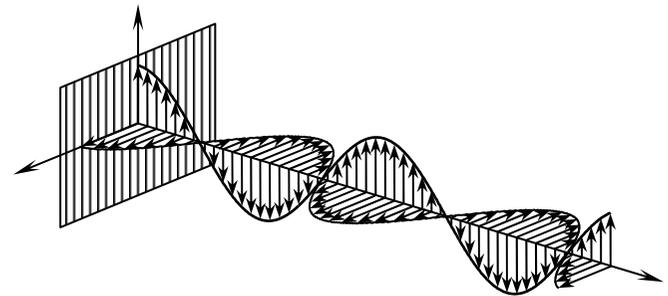


В.И. Юдин, А.В. Останков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ.

**Часть 1. ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНЫХ
И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие



**Воронеж
2007**

Юдин В.И., Останков А.В. "Электромагнитные поля и волны. Часть 1. Волны в безграничных и полубесконечных средах"

Международный институт компьютерных
технологий
ГОУВПО "Воронежский государственный
технический университет"

В.И. Юдин, А.В. Останков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ.
Часть 1. ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНЫХ
И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ

Рекомендовано редакционно-издательским советом
института в качестве учебного пособия

Воронеж
2007

УДК 621.37

Рецензенты:

канд. техн. наук, доц. А.И. Климов,
канд. техн. наук, доц. Р.Н. Андреев.

Юдин В.И., Останков А.В.

Электромагнитные поля и волны. Часть 1. Волны в безграничных и полубесконечных средах: учеб. пособие / В.И. Юдин, А.В. Останков; под общ. ред. В.И. Юдина. – Воронеж: Междунар. ин-т компьют. технологий, 2007. – 182 с.

В учебном пособии кратко изложены математические и физические основы теории электромагнитного поля. На базе уравнений Максвелла рассмотрены вопросы излучения электромагнитных волн в свободном пространстве. Анализируются особенности распространения электромагнитных волн в изотропных и анизотропных средах, в пассивных, активных, нелинейных средах, а также поведение волн на границе раздела сред. Предназначено для студентов радиотехнических специальностей, специальности связи высших технических учебных заведений очной, очно-заочной и заочной форм обучения, изучающих дисциплины "Электромагнитные поля и волны", "Электродинамика и распространение радиоволн" и другие родственные с ними.

Ил. 86. Библиогр.: 9 назв.

- © Юдин В.И., Останков А.В., 2007
- © Международный институт компьютерных технологий, 2007
- © ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2007

ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика – это учение об изменении в пространстве и во времени электромагнитных полей при их распространении в различных средах и взаимодействии с материальными объектами. Техническая электродинамика, читаемая студентам радиотехнической специальности 210302 в рамках дисциплины "Электродинамика и распространение радиоволн", является частью классической (неквантовой) теории электромагнитного поля, включающей преимущественно вопросы практического применения электромагнитных колебаний и волн в радиоэлектронной технике.

Электродинамика является фундаментальной наукой. Всякая фундаментальная теория в физике строится либо на постулатах, подсказанных автору его интуицией, воображением, собственной моделью объекта исследования, либо на фактах, добытых корректно поставленными опытами. Основоположник современной электродинамики – выдающийся английский физик-теоретик Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) опирался на экспериментальные данные, накопленные до него многочисленными исследователями электрических и магнитных явлений. В то же время он выдвинул, когда этого потребовала логика анализа, смелую гипотезу о существовании в природе неизвестного ранее "тока смещения", придавшего знаменитым уравнениям Максвелла замечательную физическую полноту и математическую изящность. К уравнениям Максвелла в полной мере применимо утверждение: истинное в природе описывается скупыми математическими средствами. Двумя уравнениями Максвеллу удалось описать весь необозримый круг электромагнитных явлений в природе. Трудно поверить, что неисчислимы конкретные действия электричества и магнетизма вокруг нас, разнообразные технические их приложения полностью и строго описываются уравнениями Максвелла. В максвелловской теории заложен глубокий физический смысл, она оказала сильное воздействие на всю философию естество-

знания. Законам классической электродинамики подчиняется громадное разнообразие явлений природы. Коротко говоря, эти законы позволяют количественно точно рассчитать силы, действующие со стороны электрических и магнитных полей на любые заряды и токи. Электромагнитные силы среди известных науке четырех фундаментальных сил, которыми "удерживается Мир" (гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия), выделяется своим особым положением. Вся корпускулярная материя Вселенной складывается из атомов. Атомы собраны из электрически заряженных частиц. Поэтому электромагнитные силы скрепляют и делают устойчивыми атомы любого вещества. Они же определяют химические связи между атомами в молекулах. Действием электромагнитных сил объясняется строение и свойства жидких и твердых сред. Электромагнитное взаимодействие между несущими заряд телами и микрочастицами вещества значительно интенсивнее слабого взаимодействия, не говоря уж о гравитационном. Оно уступает только сильному взаимодействию, влияние которого, однако, ограничено чрезвычайно малыми по протяженности областями пространства внутри атомных ядер, в то время как радиус электромагнитных сил бесконечен. Поистине, Мир распался бы, если бы в Природе не существовало электромагнитных сил!

Со времен Максвелла в физику прочно вошло понятие электромагнитного поля – носителя энергии и материальной причины взаимосвязи всех подвижных и неподвижных электрических зарядов и заряженных тел. Две любые электрически заряженные частицы (тела), разнесенные на какое угодно расстояние, "чувствуют" друг друга только потому, что все пространство между ними заполнено их собственным электромагнитным полем, которое тотчас переходит в волнообразное колебание и движение при малейшем изменении взаимного расположения частиц. Посылая во все стороны волны, заряженные частицы и токи "сообщают" друг другу о своем движении и, таким образом, вступают во взаимодействие. Существование

волн электромагнитного поля экспериментально доказал Г. Герц (1887 г.). Приоритет практического использования электромагнитных волн для целей беспроводной связи принадлежит нашему соотечественнику А.С. Попову (1895 г.). Советский ученый-инженер П.К. Ощепков первым (1934 г.) использовал электромагнитные волны для радиолокации удаленных объектов.

Современное естествознание наделяет электромагнитное поле следующими свойствами. Электромагнитное поле – это объективная реальность, одна из форм существования материи (континуальная материя). Энергия электромагнитного поля может превращаться в другие виды (например, в тепловую, механическую) при точном выполнении закона сохранения энергии. Со стороны малых значений энергия поля (на фиксированной частоте волн) ограничена минимальной порцией – квантом. Энергия поля заданной частоты может увеличиваться и уменьшаться только на целое число квантов. Электромагнитному полю присущ корпускулярно-волновой дуализм: сочетание волновых свойств (непрерывности, континуальности) с корпускулярными (дискретными) свойствами.

Наряду с энергией поле обладает массой и импульсом. Поэтому электромагнитное поле подвержено действию гравитационных сил. С другой стороны, всякое тело, оказавшееся в электромагнитном поле, испытывает его давление. На токи и электрически заряженные тела поле оказывает прямое силовое воздействие. Электромагнитное поле стремится занять все окружающее пространство. Перемещение поля из одного участка пространства в другое происходит волнообразно. Волны электромагнитного поля движутся со скоростью света.

В технической электродинамике при анализе вопросов взаимодействия электромагнитных волн с материальными объектами считается, что составляющие их среды являются "сплошными". Указанное допущение справедливо, если в объеме λ^3 (λ – длина волны электромагнитного поля) число частиц среды (атомов, молекул, свободных электронов и ионов) значительно превышает единицу. В этом случае эффекты вза-

взаимодействия волн с объектами (отражение, преломление и др.) являются результатом одновременного коллективного участия в колебательном движении, вызванном волной, громадного числа микрочастиц среды. Отпадает необходимость углубляться в тонкие физические детали взаимодействия поля и вещества с каждым атомом и молекулой. Реакция вещества на возбужденное в нем электромагнитное поле учитывается введением таких интегральных параметров "сплошной" среды, как диэлектрическая и магнитная проницаемости, проводимость, показатель преломления, плотности зарядов и токов.

Приближение "сплошной" среды справедливо на всем технически освоенном участке электромагнитного спектра вплоть до волн оптического диапазона. На очень высоких частотах, когда величина одного кванта энергии поля становится большой, законы классической (следовательно, и технической) электродинамики теряют силу и должны быть заменены законами квантовой электродинамики.

Вопросы технической электродинамики являются базовыми для таких дисциплин, как "Устройства СВЧ и антенны", "Оптические устройства в радиотехнике", "Устройства генерирования и формирования сигналов", "Устройства приема и обработки сигналов", "Основы теории радиотехнических систем".

Настоящее пособие можно рассматривать как первую часть технической электродинамики, посвященную изучению (на основе общей теории Максвелла) законов распространения свободных электромагнитных волн в безграничном и полубесконечном пространстве. Несмотря на общность постановки вопросы эти чрезвычайно важны для техники, поскольку служат основой расчета разнообразных технических устройств, анализа трасс связи, расчета перехода волн через границу раздела сред и т.п. Несвободные волны, движение которых стеснено границами некоторых объемов (волноводов, резонаторов и пр.), будут составлять содержание другого учебного пособия: "Техническая электродинамика. Электромагнитные волны в ограниченных объемах".

1 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1 Экспериментальная основа теории электромагнитного поля

К моменту начала работы Максвелла над построением теории электромагнетизма (1855 г.) экспериментально было установлено, что электромагнитные явления полностью описываются с помощью четырех векторов: \vec{E} (В/м) – вектора электрической напряженности, \vec{H} (А/м) – вектора магнитной напряженности, \vec{D} (Кл/м²) – вектора электрической индукции, \vec{B} (Вб/м²) – вектора магнитной индукции (здесь и далее размерности всех физических величин приведены в международной системе единиц измерения – СИ).

Из большого количества экспериментальных фактов, относящихся к области электромагнетизма, при выводе уравнений Максвелла наиболее важными оказались следующие.

Закон Ампера:

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \sum_k i_k. \quad (1.1)$$

Пусть в некоторой области пространства существует магнитное поле, описываемое в каждой точке вектором магнитной напряженности \vec{H} . Если в этом пространстве выделить произвольный замкнутый контур ℓ , то циркуляция вектора магнитной напряженности \vec{H} по его периметру всегда равна сумме токов i_k (А) с учетом их направления, пронизывающих любую незамкнутую поверхность S , опирающуюся на контур ℓ (рисунок 1.1).

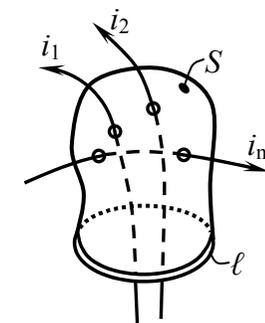


Рисунок 1.1

Закон Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.2)$$

Пусть в пространстве, где существует магнитное поле, описываемое в каждой точке вектором магнитной индукции \vec{B} , внесен некоторый контур ℓ . Пусть S – произвольная незамкнутая поверхность, опирающаяся на ℓ . Если магнитный поток

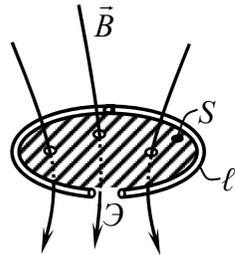


Рисунок 1.2

$$\Phi(B\vec{b}) = \iint_S \vec{B} d\vec{s}$$

пронизывающий поверхность S , изменяется во времени, тогда при разрыве контура ℓ на его зажимах возникает электродвижущая сила \mathcal{E} , равная скорости изменения Φ , взятой со знаком "минус" (рисунок 1.2).

Закон Гаусса для электрического поля:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{s} = \sum_k q_k. \quad (1.3)$$

Пусть в пространстве, где в произвольном порядке расположены электрические заряды q_k (Кл) и существует электрическое поле, описываемое в каждой точке вектором \vec{D} , выделена некоторая замкнутая поверхность S . Оказывается, что поток вектора \vec{D} через поверхность S в точности равен сумме всех зарядов q_k (с учетом их знака), заключенных внутри S (рисунок 1.3).

Закон Гаусса для магнитного поля:

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (1.4)$$

Пусть в пространстве, где существует магнитное поле, описываемое в каждой точке вектором магнитной индукции \vec{B} , выделена произвольная замкнутая поверхность S . Тогда поток

вектора магнитной индукции \vec{B} через эту поверхность всегда равен нулю.

Перечисленные экспериментальные законы легли в основу уравнений Максвелла.

Прежде чем переходить к выводу уравнений Максвелла, напомним два соотношения, известные из курса высшей математики.

Теорема Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{Z} dV = \oiint_S \vec{Z} d\vec{s}, \quad (1.5)$$

где S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , в котором существует поле вектора \vec{Z} ; операция $\operatorname{div} \vec{Z}$ определяет интенсивность истока (если $\operatorname{div} \vec{Z} > 0$) или стока (если $\operatorname{div} \vec{Z} < 0$) величины \vec{Z} в точках пространства объема V .

Теорема Стокса:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{Z} d\vec{s} = \oint_{\ell} \vec{Z} d\vec{\ell}, \quad (1.6)$$

где S – произвольная незамкнутая поверхность, опирающаяся на контур ℓ , заданный в поле вектора \vec{Z} ; операция $\operatorname{rot} \vec{Z}$ определяет степень завихрения \vec{Z} в точках поверхности S .

1.2 Система уравнений Максвелла

Обратимся к закону Ампера (1.1). Будем считать, что электрический ток не только протекает в отдельных k -х токовых трубках, но и может быть распределен непрерывно с плотностью \vec{j} (А/м²). Тогда

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} d\vec{s}. \quad (1.7)$$

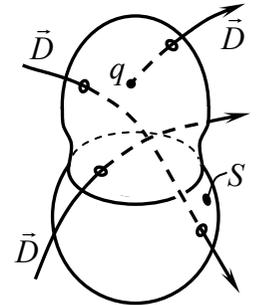


Рисунок 1.3

На основании теоремы Стокса (1.6)

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{H} d\vec{s},$$

поэтому $\iint_S \text{rot} \vec{H} d\vec{s} = \iint_S \vec{j} d\vec{s}$, причем интегрирование слева и справа выполняется по одной и той же поверхности S . Это дает основание записать:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (1.8)$$

Соотношение (1.7) называется первым интегральным уравнением Максвелла, (1.8) – его дифференциальным аналогом.

Проанализируем теперь закон Фарадея (1.2). Пусть $d\vec{\ell}$ – вектор элемента длины контура ℓ , внесенного в электромагнитное поле \vec{E} , \vec{H} . Тогда $\vec{E} d\vec{\ell} = du$ – электрическое напряжение на концах $d\ell$, а $\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = \mathcal{E}$ – э.д.с. на концевых зажимах контура ℓ . В соответствии с теоремой Стокса (1.6)

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{s} = \mathcal{E}. \quad (1.9)$$

Обратимся к правой части (1.2). Если условиться, что контур ℓ жесткий и не изменяет своей конфигурации во времени, тогда

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{s} = \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s}. \quad (1.10)$$

Сопоставляя (1.9), (1.10), приходим ко второму уравнению Максвелла в интегральной форме записи:

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{s}; \quad (1.11)$$

и в дифференциальном виде –

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Еще два уравнения могут быть получены, если воспользоваться законами Гаусса. Запишем правую часть (1.3) в более общем виде, полагая, что в объеме V заключен электрический заряд, непрерывно распределенный с плотностью ρ (Кл/м³):

$$\sum_k q_k = \iiint_V \rho dV. \quad (1.13)$$

Преобразуя левую часть (1.3) по теореме Гаусса-Остроградского и замечая совпадение объема интегрирования с введенным в формуле (1.13), получаем третье дифференциальное уравнение Максвелла

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.14)$$

В интегральной форме записи оно выглядит следующим образом:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{s} = \iiint_V \rho dV. \quad (1.15)$$

Из закона Гаусса (1.4) для магнитного поля, используя только что приведенные рассуждения, легко получить четвертое уравнение Максвелла в дифференциальном виде

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.16)$$

и в интегральном виде

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (1.17)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений Максвелла объединяет соотношения (1.8), (1.12), (1.14), (1.16), а система интегральных уравнений – соотношения (1.7), (1.11), (1.15), (1.17).

Однако полученные уравнения, в частности (1.7) и (1.8), противоречат закону сохранения электрического заряда:

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t} \text{ – интегральная формулировка,} \quad (1.18)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ – дифференциальная формулировка.} \quad (1.19)$$

В (1.18) и (1.19) под q подразумевают полный электрический заряд, распределенный с плотностью ρ внутри объема V :

$$q = \iiint_V \rho dV;$$

I – полный поток (ток) электрических зарядов через поверхность S объема V , характеризующийся плотностью \vec{j} :

$$I = \oiint_S \vec{j} d\vec{s}.$$

Легко обнаружить, что уравнения (1.8) и (1.19) несовместимы. Действительно, вычислив дивергенцию от левой и правой частей (1.8), получаем (в силу известного тождества $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H})=0$), что всегда $\operatorname{div} \vec{j}=0$, в то время как согласно (1.19) $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$ (кроме частных случаев неизменного во времени распределения $\rho \neq \rho(t)$ или отсутствия заряда в точке, где вычисляется $\operatorname{div} \vec{j}$). Не сомневаясь в справедливости (1.8) и (1.19), Максвелл приходит к выводу, что в уравнения (1.8) и (1.19) входят разные по физическому смыслу \vec{j} : в (1.19) – плотность тока свободных электрических зарядов (плотность тока проводимости $\vec{j}_{\text{пр}}$), а в (1.8) – плотность некоего полного тока, складывающегося из $\vec{j}_{\text{пр}}$ и второго компонента, названного им током смещения. Сейчас мы знаем, что это – ток поляризации или ток связанных электрических зарядов, например, электронов, смещающихся относительно положительно заря-

женного ядра атома под действием внешнего электрического поля:

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}.$$

Выражение для $\vec{j}_{\text{см}}$ легко установить. Поскольку $\operatorname{div} \vec{j}=0$ значит $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = -\operatorname{div} \vec{j}_{\text{пр}}$. Учитывая, что на основании (1.19)

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{пр}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

а из (1.14) $\rho = \operatorname{div} \vec{D}$, получаем, что

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Ток смещения появляется во всех средах (в том числе в идеальных диэлектриках), когда в них действует электрическое поле с переменным во времени вектором \vec{D} . Уравнения Максвелла принимают теперь следующий окончательный вид.

Система дифференциальных уравнений технической электродинамики:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.21, a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.21, б)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.21, в)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.21, г)$$

Система интегральных уравнений технической электродинамики:

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{s}, \quad (1.22, a)$$

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{s}, \quad (1.22,б)$$

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{s} = \iiint_V \rho dV, \quad (1.22,в)$$

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (1.22,г)$$

Вот и все! Основной математический аппарат электродинамики – уравнения (1.21), (1.22) – перед нашими глазами. Здесь есть даже лишние соотношения: например, (1.21,в) и (1.21,г) легко могут быть получены соответственно из (1.21,а) и (1.21,б). То же можно отнести к (1.22,в) и (1.22,г). Тогда система уравнений Максвелла становится еще более компактной. Соотношения (1.21) нужно применять в тех задачах, когда требуется вычислить поле в заданных или в любых произвольных точках пространства. Соотношения (1.22) следует использовать при электродинамическом расчете объектов и тел с конечными размерами.

Учитывая фундаментальный характер уравнений Максвелла, приведем их словесную формулировку.

Уравнение (1.21,а): в любой точке пространства, где имеет место движение свободных ($\vec{j}_{\text{пр}} \neq 0$) и связанных электрических зарядов ($\vec{j}_{\text{см}} \neq 0$), обязательно появляется вихревое магнитное поле, причем степень его завихрения и направление вихря определяются векторной суммой $\vec{j}_{\text{пр}}$ и $\vec{j}_{\text{см}}$.

Уравнение (1.21,б): в любой точке пространства, где действует переменное магнитное поле $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$, обязательно возникает вихревое переменное электрическое поле, причем степень завихрения его равна скорости изменения \vec{B} , а направление вектора $\text{rot}\vec{E}$ обратно $\partial\vec{B}/\partial t$.

Уравнение (1.21,в): в любой точке пространства, где присутствует электрический заряд с плотностью ρ , имеет место исток (если $\rho > 0$) или сток (если $\rho < 0$) силовых линий \vec{D} , причем интенсивность стока или истока (числовое значение $\text{div}\vec{D}$) в точности равна ρ .

Уравнение (1.21,г): ни в какой точке пространства не может существовать исток или сток силовых линий вектора \vec{B} , то есть, во всей Вселенной нет точки, в которой мог бы находиться магнитный заряд одного знака.

Теория Максвелла настолько точно описала природу электромагнитных явлений, что она не подвергалась никаким изменениям даже в период революции в физике, вызванной теорией относительности Эйнштейна. Оказалось, что уравнения Максвелла инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, т.е. они верны в форме (1.21), (1.22) в любой инерциальной системе координат.

Особую роль в теории электромагнитного поля играет ток смещения. По Максвеллу путь протекания полного тока всегда замкнут. Если источник переменного тока включен в цепь, составленную из сопротивлений, катушек индуктивности и конденсаторов (рисунок 1.4), то полный ток замкнут и сохраняется постоянным по величине в любом полном сечении цепи. Однако на одних участках (в проводниках, в R , в L) ток представлен только током проводимости, в объеме конденсатора C , заполненного идеальным диэлектриком, – только током смещения, в конденсаторе с неидеальным диэлектриком – тем и другим током. Максвелл приписал диэлектрикам свойство пропускать переменный ток – ток смещения. Это имеет исключительно важное как теоретическое, так и практическое значение. Например, пусть в конденсаторе C_2 в качестве диэлектрика используется воздух. Тогда ток смещения протекает не только внутри, но и вне объема C_2 (рисунок 1.4). Учитывая переменное (с частотой f источника) направление линий $\vec{j}_{\text{см}}$,

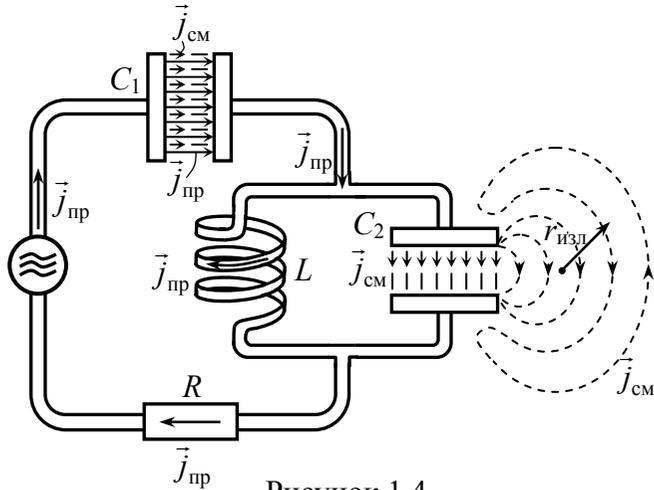


Рисунок 1.4

а также конечную скорость их замыкания (не превышающую скорость света v_0), легко понять, что, начиная с некоторого радиуса $r \geq r_{изл}$, линии не успевают замкнуться на противоположную обкладку конденсатора, если время замыкания $t_{зам} = 2\pi \cdot r / v_0$ больше полупериода колебаний зарядов в конденсаторе $T/2 = 1/(2 \cdot f)$. Значит, при $r > r_{изл}$ происходит отрыв линий $\vec{j}_{см}$ от обкладок конденсатора. Линия $\vec{j}_{см}$ замыкается сама на себя и существует уже независимо от колебаний, величины и знака электрических зарядов на обкладках конденсатора. Мы вплотную подошли к пониманию возможности существования в свободном пространстве переменного электрического поля независимо от источника, породившего его. Устройство, способствующее отрыву (излучению) от них линий $\vec{j}_{см}$ и появлению свободного электромагнитного поля, в технике называется антенной.

Интересно узнать, при какой длине простейшая антенна – симметричный металлический вибратор – начинает эффективно излучать электромагнитные волны? Из предыдущих рассу-

ждений ясно, что это условие наступает, если $t_{зам} \geq T/2$, а поскольку $t_{зам} = 2 \cdot \ell / v_0$, а $T/2 = 1/(2 \cdot f) = \lambda / (2 \cdot v_0)$, то – при длине вибратора $2 \cdot \ell \geq \lambda / 2$. Именно полуволновые вибраторы $2 \cdot \ell = \lambda / 2$ широко используются в качестве приемных телевизионных антенн на крышах наших домов и в квартирах.

Поставим теперь такой вопрос: а что дальше происходит в точке M (рисунок 1.5), где появляются оторвавшиеся от антенны (или от конденсатора, вообще от любой цепи переменного тока) линии тока смещения? Если окружающая антенну среда – идеальный диэлектрик ($\vec{j}_{пр} = 0$), протекание в ней тока смещения ($\vec{j}_{см} = \partial \vec{D} / \partial t$) эквивалентно существованию переменного электрического поля.

Но согласно уравнению Максвелла (1.21,а) в точке M тогда появится вихревое магнитное поле. Это поле должно быть переменным, поэтому в соответствии с уравнением (1.21,б) оно порождает в точке M переменное вихревое электрическое поле. Первое и второе уравнения Максвелла, таким образом, "зацепляются":

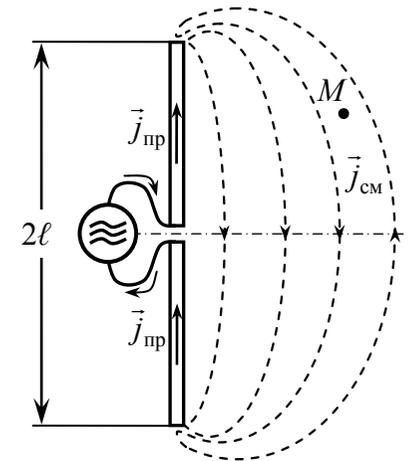


Рисунок 1.5

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

В точке M протекает "цепная электромагнитная реакция": вихрь \vec{H} порождает вихрь \vec{E} , а тот – вновь вихрь \vec{H} и т. д.

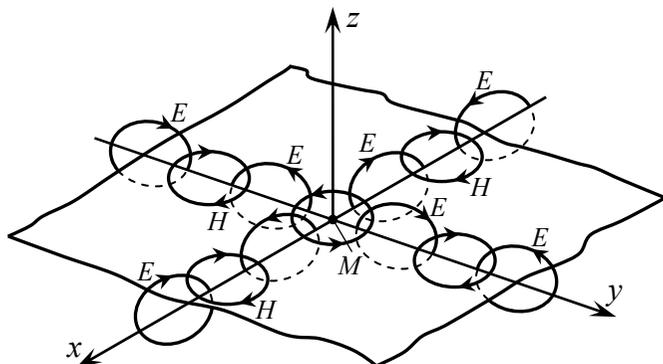


Рисунок 1.6

Процесс этот, развиваясь во времени и в пространстве, формирует электромагнитную волну, разбегающуюся от точки M во всех направлениях (рисунок 1.6). Очень важно понять, что описанные взаимопревращения вихрей \vec{H} и \vec{E} , появившись в некоторый момент времени в произвольной точке M , в дальнейшем не нуждаются в действии источника переменного тока и антенны. Они существуют самостоятельно, и, если в среде нет потерь, замкнутый фронт разбегающейся (излучаемой) от точки M электромагнитной волны постепенно охватит все доступное пространство.

Если бы в природе не было токов смещения, в мире не существовало электромагнитных волн, Вселенная погрузилась в темноту, в ней наступила "электромагнитная тишина"!

С точки зрения технической электродинамики присутствие в уравнениях (1.21,а), (1.22,а) тока смещения $\partial\vec{D}/\partial t$ означает, что любая (неэкранированная) цепь переменного электрического тока обладает некоторым "антенным эффектом", который тем сильнее, чем выше частота тока. Поэтому даже удаленные одна от другой цепи переменного тока "чувствуют" друг друга на расстоянии, так как ответвляющиеся от них линии тока смещения уходят как угодно далеко. Этот эффект специально усиливается с помощью антенн и используется в

системах радиосвязи, радиолокации, однако он же приводит к появлению радиопомех и создает проблему электромагнитной совместимости различных радиосредств.

При большой мощности переменного тока в неэкранированной цепи утечка электромагнитных волн за счет токов смещения может создать опасность для жизни растений, животных и человека.

1.3 Материальные уравнения электродинамики

В математическом отношении система уравнений Максвелла (1.21) является неполной. Для нахождения четырех неизвестных векторов \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} нужно иметь столько же векторных уравнений; в системе же (1.21) уравнения с дивергенциями являются скалярными. Полнота системы уравнений электромагнитного поля достигается введением соотношений, связывающих в материальных средах векторы \vec{E} и \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} :

$$\vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E}, \quad (1.23)$$

$$\vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}. \quad (1.24)$$

Широко применяется так же связь

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \cdot \vec{E}. \quad (1.25)$$

В приведенных материальных уравнениях ϵ_a , Ф/м – абсолютная диэлектрическая проницаемость; μ_a , Гн/м – абсолютная магнитная проницаемость; σ , См/м – проводимость среды.

Если абсолютные проницаемости среды отличаются от их значений в вакууме, вводятся относительные проницаемости:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}, \quad \mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}, \quad (1.26)$$

где $\epsilon_0 = 1/(36\pi) \cdot 10^{-9}$, Ф/м – абсолютная диэлектрическая, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, Гн/м – абсолютная магнитная проницаемости вакуума.

Ясно, что отличие ϵ_a от ϵ_0 обусловлено поляризацией диэлектрика:

$$\vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.27)$$

где \vec{P} , Кл/м² – вектор поляризации среды. Отношение $P/E = \chi_{\text{Э}}$ называется диэлектрической восприимчивостью среды. Поэтому $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi_{\text{Э}}/\epsilon_0) \cdot \vec{E}$, причем $\epsilon = 1 + \chi_{\text{Э}}/\epsilon_0$. Магнитные среды во внешнем магнитном поле намагничиваются:

$$\vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{M}, \quad (1.28)$$

где \vec{M} , Вб/м² – вектор намагниченности среды. Отношение $M/H = \chi_{\text{М}}$ называют магнитной восприимчивостью среды. Поэтому $\vec{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_{\text{М}}/\mu_0) \cdot \vec{H}$, причем $\mu = 1 + \chi_{\text{М}}/\mu_0$.

С какими видами сред приходится иметь дело в технике?

Линейные и нелинейные среды

Если параметры ϵ_a , μ_a , σ не зависят от величины напряженности E и H поля, такая среда называется линейной. Примером линейной среды является воздух тропосферы, среда космического пространства.

В нелинейной среде хотя бы один из параметров ϵ_a , μ_a , σ зависит от величин E и H . Нелинейными свойствами обладают широко применяемые в лазерной технике и в радиоэлектронике сегнетоэлектрики, ферромагнетики, многие жидкие и твердые диэлектрики, кристаллы. Нелинейные эффекты сопровождают распространение электромагнитных волн в плазме ионосферы. В линейной среде независимо и одновременно могут

существовать электромагнитные волны разных источников (одной или разной частоты). Если среда нелинейна, распространение волны одной частоты сопровождается появлением волн других (например, кратных) частот. При одновременном возбуждении в такой среде разными источниками волн разных частот возникают новые волны с комбинационными частотами.

Однородные и неоднородные среды

В однородной среде параметры ϵ_a , μ_a , σ не зависят от координат. Высокой степенью однородности обладает среда космического пространства. Во многих радиоэлектронных устройствах электромагнитные волны взаимодействуют с различными материалами, параметры ϵ_a , μ_a , σ которых однородны.

Если ϵ_a , μ_a , σ зависят от координат (например, $\epsilon_a = \epsilon_a(x)$, $\mu_a = \mu_a(x, y, z)$, $\sigma = \sigma(y, z)$), такая среда считается неоднородной.

Примерами неоднородных сред являются атмосфера земли, почва, морская вода, многие специальные материалы, используемые в радиоэлектронных устройствах. В однородной среде электромагнитные волны распространяются строго прямолинейно. При наличии неоднородностей с резко выраженными границами волны испытывают на них отражение и преломление. Если параметры среды плавно изменяются вдоль какого-либо направления, то распространяющаяся под произвольным углом к нему волна постепенно отклоняется от прямолинейного пути. Например, в неоднородной атмосфере Земли радиоволна, излученная под углом к горизонту, движется по криволинейной траектории (явление рефракции). Аналогично в ионосфере вследствие изменения с высотой показателя преломления плазмы траектория радиоволны искривляется, и после отражения волна может вновь вернуться к Земле. Это широко используется для осуществления сверхдальней связи на длинных, средних и коротких волнах.

Изотропные и анизотропные среды

В изотропных средах ϵ_a , μ_a , σ имеют определенное числовое значение; они являются скалярными величинами. В таких средах векторы \vec{E} и \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} , $\vec{j}_{\text{пр}}$ и \vec{E} попарно параллельны друг другу. Поэтому

$$j_{\text{пр}z} = \sigma \cdot E_z, \quad D_x = \epsilon_a \cdot E_x, \quad B_y = \mu_a \cdot H_y$$

и т. п. В изотропных средах свойства и параметры распространения электромагнитных волн в разных направлениях одинаковы. Изотропен воздух тропосферы, космическая среда, морская среда, многие диэлектрические материалы, включаемые в радиоэлектронные устройства.

Если среда анизотропна, то хотя бы один из параметров ϵ_a , μ_a , σ является тензором. Например, в анизотропной магнитной среде

$$\vec{\mu}_a = \begin{vmatrix} \mu_{a11} & \mu_{a12} & \mu_{a13} \\ \mu_{a21} & \mu_{a22} & \mu_{a23} \\ \mu_{a31} & \mu_{a32} & \mu_{a33} \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

В этом случае векторы \vec{B} и \vec{H} в пространстве неколлинеарны:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{a11} \cdot H_x + \mu_{a12} \cdot H_y + \mu_{a13} \cdot H_z, \\ B_y &= \mu_{a21} \cdot H_x + \mu_{a22} \cdot H_y + \mu_{a23} \cdot H_z, \\ B_z &= \mu_{a31} \cdot H_x + \mu_{a32} \cdot H_y + \mu_{a33} \cdot H_z. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ярко выраженной анизотропией обладает плазма ионосферы Земли, некоторые диэлектрические материалы (кристаллы ниобата лития, дигидрофосфаты калия и натрия, сегнетоэлектрики) и магнитные среды (ферриты, парамагнетики), помещенные соответственно в постоянное внешнее электрическое или магнитное поле. Отдельные материалы, нашедшие разнообразное применение в радиоэлектронике и лазерной тех-

нике, обладают естественной анизотропией. Попав в анизотропную среду, электромагнитная волна "расщепляется" на две волны, имеющие разные скорости распространения, характер движения потока мощности, вид поляризации. Это широко используется для управления параметрами волны.

Стационарные и нестационарные среды

В стационарных средах параметры ϵ_a , μ_a , σ постоянны во времени. Хорошим примером может служить среда космического пространства. Если любой из параметров ϵ_a , μ_a , σ изменяется с течением времени, значит, среда нестационарна. Нестационарной является атмосфера Земли, диэлектрическая проницаемость которой ввиду перемещения воздушных масс непрерывно меняется.

1.4 Уравнения Максвелла для гармонических электромагнитных процессов

Гармонические электромагнитные процессы наиболее широко используются в технике, поэтому анализ на основе уравнений Максвелла приобретает особую важность. Будем полагать, что временная зависимость $E(t)$, $H(t)$, $D(t)$, $B(t)$, $j(t)$ и других интересующих нас величин описывается экспоненциальной функцией

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cdot e^{i(\omega t + \varphi_E)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cdot e^{i(\omega t + \varphi_H)},$$

где E_m , H_m – амплитудные значения напряженности поля; $\omega = 2\pi \cdot f$ – частота изменений поля во времени; φ_E , φ_H – фазы изменений \vec{E} и \vec{H} .

Тогда уравнения Максвелла для электромагнитного поля, гармонически меняющегося во времени, могут быть получены из (1.21) формальной заменой $\partial/\partial t$ на $i \cdot \omega$:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + i \cdot \omega \cdot \epsilon_a \cdot \vec{E}, \quad (1.31, a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \vec{H}. \quad (1.31, б)$$

Уравнения (1.31) справедливы для стационарных сред ($\epsilon_a \neq \epsilon_a(t)$, $\mu_a \neq \mu_a(t)$); точки над векторами \vec{E} , \vec{H} обозначают их комплексный характер. Учитывая (1.25), уравнение (1.31,а) можно переписать в иной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = (\sigma + i \cdot \omega \cdot \epsilon_a) \cdot \vec{E} = i \cdot \omega \cdot (\epsilon_a - i \cdot \frac{\sigma}{\omega}) \cdot \vec{E}. \quad (1.32)$$

Величину $\epsilon_a - i \cdot \sigma / \omega = \dot{\epsilon}_a$ называют комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью среды. Используется также понятие комплексной относительной диэлектрической проницаемости:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}_a}{\epsilon_0} = \epsilon - i \cdot \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon_0} = \epsilon' - i \cdot \epsilon''. \quad (1.33)$$

Мнимая часть $\dot{\epsilon}$ ($\epsilon'' = \sigma / (\omega \cdot \epsilon_0)$), пропорциональная проводимости среды, определяет джоулевы потери энергии поля. Величина потерь оценивается по значению тангенса угла диэлектрических потерь:

$$\operatorname{tg} \delta_{\epsilon} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon}. \quad (1.34)$$

При наличии в среде потерь магнитной природы аналогично вводится

$$\operatorname{tg} \delta_M = \frac{\mu''}{\mu'}. \quad (1.35)$$

Углы δ_{ϵ} , δ_M характеризуют фазовый сдвиг между комплексными векторами \vec{D} , \vec{E} и соответственно \vec{B} , \vec{H} . При отсутствии потерь указанные векторы каждой пары изменяются во

времени синфазно. Таким образом, в стационарных средах уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i \cdot \omega \cdot \dot{\epsilon}_a \cdot \vec{E}, \quad (1.36, a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \dot{\mu}_a \cdot \vec{H} \quad (1.36, б)$$

описывают любые гармонические электромагнитные процессы. Уравнения (1.21,в,г), содержащие дивергенции, являются следствиями (1.36) и самостоятельного значения не имеют.

1.5 Энергетические соотношения электродинамики

Предположим, что в некотором объеме V действуют источники электромагнитного поля, т.е. включены высокочастотные генераторы или передатчики, подсоединенные к антеннам. Ответим на важный практический вопрос: как складывается баланс мощности (энергии) поля для этого объема?

По аналогии с (1.19) можно постулировать следующий дифференциальный закон сохранения энергии электромагнитного поля:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.37)$$

понимая под w (Дж/м³) объемную плотность энергии поля (аналог ρ), под \vec{P} (Вт/м²) – плотность потока мощности поля (аналог $\vec{j}_{\text{пр}}$). Такую же параллель можно провести между интегральными законами сохранения заряда (1.18) и электромагнитной энергии:

$$P_{\text{изл}} = -\frac{\partial W}{\partial t}, \quad (1.38)$$

связав энергию поля W (Дж), заключенную в некотором объеме V , с мощностью поля $P_{\text{изл}}$ (Вт), протекающей через поверхность объема. Существует, однако, важное различие между

(1.19) и (1.37), (1.18) и (1.38), обусловленное тем, что электрический заряд действительно сохраняется всегда, энергия электромагнитного поля может изменяться, преобразуясь в другие формы.

Простой пример иллюстрирует сказанное. Вообразим себя находящимся в освещенном помещении, все стены которого покрыты сплошным идеальным зеркалом, гарантирующим полное отражение падающего на него света. Выключим действующий в помещении источник света; будет ли в ней по-прежнему светло? Интуиция подсказывает отрицательный ответ, и он оказывается верным. Причина быстрого наступления темноты в зеркальной комнате заключается в поглощении света всеми телами и предметами внутри помещения. И, тем не менее, полная энергия в объеме комнаты, выработанная световым источником, после его выключения сохраняется. Свет исчез, но электромагнитная энергия перешла в тепловую форму за счет взаимодействия оптического поля с веществом. Это-то обстоятельство, не имеющее аналога в явлении сохранения заряда, и не отражено в (1.37) и (1.38), которые должны содержать слагаемое, описывающее потери энергии поля в поглощающей среде. Докажем данное предположение, опираясь на уравнения Максвелла.

Баланс мощности для электромагнитного поля с произвольным законом изменения во времени

Перепишем уравнения (1.21):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.21, a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.21, б)$$

Умножим скалярно (1.21, a) на \vec{E} , (1.21, б) – на \vec{H} и из первого полученного соотношения вычтем второе:

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Из векторного анализа известно, что

$$\operatorname{div}[\vec{E} \cdot \vec{H}] = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H},$$

где $[\vec{E} \cdot \vec{H}]$ означает векторное произведение \vec{E} и \vec{H} . Слагаемые $\vec{E} \cdot \partial \vec{D} / \partial t$ и $\vec{H} \cdot \partial \vec{B} / \partial t$ для стационарных сред могут быть заменены соответственно на $\frac{\partial}{\partial t} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \epsilon_a \cdot E^2)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \mu_a \cdot H^2)$. Тогда

$$-\operatorname{div}[\vec{E} \cdot \vec{H}] = \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \epsilon_a \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \mu_a \cdot H^2). \quad (1.39)$$

Сопоставляя (1.37) с (1.39), легко заметить, что введенные в (1.37) величины \vec{P} и w имеют следующее определение:

$$\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}], \quad (1.40)$$

$$w = w_{\text{Э}} + w_{\text{М}} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_a \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \mu_a \cdot H^2, \quad (1.41)$$

а дополнительное слагаемое

$$p_{\text{П}} = \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E}, \text{ Вт/м}^3 \quad (1.42)$$

как раз учитывает потери электромагнитной энергии в объеме 1 м^3 за 1 с и является дифференциальной формой записи закона Джоуля-Ленца.

Таким образом, дифференциальный баланс мощности электромагнитного поля (1.39) с учетом (1.40)-(1.42) перепишется в виде

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial w}{\partial t} - p_{\text{П}}. \quad (1.43)$$

Интегральный баланс мощности поля нетрудно получить, обобщая (1.43) на некоторый конечный объем V . Интегрирование дает

$$P_{\text{изл}} = -\frac{\partial W}{\partial t} - P_{\Pi}, \quad (1.44)$$

где обозначено

$$P_{\Pi} = \iiint_V p_{\Pi} dV - \quad (1.45)$$

полная мощность электромагнитного поля, перешедшая в тепловую форму в объеме V ;

$$W = \iiint_V w dV - \quad (1.46)$$

полная энергия электромагнитного поля, заключенная в объеме V ;

$$P_{\text{изл}} = \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} dV = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s} - \quad (1.47)$$

полная мощность электромагнитного поля, излучаемая из объема V , определяемая, как поток вектора $\vec{\Pi}$ через поверхность S объема V .

Вектор $\vec{\Pi}$ (1.46), называемый вектором Пойнтинга, перпендикулярен плоскости, в которой располагаются \vec{E} и \vec{H} , и указывает направление потока мощности поля. Модуль $|\vec{\Pi}|$ численно равен количеству ватт мощности электромагнитного поля, переносимых через площадку 1 м^2 , ориентированную перпендикулярно ему. Уравнения баланса (1.44), (1.43) записаны для случая, когда в объеме отсутствуют сторонние источники поля. Наличие последних нетрудно учесть, рассматривая мощность, вырабатываемую источником, как отрицательные потери:

$$\text{div } \vec{\Pi} = -\frac{\partial w}{\partial t} - (p_{\Pi} - p_{\text{ст}}), \quad (1.48)$$

$$P_{\text{изл}} = -\frac{\partial W}{\partial t} - (P_{\Pi} - P_{\text{ст}}), \quad (1.49)$$

где $p_{\text{ст}}$ ($\text{Вт}/\text{м}^3$) – объемная плотность мощности сторонних ис-

точников; $P_{\text{ст}} = \iiint_V p_{\text{ст}} dV$ – полная мощность всех сторонних ис-

точников, действующих внутри объема V .

Таким образом, окончательно:

$$P_{\text{ст}} = P_{\Pi} + \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi}, \quad (1.50)$$

$$P_{\text{ст}} = P_{\Pi} + \frac{\partial W}{\partial t} + P_{\text{изл}}. \quad (1.51)$$

Итак, если в некотором объеме V включены электромагнитные источники суммарной мощностью $P_{\text{ст}}$, часть ее ($\partial W/\partial t$) расходуется на увеличение запаса энергии поля в объеме, другая часть мощности (P_{Π}) превращается в тепло, если в объеме имеются среды с $\text{tg} \delta_{\text{э}} \neq 0$ и $\text{tg} \delta_{\text{м}} \neq 0$, и, наконец, оставшаяся часть ($P_{\text{изл}}$) покидает объем в виде излучения.

На рисунке 1.7 интегральный закон баланс (1.51) иллюстрируется на примере, относящемся к области гидравлики (в резервуар с помощью насоса закачивается вода в количестве $P_{\text{ст}}$ (л/с); W (л) – текущее значение количества воды в резервуаре; P_{Π} (л/с) – количество воды, впитываемой гигроскопическим телом; $P_{\text{изл}}$ (л/с) – количество вытекающей воды).

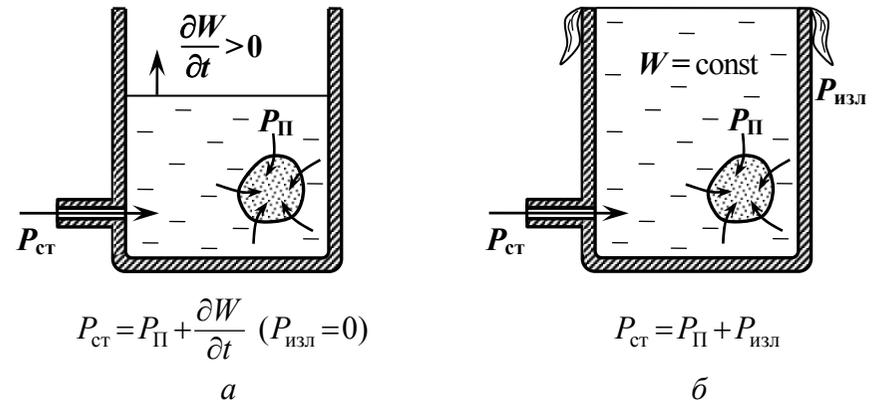


Рисунок 1.7

Баланс мощности для гармонического электромагнитного поля

Учитывая соотношения

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*),$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{H} + \vec{H}^*),$$

где (*) – знак комплексного сопряжения, вектор \vec{P} можно представить в виде

$$\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}] = |\vec{P}| \cdot \vec{r}_n = \frac{1}{4} \cdot (\dot{E} \cdot \dot{H} + \dot{E} \cdot \dot{H}^* + \dot{E}^* \cdot \dot{H} + \dot{E}^* \cdot \dot{H}^*) \cdot \sin(\widehat{\vec{E}, \vec{H}}) \cdot \vec{r}_n, \quad (1.52)$$

где \vec{r}_n – единичный радиус-вектор, ориентированный в направлении потока мощности в данной точке. Определим среднее за период значение \vec{P} :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} \vec{P} dt;$$

его модуль:

$$\langle |\vec{P}| \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} |\vec{P}| dt.$$

Подставляя в (1.52) принятые в разделе 1.4 зависимости $\dot{E}(t)$, $\dot{H}(t)$, легко получить

$$\langle |\vec{P}| \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot H_m \cdot \cos(\varphi_E - \varphi_H) \cdot \sin(\widehat{\vec{E}, \vec{H}}). \quad (1.53)$$

Если ввести понятие комплексного вектора Пойнтинга, определив его как

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \cdot [\vec{E} \cdot \vec{H}^*], \quad (1.54)$$

то, сопоставляя (1.54) с (1.53), нетрудно заметить, что в гармонически изменяющемся поле среднее за период поля значение

вектора Пойнтинга равно реальной части комплексного вектора \vec{P} :

$$\langle \vec{P} \rangle = \text{Re } \vec{P}. \quad (1.55)$$

Аналогично, вычисляя комплексную удельную мощность потерь по правилу

$$\dot{p}_{\Pi} = \frac{1}{2} \cdot \vec{j}_{np} \cdot \vec{E}^*, \quad (1.56)$$

среднее за период поля значение электромагнитной мощности, переходящей в тепловую форму в объеме 1 м^3 , можно определить как

$$\langle p_{\Pi} \rangle = \text{Re } \dot{p}_{\Pi}. \quad (1.57)$$

Сразу отметим, что тепловая мощность обязательно реальна и описывается вещественным числом (мнимого тепла не бывает, тепло всегда греет). Поэтому введение \dot{p}_{Π} носит чисто формальный характер.

Составим теперь баланс мощности для гармонического поля. Обратимся к (1.31), записав уравнение (1.31,a) в комплексно-сопряженной форме:

$$\text{rot } \vec{H}^* = \vec{j}_{np}^* - i \cdot \omega \cdot \epsilon_a \cdot \vec{E}^*,$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \vec{H}.$$

Умножим первое уравнение на \vec{E} , второе – на \vec{H}^* и найдем их разность (см. вывод (1.39)):

$$- \text{div}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*] = i \cdot \omega \cdot (\mu_a \cdot \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon_a \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}^*) + \vec{j}_{np}^* \cdot \vec{E}.$$

Обозначим

$$\langle w_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4} \cdot \epsilon_a \cdot E_m^2, \quad \text{Дж/м}^3 - \quad (1.58,a)$$

средняя за период плотность электрической части полной энергии гармонического электромагнитного поля;

$$\langle w_M \rangle = \frac{1}{4} \cdot \mu_a \cdot H_m^2, \text{ Дж/м}^3 - \quad (1.58, б)$$

то же для магнитной части энергии. Тогда с учетом (1.54), (1.56) дифференциальный закон баланса мощности гармонического поля примет вид

$$\text{div } \vec{I} = -i \cdot 2\omega \cdot (\langle w_M \rangle - \langle w_\Omega \rangle) - \dot{P}_\Pi. \quad (1.59)$$

Интегральный закон баланса получается интегрированием (1.59) по интересующему нас объему V :

$$\dot{P}_{\text{изл}} = -i \cdot 2\omega \cdot (\langle W_M \rangle - \langle W_\Omega \rangle) - \dot{P}_\Pi, \quad (1.60)$$

где $\dot{P}_{\text{изл}} = \oint_S \vec{I} d\vec{s}$ – комплексная мощность излучения за пределы поверхности S объема V ; $\langle W_M \rangle = \iiint_V \langle w_M \rangle dV$, $\langle W_\Omega \rangle = \iiint_V \langle w_\Omega \rangle dV$ – усредненные за период гармонического поля значения его магнитной и электрической энергии, запасенные в объеме V ; $P_\Pi = \iiint_V \dot{P}_\Pi dV$ – комплексная мощность потерь в объеме V .

Обобщим (1.60) на случай, когда в объеме действуют источники поля с полной мощностью $\dot{P}_{\text{ст}}$. Формально рассматривая $\dot{P}_{\text{ст}}$ как отрицательную мощность потерь, получим

$$\dot{P}_{\text{ст}} = i \cdot 2\omega \cdot (\langle W_M \rangle - \langle W_\Omega \rangle) + \dot{P}_\Pi + \dot{P}_{\text{изл}}. \quad (1.61)$$

Комплексное соотношение (1.61) можно представить отдельными (не связанными между собой) балансами активных и реактивных мощностей. Для этого все комплексные слагаемые, входящие в (1.61), запишем в виде суммы вещественной и мнимой частей. Тогда интегральные балансы активных и реактивных мощностей складываются следующим образом:

$$P_{\text{ст}}^{\text{акт}} = P_\Pi + \text{Re } \dot{P}_{\text{изл}}, \quad (1.62)$$

$$P_{\text{ст}}^{\text{реакт}} = 2\omega \cdot (\langle W_M \rangle - \langle W_\Omega \rangle) + \text{Im } \dot{P}_{\text{изл}}. \quad (1.63)$$

Таким образом, полная активная мощность источников (например, передатчиков), работающих в объеме V , расходуется на покрытие потерь в веществе, заполняющем объем, потерь в материале его стенок (P_Π) и на создание потока активной мощности излучения, покидающего объем V ($\text{Re } \dot{P}_{\text{изл}}$). Реактивная мощность источников идет на поддержание разности $\langle W_M \rangle$ и $\langle W_\Omega \rangle$ и потока реактивной мощности ($\text{Im } \dot{P}_{\text{изл}}$), который каждые полпериода изменяет свое направление на 180° . Если частота ω источников совпадает с собственной резонансной частотой объема V , то $\langle W_M \rangle = \langle W_\Omega \rangle$ и вся реактивная мощность источников идет на создание колебательного потока $\text{Im } \dot{P}_{\text{изл}}$. Согласовав антенну источника с объемом V , можно полностью устранить (и к этому нужно стремиться на практике) колебательное движение потока электромагнитной мощности через поверхность объема V .

1.6 Потенциалы электромагнитного поля

До сих пор состояние электромагнитного поля мы характеризовали значением векторов напряженности \vec{E} и \vec{H} (для гармонических полей – \vec{E} и \vec{H}). Однако это не единственный способ описания поля. В технической электродинамике наряду с (E, H) -описанием столь же широко применяется $(A, \varphi_{\text{ск}})$ -описание, где \vec{A} и $\varphi_{\text{ск}}$ – соответственно векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Целый ряд задач на языке $(A, \varphi_{\text{ск}})$ решается легче, чем на языке (E, H) .

Установим связь между \vec{E} , \vec{H} и \vec{A} , $\varphi_{\text{ск}}$. Из уравнения Максвелла (1.21,2) следует, что, раз в любой точке дивергенция \vec{B} отсутствует, значит, силовая линия вектора \vec{B} замкнута сама на себя и вектор \vec{B} есть вихрь какого-то другого вектора:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (1.64)$$

Отсюда, применяя материальную связь (1.24), получаем

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \cdot \text{rot} \vec{A}. \quad (1.65)$$

Вектор \vec{A} , определяемый с помощью (1.65), называется векторным электродинамическим потенциалом поля. Исходя из (1.21,б),

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{A})$$

или

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{C}. \quad (1.66)$$

Константа интегрирования \vec{C} может выбираться произвольно. Как известно, в статике ($\partial/\partial t=0$) напряженность электрического поля полностью и однозначно определяется скалярным потенциалом $\varphi_{\text{ск}}$: $\vec{E} = -\text{grad} \varphi_{\text{ск}}$. Поэтому разумно выбирать $\vec{C} = -\text{grad} \varphi_{\text{ск}}$, и тогда в переменном поле

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi_{\text{ск}}. \quad (1.67)$$

Соотношения (1.65) и (1.67) определяют правило вычисления напряженностей поля при известных потенциалах \vec{A} и $\varphi_{\text{ск}}$. В дальнейшем мы воспользуемся этими уравнениями при анализе изучения электромагнитных волн простейшими антеннами.

1.7 Уравнения движения электромагнитного поля

В разделе 1.3 качественно показано, как в соответствии с уравнениями Максвелла начинает развиваться электромагнит-

ный процесс, если в какой-либо точке пространства \vec{E} или \vec{H} изменяются во времени. Движение электромагнитного возмущения, изображенного на рисунке 1.6, можно точно описать с помощью волновых уравнений, легко выводимых из уравнений Максвелла. Волновые уравнения играют в электродинамике такую же роль, что и уравнения движения тела в механике. Из пары уравнений (1.21) исключим \vec{E} . Для этого вычислим вихрь левой и правой частей (1.21,а):

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{j}_{\text{пр}} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{E}),$$

а вместо $\text{rot} \vec{E}$ справа подставим его выражение из (1.21,б). Попутно воспользуемся известным из векторного анализа соотношением

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} = \text{grad} \text{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}, \quad (1.68)$$

где Δ – оператор Лапласа. Тогда, учитывая, что $\text{div} \vec{H} = 0$, получаем волновое уравнение для вектора \vec{H} :

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot} \vec{j}_{\text{пр}}. \quad (1.69)$$

Исключая аналогичным приемом из пары уравнений (1.21) вектор \vec{H} , приходим к волновому уравнению для вектора \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad}(\rho/\varepsilon_a) + \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{j}_{\text{пр}}}{\partial t}. \quad (1.70)$$

Не представляет большого труда вывести волновые уравнения и для потенциалов \vec{A} , $\varphi_{\text{ск}}$. Подставим (1.65) в (1.69). После интегрирования полученного выражения приходим к волновому уравнению для \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \vec{j}_{\text{пр}}. \quad (1.71)$$

Вводя в (1.70) \vec{E} с помощью (1.67), получаем соотношение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\vec{A}-\varepsilon_a\mu_a\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2})+\frac{\partial}{\partial t}(\mu_a\vec{j}_{\text{пр}})+\overline{\text{grad}}(\Delta\varphi_{\text{ск}}-\varepsilon_a\mu_a\cdot\frac{\partial^2\varphi_{\text{ск}}}{\partial t^2})=-\frac{1}{\varepsilon_a}\cdot\overline{\text{grad}}\rho,$$

в котором сумма первых двух слагаемых согласно (1.71) равна нулю. Интегрирование оставшегося соотношения приводит к волновому уравнению для $\varphi_{\text{ск}}$:

$$\Delta\varphi_{\text{ск}}-\varepsilon_a\mu_a\cdot\frac{\partial^2\varphi_{\text{ск}}}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1.72)$$

Уравнения (1.69) ÷ (1.72) имеют общий вид записи

$$\Delta Z-\varepsilon_a\mu_a\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=-I_Z, \quad (1.73)$$

где под Z можно подразумевать любую из величин \vec{E} , \vec{H} , \vec{A} , $\varphi_{\text{ск}}$, а I_Z – источник, правая часть (1.69) ÷ (1.72). Полученное уравнение относится к классу неоднородных линейных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа.

Напомним, что

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=0 \quad (1.74)$$

является одномерным волновым уравнением (например, описывающим колебания бесконечной струны, натянутой вдоль y). Решением (1.74) является плоские волны Z , бегущие со скоростью v в направлениях $\pm y$ (рисунок 1.8). Двумерное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=0$$

имеет своим решением бесконечный набор пар плоских волн типа $\psi(t\pm x/v)$, $\psi(t\pm y/v)$, встречно бегущих в любых направ-

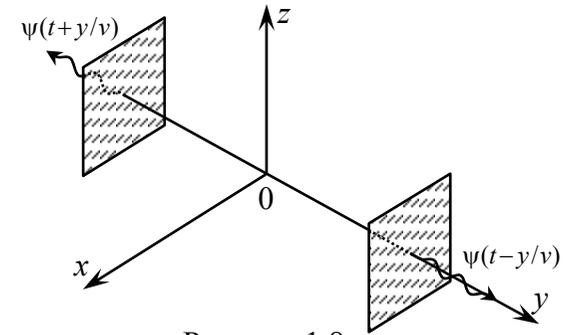


Рисунок 1.8

лениях в плоскости xOy (цилиндрическая волна, рисунок 1.9). Решением трехмерного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=0,$$

или

$$\Delta Z-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=0, \quad (1.75)$$

является трехмерная (сферическая) волна $\psi(t-r/v)/r$, складывающаяся из бесконечного набора пар плоских волн, встречно

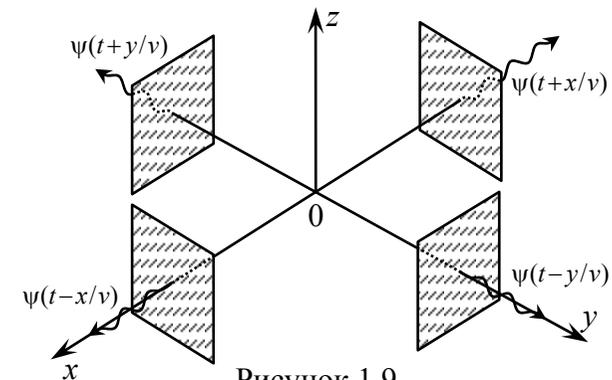


Рисунок 1.9

разбегающихся из начала трехмерной системы координат x, y, z (рисунок 1.10) во всех направлениях.

Если источники поля распределены в конечном объеме V , то

$$Z(r,t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint_V \frac{I_z(t \pm r/v)}{r} dV. \quad (1.76)$$

В частности,

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{пр}}(t \pm r/v)}{r} dV, \quad (1.77)$$

$$\varphi_{\text{ск}}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \cdot \iiint_V \frac{\rho(t \pm r/v)}{r} dV. \quad (1.78)$$

Таким образом, любое возмущение состояния электромагнитного поля приводит к появлению сферических волн $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}, \varphi_{\text{ск}}$,

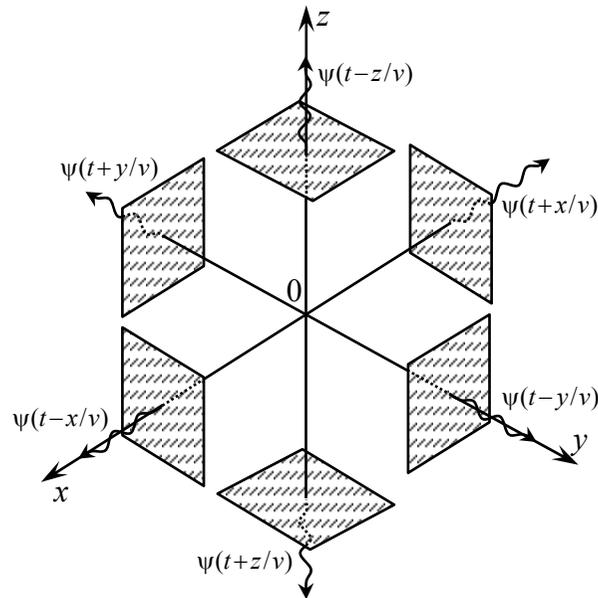


Рисунок 1.10

которые разбегаются со скоростью v во всех направлениях от источника. Сопоставляя (1.73) с (1.75), видим, что

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}}, \quad (1.79)$$

то есть скорость распространения электромагнитных волн определяется параметрами той среды, в которой передается возмущение поля. Подстановкой в (1.79) значений ϵ_a и μ_a , соответствующих вакууму, легко установить, что $v = v_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с. Экспериментально доказано, что именно с такой скоростью в вакууме распространяется световое излучение. Полученный результат позволил Максвеллу заключить, что свет – это тоже электромагнитная волна, только очень высокой частоты. Утверждение Максвелла оказалось столь же смелым, сколь и верным. Оптика стала разделом электродинамики, а математический аппарат последней – мощным инструментом для точного количественного описания волновых оптических процессов.

1.8 Опережающие и запаздывающие потенциалы поля

При гармоническом законе изменения поля во времени в уравнениях (1.69) ÷ (1.71) может быть осуществлена формальная замена $\partial^2 / \partial t^2$ на $(-\omega^2)$. Тогда, например, волновые уравнения потенциалов принимают вид

$$\Delta \vec{A} + \omega^2 \cdot \epsilon_a \mu_a \cdot \vec{A} = -\mu_a \cdot \vec{j}_{\text{пр}}, \quad (1.80)$$

$$\Delta \varphi_{\text{ск}} + \omega^2 \cdot \epsilon_a \mu_a \cdot \varphi_{\text{ск}} = -\frac{\dot{\rho}}{\epsilon_a}. \quad (1.81)$$

Величину $\sqrt{\omega^2 \cdot \epsilon_a \cdot \mu_a} = k$ называют постоянной распространения волны. Уравнения (1.80), (1.81) носят имя Гельмгольца.

Решением (1.80), (1.81) являются выражения

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{пр}} \cdot e^{i(\omega t \pm kr)}}{r} dV, \quad (1.82)$$

$$\phi_{\text{ск}}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \iiint_V \frac{\rho \cdot e^{i(\omega t \pm kr)}}{r} dV, \quad (1.83)$$

в которых

$$G(r,t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{i(\omega t \pm kr)}}{r} - \quad (1.84)$$

функция Грина, описывающая элементарную сферическую волну, возбуждаемую источником.

Формально уравнение второго порядка (1.73) должно иметь два решения, что отражено в (1.76) наличием двух знаков – "плюс" и "минус", однако в технике используется лишь одно из них, выбор которого осуществляется на основе следующих рассуждений. Рассмотрим решение (1.77), (1.78), содержащее в аргументах $\vec{j}_{\text{пр}}$ и ρ знак "минус". Его следует понимать так, что если нас, интересуют значения потенциалов \vec{A} и $\phi_{\text{ск}}$ в точке наблюдения с координатой r в момент времени t , то они определяются соответственно значениями источников ($\vec{j}_{\text{пр}}$ и ρ) в более ранний момент времени $(t-r/v)$, где r/v – то запаздывание (по сравнению с источником), с которым волны \vec{A} и $\phi_{\text{ск}}$ придут в точку наблюдения вследствие конечной скорости своего распространения. Указанные решения называются запаздывающими потенциалами: в точке наблюдения потенциалы появляются с задержкой по отношению к своим источникам (следствие отстает по времени от своей причины).

В случае удержания знака "плюс" в (1.77), (1.78) причинно-следственные связи нарушаются: потенциалы в точке наблюдения возникают раньше, чем начинают действовать порождающие их источники. Это противоречит здравому смыслу, и такие опережающие решения в технике отбрасываются.

1.9 Некоторые принципы технической электродинамики

На многие практические вопросы технической электродинамики можно дать быстрый ответ, если воспользоваться принципами, которые изложены в данном разделе.

Принцип суперпозиции

Пусть в некоторой точке пространства одновременно действуют поля \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 , создаваемые различными источниками, работающими на одной и той же частоте. Естественно, что как первое, так и второе поле описываются уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_1 &= i\omega\epsilon_a \vec{E}_1, & \text{rot } \vec{H}_2 &= i\omega\epsilon_a \vec{E}_2, \\ \text{rot } \vec{E}_1 &= -i\omega\mu_a \vec{H}_1, & \text{rot } \vec{E}_2 &= -i\omega\mu_a \vec{H}_2. \end{aligned}$$

Так как данные уравнения линейны, то "третье" (эквивалентное) поле $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 \pm \vec{E}_2, \vec{H}_3 = \vec{H}_1 \pm \vec{H}_2$ также удовлетворяет им:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_1 \pm \text{rot } \vec{H}_2 &= i\omega\epsilon_a \vec{E}_1 \pm i\omega\epsilon_a \vec{E}_2, \\ \text{rot } \vec{E}_1 \pm \text{rot } \vec{E}_2 &= -i\omega\mu_a \vec{H}_1 \mp i\omega\mu_a \vec{H}_2. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Таким образом, следует помнить, что векторы напряженности двух, трех и более полей одинаковой частоты в каждой точке, где они существуют одновременно, складываются геометрически. Поэтому в зависимости от их ориентации общая напряженность поля может быть как больше напряженности любого отдельного поля, так и меньше его, в том числе она может равняться нулю. Волны полей разных частот существуют независимо (пока среда остается линейной), друг на друга не влияют и при наличии перестраиваемого приемника воспринимаются каждая отдельно без взаимных помех.

Принцип поведения поля на бесконечности

Зоммерфельд показал, что поля, "правильно" ведущие себя на бесконечном удалении от источника, должны удовлетворять условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial Z}{\partial r} + ik \cdot Z \right) = 0, \quad (1.86)$$

где в качестве Z может выступать любая компонента \vec{E} , \vec{H} и \vec{A} , $\phi_{\text{ск}}$. В частности, правилу Зоммерфельда удовлетворяют запаздывающие решения волновых уравнений и не удовлетворяют опережающие решения. Следовательно, соотношение (1.86) позволяет в случае неясности выбрать из нескольких решений правильное.

Принцип перестановочной двойственности

Уравнения Максвелла (1.36,а), (1.36,б) очень похожи. Легко видеть, что если формально заменить ϵ_a на $(-\mu_a)$, а μ_a на $(-\epsilon_a)$, то уравнения (1.36,а) и (1.36,б) взаимно перейдут друг в друга, если одновременно ввести перестановку $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$. При наличии сторонних токов принцип перестановочной двойственности записывается следующим образом:

$$-\dot{\epsilon}_a \leftrightarrow \dot{\mu}_a, \quad j_{\text{ст}}^{\text{Э}} \leftrightarrow -j_{\text{ст}}^{\text{М}}, \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{H}. \quad (1.87)$$

Практическую ценность данного принципа проиллюстрируем на примере из области антенной техники. Допустим, строго решена задача об излучении металлической вибраторной антенны, изображенной на рисунке 1.11,а. Это значит, что получены аналитические выражения для расчета напряженности поля в любой точке пространства, окружающего вибратор. Если теперь поставлена новая задача: рассчитать поле излучения антенны (рисунок 1.11,б) в виде сквозной щели, конгру-

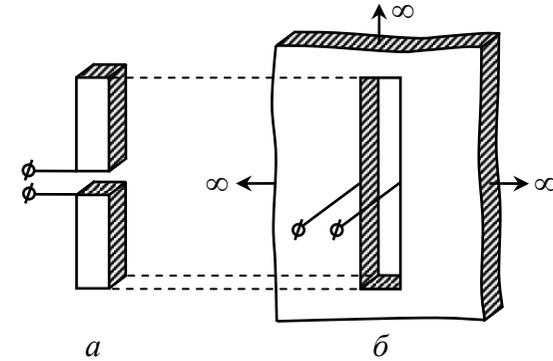


Рисунок 1.11

энтной с вибратором и прорезанной в бесконечном металлическом экране, то подробное решение этой задачи выполнять не нужно. Чтобы вычислить $\vec{E}_{\text{щ}}$ (или $\vec{H}_{\text{щ}}$), создаваемые щелевой антенной в произвольной точке, следует взять выражение для $\vec{H}_{\text{в}}$ ($\vec{E}_{\text{в}}$) вибраторной антенны и в нем произвести перестановку по правилу (1.87). Мы сразу получим готовые формулы для новой задачи, строгое решение которой сопряжено с определенными математическими трудностями. В разделе 2.2 мы воспользуемся подобным приемом.

Принцип взаимно дополнительных экранов

Данный принцип утверждает, что электромагнитные поля, возникающие вследствие дифракции (рассеяния) волны на плоском металлическом экране конечных размеров с произвольной конфигурацией границ (рисунок 1.12,а) и на конгруэнтном с ним отверстии в бесконечно протяженном плоском металлическом экране (рисунок 1.12,б), равны по модулю и отличаются на 180° по фазе:

$$\vec{E}_{g1} = -\vec{E}_{g2}, \quad \vec{H}_{g1} = -\vec{H}_{g2}. \quad (1.88)$$

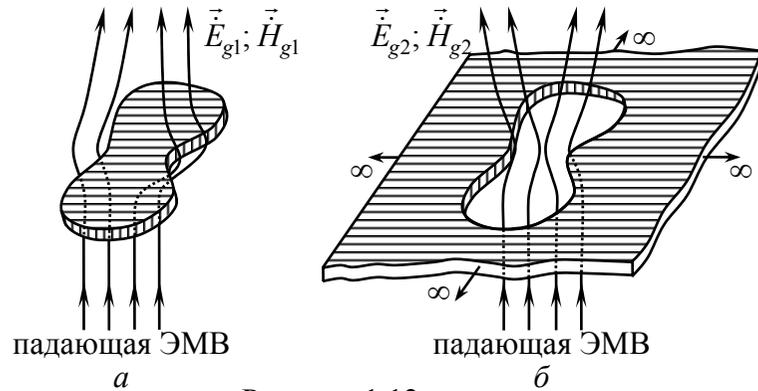


Рисунок 1.12

Единственность решения внутренней задачи электродинамики

Внутренней называется задача по определению электромагнитного поля в точках внутри замкнутого объема, содержащего в себе один или несколько источников электромагнитных волн. На рисунке 1.13,а изображено сечение такого объема V поперечной плоскостью. Звездочками обозначены внутренние источники поля. Пусть A и B – произвольные точки на поверхности S объема, а $E_{\tau A}$, $E_{\tau B}$ – значения касательной компоненты вектора \vec{E} на этой поверхности. Кривые 1, 2, 3 – некоторые (из всех возможных) варианты изменения напряженности электрического поля внутри V в точках, лежащих на хорде AB .

Если для замкнутого объема V известны свойства среды, заполняющей объем; в каждой точке поверхности объема задано значение касательной составляющей \dot{E}_{τ} и (или) \dot{H}_{τ} ; имеется полная информация о расположенных внутри объема сторонних электрических и магнитных источниках (интенсивность, частота, координаты, ориентация), то уравнения Максвелла имеют одно-единственное решение при условии, что среда внутри объема или на его стенках обладает конечными потерями (например, решение 1 на рисунке 1.13,а).

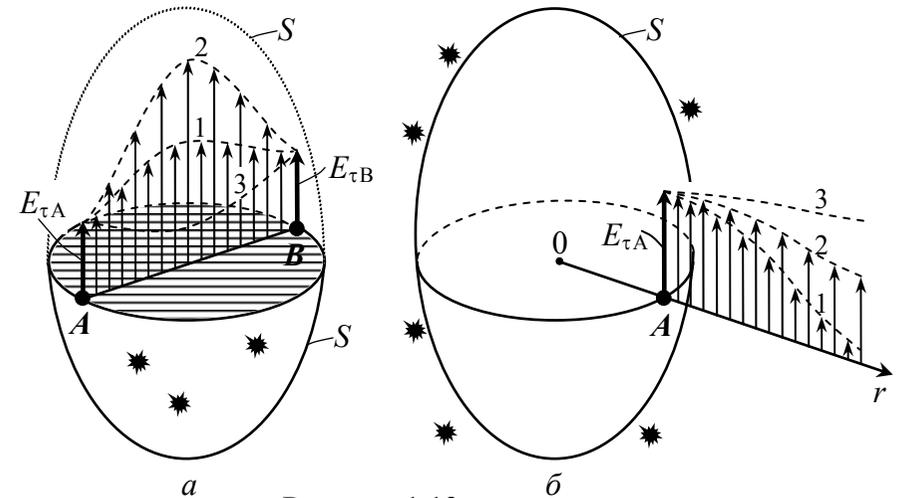


Рисунок 1.13

При отсутствии потерь единственность решения сохраняется в том случае, когда частота источников поля, расположенных внутри объема, не совпадает с его резонансной частотой. В случае резонансной настройки источников и отсутствии потерь в объеме единственность решения уравнений Максвелла исчезает, то есть уравнения Максвелла допускают два, три (см. рисунок 1.13,а) и более решений, опирающихся на одинаковые значения $E_{\tau A}$, $E_{\tau B}$ на поверхности S , но отличающихся одно от другого внутри объема V .

Единственность решения внешней задачи электродинамики

Принцип приложи'м к техническим устройствам, в которых источники расположены вне заданного объема на конечном расстоянии от его поверхности (рисунок 1.13,б). Единственность решения уравнений Максвелла гарантирована, если в окружающей среде или в стенках объема имеются хотя бы небольшие потери (например, решение 1 на рисунке 1.13,б). При

полном отсутствии потерь и при совпадении частоты источника и собственной резонансной частоты объема единственность решения нарушается (например, варианты решений 1, 2, 3 на рисунке 1.13,б, имеющие одинаковое значение напряженности поля $E_{\tau A}$ на стенке объема, но разный ход зависимостей $E(r)$ вне объема при $r > r_A$).

Принцип взаимности

Математическая формулировка принципа вытекает из леммы Лоренца: если в объеме V размещены сторонние источники (электрические и магнитные токи с плотностью $\vec{j}_{ct1}^{\text{Э}}$, $\vec{j}_{ct1}^{\text{М}}$ и $\vec{j}_{ct2}^{\text{Э}}$, $\vec{j}_{ct2}^{\text{М}}$), создающие поля \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 , то при заполнении объема изотропной средой справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\iint_S \{[\vec{E}_2 \cdot \vec{H}_1] - [\vec{E}_1 \cdot \vec{H}_2]\} d\vec{s} = i\omega \cdot \iiint_V (\vec{j}_{ct1}^{\text{Э}} \cdot \vec{E}_2 - \vec{j}_{ct2}^{\text{Э}} \cdot \vec{E}_1) dV + i\omega \cdot \iiint_V (\vec{j}_{ct2}^{\text{М}} \cdot \vec{H}_1 - \vec{j}_{ct1}^{\text{М}} \cdot \vec{H}_2) dV. \quad (1.89)$$

Ограничимся, для простоты, рассмотрением только электрических источников ($\vec{j}_{ct1,2}^{\text{М}} = 0$). Будем также предполагать наличие потерь в среде, заполняющей объем V , что всегда имеет место на практике. В этом случае последнее соотношение можно существенно упростить. Действительно, равенство (1.89) сохраняется, если, оставляя на месте источники, беспредельно увеличивать объем V и, следовательно, его поверхность S . Поскольку размер поверхности растет пропорционально r^2 (здесь r – расстояние от некоторого центра, выбранного в месте сосредоточения источников поля, до поверхности S), а напряженности полей $|\vec{E}|$ и $|\vec{H}|$ в среде с потерями убывают быстрее, чем по закону r^{-1} (см. (1.76)), то интеграл в левой части (1.89)

при $r \rightarrow \infty$ становится равным нулю (рисунок 1.14). Тогда из (1.89) следует

$$\iiint_{V_1} \vec{j}_{ct1}^{\text{Э}} \cdot \vec{E}_2 dV = \iiint_{V_2} \vec{j}_{ct2}^{\text{Э}} \cdot \vec{E}_1 dV, \quad (1.90)$$

причем интегрирование слева и справа осуществляется по той части объема V , в которой соответственно присутствуют $j_{ct1}^{\text{Э}}$ и

$j_{ct2}^{\text{Э}}$. В качестве примера рассмотрим две разнесенные вибраторные антенны длиной ℓ_1, ℓ_2 сечением S_1, S_2 (рисунок 1.15). Учитывая, что $dV = S \cdot dl$, от (1.90) переходим к равенству

$$i_{ct1}^{\text{Э}} \cdot \dot{\mathcal{A}}_1 = i_{ct2}^{\text{Э}} \cdot \dot{\mathcal{A}}_2, \quad (1.91)$$

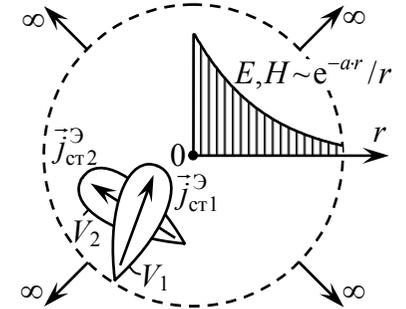


Рисунок 1.14

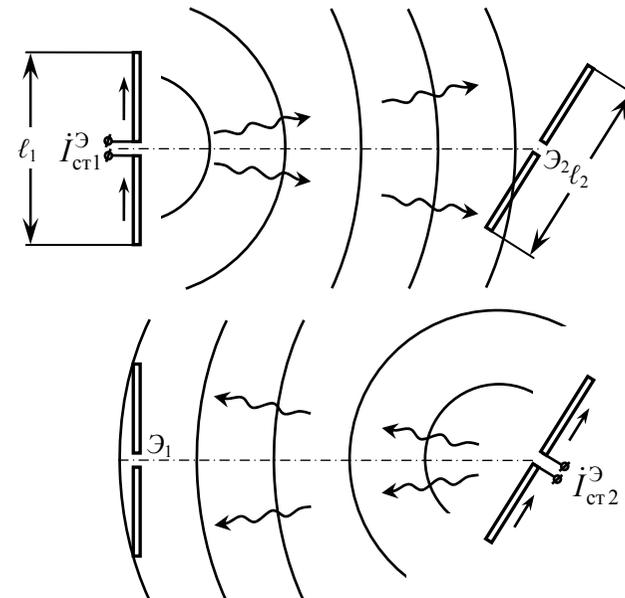


Рисунок 1.15

где $i_{ст1,2}^{\circ} = j_{ст1,2}^{\circ} \cdot S$ – сторонние токи в антеннах;
 $\dot{\mathcal{A}}_{1,2} = \int_{\ell} \dot{E}_{1,2} d\ell$ – э.д.с., создаваемые на зажимах 1-й (или 2-й)

антенны, работающей на прием, если 2-я (или 1-я) антенна подключена к передатчику. Соотношение (1.91) можно переписать в виде

$$i_{ст1}^{\circ} / i_{ст2}^{\circ} = \dot{\mathcal{A}}_2 / \dot{\mathcal{A}}_1, \quad (1.92)$$

и следует понимать так, что любая антенна одинаково успешно (или неуспешно) работает как на передачу, так и на прием.

Принцип взаимности справедлив только при расположении антенн в изотропных (взаимных) средах. Наличие анизотропной среды между антеннами нарушает изложенный принцип.

Принцип Гюйгенса-Кирхгофа

Принцип позволяет вычислить любую скалярную компоненту векторов напряженности поля $\dot{U}_m = \dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{E}_z, \dot{H}_x, \dot{H}_y, \dot{H}_z$ в произвольной точке M внутри или вне объема V , если всюду на окружающей объем поверхности S известны как сами перечисленные скалярные компоненты, так и их нормальные производные (нормаль к стенке ориентируется внутри объема):

$$\dot{U}_m = \iint_S \left(G \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad (1.93)$$

где функция Грина G определена ранее (см. (1.84)).

Принцип электродинамического подобия

Принцип часто используется в радиолокационной и антенной технике. Если все размеры антенны и ее рабочую длину волны одновременно уменьшить (или увеличить) в одинаковое

число раз, то параметры антенны (входные сопротивления, излучательная активность, характеристики направленности излучения) сохранятся. Точно так же не изменяется радиолокационные характеристики объекта – самолета, ракеты, спутника (эффективная поверхность рассеяния, поляризационная картина отраженной волны и др.), если удовлетворено требование подобия. Указанный принцип используется для испытаний на удобных по размерам моделях сложных антенн и радиолокационных объектов.

Пограничные соотношения для компонент электромагнитного поля

В подавляющем большинстве конкретных практических задач технической электродинамики электромагнитные волны взаимодействуют с границей раздела различных сред. Выясним, каким условиям подчиняются компоненты поля при переходе волны из одной среды в другую.

Начнем с нормальных составляющих поля. На рисунке 1.16,а изображен участок бесконечной поверхности, разделяющей среды 1 и 2, характеризующиеся параметрами $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \rho_1$ и $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \rho_2$. Допустим для общности, что на поверхности с плотностью $\xi_{пов}$, Кл/м² распределен электрический заряд (т.е. граница раздела сред заряжена).

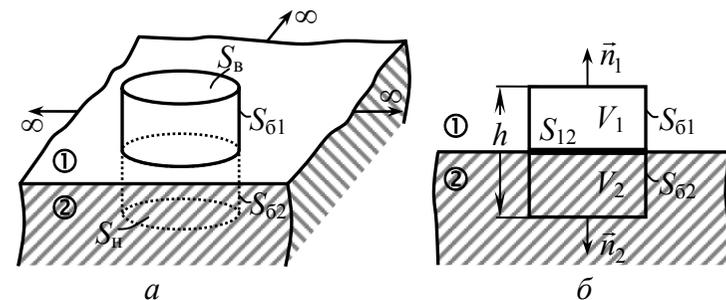


Рисунок 1.16

Выберем некоторый произвольный объем V , расположив его так, что часть объема V_1 находится в первой среде, а другая часть V_2 – во второй. Пусть S_{12} – площадь сечения V поверхностью раздела сред. Применим к выбранному объему теорему Гаусса (1.15). Левая часть уравнения (1.15) будет складываться из потока вектора \vec{D}_1 через верхнюю (S_B) и боковую (S_{61}) части поверхности объема V_1 , а также потока вектора \vec{D}_2 через нижнюю (S_H) и боковую (S_{62}) части поверхности объема V_2 . Полный электрический заряд, заключенный в объеме V (правая часть уравнения (1.15)), суммируется из зарядов, сосредоточенных в V_1 , в V_2 и распределенных по поверхности S_{12} :

$$\iint_{S_B} \vec{D}_1 d\vec{s} + \iint_{S_{61}} \vec{D}_1 d\vec{s} + \iint_{S_{62}} \vec{D}_2 d\vec{s} + \iint_{S_H} \vec{D}_2 d\vec{s} = \iiint_{V_1} \rho_1 dV + \iiint_{V_2} \rho_2 dV + \iint_{S_{12}} \xi_{\text{пов}} ds. \quad (1.98)$$

Совершим предельный переход, устремив высоту h объема к нулю (рисунок 1.16,б). Очевидно, что при этом второй и третий интегралы слева и первые два интеграла справа в (1.98) обратятся в нуль. Какой бы ни была первоначальная конфигурация объема, при $h \rightarrow 0$ поверхности S_B и S_H совмещаются с S_{12} . Поэтому (1.98) принимает вид

$$\iint_{S_{12}} \vec{D}_1 d\vec{s} + \iint_{S_{12}} \vec{D}_2 d\vec{s} = \iint_{S_{12}} \xi_{\text{пов}} ds,$$

или
$$\vec{D}_1 \cdot S_{12} \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot S_{12} \cdot \vec{n}_2 = \xi_{\text{пов}} \cdot S_{12}.$$

Отсюда, учитывая, что нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 противоположно направлены, получаем первые пограничные соотношения:

для нормальных компонент вектора \vec{D} –

$$D_{1n} - D_{2n} = \xi_{\text{пов}}, \quad (1.99)$$

и для нормальных составляющих вектора \vec{E} –

$$E_{1n} \cdot \epsilon_{a1} - E_{2n} \cdot \epsilon_{a2} = \xi_{\text{пов}}. \quad (1.100)$$

Перпендикулярная границе раздела сред составляющая вектора \vec{E} терпит разрыв при переходе волны из 1-й среды во 2-ю ($E_{1n} \neq E_{2n}$), если поверхность раздела заряжена и (или) если диэлектрические проницаемости сред различны.

Повторив вывод, аналогичный (1.98)–(1.100), для вектора \vec{B} , с учетом отсутствия в природе магнитных зарядов, не трудно получить

$$B_{1n} - B_{2n} = 0, \quad (1.101)$$

$$H_{1n} \cdot \mu_{a1} - H_{2n} \cdot \mu_{a2} = 0. \quad (1.102)$$

Нормальная составляющая вектора \vec{H} при пересечении волной границы раздела сред терпит разрыв ($H_{1n} \neq H_{2n}$), когда среды отличаются по магнитным свойствам ($\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$).

Перейдем к касательным компонентам поля. Вновь рассмотрим участок бесконечной поверхности, разделяющей среды 1 и 2. Однако теперь выберем произвольный замкнутый контур ℓ , расположив его так, чтобы он частично находился в первой среде, а частично – во второй (рисунок 1.17).

Для общности допустим, что по границе раздела сред протекает электрический ток с плотностью $\vec{j}_{\text{пов}}$, А/м. Будем считать, что в толще сред 1 и 2 также существуют токи проводимости, характеризующиеся плотностями $\vec{j}_{\text{пр1}}$ и $\vec{j}_{\text{пр2}}$. Применим к контуру закон Ампера (1.7). Циркуляцию вектора \vec{H}

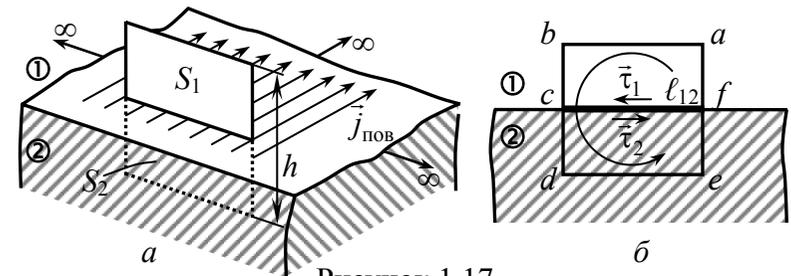


Рисунок 1.17

по контуру (левая часть (1.7)) можно вычислить суммированием линейных интегралов по отдельным отрезкам контура, совершая обход в произвольно принятом направлении, например, против часовой стрелки:

$$\begin{aligned} & \int_a^e \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_e^c \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_c^d \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_d^e \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_e^f \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_f^a \vec{H}_1 d\vec{l} = \\ & = \iint_{S_1} \vec{j}_{\text{пр}1} d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{j}_{\text{пр}2} d\vec{s} + \iint_{S_1} \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} d\vec{s} + \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} d\vec{s} + \int_{\ell_{12}} \vec{j}_{\text{пов}} d\vec{l}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Осуществим, как и в предыдущем анализе, предельный переход, уменьшая до нуля размер h контура. Тогда петля "a-b-c-d-e-f-a" стягивается в линию "c-f", и поэтому в (1.103) обратятся в нуль 2,3,5,6-й интегралы слева и 1,2,3,4-й справа:

$$\int_f^c \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_c^f \vec{H}_2 d\vec{l} = \int_{\ell_{12}} \vec{j}_{\text{пов}} d\vec{l},$$

или
$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\ell}_{12} \cdot \vec{\tau}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{\ell}_{12} \cdot \vec{\tau}_2 = j_{\text{пов}} \cdot \ell_{12}.$$

Учитывая противоположные направления векторов $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$, приходим к пограничным соотношениям для касательных компонент векторов \vec{H} и \vec{B} :

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{\text{пов}}, \quad (1.104)$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}} = j_{\text{пов}}. \quad (1.105)$$

Как следует из (1.104), касательная компонента магнитного вектора при переходе волны из одной среды в другую изменяется на величину плотности электрического тока, текущего по поверхности раздела ($H_{2\tau} = H_{1\tau} - j_{\text{пов}}$). Если $j_{\text{пов}} = 0$, касательная магнитная компонента на граничной поверхности непрерывна.

Проведем теперь рассуждения, подобные вышеизложенным, применительно к закону Максвелла (1.11), записав его для контура "a-b-c-d-e-f-a" (рисунок 1.17,б):

$$\begin{aligned} & \int_a^e \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_e^c \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_d^e \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_e^f \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_f^a \vec{E}_1 d\vec{l} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_1} \vec{B}_1 d\vec{s} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_2} \vec{B}_2 d\vec{s}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Устремляя высоту h контура к нулю, приходим к

$$\int_f^c \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_c^f \vec{E}_2 d\vec{l} = 0,$$

или

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{\ell}_{12} \cdot \vec{\tau}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{\ell}_{12} \cdot \vec{\tau}_2 = 0,$$

откуда

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0, \quad (1.107)$$

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_{a1}} - \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_{a2}} = 0. \quad (1.108)$$

Мы получили полный набор пограничных соотношений, которые в дальнейшем будут многократно нами использованы для решения различных электродинамических задач.

Закончим настоящий раздел разбором примера, наглядно иллюстрирующего важность знания только что установленных закономерностей. Пусть на гладкую незаряженную поверхность, разделяющую две диэлектрические среды ($\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 3$, $\mu_2 = 1$), под точно известным углом Θ падает электромагнитная волна с заданной величиной напряженности поля (известен $|\vec{E}_{\text{пад}}|$) (рисунок 1.18,а). Пользуясь пограничными условиями поведения поля, установить точное направление движения волны во второй среде.

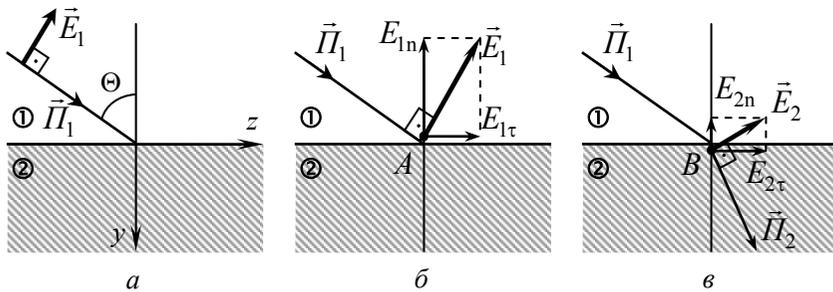


Рисунок 1.18

Предположим для конкретности, что вектор \vec{E}_1 падающей волны лежит в плоскости yOz (рисунок 1.18,а). Выберем вблизи поверхности раздела сред две точки так, чтобы одна из них (точка A , рисунок 1.18,б) находилась в первой среде ($y_A = -0$), а другая (точка B , рисунок 1.18,в) – во второй среде ($y_B = +0$). Поскольку в точке A ориентация вектора \vec{E}_1 и его модуль известны, легко графически найти его нормальную (\vec{E}_{1n}) и касательную ($\vec{E}_{1\tau}$) составляющие, спроектировав вектор \vec{E}_1 на оси Oy и Oz . При прохождении волны через поверхность раздела сред (т. е. при переходе из точки A в точку B) должны выполняться пограничные соотношения. Тогда на основании (1.107) $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, а в соответствии с (1.100) $E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot E_{1n} = \frac{1}{3} \cdot E_{1n}$ ($\xi_{\text{пов}} = 0$, так как граница раздела незаряжена). По найденным проекциям $E_{2\tau}, E_{2n}$ легко построить вектор \vec{E}_2 прошедшей волны. Направление же распространения последней совпадает с вектором \vec{H}_2 , который ориентирован перпендикулярно \vec{E}_2 и лежит в плоскости yOz . Таким образом, поставленная задача решена.

1.10 Основные результаты первой главы

Электродинамика занимается изучением физических процессов, связанных с изменением в пространстве и во времени электрических и магнитных явлений. Техническая электродинамика исследует особенности протекания указанных явлений в конкретных технических устройствах: в радиотехнических цепях, в линиях передачи и резонаторах, в антеннах, а также в различных средах, применяемых на практике.

Как фундаментальная естественная наука электродинамика опирается на факты, полученные опытным путем. Математической основой является система уравнений Максвелла.

Фундаментальным понятием электродинамики является понятие об электромагнитном поле. Электромагнитное поле – одна из форм существования материи. Источниками поля служат электрические покоящиеся и движущиеся заряды.

Электромагнитное поле является носителем энергии и информации. Перенос в пространстве энергии поля и информации осуществляется с помощью электромагнитных волн. Волны – это возмущенное состояние электромагнитного поля. Волны поля возбуждаются вследствие изменения величины электрического заряда (в отдельной точке или в конечной области пространства), либо перемещения зарядов в пространстве (т.е. при появлении электрических токов). Возникнув в точке или в локальной области пространства, электромагнитные волны распространяются во всех направлениях. Выключение источников волн (т.е. прекращение изменения и передвижения электрических зарядов) останавливает процесс генерирования последних. Однако те волны, которые к этому моменту уже были возбуждены, продолжают существовать и после выключения источников, по-прежнему распространяясь все дальше и дальше от точки своего зарождения.

Состояние электромагнитного поля характеризуется векторами электрической (\vec{E}) и магнитной (\vec{H}) напряженности, а так же векторами электрической (\vec{D}) и магнитной (\vec{B}) индук-

ции. Согласно теории Максвелла изменение во времени электрического поля вызывает появление в этой точке вихря магнитного поля, изменение же последнего неизбежно приводит к возбуждению вихря электрического поля.

Узловой момент в теории Максвелла составляет гипотеза о существовании тока смещения. Этот ток имеет поляризационную природу и возникает тогда, когда электрическое поле непостоянно во времени. Плотность тока смещения численно равна скорости изменения электрической индукции. Ток смещения протекает во всех диэлектриках, в которых есть переменное электрическое поле. С введением тока смещения полный электрический ток по Максвеллу всегда замкнут.

Одним из следствий гипотезы о протекании тока смещения в электрических средах является излучение электромагнитных волн. Волна представляет собой развивающуюся в пространстве цепную реакцию взаимопорождений электрических и магнитных вихрей.

Уравнения Максвелла не могут быть решены без установления связи между векторами \vec{E} и \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} . Эта связь задается материальными уравнениями.

Для любого конечного объема пространства, в котором существует электромагнитное поле, энергия последнего подчиняется закону сохранения. Полная мощность, вырабатываемая сосредоточенными внутри данного объема сторонними источниками, расходуется на пополнение запаса электромагнитной энергии в объеме, на покрытие внутри него потерь, связанных с превращением энергии поля в другую форму, и на излучение электромагнитных волн за пределы объема.

Плотность потока излучаемой мощности характеризуется вектором Пойнтинга (\vec{P}). Своей ориентацией этот вектор указывает направление потока (излучения) электромагнитной энергии. Модуль же вектора \vec{P} определяет количество ватт электромагнитной мощности, переносимой излучением через площадку 1 м^2 , поставленную перпендикулярно потоку.

Состояние электромагнитного поля в любой точке пространства, где оно существует, можно определять не только с помощью векторов напряженности поля \vec{E} и \vec{H} , но и пользуясь потенциалами: электростатическим $\varphi_{\text{ск}}$ и векторным \vec{A} . Уравнения Максвелла устанавливают взаимосвязь между \vec{E} , \vec{H} и $\varphi_{\text{ск}}$, \vec{A} .

Движение электромагнитных волн описывается волновыми уравнениями, которые вытекают из уравнений Максвелла. В общем случае волновые уравнения относятся к классу трехмерных дифференциальных в частных производных второго порядка уравнений с правой частью, имеющей смысл источников волн. Решением данных уравнений являются сферические волны двух типов: разбегающиеся в бесконечность от начала системы координат, связанной с источником, и сбегающиеся из бесконечности в точку расположения источников. Первое решение, называемое запаздывающим, имеет реальный физический смысл, поскольку показывает, что в любую удаленную от источника точку волны \vec{E} , \vec{H} , \vec{A} или $\varphi_{\text{ск}}$ приходят (ввиду конечной скорости распространения) с задержкой по отношению к моменту своего возбуждения источником. Второе решение в виде сбегающихся волн называется опережающим и, как противоречащее причинно-следственным связям, в задачах технической электродинамики не учитывается.

Уравнения Максвелла порождают ряд принципов, которые не только важны сами по себе, как теоретический базис электродинамики, но и позволяют получать быстрые и точные ответы на многие практические задачи технической электродинамики. К основным относятся принцип суперпозиции, поведения поля на бесконечности, перестановочной двойственности, взаимодополнительных экранов, единственности решения внутренних и внешних электродинамических задач, взаимности, Гюйгенса-Кирхгофа, электродинамического подобия, поведение поля на границе раздела сред.

2 ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Задача настоящей главы состоит в том, чтобы, опираясь на предыдущий материал, показать, как в безграничном пространстве создается и формируется электромагнитное поле, с помощью каких технических устройств можно возбудить и излучить свободные электромагнитные волны. Известно, что излучение радиоволн осуществляется с помощью антенн. Разнообразие антенн, применяемых в современной радиоэлектронике, весьма велико. Однако какой бы сложной ни была антенна, ее всегда можно представить совокупностью элементарных излучателей трех типов: электрического диполя, магнитного диполя, элемента Гюйгенса.

2.1 Поле электрического диполя

Электрическим диполем называется элементарный линейный электрический вибратор, размеры которого много меньше излучаемой им длины волны, по которому протекает переменный во времени и постоянный по величине электрический ток и поле которого исследуется на расстояниях $r \gg \ell$. Излучатель подобного типа первым практически реализовал Г. Герц (1887 г.), поэтому его часто называют диполем Герца. Электрический диполь и эпюра протекающего по нему стороннего тока изображены на рисунке 2.1.

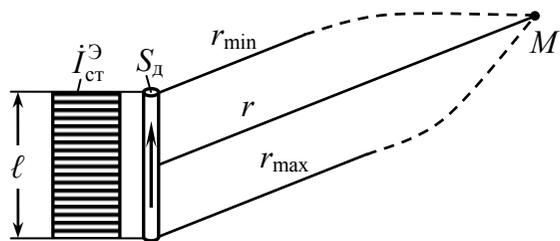


Рисунок 2.1

Выведем аналитические выражения для вычисления напряженности поля \vec{E} и \vec{H} в любой точке M вокруг диполя. Ограничимся случаем, когда $r \gg \ell$, поэтому $r_{\min} \approx r \approx r_{\max}$. Анализ поля удобно проводить в сферической системе координат (рисунок 2.2). Поставленная задача относится к числу тех, в которых целесообразно первоначально определить электродинамический потенциал \vec{A} поля, а уже зная его, найти напряженности \vec{E} и \vec{H} .

Вычислим векторный (запаздывающий) потенциал поля, создаваемого диполем в точке M . Согласно (1.77) интегрирование следует выполнять по объему диполя $V = \ell \cdot S_d$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{ст}}^{\ominus} e^{i(\omega t - kr)}}{r} d(\ell S_d).$$

Плотность тока $\vec{j}_{\text{ст}}^{\ominus}$ ($\vec{j}_{\text{ст}}^{\ominus} = \vec{z}_0 \cdot i_{\text{ст}}^{\ominus} / S_d$) неизменна по длине диполя, r также величина постоянная в силу удаленности точки M . Тогда

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot i_{\text{ст}}^{\ominus} \cdot \ell \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \cdot \vec{z}_0. \quad (2.1)$$

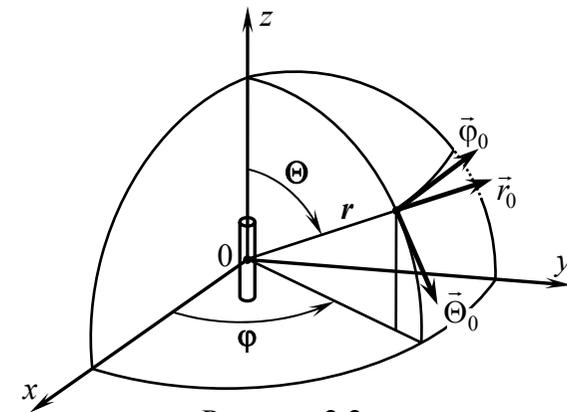


Рисунок 2.2

На основании (1.65) и (1.36,a)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \cdot \text{rot} \vec{A},$$

$$\vec{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \cdot \text{rot} \vec{H}.$$

Следовательно, напряженность магнитного поля диполя определяется вихрем первого порядка векторного потенциала ($\text{rot} \vec{A}$), а напряженность электрического поля – вихрем второго порядка ($\text{rot} \text{rot} \vec{A}$). Перепишем (2.1) в сферических координатах:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a \dot{I}_{\text{ст}} \cdot \ell}{4\pi} \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \cdot (\vec{r}_0 \cdot \cos\Theta - \vec{\Theta}_0 \cdot \sin\Theta), \quad (2.2)$$

или

$$\vec{A} = \dot{C} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot (\vec{r}_0 \cdot \cos\Theta - \vec{\Theta}_0 \cdot \sin\Theta), \quad (2.3)$$

где

$$\dot{C} = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \dot{I}_{\text{ст}} \cdot \ell \cdot e^{i\omega t}.$$

Тогда

$$\text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = \begin{vmatrix} \frac{\vec{r}_0}{h_\Theta \cdot h_\Phi} & \frac{\vec{\Theta}_0}{h_r \cdot h_\Phi} & \frac{\vec{\Phi}_0}{h_r \cdot h_\Theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ \dot{A}_r \cdot h_r & \dot{A}_\Theta \cdot h_\Theta & \dot{A}_\Phi \cdot h_\Phi \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

где h_r, h_Θ, h_Φ – коэффициенты Ламэ для сферической системы координат ($h_r=1, h_\Theta=r, h_\Phi=r \cdot \sin\Theta$), а проекции вектора \vec{A} равны $\dot{A}_r = \dot{C} \cdot \cos\Theta \cdot e^{-ikr}/r$, $\dot{A}_\Theta = -\dot{C} \cdot \sin\Theta \cdot e^{-ikr}/r$, $\dot{A}_\Phi = 0$. Вычисляя определитель (2.4) и возвращаясь к (1.65), получаем

$$\vec{H} = \vec{\Phi}_0 \cdot \frac{\dot{I}_{\text{ст}} \cdot \ell}{4\pi} \cdot \sin\Theta \cdot \left(\frac{1}{r} + ik\right) \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}. \quad (2.5)$$

С целью нахождения аналитического выражения для напряженности электрического поля \vec{E} нужно определить $\text{rot} \vec{H}$. Для этого следует повторить вычисления определителя (2.4), заменив в нем проекции \vec{A} на проекции \vec{H} . Из (2.5) очевидно, что $\dot{H}_r = \dot{H}_\Theta = 0$. Результатом вычислений является выражение

$$\vec{E} = \frac{\dot{I}_{\text{ст}} \cdot \ell}{4\pi i \cdot \omega \cdot \epsilon_a} \cdot \left\{ \vec{r}_0 \cdot \left[2\cos\Theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) \right] + \vec{\Theta}_0 \cdot \left[\sin\Theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2\right) \right] \right\} \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}. \quad (2.6)$$

Формулы (2.5), (2.6) позволяют рассчитать напряженность электромагнитного поля всюду (при $r \gg \ell$) вокруг электрического диполя. Анализируя полученные выражения, легко заметить, что как \vec{H} , так и \vec{E} содержат слагаемые, по-разному зависящие от r . Поэтому в зависимости от удаленности точки M от диполя определяющий вклад в величины \vec{E} и \vec{H} будут вносить разные слагаемые. В связи с этим принято выделять ближнюю, промежуточную и дальнюю зоны поля диполя.

Поле электрического диполя в ближней зоне

Ближней называется зона, в которой расстояние от точки наблюдения M до диполя мало по сравнению с длиной излучаемой волны λ ($r \ll \lambda$, но $r \gg \ell$). Поэтому в фазовой части выражений (2.5), (2.6) члены $k \cdot r = 2\pi \cdot r / \lambda \ll 1$ и $k \cdot r \ll \omega \cdot t$, что позволяет пренебречь ими. Аналогично, выделяя в амплитудной части наиболее сильные слагаемые, получаем

$$\vec{H} \approx \vec{\Phi}_0 \cdot \frac{\dot{I}_{\text{ст}} \cdot \ell}{4\pi \cdot r^2} \cdot \sin\Theta \cdot e^{i\omega t} = \vec{\Phi}_0 \cdot \dot{H}_{\Phi m} \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.7)$$

$$\vec{E} \approx \frac{\dot{I}_{\text{ст}}^{\partial} \cdot \ell}{4\pi i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a \cdot r^3} \cdot [\vec{r}_0 \cdot 2\cos\Theta + \vec{\Theta}_0 \cdot \sin\Theta] \cdot e^{i\omega t} = \quad (2.8)$$

$$= (\vec{r}_0 \cdot \dot{E}_{\text{rм}} + \vec{\Theta}_0 \cdot \dot{E}_{\text{0м}}) \cdot e^{i(\omega t - \pi/2)}.$$

Как видно, в ближней зоне поле диполя имеет характер стоячей волны: \dot{E}_{r} и \dot{E}_{0} сдвинуты по фазе на 90° относительно $\dot{H}_{\text{ф}}$. Поэтому потоки мощности поля, ориентированные в направлениях \vec{r}_0 и $\vec{\Theta}_0$ ($\dot{P}_{\text{r}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_{\text{0}} \cdot \dot{H}_{\text{ф}}^*$ и $\dot{P}_{\text{0}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_{\text{r}} \cdot \dot{H}_{\text{ф}}^*$), носят реактивный (колебательный) характер (рисунок 2.3,а). Из ближней зоны электромагнитные волны не излучаются. Составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} в ближней зоне быстро убывают с ростом r ($H_{\text{ф}} \sim 1/r^2$; $E_{\text{r}}, E_{\text{0}} \sim 1/r^3$).

Сформулированные выводы приближенны, так как они связаны с учетом неравенства $r \ll \lambda$. Фактически сквозь ближнюю зону проходят волны, несущие с собой радиально направленный поток активной мощности, подведенной от источника к диполю. Этот поток проходит затем через промежуточную и дальнюю зоны, формируя поле излучения диполя. Однако в ближней зоне поток активной мощности пренебрежимо мал по сравнению с большим реактивным потоком.

Поле электрического диполя в дальней зоне

В дальней зоне $r \gg \lambda$ (естественно, $r \gg \ell$). Поэтому величиной $k \cdot r$ в показателе экспоненты пренебрегать нельзя, а в амплитудной части (2.5), (2.6) наиболее весомыми будут члены, содержащие r^{-1} :

$$\vec{H} = \vec{\Phi}_0 \cdot \frac{\dot{I}_{\text{ст}}^{\partial} \cdot \ell \cdot ik}{4 \cdot \pi} \cdot \sin\Theta \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} = \vec{\Phi}_0 \cdot \dot{H}_{\text{фм}} \cdot e^{i(\omega t - kr + \pi/2)}, \quad (2.9)$$

$$\vec{E} = \frac{\dot{I}_{\text{ст}}^{\partial} \cdot \ell}{4\pi i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a} \cdot [\vec{r}_0 \cdot \frac{2ik}{r} \cdot \cos\Theta - \vec{\Theta}_0 \cdot k^2 \cdot \sin\Theta] \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} =$$

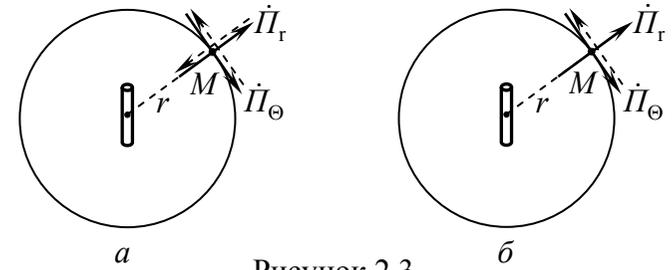


Рисунок 2.3

$$= \vec{r}_0 \cdot \dot{E}_{\text{rм}} \cdot e^{i(\omega t - kr)} - \vec{\Theta}_0 \cdot \dot{E}_{\text{0м}} \cdot e^{i(\omega t - kr + \pi/2)}. \quad (2.10)$$

В дальней зоне поле по-прежнему имеет три составляющие (\dot{E}_{r} , \dot{E}_{0} , $\dot{H}_{\text{ф}}$), однако его характер качественно изменился по сравнению с ближней зоной. Составляющие поля распространяются от центра диполя в виде сферических волн ((2.9), (2.10) содержат сферическую функцию Грина G (1.84)). Составляющие \dot{E}_{0} , $\dot{H}_{\text{ф}}$ колеблются в фазе, поэтому создаваемый ими радиальный поток мощности поля $\dot{P}_{\text{r}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_{\text{0}} \cdot \dot{H}_{\text{ф}}^*$ имеет чисто реальный характер. Эта мощность, навсегда уходящая от диполя, – мощность излучения. Составляющие \dot{E}_{r} , $\dot{H}_{\text{ф}}$ колеблются с фазовым сдвигом 90° , что приводит к реактивному характеру создаваемого ими потока мощности $\dot{P}_{\text{0}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_{\text{r}} \cdot \dot{H}_{\text{ф}}^*$. Поток скользит вдоль $\vec{\Theta}_0$, меняя на 180° свое направление через каждые полпериода колебаний поля (рисунок 2.3,б). Поскольку $|\dot{P}_{\text{0}}| \sim 1/r^3$, а $|\dot{P}_{\text{r}}| \sim 1/r^2$, в дальней зоне реактивный поток мал по сравнению с активным и с удалением от диполя неравенство $|\dot{P}_{\text{r}}| \gg |\dot{P}_{\text{0}}|$ усиливается. Ввиду того, что на больших расстояниях от диполя амплитуды $H_{\text{фм}}$ и $E_{\text{0м}}$ изменяются по закону r^{-1} , а $E_{\text{rм}}$ – по закону r^{-2} , последней составляющей можно пренебречь и приближенно описывать поле выражениями

$$\dot{H}_\varphi = \frac{i \cdot I_{\text{ст}}^{\ominus} \cdot \ell \cdot k}{4\pi} \cdot \sin\Theta \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}, \quad (2.11)$$

$$\dot{E}_\Theta = \frac{i \cdot I_{\text{ст}}^{\ominus} \cdot \ell \cdot k^2}{4\pi \cdot \omega \cdot \epsilon_a} \cdot \sin\Theta \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}. \quad (2.12)$$

На рисунке 2.4 изображена картина силовых линий поля электрического диполя.

Направленные свойства излучения электрического диполя

Функция, описывающая зависимость величины составляющих поля от угловых координат Θ, φ , называется функцией направленности. Графическое изображение этой функции на плоскости или в трехмерном пространстве принято называть диаграммой направленности. Пренебрегая в дальней зоне малой составляющей \dot{E}_r , видим, что направленные свойства излучения электрического диполя описываются функцией

$$F(\Theta) = \sin\Theta, \quad (2.13)$$

которая в любой плоскости сечения, проходящей через ось диполя, изображается "восьмеркой" (рисунок 2.5,а).

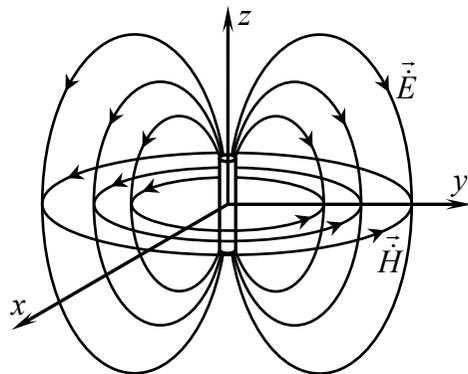


Рисунок 2.4

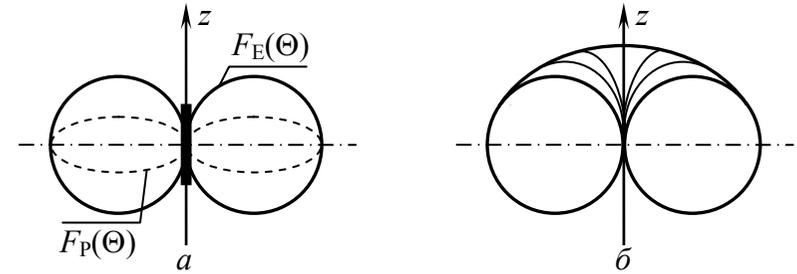


Рисунок 2.5

Так как $F(\Theta)$ не зависит от φ , что является естественным следствием осевой симметрии излучателя-диполя, то объемное изображение $F(\Theta)$ в сферических координатах имеет вид тора (рисунок 2.5,б). Наиболее интенсивно электрический диполь излучает в экваториальной плоскости ($\Theta = 90^\circ$). Если напряженность поля (E_Θ или H_φ) в некоторой точке этой плоскости принять за единицу, то при движении по дуге постоянного радиуса r в меридиональной плоскости напряженность поля будет уменьшаться по закону синуса. Вдоль своей оси ($\Theta = 0^\circ$ и 180°) диполь не излучает.

Мощность излучения электрического диполя

Правило вычисления мощности излучения любого источника определено формулой (1.47), в которую следует подставить комплексный вектор $\vec{I} = \vec{r}_0 \cdot \dot{I}_r + \vec{\Theta}_0 \cdot \dot{I}_\Theta$ для поля диполя. Выбор в качестве S сферической поверхности, центр которой совпадает с принятым началом сферической системы координат, упрощает интегрирование. С учетом (2.9), (2.10)

$$\begin{aligned} P_{\text{изл}} &= \frac{1}{2} \cdot \iint_S \dot{E}_\Theta \cdot \dot{H}_\varphi^* ds = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{I_{\text{ст}}^{\ominus} \cdot \ell}{4\pi} \right]^2 \cdot \frac{k^3}{\omega \cdot \epsilon_a} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} \sin^3 \Theta d\Theta d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot I_{\text{ст}}^{\ominus 2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Активная мощность, излучаемая диполем, зависит не только от величины протекающего по диполю тока, но и от электрической длины диполя (l/λ) и параметров окружающей среды. Величина

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = W \quad (2.15)$$

называется волновым сопротивлением среды. Для воздуха $W = W_0 = 120 \cdot \pi$ Ом. Поэтому мощность излучения диполя, окруженного воздухом, можно вычислить по формуле

$$P_{\text{изл}_0} = 40 \cdot \pi^2 \cdot I_{\text{ст}}^{\text{Э}2} \cdot \left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2 \quad (2.16)$$

Если среда вокруг диполя характеризуется показателем преломления

$$n = \sqrt{\epsilon \cdot \mu} \quad (2.17)$$

то излучаемая им мощность (при постоянных $I_{\text{ст}}^{\text{Э}}$, l , λ_0) возрастает в $\mu \cdot n$ раз:

$$P_{\text{изл}} = 40 \cdot \pi^2 \cdot \mu \cdot n \cdot I_{\text{ст}}^{\text{Э}2} \cdot \left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2 \quad (2.18)$$

Сопротивление излучения диполя

Подключим к выходу высокочастотного источника вместо электрического диполя чисто активное сопротивление R . Изменяя величину последнего, можно при одинаковой амплитуде тока в диполе и в сопротивлении R добиться такого положения, что мощность, отдаваемая источником в данное активное сопротивление ($P = \frac{1}{2} \cdot I_{\text{ст}}^{\text{Э}2} \cdot R$), станет равной мощности $P_{\text{изл}}$, которую отбирает от источника диполь и переизлучает ее в окружающее пространство. Указанную величину R называют

сопротивлением излучения электрического диполя:

$$R_{\text{изл}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (2.19)$$

Величина $R_{\text{изл}}$ измеряется в омах и характеризует излучательную способность диполя как антенны, которая не зависит от силы протекающего тока и определяется только параметрами окружающей среды и электрическим размером диполя.

Сопротивление излучения и направленные свойства линейного вибратора

В антенной технике широко используются проволочные антенны. Симметричные линейные вибраторы, применяемые в качестве телевизионных антенн, являются одним из примеров антенн такого типа (рисунок 1.15). Элемент длины проводника, обтекаемого переменным током, представляет собой диполь Герца, следовательно, любую проволочную антенну можно представить совокупностью электрических диполей. Совпадают ли направленные свойства и излучательная способность реальной антенны конечной длины и элементарного электрического излучателя? Выражение (2.19) показывает, что сопротивление излучения диполя связано квадратичной зависимостью с параметром l/λ . Например, удлинение диполя в 10 раз приводит к увеличению его сопротивления излучения в 100 раз. Эта закономерность показана штриховой линией на рисунке 2.6. Там же сплошной кривой изображен ход изменения с ростом l/λ величины $R_{\text{изл}}$ реальной проволочной антенны (симметричного вибратора) длиной l . Как видно, излучательная способность реальной антенны ниже, чем у диполя такой же длины, и различие усиливается при увеличении l/λ . Это объясняется тем, что вдоль плеч симметричного проволочного вибратора ток распределен не равномерно (как в диполе), а по синусоидальному закону (рисунок 2.7). Поэтому концевые эле-

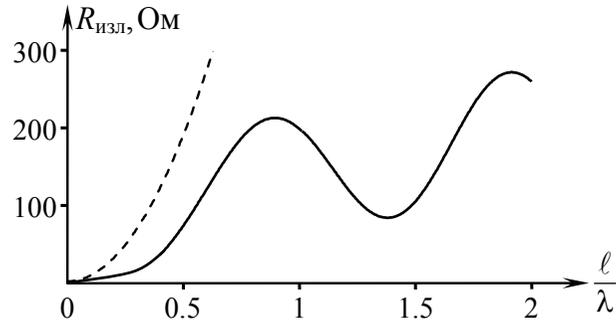


Рисунок 2.6

менты антенны, по которым протекает слабый ток, вносят в общее излучение меньший вклад, чем участки, попадающие на пучность тока. С удлинением плеч вибратора этот эффект усиливается. Что же касается снижения $R_{\text{изл}}$ правее отметок $l/\lambda = 1, 2, 3, \dots$, то объяснение этой закономерности кроется в появлении на плечах антенны участков провода с противоположным направлением тока, которые частично гасят общее излучение вибратора.

Направленные свойства реальной симметричной антенны также отличаются от свойств диполя. Диаграмма направленности проволочной антенны конечной длины отражает результат интерференции полей, излучаемых диполями, составляющими эту антенну. При увеличении l от малых значений до $l \approx \lambda$ ток в антенне сохраняет одинаковое направление, а участки с максимальной величиной тока постепенно удаляются друг от друга. В итоге диаграмма направленности сохраняет вид "восьмерки", лепестки которой постепенно сужаются. Начиная с $l = \lambda$, в антенне появляются участки противофазного тока. Диаграмма направленности теряет форму "восьмерки" вследствие возникновения побочных интерференционных лепестков, которые растут с увеличением l/λ при одновременном сужении и уменьшении главного максимума. Когда $l/\lambda = 2$, длины участков, обтекаемых противофазными токами, сравниваются. Поэтому в направлении $\Theta = 90^\circ$ их поля в дальней зоне

полностью компенсируют друг друга. В итоге двухволновый вибратор ($l = 2\lambda$), каждый элемент которого наиболее интенсивно излучает в поперечной плоскости, сам в этом направлении не излучает.

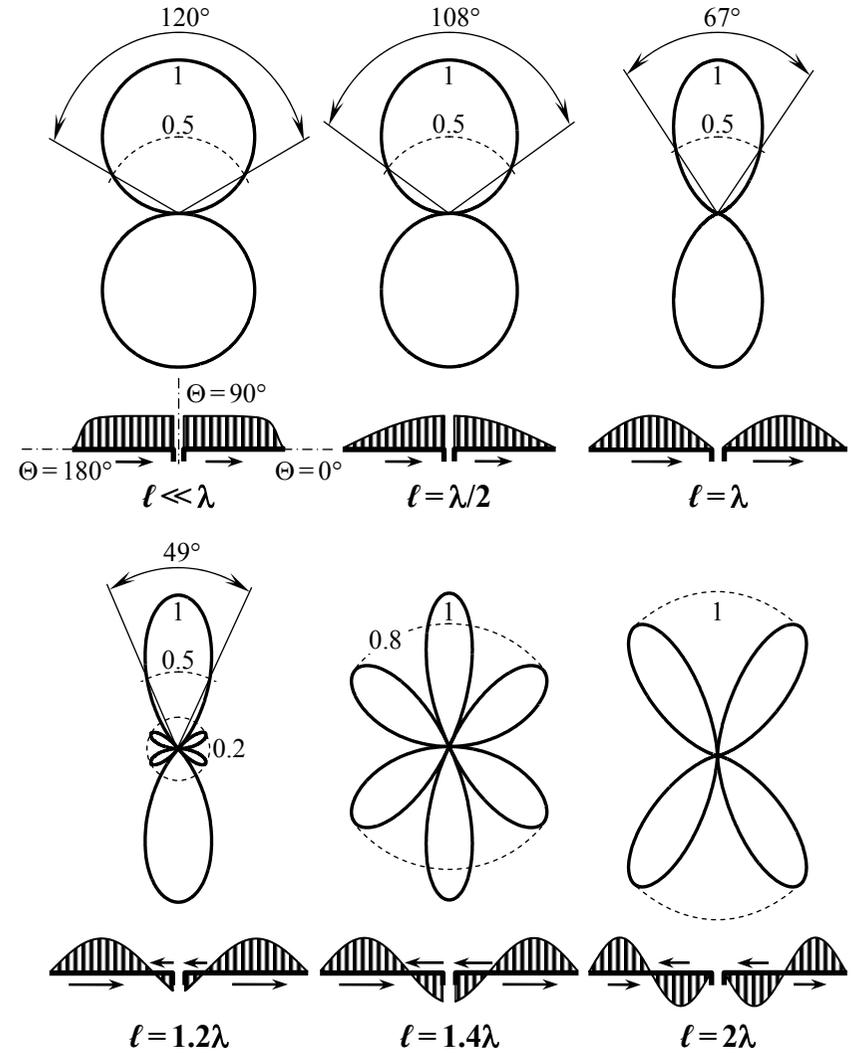


Рисунок 2.7

Временное изменение структуры поля электрического диполя

Для более ясного понимания процесса формирования в пространстве вокруг диполя излучаемого им электромагнитного поля проследим за отдельными этапами развития структуры электрических силовых линий (представление об ориентации магнитных линий дает рисунок 2.4). Герц первым провел расчет этих линий, которые изображены на рисунке 2.8 в моменты времени, отстоящие один от другого на $1/8$ часть периода колебаний диполя. Отчетливо видно, как через каждую половину периода за пределами ближней зоны происходит очередной отрыв силовых линий от диполя. Причина отрыва силовых линий вектора \vec{E} была объяснена в разделе 1.2 (рисунок 1.5). Вновь родившиеся вихри вектора \vec{E} оттесняют от диполя вихри, сформировавшиеся на $1/2$ периода раньше. При прекращении питания пропадают силовые линии, замыкающиеся на диполь. Те же линии, которые к моменту выключения источника питания успели замкнуться сами на себя, продолжают существовать независимо от действия высокочастотного генератора. Совместно с вихрями вектора \vec{H} они формируют убегающую от диполя сферическую волну (см. рисунок 1.6).

2.2 Поле магнитного диполя

Магнитный диполь является магнитным аналогом электрического диполя, то есть он представляет собой линейный излучатель длиной $l \ll \lambda$, по которому протекает переменный во времени и постоянный по величине магнитный ток $i_{ст}^M$. Отсутствие в природе магнитного тока не означает, что нельзя создать техническое устройство, по своему действию имитирующее излучение магнитного диполя. Один из примеров такого устройства показан на рисунке 1.11,б.

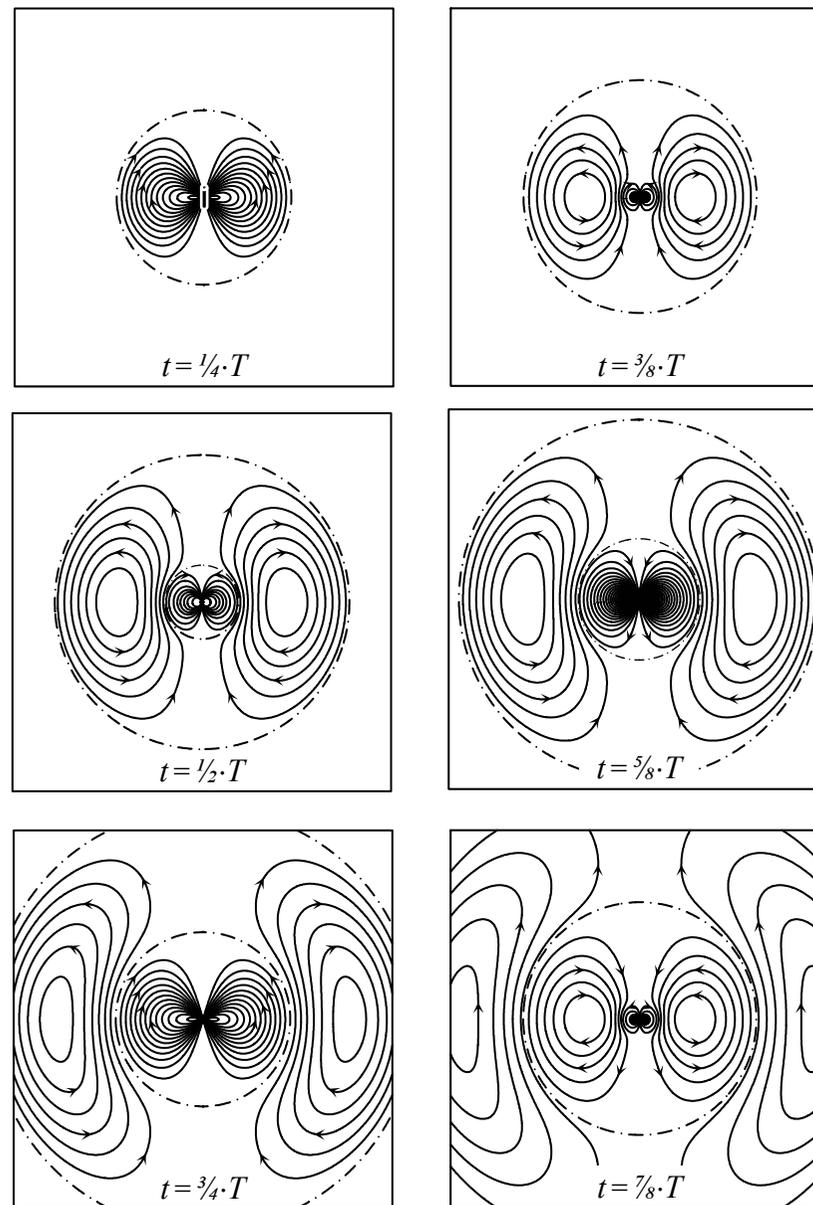


Рисунок 2.8

Замена в диполе электрического тока на магнитный приводит к тому, что в создаваемом магнитным излучателе электромагнитном поле силовые линии \vec{E} , \vec{H} будут в точности повторять конфигурацию линий \vec{H} , \vec{E} в поле электрического диполя (рисунок 2.9). Эта симметрия позволяет получить готовые выражения для вычисления напряженности поля магнитного диполя, применив правила перестановочной двойственности (1.87) к формулам (2.5) и (2.6):

$$\vec{E} = \vec{\varphi}_0 \cdot \frac{(-j_{\text{ст}}^M) \cdot \ell}{4\pi} \cdot \sin\Theta \cdot \left(\frac{1}{r} + i \cdot k\right) \cdot \frac{e^{i(\omega t - k \cdot r)}}{r}, \quad (2.20)$$

$$\vec{H} = \frac{j_{\text{ст}}^M \cdot \ell}{4\pi i \cdot \omega \cdot \mu_a} \cdot \{\vec{r}_0 \cdot [2 \cdot \cos\Theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)] + \vec{\Theta}_0 \cdot [\sin\Theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2\right)]\} \cdot \frac{e^{i(\omega t - k \cdot r)}}{r}. \quad (2.21)$$

Если \dot{U} – напряжение на зажимах щели в точке подключения источника (рисунок 1.11,б), то

$$j_{\text{ст}}^M = -2 \cdot \dot{U}. \quad (2.22)$$

Как и в случае электрического диполя, в поле магнитного излучателя можно выделить ближнюю, промежуточную и даль-

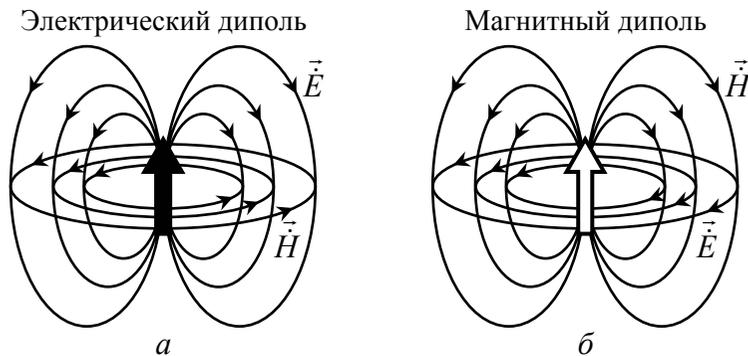


Рисунок 2.9

нюю зоны. Свойства поля в этих зонах аналогичны установленным в разделе 2.1.

Поле магнитного диполя в дальней зоне

Применяя принцип перестановочной двойственности к (2.9), (2.10) с учетом (2.22), получим

$$\dot{E}_\varphi = \frac{-j_{\text{ст}}^M \cdot \ell \cdot ik}{4\pi} \cdot \sin\Theta \cdot \frac{e^{i(\omega t - k \cdot r)}}{r}, \quad (2.23)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{-j_{\text{ст}}^M \cdot \ell \cdot k^2}{4\pi i \cdot \omega \cdot \mu_a} \cdot \sin\Theta \cdot \frac{e^{i(\omega t - k \cdot r)}}{r}, \quad (2.24)$$

$$\dot{H}_r = \frac{j_{\text{ст}}^M \cdot \ell \cdot k}{4\pi \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot r} \cdot 2 \cdot \cos\Theta \cdot \frac{e^{i(\omega t - k \cdot r)}}{r}. \quad (2.25)$$

Поле имеет характер сферической волны с тремя составляющими. Поток мощности направлен вдоль \vec{r}_0 ($\dot{P}_r = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_\varphi \cdot \dot{H}_\theta^*$) и $\vec{\Theta}_0$ ($\dot{P}_\Theta = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_\varphi \cdot \dot{H}_r^*$). Ввиду того, что составляющие \dot{E}_φ , \dot{H}_θ синфазны, поток \dot{P}_r реален и определяет мощность, излучаемую магнитным диполем:

$$P_{\text{изл}} = \frac{\pi}{3} \cdot I_{\text{ст}}^{M2} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \cdot \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot U^2 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \cdot \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2. \quad (2.26)$$

Составляющие \dot{E}_φ , \dot{H}_r изменяются во времени с взаимным фазовым сдвигом 90° , поэтому \dot{P}_Θ – мнимая величина, она характеризует реактивную мощность. Поскольку $|\dot{H}_r| \ll |\dot{H}_\theta|$, поток активной мощности излучения значительно превосходит колебательный реактивный поток $|\dot{P}_r| \gg |\dot{P}_\Theta|$, т.е. электромагнитное поле с большой точностью может быть представлено убегающими от центра диполя сферическими волнами.

Направленные свойства магнитного диполя те же, что и у электрического. Излучательную способность магнитного диполя удобней оценивать по величине проводимости излучения. Представляя $P_{изл}$ в виде $\frac{1}{2} \cdot U^2 \cdot G_{изл}$, из (2.26) легко получить

$$G_{изл} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \cdot \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2. \quad (2.27)$$

С помощью совокупности магнитных диполей можно представить не только щелевые антенны, нашедшие применение в аэрокосмической технике и в волноводно-щелевых антенных решетках. Малое металлическое кольцо, обтекаемое переменным током, или ферритовый стержень, возбуждаемый витком с высокочастотным током, также могут быть заменены магнитными диполями.

2.3 Поле элемента Гюйгенса

В радиолокации и радионавигации, в системах радиорелейной и космической связи на сверхвысоких частотах используются антенны (рупорные, параболические, перископические и другие), замена которых совокупностью электрических и магнитных диполей затруднена. Элементарным излучателем таких антенн является элемент Гюйгенса, представляющий собой (рисунок 2.10) плоскую площадку $a \times b$, равномерно обтекаемую в двух перпендикулярных направлениях переменными электрическим и магнитным токами. Элементом Гюйгенса является достаточно малый, чтобы быть плоским, участок фронта электромагнитной волны. На рисунке 2.11 элемент Гюйгенса выделен на излучающей апертуре (она изображена штриховкой) рупорной (рисунок 2.11,а) и параболической (рисунок 2.11,б) антенн.

Если ввести обозначения

$$\vec{I}_{ст}^{\mathcal{E}} = \vec{x}_0 \cdot j_{ст}^{\mathcal{E}} \cdot b, \quad \vec{I}_{ст}^{\mathcal{M}} = \vec{y}_0 \cdot j_{ст}^{\mathcal{M}} \cdot a,$$

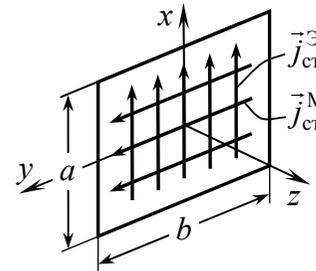


Рисунок 2.10

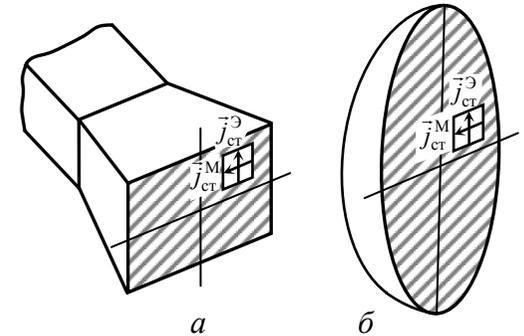


Рисунок 2.11

тогда элемент Гюйгенса можно рассматривать в виде прямого креста, сложенного из электрического и магнитного диполей (рисунок 2.12).

Направленные свойства элемента Гюйгенса

Аналитические выражения, описывающие поле, создаваемое элементом Гюйгенса в произвольной точке окружающего пространства, находятся суммированием (2.10) и (2.20), а также (2.9) и (2.21). При этом нужно не упустить из виду, что оси отсчета углов Θ для электрического $\Theta_{\mathcal{E}}$ и магнитного $\Theta_{\mathcal{M}}$ диполей повернуты одна относительно другой на 90° .

Проиллюстрируем графически формирование диаграммы направленности элемента Гюйгенса. В плоскости xOz (рисунок 2.13, $\Theta_{\mathcal{M}} = 90^\circ$) электрический диполь имеет диаграмму направленности в виде "восьмерки" ($F_{\mathcal{E}}(\Theta_{\mathcal{E}}) = \sin \Theta_{\mathcal{E}}$), магнитный диполь излучает равномерно во всех направле-

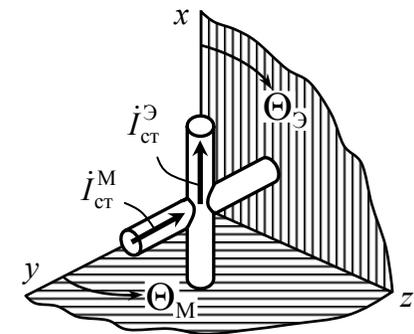


Рисунок 2.12

ниях ($F_M(\Theta_3)=1$). Общая диаграмма направленности описывается кардиоидой

$$F(\Theta_3)=1+\sin\Theta_3. \quad (2.28)$$

Аналогичная картина имеет место в плоскости yOz (рисунок 2.14, $\Theta_3=90^\circ$):

$$F_3(\Theta_M)=1, \quad F_M(\Theta_M)=\sin\Theta_M, \\ F(\Theta_M)=1+\sin\Theta_M. \quad (2.29)$$

Полная (объемная) диаграмма направленности элемента Гюйгенса получается вращением кардиоиды (2.28) или (2.29) вокруг оси Oz . Таким образом, элемент Гюйгенса не излучает только в одном направлении $\Theta_3=\Theta_M=270^\circ$. Максимум излучения приходится на направление $\Theta_3=\Theta_M=90^\circ$.

Наличие острого нуля в диаграмме направленности позволяет использовать элемент Гюйгенса при решении задачи пеленгации источников радиоизлучения. Практически антенна пеленгатора состоит из электрического вибратора, ориентированного вдоль оси Ox , и рамки переменного электрического тока, расположенной в плоскости xOz и заменяющей магнитный диполь. Именно такие антенны применяются спортсменами при "охоте на лис".

2.4 Основные результаты второй главы

Излучение электромагнитных волн в технике обеспечивается специальными устройствами – антеннами. Любая антенна как источник электромагнитных волн может быть представлена в виде совокупности элементарных излучателей. Известно три типа элементарных источников: электрический диполь (диполь Герца), магнитный диполь, элемент Гюйгенса.

Электромагнитное поле антенны является результатом сложения (интерференции) полей, излучаемых элементарными источниками, из которых может быть составлена данная антенна.

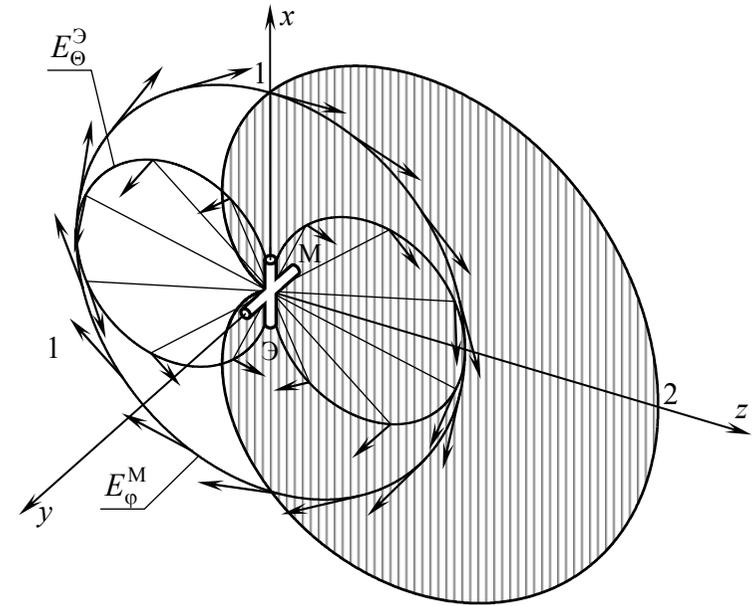


Рисунок 2.13

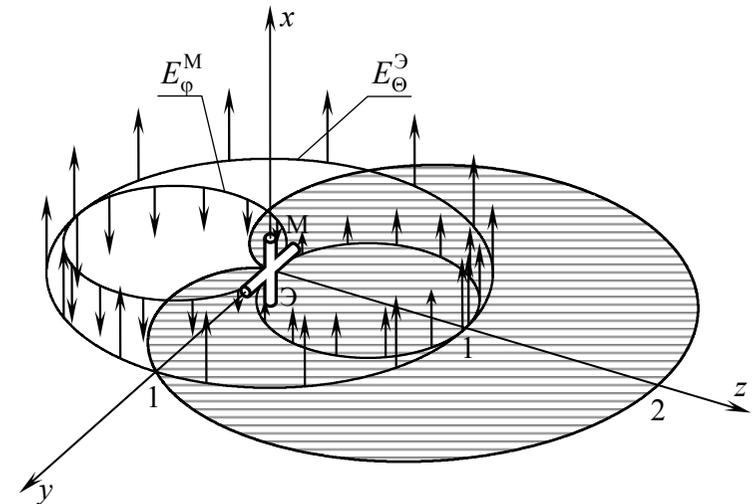


Рисунок 2.14

Электрическим диполем называется линейный излучатель (например, вытянутой цилиндрической формы), размеры которого много меньше излучаемой длины волны и по которому течет переменный во времени и постоянный по длине диполя электрический ток.

Электромагнитное поле электрического диполя удобно вычислять, пользуясь векторным потенциалом. Если последний найден, то магнитное поле диполя определяется вихрем первого порядка векторного потенциала, а электрическое поле – вихрем второго порядка.

По причине осевой симметрии электрического диполя поле, которое он формирует в окружающем пространстве, азимутально симметрично, т.е. картина силовых линий поля совмещается сама с собой при повороте ее на любой угол вокруг оси диполя.

В сферической системе координат r, Θ, φ , центр которой совмещен с серединой электрического диполя, полное электромагнитное поле последнего содержит три составляющие: одну магнитную и две электрические. Вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости, перпендикулярной диполю (она называется экваториальной), и имеет только азимутальную составляющую \dot{H}_φ . Вектор напряженности электрического поля располагается в меридиональной плоскости, проходящей через диполь, и представлен составляющими по углу листа \dot{E}_Θ и радиальной \dot{E}_r . Амплитуды компонентов поля $\dot{H}_\varphi, \dot{E}_\Theta, \dot{E}_r$ являются сложной функцией расстояния r , отсчитываемого от центра диполя: $|\dot{H}_\varphi|$ содержит слагаемые, пропорциональные r^{-1} и r^{-2} , $|\dot{E}_\Theta|$ – пропорциональные r^{-1}, r^{-2}, r^{-3} , а $|\dot{E}_r|$ – пропорциональные r^{-2}, r^{-3} .

В электромагнитном поле электрического диполя формируются два ортогональных направления потока мощности: радиальный – обусловлен наличием E_Θ - и H_φ -составляющих и характеризуется значением компоненты вектора Пойнтинга \dot{P}_r

и по углу места – создается E_r - и H_φ -составляющими и характеризуется значением компоненты \dot{P}_Θ .

В пространстве, окружающем электрический диполь и заполненном его полем, можно выделить три зоны: ближнюю, промежуточную и дальнюю.

В ближней зоне ($r \ll \lambda$) амплитуды $\dot{H}_\varphi, \dot{E}_\Theta, \dot{E}_r$ определяются в основном членами, пропорциональными r^{-2}, r^{-3} . В этой зоне поле носит преимущественно характер стоячей волны, поэтому потоки мощности в Θ - и r -направлениях являются почти чисто реактивными (электромагнитная энергия совершает колебательное движение). Реальный поток мощности в радиальном направлении настолько мал, что им можно пренебречь.

В промежуточной зоне ($r \sim \lambda$) с активным потоком мощности в r -направлении следует считаться, хотя реактивная мощность поля в этой области еще велика.

В дальней зоне ($r \gg \lambda$) составляющие электромагнитного поля пропорциональны: $|\dot{H}_\varphi| \sim r^{-1}$, $|\dot{E}_\Theta| \sim r^{-1}$, $|\dot{E}_r| \sim r^{-2}$, причем \dot{H}_φ и \dot{E}_Θ синфазно изменяются во времени и поэтому формируют реальный поток мощности поля в r -направлении (\dot{P}_r вещественно), а \dot{H}_φ и \dot{E}_r колеблются с фазовым сдвигом 90° , и создаваемый ими поток мощности в Θ -направлении реактивен (\dot{P}_Θ – мнимо). Так как вдали от диполя $|\dot{P}_\Theta| \ll |\dot{P}_r|$, дальняя зона характерна тем, что поле в ней ведет себя как бегущая волна, удаляющаяся (т.е. излучающаяся) от диполя. Поэтому данная зона называется также зоной излучения. На большом расстоянии от электрического диполя можно считать, что поле содержит лишь две составляющие: \dot{H}_φ и \dot{E}_Θ .

Поток мощности, излучаемой электрическим диполем, распределен в окружающем пространстве равномерно. Функция $F(\varphi, \Theta)$, описывающая это распределение, называется функцией направленности. Графическое изображение $F(\varphi, \Theta)$

называют диаграммой направленности. Для диполя в силу азимутальной симметрии его поля $F(\varphi, \Theta) = \sin\Theta$. Поэтому в полярных координатах диаграмма направленности имеет вид "восьмерки", составленной из двух соприкасающихся точных окружностей. Наиболее интенсивно электрический диполь излучает в экваториальной плоскости ($\Theta = 90^\circ$). При отклонении от нее напряженность излучаемого поля уменьшается по синусоидальному закону. Вдоль своей оси ($\Theta = 0^\circ, 180^\circ$) электрический диполь не излучает.

Полная мощность, излучаемая диполем, находится путем вычисления потока реальной мощности (определяемой величиной P_r) через любую замкнутую поверхность, окружающую диполь.

Излучательная способность электрического диполя оценивается по величине его сопротивления излучения ($R_{изл}, \text{Ом}$). Чем больше $R_{изл}$, тем, при прочих равных условиях, большую мощность диполь отбирает от подключенного к нему источника и переизлучает ее в окружающее пространство. Величина сопротивления излучения пропорциональна квадрату электрической длины диполя и волновому сопротивлению внешней среды.

Совокупностью электрических диполей можно представить любую антенну, составленную из металлических проводников.

Магнитный диполь – это элементарный излучатель, отличающийся от диполя Герца лишь тем, что вместо электрического тока по нему протекает магнитный ток.

Анализ магнитного диполя значительно облегчается, если к результатам исследования электрического диполя применить принцип перестановочной двойственности. Все сказанное выше для электрического диполя остается в силе и для элементарного магнитного излучателя, если поменять местами E - и H -компоненты поля.

Магнитный, диполь формирует поле, содержащее три составляющие $\dot{E}_\varphi, \dot{H}_\Theta, \dot{H}_r$. Существует ближняя, промежуточная

и дальняя зоны в поле магнитного диполя. В наиболее важной для практики дальней зоне преобладают две составляющие $\dot{E}_\varphi, \dot{H}_\Theta$, колеблющиеся в фазе и поэтому создающие реальный поток излучаемой мощности в радиальном направлении. Диаграммы направленности магнитного и электрического диполей совпадают. Излучательную способность магнитного диполя удобней характеризовать не сопротивлением, а проводимостью излучения ($G_{изл}, \text{См}$), которая пропорциональна волновому сопротивлению окружающей среды.

Совокупностью магнитных диполей можно представить щелевые, рамочные и ферритовые антенны.

Элемент Гюйгенса – это третий тип элементарного излучателя, который удобно вводить при анализе излучения апертурных антенн. Он представляет собой малый (в длинах волн) участок плоской поверхности, обтекаемый равномерно по всей площади переменными во времени и постоянными по величине электрическим и магнитным токами, ориентированными перпендикулярно друг другу.

Элемент Гюйгенса можно представить в виде совокупности электрического и магнитного диполей, образующих прямой крест. Поэтому поле элемента Гюйгенса находится суперпозицией полей, излучаемых диполями.

Элемент Гюйгенса обладает особенностью: он излучает во всех направлениях кроме одного $\Theta = 270^\circ$ (угол Θ отсчитывается от оси любого диполя). Максимальная интенсивность излучения соответствует направлению $\Theta = 90^\circ$. В плоскостях, являющихся экваториальной одного диполя и меридиональной для другого, диаграмма направленности имеет вид кардиоиды и описывается функцией $F(\Theta) = 1 + \sin\Theta$. В плоскости самого элемента Гюйгенса излучение его всенаправлено: $F(\Theta) = 1$, диаграмма направленности имеет форму круга.

3 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущей главе показано, каким образом и с помощью каких элементарных устройств могут быть искусственно возбуждены свободные электромагнитные волны. Задача данной главы – рассмотреть детально собственно процесс распространения излученных волн в свободном (т.е. безграничном) пространстве, целиком заполненном средой одного вида. Излучаемые элементарными источниками и реальными антеннами волны являются сферическими. Как уже отмечалось в разделе 1.7, сферическая волна может быть представлена набором плоских волн. Кроме того, на практике прием излучения производится обычно на большом удалении от излучателя (передатчика), причем приемная антенна в силу ограниченности своих размеров взаимодействует с малым участком фронта принимаемой сферической волны, который с хорошим приближением можно считать плоским. По этой причине анализ распространения плоских волн в безграничных средах приобретает большую практическую важность.

Будем называть электромагнитную волну плоской, если ее фазовый и амплитудный фронт представляет собой плоскость. Другими словами, у такой волны, если она, допустим, распространяется вдоль оси Oz, амплитуда и фаза остаются неизменными в плоскости xOy (рисунок 3.1). Следовательно, комплексные векторы \vec{E} и \vec{H} равны

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cdot e^{i(\omega t - kz)}. \quad (3.2)$$

Поле указанной волны, таким образом, должно удовлетворять условиям

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -i \cdot k. \quad (3.3)$$

В выражениях (3.1), (3.2) неизвестны постоянная распространения k , ориентация векторов \vec{E} , \vec{H} , отношение их амплитуд и фазовый сдвиг между ними. Каждый из перечисленных параметров определяется конкретными условиями распространения в заданной среде.

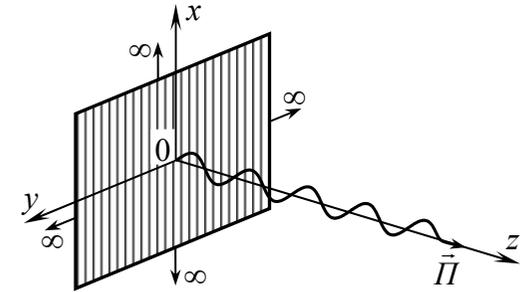


Рисунок 3.1

3.1 Волны в однородных изотропных средах

Спроектируем уравнения Максвелла (1.36,а,б) на оси декартовой системы координат. Получим систему шести скалярных уравнений

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = i\omega \cdot \epsilon_a \cdot \dot{E}_x, \quad (3.4,а) \quad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -i\omega \cdot \mu_a \cdot \dot{H}_x, \quad (3.4,з)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = i\omega \cdot \epsilon_a \cdot \dot{E}_y, \quad (3.4,б) \quad \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -i\omega \cdot \mu_a \cdot \dot{H}_y, \quad (3.4,д)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = i\omega \cdot \epsilon_a \cdot \dot{E}_z, \quad (3.4,в) \quad \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -i\omega \cdot \mu_a \cdot \dot{H}_z. \quad (3.4,е)$$

Подчиним соотношения (3.4) условиям (3.3). Тогда на основании (3.4,в,е) $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$, поэтому векторы \vec{E} и \vec{H} исследуемой волны располагаются в плоскости xOy. Оставшиеся четыре уравнения системы (3.4) разбиваются на две независимые подсистемы (3.4,а,д) и (3.4,б,з), относящиеся к двум волнам, которые одновременно и независимо друг от друга могут существовать в условиях данной задачи.

Из (3.4,а) и (3.4,д) с учетом $\partial/\partial z = -i \cdot k$ (3.3) следует, что

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\dot{k}}{\omega \cdot \dot{\epsilon}_a}, \quad \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\omega \cdot \dot{\mu}_a}{\dot{k}}, \quad \dot{k}^2 = \omega^2 \cdot \dot{\epsilon}_a \cdot \dot{\mu}_a,$$

т.е. первая волна (\dot{E}_x, \dot{H}_y) имеет постоянную распространения

$$\dot{k} = \omega \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_a \cdot \dot{\mu}_a}. \quad (3.5)$$

Из (3.4,б) и (3.4,д)

$$\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = -\frac{\dot{k}}{\omega \cdot \dot{\epsilon}_a}, \quad \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = -\frac{\omega \cdot \dot{\mu}_a}{\dot{k}}, \quad \dot{k}^2 = \omega^2 \cdot \dot{\epsilon}_a \cdot \dot{\mu}_a,$$

следовательно, постоянная распространения второй волны (\dot{E}_y, \dot{H}_x) та же, что и первой.

Распространение волны в среде без потерь

При отсутствии потерь постоянная распространения \dot{k} (3.5) вещественна. Поэтому первая (\dot{E}_x, \dot{H}_y) и вторая (\dot{E}_y, \dot{H}_x) волны бегут с одинаковой фазовой скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{\dot{k}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_a \cdot \dot{\mu}_a}},$$

причем величина последней сохраняется на любой частоте. Отношение амплитуд напряженностей электрической и магнитной составляющих волн равно волновому сопротивлению среды:

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{-\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}} = \dot{W}.$$

При отсутствии потерь \dot{W} вещественно, поэтому E - и H -составляющие волны изменяются в фазе (рисунок 3.2).

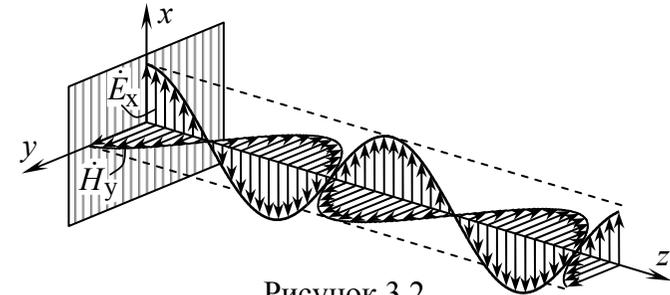


Рисунок 3.2

Поскольку всякую плоскую волну, бегущую вдоль Oz с векторами \vec{E} и \vec{H} , произвольно (но взаимно перпендикулярно) ориентированными в плоскости xOy , можно представить в виде суперпозиции первой (\dot{E}_x, \dot{H}_y) и второй (\dot{E}_y, \dot{H}_x) волн, следовательно, выявленные свойства присущи плоской волне любой частоты, распространяющейся в однородной изотропной среде без потерь в произвольном направлении.

3.2 Влияние потерь в среде на распространение электромагнитной волны

В среде с потерями постоянная распространения \dot{k} комплексна:

$$\dot{k} = \beta - i \cdot \alpha, \quad (3.6)$$

где β , $1/m$ – фазовая постоянная, характеризующаяся скорость перемещения фазового фронта волны

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}, \quad (3.7)$$

а α , $1/m$ – постоянная затухания, от величины которой зависит быстрота экспоненциального убывания амплитуды волны. Обращаясь к (1.34), (1.35), перепишем \dot{k} (3.5) в виде

$$\dot{k} = \omega \cdot \sqrt{(\epsilon'_a - i \cdot \epsilon''_a) \cdot (\mu'_a - i \cdot \mu''_a)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon'_a \cdot \mu'_a} \cdot \sqrt{(1 - i \cdot \text{tg} \delta_D) \cdot (1 - i \cdot \text{tg} \delta_M)}.$$

Приравняем полученное соотношение к (3.6) и решим новое равенство относительно β и α :

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon'_a \cdot \mu'_a}{2} \sqrt{\sqrt{(1 - \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} \cdot \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}})^2 + (\operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} + \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}})^2} + (1 - \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} \cdot \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}})}}, \quad (3.8)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon'_a \cdot \mu'_a}{2} \sqrt{\sqrt{(1 - \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} \cdot \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}})^2 + (\operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} + \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}})^2} - (1 - \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} \cdot \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}})}}. \quad (3.9)$$

Так как в выражении (3.8) частота входит в $\operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}}$ и $\operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}}$ (см., например, (1.34)), из формулы (3.7) следует важный вывод: в среде с потерями фазовая скорость зависит от частоты волны, т.е. появляется свойство дисперсии. При передаче через среду с потерями сложного сигнала дисперсия приводит к тому, что каждая спектральная составляющая сигнала будет перемещаться со своей скоростью. Следовательно, сигнал с конечной шириной спектра искажается, причем тем сильнее, чем больше разница максимальной и минимальной частот в его спектре, чем больший путь пробегает волна в среде и чем выше потери в этой среде. Наличие дисперсии вызывает необходимость введения понятия групповой скорости (скорости распространения группы волн)

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}, \quad (3.10)$$

под которой понимается скорость движения в среде с потерями максимума огибающей частотного спектра сложного сигнала:

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \frac{\langle \vec{I} \rangle}{\langle W \rangle}.$$

Следствием потерь в среде является комплексный характер ее волнового сопротивления:

$$\dot{W} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu'_a}{\epsilon'_a} \frac{1 - i \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}}}{1 - i \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}}}} = \sqrt{\frac{\mu'_a}{\epsilon'_a} \frac{\cos \delta_{\mathcal{D}}}{\cos \delta_{\mathcal{M}}}} \cdot e^{i(\delta_{\mathcal{D}} - \delta_{\mathcal{M}})/2}, \quad (3.11)$$

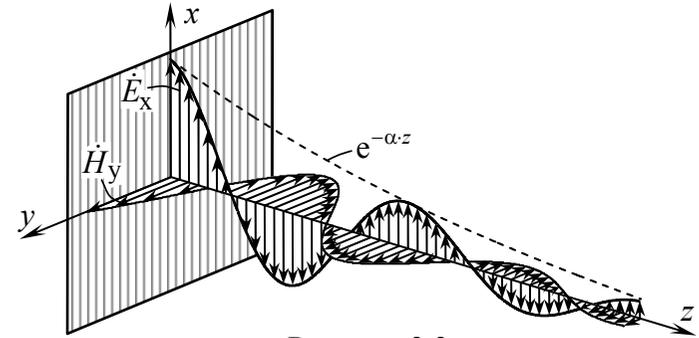


Рисунок 3.3

так что модуль и аргумент \dot{W} равны соответственно

$$|\dot{W}| = \sqrt{\frac{\mu'_a}{\epsilon'_a} \frac{\cos \delta_{\mathcal{D}}}{\cos \delta_{\mathcal{M}}}}, \quad \arg \dot{W} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{\mathcal{D}} - \delta_{\mathcal{M}}).$$

Таким образом, потери вызывают появление фазового сдвига $\varphi = \arg \dot{W}$ между E - и H -составляющими волны. Графическое изображение волнового процесса в среде с потерями приведено на рисунок 3.3.

Распространение волны в среде с большими потерями

На практике с большими потерями обычно приходится встречаться при решении задач распространения электромагнитных волн в хорошо проводящей среде. Рассмотрим поэтому случай, когда с магнитными потерями можно не считаться ($\operatorname{tg} \delta_{\mathcal{M}} = 0$), а потери электрической природы велики ($\operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}} \gg 1$). Тогда из (3.8), (3.9) следует

$$\beta = \alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \epsilon'_a \cdot \mu'_a \cdot \operatorname{tg} \delta_{\mathcal{D}}},$$

а с учетом (1.34) –

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \mu'_a \cdot \sigma}. \quad (3.12)$$

Величина, обратная постоянной затухания ($1/\alpha = \alpha^{-1}$), определяет путь в среде, после прохождения которого амплитуда волны уменьшается в $e \approx 2,7$ раз. При большой проводимости среды σ отношение $1/\alpha$ мало, т.е. поле проникает в такую среду на очень малую глубину. Это явление называется нормальным скин-эффектом. Величина

$$\Delta_{\text{ск}} = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu'_a \cdot \sigma}} \quad (3.13)$$

имеет смысл толщины скин-слоя. В чистой меди, например, толщина скин-слоя составляет $\Delta_{\text{ск}} = 1$ см на частоте 50 Гц и $\Delta_{\text{ск}} = 1$ мкм на частоте 50 МГц.

На рисунке 3.4 показано изменение напряженности электрического поля в поперечном сечении двухпроводной линии. При сильном скин-эффекте сердцевина проводников не принимает участия в передаче волны.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что для передачи по проводам, кабелям, волноводам энергии и информации с помощью высокочастотных электромагнитных волн толщина проводящего (например, медного) покрытия может быть очень малой; об этом следует помнить с целью экономии цветных металлов.

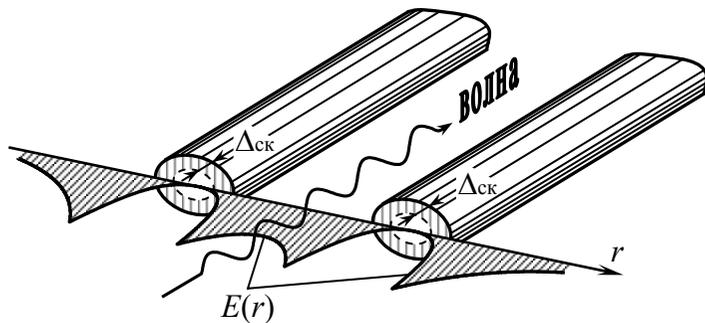


Рисунок 3.4

3.3 Волны в анизотропном ферромагнетике

В качестве первого примера анизотропной среды рассмотрим феррит, помещенный в постоянное магнитное поле.

Ферритами называют ферромагнитные полупроводники, электропроводность которых в $10^{11} \dots 10^{13}$ раз меньше, чем в ферромагнитных металлах. Под действием постоянного магнитного поля феррит становится анизотропной средой, природа анизотропии которой объясняется следующим образом. В состав ферритов входят атомы элементов переходной группы таблицы Менделеева (Fe, Ni, и др.), для которых характерно наличие собственного магнитного момента \vec{m} , сохраняющегося даже в химических соединениях указанных атомов. При отсутствии постоянного внешнего магнитного поля достаточно большой образец феррита изотропен: векторы собственных магнитных моментов атомов Fe, Ni и их химических соединений ориентируются в пространстве совершенно хаотически, так что вероятность обнаружить в произвольном направлении определенное число магнитных моментов постоянна. В такой ферритовой среде волна переменного электромагнитного поля в любом направлении распространяется одинаково.

Воздействие постоянного магнитного поля \vec{H}_0 на феррит приводит к тому, что векторы магнитных моментов \vec{m} атомов, стремясь выстроиться вдоль \vec{H}_0 (такой ориентации соответствует минимум энергии магнитного взаимодействия \vec{m} и \vec{H}_0), начинают прецессировать вокруг него, описывая в пространстве конус, осью которого является вектор \vec{H}_0 . Частота прецессии равна

$$\omega_{\text{пр}} = \gamma \cdot \mu_0 \cdot H_0, \quad (3.14)$$

где $\gamma = e/m$ – гиромангнитное отношение для электрона, имеющего заряд e и массу m . Таким образом, в феррите исчезает полная сферическая симметрия углового расположения векто-

ров \vec{m} и появляется некоторое выделенное направление (оно совпадает с \vec{H}_0), вдоль которого преимущественно выстраиваются векторы \vec{m} . Эта асимметрия угловой ориентации последних как раз и является причиной того, что электромагнитная волна воспринимает намагниченный феррит как анизотропную среду с магнитной проницаемостью

$$\mu_a = \mu_0 \begin{vmatrix} \mu & -i\mu_{\perp} & 0 \\ i\mu_{\perp} & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.15)$$

где

$$\mu = 1 - \frac{\omega_{\text{пр}} \cdot \omega_M}{\omega^2 - \omega_{\text{пр}}^2}, \quad \mu_{\perp} = \frac{\omega \cdot \omega_M}{\omega^2 - \omega_{\text{пр}}^2}, \quad \mu_{33} = 1. \quad (3.16)$$

В выражениях (3.16) ω – частота волны, $\vec{\omega}_M = \gamma \cdot \mu_0 \cdot \vec{M}$ (\vec{M} – векторная сумма магнитных моментов \vec{m} атомов феррита).

В намагниченном феррите эффекты, сопровождающие процесс распространения волны, зависят от направления ее движения. Поскольку любое направление распространения можно разбить на два ортогональных (по полю \vec{H}_0 и перпендикулярно ему), целесообразно подробно проанализировать именно эти два случая.

Распространение плоской волны в феррите вдоль поля намагничивания

Предположим, что в безграничной ферритовой среде постоянное магнитное поле \vec{H}_0 ориентировано вдоль оси Oz. Пусть в этом же направлении движется плоская волна с неизвестной постоянной распространения k :

$$\frac{\partial}{\partial z} = -i \cdot k, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (3.17)$$

Исследуем эффекты, сопровождающие распространение плоской волны в поставленной задаче. Учитывая (3.17), спроектируем уравнения Максвелла (1.36) на оси декартовой системы координат:

$$ik \cdot \dot{H}_y = i\omega \cdot \varepsilon_a \cdot \dot{E}_x, \quad (3.18,a) \quad ik \cdot \dot{E}_y = -i\omega \cdot \mu_0 (\mu \cdot \dot{H}_x - i\mu_{\perp} \cdot \dot{H}_y), \quad (3.18,z)$$

$$-ik \cdot \dot{H}_x = i\omega \cdot \varepsilon_a \cdot \dot{E}_y, \quad (3.18,b) \quad -ik \cdot \dot{E}_x = -i\omega \cdot \mu_0 (i\mu_{\perp} \cdot \dot{H}_x + \mu \cdot \dot{H}_y), \quad (3.18,d)$$

$$0 = i\omega \cdot \varepsilon_a \cdot \dot{E}_z, \quad (3.18,e) \quad 0 = i\omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_{33} \cdot \dot{H}_z. \quad (3.18,e)$$

Соотношения (3.18,b) и (3.18,e) указывают на отсутствие в бегущей вдоль \vec{H}_0 волне продольных компонент: $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$. Из оставшихся четырех соотношений исключим \dot{E}_x и \dot{E}_y :

$$\begin{aligned} \dot{H}_x \cdot (\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu - k^2) - \dot{H}_y \cdot i\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{\perp} &= 0, \\ \dot{H}_x \cdot i\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{\perp} + \dot{H}_y \cdot (\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu - k^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Нетривиальное решение системы уравнений (3.19) находится приравниванием нулю определителя, составленного из коэффициентов при \dot{H}_x и \dot{H}_y :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu - k^2 & -i\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{\perp} \\ i\omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{\perp} & \omega^2 \cdot \varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) является дисперсионным уравнением для задачи продольного распространения плоской волны в намагниченном феррите, так как позволяет установить зависимость k от ω . Решение (3.20) имеет вид

$$k = \pm \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu \pm \mu_{\perp})}. \quad (3.21)$$

Знаки "+" и "-" перед корнем в (3.21) указывают на возможность распространения плоской волны по оси Oz в прямом и обратном направлениях. Внутренние знаки "+", "-" (под корнем) следует понимать так, что как прямая, так и обратная

волны одновременно характеризуются двумя разными значениями k . Следовательно, плоская электромагнитная волна в феррите, распространяясь вдоль \vec{H}_0 , разбивается на две новые волны. Первая волна имеет постоянную распространения

$$k^{(+)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu + \mu_{\perp})} \quad (3.22)$$

и движется со скоростью

$$v_{\phi}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu + \mu_{\perp})}}. \quad (3.23)$$

Соответствующие параметры второй волны равны

$$k^{(-)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu - \mu_{\perp})}, \quad (3.24)$$

$$v_{\phi}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu - \mu_{\perp})}}. \quad (3.25)$$

Если найденное выражение для k (3.21) подставить в любое уравнение системы (3.19), легко получить важное соотношение

$$\dot{H}_y = \pm i \cdot \dot{H}_x = \dot{H}_x \cdot e^{\pm i90^\circ}, \quad (3.26)$$

показывающее, что у "+"-волны и "-"-волны поперечные составляющие магнитного поля (\dot{H}_x, \dot{H}_y) равны по модулю и сдвинуты по фазе на $\pm 90^\circ$. Следовательно, первая и вторая волны не только имеют разные скорости распространения, но и, будучи кругло-поляризованными по магнитной составляющей, характеризуются противоположными направлениями вращения своих векторов \vec{H} (рисунок 3.5):

$$\dot{H}_y^{(+)} = i \cdot \dot{H}_x^{(+)}, \quad \dot{H}_y^{(-)} = -i \cdot \dot{H}_x^{(-)}. \quad (3.27)$$

Полный магнитный вектор плоской волны при ее продольном распространении в феррите определяется векторной суммой

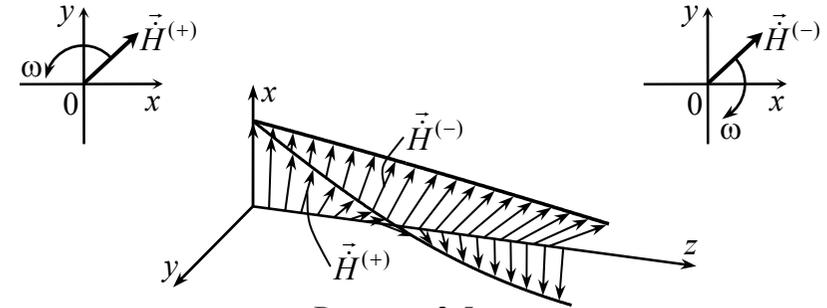


Рисунок 3.5

$\vec{H}^{(+)}, \vec{H}^{(-)}$ и имеет линейную поляризацию с плавным поворотом плоскости поляризации на угол

$$\Theta_{\phi} = \frac{1}{2} \cdot (k^{(+)} - k^{(-)}) \quad (3.27)$$

при прохождении каждого метра пути вдоль оси Oz (рисунок 3.6).

Описанное явление называется эффектом Фарадея. Фарадеевское вращение плоскости поляризации вектора \vec{H} взаимно. Поэтому, если плоская волна проходит путь длиной ℓ в направлении возрастания z и плоскость ее поляризации поворачивается, скажем, вправо на угол $\Theta_{\phi} \cdot \ell$, то при развороте волны на 180° и обратном прохождении того же пути угол поворота плоскости поляризации магнитного вектора продолжится увеличиваться, достигая в конце пути значения $2 \cdot \Theta_{\phi} \cdot \ell$.

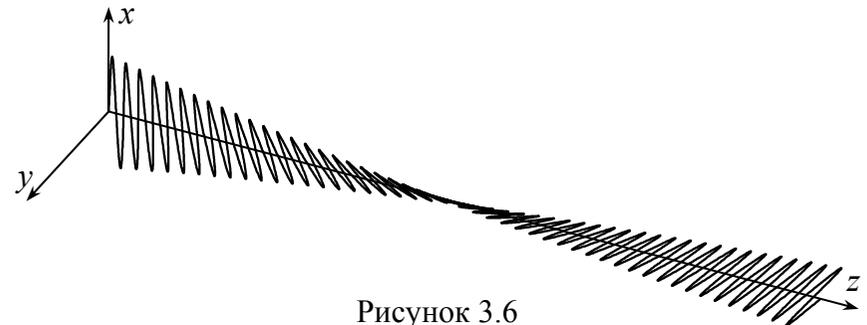


Рисунок 3.6

Эффект Фарадея находит практическое применение в управляемых ферритовых фазовращателях, циркуляторах, переключателях, поляризаторах СВЧ диапазона. Явление вращения плоскости поляризации волн носит общий характер и при соответствующих условиях распространения наблюдается во всех анизотропных средах.

Распространение плоской волны в феррите поперек поля намагничивания

Допустим теперь, что постоянное поле H_0 , намагничивающее феррит, по-прежнему направлено по оси Oz , а плоская волна распространяется вдоль оси Ox . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = -i \cdot k, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad (3.29)$$

а уравнения Максвелла в проекциях на оси декартовой системы координат примут вид

$$0 = i\omega \cdot \varepsilon_a \cdot \dot{E}_x, \quad (3.30,a) \quad 0 = -i\omega \mu_0 (\mu \cdot \dot{H}_x - i\mu_{\perp} \cdot \dot{H}_y), \quad (3.30,z)$$

$$ik \cdot \dot{H}_z = i\omega \cdot \varepsilon_a \cdot \dot{E}_y, \quad (3.30,b) \quad ik \cdot \dot{E}_z = -i\omega \mu_0 (i\mu_{\perp} \cdot \dot{H}_x + \mu \cdot \dot{H}_y), \quad (3.30,d)$$

$$-ik \cdot \dot{H}_y = i\omega \cdot \varepsilon_a \cdot \dot{E}_z, \quad (3.30,e) \quad -ik \cdot \dot{E}_y = -i\omega \mu_0 \cdot \mu_{33} \cdot \dot{H}_z. \quad (3.30,e)$$

Уравнение (3.30,a) свидетельствует о том, что рассматриваемая волна не имеет продольной электрической составляющей ($\dot{E}_x = 0$). Остальные пять уравнений разбиваются на две независимые системы, означая появление двух не взаимодействующих друг с другом волн. Одна из них имеет составляющие \dot{E}_y, \dot{H}_z (уравнения (3.30,b) и (3.30,e)), другая – $\dot{E}_z, \dot{H}_x, \dot{H}_y$ (уравнения (3.30,e), (3.30,z), (3.30,d)). Первая волна бежит с постоянной распространения

$$k^{(об)} = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{33}} \quad (3.31)$$

и воспринимает намагниченный феррит как изотропную среду с параметрами $\varepsilon_a, \mu_a = \mu_0 \cdot \mu_{33}$. Электрический и магнитный векторы данной волны поляризованы линейно в плоскости, перпендикулярной плоскости распространения (рисунок 3.7,a), как у плоской волны в безграничной изотропной среде. Поэтому указанная волна получила название обыкновенной, скорость движения ее в феррите равна

$$v_{\phi}^{(об)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{33}}}. \quad (3.32)$$

При выключении постоянного магнитного поля ($H_0 = 0$) свойства обыкновенной волны не меняются. Синфазное изменение составляющих \dot{E}_y, \dot{H}_z во времени приводит к появлению потока активной мощности обыкновенной волны, направленного вдоль оси Ox (рисунок 3.7,в).

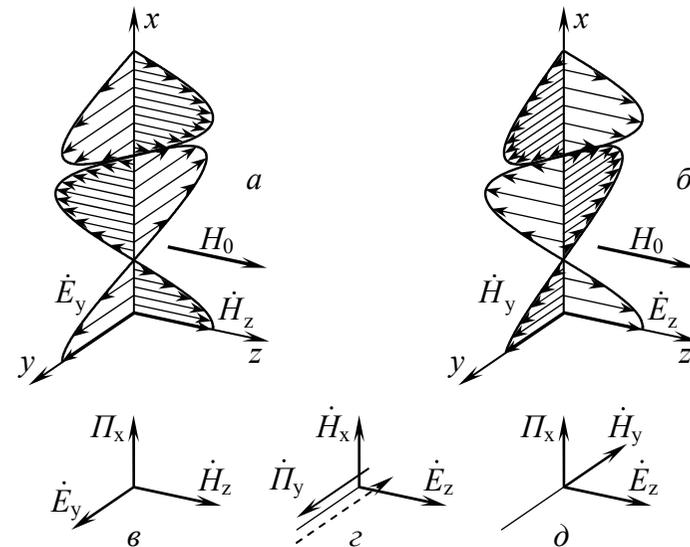


Рисунок 3.7

Вторая волна, как нетрудно установить из уравнений (3.30,е), (3.30,з), (3.30,д), характеризуется постоянной распространения

$$k^{(н)} = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu^2 - \mu_{\perp}^2) / \mu} \quad (3.33)$$

и фазовой скоростью

$$v_{\phi}^{(н)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_0 \cdot (\mu^2 - \mu_{\perp}^2) / \mu}}. \quad (3.34)$$

Соотношение (3.30,з) показывает, что H_x и H_y -составляющие магнитного вектора волны связаны уравнением

$$\dot{H}_x = i \cdot \frac{\mu_{\perp}}{\mu} \cdot \dot{H}_y. \quad (3.35)$$

Данная волна названа необыкновенной. Она существует только вследствие анизотропии намагниченного феррита ($\mu_{\perp} \neq 0$ при $H_0 \neq 0$) и исчезает при выключении поля H_0 . В необыкновенной волне магнитная компонента поляризована по эллипсу (см. (3.35)), так как составляющие \dot{H}_x и \dot{H}_y не равны по модулю и сдвинуты по фазе на 90° . Необыкновенная волна характеризуется двумя потоками мощности, ориентированными в ортогональных направлениях. Синфазные составляющие \dot{E}_z , \dot{H}_y (см. (3.30,е)) создают поток активной мощности P_x . Составляющие же \dot{E}_z , \dot{H}_x (см. (3.30,д) с учетом (3.35)) сдвинуты между собой по фазе на 90° , в результате чего порождаемый ими поток мощности P_y носит реактивный характер. Таким образом, мощность, переносимая необыкновенной волной, непрерывно перемещается вдоль направления распространения (по оси Ox) и одновременно совершает колебательное движение вдоль оси Oy (рисунок 3.7,з,д). Эффект расщепления плоской волны при поперечном распространении в намагниченном феррите на необыкновенную и обыкновенную волны называется двойным лучепреломлением. Расщепления не происходит,

если попадающая в феррит плоская волна имеет вектор \vec{E} , ориентированный точно по оси Oy или Oz ; при произвольном направлении вектора $\vec{E} = \vec{y}_0 \cdot \dot{E}_y + \vec{z}_0 \cdot \dot{E}_z$ падающей волны составляющие \dot{E}_y и \dot{E}_z будут принадлежать соответственно обыкновенной и необыкновенной волнам. Допустим, что ферритовая среда имеет вид слоя конечной толщины по оси Ox . Тогда после прохождения слоя феррита составляющие \dot{E}_y и \dot{E}_z (синфазные на входе) приобретут на выходе фазовый сдвиг вследствие неравенства скоростей $v_{\phi}^{(об)}$ и $v_{\phi}^{(н)}$. В итоге вектор \vec{E} прошедшей волны становится эллиптически поляризованным. Описанное явление известно как эффект Коттона-Мутона.

Взаимодействие электромагнитной волны с поперечно-намагниченными ферритовыми образцами (пластинами, дисками, цилиндрами) лежит в основе действия таких СВЧ устройств, как вентили, циркуляторы, переключатели.

3.4 Волны в анизотропной плазме

Как и намагниченный феррит, плазма, будучи помещенной в магнитное поле, становится анизотропной средой. С намагниченной плазмой радиоинженеру приходится иметь дело при решении задач распространения радиоволн в ионосфере Земли. Плазма – это ионизованный газ, в котором помимо электрически нейтральных частиц (атомов, молекул) присутствуют электроны и ионы. При конечной температуре плазмы входящие в ее состав частицы всех трех сортов находятся в непрерывном движении, обмениваясь взаимными ударами. Полная хаотичность теплового движения приводит к совершенно симметричному распределению скоростей частиц по направлениям. Такая плазма изотропна, и радиоволны в ней в любом направлении распространяются одинаково. Появление постоянного магнитного поля \vec{H}_0 качественно изменяет свойства

плазмы. Электроны и ионы, вектор скорости \vec{v} которых ориентирован к силовым линиям поля \vec{H}_0 под углом φ , отличным от нуля, испытывают действие силы Лоренца

$$\vec{F}_L = q \cdot \mu_0 \cdot [\vec{v} \cdot \vec{H}_0] \quad (3.36)$$

и начинают двигаться по круговой цилиндрической спирали, "навитой" вокруг линий магнитного поля под тем же углом и имеющей радиус

$$R_H = \frac{m \cdot v_0}{q} \cdot \frac{v}{\mu_0 \cdot H_0} \cdot \sin \varphi$$

(q, m – заряд и масса частицы; v_0 – скорость света; $v = |\vec{v}|$). Направление "навивки" спиральной траектории (левой или правой) зависит от знака электрического заряда частицы (рисунок 3.8).

Таким образом, постоянное магнитное поле, наводя определенный порядок в движении заряженных частиц плазмы, создает асимметрию пространственного распределения их скоростей. Теперь уже электромагнитные волны в разных направлениях (например, вдоль или поперек \vec{H}_0) распространяются по-разному. Плазма становится анизотропной. В уравнениях Максвелла это новое свойство намагниченной плазмы отражается введением тензора относительной диэлектрической проницаемости:

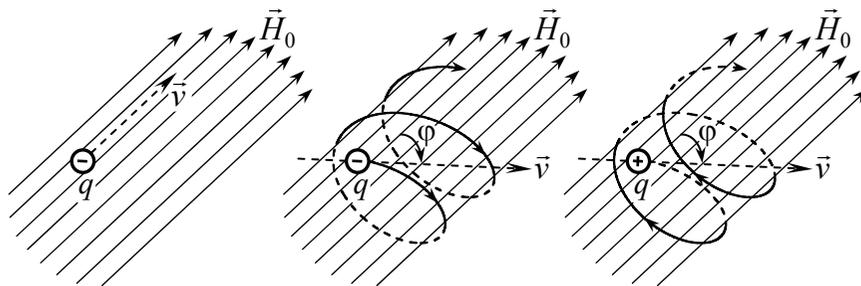


Рисунок 3.8

$$\vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon & -i \cdot \epsilon_{\perp} & 0 \\ i \cdot \epsilon_{\perp} & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{пл}^2}{(\omega + i \cdot \vartheta)^2 - \omega_{ц}^2} \cdot \frac{\omega + i \cdot \vartheta}{\omega}, \quad (3.38)$$

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\omega_{пл}^2}{(\omega + i \cdot \vartheta)^2 - \omega_{ц}^2} \cdot \frac{\omega_{ц}}{\omega}, \quad (3.39)$$

$$\epsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega \cdot (\omega + i \cdot \vartheta)}. \quad (3.40)$$

В выражениях (3.38)-(3.40) обозначено: $\omega_{ц}$ – частота вращения заряженной частицы вокруг силовых линий \vec{H}_0 при движении по спиральной траектории (называется также циклотронной частотой), вычисляется по формуле (3.14); ϑ – частота упругих соударений в плазме электронов и нейтральных частиц (атомов и молекул), она определяет потери энергии электромагнитной волны, идущей на разогрев плазмы; $\omega_{пл}$ – круговая частота так называемых электронных плазменных колебаний:

$$\omega_{пл} = \sqrt{\frac{n_e \cdot e^2}{\epsilon_0 \cdot m}} \approx 1.8 \pi \cdot 10^4 \cdot \sqrt{n_e} \quad (3.41)$$

($n_e, 1/\text{см}^3$ – концентрация электронов), которые возникают самопроизвольно в результате случайного пространственного разделения в плазме электронов и ионов и появления в связи с этим электростатических сил взаимного притягивания, приводящих электроны в колебательное движение (ленгмюровские колебания); ω – круговая частота электромагнитной волны, распространение которой нас интересует.

Анализ формул (3.37)-(3.40) дает возможность выявить важные особенности взаимодействия электромагнитных волн с

намагниченной плазмой. Полное совпадение вида тензоров $\vec{\epsilon}$ (3.37) и $\vec{\mu}$ (3.15) позволяет, не выполняя подробного исследования, сделать вывод о том, что в намагниченной плазме мы встретимся с теми же эффектами, с которыми познакомились в разделе 3.3: эффектом Фарадея и явлением двойного лучепреломления. Разница будет лишь в том, что, если в намагниченном ферромагнетике влияние анизотропии среды сказывалось на поведении магнитной составляющей распространяющейся волны, то в анизотропной плазме это влияние отразится на электрической составляющей. При отсутствии потерь ($\mathcal{G}=0$, такая плазма называется бесстолкновительной) компоненты тензора диэлектрической проницаемости ϵ и ϵ_{\perp} бесконечно возрастают, когда $\omega = \omega_{ц}$. Это свидетельствует о развитии в плазме резонансного процесса. В намагниченном ферромагнетике в подобной ситуации (см. (3.16)) возрастает амплитуда прецессии магнитных моментов \vec{m} атомов вокруг поля \vec{H}_0 : наступает ферромагнитный резонанс. В намагниченной плазме резонансным образом увеличивается радиус спиральной траектории движения заряженных частиц (циклотронный резонанс). В плазме легко достигается также ситуация, когда диагональные компоненты тензора $\vec{\epsilon}$ (3.38), (3.40) принимают нулевое значение. Это явление известно как плазменный резонанс, суть которого заключается в раскачке электромагнитной волной ленгмюровских колебаний в плазме. В диапазоне частот, где $\omega < \omega_{пл}$, диэлектрическая проницаемость плазмы становится отрицательной: волны в такой среде распространяться не могут (явление отсечки). Компоненты тензора $\vec{\epsilon}$, а следовательно, и связанные с ними показатель преломления плазмы, фазовая скорость волны зависят от ее частоты. Поэтому в плазме наблюдается заметная дисперсия волн.

Перечисленные явления не исчерпывают всех особенностей плазмы, однако и они уже свидетельствуют о большом разнообразии эффектов, сопровождающих процесс взаимодействия электромагнитных волн с этой средой.

Рассмотрим подробнее распространение электромагнитных волн в намагниченной плазме. Пусть постоянное во времени однородное магнитное поле \vec{H}_0 , ориентированное под углом Θ к оси Oz , пронизывает пространство, заполненное бесстолкновительной плазмой (учет потерь серьезно загромождал бы математические выкладки, лишив их наглядности; влияние же потерь в среде на распространение волн рассмотрено в разделе 3.2). Если плоская электромагнитная волна бежит в подобных условиях вдоль оси Oz , то, как показывает подробный анализ уравнений Максвелла, показатель преломления плазмы описывается выражением

$$n_{пл}^2 = 1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2 - \frac{\omega_{ц\perp}^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot (\omega^2 - \omega_{пл}^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{\omega_{ц\perp}^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot (\omega^2 - \omega_{пл}^2)} \right]^2 + \omega^2 \cdot \omega_{ц\parallel}^2}}, \quad (3.42)$$

где $\omega_{ц\perp} = \omega_{ц} \cdot \sin \Theta$, $\omega_{ц\parallel} = \omega_{ц} \cdot \cos \Theta$ – соответственно "поперечная" и "продольная" циклотронные частоты. Амплитуды поперечных составляющих электрической компоненты волны определяются соотношением

$$\frac{\dot{E}_{my}}{\dot{E}_{mx}} = i \cdot \left\{ \frac{\omega_{ц\perp}^2 \cdot \omega}{2 \cdot (\omega^2 - \omega_{пл}^2) \cdot \omega_{ц\parallel}} \mp \sqrt{\left[\frac{\omega_{ц\perp}^2 \cdot \omega}{2 \cdot (\omega^2 - \omega_{пл}^2) \cdot \omega_{ц\parallel}} \right]^2 + 1} \right\}. \quad (3.43)$$

Связь продольной составляющей электрической компоненты с поперечными имеет вид

$$\dot{E}_z = \frac{\omega \cdot \omega_{ц\perp} \cdot \omega_{пл}^2}{\omega^2 \cdot \omega_{ц\perp}^2 - (\omega^2 - \omega_{пл}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{ц\parallel}^2)} \cdot \left(\frac{\omega_{ц\parallel}}{\omega} \cdot \dot{E}_x - i \cdot \dot{E}_y \right). \quad (3.44)$$

Проанализируем частные случаи.

Распространение плоской волны в плазме вдоль поля намагничивания

При продольном распространении ($\Theta = 0^\circ$) векторы \vec{H}_0 и \vec{P} бегущей волны ориентированы параллельно оси Oz. Поэтому $\omega_{\perp} = 0$, $\omega_{\parallel} = \omega$ и из формулы (3.42) следует, что

$$n_{\text{пл}}^2 = 1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{\text{ц}})}. \quad (3.45)$$

Знаки " \pm " в (3.45) свидетельствуют о том, что уравнения Максвелла для сформулированной задачи имеют два решения, т.е. первоначальная плоская линейно-поляризованная волна "распадается" на две волны, бегущие в общем Oz-направлении с постоянными распространения

$$k^{(+)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot n^{(+)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega(\omega + \omega_{\text{ц}})}}, \quad (3.46, a)$$

$$k^{(-)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot n^{(-)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega(\omega - \omega_{\text{ц}})}}. \quad (3.46, б)$$

Как видно, "-"- волна бежит быстрее "+"- волны:

$$v_{\text{ф}}^{(+)} = \frac{\omega}{k^{(+)}} < v_{\text{ф}}^{(-)} = \frac{\omega}{k^{(-)}}. \quad (3.47)$$

Определим поляризацию электрической компоненты каждой волны. Из (3.44) с учетом $\omega_{\perp} = 0$ следует, что $\dot{E}_z^{(+),(-)} = 0$, т.е. обе волны являются чисто поперечными. Составляющие \dot{E}_x и \dot{E}_y , как показывает (3.43), равны по модулю и сдвинуты по фазе на 90° :

$$\dot{E}_{\text{my}} = \pm i \cdot \dot{E}_{\text{mx}}. \quad (3.48)$$

Следовательно, E-компоненты двух электромагнитных волн, возникающих при продольном распространении плоской вол-

ны в намагниченной плазме, поляризованы по кругу в противоположных направлениях. Условия (3.48) и (3.47) приводят к выводу о наличии эффекта Фарадея при рассматриваемых условиях взаимодействия плоской волны с плазмой (сравнить с выводами, вытекающими из формул (3.23), (3.25), (3.27)).

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую необходимость учета эффекта Фарадея на практике. Предположим, что два космических аппарата, вращающихся вокруг Земли на высоте 300 км, снабжены антеннами в виде симметричных вибраторов. Пусть антенны параллельны друг другу. Между аппаратами ведется обмен информацией на частоте 30 МГц, причем радиоволны распространяются в направлении, параллельном силовым линиям магнитного поля Земли. При каком взаимном удалении аппаратов в результате действия эффекта Фарадея связь между ними прервется?

Решение. Указанное событие произойдет в том случае, если на трассе, разделяющей космические аппараты, плоскость поляризации вектора \vec{E} радиоволны повернется на 90° (рисунок 3.9). Это будет иметь место при условии (см. (3.28))

$$\frac{1}{2} \cdot (k^{(+)} - k^{(-)}) \cdot \ell = \pi/2.$$

Примем $\omega_{\text{ц}} = 2,8 \cdot \pi \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $n_e = 10^6 \text{ 1/см}^3$ (см. рисунок 3.12), следовательно, частота $\omega_{\text{пл}} = 1,8 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ (3.41). Тогда, пользуясь (3.46, a, б), легко вычислить: $\ell = \pi / (k^{(+)} - k^{(-)}) \approx 1133 \text{ м}$.

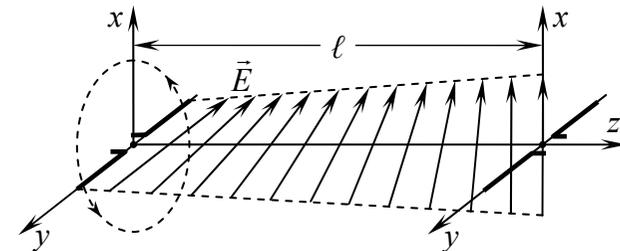


Рисунок 3.9

Исследуем теперь явление отсечки. Как уже отмечалось, волны теряют способность распространяться в среде с $\epsilon < 0$ (n – мнимая величина) и отражаются от границы, где $\epsilon_{\text{пл}}$ и $n_{\text{пл}}$ равны нулю (рисунок 3.10). Тогда условие отсечки

$$\epsilon_{\text{пл}} = n_{\text{пл}}^2 = 1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega \cdot (\omega \pm \omega_{\text{ц}})} = 0 \quad (3.49)$$

выполняется при

$$\left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2 = 1 \pm \frac{\omega_{\text{ц}}}{\omega}. \quad (3.50)$$

На рисунке 3.11 показано изменение относительной диэлектрической проницаемости плазмы (или, что то же самое, $n_{\text{пл}}^2$) в зависимости от квадрата соотношения частот волны и плазменных колебаний. Рисунок 3.11,а справедлив для волн с частотами, превышающими циклотронную $\omega_{\text{ц}}$; рисунок 3.11,б – для ситуации $\omega < \omega_{\text{ц}}$.

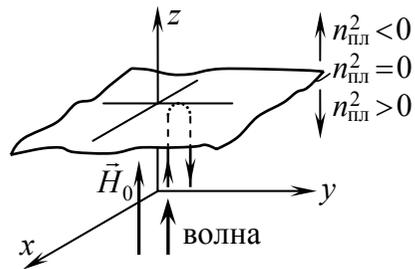


Рисунок 3.10

Вспользуемся полученными выводами для качественного анализа отсечки электромагнитных волн в ионосфере Земли, когда распространение можно назвать про-

дольным (волна должна бежать вдоль силовых линий магнитного поля Земли). На рисунке 3.12 приведен качественный характер изменения концентрации свободных электронов в ионосфере по мере подъема над поверхностью Земли (точный профиль ионосферы измеряется экспериментально). Поскольку (см. (3.41)) $n_e \sim \omega_{\text{пл}}^2$, при фиксированной частоте волны ось абсцисс на рисунке 3.12 можно разметить в единицах параметра $\omega_{\text{пл}}^2 / \omega^2$ (рисунок 3.13,а). Если принять, что напряженность постоянного магнитного поля Земли составляет $H_0 = 40$ А/м, то циклотронная частота (3.14) будет равняться $\omega_{\text{ц}} = 2,8 \cdot \pi \cdot 10^6$ с⁻¹ ($f_{\text{ц}} = 1,4$ МГц). Пусть частота плоской линейно-поляризованной волны больше циклотронной частоты ($\omega > \omega_{\text{ц}} = 2,8 \cdot \pi \cdot 10^6$ с⁻¹, $f > f_{\text{ц}} = 1,4$ МГц). Тогда траектории движения в ионосфере "+" и "-" волн будут иметь вид, показанный на рисунке 3.13,б (сплошные кривые). Отсечка (поворот к Земле) "+" и "-" волн происходит соответственно на разных высотах $h^{(+)}$ и $h^{(-)}$. Если частота волны меньше циклотронной

дольным (волна должна бежать вдоль силовых линий магнитного поля Земли). На рисунке 3.12 приведен качественный характер изменения концентрации свободных электронов в ионосфере по мере подъема над поверхностью Земли (точный профиль ионосферы измеряется экспериментально). Поскольку (см. (3.41)) $n_e \sim \omega_{\text{пл}}^2$, при фиксированной частоте волны ось абсцисс на рисунке 3.12 можно разметить в единицах параметра $\omega_{\text{пл}}^2 / \omega^2$ (рисунок 3.13,а). Если принять, что напряженность постоянного магнитного поля Земли составляет $H_0 = 40$ А/м, то циклотронная частота (3.14) будет равняться $\omega_{\text{ц}} = 2,8 \cdot \pi \cdot 10^6$ с⁻¹ ($f_{\text{ц}} = 1,4$ МГц). Пусть частота плоской линейно-поляризованной волны больше циклотронной частоты ($\omega > \omega_{\text{ц}} = 2,8 \cdot \pi \cdot 10^6$ с⁻¹, $f > f_{\text{ц}} = 1,4$ МГц). Тогда траектории движения в ионосфере "+" и "-" волн будут иметь вид, показанный на рисунке 3.13,б (сплошные кривые). Отсечка (поворот к Земле) "+" и "-" волн происходит соответственно на разных высотах $h^{(+)}$ and $h^{(-)}$. Если частота волны меньше циклотронной

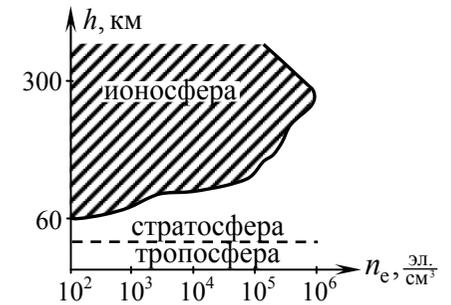


Рисунок 3.12

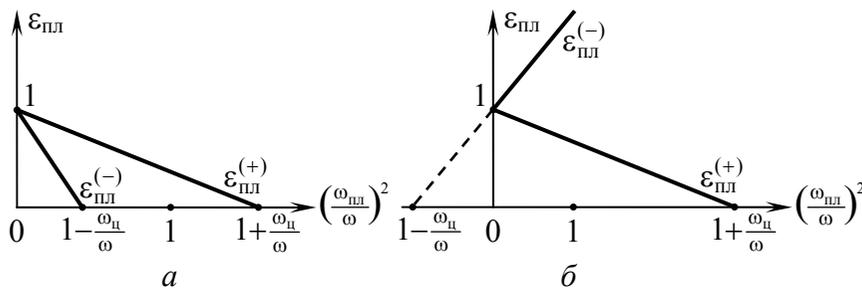


Рисунок 3.11

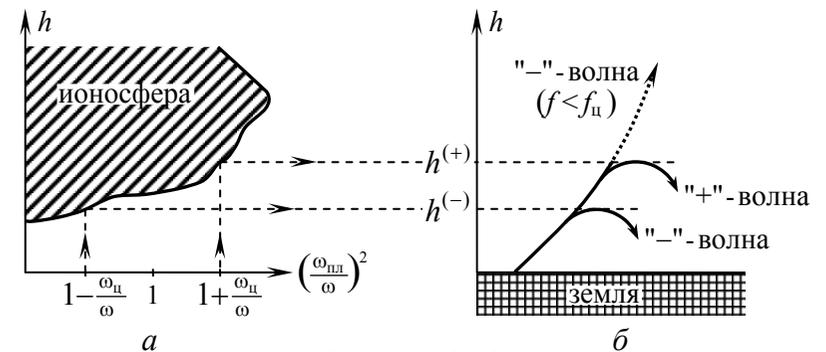


Рисунок 3.13

($f < f_{ц}$), "+"- волна по-прежнему испытывает отсечку на высоте $h^{(+)}$, а "-"- волна уходит вглубь ионосферы, не возвращаясь к Земле (рисунок 3.13,б, штриховая кривая).

Распространение плоской волны в плазме поперек поля намагничивания

При поперечном распространении (волна по-прежнему бежит вдоль оси Oz, вектор напряженности поля \vec{H}_0 лежит в плоскости xOy, например, вдоль оси Ox) угол Θ составляет 90° , поэтому $\omega_{ц\perp} = \omega_{ц}$, $\omega_{ц\parallel} = 0$. Уравнения Максвелла вновь приводят к двойному решению (см. (3.42)), т.е. распространяющаяся волна разбивается на две волны. Для первой из них (она называется обыкновенной)

$$n_{пл}^{(об)^2} = 1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2}. \quad (3.51)$$

Видно, что $n_{пл}^{(об)}$ совпадает со значением $n_{пл}$ для ненамагниченной (изотропной) плазмы (см. (3.42) при $\omega_{ц\perp} = \omega_{ц\parallel} = 0$). В обыкновенной волне, если обратиться к (3.43), (3.44),

$$\frac{\dot{E}_{my}^{(об)}}{\dot{E}_{mx}^{(об)}} = 0, \quad \dot{E}_{mx}^{(об)} \neq 0, \quad \dot{E}_{my}^{(об)} = 0, \quad (3.52)$$

$$\dot{E}_{mz}^{(об)} = 0. \quad (3.53)$$

Таким образом, обыкновенная волна распространяется вдоль оси Oz и имеет только одну электрическую составляющую $\dot{E}_{mx}^{(об)}$, параллельную вектору \vec{H}_0 . Волна эта ведет себя в плазме так, будто поле H_0 отсутствует. Поэтому свойства ее не отличаются от свойств плоской линейно-поляризованной волны, бегущей в любом направлении в изотропной плазме. Постоянная распространения и фазовая скорость обыкновенной волны равны соответственно

$$k^{(об)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot n_{пл}^{(об)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{1 - (\omega_{пл}/\omega)^2},$$

$$v_{\phi}^{(об)} = \frac{\omega}{k^{(об)}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{1 - (\omega_{пл}/\omega)^2}}.$$

Обыкновенная волна испытывает отсечку ($n_{пл}^{(об)} = 0$) при

$$\left(\frac{\omega_{пл}}{\omega}\right)^2 = 1. \quad (3.54)$$

Второе решение уравнений Максвелла для задачи о поперечном распространении волн в намагниченной плазме соответствует волне, которую называют необыкновенной:

$$n_{пл}^{(н)^2} = 1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2 - \frac{\omega^2 \cdot \omega_{ц}^2}{\omega^2 - \omega_{пл}^2}}. \quad (3.55)$$

У этой волны (см. (3.43), (3.44))

$$\frac{\dot{E}_{my}^{(н)}}{\dot{E}_{mx}^{(н)}} = \infty, \quad \dot{E}_{my}^{(н)} \neq 0, \quad \dot{E}_{mx}^{(н)} = 0, \quad (3.56)$$

$$\dot{E}_{mz}^{(н)} = \frac{\omega \cdot \omega_{ц} \cdot \omega_{пл}^2}{\omega^2 \cdot (\omega^2 - \omega_{пл}^2) - \omega^2 \cdot \omega_{ц}^2} \cdot (i \cdot \dot{E}_{my}^{(н)}). \quad (3.57)$$

Следовательно, необыкновенная волна, распространяясь, как и обыкновенная, вдоль оси Oz, имеет две составляющие электрической компоненты ($\dot{E}_{mz}^{(н)}$, $\dot{E}_{my}^{(н)}$), которые не равны по модулю и сдвинуты по фазе на 90° . Поэтому вектор $\vec{E}^{(н)}$ необыкновенной волны поляризован по эллипсу, плоскость которого перпендикулярна \vec{H}_0 . Необыкновенная волна характеризуется постоянной распространения

$$k^{(н)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot n_{пл}^{(н)} \quad (3.58)$$

и перемещается с фазовой скоростью

$$v_{\phi}^{(H)} = \frac{\omega}{k^{(H)}}, \quad (3.59)$$

отличной от скорости движения обыкновенной волны.

Проанализируем отсечку необыкновенной волны. Приравняв показатель преломления $n_{пл}^{(H)}$, определяемый формулой (3.55), к нулю, легко найти, что это требование выполняется при $(\omega_{пл}/\omega)^2 = 1 \pm \omega_{ц}/\omega$. Зависимость от квадрата параметра $\omega_{пл}/\omega$ относительной диэлектрической проницаемости плазмы (или $n_{пл}^{(H)2}$) для обыкновенной и необыкновенной волн приведена на рисунке 3.14 (рассмотрен случай $\omega > \omega_{ц}$).

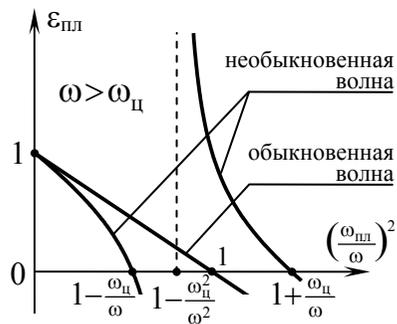


Рисунок 3.14

Направляя с поверхности Земли радиолуч так, чтобы он был перпендикулярен силовым линиям магнитного поля Земли, можно по аналогии с рисунком 3.13 графически определить высоты, на которых произойдет отсечка обыкновенной и необыкновенной волн (рисунок 3.15).

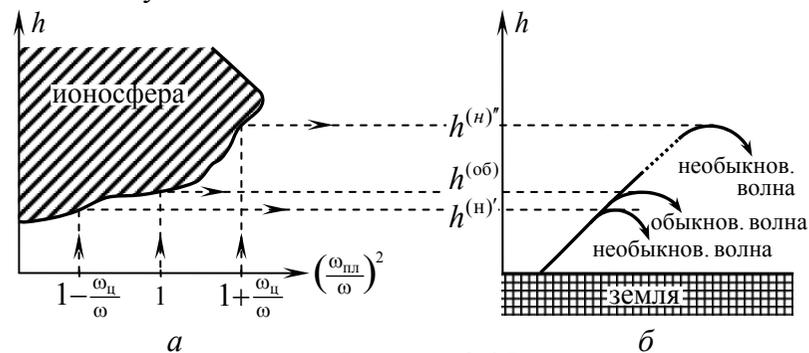


Рисунок 3.15

3.5 Волны в анизотропных кристаллах

Стремительное развитие лазерной техники потребовало разработки устройств для модуляции и управления параметрами когерентного излучения лазеров. Наиболее перспективными и нашедшими широкое применение в практике оказались устройства, использующие электрооптические и магнитооптические эффекты.

К электро- и магнитооптическим относят явления взаимодействия электромагнитных волн оптического диапазона со средами, показатель преломления которых изменяется под влиянием специально приложенного электрического или магнитного поля.

Среди электрооптических в технике чаще других используются эффекты Керра и Погкельса, среди магнитооптических – эффекты Фарадея и Коттона-Мутона. Все перечисленные явления являются следствием анизотропных свойств кристаллов.

Остановимся кратко на основных вопросах кристаллооптики. Начнем со следующего мысленного эксперимента. Предположим, что внутри прозрачной кристаллической среды включен источник электромагнитного (видимого) излучения, обладающий сферической формой собственной диаграммы направленности. Проследим за процессом распространения в толще кристалла фронта оптической волны. Если через некоторое время после включения источника сфотографировать извне прозрачный образец и ту область пространства ("оптическое тело"), которая к моменту фотосъемки будет заполнена излучаемым светом, то выяснится, что для различных сред результаты эксперимента окажутся разными: в одних средах "оптическое тело" будет окружено сферической поверхностью, представляя собой световой шар, в других – иметь вид эллипсоида вращения (двухосный эллипсоид), в третьих – трехосного эллипсоида. Первый результат относится к изотропной сре-

де, в которой скорость распространения фронта оптического излучения одинакова во всех направлениях. Изотропными оказываются симметричные кристаллы с кубической решеткой. Второй и третий результаты наблюдаются в анизотропных средах (это кристаллы с любой другой структурой решетки кроме кубической). Указанные поверхности, в каждой точке которых волновой вектор волны, распространяющейся в среде, принимает постоянное значение, называют оптической индикатрисой кристалла.

Уравнение, описывающее поверхность индикатрисы, нетрудно вывести, исходя из материального уравнения (1.23) $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$ и соотношения (1.41) для плотности электрической энергии поля $w_{\text{Э}} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{D}$. Так как

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{0ik} \cdot E_k \quad (3.60)$$

(ϵ_{ik} – компонента тензора $\vec{\epsilon}$; i, k – индексы, принимающие значения 1,2,3), то

$$\begin{aligned} w_{\text{Э}} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 E_i \cdot D_i = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 E_i \cdot \epsilon_{ik} \cdot E_k = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot (\epsilon_{11} \cdot E_x^2 + \epsilon_{22} \cdot E_y^2 + \epsilon_{33} \cdot E_z^2 + \\ &+ 2 \cdot \epsilon_{12} \cdot E_x \cdot E_y + 2 \cdot \epsilon_{13} \cdot E_x \cdot E_z + 2 \cdot \epsilon_{23} \cdot E_y \cdot E_z). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Как видно, (3.61) по форме записи совпадает с уравнением поверхности 2-го порядка. Громоздкость выражения (3.61) объясняется тем, что оно записано для системы координат xyz , оси которой совершенно произвольно ориентированы относительно ребер атомной решетки кристалла. Поворачивая Ox , Oy , Oz , можно совместить их с так называемыми главными диэлектрическими осями кристалла OX , OY , OZ . В новых координатах X, Y, Z тензор $\vec{\epsilon}$ принимает диагональный характер ($\epsilon_{ik} = 0$ при $i \neq k$), и поэтому выражение (3.61) упрощается:

$$w_{\text{Э}} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot (\epsilon_X \cdot E_X^2 + \epsilon_Y \cdot E_Y^2 + \epsilon_Z \cdot E_Z^2) \quad (3.62)$$

или

$$\frac{D_X^2}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_X \cdot w_{\text{Э}}} + \frac{D_Y^2}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_Y \cdot w_{\text{Э}}} + \frac{D_Z^2}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_Z \cdot w_{\text{Э}}} = 1. \quad (3.63)$$

Мы получили каноническое уравнение поверхности 2-го порядка с центром симметрии. Оси OX , OY , OZ являются осями симметрии поверхности, представляющей собой трехосный эллипсоид, полуоси которого равны

$$a = \sqrt{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_X \cdot w_{\text{Э}}}, \quad b = \sqrt{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_Y \cdot w_{\text{Э}}}, \quad c = \sqrt{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_Z \cdot w_{\text{Э}}}. \quad (3.64)$$

Помимо формы оптической индикатрисы для выяснения особенностей распространения волн в анизотропных кристаллах большое значение имеет уравнение Френеля для волновых векторов. Для плоской волны, распространяющейся в объеме кристалла,

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (3.65)$$

Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{\mu}_a \cdot \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = i \cdot \omega \cdot \vec{D}$$

можно записать в виде

$$[\vec{k} \cdot \vec{E}_m] = \omega \cdot \vec{\mu}_a \cdot \vec{H}_m, \quad [\vec{k} \cdot \vec{H}_m] = -\omega \cdot \vec{D}. \quad (3.66)$$

Учитывая (3.60), а также вводя вектор $\vec{K} = \vec{k} / (\omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0})$, пару уравнений (3.66) можно заменить одним уравнением

$$[\vec{K} \cdot [\vec{K} \cdot \vec{E}_m]] = -\vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_m. \quad (3.67)$$

Раскрывая двойное векторное произведение и переходя к проекциям на главные оси кристалла, (3.67) можно заменить тремя скалярными уравнениями вида

$$\sum_{k=1}^3 \dot{E}_k (\varepsilon_{ik} + K_i \cdot K_k - K^2 \cdot \delta_{ik}) = 0, \quad (3.68)$$

где символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k (i, k=1, 2, 3). \end{cases}$$

Нетривиальное решение системы однородных линейных уравнений (3.68) находится приравниванием к нулю её определителя:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_X - K^2 + K_X^2 & K_Y \cdot K_X & K_Z \cdot K_X \\ K_X \cdot K_Y & \varepsilon_Y - K^2 + K_Y^2 & K_Z \cdot K_Y \\ K_X \cdot K_Z & K_Y \cdot K_Z & \varepsilon_Z - K^2 + K_Z^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.69)$$

Записанное в развернутом виде уравнение (3.69) известно как уравнение Френеля:

$$K^2 \cdot (\varepsilon_X \cdot K_X^2 + \varepsilon_Y \cdot K_Y^2 + \varepsilon_Z \cdot K_Z^2) - [\varepsilon_X \cdot (\varepsilon_Y + \varepsilon_Z) \cdot K_X^2 + \varepsilon_Y \cdot (\varepsilon_Z + \varepsilon_X) \cdot K_Y^2 + \varepsilon_Z \cdot (\varepsilon_X + \varepsilon_Y) \cdot K_Z^2] + \varepsilon_X \cdot \varepsilon_Y \cdot \varepsilon_Z = 0. \quad (3.70)$$

Квадратичность (3.70) относительно K^2 (или k^2) следует понимать как свидетельство того, что в анизотропной кристаллической среде плоская монохроматическая волна (3.65) при распространении в произвольном направлении разбивается на две волны. Подробный анализ показывает, что обе волны всегда поляризованы линейно в перпендикулярных друг другу плоскостях. Таким образом, в отличие от изотропных сред, где одинаковое право на существование имеют линейно-, кругло- и эллиптически-поляризованные волны, в анизотропной кристаллической среде волны с двумя последними видами поляризации распространяться не могут (исключение составляет частый случай, когда исходная плоская волна (3.65) бежит точно вдоль главной оси). Отмеченные волны движутся в кри-

сталле в одном направлении с разными скоростями, а следовательно, имеют разную длину. Направление поляризации волн и показатели преломления среды для каждой волны определяются с помощью оптической индикатрисы. С этой целью строится сечение индикатрисы плоскостью перпендикулярной к волновому вектору \vec{K} падающей волны (рисунок 3.16).

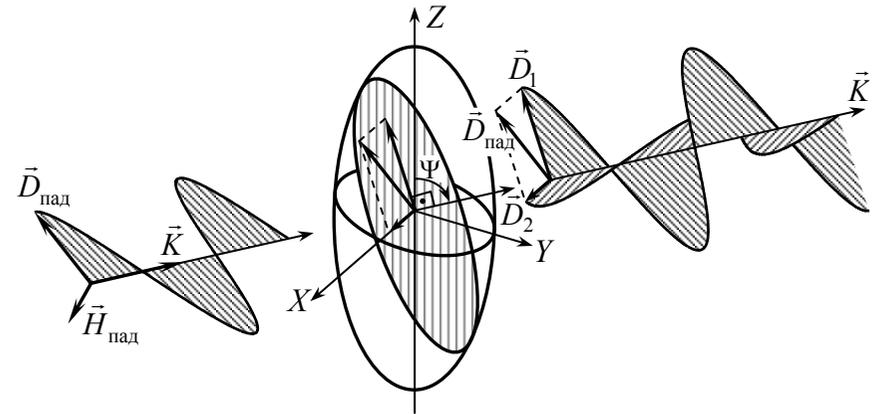


Рисунок 3.16

Главные оси эллипса сечения, изображенного на рисунке 3.17, задают направления поляризации двух волн, возбуждаемых в кристалле (\vec{D}_1 и \vec{D}_2), а длина каждой главной полуоси – величину показателя преломления среды для соответствующей волны. Существуют два таких направления вектора \vec{K} ($\Theta_1 = -\Theta_2 = \Theta$), для которых сечение трехосного эллипсоида имеет форму круга. Очевидно, что в данных случаях волна, бегущая в указанных направлениях, которые называют направлениями оптической оси кристалла, по-прежнему может быть

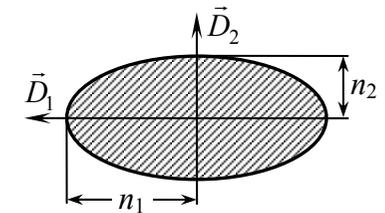


Рисунок 3.17

представлена комбинацией двух линейно-поляризованных волн. Однако скорости (и длины) этих волн одинаковы, а направления поляризации, оставаясь ортогональными, точно не определены. Кристаллы с оптической индикатрисой в виде трехосного эллипсоида ($a \neq b \neq c$, (3.64)), имеющие две оптические оси, называют двухосными. Очевидно, что если $a = b \neq c$ (3.64) и индикатриса описывается эллипсоидом вращения, то оптическая ось единственная и совпадает с кристаллографической осью. Такой кристалл называют одноосным.

Уравнение Френеля (3.70) для одноосного кристалла несколько упрощается:

$$(K^2 - \varepsilon_Y) \cdot [(K_X^2 + K_Y^2) \cdot \varepsilon_Y + K_Z^2 \cdot \varepsilon_Z - \varepsilon_Y \cdot \varepsilon_Z] = 0. \quad (3.71)$$

Два решения, соответствующие уравнениям, вытекающим из (3.71),

$$K^2 - \varepsilon_Y = 0, \quad (3.72, a)$$

$$(K_X^2 + K_Y^2) \cdot \varepsilon_Y + K_Z^2 \cdot \varepsilon_Z - \varepsilon_Y \cdot \varepsilon_Z = 0, \quad (3.72, б)$$

относятся к двум волнам, на которые в одноосном кристалле также разбивается падающая плоская волна при произвольном направлении распространения. Поверхность волновых векторов первой волны, как следует из (3.72, a), имеет вид сферы радиусом $\sqrt{\varepsilon_Y} = n_Y = n^{(об)}$. Следовательно, первая из двух волн воспринимает кристалл как изотропную среду, имеет сферический фронт, распространяется со скоростью

$$v^{(об)} = \frac{v_0}{\sqrt{\varepsilon_Y}} = \frac{v_0}{n^{(об)}}$$

и поляризована линейно в направлении либо малой полуоси эллипса сечения индикатрисы (для положительного кристалла $\varepsilon_X = \varepsilon_Y > \varepsilon_Z$), либо большой полуоси (для отрицательного кристалла $\varepsilon_X = \varepsilon_Y < \varepsilon_Z$). Эту волну называют обыкновенной.

Поверхность волновых векторов второй волны (см. формулу (3.72, б)) совпадает с поверхностью эллипсоида вращения, у которого одна полуось равна $\sqrt{\varepsilon_Y} = n^{(об)}$ (вдоль оси OZ), а две другие $\sqrt{\varepsilon_Z} = n^{(н)}$ (вдоль осей OX и OY). Вторая волна называется необыкновенной. Она движется со скоростью

$$v^{(н)} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \Psi}{\varepsilon_Z} + \frac{\cos^2 \Psi}{\varepsilon_Y}}$$

(здесь Ψ – угол между вектором \vec{k} и оптической осью кристалла) и поляризована линейно по одной из полуосей эллипса сечения оптической индикатрисы (перпендикулярно к обыкновенной волне). Необыкновенная волна пропадает, когда волновой вектор падающей волны совпадает с оптической осью кристалла. Таким образом, при распространении плоской электромагнитной волны в анизотропном кристалле (как в одно-, так и в двухосном) всегда (кроме случая $\Psi = 0^\circ$) имеет место эффект двойного лучепреломления.

Дополнительные особенности волнового процесса, порождаемые анизотропией среды, вытекают из уравнений (3.66). Анализируя последние, легко установить, что векторы $\vec{E}, \vec{D}, \vec{k}, \vec{H}$ всегда располагаются в одной плоскости, перпендикулярной вектору \vec{H} , причем, если $\Psi \neq 0$, векторы \vec{E} и \vec{D} непараллельны и угол между ними равен углу между \vec{H} и \vec{k} . Следовательно, в анизотропном кристалле фронт волны движется в направлении, отличном от направления потока энергии, переносимой волной (рисунок 3.18).

В лазерной технике для управления режимом излучения лазера хорошо зарекомендовали себя электрооптические модуля-

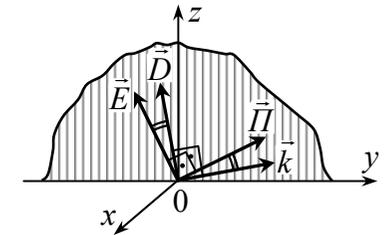


Рисунок 3.18

торы (затворы) на анизотропных кристаллах, в которых имеют место эффекты Керра и Поггеля.

Электрооптический эффект Керра

Эффект Керра (открыт шотландским физиком Дж. Керром в 1875 г.) наблюдается в кристаллах, решетка которых имеет центр симметрии (группа перовскитов ABO_3 , BaTiO_3 , $\text{KTa}_x\text{Nb}_{1-x}\text{O}_3$ и др.), в жидких диэлектриках (нитробензол, сероуглерод, ацетон, этиловый спирт и др.) и в газах. Указанные вещества в обычном состоянии изотропны и характеризуются относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Однако во внешнем однородном электрическом поле \vec{E}_0 вследствие ориентации вдоль него молекул, обладающих собственным дипольным моментом (ориентационный эффект), и индуцирования полем E_0 дипольного момента в молекулах, которые не имеют его в естественном состоянии (поляризационный эффект), эти вещества становятся анизотропными, переходя в класс одноосных кристаллов. При этом их оптическая индикатриса из сферы превращается в эллипсоид вращения (рисунок 3.19,а), главная ось которого (оптическая ось кристалла) ориентируется параллельно полю \vec{E}_0 (рисунок 3.19,б).

Эффект Керра квадратичен:

$$\sqrt{\epsilon^{(H)}} = \sqrt{\epsilon^{(O)}} + K_k \cdot E_0^2 \quad (3.73)$$

($K_k = 2\pi \cdot n^{(O)} \cdot B_k$ – постоянная среды; B_k – постоянная Керра).

Если теперь линейно-поляризованную волну пропустить сквозь указанную среду в направлении, перпендикулярном \vec{E}_0 (скажем, вдоль оси OY), она разобьется на обыкновенную и необыкновенную волны. Обыкновенная волна приобретет линейную поляризацию, параллельную оси OX , и будет распро-

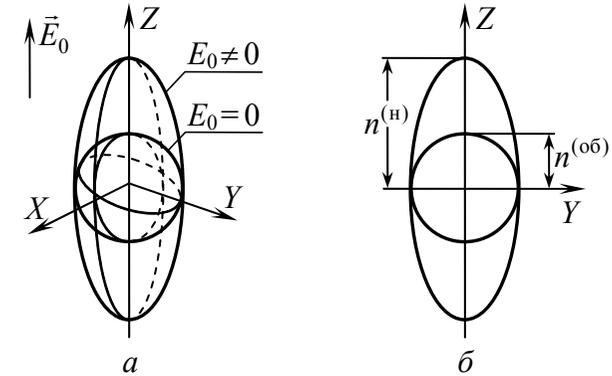


Рисунок 3.19

страняться со скоростью

$$v^{(O)} = \frac{v_0}{n^{(O)}} = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon^{(O)}}} = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon}}$$

Необыкновенная волна (также линейно-поляризованная, но вдоль оси OZ) будет распространяться медленнее:

$$v^{(H)} = \frac{v_0}{n^{(H)}} = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon^{(H)}}}$$

За счет различия скоростей $v^{(O)}$, $v^{(H)}$ обыкновенная и необыкновенная оптические волны, пройдя в среде путь ℓ , приобретут фазовый сдвиг

$$\Delta\Phi = \omega \cdot \ell \cdot \left(\frac{1}{v^{(H)}} - \frac{1}{v^{(O)}} \right) \approx 2\pi \cdot B_k \cdot \ell \cdot E_0^2 \quad (3.74)$$

(в (3.74) учтено, что $K_k \cdot E_0^2 \ll \epsilon^{(O)}$), вследствие чего на выходе из среды оптическая волна будет иметь эллиптическую поляризацию. При $\Delta\Phi = \pi/2$ и равенстве амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн поляризация станет круговой.

Электрооптический эффект Поккельса

Эффект, открытый в 1894 г. немецким физиком Ф. Поккельсом, заключается в том, что под действием внешнего электрического поля, приложенного в направлении оптической оси одноосного кристалла, последний по своим оптическим свойствам становится двухосным. При этом индикатриса, имевшая форму эллипсоида вращения, превращается в трехосный эллипсоид, поперечные оси которого OX , OY разворачиваются по отношению к осям Ox , Oy исходного кристалла на угол 45° (рисунок 3.20, изображено сечение индикатрисы плоскостью $Z=0$). Таким образом, свойство двойного лучепреломления в среде после наложения внешнего

поля \vec{E}_0 сохраняется. Более того, если в состоянии одноосного кристалла оптические свойства среды определялись двумя главными показателями преломления $n_x = n_y = n^{(об)}$, $n_z = n^{(н)}$, то в результате действия поля \vec{E}_0 и перехода среды в класс двухосных кристаллов главных показателей преломления становится три: $n_x = n_1$, $n_y = n_2$, $n_z = n_3$, причем

$$n_1 \approx n^{(об)} + \frac{1}{2} \cdot n^{(об)3} \cdot r_3 \cdot E_0, \quad n_2 \approx n^{(об)} - \frac{1}{2} \cdot n^{(об)3} \cdot r_3 \cdot E_0, \quad (3.75)$$

где r_3 – компонента тензора электрооптической постоянной среды.

Если электромагнитная волна проходит сквозь двухосный кристалл ($E_0 \neq 0$) в направлении оси OZ , то разница фаз двух линейно-поляризованных (вдоль осей OX и OY) волн, возникающих вследствие двойного лучепреломления, равна

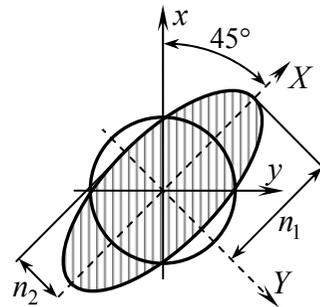


Рисунок 3.20

$$\Delta\Phi_{\parallel} = \omega \cdot \ell \cdot \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \omega \cdot \ell \cdot v_0 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \approx 2\pi \cdot n^{(об)3} \cdot r_3 \cdot E_0 \cdot \frac{\ell}{\lambda}, \quad (3.76)$$

где учтено, что $\frac{1}{2} \cdot n^{(об)3} \cdot r_3 \cdot E_0 \ll n^{(об)}$.

При поперечном распространении вдоль оси OX

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\perp X} &= \omega \cdot \ell \cdot \left(\frac{1}{v^{(н)}} - \frac{1}{v_2} \right) = \omega \cdot \ell \cdot n_0 \cdot \left(\frac{1}{n^{(н)}} - \frac{1}{n_2} \right) \approx \\ &\approx \frac{2\pi \cdot \ell}{\lambda} \cdot (n^{(н)} - n^{(об)}) + \frac{\pi \cdot \ell}{\lambda} \cdot n^{(об)3} \cdot r_3 \cdot E_0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Если волна движется вдоль оси OY , то

$$\Delta\Phi_{\perp Y} \approx \frac{2\pi \cdot \ell}{\lambda} \cdot (n^{(н)} - n^{(об)}) - \frac{\pi \cdot \ell}{\lambda} \cdot n^{(об)3} \cdot r_3 \cdot E_0. \quad (3.78)$$

Как видно, эффект Поккельса линеен относительно поля E_0 . Выражение (3.76) свидетельствует о том, что двойное лучепреломление продольно распространяющейся волны наблюдается только при включении поля E_0 . В случае поперечного распространения к фазовому сдвигу двух волн, связанному с естественной анизотропией ($n^{(об)} \neq n^{(н)}$), прибавляется (или вычитается в зависимости от направления движения падающей волны) сдвиг, вызванный искусственно созданной анизотропией в результате действия поля E_0 ($n_1 \neq n^{(об)}$, $n_2 \neq n^{(об)}$). Эффект Поккельса наблюдается во многих кристаллах. В лазерной технике чаще других используются соединения типа ABO_3 , $LiNbO_3$, $LiTaO_3$, $BaTiO_3$, $BaNbO_3$, а также дигидрофосфат калия KH_2PO_4 .

3.6 Волны в неоднородных средах

Неоднородность среды может проявляться по-разному: резко, в виде скачка параметров ϵ_a , μ_a , σ и плавно, когда определенно выраженной границы раздела разных сред не существует. Закономерности взаимодействия электромагнитных волн с неоднородностью первого типа будут рассмотрены в 4-й гла-

ве. В настоящем разделе мы ознакомимся с основной особенностью распространения волн в безграничной неоднородной среде, характеризующейся плавным изменением показателя преломления. Потерями будем пренебрегать, а среду считать изотропной.

Как отмечалось в разделе 1.3, хорошим примером неоднородной среды является земная атмосфера. В нижней ее части, называемой тропосферой (высота $0 \div 15$ км), давление воздуха с увеличением высоты постепенно понижается. Это приводит к уменьшению показателя преломления. В верхней части атмосферы (она называется ионосферой; высота над поверхностью Земли $60 \div 20\,000$ км) плавное изменение показателя преломления вызвано непостоянством концентрации свободных электронов (см. рисунок 3.12). Высотная неоднородность атмосферы оказывает существенное влияние на распространение тропосферных и ионосферных волн.

Для всех видов сред, рассмотренных в предыдущих разделах, общим было свойство строго прямолинейного распространения электромагнитной волны. Посмотрим, по какой траектории будет перемещаться волна в плавно-неоднородной среде. Пусть в направлении оси Ox показатель преломления среды постепенно уменьшается. Разобьем среду на ряд слоев, столь тонких, чтобы в каждом из них с хорошим приближением можно было считать показатель преломления постоянным (рисунок 3.21,а), а при переходе из нижнего слоя в соседний верхний показатель преломления уменьшался скачком на малую величину Δn . Предположим, что в первом слое от точки A под углом Θ_1 к оси Ox распространяется плоская волна. В силу однородности слоя она движется прямолинейно вплоть до самой границы 2-го слоя. В точке B волна скачкообразно изменит направление распространения (подробно этот вопрос рассматривается в разделе 4.2). Связь углов Θ_1 и Θ_2 определяется вторым законом Снелля (4.7):

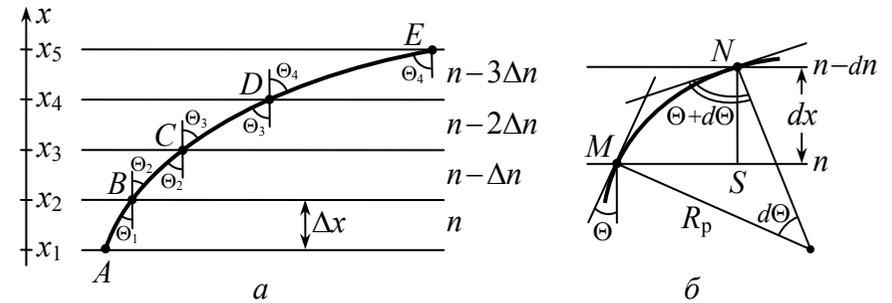


Рисунок 3.21

$$n_1 \cdot \sin \Theta_1 = n_2 \cdot \sin \Theta_2, \quad n_1 = n, \quad n_2 = n - \Delta n.$$

Написанные соотношения справедливы для любой пары смежных слоев, т.е. в каждом слое $n_i \cdot \sin \Theta_i = \text{const}$. Поскольку с ростом номера слоя n_i уменьшается, угол Θ_i должен возрастать. В конце концов, волна достигнет такого слоя, на границе которого $\Theta_i = 90^\circ$. Ясно, что при уменьшении Δx дискретно-слоистая среда постепенно переходит в реальную среду с непрерывным изменением n , а кусочно-ломаная траектория волны – в плавно изогнутую траекторию. Вычислим радиус кривизны этой траектории R_p . Из геометрических построений (рисунок 3.21,б) видно, что

$$R_p = \frac{\widehat{MN}}{d\Theta} \quad (3.79)$$

причем в силу малости dx длина дуги \widehat{MN} равна отрезку MN . Решая ΔMNS , получаем

$$R_p = \frac{dx}{\cos(\Theta + d\Theta) \cdot d\Theta} \approx \frac{dx}{\cos \Theta \cdot d\Theta}.$$

Учтем, что $n \cdot \sin \Theta = \text{const}$, поэтому полный дифференциал $d(n \cdot \sin \Theta) = dn \cdot \sin \Theta + n \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$ равен нулю. Тогда

$$R_p = \frac{n}{-(dn/dx) \cdot \sin \Theta}. \quad (3.80)$$

Явление отклонения электромагнитной волны от прямолинейного направления распространения в неоднородной среде называется рефракцией. Таким образом, формула (3.80) позволяет вычислить радиус рефракции волны в среде с градиентом показателя преломления dn/dx , если на слой этой среды, характеризующийся показателем n , волна упала под углом Θ . На рисунке 3.22 приведены примеры рефракции волны, создаваемой источником A , для разных законов неоднородности $n(x)$. На рисунке 3.22,а показаны возможные варианты изменения показателя преломления неоднородной среды от координаты x . Прямая 1 соответствует однородной среде ($n(x) = n_0 = \text{const}$). Случай 2 описывает среду, в которой с увеличением x показатель преломления растет ($dn/dx > 0$). Кривые 3, 4, 5 отвечают случаям понижения n с ростом x ($dn/dx < 0$). На рисунке 3.22,б для каждого из указанных вариантов изменения $n(x)$ качественно показана форма траектории рефракции волны: 1 – прямолинейная ($R_p = \infty$); 2 – круговая ($R_p < 0$); 3 – круговая ($R_p > 0$); 4, 5 – криволинейные с положительной рефракцией ($R_p > 0$).

Формула (3.80) позволяет вычислить радиус рефракции в верхней точке траектории волны при ее распространении в тропосфере. В этом случае $\Theta \rightarrow 90^\circ$, а $n \approx 1$. Тогда

$$R_p = \frac{1}{-(dn/dx)}.$$

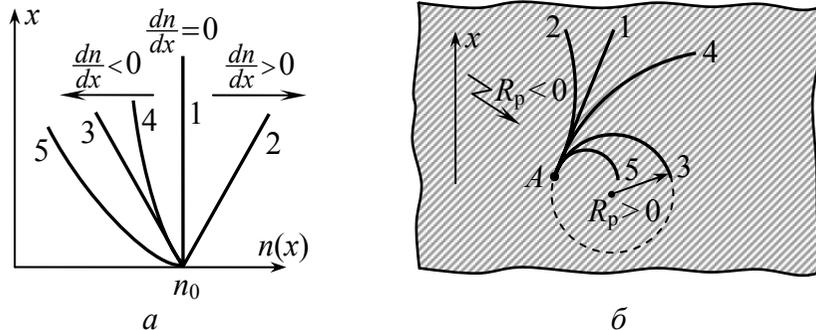


Рисунок 3.22

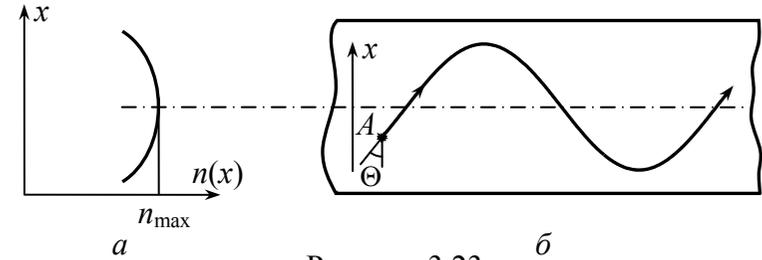


Рисунок 3.23

При типичных условиях (нормальная тропосфера) градиент показателя преломления $dn/dx = -4 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$, радиус рефракции $R_p = 4/3 \cdot R_3 \approx 8500 \text{ км}$ ($R_3 = 6370 \text{ км}$ – радиус Земли).

В практическом отношении интересно рассмотреть случай, когда волна попадает в слой неоднородной среды, показатель преломления которой симметрично уменьшается от середины к краям (рисунок 3.23). В такой среде волна при правильно подобранном угле Θ движется по периодически изогнутой траектории, не доходя до краев слоя. Описанная особенность используется в оптических световодах градиентного типа, придавая им важные преимущества по сравнению со световодами, в которых показатель преломления от середины к краям изменяется скачкообразно.

3.7 Волны в нелинейных средах

При всем разнообразии параметров сред, рассмотренных в предыдущих разделах, общим для них свойством была линейность. Многие десятилетия радиоэлектроника развивалась в условиях, когда нелинейные свойства вещества либо совсем не проявлялись, либо были выражены слишком слабо, чтобы представлять прикладной интерес. Не следует смешивать вопрос практического использования взаимодействия электромагнитных волн с нелинейными средами и вопрос преобразования сигналов в радиотехнических цепях с нелинейными элементами (лампами, полупроводниковыми приборами и др.),

с которыми радиоэлектроника была неразрывно связана о первых шагах своего развития. И все-таки с отдельными нелинейными эффектами в средах радиоэлектроника встречалась уже давно.

Одним из наглядных примеров проявления нелинейности плазмы ионосферы является так называемый люксембурггорьковский эффект (эффект кросс-модуляции). При установлении связи между Люксембургом и Горьким с помощью отражений средних радиоволн (частота $f=0,3...3$ МГц) от ионосферы было обнаружено, что высокоизбирательные приемники, расположенные в Люксембурге и Горьком, помимо информации, передаваемой по данному радиоканалу, регистрируют сигналы некоторой посторонней радиостанции, работающей на более низкой частоте $f_2 < f_1$, но непосредственно (при выключенном сигнале f_1) приемниками не принимаемой. Эффект получил следующее объяснение. Мощная мешающая радиостанция C (рисунок 3.24) своим излучением заставляет электроны ионосферы колебаться с частотой f_2 . В результате скорость движения электронов в объеме облучения кроме тепловой составляющей $v_T = \sqrt{8 \cdot K_B \cdot T / (\pi \cdot m)}$ (K_B – постоянная Больцмана, T – температура электрона) приобретает колебательную составляющую $v_E = \sqrt{e \cdot E_{д2} / (2\pi \cdot f_2 \cdot m)}$ ($E_{д2}$ – действующее значение поля частотой f_2). При модуляции $E_{д2}$ с частотой Ω полная скорость движения электрона $v = \sqrt{v_T^2 + v_E^2}$ периодически изменяется, что неизбежно ведет к изменениям частоты его столкновений $\vartheta = v / \ell_e$ (ℓ_e – длина свободного пробега) с атомами воздуха. Возникает модуляция на частоте Ω диэлектрической проницаемости плазмы ионосферы (см. (3.38)...(3.40)) в объеме V . Естественно, что излучение f_1 , проходя сквозь V при распространении от передатчика A к приемнику B , приобретает перекрестную модуляцию на частоте Ω вследствие периодического изменения затухания. Расчеты и эксперимент показали, что, ес-

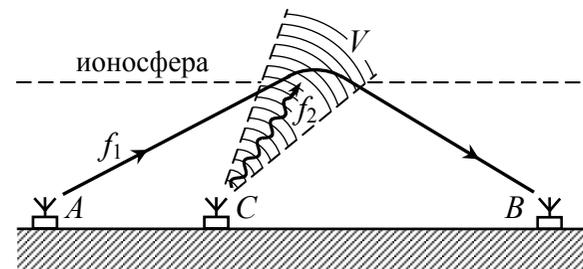


Рисунок 3.24

если f_2 относится к диапазону длинных волн (30...300 кГц), описанный эффект кросс-модуляции появляется уже при $E_{д2} = 0,1-2,0$ мВ/м. В отношении малости величины $E_{д2}$, приводящей к нелинейности свойств, плазма является совершенно уникальной средой.

В конденсированном веществе (жидкости, твердые тела) нелинейности могут стать заметными, если поле $E_{д2} \sim 10^7...10^8$ В/см, т.е. сопоставимо с внутриаомными электрическими полями ($\sim 10^7$ В/см в полупроводящих, $\sim 10^9$ В/см в твердых диэлектрических средах). Именно поэтому бурное развитие и применение в технике нелинейных электромагнитных явлений в средах началось после разработки лазеров, в лучах которых стало возможным достижение столь высоких напряженностей полей. В настоящее время разнообразные нелинейно-оптические явления это не красивая экзотика, а основа действия многих технических устройств лазерных систем связи, локации, управления. Наибольшее практическое применение находят следующие нелинейные оптические явления: параметрическая генерация света, генерация гармоник оптического излучения, вынужденное рассеяние света, обращение волнового фронта, оптическое просветление сред, насыщение активных сред, самофокусировка оптического излучения.

Перечисленные процессы являются следствием нелинейности показателя преломления среды, а точнее, нелинейности ее поляризуемости.

Нелинейная поляризация среды

Если в веществе действует поле \vec{E} , согласно (1.27) электрическая индукция равна $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$. В линейной изотропной среде составляющая вектора поляризации \vec{P} по i -й оси ($i \rightarrow x, y, z$) равна $P_i = \chi_i \cdot E_i$. В анизотропной среде

$$P_i^{(n)} = P_i^{(1)} = \sum_k \chi_{ik}^{(1)} \cdot E_k, \quad (3.81)$$

где $\chi_{ik}^{(1)}$ – компоненты тензора линейной восприимчивости. Если среда нелинейна, то

$$P_i = P_i^{(1)} + P_i^{(2)} + P_i^{(3)} = P_i^{(л)} + P_i^{(нл)}, \quad (3.82)$$

т.е. поляризация помимо линейной составляющей ($P_i^{(1)}$) содержит нелинейную добавку $P_i^{(нл)}$, в которой $P_i^{(2)}$ учитывает квадратичную нелинейность, $P_i^{(3)}$ – кубическую. Поэтому в нелинейной анизотропной среде вместо (3.81) в общем случае имеем

$$P_i = \sum_k \chi_{ik}^{(1)} \cdot E_k + \sum_k \sum_j \chi_{ikj}^{(2)} \cdot E_k \cdot E_j + \sum_k \sum_j \sum_m \chi_{ikjm}^{(3)} \cdot E_k \cdot E_j \cdot E_m. \quad (3.83)$$

Введение нелинейной поляризации (3.83) в материальное уравнение (1.27) придает нелинейный характер всей системе уравнений Максвелла, что и приводит в конечном счете к перечисленным выше явлениям.

Классификация нелинейных явлений

Для удобства ориентации в сложном спектре нелинейных явлений осуществим их классификацию, рассмотрев случай, когда на среду одновременно действуют постоянное и переменное (гармоническое) поля с параллельным направлением

векторов \vec{E}_0 и $\vec{E}(t)$. Тогда анализ принимает следующий скалярный характер:

$$E = E_0 + E_m \cos(\omega \cdot t), \quad (3.84)$$

$$P = \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)} E + \chi^{(3)} E^2) \cdot E, \quad (3.85)$$

$$P^{(л)} = \chi^{(1)} E_0 + \chi^{(1)} E_m \cos(\omega \cdot t), \quad (3.86)$$

$$P^{(нл)} = P^{(0)} + P^{(\omega)} \cos(\omega \cdot t) + P^{(2\omega)} \cos(2\omega \cdot t) + P^{(3\omega)} \cos(3\omega \cdot t), \quad (3.87)$$

$$P^{(0)} = \chi^{(2)} E^{(0)} E^{(0)} + \chi^{(3)} E^{(0)} E^{(0)} E^{(0)} + \frac{3}{2} \chi^{(3)} E^{(0)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} + \frac{1}{2} \chi^{(2)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} = P_1^{(нл)} + P_2^{(нл)} + P_3^{(нл)} + P_4^{(нл)}, \quad (3.88)$$

$$P^{(\omega)} = 2\chi^{(2)} E^{(0)} E^{(\omega)} + 3\chi^{(3)} E^{(0)} E^{(0)} E^{(\omega)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} = P_5^{(нл)} + P_6^{(нл)} + P_7^{(нл)}, \quad (3.89)$$

$$P^{(2\omega)} = \frac{3}{2} \chi^{(3)} E^{(0)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} + \frac{1}{2} \chi^{(2)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} = P_8^{(нл)} + P_9^{(нл)}, \quad (3.90)$$

$$P^{(3\omega)} = \frac{1}{4} \chi^{(3)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} E^{(\omega)} = P_{10}^{(нл)}. \quad (3.91)$$

Обсудим полученный результат. Вспомним (см. раздел 1.2), что переменное электромагнитное поле возбуждается в среде лишь тогда, когда в ней возникает изменяющийся во времени ток смещения (1.20). С учетом (1.27) и (3.84) в рассматриваемой задаче

$$j_{см}(t) = (-\omega) \cdot [\epsilon_0 E_m \sin(\omega \cdot t) + \chi^{(1)} E_m \sin(\omega \cdot t) + P^{(\omega)} \sin(\omega \cdot t) + P^{(2\omega)} \sin(2\omega \cdot t) + P^{(3\omega)} \sin(3\omega \cdot t)]. \quad (3.92)$$

Следовательно, в среде с нелинейностями второго и третьего порядка при распространении монохроматической волны с частотой ω протекают процессы, порождающие волны с той же самой, с удвоенной и с утроенной частотами. В линейной среде ($\chi^{(2)} = \chi^{(3)} = 0$, $\chi^{(1)} \neq 0$) нелинейная составляющая поляри-

зации $P^{(нл)}=0$: частотный спектр поля, возбуждаемого в среде вследствие ее переменной поляризации, совпадает со спектром поля, воздействующего на среду. Нелинейная же среда реагирует на гармоническое воздействие качественным преобразованием спектра, обогащая его кратными гармоническими составляющими.

Полезно помнить, что в изотропных газах, жидкостях и кристаллах с кубической структурой решетки восприимчивость $\chi^{(2)}=0$, поэтому (см. (3.85))

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(3)} \cdot E^2.$$

В таких средах наблюдается квадратичный эффект Керра и отсутствует линейный эффект Поккельса. В веществах, не имеющих центра симметрии и обладающих квадратичной нелинейностью ($\chi^{(2)} \neq 0, \chi^{(3)} = 0$)

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} \cdot E,$$

наблюдается линейный (по полю) эффект Поккельса и отсутствует эффект Керра. Анализируя (3.88) ... (3.91), нетрудно заметить, что каждая составляющая нелинейной поляризуемости $P_1^{(нл)} \dots P_{10}^{(нл)}$ имеет свои причины появления и вносит свой вклад в конкретный нелинейный процесс в среде. Составляющие $P_1^{(нл)} \dots P_4^{(нл)}$ определяют статическую нелинейную поляризацию, составляющие $P_5^{(нл)} \dots P_7^{(нл)}$ – возбуждение первой гармоники, составляющие $P_8^{(нл)} \dots P_{10}^{(нл)}$ – генерацию кратных по частоте гармоник. Составляющие $P_1^{(нл)}, P_3^{(нл)}, P_5^{(нл)}, P_6^{(нл)}, P_8^{(нл)}$ появляются только при наличии постоянного электрического поля E_0 . Составляющие $P_4^{(нл)}, P_7^{(нл)}, P_9^{(нл)}, P_{10}^{(нл)}$ порождаются самовоздействием волны в нелинейной среде. За счет составляющих поляризации $P_1^{(нл)}, P_5^{(нл)}$ диэлектрическая проницаемость среды приобретает соответственно добавки $\chi^{(2)}E_0, 2\chi^{(2)}E_m$, приводящие к появлению

линейного (по полю) электрического эффекта Поккельса. За счет поляризации $P_2^{(нл)}, P_6^{(нл)}$ добавки к диэлектрической проницаемости соответственно равны $\chi^{(3)}E_0^2$ и $3\chi^{(3)}E_0E_m$, т.е. определяют квадратичный по полю электростатический эффект Керра. Составляющая $P_4^{(нл)}$ характеризует постоянную поляризацию среды при самовоздействии гармонической волны и, следовательно, описывает эффект детектирования последней нелинейной средой. Наличие составляющей $P_7^{(нл)}$ означает увеличение диэлектрической проницаемости среды при распространении в ней электромагнитной волны на величину $\frac{3}{4}\chi^{(3)}E_m^2$. Следовательно, волна достаточной интенсивности оптически уплотняет вещество по пути своего движения, в результате чего наблюдается самофокусировка волны. Таким образом, если на нелинейную среду действует лишь постоянное электрическое поле, нелинейная поляризация содержит составляющие $P_1^{(нл)}$ (только в кристаллах) и $P_2^{(нл)}$ (в кристаллах, жидкостях, газах). Это значит, что слабая оптическая волна в данных условиях испытывает двойное лучепреломление вследствие линейного и квадратичного электрооптических эффектов. Если постоянного поля нет, а в среде распространяется мощное излучение на частоте ω , нелинейная поляризация содержит составляющие $P_4^{(нл)}, P_9^{(нл)}$ (только в кристаллах) и $P_7^{(нл)}, P_{10}^{(нл)}$ (в кристаллах, жидкостях, газах). В этом случае имеет место оптическое детектирование, самофокусировка, генерация 2-й и 3-й гармоник, причем все перечисленные эффекты вызваны самовоздействием волны.

Параметрическая генерация света

Если при отсутствии постоянного электрического поля в среде с квадратичной нелинейностью ($P^{(нл)} = \chi^{(2)}E^2$) одновре-

менно распространяются две оптические волны с частотами ω_1, ω_2 :

$$E = E_{m1} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + E_{m2} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t),$$

то нелинейная поляризация помимо постоянной составляющей приобретает гармонические компоненты на частотах $2\omega_1, 2\omega_2$, а также на комбинационных частотах $(\omega_1 \pm \omega_2)$. Последний эффект называется параметрической генерацией излучения. Примечательно, что изменением во времени частоты одной из волн можно добиться широкодиапазонной параметрической перестройки частоты комбинационного излучения. Параметрический эффект широко используется в технике для получения когерентного оптического излучения на частотах, которые не удастся непосредственно генерировать в лазере из-за отсутствия активной среды с подходящими рабочими уровнями.

Генерация оптических гармоник

Генерацию в нелинейной среде волн с частотами, кратными частоте распространяющейся в ней мощной волны, можно рассматривать как частный случай параметрического преобразования частоты. Например, генерацию второй гармоники можно рассматривать как параметрическое смешивание оптических частот $\omega_1 + \omega_2 = \omega + \omega$ в нелинейной среде.

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна

Примером параметрического взаимодействия электромагнитного излучения с нелинейной средой является рассеяние когерентной оптической волны на упругих волнах, которые возбуждаются в среде самим оптическим излучением (так называемое вынужденное рассеяние). Явление было теоретически предсказано советским ученым академиком Л.И. Мандельштамом (1913 г.) и независимо от него французским фи-

зиком Л. Бриллюэном (1914 г.). Поэтому в физике оно известно под названием вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна (ВРМБ). Экспериментально явление ВРМБ было открыто только спустя 50 лет американскими учеными Чиао, Таунсом, Стойчевым после появления источников мощного лазерного излучения. Суть ВРМБ-эффекта с позиций электродинамики Максвелла заключается в следующем.

В конденсированных средах вследствие тепловых колебаний составляющих их атомов и молекул происходит постоянное возбуждение звуковых (упругих) волн. Беспорядочные по своей природе тепловые колебания частиц среды естественно порождают хаотический (по частотам и направлениям распространения) набор звуковых волн. Поэтому всевозможные волны звука пронизывают объем любой не охлажденной до нуля градусов Кельвина среды во всех направлениях. Каждая плоская упругая волна вызывает появление в среде чередующихся с периодичностью, равной длине волны звука, областей повышенного и пониженного давления. В данных областях происходит соответственно уплотнение и разрежение материала среды, что вызывает увеличение и уменьшение показателя преломления, описываемого выражением

$$n(\vec{r}_i, t) = n_0 + \Delta n_i \cdot \sin(\Omega_i \cdot t - \vec{k}_{зв i} \cdot \vec{r}_i), \quad (3.93)$$

в котором $\Omega_i, k_{зв i}$ – круговая частота и волновой вектор i -й звуковой волны, \vec{r}_i – радиус-вектор направления ее распространения; n_0 – показатель преломления среды при отсутствии звука, Δn_i – амплитуда изменения n , вызванная действием i -й волны звука. Таким образом, всякая звуковая волна $I_{зв}$ при распространении в конденсированной среде, например, в направлении Ox , создает строго периодическую (синусоидальную) последовательность плоскостей с повышенным и пониженным значением показателя преломления, т.е. формирует своеобразную решетку, прозрачную для оптического излучения (рисунок 3.25, а, б).

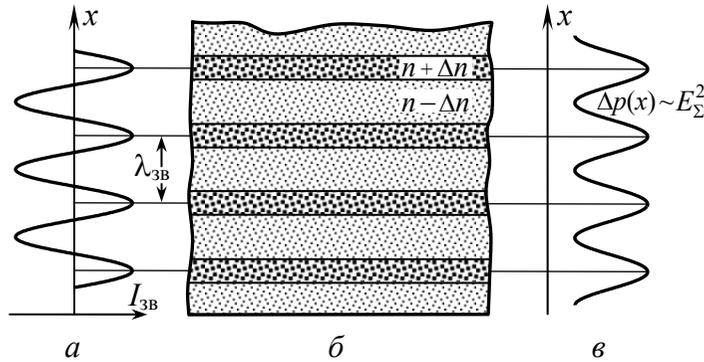


Рисунок 3.25

Пусть теперь в такой среде распространяется когерентная электромагнитная волна оптического диапазона. Если интенсивность волны велика, она сама вызывает генерацию звука в среде. Механизм этого явления заключается в следующем.

Оптическая волна рассеивается на акустических решетках тепловых колебаний, о которых только что шла речь. Поскольку период этих решеток разный для разных звуковых волн и ориентированы они хаотично, рассеяние света происходит неупорядоченно. Такое рассеяние называется спонтанным. Рассеянная волна имеет частоту ω_p , отличную от частоты ω_0 падающей. Если $\omega_p < \omega_0$, то энергия рассеянной волны меньше, чем падающей. Возникшая разница (по закону сохранения энергии) покрывается за счет возбуждения еще одной волны (акустической) с частотой $\Omega = \omega_0 - \omega_p$. Если $\omega_p > \omega_0$, то энергия рассеянной волны оказывается больше энергии падающей волны. В этом случае рассеянная электромагнитная волна вбирает в себя не только энергию падающей волны, но и энергию одной из акустических волн среды, имеющей частоту $\Omega = \omega_p - \omega_0$. Рассеяние света, сопровождающееся понижением частоты ($\omega_p = \omega_0 - \Omega$), более вероятно, чем обратный процесс ($\omega_p = \omega_0 + \Omega$).

Таким образом, в результате взаимодействия электромагнитной волны с частотой ω_0 с собственными звуковыми коле-

баниями среды в последней появляется электромагнитное поле двух частот: основной волны $E_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot r)$ и рассеянной $E_p \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega) \cdot t - (k_0 - k_{3B}) \cdot r]$, где $k_{3B} = 2\pi/\lambda_{3B}$ – волновое число звуковой волны, на которой произошло рассеяние (рисунок 3.26). Если падающая волна достаточно интенсивна, в среде наблюдается электрострикционный эффект, заключающийся в том, что в местах пучности электромагнитного поля давление в среде растет на величину $\Delta p \sim E^2$. В суммарном поле падающей и рассеянной волн (рисунок 3.25, в)

$$\Delta p \sim E_{\Sigma}^2 = \{E_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot r) + E_p \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega) \cdot t - (k_0 - k_{3B}) \cdot r]\}^2 \quad (3.94)$$

Периодическое изменение давления в среде по закону (3.94) приводит к возбуждению звуковых колебаний, спектр которых содержит частоты $\Omega, 2(\omega_0 - \Omega), 2\omega_0, 2\omega_0 + \Omega$. Если ω_0 относится к оптическому диапазону, то частоты $2(\omega_0 - \Omega), 2\omega_0, 2\omega_0 + \Omega$ оказываются слишком высокими для звука, поэтому акустические колебания, обусловленные действием электрострикции, возможны только на частоте Ω . Примечательно, что эти колебания электрострикционного происхождения повторяют по частоте и направлению распространения те собственные (тепловой природы) звуковые колебания среды, которые вызвали первона-

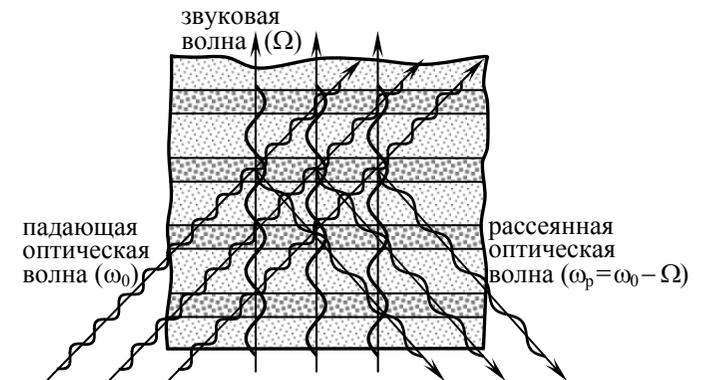


Рисунок 3.26

чальное рассеяние падающего оптического электромагнитного излучения. Рожденные упругие колебания Ω , как и рассеянное электромагнитное излучение на частоте $\omega_p = \omega_0 - \Omega$, начинают усиливаться. Энергия обеих волн поступает из падающей волны ω_0 , рассеяние которой приобретает вынужденный характер, и происходит тем вероятнее, чем выше интенсивность волн ω_p и Ω . Описанный нелинейный процесс самоподдерживается, развиваясь до той стадии, когда интенсивность рассеянной электромагнитной волны станет сравнимой с интенсивностью падающей волны. Явление ВРМБ применяется в технике для генерации в кристаллах мощных гиперзвуковых волн, а в последнее время – для обращения фронта лазерного излучения.

Обращение волнового фронта

Заманчивые проекты использования лазеров с их высоким качеством излучения для связи, локации в технологических целях одно время казались несбыточными из-за резкого ухудшения этого качества при распространении излучения в оптически неоднородных средах (в турбулентной атмосфере, в световодах, в оптических элементах – линзах, призмах и т.п.). Ситуация принципиально изменилась после открытия эффекта обращения волнового фронта (ОВФ). Внешнее проявление ОВФ-эффекта состоит в следующем. Волна высоконаправленного когерентного излучения с идеальным (плоским) фронтом при прохождении через оптически неоднородную среду теряет свою направленность из-за ухудшения когерентных свойств и искажения фронта (рисунок 3.27; фронт волны изображен сплошной линией; стрелки, ориентированные вправо, указывают направление вектора Пойнтинга на отдельных участках фронта при прямом распространении). Если вышедшую из среды волну отразить обычным плоским зеркалом назад, то при вторичном (обратном) прохождении неоднородной среды фронт волны еще более исказится. Линза не сможет сфокуси-

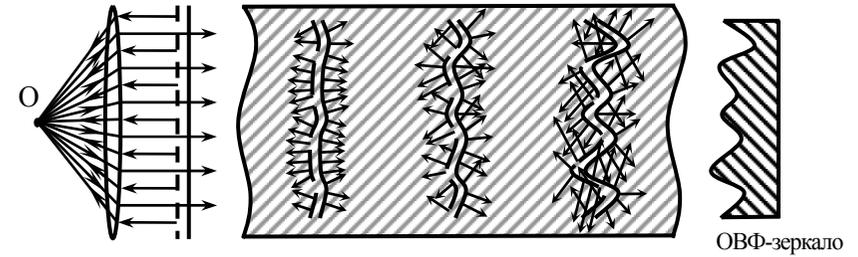


Рисунок 3.27

ровать такое излучение (рисунок 3.28). Заменим плоское зеркало на кривое, поверхность которого в точности совпадает с конфигурацией фронта волны на выходе ее из неоднородной среды (рисунок 3.27, ОВФ-зеркало). Такое зеркало точно обратит фронт волны. Поэтому направление потока оптической волны в каждой точке обращенного фронта, изображенного штриховой линией на рисунке 3.27, будет противоположно тому, какое было в этой же точке перед ОВФ. Обращенная волна, распространяясь справа налево, в точности повторит путь первоначальной волны при прямом движении и по мере приближения к левой границе неоднородной среды постепенно восстановит свой фронт до идеальной плоской формы. Линза точно сфокусирует обращенное излучение в точке О. В реальной ситуации, когда оптические неоднородности среды нестационарны, конфигурация фронта волны на выходе из среды (справа) после прямого прохода постоянно изменяется. Поэтому нет возможности так быстро деформировать кривые зерка-

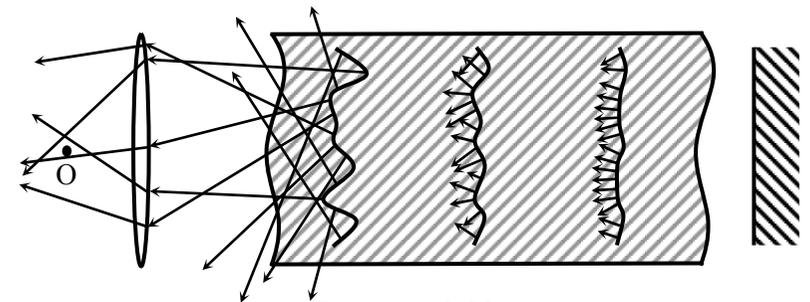


Рисунок 3.28

ла, чтобы они в каждый момент осуществляли идеальное обращение волнового фронта. Роль ОВФ-зеркала может сыграть нелинейная среда при развитии в ней процесса ВРМБ, описанного выше. При вынужденном рассеянии в нелинейном веществе вышедшей справа из неоднородной среды волны

$$\vec{E} = \vec{E}_m(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} \quad (3.95)$$

возбуждается волна с противоположным знаком фазы

$$\vec{E}_{\text{обр}} = \vec{E}_m(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-i\varphi}, \quad (3.96)$$

которая и представляет собой волну с обращенным фронтом. В качестве нелинейного вещества, осуществляющего ОВФ-преобразование, широко используется ацетон, четыреххлористый углерод (для лазеров на неодиме $\lambda = 1,06$ мкм).

Самофокусировка и автоколлимация оптического излучения

Концентрация электромагнитной энергии в узком конусе излучения является важнейшей задачей радио- и оптической локации, лазерной технологии и других применений больших потоков электромагнитной энергии. Однако в линейных средах предельно узкий конус, который удастся сформировать с помощью антенн и линз, диаметром d , имеет при вершине угол $2\Theta_{\text{дифр}} = 1,22 \cdot \lambda / d$, ограниченный дифракцией излучаемых волн.

В нелинейной среде можно не только скомпенсировать дифракционную расходимость излучения, но и добиться самофокусировки распространяющейся волны, если мощность ее выше некоторого порога. Этот эффект был теоретически предсказан советским физиком Г.А. Аскарьяном (1962 г.).

Как уже отмечалось выше, составляющая $P_7^{(\text{нл})}$ нелинейной поляризации волны (см. (3.89)) приводит к увеличению показателя преломления на $\Delta n = \sqrt{3\chi^{(3)} \cdot E_m^2} / 4$. Распределение

интенсивности излучения в поперечном сечении лазерного луча имеет вид, качественно изображенный на рисунке 3.29,а. В соответствии с профилем кривой $E_m^2(r)$ показатель преломления среды будет симметрично спадать от центра луча к его краям. Среда становится радиально неоднородной, это неизбежно приведет к рефракции оптической волны. На рисунке 3.29,б штриховой линией показана постепенная деформация фронта волны в нелинейной среде по мере распространения вдоль оси Oz. Там же сплошными кривыми изображено искривление траектории вектора Пойнтинга, приводящее к автоматической фокусировке лазерного луча. Возникающий в среде на оси луча канал с повышенным показателем преломления захватит оптическое излучение, которое в дальнейшем будет перемещаться в соответствии с рисунком 3.23.

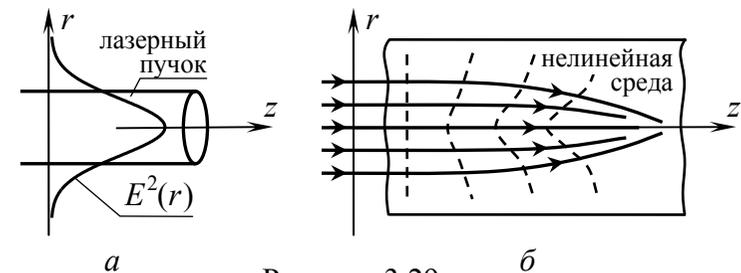


Рисунок 3.29

3.8 Фазовая самомодуляция и временное сжатие

В радиоэлектронике при приеме слабых сигналов на фоне сильных шумов используется оригинальный способ повышения отношения сигнал/шум. Физическое объяснение способа весьма простое. Если импульс (например, прямоугольный) имеет длительность τ и амплитуду A , то при идеальном (без искажения формы) сжатии импульса в m раз ($\tau_{\text{сж}} = \tau / m$) его амплитуда по закону сохранения энергии возрастает в \sqrt{m} раз ($A_{\text{сж}} = \sqrt{m} \cdot A$), так как $A^2 \cdot \tau = A_{\text{сж}}^2 \cdot \tau_{\text{сж}}$.

Для сжатия радиоимпульсов используются дисперсионные линии задержки (ДЛЗ), в которых сигналы (волны) разных частот движутся с разной скоростью. Поэтому перед сжатием радиоимпульс модулируется по частоте (например, по линейному закону – генерируется так называемый ЛЧМ-сигнал), а ДЛЗ проектируют так, чтобы ее дисперсионная характеристика $v_{\phi}(f)$ была зеркально симметрична закону частотной модуляции радиоимпульса $f(t)$.

Физические возможности сжатия оптических волновых пакетов шире, чем радиосигналов. Во-первых, и в оптике используется такой же, как в радиодиапазоне, способ дисперсионной компрессии ЧМ-импульсов. Для этой цели применяются дифракционные решетки и световоды. Во-вторых, сжатие импульсов достигается в процессе вынужденного рассеяния оптических фотонов на акустических колебаниях (эффект вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна – ВРМБ) или на колебаниях молекул (эффект вынужденного комбинационного рассеяния – ВКР). Наилучшие результаты дает первый способ, позволяющий повысить интенсивность оптического излучения на шесть порядков и достигнуть рекордно высоких световых мощностей. При дисперсионном сжатии волновых пакетов лазерного излучения минимально достижимая длительность ограничена только физическим пределом – длительностью периода сжимаемых оптических колебаний. Результаты сжатия в ходе вынужденного рассеяния несколько хуже: например, при ВКР – от 1 пс (10^{-12} с) в газе, до 10 фс (10^{-14} с) в плазме.

Рассмотренная выше самофокусировка электромагнитных волн мощного лазерного излучения есть поперечная компрессия оптического пучка, поскольку последний сжимается в направлении перпендикулярном направлению распространения: уменьшается поперечный размер пучка (рисунок 3.29,б). Сжатие же лазерного импульса во времени уменьшает его растянутость вдоль пути следования, т.е. его продольный размер Δz (рисунок 3.30).

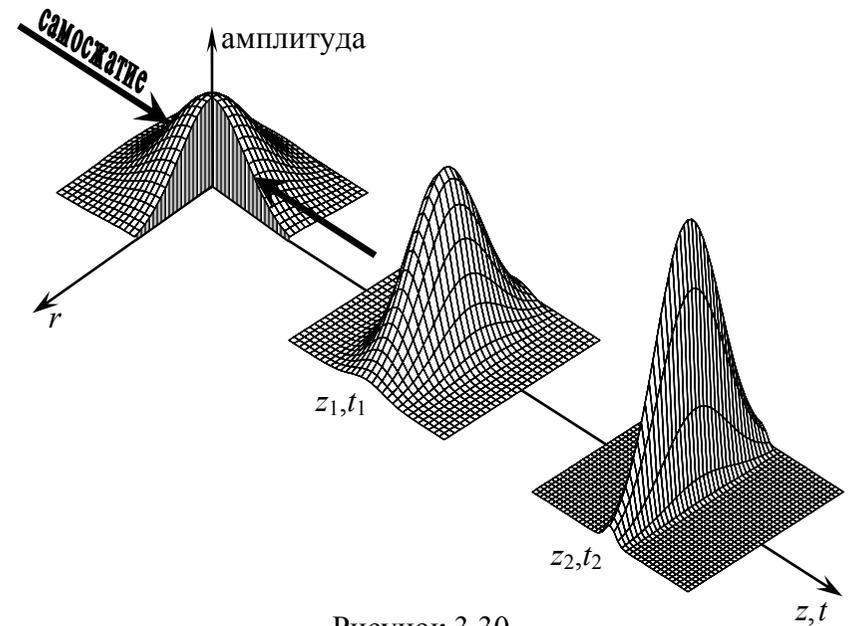


Рисунок 3.30

Следовательно, в нелинейной среде итогом самовоздействия оптического импульса большой интенсивности является самокомпрессия, заканчивающаяся тем, что оптический импульс "сам себя сжимает", но не в пространстве, как при самофокусировке, а во времени. Уточним, что следует понимать под оптическим импульсом.

Оптический импульс представляет собой волновой пакет $E(t,z) = E(t) \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot z)]$, ограниченный на временном интервале $\Delta t = \Delta z / v_0$ огибающей амплитуд $E(t)$, заполненный колебанием с оптической частотой ω и распространяющийся в направлении Oz с фазовой постоянной k (рисунок 3.31). Если импульс мощный, то изменение амплитуды $E(t)$ (рисунок 3.32) приводит к изменению показателя преломления среды по-разному в разные моменты времени в пределах Δt , что влечет за собой изменение фазы колебаний. При квадратичной нелинейности среды

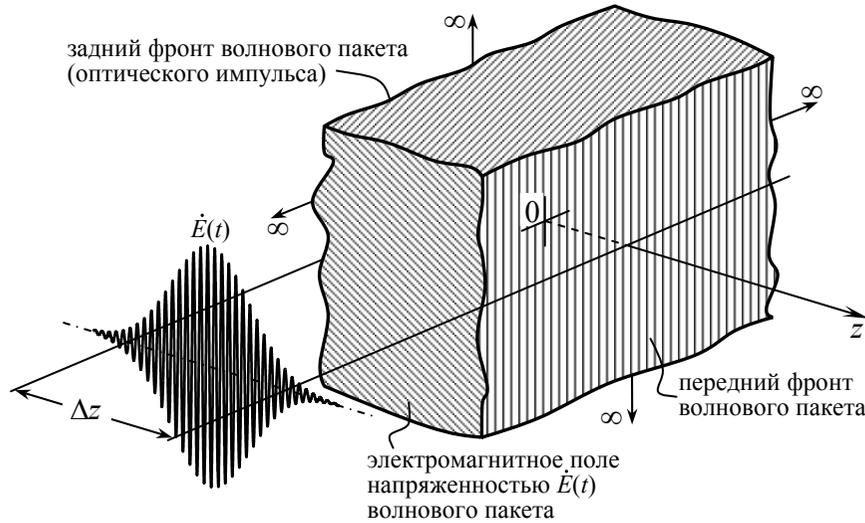


Рисунок 3.31

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_{\text{нл}}(t) = \omega \cdot t - k \cdot z - n_2 \cdot E^2(t - z/v_0), \quad (3.97)$$

где v_0 – групповая скорость на исходной частоте ω .

Фазовая модуляция автоматически вызывает модуляцию частоты колебаний внутри импульса

$$\omega(t) = \partial\varphi(t)/\partial t = \omega + \partial\varphi_{\text{нл}}(t)/\partial t = \omega - k \cdot z \cdot n_2 \cdot \partial E^2(t - z/v_0)/\partial t. \quad (3.98)$$

Таким образом, волновой пакет большой амплитуды, стимули-

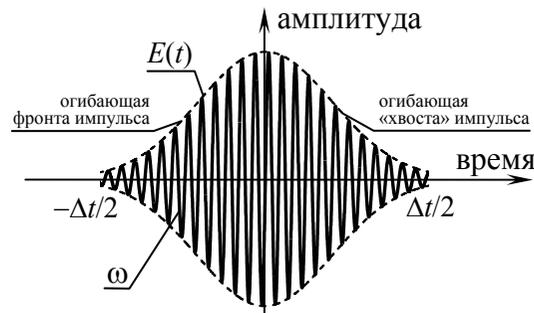


Рисунок 3.32

руя развитие в среде нелинейной временной фазовой самомодуляции, приобретает внутреннюю частотную модуляцию.

Нелинейная добавка к частоте ω , равная

$$\Delta\omega_{\text{нл}}(t) = -k \cdot z \cdot n_2 \cdot \partial E^2(t)/\partial t, \quad (3.99)$$

в зависимости от знака n_2 может быть как положительной, так и отрицательной, причем, если $\Delta\omega_{\text{нл}}$ отрицательна на фронте импульса, то положительна на его «хвосте» и наоборот (рисунок 3.33,а,в и рисунок 3.33,б,г соответственно).

Когда среда надлена дисперсией $\partial v(\omega)/\partial \omega \neq 0$, частотная модуляция с разнознаковой добавкой $\Delta\omega_{\text{нл}}$ в передней и задней половинах импульса, приводит к аналогичному закону изменения групповой скорости для разных временных элементов импульса, поскольку

$$\Delta v_{\text{нл}}(t) = \frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} \cdot \Delta\omega_{\text{нл}}(t). \quad (3.100)$$

Следовательно,

$$\Delta v_{\text{нл}}(t) = k \cdot z \cdot v_0^2 \cdot g \cdot \frac{\partial E^2(t - z/v)}{\partial t}, \quad (3.101)$$

где параметр

$$g = n_2 \cdot \partial^2 k / \partial \omega^2. \quad (3.102)$$

В средах с отрицательным g при самовоздействии импульса частота колебаний в передней его половине становится ниже, чем в «хвостовой». Точно также изменяется и групповая скорость. Поэтому задняя «хвостовая» часть импульса в направлении его распространения движется быстрее передней фронтальной части и догоняет ее. В итоге импульс сжимается (т.е. укорачивается по времени), рисунок 3.33,д.

В среде с положительным параметром g изменение частоты колебаний внутри импульса происходит обратно предыдущему примеру. Поэтому зависимости, приведенные на рисунке 3.33,б,г, зеркально симметричны изображенным на ри-

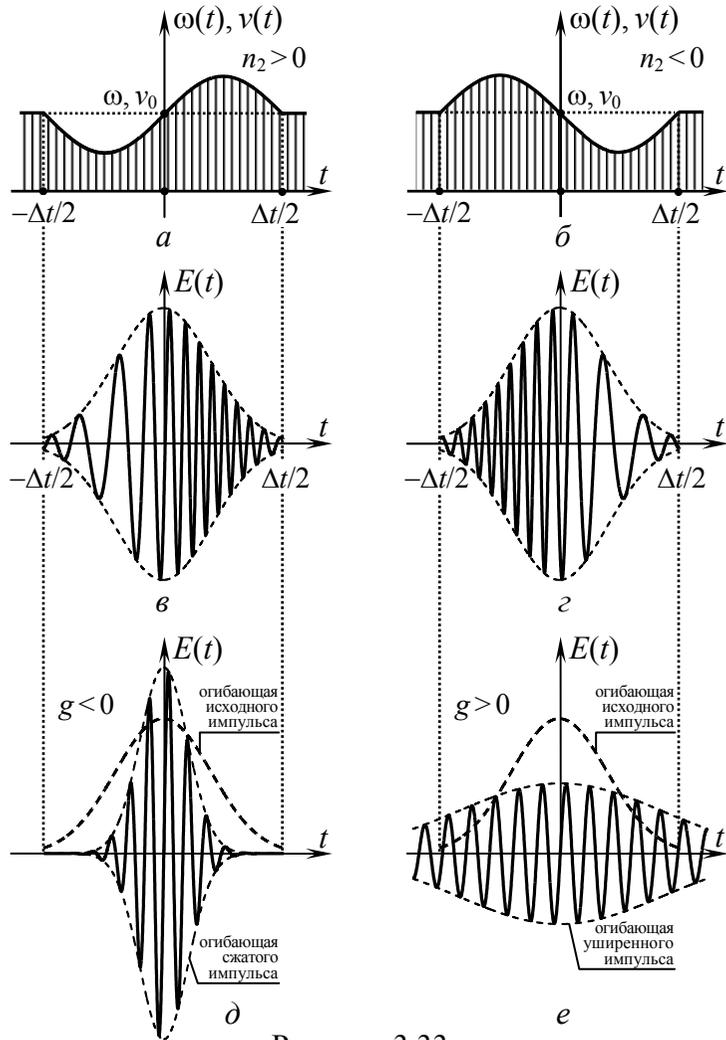


Рисунок 3.33

сунке 3.33,а,в, и, следовательно, когда $g > 0$, фронт оптического импульса "убегает" от его срединной части, а "хвост" отстает. В результате исходный импульс уширяется (рисунок 3.33,е).

Оба эффекта имеют прикладное значение в лазерных (атмосферных) и волоконно-оптических линиях связи.

3.9 Волны в активных средах

Активной называется среда, в которой наблюдается увеличение амплитуды электромагнитной волны в процессе ее распространения. Если волна движется в безграничной среде в направлении оси Oz, общая зависимость ее от этой координаты описывается выражениями (3.1), (3.2). С учетом комплекснозначности k (3.6)

$$\dot{E}(z), \dot{H}(z) \sim e^{-i\beta z} \cdot e^{-\alpha z}, \quad (3.103)$$

где β (3.8) определяет изменение фазы волны при ее движении вдоль Oz, а α (3.9) – изменение амплитуды. Возможны три типа взаимодействия волны со средой (рисунок 3.34):

а) ослабление (затухание) ($\alpha > 0$); амплитуда волны уменьшается, среда называется пассивной;

б) сохранение постоянства амплитуды волны ($\alpha = 0$); среда называется нейтральной (прозрачной для данной волны);

в) усиление ($\alpha < 0$); амплитуда волны увеличивается, среда называется активной.

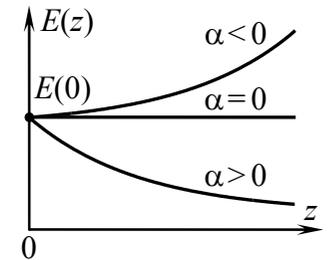


Рисунок 3.34

Принимая во внимание (3.9), для постоянной α можно получить выражение

$$\alpha = \frac{k_0}{\sqrt{\cos(\delta_D) \cdot \cos(\delta_M)}} \cdot \sin[(\delta_D + \delta_M)/2], \quad (3.104)$$

откуда следует, что среда приобретает усиливающие свойства, если $-\pi/2 < (\delta_D + \delta_M) < \pi/2$, т.е. при

$$-\pi/2 < \delta_D, \delta_M < \pi/2, \quad (3.105)$$

или, иными словами, когда потери в среде "отрицательные". Если при поглощении ($\alpha > 0$) энергия волны убывает и расхо-

дуются на разогрев среды, то в режиме усиления, напротив, интенсивность волны увеличивается за счет отбора энергии от среды.

Активное состояние среды в естественных (природных) условиях обычно не наблюдается (оно может иногда иметь место лишь как случайное кратковременное отклонение от нормы). Поэтому перевод среды из пассивного состояния в активное осуществляется искусственно и требует определенных затрат энергии. В технике этот процесс перехода называется "накачкой".

Поведение кривой $E(z)$ (при $\alpha < 0$) на рисунке 3.34 может создать впечатление, что в активной среде, получающей приток энергии от некоторого источника накачки, достижима сколь угодно большая амплитуда поля при выборе достаточно протяженного пути взаимодействия волны и среды. Подобный вывод ошибочен, поскольку не учитывает действия эффекта насыщения. Из общих физических соображений должно быть понятно, что, какой бы большой ни выбиралась длина пути взаимодействия z , амплитуда волны на выходе активной среды должна оставаться конечной. Перейдем от амплитуды волны к потоку ее мощности $P(z)$. Тогда согласно (3.103)

$$P(z) = P(0) \cdot e^{-2\alpha z}, \quad (3.106)$$

где $P(0)$ – поток мощности при $z = 0$. Учтем тот факт, что в реальной ситуации в среде (даже усиливающей) всегда присутствуют потери той или иной природы:

$$P(z) = P(0) \cdot e^{-2(\alpha_{yc} + \alpha_n)z}, \quad (3.107)$$

где α_{yc} , α_n – соответственно постоянные усиления и потерь (по полю), причем $\alpha_{yc} < 0$, $\alpha_n > 0$, $|\alpha_{yc}(z)| > 0$. Эффект насыщения обусловлен зависимостью $\alpha_{yc}(z)$ от $P(z)$, причем, принимая во внимание сделанное выше замечание о конечности величины $P(z)$ при $z \rightarrow \infty$, можно с полным основанием предположить, что по мере увеличения $P(z)$ (рисунок 3.35, б) избыточное уси-

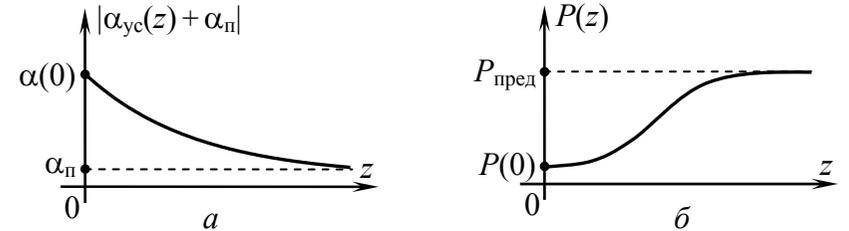


Рисунок 3.35

ление $\alpha_{yc}(z) + \alpha_n$ должно уменьшаться (рисунок 3.35, а), приводя к тому, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = P_{пред}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \alpha_{yc}(z) = \alpha_n. \quad (3.108)$$

Нелинейная связь α и P может быть описана выражением

$$\alpha_{yc}(z) = \frac{\alpha_{yc}(0)}{1 + K_\alpha \cdot P(z)/v}, \quad (3.109)$$

где $\alpha_{yc}(0)$ – усиление, соответствующее слабому потоку мощности; K_α – параметр нелинейности (определяется природой усиливающих свойств среды); v – скорость распространения волны в среде. Полагая $\alpha_{yc}(z) = \alpha_n$, с помощью (3.109) легко вычислить предельно достижимый уровень потока мощности на выходе из активной среды

$$P_{пред} = \frac{v}{K_\alpha} \cdot \frac{\alpha_{yc}(0) - \alpha_n}{\alpha_n}. \quad (3.110)$$

Изменения $P(z)$ в усиливающей (активной) среде от длины пройденного пути нетрудно установить, подставляя (3.109) в (3.106) (рисунок 3.36):

$$P(z) = P(0) \cdot e^{-\frac{2\alpha_{yc}(0)z}{1 + K_\alpha \cdot P(z)/v}}. \quad (3.111)$$

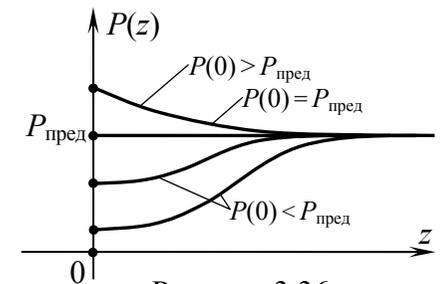


Рисунок 3.36

Эффект взаимодействия электромагнитных волн с активной средой лежит в основе действия электронных (пучковых) усилителей и генераторов СВЧ (ламп прямой и обратной волны, приборов магнетронного типа), а также квантовых усилителей и генераторов СВЧ и оптического диапазонов (мазеров, лазеров).

3.10 Основные результаты третьей главы

Электромагнитные волны, распространяющиеся в безграничном пространстве, заполненном средой одного вида, называют свободными. К плоским относятся волны, амплитудный и фазовый фронты которых представляют плоскость.

В изотропной среде всякая линейно-поляризованная плоская волна может быть представлена суперпозицией двух других линейно-поляризованных в ортогональных плоскостях волн.

В изотропной среде без потерь плоская линейно-поляризованная волна, имеющая две ортогонально ориентированные компоненты (электрическую и магнитную), распространяется, не изменяя своей амплитуды, поскольку волновое сопротивление среды без потерь выражается вещественным числом. Электрическая и магнитная компоненты волны колеблются в фазе, по этой причине поток мощности, переносимый волной, реален и постоянно направлен в сторону ее распространения. Скорость волны определяется только параметрами среды и не зависит от частоты. В среде без потерь, следовательно, отсутствует дисперсия. Наличие потерь приводит к затуханию волны при ее распространении: амплитуды напряженностей электрической и магнитной компонент волны убывают по экспоненциальному закону. Имеет место диссипация электромагнитной энергии. Убыль энергии, переносимой волной, идет на разогрев среды. Потери приводят к тому, что волновое сопротивление среды становится комплексным. Это вызывает фазовый сдвиг между E - и H -компонентами волны. Поток электромагнитной мощности в среде с потерями носит комплексный ха-

рактический. Это означает, что помимо реального потока мощности, движущегося в направлении распространения волны, существует реактивный (колебательный) поток в этом же направлении.

В диссипативной среде проявляется дисперсия волн: скорость распространения последних определяется не только диэлектрической и магнитной проницаемостями среды, но и частотой самой волны. Поэтому сложные сигналы, спектр которых содержит волны разных частот, при распространении в среде с потерями искажаются.

Для характеристики процесса распространения группы волн в подобных средах вводится понятие групповой скорости. Под ней понимается скорость движения в диссипативной среде энергетического центра сложного импульса.

В изотропных средах (без потерь и с потерями) свойства распространяющихся волн одинаковы во всех направлениях.

В анизотропных средах последнее правило нарушается: в зависимости от направления движения волны характер волнового процесса оказывается различным.

Анизотропные свойства среды при анализе распространения в ней электромагнитных волн формально учитываются введением в уравнения Максвелла тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Анизотропия ферромагнетиков и плазмы возникает при воздействии на них постоянного магнитного поля H_0 . В намагниченном ферромагнетике тензорный характер приобретает магнитная проницаемость, а в намагниченной плазме – диэлектрическая проницаемость.

Принципиально отличаются два направления распространения плоской волны в анизотропных ферромагнетике и плазме: вдоль и поперек постоянного поля намагничивания.

При продольном распространении плоская линейно-поляризованная волна разбивается на две волны с круговой поляризацией магнитного (в ферромагнетике) или электрического (в плазме) вектора. Указанные волны отличаются направлением вращения кругло-поляризованного вектора (правое и левое)

и фазовой скоростью движения. Суперпозиция двух круглополяризованных во встречных направлениях волн порождает суммарную волну с линейной поляризацией, плоскость поляризации которой вращается по мере распространения (эффект Фарадея). В намагниченном ферромагнетике вращение плоскости поляризации свойственно вектору \vec{H} , а в намагниченной плазме – вектору \vec{E} . Эффект Фарадея не взаимен.

При поперечном распространении плоская линейно-поляризованная волна разбивается на две волны: обыкновенную и необыкновенную (эффект двойного лучепреломления). Обыкновенная волна не чувствует анизотропии среды и продолжает существовать после выключения постоянного магнитного поля. В обыкновенной волне присутствуют две синфазные линейно-поляризованные компоненты (электрическая и магнитная). Эта волна переносит в направлении своего распространения реальный поток мощности. В необыкновенной волне электрическая и магнитная компоненты поляризованы по-разному. В намагниченном феррите E -компонента имеет одну составляющую, ориентированную параллельно постоянному подмагничивающему полю, а H -компонента поляризована по эллипсу в перпендикулярной плоскости. В анизотропной плазме, напротив: H -компонента имеет линейную поляризацию вдоль \vec{H}_0 , а эллиптически-поляризованная E -компонента располагается в плоскости, перпендикулярной \vec{H}_0 . Наряду с реальным потоком мощности вдоль направления распространения необыкновенной волны с ней связан реактивный поток, колеблющийся в направлении, перпендикулярном плоскости, проведенной через векторы \vec{E} волны и \vec{H}_0 . При устранении подмагничивания вместе с исчезновением анизотропии пропадает и необыкновенная волна.

В намагниченной плазме возможно создание условий, при которых показатель преломления оказывается мнимым. Электромагнитная волна не может распространяться в такой среде и, попав в нее, испытывает отсечку.

Намагниченные ферромагнитные среды и явления, наблюдаемые в них при распространении электромагнитных волн, используются в многочисленных невзаимных ферритовых устройствах. С анизотропными свойствами плазмы на практике приходится иметь дело всегда, когда электромагнитные волны взаимодействуют с ионосферой Земли.

Примером анизотропных сред, широко используемых в технике оптического диапазона, являются кристаллы с естественной и искусственно созданной анизотропией. Применение находят как одноосные, так и двухосные кристаллы. В первых оптическая индикатриса имеет форму эллипсоида вращения, во вторых – трехосного эллипсоида, или сфероида.

При анализе распространения волн в анизотропных кристаллических средах важное значение имеет уравнение Френеля для волновых векторов. Уравнение Френеля квадратично относительно k , что свидетельствует о разбегании в общем случае всякой плоской волны, движущейся в анизотропном кристалле, на две волны с разными свойствами (эффект двойного лучепреломления). В кристаллах эти волны поляризованы линейно в перпендикулярных друг другу плоскостях. Каждая из указанных волн распространяется со своей скоростью. Двойное лучепреломление исчезает в том случае, если волна бежит вдоль оптической оси кристалла.

В одноосных кристаллах, анизотропия которых искусственно создается помещением их в однородное постоянное электрическое поле \vec{E}_0 , наблюдается эффект Керра, проявляющийся в том, что линейно-поляризованная волна при распространении перпендикулярно \vec{E}_0 разбивается на обыкновенную и необыкновенную волны. Скорости этих волн различны, а направления их линейной поляризации ортогональны. Поэтому на выходе из кристалла суперпозиция указанных волн создает волну с эллиптической поляризацией. Эффект Керра квадратичен по полю.

В постоянном электрическом поле \vec{E}_0 , действующем вдоль оптической оси одноосного кристалла, последний приобретает свойства двуосности (эффект Поггеля). Распространяясь в таком кристалле, волна испытывает двойное лучепреломление, разбиваясь на обыкновенную и необыкновенную волны, поляризованные линейно в ортогональных плоскостях. За счет неодинаковости скоростей названных волн волновой процесс на выходе из кристалла имеет эллиптическую поляризацию. Эффект Поггеля линеен относительно поля E_0 .

Эффекты Керра и Поггеля широко используются в устройствах управления лазерным излучением.

В оптически неоднородных средах при движении плоской волны под углом Θ к вектору градиента показателя преломления (кроме $\Theta = 0^\circ$ и $\Theta = 90^\circ$) траектория волны отклоняется от прямолинейной (явление рефракции). В средах, неоднородных по одной координате, радиус кривизны траектории волны (радиус рефракции) обратно пропорционален градиенту показателя преломления.

Среда, поляризуемость которой зависит от величины внешнего электрического поля, называется нелинейной. В зависимости от характера нелинейности (квадратичная, кубическая или более высокого порядка) в среде развиваются различные нелинейные процессы: параметрическая генерация излучения, генерация оптических гармоник, вынужденное рассеяние света, обращение волнового фронта волны, самофокусировка и самоканализация излучения и другие.

Среда, потери в которой принимают отрицательное значение, усиливает волну. Такая среда называется активной. В активное состояние среда может быть переведена искусственно в результате действия накачки. В активной среде любой протяженности уровень мощности проходящей волны не может быть сколь угодно большим. Предельное значение, которого достигает энергия волны в активной среде, конечно и определяется эффектом насыщения.

4 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА СРЕД

В предыдущей главе взаимодействие волн с веществом рассматривалось в предположении, что все пространство заполнено средой одного типа.

Рассмотрим теперь новый класс задач. Будем считать, что два полубесконечных пространства, разделенных плоской бесконечной границей, заполнены средами с разными параметрами ϵ_a, μ_a . Исследуем вопрос прохождения электромагнитной волны через указанную границу из одной среды в другую. Прежде чем углубляться в точный анализ, проведем следующие рассуждения. Допустим, что из первой среды (ϵ_{a1}, μ_{a1}) на поверхность второй (ϵ_{a2}, μ_{a2}) падает плоская волна (рисунок 4.1).

Для простоты будем считать, что среда 1 – вакуум, а среда 2 характеризуется параметрами ϵ_{a2}, μ_{a2} . Под действием поля падающей волны электроны на поверхности среды 2 совершают колебания с частотой волны в направлении вектора $\vec{E}_{\text{пад}}$ (рисунок 4.1,а). Являясь заряженной частицей, электрон вследствие колебательного движения вызовет на поверхности среды 2 переменный ток, текущий параллельно оси Ox . Каждый

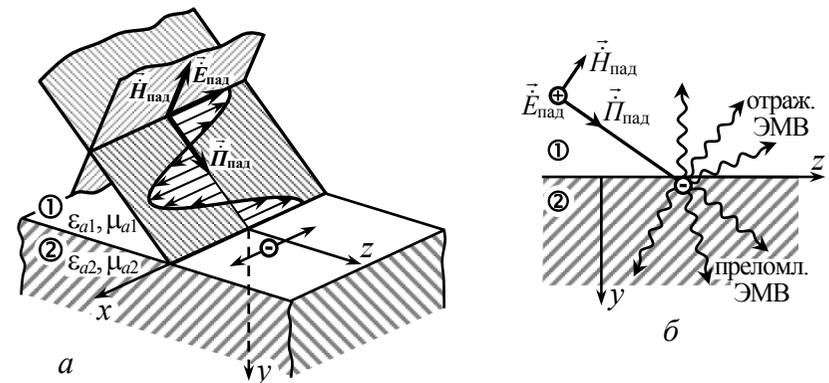


Рисунок 4.1

элемент dx такой "нитки тока" ведет себя как электрический диполь, который излучает вторичные волны. Часть этих волн будет распространяться в первой среде, и за счет них формируется так называемая отраженная волна, другая часть – во второй среде, создавая преломленную волну (рисунок 4.1,б). Возникают важные для техники вопросы: как определить направления распространения вторичных волн, их амплитуды, фазы и поляризации? От чего зависят эти параметры вторичных волн?

4.1 Законы Снелля

Ученые античной Греции (Герон Александрийский) на основании наблюдательных фактов точно установили, что свет от гладких поверхностей отражается по зеркальному закону (угол падения равен углу отражения). Закон преломления сформулировал Снелл (1621 г.). Однако строгое обоснование данных закономерностей может быть дано лишь в рамках теории Максвелла.

Пусть на гладкую плоскую границу раздела двух изотропных линейных сред под некоторым углом $\Theta_{\text{пад}}$ к ее нормали падает плоская линейно-поляризованная электромагнитная волна (рисунок 4.2,а). Направление движения волны определим лучом, совпадающим с вектором $\vec{I}_{\text{пад}}$. Отраженную и преломленную волны соответственно зададим лучами $\vec{I}_{\text{отр}}$, $\vec{I}_{\text{пр}}$, ориентированными к нормали под углами $\Theta_{\text{отр}}$, $\Theta_{\text{пр}}$.

Поскольку для заданного направления $\vec{I}_{\text{пад}}$ пара векторов $\vec{E}_{\text{пад}}$, $\vec{H}_{\text{пад}}$ может быть ориентирована произвольно (в плоскости, перпендикулярной к $\vec{I}_{\text{пад}}$), выделим для определенности два характерных типа поляризации волны. Условимся называть горизонтально-поляризованной волну, у которой вектор $\vec{E}_{\text{пад}}^{(r)}$ параллелен оси Ox (рисунок 4.2,а), и вертикально-поляризованной волну с вектором $\vec{E}_{\text{пад}}^{(b)}$, непараллельным граничной поверх-

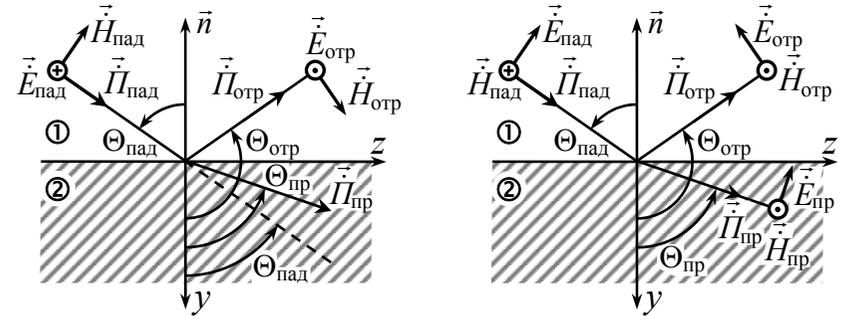


Рисунок 4.2

ности, т.е. имеющим проекции на оси Oy и Oz (рисунок 4.2,б). Любой другой вариант поляризации волны можно скомбинировать из указанных двух. Будем в дальнейшем называть плоскостью падения плоскость, включающую векторы $\vec{I}_{\text{пад}}$ и \vec{n} , а плоскостью поляризации – плоскость векторов $\vec{E}_{\text{пад}}$, $\vec{H}_{\text{пад}}$.

Исследуем наклонное падение на границу раздела сред горизонтально-поляризованной волны. При математическом описании сформулированной задачи примем во внимание, что граница раздела сред неподвижна, а сами среды линейны. На этом основании можно утверждать, что частота отраженной и преломленной волн совпадает с падающей. Плоская конфигурация границы раздела сред и изотропность последних обеспечивают параллельность векторов $\vec{E}_{\text{пад}}$, $\vec{E}_{\text{отр}}$, $\vec{E}_{\text{пр}}$. С учетом сказанного общая запись для падающей, отраженной, преломленной волн будет иметь следующий вид.

Падающая волна:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = -\vec{x}_0 \cdot \dot{E}_{\text{мпад}} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_1(z \cdot \sin\Theta_{\text{пад}} + y \cdot \cos\Theta_{\text{пад}})}, \quad (4.1,а)$$

$$\vec{H}_{\text{пад}} = (\vec{z}_0 \cdot \cos\Theta_{\text{пад}} - \vec{y}_0 \cdot \sin\Theta_{\text{пад}}) \cdot \dot{H}_{\text{мпад}} \times e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_1(z \cdot \sin\Theta_{\text{пад}} + y \cdot \cos\Theta_{\text{пад}})}, \quad (4.1,б)$$

где $k_1 = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_{a1} \cdot \mu_{a1}} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot n_1$.

Отраженная волна:

$$\vec{E}_{отр} = -\vec{x}_0 \cdot \dot{E}_{мотр} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_1(z \cdot \sin\Theta_{отр} + y \cdot \cos\Theta_{отр})}, \quad (4.2, a)$$

$$\vec{H}_{отр} = (\vec{z}_0 \cdot \cos\Theta_{отр} - \vec{y}_0 \cdot \sin\Theta_{отр}) \cdot \dot{H}_{мотр} \times \times e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_1(z \cdot \sin\Theta_{отр} + y \cdot \cos\Theta_{отр})}. \quad (4.2, б)$$

Преломленная волна:

$$\vec{E}_{пр} = -\vec{x}_0 \cdot \dot{E}_{мпр} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_2(z \cdot \sin\Theta_{пр} + y \cdot \cos\Theta_{пр})}, \quad (4.3, a)$$

$$\vec{H}_{пр} = (\vec{z}_0 \cdot \cos\Theta_{пр} - \vec{y}_0 \cdot \sin\Theta_{пр}) \cdot \dot{H}_{мпр} \times \times e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_2(z \cdot \sin\Theta_{пр} + y \cdot \cos\Theta_{пр})}, \quad (4.3, б)$$

где $k_2 = \omega \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_{a2} \cdot \dot{\mu}_{a2}} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot n_2$.

Установим связь между углами $\Theta_{пад}, \Theta_{отр}, \Theta_{пр}$. Для этого подчиним поле на поверхности раздела сред ($y=0$) пограничному условию (1.107), имея в виду, что $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{пад} + \dot{E}_{отр}$, а $\dot{E}_{2\tau} = \dot{E}_{пр}$:

$$\dot{E}_{мпад} \cdot e^{-ik_1 z \cdot \sin\Theta_{пад}} + \dot{E}_{мотр} \cdot e^{-ik_1 z \cdot \sin\Theta_{отр}} = \dot{E}_{мпр} \cdot e^{-ik_2 z \cdot \sin\Theta_{пр}}. \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) обязано выполняться при любом z , следовательно, показатели всех экспонент должны быть одинаковыми:

$$k_1 \cdot \sin\Theta_{пад} = k_1 \cdot \sin\Theta_{отр} = k_2 \cdot \sin\Theta_{пр}. \quad (4.5)$$

Из первого равенства следует, что

$$\Theta_{пад} + \Theta_{отр} = \pi - \quad (4.6)$$

первый закон Снелля.

Из второго равенства

$$n_1 \cdot \sin\Theta_{пад} = n_2 \cdot \sin\Theta_{пр} - \quad (4.7)$$

второй закон Снелля.

Соотношения (4.6), (4.7) выведены для горизонтальной поляризации падающей волны. Аналогичные законы для вертикально-поляризованной падающей волны можно получить сразу из (4.6), (4.7), применив к ним лишь принцип перестановочной двойственности (1.87). Очевидно, что правило перестановки (1.87) не изменяет выражений (4.6), (4.7). Следовательно, законы Снелля справедливы при любой поляризации падающей волны.

Первый закон Снелля устанавливает направление отраженной волны, которое обязательно подчиняется правилу зеркального отражения и для изотропных линейных сред не зависит от их параметров $\dot{\epsilon}_a, \dot{\mu}_a$. Второй закон Снелля показывает, что направление преломленной волны определяется не только углом падения на поверхность раздела сред, но и параметрами 1-й и 2-й сред.

Соотношения (4.6), (4.7) связывают направления распространения трех волн: падающей, преломленной, отраженной. Однако они оставляют открытым вопрос о том, как распределяется между отраженной и преломленной волнами поток мощности падающей волны, а также в какой взаимосвязи находятся амплитуды и фазы трех волн. Информация об указанных характеристиках содержится в законах Френеля, установленных им в 1823 г. в рамках упругой теории света.

4.2 Законы Френеля

Введем комплексные коэффициенты отражения и преломления для E - и H -составляющих волны:

$$\dot{r}_E = \frac{\dot{E}_{мотр}}{\dot{E}_{мпад}}, \quad (4.8, a) \quad \dot{r}_E = \frac{\dot{E}_{мпр}}{\dot{E}_{мпад}}, \quad (4.8, в)$$

$$\dot{r}_H = \frac{\dot{H}_{мотр}}{\dot{H}_{мпад}}, \quad (4.8, б) \quad \dot{r}_H = \frac{\dot{H}_{мпр}}{\dot{H}_{мпад}}. \quad (4.8, г)$$

Модули $|\dot{r}_{E,H}|$ и $|\dot{P}_{E,H}|$ характеризуют амплитуды отраженной и преломленной волн, а аргументы $\arg \dot{r}_{E,H}$, $\arg \dot{P}_{E,H}$ – их фазы.

Законы Френеля для горизонтально-поляризованной волны

Подчиним пограничному соотношению (1.107) (при $y=0$) E -составляющую поля в 1-й и 2-й среде (см. (4.4)). Уравнение (4.4) справедливо для любого z , поэтому в точке $z=0$

$$\dot{E}_{\text{мпад}} + \dot{E}_{\text{мотр}} = \dot{E}_{\text{мпр}}. \quad (4.9)$$

Полагая, что на границе раздела сред отсутствуют поверхностные токи, подчиним пограничному условию (1.104) (в точках $y=0, z=0$) H -составляющую поля в 1-й и 2-й средах:

$$\dot{H}_{\text{мпад}} \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{мотр}} \cdot \cos \Theta_{\text{отр}} = \dot{H}_{\text{мпр}} \cdot \cos \Theta_{\text{пр}}$$

или с учетом первого закона Снелля:

$$(\dot{H}_{\text{мпад}} - \dot{H}_{\text{мотр}}) \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} = \dot{H}_{\text{мпр}} \cdot \cos \Theta_{\text{пр}}. \quad (4.10)$$

Поскольку (см. раздел 3.1)

$$\dot{E}_{\text{мпад}} / \dot{H}_{\text{мпад}} = \dot{W}_1, \quad \dot{E}_{\text{мпр}} / \dot{H}_{\text{мпр}} = \dot{W}_2,$$

справедливо

$$\dot{r}_H = \dot{r}_E, \quad \dot{P}_H = \dot{P}_E \cdot \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2}. \quad (4.11)$$

Тогда равенства (4.9), (4.10) приводятся к виду

$$\begin{cases} 1 + \dot{r}_E = \dot{P}_E, \\ (1 - \dot{r}_E) \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} = \dot{P}_E \cdot \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \cdot \cos \Theta_{\text{пр}}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Решением системы уравнений (4.12) являются формулы Френеля для комплексных коэффициентов отражения \dot{r}_E и преломления \dot{P}_E горизонтально-поляризованной падающей волны:

$$\dot{r}_E^{(\Gamma)} = \frac{\dot{W}_2 \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} - \cos \Theta_{\text{пр}}}{\dot{W}_2 \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} + \cos \Theta_{\text{пр}}}, \quad (4.13, a)$$

$$\dot{P}_E^{(\Gamma)} = \frac{2 \cdot \dot{W}_2 \cdot \cos \Theta_{\text{пад}}}{\dot{W}_2 \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} + \cos \Theta_{\text{пр}}}. \quad (4.13, б)$$

Для магнитных составляющих $\dot{r}_H^{(\Gamma)}, \dot{P}_H^{(\Gamma)}$ рассчитываются с учетом (4.11).

Формулы Френеля показывают, что в общем случае отражение и преломление волны на границе раздела сред сопровождается скачкообразным изменением амплитуды и фазы. Синфазность падающей, отраженной, преломленной волн имеет место в двух частных случаях: когда в средах 1, 2 нет потерь или когда разница электрических и магнитных потерь одинакова ($\delta_{\varepsilon 1} - \delta_{M1} = \delta_{\varepsilon 2} - \delta_{M2}$) (см. раздел 3.1).

Введем коэффициенты отражения и преломления для потоков мощности:

$$\dot{r}_P^{(\Gamma)} = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = \dot{r}_E^{(\Gamma)} \cdot \dot{r}_H^{(\Gamma)*} = |\dot{r}_E^{(\Gamma)}|^2, \quad (4.14, a)$$

$$\dot{P}_P^{(\Gamma)} = \frac{\dot{I}_{\text{пр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = \dot{P}_E^{(\Gamma)} \cdot \dot{P}_H^{(\Gamma)*} = |\dot{P}_E^{(\Gamma)}|^2 \cdot \frac{\dot{W}_1^*}{\dot{W}_2}. \quad (4.14, б)$$

Коэффициенты \dot{r}_P и \dot{P}_P характеризуют долю мощности, уносимой отраженной и преломленной волнами. Из закона сохранения энергии $P_{\text{пад}} = P_{\text{отр}} + P_{\text{пр}}$ следует, что

$$1 = |\dot{r}_E^{(\Gamma)}|^2 + |\dot{P}_E^{(\Gamma)}|^2 \cdot \frac{|\dot{W}_1^*|}{|\dot{W}_2|}. \quad (4.15)$$

Законы Френеля для вертикально-поляризованной волны

Если на поверхность, разделяющую две среды, падает волна с вертикальной поляризацией, то комплексные коэффици-

коэффициенты отражения и преломления для нее можно найти, выполнив анализ, подобный приведенному выше для горизонтально-поляризованной волны. Однако в этом нет необходимости. Готовый результат можно получить немедленно, применив принцип перестановочной двойственности (1.87) к формулам (4.13), (4.14). Тогда для волны с вертикальной поляризацией коэффициенты Френеля для отражения и преломления будут равны

$$\dot{r}_H^{(B)} = \frac{\frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \cdot \cos\Theta_{\text{пад}} - \cos\Theta_{\text{пр}}}{\frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \cdot \cos\Theta_{\text{пад}} + \cos\Theta_{\text{пр}}}, \quad (4.16, a)$$

$$\dot{P}_H^{(B)} = \frac{2 \cdot \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \cdot \cos\Theta_{\text{пад}}}{\frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \cdot \cos\Theta_{\text{пад}} + \cos\Theta_{\text{пр}}}, \quad (4.16, б)$$

причем $\dot{r}_E^{(B)}$ и $\dot{P}_E^{(B)}$ по-прежнему вычисляются по формулам (4.11). Для потоков мощности:

$$\dot{r}_P^{(B)} = |\dot{r}_H^{(B)}|^2, \quad (4.17, a)$$

$$\dot{P}_P^{(B)} = |\dot{P}_E^{(B)}|^2 \cdot \frac{\dot{W}_2^*}{\dot{W}_1^*}. \quad (4.17, б)$$

Законы Снелля и Френеля дают полную информацию о связи направлений распространения падающей, отраженной и преломленной волн, о соотношении их амплитуд, фаз и интенсивностей. Поэтому, пользуясь этими законами, можно решить любую задачу взаимодействия электромагнитной волны с плоской границей раздела двух разных сред, если они линейны и изотропны.

4.3 Условия полного отражения и преломления

Для практических целей важно знать, в каких случаях падающая волна полностью отражается или преломляется на границе раздела разных сред.

Полное отражение от границы раздела сред

Тривиальный случай стопроцентного отражения имеет место при падении волны на поверхность идеального металла. А возможно ли полное отражение от границы двух диэлектрических сред? На рисунке 4.3 изображен ход лучей падающей, отраженной и преломленной волн для случаев $n_1 < n_2$ (рисунок 4.3, а) и $n_1 > n_2$ (рисунок 4.3, б). Дуговыми стрелками показано изменение направлений распространения трех волн при увеличении угла падения. Если $n_1 > n_2$, возможна ситуация падения волны под углом $\Theta_{\text{пад}} = \Theta_{\text{пад}}^{\text{кр}}$, при котором $\Theta_{\text{пр}} = 90^\circ$: преломленный луч скользит вдоль поверхности раздела сред. Очевидно, что при дальнейшем увеличении угла падения преломленная волна во 2-й среде перестает существовать. Из второго закона Снелля критический угол падения равен

$$\sin\Theta_{\text{пад}}^{\text{кр}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \Theta_{\text{пад}}^{\text{кр}} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}. \quad (4.18)$$

Явление полного возврата потока падающей мощности в среду 1 называется эффектом полного внутреннего отражения. Эффект наблюдается, когда волна из оптически плотного диэлектрика падает в пределах сектора углов $\Theta_{\text{пад}}^{\text{кр}} < \Theta_{\text{пад}} < 90^\circ$ (на рисунке 4.3, б отмечен вертикальной штриховкой) на поверхность оптически менее плотного вещества. Эффект не зависит

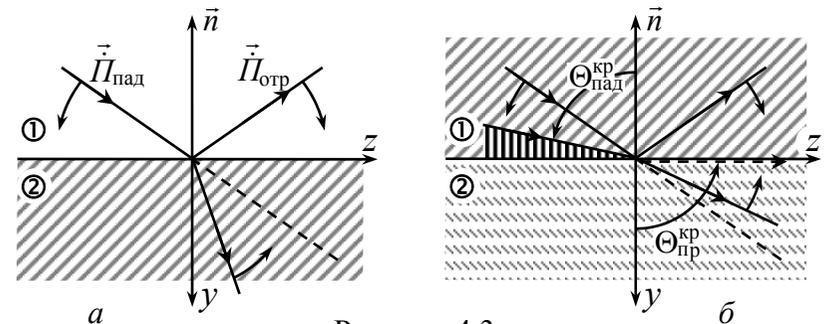


Рисунок 4.3

от характера поляризации (горизонтальная, вертикальная) падающей волны.

Полное отражение широко используется в технике. Данный эффект объясняет явление рефракции радиоволн в атмосфере Земли (см. раздел 3.6) и используется для дальней связи. На сверхвысоких частотах применяют антенны осевого излучения, представляющие собой отрезок полого металлического волновода, нагруженного диэлектрическим стержнем из оптически плотного материала (рисунок 4.4,а). Электромагнитная волна, входящая из волновода внутрь диэлектрического стержня, падает на его поверхность под углом, близким к критическому. Вытекающая из стержня преломленная волна движется вдоль поверхности, формируя остронаправленную диаграмму излучения. На рисунке 4.4,б изображен отрезок световода – диэлектрического волокна, канализирующего внутри оптическое излучение за счет эффекта полного внутреннего отражения.

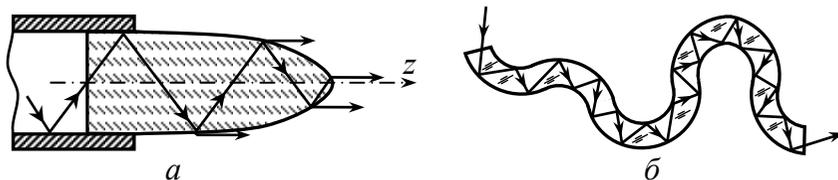


Рисунок 4.4

Полное преломление на границе раздела сред

При полном прохождении падающей волны через границу раздела двух сред коэффициент ее отражения равен нулю ($\dot{r}_E = \dot{r}_H = 0$). Для горизонтально-поляризованной волны из (4.13,а) получаем

$$\frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} \cdot \cos \Theta_{\text{пад}} = \cos \Theta_{\text{пр}}.$$

Применяя второй закон Снелля, видим, что полное преломление волны с горизонтальной поляризацией достигается при падении ее на границу двух сред под углом

$$\sin \Theta_{\text{пад}}^{(r)} = \sqrt{\frac{1 - (\dot{W}_2 / \dot{W}_1)^2}{(k_1 / k_2)^2 - (\dot{W}_2 / \dot{W}_1)^2}}. \quad (4.19)$$

Подставляя $k = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}$ и $W = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$, получаем

$$\sin \Theta_{\text{пад}}^{(r)} = \sqrt{\frac{\mu_1 \cdot \epsilon_2 - \mu_2 \cdot \epsilon_1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \cdot \frac{\mu_2}{\epsilon_1}}. \quad (4.20)$$

Как следует из (4.20), горизонтально-поляризованная волна может полностью пройти из 1-й среды во 2-ю только в том случае, если $\mu_1 \neq \mu_2$.

Угол полного преломления вертикально-поляризованной волны определяется из (4.19) после применения принципа перестановочной двойственности (1.87):

$$\sin \Theta_{\text{пад}}^{(b)} = \sqrt{\frac{\mu_2 \cdot \epsilon_1 - \mu_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \cdot \frac{\epsilon_2}{\mu_1}}. \quad (4.21)$$

Примечательно, что волна вертикальной поляризации (в отличие от горизонтальной) может без отражений пройти во 2-ю диэлектрическую среду, если даже магнитные свойства сред одинаковы ($\mu_1 = \mu_2$). В технике радиосвязи подобная ситуация встречается наиболее часто. Угол полного прохождения в этом случае называется углом Брюстера:

$$\sin \Theta_{\text{падБр}}^{(b)} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}, \quad \Theta_{\text{падБр}}^{(b)} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}. \quad (4.22)$$

Графики качественных зависимостей $|\dot{r}_{E,H}^{(r)}|$ и $|\dot{r}_{E,H}^{(b)}|$ от угла падения (рисунок 4.5) дают ясное представление об эффекте Брюстера в немагнитных средах ($\mu_1 = \mu_2 = 1$).

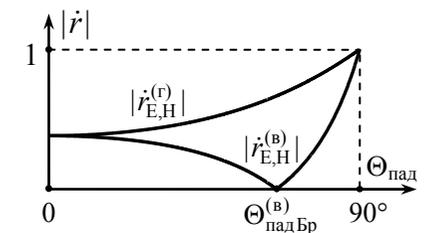


Рисунок 4.5

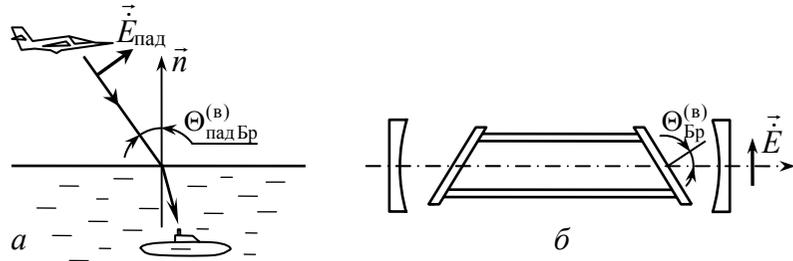


Рисунок 4.6

Рисунок 4.6,а на примере линии "летательный аппарат – подводная лодка" иллюстрирует ход лучей во время сеанса радиосвязи, при котором не возникает отраженная волна. На рисунке 4.6,б показан активный элемент газового лазера, закрытый с торцов окнами Брюстера.

Если на границу двух сред под углом Брюстера падает волна, вектор \vec{E} которой содержит как горизонтальную (Г), так и вертикальную (В) составляющие поляризации, то в отраженной волне будет присутствовать только горизонтально-поляризованная компонента (рисунок 4.7). По этой причине угол Брюстера называют также углом полной поляризации. "Очищение" отраженного луча от примеси вертикально-поляризованной волны используется в технике.

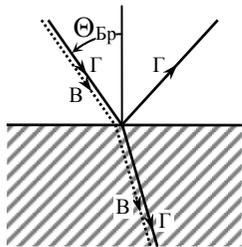


Рисунок 4.7

4.4 Нормальное падение волны на границу раздела сред

Если угол падения $\Theta_{\text{пад}}=0$, то падающая волна движется перпендикулярно границе раздела сред и векторы $\vec{I}_{\text{пад}}, \vec{I}_{\text{отр}}, \vec{I}_{\text{пр}}$ коллинеарны (параллельны оси Oy). Рассмотрим волновые процессы, устанавливающиеся в данном случае в 1-й и 2-й средах. Из выражений (4.13), (4.16) следует, что

$$\dot{i}_{E,H}^{(r)} = \frac{\dot{W}_2 - \dot{W}_1}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}, \quad \dot{P}_E^{(r)} = \frac{2\dot{W}_2}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}, \quad \dot{P}_H^{(r)} = \frac{2\dot{W}_1}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}, \quad (4.23)$$

$$\dot{i}_{E,H}^{(b)} = \frac{\dot{W}_1 - \dot{W}_2}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}, \quad \dot{P}_E^{(b)} = \frac{2\dot{W}_1}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}, \quad \dot{P}_H^{(b)} = \frac{2\dot{W}_2}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}, \quad (4.24)$$

Когда $\dot{W}_1 = \dot{W}_2$, отражение от границы отсутствует: $\dot{i}_{E,H}^{(r)} = \dot{i}_{E,H}^{(b)} = 0$. В обеих средах волновой процесс имеет характер бегущей волны – режим полного согласования сред (рисунок 4.8,а). При неравенстве \dot{W}_1 и \dot{W}_2 в 1-й среде за счет сложения встречно бегущих падающей и отраженной волн, имеющих разные амплитуды, устанавливается режим смешанных волн. Во 2-й среде, где присутствует только преломленная волна, всегда поддерживается режим бегущей волны. На рисунке 4.8,б ÷ 4.8,д изображены зависимости от y огибающей амплитуды волнового процесса $E_m(y)$ в 1-й и 2-й среде для различных частных

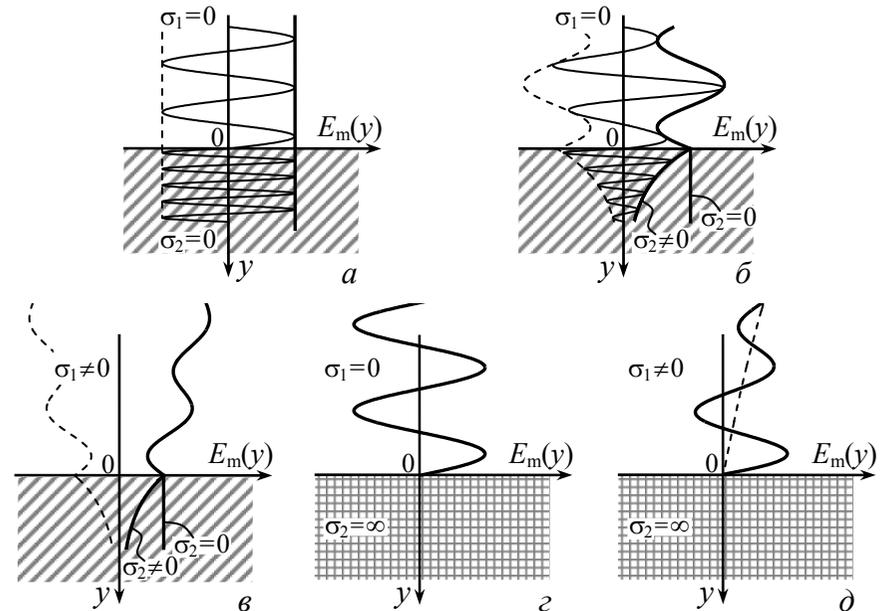


Рисунок 4.8

случаев: b – 1-я среда без потерь ($\sigma_1=0$), 2-я среда без потерь ($\sigma_2=0$) или с потерями ($\sigma_2 \neq 0$); $в$ – 1-я среда с потерями ($\sigma_1 \neq 0$), 2-я среда без потерь ($\sigma_2=0$) или с потерями ($\sigma_2 \neq 0$). Если 2-я среда – идеальный металл, то падающая волна отражается полностью. Поэтому в 1-й среде формируется стоячая волна поля, которая при отсутствии потерь ($\sigma_1=0$, рисунок 4.8, z) заполняет все пространство 1-й среды, а при наличии потерь ($\sigma_1 \neq 0$, рисунок 4.8, d) занимает объем некоторого слоя конечной толщины, прилегающего к поверхности раздела сред.

4.5 Взаимодействие волны с поверхностью хорошо проводящей среды

Среда с хорошей проводимостью (σ_2 – велико) характеризуется комплексным показателем преломления $\dot{n}_2 = \sqrt{(\epsilon'_2 - i \cdot \epsilon''_2) \cdot \mu_2}$, модуль которого $|\dot{n}_2| \gg 1$. Отмеченная особенность типична для многих реально встречаемых видов почв при решении задач распространения радиоволн над поверхностью Земли.

Обратимся ко второму закону Снелля (4.7). На основании его можно сделать два важных вывода. Во-первых, большое значение $|\dot{n}_2|$ хорошо проводящей среды приводит к тому, что угол $\Theta_{\text{пр}} \rightarrow 0$: вглубь среды с большой проводимостью наклонно падающие на ее поверхность волны уходят почти по направлению внутренней нормали (рисунок 4.9). Во-вторых, комплексный характер \dot{n}_2 требует (для соблюдения равенства (4.7)), чтобы $\sin \Theta_{\text{пр}}$ и, следовательно, угол $\Theta_{\text{пр}}$ приняли комплексное значение. Это следует понимать так, что в преломленной волне фронты фаз и амплитуд перестают пространственно совпадать друг с другом (рисунок 4.9). Такую волну называют неоднородной. Зависимость преломленной волны от координат описывается выражением (4.3)

$$\dot{E}_{\text{пр}}, \dot{H}_{\text{пр}} \sim e^{-ik_2(z \cdot \sin \Theta_{\text{пр}} + y \cdot \cos \Theta_{\text{пр}})},$$

в котором $\dot{k}_2 \cdot \sin \Theta_{\text{пр}} = k_1 \cdot \sin \Theta_{\text{пад}} = k_{2z}$ – вещественная величина, а $\dot{k}_2 \cdot \cos \Theta_{\text{пр}} = k'_{2y} - i \cdot k''_{2y}$ – комплексная величина. Поэтому в иной форме записи

$$\dot{E}_{\text{пр}}, \dot{H}_{\text{пр}} \sim e^{-k'_{2y} \cdot y} \cdot e^{-i(k_{2z} \cdot z + k''_{2y} \cdot y)}. \quad (4.25)$$

Формула (4.25) показывает, что фронт амплитуд характеризуется уравнением $y = \text{const}$, а фронт фаз $-(k_{2z} \cdot z + k''_{2y} \cdot y) = \text{const}$. Плоскости фронтов становятся непараллельными. Фронт фаз наклонен к поверхности раздела сред и движется в направлении, обозначенном штриховой линией (рисунок 4.9). Угол φ ($\text{tg} \varphi = k_{2z} / k'_{2y}$) имеет смысл угла преломления.

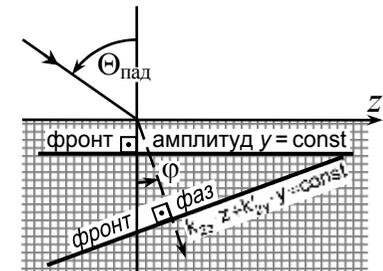


Рисунок 4.9

Тот факт, что преломленная волна движется вглубь хорошо проводящей среды почти по нормали к пограничной поверхности (рисунок 4.10) и по своей структуре близка к плоской волне, позволяет ввести приближенные граничные условия (они называются условиями Леонтовича), удобные для расчета поля в 1-й среде у поверхности раздела. Во 2-й среде (например, при вертикально-поляризованной падающей волне) согласно (3.11)

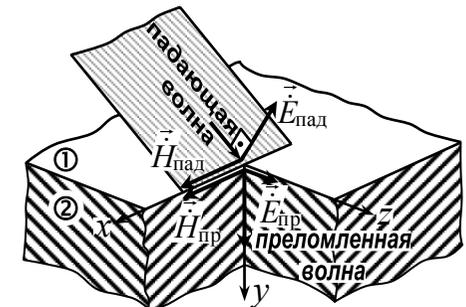


Рисунок 4.10

$$\frac{\dot{E}_{2z}}{H_{2x}} = W_2 \approx \sqrt{\frac{i \cdot \omega \cdot \mu'_{a2}}{\sigma_2}} = (1+i) \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu'_{a2}}{2\sigma_2}} = \frac{1+i}{\sigma_2 \cdot \Delta_{\text{ск}2}}. \quad (4.26)$$

Однако в силу точных пограничных соотношений (1.107), (1.104) $\dot{E}_{2z} = \dot{E}_{1z}$, $\dot{H}_{2x} = \dot{H}_{1x}$ (при $y = 0$), поэтому из (4.26) следует, что

$$\dot{E}_{1z} / \dot{H}_{1x} = (1+i) \cdot \sqrt{\omega \cdot \mu'_{a2} / (2\sigma_2)}. \quad (4.27)$$

Таким образом, у поверхности хорошо проводящей среды отношение касательных составляющих электрического и магнитного полей 1-й среды определяется параметрами 2-й среды.

Свойство среды с большой проводимостью как бы втягивать распространяющуюся над её поверхностью волну и поглощать мощность последней имеет важное практическое значение. Приведем два примера из практики. На рисунке 4.11 показано, как при скольжении падающей волны по поверхности хорошо проводящей среды за счет оттока энергии волны во 2-ю среду фронт волны и вектор $\vec{E}_{\text{пад}}$ по мере движения в направлении оси Oz постепенно наклоняются к границе раздела, вектор $\vec{H}_{\text{пад}}$ все круче "зарывается" во 2-ю среду. Если волна с наклоненным фронтом падает на Г-образную антенну приемника, то токи, возбуждаемые в вертикальном и горизонтальном плечах антенны, текут в одном направлении (сплошные стрелки на рисунке 4.11) – волна принимается. При движении волны в противоположном направлении указанные токи будут протекать навстречу друг другу (штриховые стрелки на рисунке 4.11) – прием волны ослаблен. Таким образом, явление наклона фронта волны при ее движении над хорошо проводящей средой приводит к возникновению невзаимности приема волны, хотя среды 1-я и 2-я изотропны.

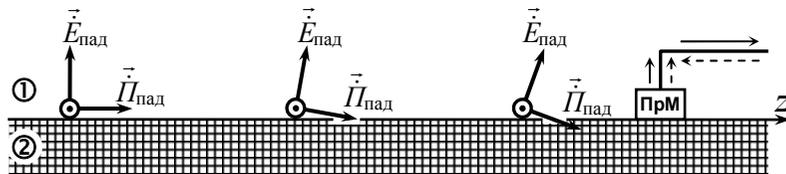


Рисунок 4.11

Допустим, что волна, изображенная на рисунке 4.11, излучается антенной, имеющей диаграмму направленности, показанную сплошной кривой на рисунке 4.12. Если бы 2-я среда была лишена потерь, форма диаграммы направленности (на каком бы расстоянии от антенны она ни измерялась) осталась бы неизменной. Большие потери во 2-й среде приводят к тому, что на значительном удалении от антенны в диаграмме направленности возникает завал, возрастающий по мере удаления от антенны (см. штриховые линии на рисунке 4.12). В результате максимум чувствительности антенны отклоняется от горизонтального направления на угол φ . Это может вызвать трудности радиолокации низколетящих целей.

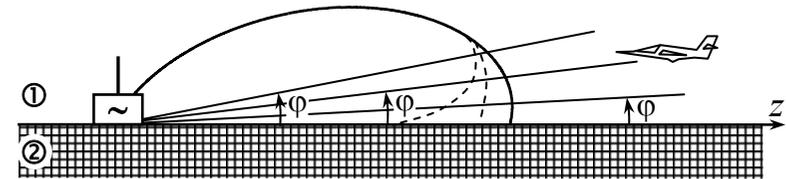


Рисунок 4.12

4.6 Падение волны на подвижную границу раздела сред

Рассмотрим новую задачу: пусть электромагнитная волна падает из 1-й среды на поверхность 2-й среды, которая перемещается со скоростью v в некотором направлении. Подобная ситуация встречается в радиолокации. Для конкретности будем полагать, что волна падает на границу раздела сред нормально ($\Theta_{\text{пад}} = 0$), а сама граница равномерно движется вдоль оси Oy : $y = \pm v \cdot t$. Качественной особенностью рассматриваемой задачи является, как мы убедимся ниже, изменение частоты волны после взаимодействия с движущейся поверхностью 2-й среды. Соотношения (4.1,a), (4.2,a) и (4.3,a) с учетом сказанного переписуются тогда в виде

$$\vec{E}_{\text{пад}} = -\vec{x}_0 \cdot \dot{E}_{\text{мпад}} \cdot e^{i\omega_{\text{пад}}t} \cdot e^{-ik_1 y}, \quad (4.28, a)$$

$$\vec{E}_{\text{отр}} = -\vec{x}_0 \cdot \dot{E}_{\text{мотр}} \cdot e^{i\omega_{\text{отр}}t} \cdot e^{ik_1 y}, \quad (4.28, б)$$

$$\vec{E}_{\text{пр}} = -\vec{x}_0 \cdot \dot{E}_{\text{мпр}} \cdot e^{i\omega_{\text{пр}}t} \cdot e^{-ik_2 y}. \quad (4.28, в)$$

Пограничное условие (1.107) по-прежнему остается справедливым ($\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$):

$$\dot{E}_{\text{мпад}} \cdot e^{i\omega_{\text{пад}}t} \cdot e^{-ik_1 y} + \dot{E}_{\text{мотр}} \cdot e^{i\omega_{\text{отр}}t} \cdot e^{+ik_1 y} = \dot{E}_{\text{мпр}} \cdot e^{i\omega_{\text{пр}}t} \cdot e^{-ik_2 y}. \quad (4.29)$$

Равенство (4.29) сохраняется в любой момент времени и в любой точке поверхности раздела. Поэтому показатели экспонент в (4.29) должны быть одинаковыми:

$$\omega_{\text{пад}} \cdot t - k_1 \cdot (\pm v \cdot t) = \omega_{\text{отр}} \cdot t + k_1 \cdot (\pm v \cdot t) = \omega_{\text{пр}} \cdot t - k_2 \cdot (\pm v \cdot t).$$

Откуда, полагая $v \ll v_0$, получаем

$$\omega_{\text{отр}} \approx \omega_{\text{пад}} \cdot (1 \pm 2 \cdot v/v_0), \quad (4.30)$$

$$\omega_{\text{пр}} \approx \omega_{\text{пад}} \cdot [1 \pm (n_1 - n_2) \cdot v/v_0]. \quad (4.31)$$

Выражение (4.30) является аналитическим описанием эффекта Доплера: частота отраженной волны увеличивается, если она падает на встречно движущуюся поверхность, и уменьшается в противоположном случае. Доплеровский сдвиг частоты при этом составляет $\Delta f_{\text{Д}} = f_{\text{пад}} - f_{\text{отр}} = \pm f_{\text{пад}} \cdot 2 \cdot v/v_0$. Например, электромагнитный сигнал $f_{\text{пад}} = 10^{10}$ Гц после отражения от искусственного спутника Земли ($v = 8$ км/с) смещается по частоте на $\Delta f_{\text{Д}} = \pm 0.53$ МГц. Если приемник наземной станции имеет полосу пропускания менее $2\Delta f_{\text{Д}}$ с центральной частотой $f_{\text{пад}}$ (на рисунке 4.13 показана штриховой линией), то отраженный от спутника сигнал не будет принят.

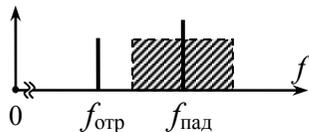


Рисунок 4.13

Эффект Доплера широко применяется в радиолокации при селекции подвижных целей на фоне неподвижных или медленно перемещающихся объектов. В радиоастрономии по доплеровскому смещению линий спектра излучения известных химических элементов, принимаемых от удаленных космических объектов (звезд, туманностей, галактик), оценивают расстояние последних до Земли и скорость их удаления (эффект разлета Галактики). На рисунке 4.14 сплошными линиями изображен спектр излучения некоторого известного химического элемента, измеренный в земной лаборатории, штриховыми линиями – спектр, зарегистрированный в излучении далекой галактики. Одинаковая структура принятого спектра свидетельствует о том, что его излучает тот же известный химический элемент, который удаляется от Земли со скоростью $v = v_0 \cdot \Delta f_{\text{Д}}/f$ ($\Delta f_{\text{Д}} < 0$). Знаменитый закон Хаббла позволяет вычислить расстояние до исследуемого космического объекта: $R = v/H$, где $H = 65$ км/с·Мпк – постоянная Хаббла; Мпк – расстояние в мегапарсеках ($1 \text{ пк} \approx 3 \cdot 10^{13}$ км).

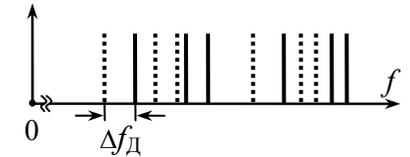


Рисунок 4.14

4.7 Отражение от неровной поверхности

Совершенно ровные (гладкие) поверхности раздела двух сред, рассмотренные выше, строго говоря, являются идеализацией. На практике такие поверхности почти не встречаются. Земля, взволнованное море, обработанный режущим инструментом металл и т.п. являются примерами неровных поверхностей, с которыми в технике обычно осуществляется взаимодействие электромагнитных волн. Неровности поверхности могут иметь случайное распределение размеров и ориентации, и тогда говорят о шероховатой поверхности. Нередки случаи,

когда неровности распределены по определенному закону (например, строго периодически). Как правило, такие поверхности изготавливаются искусственно с целью достижения определенного эффекта: дифракционные решетки, элементы для лазерной техники, регулярно гофрированные участки поверхности диэлектрика в интегральных оптических волноводах, зонные пластины в антенной технике сверхвысоких частот и др. Понятие ровной или неровной поверхности весьма относительно. Из самых общих рассуждений должно быть понятно, что некоторая поверхность, которую с высокой степенью точности можно считать ровной при анализе взаимодействия с ней излучения с длиной волны, много большей размера типичной неровности, не может приниматься за таковую при падении на нее очень коротковолнового излучения.

Из первого закона Снелля (4.6) следует, что при падении плоской волны на ровную поверхность:

а) "трубка" параллельных лучей падающей волны преобразуется в единственную "трубку" тоже параллельных лучей отраженной по зеркальному закону волны;

б) отраженная волна возвращается к источнику излучения падающей волны только в случае нормального падения (исключение составляют случаи падения волны на поверхность нелинейной среды).

Оба следствия нарушаются, если поверхность раздела сред шероховата. Зеркальное отражение заменяется рассеянием (рисунок 4.15). Для оценки степени шероховатости обычно пользуются критерием Рэлея. Предположим, что Δh – средняя высота неровности. Тогда реальную шероховатую поверхность заменим двумя параллельными плоскостями (рисунок 4.16), из которых нижняя проходит по впадинам, а верхняя по гребешкам неровностей. В соответствии с критерием Рэлея шероховатой считается поверхность с таким средним размером неровностей Δh , при котором разность фаз двух лучей, падающих на поверхность в точки О и С, превышает $\pi/2$. Из рисунка 4.16

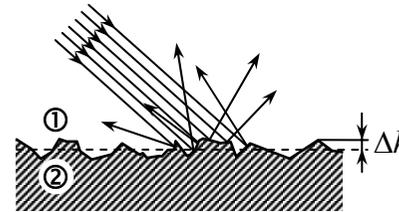


Рисунок 4.15

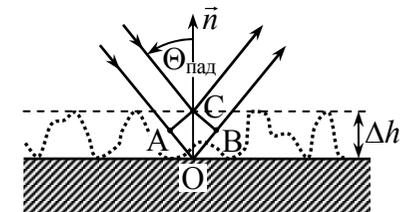


Рисунок 4.16

видно, что фазовый сдвиг указанных лучей определяется геометрической разностью хода АОВ:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \ell_{\text{АОВ}} = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \Delta h \cdot \cos\Theta_{\text{пад}},$$

откуда по критерию Рэлея допустимая средняя высота неровностей равна

$$\Delta h_{\text{доп}} = \frac{\lambda}{8 \cdot \cos\Theta_{\text{пад}}}. \quad (4.32)$$

Если $\Delta h \ll \Delta h_{\text{доп}}$, то отражение волны происходит почти по зеркальному закону и поверхность раздела сред можно считать ровной. В противном случае ($\Delta h \gg \Delta h_{\text{доп}}$) поверхность является заметно шероховатой, и издающая волна, отражаясь, диффузно рассеивается.

4.8 Взаимодействие волны с поверхностью анизотропной среды

Рассмотрим особенности прохождения однородной плоской волны через границу раздела анизотропных сред. Для упрощения математических выкладок будем предполагать, что волна падает нормально на пограничную поверхность, совмещенную с плоскостью xOy . Ограничимся случаем продольно-намагниченных сред, ориентируя постоянное магнитное поле \vec{H}_0 вдоль оси Oz , являющейся одновременно осью распространения падающей волны. Магнитные свойства сред будем опи-

сывать тензорами магнитной проницаемости $\vec{\mu}_{1,2}$ вида (3.15), а диэлектрические свойства – тензорами диэлектрической проницаемости $\vec{\epsilon}_{1,2}$ вида (3.37).

Проанализируем вначале задачу, в которой обе среды анизотропны. Как было уже доказано в разделе 3.3, при продольном распространении в гиротропном ферритмагнетике и плазме линейно-поляризованная волна разбивается на две волны с правой и левой круговой поляризацией (эффект Фарадея). Иными словами, волны с круговой поляризацией (и правого и левого вращения) являются собственными для продольно-намагниченного ферритмагнетика и плазмы, поэтому какая бы волна извне не вошла в указанные среды, она обязательно распадется на кругло-поляризованные компоненты. Рассмотрим теперь такую волну с круговой поляризацией, которая, двигаясь вдоль оси Oz, из первой анизотропной среды падает на границу раздела со второй, тоже анизотропной, средой (рисунок 4.17).

Для упрощения записи математических выражений воспользуемся формальным приемом, известным как метод "двух комплексных плоскостей", который позволяет электрический и магнитный векторы, лежащие в плоскости xOy, заменить комплексным числом. Вводя помимо мнимой единицы i во временной плоскости дополнительную мнимую единицу i_n в пространственной плоскости, можно, пользуясь этой договоренностью, заменить вектор кругло-поляризованного поля

$$\vec{H}^{(\pm)} = \dot{H}_m \cdot (\vec{x}_0 \pm i \cdot \vec{y}_0) \quad (4.33)$$

на двойное комплексное число

$$\vec{H}^{(\pm)} = \dot{H}_m \cdot (1 \pm i \cdot i_n). \quad (4.34)$$

Тогда комплексные амплитуды поля падающей волны, распространяющейся в первой среде, следует записать в виде

$$\vec{E}_{\text{пад}}^{(\pm)} = \dot{E}_{\text{мпд}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{-ik_1^{(\pm)} \cdot z}, \quad (4.35)$$

$$\ddot{H}_{\text{пад}}^{(\pm)} = \dot{H}_{\text{мпд}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{-ik_1^{(\pm)} \cdot z} = \frac{\dot{E}_{\text{мпд}}}{W_1^{(\pm)}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{-ik_1^{(\pm)} \cdot z}, \quad (4.36)$$

где $W_1^{(\pm)} = \sqrt{\mu_0 \cdot (\mu_1 \pm \mu_{11}) / [\epsilon_0 \cdot (\epsilon_1 \pm \epsilon_{11})]}$ – волновое сопротивление первой среды для волн с левой (+) и правой (–) круговыми поляризациями; $k_1^{(\pm)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\epsilon_1 \pm \epsilon_{11}) \cdot (\mu_1 \pm \mu_{11})}$ – постоянные распространения левой и правой волн в первой среде (см. (3.21)).

Поля отраженной и преломленной волн могут быть представлены аналогично:

$$\ddot{E}_{\text{отр}}^{(\pm)} = \dot{E}_{\text{мотр}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{-ik_1^{(\pm)} \cdot z}, \quad (4.37)$$

$$\ddot{H}_{\text{отр}}^{(\pm)} = -\frac{\dot{E}_{\text{мотр}}}{W_1^{(\pm)}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{+ik_1^{(\pm)} \cdot z}, \quad (4.38)$$

$$\ddot{E}_{\text{пр}}^{(\pm)} = \dot{E}_{\text{мпр}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{-ik_2^{(\pm)} \cdot z}, \quad (4.39)$$

$$\ddot{H}_{\text{пр}}^{(\pm)} = -\frac{\dot{E}_{\text{мпр}}}{W_2^{(\pm)}} \cdot (1 \pm i \cdot i_n) \cdot e^{-ik_2^{(\pm)} \cdot z}, \quad (4.40)$$

где $W_2^{(\pm)} = \sqrt{\mu_0 \cdot (\mu_2 \pm \mu_{22}) / [\epsilon_0 \cdot (\epsilon_2 \pm \epsilon_{22})]}$ – волновые сопротивления второй среды для левой (+) и правой (–) круговых волн; $k_2^{(\pm)} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\epsilon_2 \pm \epsilon_{22}) \cdot (\mu_2 \pm \mu_{22})}$ – постоянные распространения тех же волн во второй среде.

На границе раздела сред ($z=0$) электрическая и магнитная компоненты поля, будучи касательными к пограничной поверхности, должны подчиняться условию непрерывности (4.4):

$$\vec{E}_{\text{пад}}^{(\pm)} + \vec{E}_{\text{отр}}^{(\pm)} = \vec{E}_{\text{пр}}^{(\pm)}, \quad (4.41)$$

$$\ddot{H}_{\text{пад}}^{(\pm)} + \ddot{H}_{\text{отр}}^{(\pm)} = \ddot{H}_{\text{пр}}^{(\pm)}. \quad (4.42)$$

Подстановка (4.35), (4.37), (4.39) в (4.41), а (4.36), (4.38), (4.40) в (4.42) позволяет установить связь амплитуд трех волн:

$$\dot{E}_{\text{мотр}} = \dot{r}_E^{(\pm)} \cdot \dot{E}_{\text{мпд}}, \quad (4.43)$$

$$\dot{E}_{\text{мпр}} = \dot{P}_E^{(\pm)} \cdot \dot{E}_{\text{мпад}} \quad (4.44)$$

В последних выражениях $\dot{r}_E^{(\pm)}$ и $\dot{P}_E^{(\pm)}$, очевидно, имеют смысл комплексных коэффициентов Френеля (см. (4.8)) для отражения и преломления кругло-поляризованных волн на границе двух анизотропных сред, причем

$$\dot{r}_E^{(\pm)} = \frac{(\dot{W}_2^{(\pm)} / \dot{W}_1^{(\pm)}) - 1}{(\dot{W}_2^{(\pm)} / \dot{W}_1^{(\pm)}) + 1}, \quad (4.45, a)$$

$$\dot{P}_E^{(\pm)} = \frac{2 \cdot \dot{W}_2^{(\pm)} / \dot{W}_1^{(\pm)}}{(\dot{W}_2^{(\pm)} / \dot{W}_1^{(\pm)}) + 1}. \quad (4.45, б)$$

Полученные выражения структурно совпадают с формулами (4.13). Коэффициенты Френеля для магнитных компонент поля $\dot{r}_H^{(\pm)}$, $\dot{P}_H^{(\pm)}$, если известны $\dot{r}_E^{(\pm)}$ и $\dot{P}_E^{(\pm)}$, находятся с помощью соотношений (4.11). Таким образом, всякая волна с круговой поляризацией при взаимодействии с границей раздела двух анизотропных продольно намагниченных сред порождает отраженную и преломленную волны, каждая из которых сохраняет круговую поляризацию с тем же, что и у падающей волны, направлением вращения векторов поля (рисунок 4.17).

Амплитуды и фазы этих волн определяются величиной модуля и аргумента комплексных коэффициентов Френеля $\dot{r}_E^{(\pm)}$, $\dot{P}_E^{(\pm)}$, $\dot{r}_H^{(\pm)}$, $\dot{P}_H^{(\pm)}$. Падающая и отраженная волны в первой среде распространяются с фазовой скоростью (см. (3.23), (3.25))

$$v_{\phi 1}^{(\pm)} = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\epsilon_1 \pm \epsilon_{\perp 1}) \cdot (\mu_1 \pm \mu_{\perp 1})}; \quad (4.46)$$

преломленная волна во второй среде – со скоростью

$$v_{\phi 2}^{(\pm)} = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\epsilon_2 \pm \epsilon_{\perp 2}) \cdot (\mu_2 \pm \mu_{\perp 2})}. \quad (4.47)$$

Полученные выше выражения носят общий характер и без труда могут быть применены к частным вариантам двух сред, соприкасающихся по общей границе, например, феррит – фер-

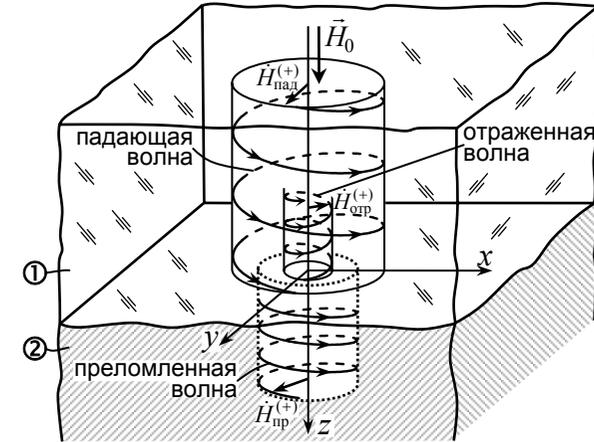


Рисунок 4.17

рит, плазма – плазма, феррит – плазма. В каждом из этих случаев нужно правильно выбрать параметры сред: для приведенных примеров соответственно ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 , $\vec{\epsilon}_1, \mu_1$ и $\vec{\epsilon}_2, \mu_2$, ϵ_1, μ_1 и $\vec{\epsilon}_2, \mu_2$. На практике чаще приходится иметь дело с более простыми ситуациями, когда одна из соприкасающихся сред изотропна: например, воздух – феррит, воздух – плазма.

Рассмотрим в качестве второго примера задачу о нормальном падении линейно-поляризованной волны из вакуума ($\epsilon_1=1, \mu_1=1$) на поверхность продольно-намагниченной плазмы ($\vec{\epsilon}_2, \mu_2=1$). В этих условиях комплексные коэффициенты Френеля для E -компоненты будут равны (см. (4.45)):

$$\dot{r}_E^{(\pm)} = \frac{\sqrt{1/(\epsilon_2 \pm \epsilon_{\perp 2})} - 1}{\sqrt{1/(\epsilon_2 \pm \epsilon_{\perp 2})} + 1}, \quad (4.48, a)$$

$$\dot{P}_E^{(\pm)} = \frac{2 \cdot \sqrt{1/(\epsilon_2 \pm \epsilon_{\perp 2})}}{\sqrt{1/(\epsilon_2 \pm \epsilon_{\perp 2})} + 1}. \quad (4.48, б)$$

Амплитуды и фазы отраженной и преломленной волн находятся подстановкой (4.48) в (4.43), (4.44). Проанализируем по-

ляризацию этих волн. По условию задачи падающее излучение поляризовано линейно, поэтому его можно представить суммой двух равноамплитудных и синфазных волн с круговой поляризацией (правой и левой), бегущих в направлении оси Oz. Как показано в предыдущей задаче, поляризованная по кругу волна после отражения и преломления сохраняет свою поляризацию. Это означает, что отраженная и преломленная волны состоят из двух кругло-поляризованных волн с разными амплитудами и фазами. Их суперпозиция приводит к эллиптической поляризации поля, причем в силу неравенств модулей и аргументов коэффициентов Френеля $r^{(\pm)}$ и $\dot{P}^{(\pm)}$ степень эллиптичности (соотношения полуосей эллипса) и ориентация большой оси эллипсов поляризации по отношению к направлению поляризации падающей волны (так называемый угол поляризации) у отраженной и преломленной волн будут разные (рисунок 4.18). При удалении указанных волн от границы раздела сред в силу разной скорости распространения и затухания составляющих их право- и левополяризованных компонент эллиптичность этих волн и угол их поляризации изменяются. Поэтому рисунок 4.18 в части, касающейся изображения отраженной и пре-

ломленной волн, справедлив только в непосредственной близости от пограничной поверхности.

4.9 Основные результаты четвертой главы

Если на пути электромагнитной волны встречается плоская бесконечная поверхность, разделяющая две среды с разными параметрами, то свободная волна, которую в этом случае называют падающей, испытывает возмущение. Причиной возмущения является различное воздействие поля падающей волны на заряженные частицы (свободные и связанные) сред. Разные амплитуды, фазы и поляризации колебаний заряженных частиц по обе стороны поверхности раздела сред приводят к появлению вторичных волн: отраженной и преломленной.

Отраженная волна возвращается в среду (будем называть ее первой), из которой пришла падающая волна. Преломленная волна возбуждается во второй среде. Обе волны, отраженная и преломленная, удаляются от пограничной поверхности.

Плоскость, включающая вектор нормали к поверхности раздела сред и волновой вектор падающей волны, называется плоскостью падения.

Волна, наклонно падающая на границу раздела сред, называется вертикально-поляризованной, если ее электрический вектор $\vec{E}_{\text{пад}}$ располагается точно в плоскости падения, и горизонтально-поляризованной, когда вектор $\vec{E}_{\text{пад}}$ перпендикулярен этой плоскости.

При известных параметрах сред и угле падения направления движения отраженной и преломленной волн определяются соответственно первым и вторым законами Снелля, которые имеют одинаковый вид как для вертикально-, так и для горизонтально-поляризованной падающей волны.

Амплитуда и фазы отраженной и преломленной волн определяются формулами Френеля. Для известных сред и угла падения эти формулы позволяют вычислить комплексные ко-

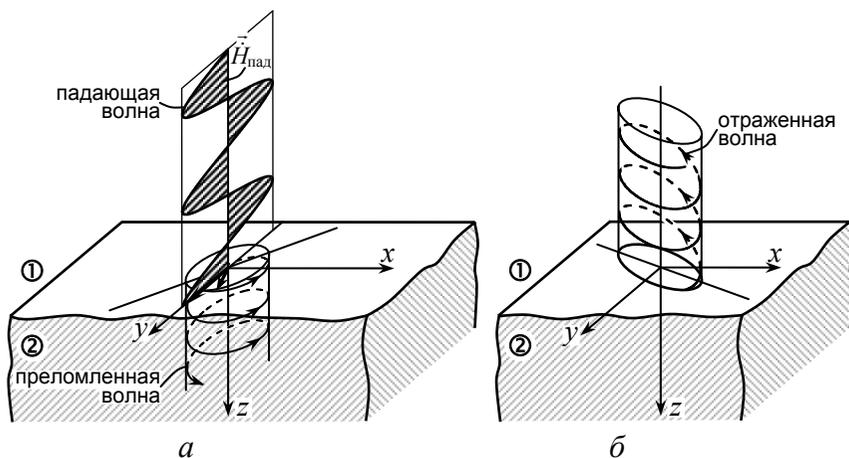


Рисунок 4.18

коэффициенты отражения и преломления электрической и магнитной составляющих указанных волн. Формулы Френеля имеют разный вид для вертикально- и горизонтально-поляризованной волн. Переход в формулах от одной поляризации к другой осуществляется по правилу перестановочной двойственности.

Полное прохождение плоской электромагнитной волны через границу раздела разных сред возможно лишь при вертикальной поляризации волны и падении ее под углом Брюстера. Во всех других случаях обязательно возбуждается отраженная волна. Исключение составляет пример нормального падения волны на границу раздела разных сред с одинаковыми волновыми сопротивлениями (случай полного согласования сред).

Полное отражение плоской электромагнитной волны от границы раздела разных сред возможно при падении волны под углами, большими критического, из оптически более плотной на оптически менее плотную среду. Полное отражение имеет место для волн любой поляризации. Независимо от угла падения полное отражение обеспечивается поверхностью идеального металла.

При падении волны на поверхность хорошо проводящего материала в точках непосредственно над этой поверхностью соотношение между касательными к ней электрической и магнитной составляющими определяется параметрами хорошо проводящей среды.

Если плоская волна взаимодействует с движущейся границей раздела сред, то отраженная и преломленная волны имеют частоты, отличные от частоты падающей волны. В частности, частота отраженной волны возрастает, когда падающая волна и граница раздела сред движутся навстречу друг другу. В обратном случае частота отраженной волны уменьшается по сравнению с падающей.

Гладкая поверхность раздела сред всегда (если обе среды линейны и изотропны) обеспечивает зеркальное отражение падающей волны. Однако, если пограничная поверхность шероховатая, зеркальный закон отражения заменяется диффузным

(всенаправленным). Шероховатой можно считать поверхность, средняя высота неровностей которой превышает некоторую допустимую величину, оцениваемую по критерию Рэлея.

При падении плоской волны на поверхность анизотропной среды процесс возбуждения отраженной и преломленной волн усложняется. В частности, при нормальном падении плоской линейно-поляризованной волны из изотропной среды на анизотропную (продольно-намагниченную) отраженная и преломленная волны приобретают эллиптическую поляризацию с различными углами поляризации и эллиптичностью. Когда обе соприкасающиеся среды анизотропны, нормально падающая вдоль направления намагничивания волна может иметь только круговую (правую или левую) поляризацию, которая сохраняется в отраженной и преломленной волнах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федоров Н.Н. Основы электродинамики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 399 с.
2. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
3. Баскаков С.И. Основы электродинамики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Советское радио, 1973. – 248 с.
4. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966. – 340 с.
5. Кугушев А.М. Основы радиоэлектроники. Нелинейные электромагнитные процессы / А.М. Кугушев, Н.С. Голубева. – М.: Энергия, 1977. – 335 с.
6. Тарасов Л.В. Физические основы квантовой электроники (оптический диапазон). – М.: Советское радио, 1976. – 368 с.
7. Ярив А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М.: Мир, 1978. – 472 с.
8. Гольдштейн Л.Д. Электромагнитные поля и волны / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М.: Советское радио, 1972. – 664 с.
9. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1975. – 428 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1 Основные законы технической электродинамики	7
1.1 Экспериментальная основа теории электромагнитного поля	7
1.2 Система уравнений Максвелла	9
1.3 Материальные уравнения электродинамики	19
1.4 Уравнения Максвелла для гармонических электромагнитных процессов.....	23
1.5 Энергетические соотношения электродинамики	25
1.6 Потенциалы электромагнитного поля	33
1.7 Уравнения движения электромагнитного поля	34
1.8 Опережающие и запаздывающие потенциалы поля	39
1.9 Некоторые принципы технической электродинамики	41
1.10 Основные результаты первой главы	55
2 Излучение электромагнитных волн.....	58
2.1 Поле электрического диполя	58
2.2 Поле магнитного диполя.....	70
2.3 Поле элемента Гюйгенса.....	74
2.4 Основные результаты второй главы.....	76
3 Распространение плоских электромагнитных волн в безграничном пространстве	82
3.1 Волны в однородных изотропных средах	83
3.2 Влияние потерь в среде на распространение электромагнитной волны.....	85
3.3 Волны в анизотропном ферромагнетике.....	89
3.4 Волны в анизотропной плазме	97
3.5 Волны в анизотропных кристаллах	109
3.6 Волны в неоднородных средах.....	119
3.7 Волны в нелинейных средах	123
3.8 Фазовая самомодуляция и временное сжатие.....	137

3.9 Волны в активных средах.....	143
3.10 Основные результаты третьей главы.....	146
4 Взаимодействие электромагнитных волн с границей раздела сред.....	151
4.1 Законы Снелля.....	152
4.2 Законы Френеля.....	155
4.3 Условия полного отражения и преломления.....	158
4.4 Нормальное падение волны на границу раздела сред.....	162
4.5 Взаимодействие волны с поверхностью хорошо проводящей среды.....	164
4.6 Падение волны на подвижную границу раздела сред.....	167
4.7 Отражение от неровной поверхности.....	169
4.8 Взаимодействие волны с поверхностью анизотропной среды.....	171
4.9 Основные результаты четвертой главы.....	177
Библиографический список.....	180

Учебное издание

**Юдин Владимир Иванович
Останков Александр Витальевич**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ.
Часть 1. ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНЫХ
И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие

Подписано в печать 26.03.2007. Формат 60×84/16
Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 11,4. Тираж 100 экз.
Заказ № .

Международный институт компьютерных технологий
394026, Воронеж, ул. Солнечная, 29^б