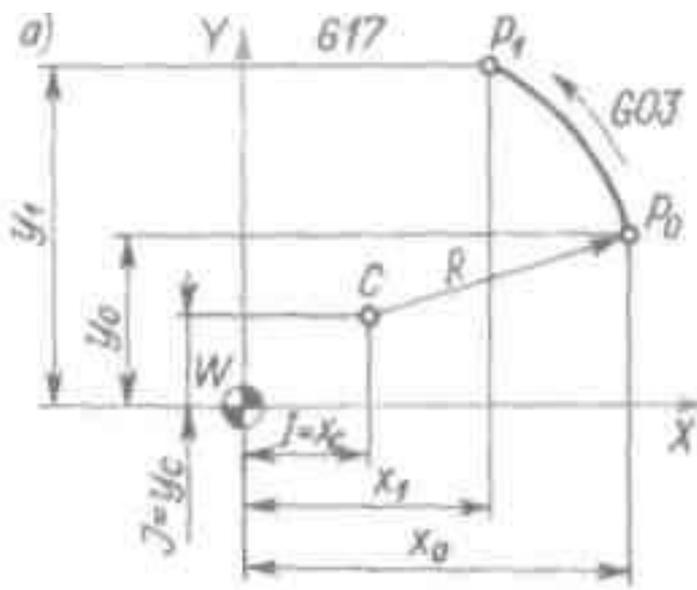


Рисунок 95 – Круговая интерполяция в абсолютных координатах.

Кадр на интерполяцию будет иметь вид:

$N\{i\} G17 G90 G03 X\{x_1\} Y\{y_1\} I\{x_c\} J\{y_c\} LF.$

При задании круговой интерполяции в приращениях для определения параметров интерполяции центр  $W'$  принятой системы координат условно размещают в центре дуги  $C$  (рисунок 96). В кадре, задающем интерполяцию, с адресами  $J$  и  $K$  (для плоскости  $YOZ$ ) задаются координаты начальной точки  $P_0$  ( $a$  и  $b$ ) в принятой условной системе координат.

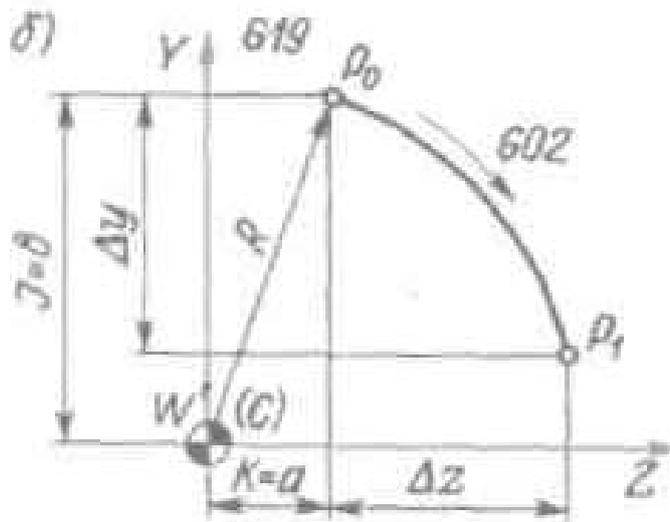


Рисунок 96 – Круговая интерполяция в приращениях.

Эти координаты определяют проекции радиуса дуги ( $R^2 = a^2 + b^2$ ). По адресам Y и Z будут записаны относительные перемещения по осям от начальной точки P<sub>0</sub> к конечной P<sub>1</sub> с учетом знаков движения относительно направления осей (для принятого примера — минус по оси Y и плюс по оси Z). Кадр, определяющий круговую интерполяцию, будет иметь вид:

N(i) G19 G91 G02 Y— {Δy} Z+{Δz} J{b} K{a}LF.

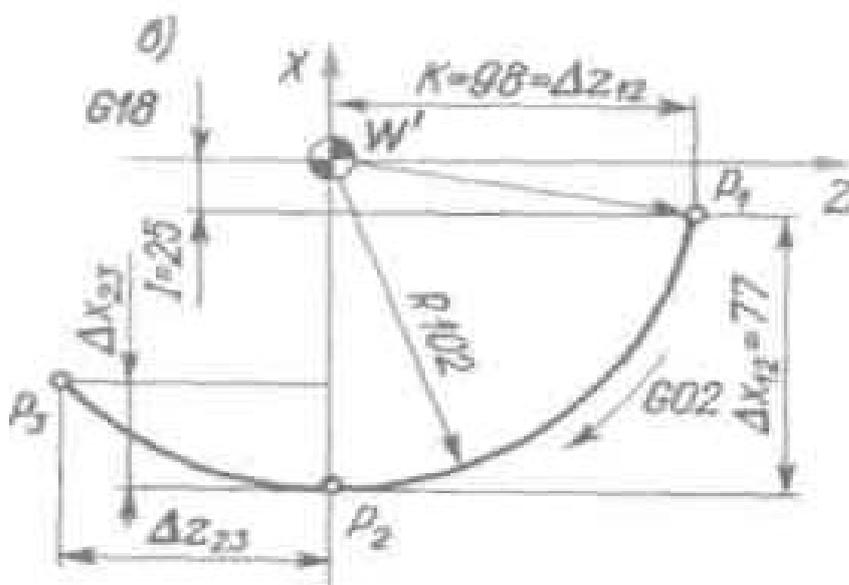


Рисунок 97 – Задание круговой интерполяции.



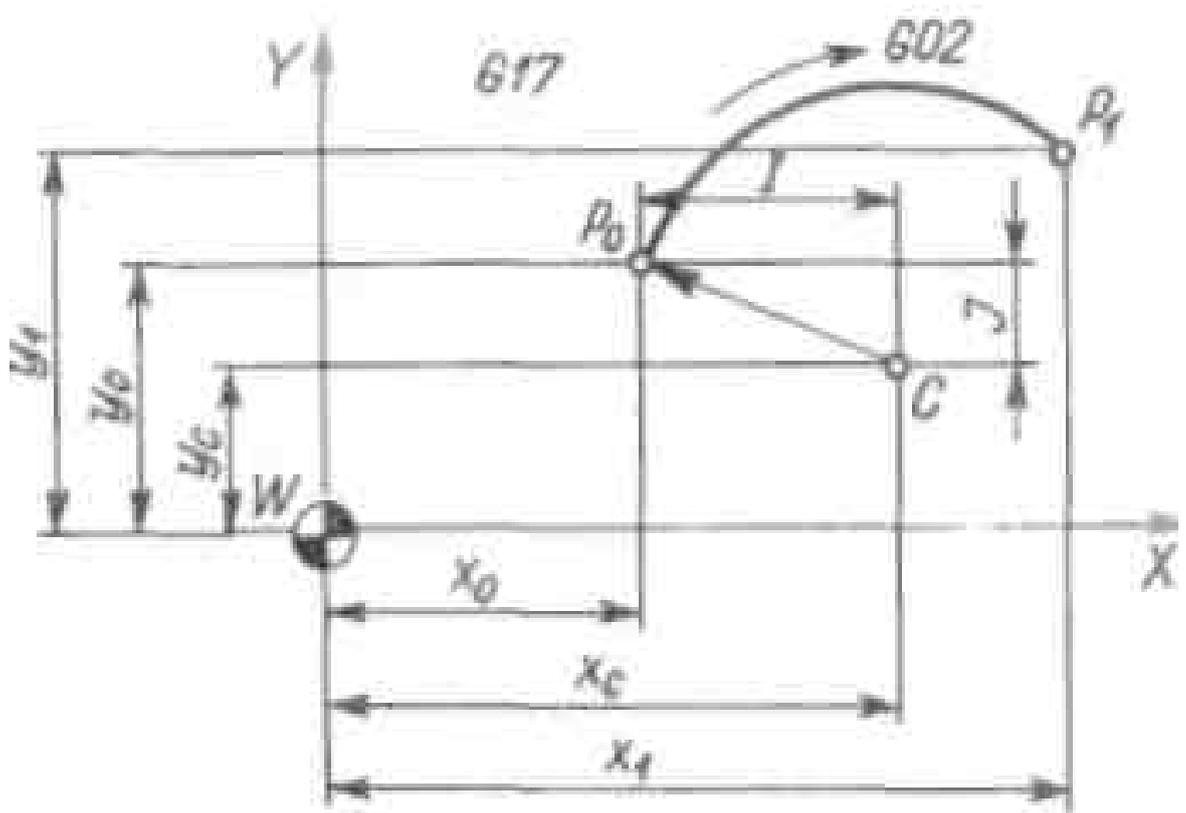


Рисунок 99 – Круговая интерполяция G17 G02.

Таблица 27

	Размеры	
	абсолютные	в приращениях
X	$x_1$	$x_1 - x_0$
Y	$y_1$	$y_1 - y_0$
I	$x_c - x_0$	$x_c - x_0$
J	$y_c - y_0$	$y_c - y_0$

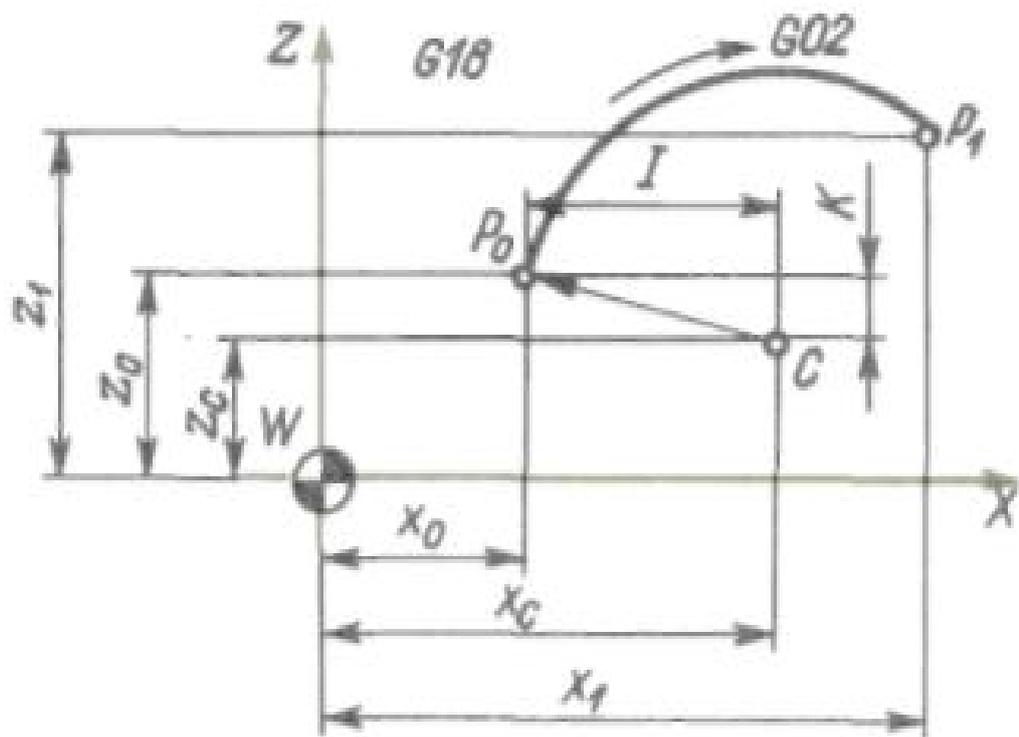


Рисунок 100 – Круговая интерполяция G18 G02.

Таблица 28

	Размеры	
	абсолютные	в приращениях
X	$x_1$	$x_1 - x_0$
Y	$z_1$	$z_1 - z_0$
I	$x_c - x_0$	$x_c - x_0$
J	$z_c - z_0$	$z_c - z_0$

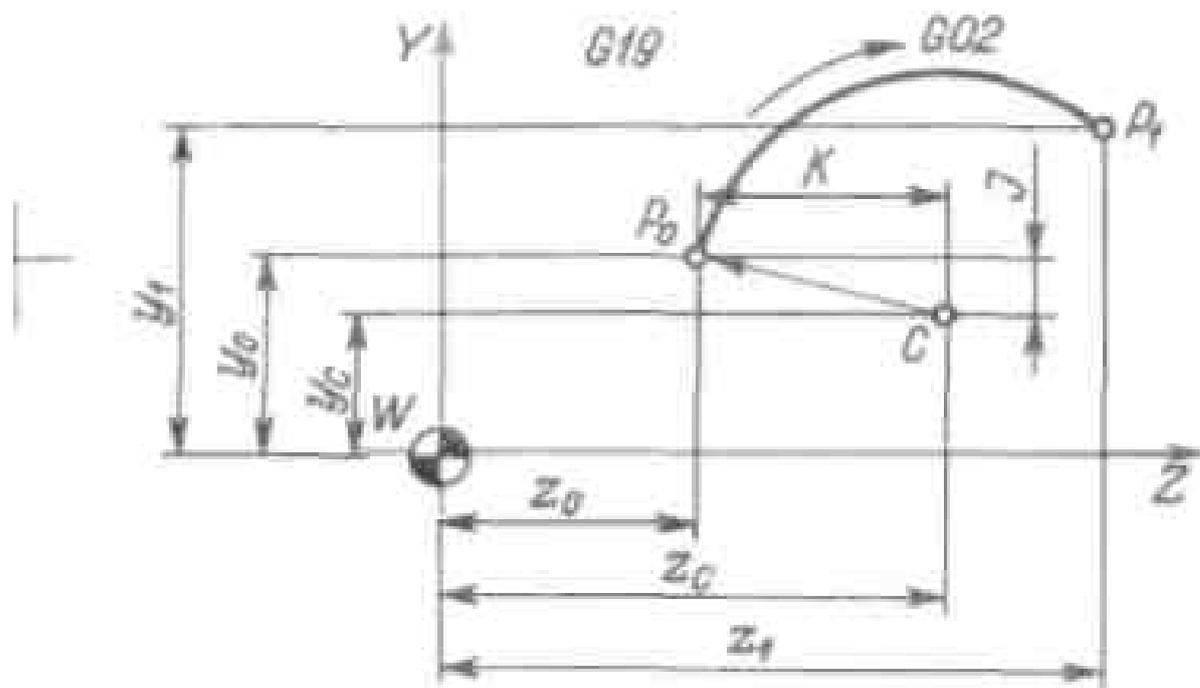


Рисунок 101 – Круговая интерполяция G19 G02.

Таблица 29

	Размеры	
	абсолютные	в приращениях
X	$z_1$	$z_1 - z_0$
Y	$y_1$	$y_1 - y_0$
I	$z_c - z_0$	$z_c - z_0$
J	$y_c - y_0$	$y_c - y_0$

Однако несмотря на разнообразие способов задания параметров интерполяции все они сводятся к единой общей расчетной схеме, обеспечивающей определение радиуса дуги (если он не задан) по заданным элементам I, J, K

**Вспомогательные и другие функции.** Подача и скорость шпинделя с адресами F и S задаются в различных УЧПУ по-разному. Достаточно распространен способ задания с использованием кодовых таблиц, в которых двузначными цифрами закодированы подача и скорости шпинделя данного станка. В современных станках с ЧПУ эти величины обычно задаются действительными числовыми значениями в мм/мин, мм/об. и об/мин.

Адрес инструмента T с двузначным числом определяет код инструмента в многоинструментальных станках, а в ряде случаев и номер связанного с инструментом корректора. В ряде станков задание команды на инструмент

предшествует команде на его замену (M06). Вспомогательные команды, задаваемые с адресом M, достаточно многочисленны.

### **Код функции и наименование**

#### **M00 Программируемый останов**

Останов без потери информации по окончании отработки соответствующего кадра. После выполнения команд происходит останов шпинделя, охлаждения, подачи. Работа по программе возобновляется нажатием кнопки.

#### **M01 Останов с подтверждением**

Функция аналогична M00, но выполняется только при предварительном подтверждении с пульта управления

#### **M02 Конец программы**

Указывает на завершение отработки УП и приводит к останову шпинделя, подачи и выключению охлаждения после выполнения всех команд в кадре. Используется для приведения в исходное состояние УЧПУ и (или) исполнительных органов станка

#### **M03 Вращение шпинделя по часовой стрелке**

Включает шпиндель в направлении, при котором винт с правой нарезкой, закрепленный в шпинделе, входит в заготовку

#### **M04 Вращение шпинделя против часовой стрелки**

Включает шпиндель в направлении, при котором винт с правой нарезкой, закрепленный в шпинделе, выходит из заготовки

#### **M05 Останов шпинделя**

Останов шпинделя наиболее эффективным способом. Выключение охлаждения

#### **M06 Смена инструмента**

Команда на смену инструмента вручную или автоматически (без поиска инструмента). Может автоматически отключать шпиндель и охлаждение

#### **M07 Включение охлаждения № 2**

Включение охлаждения № 2 (например, масляным туманом)

#### **M08 Включение охлаждения № 1**

Включение охлаждения № 1 (например, жидкостью)

#### **M09 Отключение охлаждения**

Отменяет M07, M08

#### **M10 Зажим**

Относится к работе с зажимным приспособлением подвижных органов станка

#### **M11 Разжим**

То же

#### **M17 Конец подпрограммы**

#### **M19 Останов шпинделя в заданной позиции**

Вызывает останов шпинделя при достижении им определенного углового положения

### **M30 Конец информации**

Приводит к останову шпинделя, подачи и выключению охлаждения после выполнения всех команд в данном кадре. Используется для установки в исходное состояние УЧПУ и (или) исполнительных органов станка. Установка в исходное положение УЧПУ включает в себя возврат к символу «начало программы»

### **M49 Отмена ручной коррекции**

Функция, указывающая на отмену ручной коррекции скорости подачи и (или) скорости главного движения и о возвращении этих параметров к запрограммированным значениям

### **M59 Постоянная скорость шпиндели**

Поддержание постоянным текущего значения скорости шпинделя независимо от перемещения исполнительных органов станка и задействованной функции G96

При кодировании информации следует иметь в виду, что в УЧПУ в исходном (начальном) состоянии установлены определенные значения подготовительных функций. Эти функции не следует программировать. Их вводят (указывают) в программу лишь в том случае, если по ходу программы были запрограммированы другие функции, отменяющие действие исходных. Например, во многих УЧПУ исходной (введенной в УЧПУ) является функция G17 (плоскость интерполяции XY), G91 (размеры в приращениях) или G90 (абсолютные размеры).

## **Подпрограммы**

Подлежащие многократному повторению одинаковые по последовательности режимы перемещения, а также функциональные процессы могут вводиться в виде подпрограмм и в произвольной форме вызываться вручную или в программе обработки деталей.

## Лекция 5. Программирование обработки на станках с ЧПУ

### Подпрограммы

Подлежащие многократному повторению одинаковые по последовательности режимы перемещения, а также функциональные процессы могут вводиться в виде подпрограмм и в произвольной форме вызываться вручную или в программе обработки деталей.

Определение подпрограммы осуществляется 2-х или 3-х декадным номером подпрограммы с последующими двумя нулями.

Таблица 30

L 41200	LF	Подпрограмма 412 всегда без номера записи и M17. Определение условий перемещения, путь перемещения, направление и скорость.
NO G91 G01 Z-10, F100	LF	
N5 Z... X 10	LF	
.....	LF	
N10 X...	LF	конец программы с M17 находится в последней записи подпрограммы
N15 M17	LF	

– Вызов подпрограммы осуществляется в программе обработки деталей или в подпрограмме с помощью адреса L. Возможно трехкратное вложение подпрограмм в программе обработки деталей.

– Номер подпрограммы должен быть 2-Х ИЛИ 3-Х декадным (001...999).

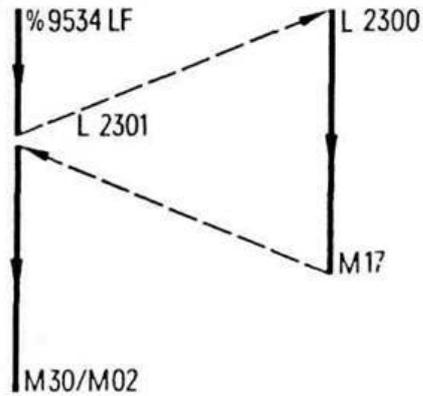
–Вызов 3-х или 5-ти декадный.

– Количество пропусков должно вводиться двухдекадным. Отсутствие ввода обозначает одноразовый пропуск.

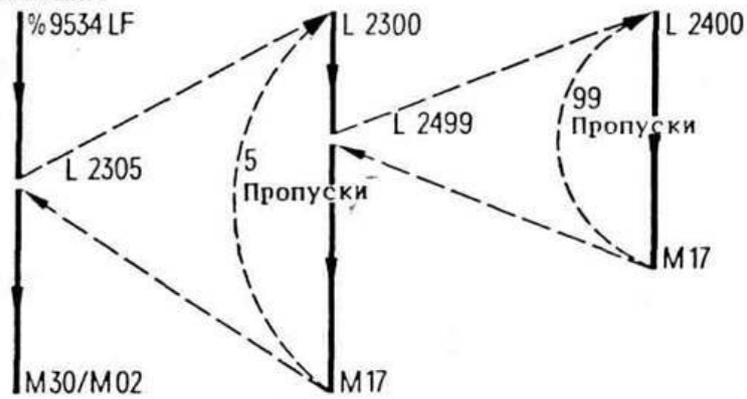
– Вызов подпрограммы не должен находиться в одной из записей с параметрами M02, M30 или M17.

Программа обработки деталей % 9534 LF	Подпрограмма L 2300	Подпрограмма L 2400	Подпрограмма L 2500
---	------------------------	------------------------	------------------------

Одинарное вложение



Двойное вложение



Тройное вложение

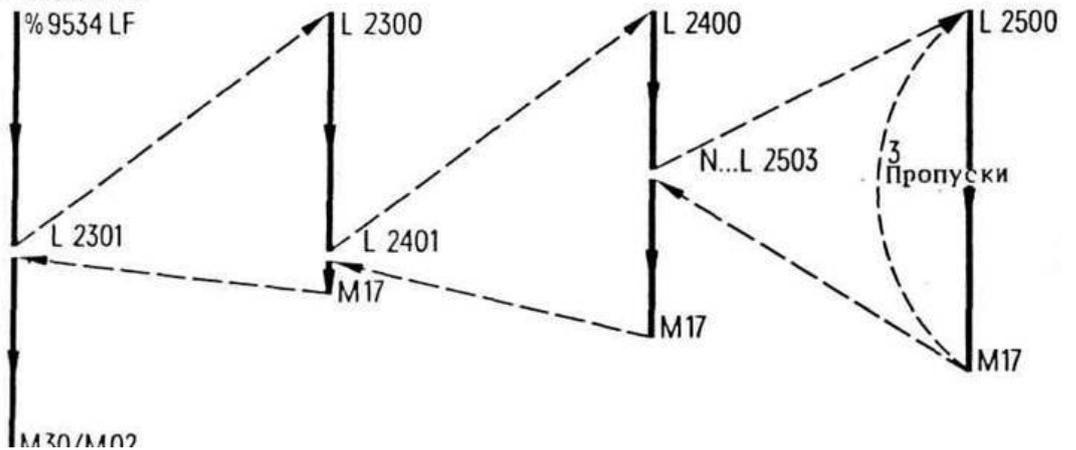


Рисунок 102 – Структура подпрограммы.

## Вложения подпрограмм

**% 4011 LF – программа обработки деталей**

**N1 G90 G94 F35. S450 T1501 LF**

**N2 G00 X52. Z60. LF**

**N3 L2301 LF – вызов подпрограммы 23, разовый проход (L2301)**

**N90 M30 LF**

**L2300 – подпрограмма 23**

**N1 G91 G01 X-11.LF**

**N2 G00 X11. LF**

**N3 L2402 – вызов подпрограммы 24, два прохода (L2402)**

**N4 M17 LF – конец подпрограммы**

**L2400 – подпрограмма 24**

**N1 G91 G00 Z5. LF**

**N2 G01 X-16. LF**

**N3 G00 X 16. LF**

**N4 M17 LF –конец подпрограммы**

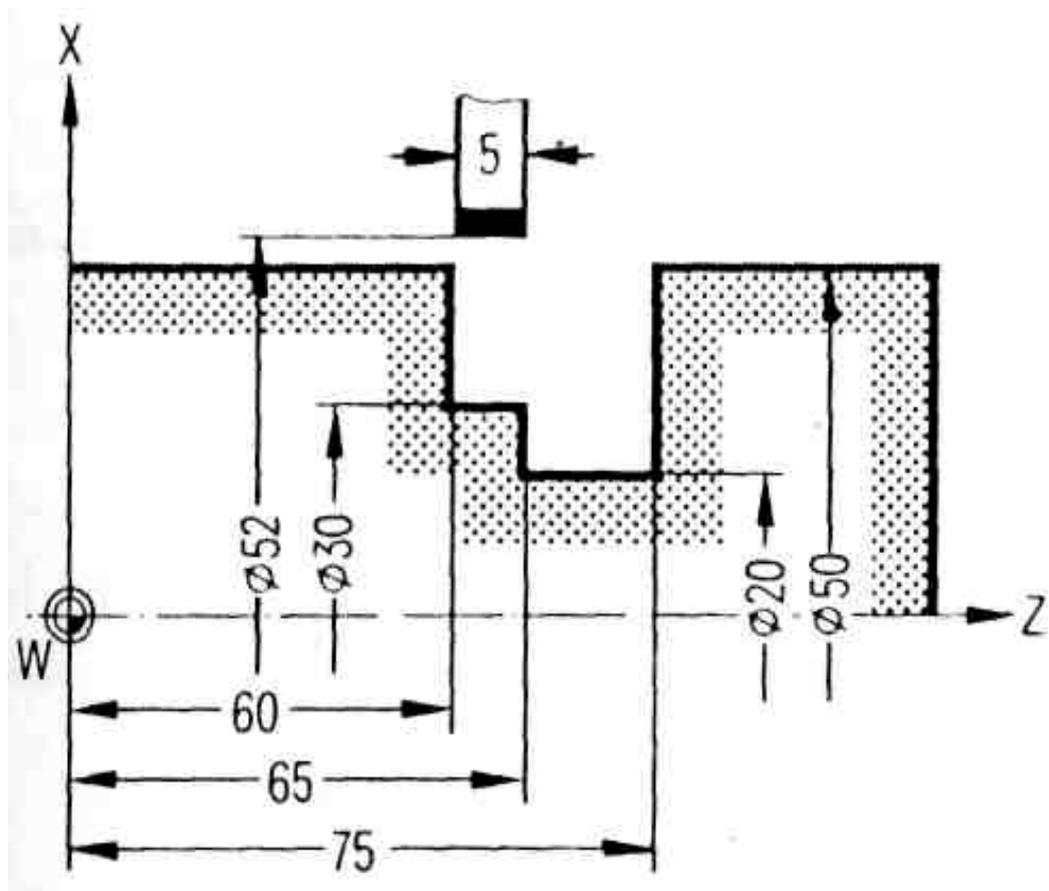


Рисунок 103 – Пример реализации подпрограммы.

### **G04 Время выдержки**

Длительность выдержки задается под адресом X. Диапазон времени выдержки находится в интервале: 0.001 и 99999.999 сек.

В пределах одной записи с указанием времени выдержки кроме функции G04 не должно содержаться других функций.

Пример:

N.. G04 X11.5 LF

X11.5 время выдержки 11,5 с всегда регистрируется без символа

Времена выдержки требуются при **СВОБОДНОМ** резании, при возможном изменении скорости вращения и коммутационных функциях станка (люнет, задняя бабка и т.д.).

G04 Эффективно в соответствующей записи.

### **G94/G95/G96 Подача F**

Подача F может программироваться в мм/мин или в **ММ/ОБ.**

Запрограммированная скорость выдерживается также при коррекции радиуса резца по траектории точки резки "P" (предполагаемое острие инструмента).

Выключателем коррекции подачи на панели управления можно изменять запрограммированную подачу от 1 % до 120 %.

100%-ая позиция соответствует запрограммированному значению. При нарезании резьбы отпадает ввод подачи, выключатель коррекции подач не действует.

Пример:

N5... G94 G10. LF

G94 G94 подача F в (мм/мин)

G95 подача F в (ММ/ОБ.)

G96 подача F в (ММ/ОБ.) И постоянная скорость захода S в (м / мин )

F10. Величина подачи LF

Зависимость скорости вращения подачи по отношению к скорости вращения шпинделя и предельные значения приводятся в диаграмме "Предельные данные скорости вращения подачи"

### **T - слово команда инструмента**

Команда инструмента определяет необходимый инструмент (номер инструмента) для данного этапа обработки и какие данные инструмента действительны (номер коррекции инструмента) .

T 12 16

T Адрес команды инструмента

12 Номер инструмента 00 .. 99 (1 до 2-х декад)

16 Номер коррекции инструмента

Номер коррекции инструмента

Под номером коррекции инструмента отложены данные инструмента. В общей сложности это корректурные значения на 16 инструментов, откладываемых в памяти.

#### Коррекция инструмента:

Каждое из 16 D коррекций инструментов (T01...T16) состоит из:

X... коррекция длины инструмента оси-X

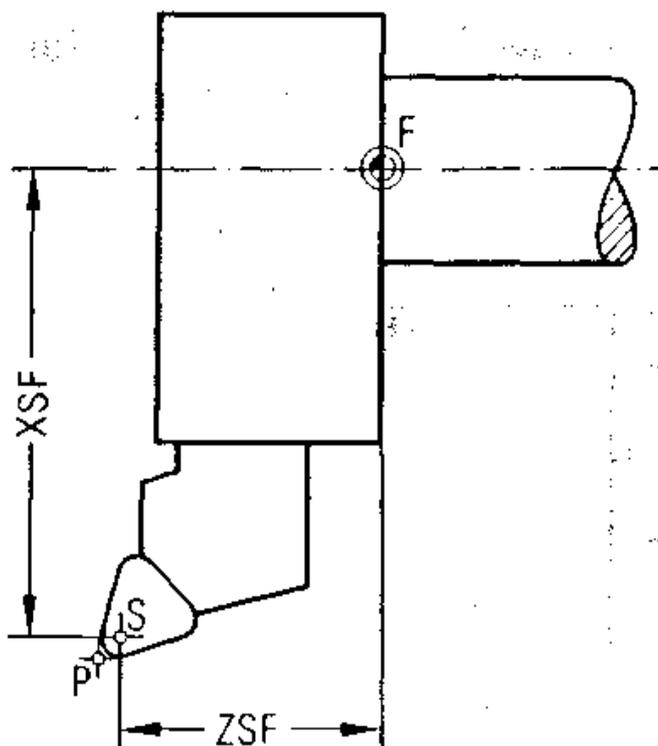
Z... коррекция длины инструмента оси-Z

B... радиус резки

A... позиция точки резки инструмента

#### Коррекция инструмента без применения функции SRK

Эффективная коррекция инструмента рассчитывается из суммы коррекции длины инструмента и возможно существующей внешней аддитивной коррекции длины инструмента. Сумма соответствует размеру XSF или ZSF.



P теор. острое резца; S средняя точка радиуса резца; F опорная точка салазки

Рисунок 104 – Программируется траектория средней точки радиуса резца S.  
Коррекция длины относительно к средней точке радиуса резца.

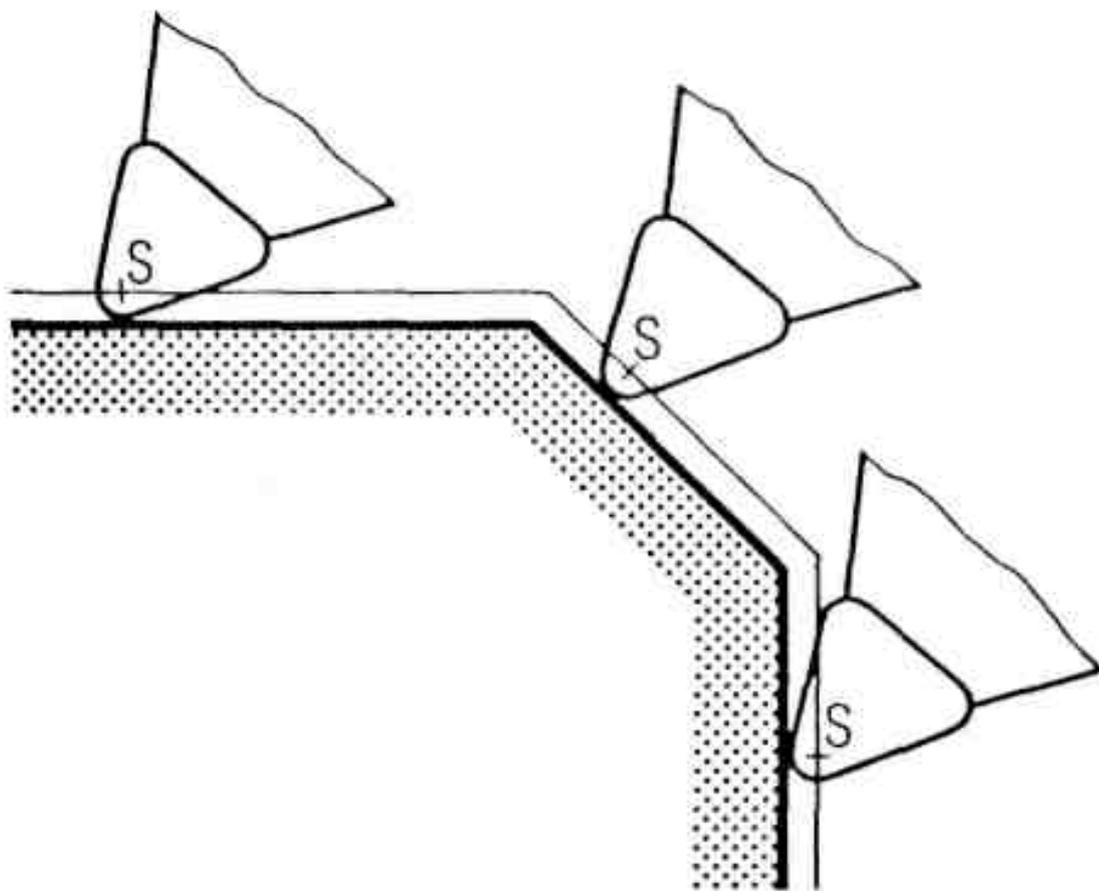
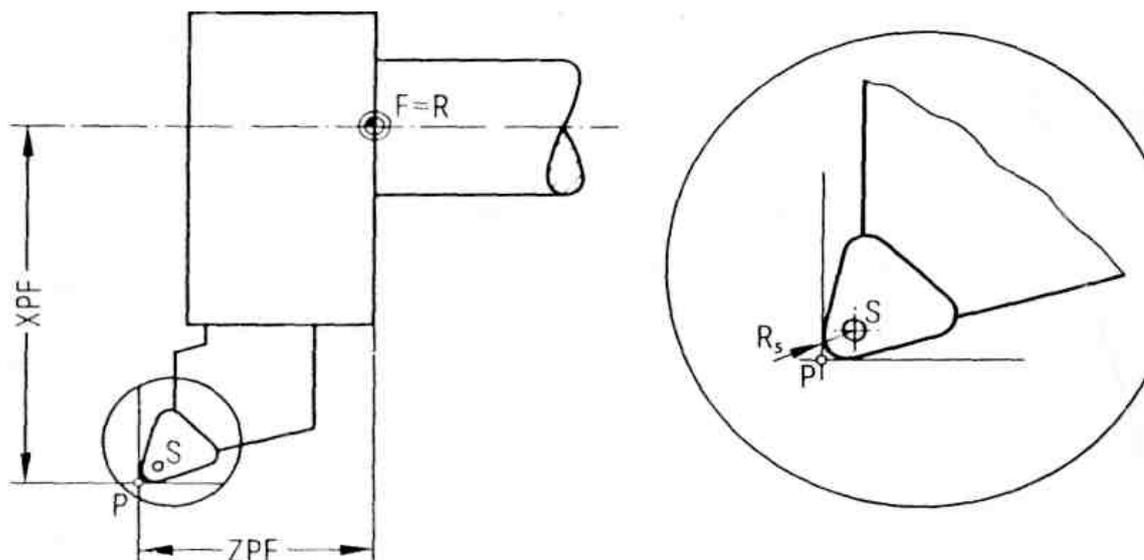


Рисунок 105 – Траектория средней точки радиуса резца. Контур заготовки.

### **Коррекция инструмента с применением компенсации радиуса резца**

При функции SRK можно программировать контур заготовки. Вводимая коррекция длины вводится относительно точки резки "P". Дополнительно к этому должен вводиться радиус резца и позиция точки резки. После этого система управления рассчитывает соответствующую траекторию, **ОШИБКИ** контура не возникает.

Коррекция радиуса резца эффективна в конце записи, где она отзывается (G41, G42), т.е. последующая запись истекает правильно.



P теоретическое острие резца; S средняя точка радиуса резца;  $R_s$  радиус резца; F опорная точка салазки

Рисунок 106 – Коррекция кромки резца.

### **Коррекция инструмента с применением компенсации радиуса резца**

При функции SRK можно программировать контур заготовки. Вводимая коррекция длины вводится относительно точки резки "P". Дополнительно к этому должен вводиться радиус резца и позиция точки резки. После этого система управления рассчитывает соответствующую траекторию, **ОШИБКИ** контура не возникает.

Коррекция радиуса резца эффективна в конце записи, где она отзывается (G41, G42), т.е. последующая запись истекает правильно.

## Литература

1. Баничук Н. В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986., 302с.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: М.:Мир, 1985.— 509с.
3. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. М.:Мир, 1986. – 349с., 320с.
4. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. – М.:Наука, 1982. – 432 с.
5. Аттетков А., Галкин С., Зарубин В. Методы оптимизации. – М.:МГТУ им. Н.Баумана, 2003. – 440с.
6. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем.- Мн.:ДизайнПРО, 1997.- 640с.
7. Советов Б.Я, Яковлев С.А. Моделирование систем.-М.:Высшая школа, 2001. – 343с.
8. CALS – в авиастроении / Под ред.А.Г.Братухина.-М.:Изд-во МАИ, 2000.- 304с.
9. Шпур Г., Краузе Ф. Автоматизированное проектирование в машиностроении.- М.: Машиностроение, 1988.- 648с.
10. Автоматизация технологической подготовки производства/Гырдымов Г.П. и др. – Л.: Машиностроение, 1990.- 350с.

Учебное издание

Корольков Владимир Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
САМОЛЕТОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА:  
КУРС ЛЕКЦИЙ

Часть 1

В авторской редакции

Подписано к изданию 22.12.2021.

Уч.-изд. л. 18,0 .

ФГБОУВПО «Воронежский государственный технический  
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14