ФГБОУ ВО "Воронежский государственный
технический университет"

А.Г. Москаленко Т.Л. Тураева
Е.П. Татьянина С.А. Антипов

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

ЧАСТЬ 1

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Воронеж 2016

УДК 539.1

Методика решения задач по физике в техническом вузе. Ч.1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электростатика: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (1,35 Мб) / А.Г. Москаленко, Т.Л. Тураева, Е.П. Татьянина, С.А. Антипов. - Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) : цв. – Систем. требования : ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ ; Windows XP ; SVGA с разрешением 1024x768 ; Adobe Acrobat ; CD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с экрана.

В данном пособии представлены основные типы и методы решения физических задач по механике, молекулярной физике, термодинамике и электростатике. Дается разбор задач различной сложности с подробным описанием приемов и способов их решения. Задачи для самостоятельной работы соответствуют как базовому, так и повышенному уровню сложности.

Предназначено для студентов всех технических направлений подготовки.

Табл. 2. Ил. 89. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: кафедра физики ВУНЦ ВВС «ВВА им Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (зам. зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. Санин);
д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.Е. Калинин

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении курса физики в техническом вузе значительное место занимает практика решения физических задач. Только в процессе решения задач развивается физическое мышление, достигается глубокое понимание теории, обретается умение и способность анализировать изучаемые явления, выделять главные факторы и отбрасывать несущественные. Именно умение решать задачи по нашему мнению является определяющим при оценке учебной деятельности студентов. Однако приобретение такого умения и приобщение студентов к самостоятельной творческой работе требует необходимого методического обеспечения.

Методике решения физических задач, их анализу, выбору оптимальных приемов и способов решения посвящено данное учебное пособие. Многообразие физических явлений и законов не предполагает наличие общего подхода и какой-то единой методики решения задач. Однако, вполне возможно и целесообразно дать некоторые методические рекомендации к решению целого ряда конкретных типов задач.

Наиболее общий алгоритм при решении всех задач сводится к следующему:

1) записать условие задачи в сокращенном виде и представить все заданные величины в системе СИ;

2) провести анализ задачи (выявить ее физический смысл, установить физические законы, характеризующие рассматриваемые явления, сделать чертеж, необходимый в подавляющем большинстве случаев);

3) составить на основании установленных законов необходимые уравнения, связывающие физические величины;

4) решить полученную систему уравнений с учетом конкретных данных задачи, получив выражение для искомой величины в общем виде;

5) получить числовой результат и проанализировать полученный ответ (проверить размерность физической

величины, правдоподобность числового значения, исследовать предельные случаи и т.д.).

В предложенном учебном пособии в начале каждого раздела приводятся основные уравнения, формулы и законы, которые используются при решении задач по соответствующей теме. Затем выделяются типы задач и методы их решения. Задачи, рассматриваемые в качестве примеров и предлагаемые для самостоятельного решения, взяты в основном из стандартных задачников, рекомендованных министерством образования. Их перечень представлен в библиографическом списке.

В приложении к пособию представлен справочный материал, а также кратко рассмотрены отдельные вопросы векторной алгебры, начальные понятия дифференциального и интегрального исчисления. Данные сведения из курса математики должны способствовать лучшему пониманию приводимых решений и математических преобразований, не вызывая в тоже время необходимость обращения к пособиям по математике.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Кинематика материальной точки и вращательного движения твердого тела

1.1.1. Основные понятия и уравнения

- Кинематическое уравнение движения материальной точки:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где *x(t)*, *y(t)*, *z(t)* – координаты материальной точки, $\vec{r}(t)$ - радиус-вектор.

- Скорость материальной точки:

вектор средней скорости

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k},$$

где $\Delta\vec{r}$ - вектор перемещения;

вектор мгновенной скорости и модуль скорости

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \upsilon = \frac{ds}{dt},$$

где s - путь, пройденный точкой.

- Ускорение материальной точки:

вектор среднего и мгновенного ускорения

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t},\ \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

нормальная и тангенциальная составляющие ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},\ a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R - радиус кривизны траектории;

полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

• Угловая скорость вращательного движения твердого тела:
величина средней и мгновенной угловой скорости

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\Delta\varphi$ - угловой путь.

• Угловое ускорение твердого тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

• Связь линейных и угловых характеристик:

$$\upsilon = \omega R,\ a_n = \omega^2 R,\ a_\tau = \varepsilon R.$$

• Формулы равнопеременного движения

Поступательное движение	Вращательное движение
$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$S = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$

1.1.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Прямая задача кинематики.

Нахождение траектории движения материальной точки; ее скорости и ускорения в различные моменты времени на основании кинематических уравнений движения.

Метод решения. Последовательное дифференцирование кинематического уравнения движения в координатной или векторной форме. Использование соотношений, определяющих векторы скорости, ускорения и их модули.

Тип 2. Обратная задача кинематики.

Нахождение перемещения и пути, пройденного материальной точкой, на основании закона изменения ее скорости или ускорения с течением времени.

Метод решения. Прямое интегрирование выражений

$$\Delta\vec{r} = \int \vec{\upsilon}(t)dt \; ;$$

$$s = \int \upsilon(t)dt \; ;$$

$$\upsilon = \int a_\tau dt \; .$$

При решении этих задач должны быть дополнительно заданы начальные условия, определяющие параметры движения в некоторый определенный момент времени. В противном случае задача становится неопределенной.

Тип 3. Свободное падение.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Нахождение траектории движения, ее кривизны в различных точках, высоты, дальности и продолжительности полета.

Метод решения включает следующую последовательность действий:

1) Нарисовать чертеж, на котором представить траекторию движения тела и выбранную систему координат.

2) Показать координаты, скорость, ускорение тела в характерные моменты времени.

3) Составить кинематические уравнения движения тела в проекциях на оси координат.

4) Решить полученную систему уравнений с учетом конкретных условий задачи. Получить искомый результат в аналитическом виде и провести его анализ.

5) Получить численный результат. Все расчеты проводить с использованием правил приближенных вычислений.

Тип 4. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

Нахождение угловой скорости и углового ускорения, числа оборотов за определенный промежуток времени; полного, нормального и тангенциального ускорений различных точек тела.

Метод решения. Применение формул, определяющих угловую скорость и угловое ускорение, соотношений, связывающих линейные и угловые величины. Использование аналогии между прямолинейным и вращательным движениями.

1.1.3. Примеры решения задач

Задача 1. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 2t\vec{i} + (8t^2 + 3)\vec{j}$. Определите: уравнение траектории материальной точки; вектор скорости точки в зависимости от времени; вектор ускорения точки в зависимости от времени; модули скорости и ускорения точки в момент времени $t = 2c$.

Решение

Из представленного уравнения $\vec{r}(t)$ вытекают следующие зависимости координат от времени

$$x = 2t \text{ и } y = 8t^2 + 3.$$

Исключив из полученной системы уравнений время, найдем уравнение траектории материальной точки

$$y = 2x^2 + 3.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение параболы (рис.1). При $t = 0$ координаты точки (0,3). С увеличением времени t координаты x и y принимают лишь положительные значения. Направление движение точки показано на рисунке.

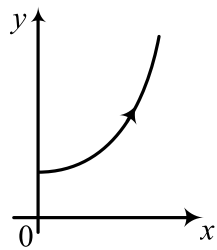


Рис.1

Вектор скорости точки найдем,

взяв производную от радиус-вектора по времени

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t\vec{i} + \left(8t^2 + 3\right)\vec{j}\right) = 2\vec{i} + 16t\vec{j}\ .$$

Модуль скорости определим через его проекции на координатные оси

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{2^2 + (16t)^2}\ .$$

В момент времени $t = 2c$ модуль скорости $\upsilon = 32$ м/с.

Вектор ускорения получим, дифференцируя скорость по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\vec{i} + 16t\vec{j}\right) = 16\vec{j}\ .$$

Данный вектор направлен вдоль оси *Oy*, а его величина не зависит от времени и равна 16м/с^2.

Задача 2. Точка движется в плоскости *xy* по закону $x = A\sin\omega t$, $y = A(1-\cos\omega t)$, где A и ω - положительные константы. Найти: путь, проходимый точкой за время τ; угол между скоростью и ускорением точки.

Решение

Найдем уравнение траектории материальной точки, исключив из представленной системы уравнений время. Перепишем сначала закон движения в виде:

$$\frac{x}{A} = \sin\omega t \ \text{ и } \ \frac{y}{A} - 1 = -\cos\omega t\ .$$

Возведем эти равенства в квадрат, сложим и получим

$$x^2 + (y-A)^2 = A^2\ .$$

Отсюда видно, что точка совершает движение по окружности радиуса *A* и центром в точке (*0;A*) (рис.2). Угол поворота точки за время τ равен $\varphi = \omega t$, а путь $s = R\varphi = A\omega\tau$. В начальный момент времени точка

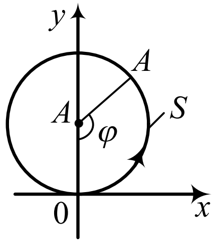


Рис.2

находится в центре координат (x=0, y=0). С увеличением времени t координата также возрастает, т.е. точка начинает двигаться против часовой стрелки.

Угловая скорость $\omega = const$, значит $\upsilon = const$ и касательное ускорение $a_\tau = 0$. Полное ускорение точки равно нормальному ускорению, следовательно, угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$ равен $\pi/2$.

Задача 3. Частица движется в плоскости xy с постоянным ускорением $\vec{a}$, направление которого противоположно положительному направлению оси y. Уравнение траектории частицы имеет вид $y = \alpha x - \beta x^2$, где α и β положительные константы. Найти скорость частицы в начале координат.

Решение

Продифференцируем по времени уравнение траектории:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha\frac{dx}{dt} - 2\beta x\frac{dx}{dt}, \text{ т.е. } \upsilon_y = \upsilon_x(\alpha - 2\beta x).$$

По условию ускорение $\vec{a} = -a\vec{j}$, тогда $\upsilon_x = const$. Дифференцируя еще раз, получим

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = -2\beta\upsilon_x\frac{dx}{dt} = -2\beta\upsilon_x^2.$$

Учитывая, что $\dfrac{d\upsilon_y}{dt} = a_y = -a$, $a = 2\beta\upsilon_x^2$, отсюда $\upsilon_x = \sqrt{a/2\beta}$.

Модуль скорости $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$.

Для $x = 0$ $\upsilon_y = \alpha\upsilon_x$ и $\upsilon_0 = \upsilon_x\sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{(1+\alpha^2)a/2\beta}$.

Задача 4. Ускорение парашютиста в затяжном прыжке из неподвижного вертолета изменяется по закону

$$g = g_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $g_0 = 9{,}8 м/с^2$, $\tau = 5с$. Через какое время после начала прыжка скорость парашютиста станет равной половине максимального значения? Постройте график зависимости скорости от времени.

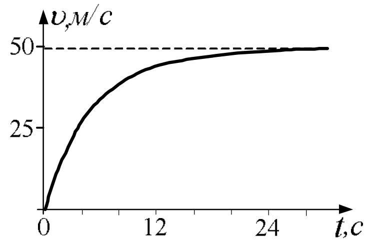


Рис.3

Решение

Зависимость скорости от времени парашютиста найдем путем интегрирования

$$\upsilon = \int_0^t g(t)dt = g_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt = g_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Максимальное значение скорости определим из условия $\upsilon = \upsilon_{\max}$ при $t \to \infty$, следовательно $\upsilon_{\max} = g_0 \tau$.

Искомое время найдем из решения уравнения

$$\frac{\upsilon_{\max}}{2} = g_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

После преобразования, получим

$$t = \tau \ln 2 = 3{,}46 \text{ с}.$$

График зависимости скорости от времени представлен на рис.3.

Задача 5. Скорость самолета при разгоне на взлетной полосе изменяется по закону

$$\upsilon = \upsilon_0 (1 - e^{-\alpha t}),$$

где $\upsilon_0 = 200 м/с$, $\alpha = 0{,}1 с^{-1}$, t - время от начала движения. Определите длину пути при разгоне, если он длился 10 с.

Решение

Длину пути при разгоне самолета определим интегрированием скорости в пределах от нуля до $t = 10c$

$$S = \int_0^t \upsilon(t)dt = \int_0^t \upsilon_0\left(1 - e^{-\alpha t}\right)dt = \int_0^t \upsilon_0 dt - \upsilon_0 \int_0^t e^{-\alpha t}dt = \upsilon_0 t - \frac{\upsilon_0}{\alpha}e^{-\alpha t}.$$

Произведя вычисления, получим

S=1260 м.

Задача 6. Две материальные точки движутся по одной прямой, совпадающей осью Оx. В начальный момент времени первая точка имела координату $x_{01} = 4$ м, а вторая $x_{02} = 8$ м. Скорости точек изменяются по законам

$$\upsilon_1 = bt + ct^2 \text{ и } \upsilon_2 = -bt + ct^2,$$

где $b = 1м/c^2$, $c = 2м/c^3$.

Определить ускорения точек в момент их встречи.

Решение

Условием встречи является равенство координат точек. Поэтому определим интегрированием кинематические уравнения их движения

$$x_1 = \int \upsilon_1 dt = \int (bt + ct^2)dt + C_1 = \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + C_1,$$

$$x_2 = \int \upsilon_2 dt = \int (-bt + ct^2)dt + C_2 = -\frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + C_2.$$

Константы C_1 и C_2 определим из начальных условий:

$$x_1(t=0) = x_{01} \text{ и } C_1 = x_{01};\ x_2(t=0) = x_{02} \text{ и } C_2 = x_{02}.$$

Тогда кинематические уравнения примут вид

$$x_1 = x_{01} + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3},\quad x_2 = x_{02} - \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3}.$$

В момент встречи координаты обеих точек равны $t = t_в$

$$x_{01} + \frac{bt_в^2}{2} + \frac{ct_в^3}{3} = x_{02} + \frac{bt_в^2}{2} + \frac{ct_в^3}{3}.$$

Выполнив преобразования, находим

$$t_в = \pm\sqrt{\frac{x_{01} - x_{02}}{b}}.$$

Выбирая положительное значение корня, получим $t_в = 2c$.

Ускорения первой и второй точек находим, взяв производные от скорости по времени

$$a_1 = b + 2ct \text{ и } a_2 = -b + 2ct.$$

Подставляя в эти уравнения значение времени встречи, получим ответ

$$a_1 = 9 м/c^2,\; a_2 = 7 м/c^2.$$

Задача 7. Тело брошено горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите радиус кривизны траектории тела через время $t = 1$с после начала движения. Найти нормальное, тангенциальное и полное ускорение в этот момент времени.

Решение

Выберем систему координат и покажем траекторию движения тела, его скорость, ускорение и его составляющие в некоторый момент времени t (рис.4).

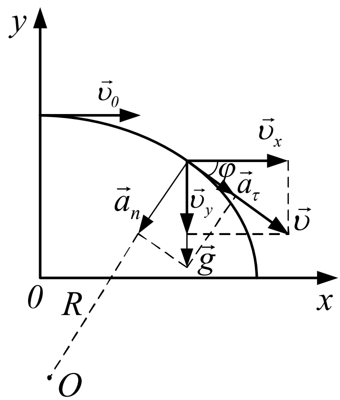


Рис.4

Проекции скорости на координатные оси и ее величина в данный момент времени будут равны

$$\upsilon_x = \upsilon_0,\; \upsilon_y = gt,$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}.$$

Полное ускорение тела и его нормальная составляющая

$$a = g,\quad a_n = g\cos\varphi = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где $\cos\varphi = \upsilon_0 / \upsilon$.

Произведя подстановку, получим окончательно

$$R = \frac{\left(\upsilon_0^2 + g^2 t^2\right)^{3/2}}{g\upsilon_0}, \; R = 140 \text{ м}.$$

Задача 8. Тело бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: зависимость радиус-вектора тела от времени $\vec{r}(t)$; вектор средней скорости $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ за первые t секунд и за все время движения.

Решение

Уравнение движения $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}$, где $\vec{g}$- ускорение свободного падения. При первом интегрировании получим $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + \vec{\upsilon}_0$, а при втором: $\vec{r}(t) = \dfrac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{\upsilon}_0 t$.

Вектор средней скорости за первые t секунд будет равен

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(0)}{t - 0} = \frac{\vec{r}(t)}{t} = \frac{\vec{g}t}{2} + \vec{\upsilon}_0.$$

Задача 9. Якорь электродвигателя, вращающийся с частотой n=100с$^{-1}$, после выключения тока остановился, сделав N=628 оборотов. Определить угловое ускорение якоря.

Решение

Кинематические уравнения равнозамедленного вращательного движения якоря имеют следующий вид

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \; \omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Учитывая, что $\omega_0 = 2\pi n$, $\omega = 0$, а количество оборотов связано с углом поворота соотношением $\varphi = 2\pi N$, получим

$$2\pi N = 2\pi nt - \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{и} \quad 2\pi n = \varepsilon t\ .$$

Решая данную систему уравнений относительно ε, найдем

$$\varepsilon = \frac{\pi n^2}{N} = 50\ \text{рад/с}^2.$$

Задача 10. Колесо турбины раскручивается из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}1 рад/с^2$. Определите величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии R=0,5м от оси вращения, через 5с после начала движения турбины? Сколько оборотов успеет сделать турбина к этому времени?

Решение

Полное ускорение точки при вращательном движении равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\ ,$$

где $a_\tau = \varepsilon R$ и $a_n = \omega^2 R$.

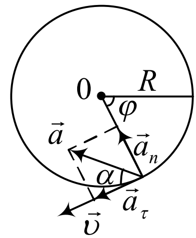


Рис.5

Угловую скорость определим, интегрируя угловое ускорение

$$\omega = \int_0^t \varepsilon dt = \varepsilon t\ .$$

Модуль полного ускорения рассчитаем по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = \varepsilon R\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4} = 0{,}13\ \text{м/с}^2.$$

Вектор полного ускорения точки $\vec{a}$ образует с вектором линейной скорости $\vec{\upsilon}$ угол α (рис.5). Тангенс данного угла выразим через отношение нормального и тангенциального ускорения.

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2 R}{\varepsilon R} = \varepsilon t^2 = 2{,}5 .$$

За время t колесо турбины повернется на угол

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \varepsilon t dt = \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Количество оборотов турбины связано с углом поворота соотношением $N = \varphi / 2\pi$, тогда

$$N = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = 0{,}2 .$$

Задача 11. Цилиндр радиуса R катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания с ускорением a. Определить скорость и ускорение точек A и B (рис.6) к моменту времени t после начала движения.

Решение

Движение тела считаем плоским, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. Наиболее удобным является разбиение такого движения на поступательное, происходящее со скоростью центра масс $\vec{\upsilon}_C$, и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через этот центр. В этом случае линейная скорость рассматриваемых точек равна

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_C + \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right],$$

где $\vec{\upsilon}_C$ - скорость поступательного движения цилиндра, $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения относительно оси, проходящей через центр цилиндра, $\vec{R}$ - радиус-вектор точки относительно центра.

К моменту времени t

$$\upsilon_C = at , \quad \omega = \frac{\upsilon_C}{R} = \frac{at}{R} .$$

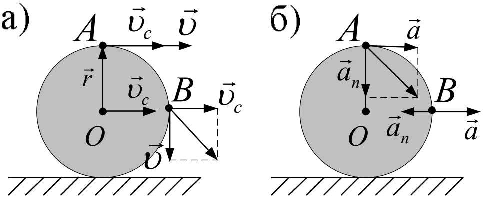


Рис.6

Модуль векторного произведения $\left[\vec{\omega}, \vec{R}\right]$ определяет величину линейной скорости вращения точки, направленной по касательной к окружности: $\upsilon = \omega R = at$.

Для точки A $\vec{\upsilon}_c$ и $\vec{\upsilon}$ имеют одно направление, поэтому $\upsilon_A = 2at$, тогда как для точки B они взаимно перпендикулярны и тогда

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_C^2 + \upsilon^2} = \sqrt{2}at \text{ (рис.6а).}$$

Теперь определим ускорения данных точек. Нормальное ускорение точек на поверхности цилиндра

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{a^2 t^2}{R}.$$

С учетом направлений нормальных ускорений точек A и B (рис.6) их полные ускорения будут равны

$$a_A = \sqrt{a^2 + \frac{a^4 t^4}{R^2}}, \quad a_B = a - \frac{a^2 t^2}{R}.$$

1.1.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Движение материальной точки описывается уравнениями $x(t) = 5\cos 2t$ см, $y(t) = 5\sin 2t$ см. Определить ускорение точки. [20 м/с^2]

2. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где A = 6 м/с, B = -0,125 м/с^2. Определить

среднюю скорость движения точки в интервале времени от t_1=2с до t_2 = 6с. *Примечание*. Проанализировать первоначально уравнение скорости движения и определить момент времени возврата точки. [3 м/с]

3. Уравнение движения материальной точки $x = t^4 + 2t^2 + 5$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конц5е второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время. [40м/с; 52 м/с^2; 12 м/с; 24 м]

4. Частица движется со скоростью $\vec{\upsilon} = At(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$, A = 1 м/с. Каков модуль ускорения в момент времени t = 1 с? [5,4 м/с^2]

5. Тело брошено под углом 30^0 к горизонту со скоростью 20 м/с. Чему равен радиус кривизны траектории а) в точке броска и б) в верхней точке траектории. Определить нормальное и тангенциальное ускорение в этих точках. [а) 47 м; $5\sqrt{3}$ м/с^2; 5м/с^2; б) 30 м; 0; 10м/с^2]

6. Радиус–вектор частицы изменяется по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$ (м). Найти: а) векторы скорости $\vec{\upsilon}$ и ускорения $\vec{a}$; б) модуль скорости υ в момент t = 1 с. [6,3 *м/с*]

7. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$. Чему равен модуль углового ускорения в момент остановки тела? [12 рад/с^2]

8. Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = 3 + 2t + t^3$. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через t = 2 с после начала движения следующие величины: а) угловую скорость, б) линейную скорость, в) угловое ускорение, г) тангенциальное ускорение, д) нормальное ускорение. [14 рад/с, 1,4 м/с, 12 рад/с^2, 1,2 м/с^2, 19,6 м/с^2]

Второй уровень сложности

1. Уравнение движения точки $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$. Найти: а) уравнение траектории точки $y = f(x)$, построить траекторию и указать направление движения; б) зависимости от времени скорости $\vec{\upsilon}$, ускорения $\vec{a}$, и модулей этих величин.

2. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости υ по закону $a = c\sqrt{\upsilon}$, где с – положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна υ_0. Какой путь она пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден? [$(2/3c)\upsilon_0^{3/2}$; $t = 2\sqrt{\upsilon_0/c}$]

3. При экстренном торможении скорость автомобиля начинает изменяться по закону $\upsilon = Ae^{-bt} - B$, где $A = 100$ м/с, $B = 80$ м/с, $b = 0{,}1$ с$^{-1}$. Найдите время движения автомобиля до остановки, максимальное значение ускорения в процессе торможения. Определить зависимость ускорения от скорости и построить соответствующий график. [2,2 с; $a = -b(\upsilon + B)$]

4. Ускорение космического аппарата, вошедшего в плотные слои атмосферы некоторой планеты, начиная с момента срабатывания тормозной системы, изменяется по закону $a = -Ae^{bt}$, где $A = 2$ м/с^2, $b = 0{,}05$ с$^{-1}$. Скорость аппарата в указанный момент времени была равна $\upsilon = 1500$ м/с. Какое время длилось торможение аппарата до остановки? Постройте графики зависимостей скорости от времени и ускорения от скорости. [72,5 с]

5. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью υ_0 = 30 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в конце второй

секунды после начала движения. [υ=35,8 м/с, a_τ=5,37 м/с^2, a_n = 8,22 м/с^2]

6. С башни высотой h=30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью υ_0=10 м/с. Определите: 1) уравнение траектории тела; 2) скорость тела в момент падения на землю; 3) угол, который образует эта скорость с горизонтом в точке его падения. [$y = \frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$; 26,2м/с; 67,6^0]

7. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At - Bt^3$, где A = 6,0 рад/с, B = 2,0 рад/с^3. Найти средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от начала движения до остановки. Определить угловое ускорение в момент остановки тела. [4 рад/с, -6 рад/с^2, -12 рад/с^2]

8. Число оборотов ротора центрифуги достигает $n = 2\cdot10^4$ об/мин. После отключения двигателя вращение прекращается через t = 8 мин. Найдите угловое ускорение и зависимость угла поворота центрифуги от времени, считая движение равнопеременным. [4,36 с$^{-2}$, φ=2,18t^2]

1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

1.2.1. Основные положения

- Инерциальная система отсчета – система отсчета, относительно которой тело, свободное от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно (первый закон Ньютона).
- Динамические характеристики тела при поступательном движении:

m - масса – мера инертности тела;

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ - импульс тела (количество движения) – векторная величина, равная произведению массы на скорость;

$\vec{F}$ - сила – векторная величина, характеризующая действие одного тела на другое;

$\vec{F}\Delta t$ - импульс силы – произведение вектора силы на время его действия.

- Основной закон динамики (второй закон Ньютона) – в инерциальной системе отсчета произведение массы тела на ускорение равно векторной сумме всех сил, действующих на тело

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i .$$

- Третий закон Ньютона – сила, с которой первое тело действует на второе, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Радиус-вектор и скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1} m_i \vec{r}_i ,$$

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1} m_i\vec{\upsilon}_i \,.$$

- Закон движения центра масс – центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \,.$$

- Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского):

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}\,.$$

- Уравнение движения тела в неинерциальной системе отсчета

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}\,,$$

где $\vec{a}'$ - ускорение относительно неинерциальной системы отсчета, $\vec{F}$ - результирующая всех реально действующих на тело сил, $\vec{F}_{ин}$ - сила инерции.

При поступательном движении с ускорением a_0 относительно инерциальной системе отсчета

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0\,;$$

При вращательном движении

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{к}\,,$$

где $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}$ - центробежная сила инерции, $\vec{F}_{к} = 2m[\vec{\upsilon}',\vec{\omega}]$ - сила Кориолиса.

1.2.2. Силы в механике

- Гравитационные силы.

Закон всемирного тяготения – между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}.$$

Сила тяжести – сила**,** равная произведению массы тела m на ускорение свободного падения g

$$\vec{F} = m\vec{g};$$

Вес тела – сила, с которой тело, находящееся в поле силы тяжести, действует на неподвижную относительно него опору или растягивает подвес.

- Сила упругости

Закон Гука – при упругих деформациях сила упругости пропорциональна абсолютной деформации:

$$F_x = -kx,$$

где k - коэффициент упругости, $x = \ell - \ell_0$ - абсолютное удлинение (сжатие).

Одноосное растяжение (сжатие)

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где $\sigma = \dfrac{F}{S}$ - нормальное напряжение, $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ - относительная деформация, E – модуль Юнга.

Сдвиг

$$\tau = G\gamma,$$

где $\tau = \dfrac{F}{S}$ касательное напряжение, γ - угол сдвига (относительный сдвиг), G - модуль сдвига.

Объемная плотность энергии упруго деформированного тела:

- деформация растяжения (сжатия)

$$w = \frac{\sigma^2}{2E};$$

- деформация сдвига

$$w = \frac{\tau^2}{2G}.$$

- Сила трения

Сила трения скольжения **-** сила, возникающая при относительном движении взаимодействующих тел:

$$F_{ск} = \mu N,$$

где μ - коэффициент трения скольжения, N - сила нормальной реакции опоры.

Сила трения покоя – сила, возникающая в отсутствии движения взаимодействующих тел:

$$F_n \le \mu \mathrm{N}.$$

Сила сопротивления – сила, возникающая при движении тела в жидкой или газообразной среде:

$$F_c = \eta \upsilon,$$

где η - коэффициент вязкого трения, υ - скорость тела.

1.2.3. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Прямая задача динамики.

Поступательное движение тел и простейших систем. Действующие силы постоянны. Нахождение сил, ускорений и других кинематических характеристик.

Метод решения включает следующую последовательность действий:

1. Сделать чертеж, показав на нем силы, действующие на все тела системы, и ускорения их движения.

2. Написать уравнения движения в векторном виде для каждого из тел системы в отдельности.

3. Выбрать систему координат (для каждого тела системы можно выбирать свою систему, направляя одну из осей по ускорению движения тела) и от векторных уравнений перейти к скалярным, заменяя вектора их проекциями.

4. Решить с учетом конкретных условий задачи систему получившихся скалярных уравнений. Получить искомый результат в аналитическом виде и провести его анализ.

5. Получить численный результат.

Тип 2. Обратная задача динамики.

Результирующая сила, действующая на тело, не постоянна и зависит от времени $F = f(t)$. Нахождение закона движения тела $r = f(t)$ или $\upsilon = f(t)$, если известны начальные условия.

Метод решения. Анализ действующих на тело сил, составление уравнения движения в виде $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = F(t)$ с последующим разделением переменных

$$d\upsilon = \frac{F(t)}{m}dt$$

и его интегрированием.

Тип 3. Обратная задача динамики. Результирующая сила, действующая на тело, не постоянна и зависит от скорости $F = f(\upsilon)$. Нахождение зависимости $\upsilon = f(t)$, если известны начальные условия.

Метод решения. Анализ действующих на тело сил и составление уравнения движения в виде $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = F(\upsilon)$. Приведение уравнения путем разделения переменных к виду

$$\frac{1}{F(\upsilon)}d\upsilon = \frac{1}{m}dt$$

Последующее интегрирование данного уравнения с учетом начальных условий позволяет получить зависимость скорости от времени.

Тип 4. Движение тел переменной массы.

Масса тела непрерывно изменяется из-за потери или приобретения вещества. Нахождение скорости тела.

Метод решения. Использование уравнения Мещерского

$$m(t)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt},$$

где $\mu = \frac{dm}{dt}$ - скорость изменения массы, $\vec{u}$ - относительная скорость отделяющихся (или присоединяющихся) частиц вещества, $\vec{F}$ - результирующая всех внешних сил, $\vec{\upsilon}$ - скорость тела с переменной массой.

Тип 5. Движение тел в неинерциальных системах отсчета.

Метод решения: анализ всех реально действующих на тело сил и сил инерции. Использование второго закона Ньютона для неинерциальных систем отсчета.

Тип 6. Упругая деформация твердого тела. Нахождение относительной и абсолютной деформации, энергии упруго деформированного тела и работы при упругом деформировании.

Метод решения. Применение закона Гука для основных видов деформации, использование формул для объемной плотности энергии упруго деформированного тела.

1.2.4. Примеры решения задач

Задача 1. На горизонтальной поверхности стола лежат два одинаковых бруска массой 1 кг каждый (рис.7). Бруски связаны нерастяжимой нитью, такая же нить связывает первый брусок с грузом массой m =0,5 кг. Коэффициент трения первого бруска о стол $\mu_1 = 0{,}1$, второго бруска $\mu_2 = 0{,}15$. Найти силу натяжения нити между брусками. Массой блока пренебречь.

Решение

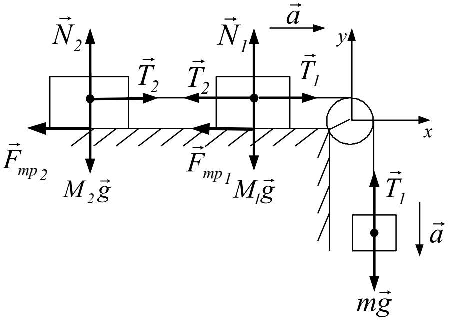


Рис. 7

Покажем на рисунке силы, действующие на каждое тело системы и направления их ускорений. Так как все тела связаны нерастяжимыми нитями, то модули ускорений будут равны.

Запишем II закон Ньютона в векторной форме для каждого из тел:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{1тр} + \vec{N}_1 + M_1\vec{g} = M_1\vec{a},$$

$$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{2тр} + M_2\vec{g} = M_2\vec{a},$$

$$\vec{T}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Выбрав оси координат, как показано на рисунке и проектируя векторные выражения на координатные оси x и y, получим:

$$\begin{cases} T_1 - T_2 - F_{1тр} = M_1 a; \\ N_1 = M_1 g; \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 - F_{2тр} = M_2 a; \\ N_2 = M_2 g; \end{cases} \quad -T_1 + mg = ma.$$

Учитывая, что $F_{1тр} = \mu_1 N_1$, $F_{2тр} = \mu_2 N_2$, находим

$$F_{1тр} = \mu_1 M_1 g\ ;\ F_{2тр} = \mu_2 M_2 g\ .$$

Тогда можно переписать систему уравнений

$$\begin{cases} T_1 - T_2 - \mu_1 M_1 g = M_1 a; \\ T_2 - \mu_2 M_2 g = M_2 a; \\ -T_1 + mg = ma. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, и учитывая, что $M_1 = M_2 = M$, получим:

$$T_2 = \frac{mg(1+\mu_2) + Mg(\mu_2 - \mu_1)}{(2 + \frac{m}{M})} = 3{,}3H.$$

Задача 2. В системе, показанной на рис.8, массы тел равны m_0, m_1 и m_2, трения нет, массы блоков пренебрежимо малы. Найти ускорение тела массой m_0 относительно стола и ускорения грузов m_1 и m_2 относительно подвижного блока.

Решение

Укажем все силы, действующие на грузы. Если считать нити, связывающие грузы, невесомыми и нерастяжимыми, а также пренебречь массой блоков, то силы натяжения нити с обеих сторон от каждого блока равны ($T_1=T_2=T$, $T_3=T_4=T'$). Выберем положительные направления координатных осей Оx и Оy, запишем в скалярном виде уравнения движения груза m_0 и системы грузов m_1 и m_2 в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$T = m_0 a_1\ ;$$

$$-T + m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) a_1\ .$$

Исключая из этих уравнений силу натяжения нити Т, получим

$$m_0 a_1 = (m_1 + m_2)(g - a_1)\ .$$

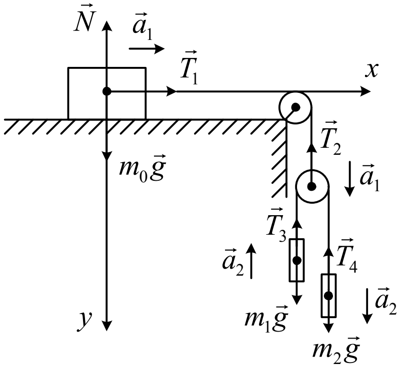


Рис. 8

Отсюда

$$a_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2 + m_0}.$$

Запишем уравнения движения грузов m_1 и m_2 в проекциях на ось Оy:

$$m_1 g - T' = m_1(a_1 - a_2),$$

$$m_2 g - T' = m_2(a_1 + a_2).$$

Решая систему уравнений с учётом выражения для a_1, получим

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1)m_0 g}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_0)}.$$

Задача 3. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска массами m_1 и m_2 (рис. 9). Коэффициенты трения между плоскостью и брусками равны соответственно μ_1 и μ_2, причем $\mu_1 > \mu_2$. Найти:

а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения;

б) значение угла α, при котором не будет скольжения.

Решение

Предположим, что бруски начинают движение с некоторым ускорением. Найдем силу взаимодействия между брусками в этом случае.

Все силы, действующие на бруски, показаны на рис.9. Второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме имеет вид

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_{тр1},$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{тр2}.$$

Выберем оси координат, направив ось Ox вдоль наклонной плоскости по ускорению движения брусков, и спроецируем полученные уравнения на координатные оси

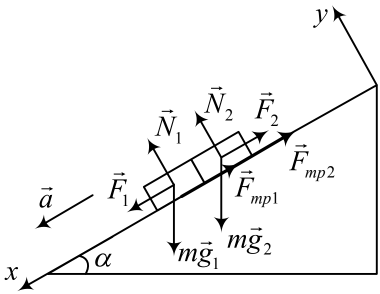


Рис.9

Ox: $m_1 a = m_1 g \sin\alpha + F_1 - F_{тр1}$

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha - F_2 - F_{тр2}$$

Oy: $N_1 = m_1 g \cos\alpha$

$$N_2 = m_2 g \cos\alpha$$

Учитывая, что $F_1 = F_2 = F$, а также $F_{тр1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos\alpha$ и $F_{тр2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos\alpha$ из системы уравнений найдем ускорение движения брусков

$$a = \frac{g\left[(m_1 + m_2)\sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha\right]}{m_1 + m_2}.$$

Сила взаимодействия между брусками в данном случае будет равна

$$F = m_1\left[a + g(\mu_1 \cos\alpha - \sin\alpha)\right].$$

В частности, при равномерном движении брусков

$$a = 0,\ F = m_1 g(\mu_1 \cos\alpha - \sin\alpha).$$

Значение угла α, при котором не будет скольжения определим из условия равенства скатывающих составляющих сил тяжести и сил трения покоя брусков

$$g(m_1 + m_2)\sin\alpha - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha = 0.$$

Откуда

$$tg\alpha = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

Задача 4. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ лежит тело массы m. В момент $t=0$ к нему приложили горизонтальную силу, зависящую от времени по закону $\vec{F}=\vec{b}t$, где $\vec{b}$ - постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы.

Решение

Выберем систему отсчета. Ось Ox направим по вектору $\vec{b}$, а точку O совместим с начальным положением тела, принимая его за материальную точку. Тело придет в движение, когда приложенная сила достигнет максимального значения силы трения покоя, равной силе трения скольжения т.е.

$$bt_0 = \mu mg .$$

Это произойдет в момент времени

$$t_0 = \frac{\mu mg}{b} .$$

Для $t > t_0$ тело будет двигаться с ускорением

$$a = \frac{F(t) - \mu mg}{m} = \frac{b(t - t_0)}{m} .$$

Скорость и координата тела при условиях $\upsilon(t_0) = 0$ и $x(t_0) = 0$ в произвольный момент времени t от начала действия силы найдем путем интегрирования

$$\upsilon(t \geq t_0) = \frac{b}{m}\int_{t_0}^{t}(t - t_0)dt = \frac{b(t - t_0)^2}{2m},$$

$$x(t \geq t_0) = \frac{b}{2m}\int_{t_0}^{t}(t - t_0)^2 dt = \frac{b(t - t_0)^3}{6m} .$$

Для $t > 0$ функция $x(t)$ монотонно возрастающая, поэтому

$$s(t) = x(t) = \frac{b(t - t_0)^3}{6m}.$$

Задача 5. Катер массой m=2т с двигателем мощностью N=50кВт развивает максимальную скорость $\upsilon_{\max} = 25$ м/с. Определить время, в течение которого катер после выключения двигателя потеряет половину своей скорости. Принять, что сила сопротивления движению катера изменяется пропорционально скорости (рис.10).

Решение

При движении катера с включенным двигателем на него действуют сила тяги $\vec{F}$ двигателя и сила сопротивления $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы тела и свойств окружающей среды (рис.1.10а). Так как скорость постоянна, то эти силы по модулю равны

$$F = F_c .$$

Сила тяги двигателя может быть выражена через его мощность и скорость движения следующим образом $F = N/\upsilon_{\max}$. Приравнивая выражения для силы тяги и силы сопротивления, выразим коэффициент сопротивления движению k

$$N/\upsilon_{max} = k\upsilon_{max} ,$$

$$k = \frac{N}{\upsilon_{max}^2} .$$

После выключения двигателя, катер начинает двигаться

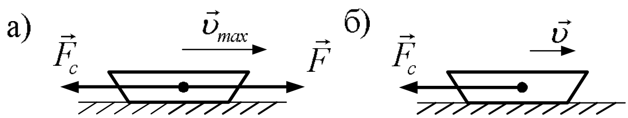


Рис.10

равнозамедленно под действием силы сопротивления (рис.10б). Уравнение движения тела в векторной форме будет иметь вид:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -k\vec{\upsilon} \ .$$

Спроектировав данное уравнение на направление движения, имеем

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \ .$$

После разделения переменных получим

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{kdt}{m} \ .$$

Проинтегрируем левую часть уравнения от υ_{max} до $0{,}5\upsilon_{max}$, а правую соответственно от нуля до t:

$$\int\limits_{\upsilon_{\max}}^{0,5\upsilon_{\max}} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int\limits_{0}^{t} -\frac{kdt}{m},$$

$$ln\frac{0{,}5\upsilon_{max}}{\upsilon_{max}} = -\frac{k}{m}t \ .$$

Окончательно, для t имеем

$$t = \frac{m}{k}ln\,2 = \frac{m\upsilon_{max}^2}{N}ln\,2 \ .$$

После подстановки числовых значений, получим t=17 с.

Задача 6. Модель ракеты движется при отсутствии внешних сил, выбрасывая непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью u=800м/с. Расход газа μ =0,4 кг/с, начальная масса ракеты m_0=1,2 кг. Какую скорость относительно Земли приобретет ракета через время t=1 с после начала движения?

Решение

Для решения этой задачи воспользуемся формулой Циолковского

$$\upsilon = u \ln \frac{m_0}{m}.$$

Масса ракеты к моменту времени t=1с после начала движения будет равна

$$m = m_0 - \mu t.$$

Подставив полученное значение массы в формулу Циолковского, получим

$$\upsilon = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}.$$

Расчет по этой формуле дает следующий результат

$$\upsilon = 324{,}4 \text{ м/с}.$$

Задача 7. Турбореактивные двигатели самолета выбрасывают из сопел струю газа плотностью ρ = 1,5 кг/м^3 с общей площадью поперечного сечения S=0,25 м^2 и скоростью u=300м/с относительно самолета. Определить установившуюся скорость полета самолета υ, если сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\alpha \vec{\upsilon}$, где α=56 кг/с.

Решение

Уравнение Мещерского в данной ситуации принимает следующий вид

$$m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\alpha \vec{\upsilon} + \vec{u} \frac{dm}{dt}.$$

При установившейся скорости полета $\upsilon = const$, а $\frac{d\upsilon}{dt} = 0$, поэтому уравнение Мещерского упрощается

$$\alpha \upsilon = u \frac{dm}{dt} \text{ или } \upsilon = \frac{u}{\alpha} \cdot \frac{dm}{dt}.$$

Убыль массы газа за время dt будет равна

$$dm = \rho dV = \rho S u dt .$$

С учетом этого, получим

$$\upsilon = \frac{\rho S u^2}{\alpha} \text{ и } \upsilon = 603 \text{ м/с.}$$

Задача 8. Тележка с песком движется в горизонтальном направлении под действием постоянной силы, совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается с постоянной скоростью μ кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

Решение

В условиях задачи $\mu = const$, количество песка убывает по закону $m = m_0 - \mu t$, а относительная скорость песка в горизонтальном направлении $\vec{u}$ равна нулю, т.к. элементы песка у отверстия в дне продолжают двигаться по инерции в горизонтальном направлении со скоростью тележки в тот же момент времени. В данном случае уравнение Мещерского приводится к виду

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F}{m_0 - \mu t} .$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\upsilon = -\frac{F}{\mu} \ln(m_0 - \mu t) + C .$$

При $t = 0$ $\upsilon = 0$ и постоянная $C = \frac{F}{\mu} \ln m_0$.

Итак, ускорение и скорость тележки в момент времени t равна

$$a = \frac{F}{m_0 - \mu t} ; \ \upsilon = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} .$$

Задача 9. Горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью ω=6 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется небольшое тело массой m=0,5 кг с постоянной относительно диска скоростью $\upsilon' = 0{,}5$ м/с. Определить силу, действующую на это тело в момент, когда оно находится на расстоянии r=0,3м от оси вращения.

Решение

На тело, находящееся на вращающемся диске и движущееся относительно него с постоянной скоростью, действуют центробежная сила инерции и сила Кориолиса. Центробежная сила инерции направлена вдоль радиуса и равна

$$F_ц = m\omega^2 r\ .$$

Сила Кориолиса, как это следует из ее векторного выражения, перпендикулярна скорости движения тела и направлена к нам (рис.11). Величина этой силы равна

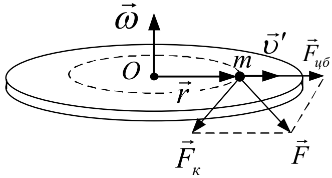


Рис.11

$$F_k = 2m\upsilon'\omega\ .$$

Таким образом, равнодействующая этих двух взаимно перпендикулярных сил определяется по теореме Пифагора

$$F = \sqrt{\left(m\omega^2 r\right)^2 + \left(2m\upsilon'\omega\right)^2} = 6{,}2H.$$

Задача 10. Тело массой m=1кг, падая свободно в течение τ=6с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi=60^0$. Учитывая вращение Земли

а) показать и определить все силы, действующие на тело в момент падения;

б) определить отклонение тела при его падении от вертикали.

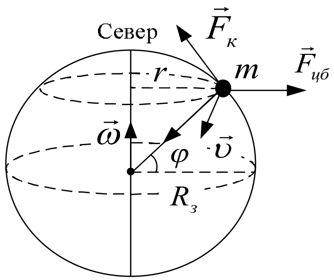


Рис.12

Решение

Все силы, действующие на тело в момент падения, показаны на рис.12.

Сила тяготения направлена к центру Земли и равна

$$F_m = G\frac{mM}{R_З^2},$$

где M, $R_З$ - масса и радиус Земли.

Центробежная сила инерции направлена вдоль радиуса от оси вращения. Величина этой силы определяется по формуле

$$F_ц = m\omega^2 r,$$

где $\omega = 2\pi / T$, $r = R_З \cos\varphi$.

После подстановки, получим

$$F_ц = \frac{4\pi^2 m R_З \cos\varphi}{T^2}.$$

Сила Кориолиса направлена на восток и равна

$$F_k = 2m\upsilon\omega \sin(\vec{\upsilon}, \vec{\omega}),$$

где $\sin(\vec{\upsilon}, \vec{\omega}) = \cos\varphi$.

В момент падения $\upsilon = g\tau$, поэтому

$$F_k = \frac{4\pi g \tau m \cos\varphi}{T}.$$

Для определения отклонения тела от вертикали при его падении учтем, что сила Кориолиса сообщает ускорение

$$a_k = \frac{F_k}{m} = \frac{4\pi g t \cos\varphi}{T}.$$

За время падения t горизонтальная составляющая скорости, направленная к востоку, будет равна

$$\upsilon_k = \int_0^t a_k dt = \frac{4\pi g \cos\varphi}{T} \int_0^t t dt = \frac{2\pi g t^2 \cos\varphi}{T} .$$

В результате за время τ тело сместится к востоку по горизонтали на расстояние

$$s = \int_0^\tau \upsilon_k dt = \frac{2\pi g \cos\varphi}{T} \int_0^\tau t^2 dt = \frac{2\pi g \tau^3 \cos\varphi}{3T} .$$

Проведенные вычисления дают следующий результат:

s=2,56 см.

Задача 11. Нижнее основание стального цилиндра диаметром d=20 см и высотой h=20 см закреплено неподвижно. На верхнее основание действует горизонтальная сила F=20 кН. Найти: 1) тангенциальное напряжение в материале цилиндра, 2) смещение верхнего основания цилиндра, 3) потенциальную энергию и объемную плотность деформированного образца.

Решение

Тангенциальное напряжение материала деформированного образца выражается формулой

$$\tau = \frac{F}{S} .$$

В данном случае $S = \pi d^2 / 4$, поэтому получим

$$\tau = \frac{4F}{\pi d^2} .$$

Сделав вычисления, найдем

$$\tau = 0{,}64 МПа.$$

Смещение верхнего основания цилиндра будет равно

$$\Delta x = h \cdot tg\gamma \approx h\gamma ,$$

где γ - угол сдвига.

В соответствии с законом Гука

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

где $G = 8{,}1.10^{10}$ Па - модуль сдвига стали.

Произведя подстановку, получим

$$\Delta x = \frac{4Fh}{\pi G d^2}.$$

Выполнив вычисления, найдем

$$\Delta x = 1{,}6 \text{ мкм}.$$

Потенциальная энергия и объемная плотность энергии деформированного образца определятся по формулам

$$U = wV \text{ и } w = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Сделав вычисления, получим, U=159 мДж, w= 2,5 Дж/м^3.

Задача 12. Определить относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа A=6,9 Дж. Длина стержня ℓ=1 м, площадь поперечного сечения S=1 мм^2, модуль Юнга для алюминия E=69 ГПа.

Решение

Работа, затраченная при растяжении стержня, переходит в его упругую потенциальную энергию

$$A = U = \frac{\sigma^2}{2E} V,$$

где σ - нормальное напряжение деформированного образца, $V=Sl$ – его объем.

В соответствии с законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon.$$

После подстановки и преобразований, найдем

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2A}{ESl}}.$$

Вычисления дают $\varepsilon = 0{,}014$.

Задача 13. Стальной цилиндрический стержень длины ℓ и радиуса r подвесили одним концом к потолку. Найти энергию U упругой деформации стержня и его удлинение под действием собственного веса.

Решение

Сила упругости, действующая в сечении стержня S, удаленном на расстояние x от его крепления, равна весу его нижней части

$$F(x) = mg\frac{\ell - x}{\ell} \ .$$

С другой стороны, она может быть выражена через нормальное упругое напряжение и закон Гука

$$F(x) = \sigma \cdot S = \varepsilon ES \,.$$

Приравнивая данные выражения и учитывая, что $m = \rho S\ell$, найдем относительную деформацию стержня, как функцию расстояния x от точки его крепления

$$\varepsilon ES = \frac{\rho g S\ell}{\ell}(\ell - x) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(x) = \frac{\rho g(\ell - x)}{E}.$$

Энергию упругой деформации стержня получим путем интегрирования объемной плотности энергии по всему объему стержня

$$U = \int\limits_V wdV = \int\limits_V \frac{E\varepsilon^2}{2}dV = \frac{\rho^2 g^2 S}{2E}\int\limits_0^\ell (\ell - x)^2 dx = \frac{\rho^2 g^2 S\ell^3}{6E} \,.$$

С учетом того, что $S = \pi r^2$, окончательно имеем

$$U = \frac{\pi(\rho g r)^2 \ell^3}{6E} \,.$$

Удлинение стержня под действием собственного веса определим через среднее значение его относительной деформации

$$\Delta\ell = <\varepsilon> \ell \,,$$

среднюю относительную деформацию получим при интегрировании $\varepsilon(x)$ по всей длине стержня

$$< \varepsilon >= \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \varepsilon(x)dx = \frac{\rho g}{\ell E}\int_0^\ell (\ell - x)dx = \frac{\rho g \ell}{2E} .$$

Таким образом, удлинение стержня будет равно

$$\Delta\ell = \frac{\rho g \ell^2}{2E} .$$

Задача 14. Найти энергию упругой деформации стального стержня, у которого один конец закреплен, а другой закручен на угол $\varphi = 6{,}0^0$. Длина стержня $\ell = 1{,}0$ м, его радиус $R = 10$ мм.

Решение

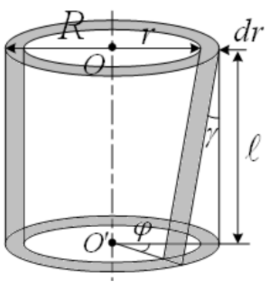


Рис.13

Первоначально установим связь между крутящим моментом M и углом закручивания стержня.

Выделим в стержне трубку радиусом r, толщиной dr и длиной ℓ (рис. 13). Площадь основания трубки

$$dS = 2\pi r dr ,$$

а момент упругих сил, действующих на это основание

$$dM = 2\pi r dr \tau r ,$$

где τ - тангенциальное напряжение в этом основании.

С учетом того, что каждый элемент трубки при закручивании сдвигается на угол

$$\gamma = \frac{r\varphi}{\ell} ,$$

то по закону Гука для деформации сдвига, получим

$$\tau = G\gamma = G\frac{r\varphi}{\ell} .$$

Таким образом, момент сил, действующих на выделенную трубку, равен

$$dM = \frac{2\pi G\varphi}{\ell} r^3 dr .$$

Полный момент сил, действующих на стержень, найдем интегрированием

$$M = \frac{2\pi G\varphi}{\ell}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G\varphi}{2\ell}R^4 .$$

Теперь можно приступить к нахождению энергии упругой деформации, определяя ее через работу крутящего момента

$$U = A = \int_0^{\varphi} Md\varphi = \frac{\pi GR^4}{2\ell}\int_0^{\varphi}\varphi d\varphi = \frac{\pi GR^4}{4\ell}\varphi^2 .$$

Подстановка числовых значений, дает следующий результат $U = 7$ Дж.

1.2.5. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Тело массой m движется в плоскости xy по закону x=Acosωt, y=Bsinωt, где A, B и ω – некоторые постоянные. Определите модуль силы, действующей на это тело. [$F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$]

2. На автомобиль массой m=1т во время движения действует сила трения, равная 10% от его силы тяжести. Найдите силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с ускорением a=1м/с^2 в гору с уклоном 1м на каждые 25м пути. [*2,4 кН*]

3. На горизонтальной поверхности расположены два соприкасающихся бруска с массами m_1=2кг и m_2=3кг (рис.14). Второй брусок толкают с силой F_0=10Н. Найдите силу, с которой бруски давят друг на друга, если коэффициент трения между первым бруском и плоскостью $\mu_1 = 0{,}1$, а между вторым бруском и плоскостью $\mu_2 = 0{,}2$. [2,8 Н].

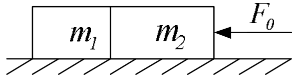


Рис.14

4. К нижнему концу легкой пружины подвешены связанные нитью грузы: верхний массой $m_1 = 0{,}5$ кг и нижний массой $m_2 = 0{,}2$ кг. Нить, соединяющую грузы, пережигают. С каким ускорением начнет двигаться верхний груз? [4 м/с^2]

5. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус кривизны которого равен R=200м. При гололеде коэффициент трения колес о покрытие дороги равен μ=0,1. При какой скорости автомобиля начнется его занос? [14 м/с]

Второй уровень сложности

1. Найти ускорение грузов в системе, если известны массы грузов m_1 и m_2 ($m_2>m_1$) и угол α, образуемый наклонной плоскостью с горизонтом (рис.15). Рассмотреть задачу при наличии трения.

$$[\, a = \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g \,]$$

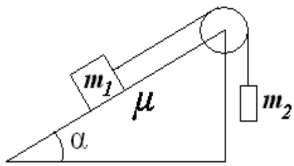


Рис. 15

2. Под каким углом α к горизонту нужно тянуть тяжелый ящик массы m для того, чтобы передвигать его волоком по горизонтальной поверхности с наименьшим усилием, если коэффициент трения равен μ? Найти значение этой минимальной силы. [$F_{min}=mg\sin\alpha,\ \alpha=\mathrm{arctg}\,\mu$]

3. На наклонной плоскости (рис.16) лежит брусок массой m. К нему приложена сила $F = 2mg$, направленная вдоль наклонной плоскости в сторону ее вершины. Коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью $\mu = \sqrt{3}/3$. При каком угле наклона ускорение бруска будет минимальным и чему равно это ускорение? [$\alpha = 60^0$, a=8,5 м/с^2]

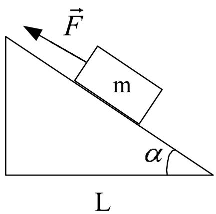


Рис. 16

4. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ лежит тело массы m. В начальный момент к нему приложили горизонтальную силу, зависящую от времени как $F = bt$. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы. [$S = (\frac{b^2}{3m} - \mu g)\frac{t^2}{2}$]

5. При падении тела с большой высоты его максимальная скорость 80 м/с. Через какое время от начала падения скорость тела станет 20м/с? Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости движения тела. [2,3 *с*]

6. Двигатель самолета на взлетной полосе обеспечивает силу тяги $F_т = 40$ кН. Масса самолета $m = 10^4$ кг. Взлет самолета разрешается при достижении скорости $\upsilon_0 = 360$ км/ч. Какова длина разгона самолета, если на него действует сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\alpha\vec{\upsilon}$, где $\alpha = 200$ Нс/м. [*S*=100 м]

7. Ракета массой m = 3 т, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, поднимается с ускорением $a = 2g$. Скорость u струи газов, вырывающихся из сопла, равна 1,2 км/с. Найти расход μ горючего. [$\mu = m(g + a)/u$]

8. Космический корабль имеет массу $m = 3500$ кг. При маневрировании из его двигателей вырывается струя газа со скоростью $\upsilon = 800$ м/с. Расход горючего $\mu = 0{,}2$ кг/с. Найдите ускорение корабля. [0,046 м/с^2]

9. Найти ускорение и скорость тележки, движущейся под действием горизонтальной силы *F*, если на тележке лежит песок, который высыпается через отверстие в платформе тележки со скоростью μ кг/с. В начальный момент тележка имела скорость $\upsilon_0 = 0$ и массу m_0.

[$a = \frac{F}{m_0 - \mu \cdot t}$; $\upsilon = \frac{F}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t}$]

10. Горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется тело массой m с постоянной относительно диска скоростью υ'. Найти силу, с которой диск действует на это тело в момент, когда оно находится на расстоянии R от оси вращения.

[$F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 R^2 + (2\upsilon'\omega)^2}$]

11. Небольшое тело падает без начальной скорости на Землю на экваторе с высоты h В какую сторону и на какое расстояние x отклонится тело от вертикали за время падения? Сопротивлением воздуха пренебречь. [$x = (2h\omega\sqrt{2h/g})/3$]

12. Найти энергию упругой деформации стального стержня массы $m = 3{,}1$ кг, который растянут так, что его относительное удлинение $\varepsilon = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$. [39,4Дж]

1.3. Механическая работа, мощность, энергия. Закон сохранения механической энергии

1.3.1. Основные положения

• Элементарная работа – скалярное произведение вектора силы на вектор элементарного перемещения:

$$\delta A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_\tau ds$$

• Работа переменной силы – определенный интеграл от функции $F_s(s)$ в пределах от s_1 до s_2:

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau(s) ds \,.$$

• Мощность – физическая величина, характеризующая скорость совершения работы:

$$N = \frac{dA}{dt} \,.$$

Мгновенная мощность – скалярное произведение вектора силы на вектор скорости:

$$N = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right).$$

• Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия, является функцией состояния системы. Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

В классической механике механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергии:

$$E(\vec{\upsilon}, \vec{r}) = T(\vec{\upsilon}) + U(\vec{r})$$

• Теорема об изменении кинетической энергии – изменение кинетической энергии равно работе всех сил, действующих на тело:

$$T_2 - T_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A_{12} \,.$$

• Консервативные и диссипативные силы.

Работа консервативных сил по замкнутой траектории перемещения равна нулю

$$A = \oint\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = 0\,.$$

Работа неконсервативных (диссипативных) сил зависит от траектории перемещения тела от одной точки к другой.

• Потенциальная энергия – энергия, зависящая от взаимного расположения и характера взаимодействия тел. Отсчитывается относительно нулевого уровня и определяется работой консервативных сил с точностью до некоторой произвольной постоянной:

$$U = -\int\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) + C\,.$$

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$A = -\Delta U = U_1 - U_2\,.$$

• Связь между силой и потенциальной энергией – консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:

$$\vec{F} = -gradU\,.$$

Градиент функции U есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности $U = const$ в сторону возрастания U, его длина численно равна производной по нормали функции U.

• Закон сохранения механической энергии – в замкнутой и консервативной системе полная механическая энергия сохраняется.

Изменение полной механической энергии равно работе всех неконсервативных сил.

1.3.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Определение механической работы переменной силы.

Метод решения. Прямое интегрирование выражения $A = \int_1^2 F_s ds$ или использование соотношения, связывающего приращение механической энергии с работой. Оба метода равноправны, выбор определяется условием конкретной задачи. Если характер сил взаимодействия неизвестен, то единственно возможным остается энергетический путь решения.

Тип 2. Нахождение силы, действующей на частицу в потенциальном поле и определение условий равновесия.

Метод решения. Использование соотношения, связывающего силу и потенциальную энергию; отыскание минимума и максимума потенциальной энергии.

Тип 3. Упругое и неупругое столкновение частиц.

Метод решения. Применение законов сохранения импульса и механической энергии. Следует иметь в виду, что закон сохранения импульса носит векторный характер, и применим только к замкнутым системам, т.е. к системам, на которые не действуют внешние силы (либо векторная сумма внешних сил равна нулю). Применение же закона сохранения механической энергии в свою очередь возможно только тогда, когда система не только замкнута, но и консервативна. Условие консервативности – отсутствие перехода механической энергии в другие виды. В частности, к неупругому удару закон сохранения механической энергии неприменим.

1.3.3. Примеры решения задач

Задача 1. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F} = (a\vec{i} + b\vec{j}), H$, где a и b – константы. Вычислить работу, совершаемую над частицей этой силой на пути от точки с координатами (1,2,3) м до точки с координатами (3,4,5) м.

Решение

В данной задаче известна сила, действующая на частицу. Поэтому следует напрямую воспользоваться формулой для определения работы.

Элементарная работа согласно определению равна скалярному произведению

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy .$$

Полную работу найдем путем интегрирования

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy = F_x(x_2 - x_1) + F_y(y_2 - y_1) .$$

Как следует из условия задачи, проекции силы на соответствующие координатные оси равны

$$F_x = a, \quad F_e = b, \text{ а}$$

$$(x_2 - x_1) = 3 - 1 = 2, \quad (y_2 - y_1) = 4 - 2 = 2 .$$

С учетом этого, окончательно имеем

$$A = 2a + 2b = 2(a + b) .$$

Задача 2. Тело массы m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 4t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$. Найти мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени *t*.

Решение

Мгновенная мощность

$$N(t) = (\vec{F}, \vec{\upsilon}) .$$

Вектор скорости тела к моменту времени найдем путем интегрирования ускорения по времени

$$\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{a}dt \,.$$

Вектор ускорения найдем из второго закона Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{4t}{m}\vec{i} + \frac{2t^2}{m}\vec{j} \,.$$

Подставляя найденное выражение в формулу для вектора скорости, имеем

$$\vec{\upsilon} = \frac{4\vec{i}}{m}\int_0^t tdt + \frac{2\vec{j}}{m}\int_0^t t^2 dt = \frac{2t^2}{m}\vec{i} + \frac{2t^3}{3m}\vec{j} \,.$$

С учетом полученного выражения мощность, развиваемая телом к моменту времени t равна

$$N(t) = ((4t\vec{i} + 2t^2\vec{j}),(\frac{2t^2}{m}\vec{i} + \frac{2t^3}{3m}\vec{j})) = \frac{8t^3}{m} + \frac{4t^5}{3m} \,,$$

$$N(t) = \frac{4t^3}{m}(2 + \frac{1}{3}t^2) \,.$$

Задача 3. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = ar^2$, где r – модуль радиус-вектора частицы, a - константа. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу, и работу, совершаемую над частицей при переходе ее из точки M(1,2,3) в точку N(2,3,4).

Решение

Для нахождения силы, действующей на частицу, воспользуемся связью силы с потенциальной энергией. Вектор силы равен градиенту потенциальной энергии с обратным знаком

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \,, \; \vec{F} = -(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}) \,.$$

Учитывая, что $U = ar^2 = a(x^2 + y^2 + z^2)$, частные производные потенциальной энергии по координатам будут равны

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2ax\,,\ \ \frac{\partial U}{\partial y}=2ay\,,\ \frac{\partial U}{\partial z}=2az\,.$$

Тогда вектор силы действующей на частицу

$$\vec{F}=-a(\vec{i}\,2x+\vec{j}\,2y+\vec{k}\,2z)=-2a\vec{r}\,,$$

где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Для нахождения работы в поле консервативных сил применим энергетический подход. Работа, совершаемая над частицей при переходе ее из точки M(1,2,3) в точку N(2,3,4) равна убыли потенциальной энергии, т.е.

$$A=-\Delta U=a(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-a(x_2^2+y_2^2+z_2^2)=$$
$$=a(1+4+9)-a(4+9+16)=-15a\,.$$

Задача 4. Частица массой $m=1$ кг начинает двигаться по закону $x=5t^2+2t+1$ (м). Найти работу, совершаемую действующей на частицу силой, за время $t=1$ с.

Решение

На примере этой задачи покажем, как можно решить ее двумя способами.

Силовой подход. На основании закона движения определим ускорение и силу: $a=x''=10$ (м/с^2). $F=ma=10$ Н.

Поскольку функция $x(t)$ является монотонно возрастающей, то путь, пройденный частицей, найдем как разность координат в момент времени $t=1$ с и начальный момент времени ($x(t)$ -функция монотонно возрастающая)

$$s=x(t)-x_0=7\text{ (м)}.$$

Таким образом, механическая работа равна

$$A=F\cdot s=70\text{ (Дж)}.$$

Энергетический подход. По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$A=\Delta E_k=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}\,.$$

Зависимость скорости частицы от времени найдем на основании кинематического уравнения движения

$$\upsilon = x' = 10t + 2,$$

отсюда $\upsilon_0 = 2$ (м/с), а $\upsilon = 12$ (м/с).

Подстановка этих значений в формулу, определяющую работу через разность кинетических энергий, дает тот же результат.

Задача 5. Какова минимальная работа, которую надо затратить, чтобы втащить волоком тело массы m на горку длины L и высоты H? Коэффициент трения равен μ.

Решение

Чтобы втащить волоком тело массы m на горку длины L и высоты H, необходимо совершить работу против силы тяжести и силы трения. Следовательно

$$A = A_{тр} + A_{тяж}.$$

По определению эти работы соответственно равны

$$A_{тр} = F_{тр}L = \mu mgL cos\alpha,\ A_{тяж} = mgH.$$

После подстановки, получим

$$A = mg(H + \mu L\, cos\,\alpha),$$

где

$$cos\,\alpha = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{L}.$$

Задача 6. К стальной проволоке радиусом $r = 1$ мм подвесили груз массой $m = 100$ кг. На какой наибольший угол можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении этим грузом положения равновесия? Предел прочности стали $\sigma_{пр} = 785$ МПа.

Решение

Выполним рисунок, представив на нем положение груза в отклоненном положении на наибольший угол α и при

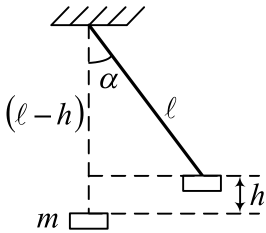


Рис.17

прохождении им положения равновесия (рис.17). Из рисунка видно, что

$$\cos\alpha = \frac{\ell - h}{\ell} = 1 - \frac{h}{\ell},$$

тогда

$$\alpha = ar\cos(1 - \frac{h}{\ell}).$$

Высоту h найдем из закона сохранения механической энергии

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad h = \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

При прохождении грузом положения равновесия по второму закону Ньютона

$$\frac{m\upsilon^2}{\ell} = T - mg,$$

где $T = \sigma_{пр} \cdot S = \sigma_{пр} \cdot \pi r^2$ - предельное натяжение проволоки, выраженное через предел ее прочности.

Откуда

$$\upsilon^2 = \frac{(\pi\sigma_{пр} r^2 - mg)\ell}{m}$$

и

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{(\pi\sigma_{пр} r^2 - mg)\ell}{2mg}.$$

Таким образом, угол, на который можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении этим грузом положения равновесия, равен

$$\alpha = ar\cos\left[1 - \frac{(\pi\sigma_{пр} r^2 - mg)}{2mg}\right].$$

Произведя вычисления, найдем $\alpha = 75^0 30'$.

Задача 7. Радиус малой планеты $R = 100$ км, средняя плотность вещества планеты $\rho = 3000$ кг/м^3. Определить вторую космическую скорость у поверхности этой планеты.

Решение

Второй космической скоростью υ_2 называется минимальная скорость, которую необходимо сообщить ракете, чтобы она удалилась с поверхности планеты в бесконечность. При этом сопротивление атмосферы не учитывается и предполагается, что на ракету действует только поле тяготения планеты.

Применим закон сохранения полной механической энергии для двух состояний ракеты, момента старта и ее расположения на бесконечно большом расстоянии от планеты:

$$T + U = T_\infty + U_\infty ,$$

где $T = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2}$ - кинетическая энергия ракеты в момент старта; $U = -G\dfrac{mM}{R}$ - потенциальная энергия ракеты на поверхности планеты, обусловленная действием силы тяготения; $T_\infty = 0,\quad U_\infty = 0$ - кинетическая и потенциальная энергия ракеты в бесконечности, принятые равными нулю.

С учетом этого, имеем

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0 ,$$

и находим

$$\upsilon_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} .$$

Массу планеты определим, зная ее плотность

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho .$$

После подстановки, найдем вторую космическую скорость для данной планеты

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{8\pi G\rho R^2}{3}} = 130 \text{ м/с}.$$

Задача 8. Частица массы m_1 испытывает упругое центральное столкновение с неподвижной частицей массы m_2. Какую долю своей энергии ε первая частица передала второй?

Решение

Доля энергии, переданная первой частицей при столкновении со второй, выразится соотношением:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2},$$

где T_1 - кинетическая энергия первой частицы до столкновения, T_2 - приобретенная кинетическая энергия второй частицей.

При упругом столкновении выполняются законы сохранения механической энергии и импульса. Применяя эти законы, получим следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 \upsilon_1^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}, \\ m_1 \upsilon_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases}$$

где υ_1 и u_1 - скорости первой частицы до и после столкновения соответственно, u_2 - скорость второй частицы после столкновения.

Решая совместно уравнения, найдем

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

С учетом полученного выражения доля энергии, переданная первой частицей при столкновении со второй, будет равна

$$\varepsilon = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

1.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Вычислить работу, совершаемую на пути S=12м равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила F_1=10 Н, в конце пути F_2=46 Н.[336 Дж]

2. Тело массой m =1,0 кг падает с высоты h = 20 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: среднюю по времени мощность $\langle N \rangle$, развиваемую силой тяжести на пути h; мгновенную мощность N на высоте $h/2$.[97 Вт; 137 Вт]

3. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F} = a\vec{i}$, где a=*const*. Вычислить работу, совершаемую над частицей этой силой на пути от точки C (1, 2, 3) м до точки D (7, 8, 9) м. [6a Дж]

4. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Найти мощность, развиваемую силой в момент времени t. [$N(t) = \left(2t^3 + 3t^5\right)/m$]

5. Пуля массой $m = 10$ г попадает в подвешенный на нити покоящийся брусок и застревает в нем. Масса бруска $M = 0{,}1$ кг. Какая доля механической энергии потеряна при ударе? [0,2]

6. Два шарика с массами 3 кг и 5 кг движутся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями 4 м/с и 6 м/с соответственно. Найти изменение внутренней энергии шаров после неупругого столкновения. [12]

Второй уровень сложности

1. На частицу, движущуюся горизонтально, действует сила, которая зависит от пройденного пути как $\mathrm{F} = \alpha\sqrt{\mathrm{S}}$. Найти работу, которую совершила эта сила на участке от S_1=0 до S_2=S. [$\frac{2}{3}\alpha S^{3/2}$]

2. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = (kr^2)/2$, где r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ частицы; k –константа ($k > 0$). Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу, и работу A, совершаемую над частицей при переходе ее из точки B(1, 2, 3) в точку C(2, 3, 4). [$\vec{F} = -k\vec{r}$, A = -7,5 k]

3. Сила упругости некоторой пружины записывается в виде $F_x = -kx + ax^2 + bx^3$. Записать функцию потенциальной энергии. [$U_x = \frac{kx^2}{2} - \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^4}{4}$]

4. Вагон массой m=20т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью υ_0=54 км/час, под действием силы трения F=6 кН через некоторое время останавливается. Найти работу силы трения и расстояние, которое вагон пройдет до остановки. [A=2,25 МДж; S=375 м]

5. Шар массой m_1=5*кг* движется со скоростью υ_1 =2 *м/с* и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 =3 *кг*. Вычислить работу, совершенную при деформации шаров при прямом центральном ударе. Удар считать неупругим. [3,75 Дж]

6. Шар массой 0,2 кг, движущийся со скоростью 10 м/с, ударяет неподвижный шар массой 0,8 кг. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости шаров после удара? [6 м/с и 4 м/с]

7. Шар массой m_1=6 кг движется со скоростью υ_1 =2 *м/с* и сталкивается с шаром массой m_2 = 4 кг, который движется ему навстречу со скоростью υ_2 = 5 *м/с*. Найти скорость шаров после прямого центрального удара. Удар считать абсолютно упругим.[3,6 м/с, 3,4 м/с]

1.4. Динамика вращательного движения. Законы сохранения момента импульса и механической энергии при вращательном движении

1.4.1. Основные положения

• Момент силы относительно неподвижной точки – вектор, равный векторному произведению радиус-вектора, проведенного из точки О в точку приложения силы, на силу

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Момент силы относительно неподвижной оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы:

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z .$$

Значение M_z не зависит от выбора точки О на оси *Z*.

• Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки О – векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора материальной точки, проведенной из точки О, на импульс этой материальной точки

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right].$$

Момент импульса материальной точки, движущейся по окружности

$$L = m\upsilon r .$$

• Момент инерции тела относительно неподвижной оси – сумма произведений элементарных масс на квадраты расстояний от них до оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 , \; I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV .$$

• Моменты инерции простейших тел относительно оси проходящей через центр масс

Тело	Формула
Кольцо радиусом R	$I = mR^2$
Сплошной цилиндр радиусом R	$I = \dfrac{mR^2}{2}$
Шар радиусом R	$I = \dfrac{2mR^2}{5}$
Прямой тонкий стержень длиной ℓ	$I = \dfrac{m\ell^2}{12}$

• Теорема Штейнера – момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + md^2 .$$

• Кинетическая энергия вращающегося тела

$$T = \frac{I\omega^2}{2} .$$

Кинетическая энергия при плоском движении

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} .$$

• Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$M_z = I_z\varepsilon = I_z\frac{d\omega}{dt} = \frac{dL_z}{dt} .$$

• Работа при вращательном движении

$$\delta A = M_z d\varphi , \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi .$$

• Аналогия между динамикой поступательного и вращательного движений

Поступательное движение	Вращательное движение
m	$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$
$\vec{F}$	$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$
$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	$L_z = I_z \omega$
$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
$\delta A = F_s ds$	$\delta A = M_z d\varphi$
$T = \frac{m\upsilon^2}{2}$	$T = \frac{I\omega^2}{2}$

1.4.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Вычисление моментов инерции тел правильной геометрической формы и простейших систем.

Метод решения. Непосредственное интегрирование выражения для момента инерции тела относительно оси проходящей через центр масс

$$I = \int \rho r^2 dV,$$

с последующим применением теоремы Штейнера для нахождения момента инерции тела относительно произвольной оси.

Момент инерции простейших систем рассчитывается на основе принципа аддитивности, согласно которому момент инерции системы относительно произвольной оси равен алгебраической сумме моментов инерции всех тел, входящих в данную систему.

Тип 2. Вращательное и поступательное движение тел и простейших систем. Действующие силы постоянны.

Нахождение сил, ускорений и других кинематических характеристик.

Метод решения. В большинстве случаев алгоритм решения при вращательном движении аналогичен алгоритму при поступательном движении механической системы.

1. Необходимо сделать чертеж, показав на нем силы, действующие на все тела системы, и ускорения их движения.

2. Получить в скалярной форме уравнения для поступательного и вращательного движения каждого из тел системы в отдельности.

3. Решить с учетом конкретных условий задачи систему получившихся уравнений. Получить искомый результат в аналитическом виде и провести его анализ.

4. Получить численный результат.

Тип 3. Определение работы при вращательном движении.

Метод решения. Прямое интегрирование выражения для работы

$$A = \int M_z d\varphi ,$$

либо использование энергетического подхода

$$A = \Delta E = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} .$$

Тип 4. Упругое или неупругое взаимодействие тел при вращательном движении.

Метод решения. Применение законов сохранения механической энергии и момента импульса системы.

В тех случаях, когда характер сил взаимодействия неизвестен, только законы сохранения позволяют составить уравнения, связывающие параметры состояния системы, и найти по известным параметрам системы в одном состоянии ее параметры в другом состоянии.

При использовании законов сохранения следует обращать внимание на возможность применения того или иного из этих законов. Закон сохранения момента импульса системы тел, совершающих вращение вокруг одной и той же неподвижной оси вращения, выполняется в тех случаях, когда сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю. Применение же закона сохранения энергии, как и при поступательном движении, возможно только тогда, когда система не только замкнута, но и консервативна (отсутствует переход механической энергии в другие виды). В частности, к неупругому соударению закон сохранения механической энергии неприменим.

1.4.3. Примеры решения задач

Задача 1. Рассчитать момент инерции однородного круглого диска массой m и радиусом R относительно оси диска.

Решение

Момент инерции твердого тела зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения. При непрерывном распределении массы тела вычисление момента инерции сводится к интегрированию по объему тела.

Для осуществления интегрирования в данном случае выделим элемент тела в виде кольца радиуса r, ширины dr и толщины, равной толщине диска b (рис.18). Объем такого кольца

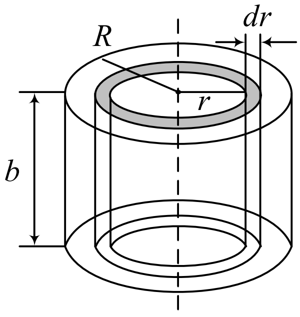


Рис.18

$$dV = 2\pi brdr\,,$$

а его момент инерции

$$dI = \rho r^2 dV = 2\pi b\rho r^3 dr\,,$$

где ρ - плотность тела.

Момент инерции всего диска определится интегралом

$$I = 2\pi b\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi b\rho R^4\,.$$

Ввиду однородности диска

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 b}.$$

С учетом этого, получим окончательно

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Задача 2. Вычислить момент инерции однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии, если масса конуса m и радиус его основания R.

Решение

Выполним рисунок и введем необходимые обозначения (рис.19). Пусть высота конуса равна h, ось симметрии ось Z, угол между осью Z и образующими конуса α. В качестве элемента интегрирования в данном случае выберем диск радиуса $r = ztg\alpha$ и бесконечно малой толщины dz.

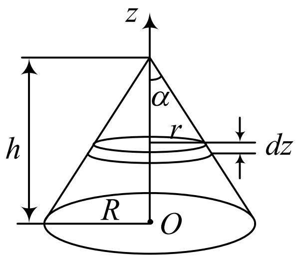


Рис.19

Масса этого элемента равна

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dz = \pi\rho tg^2\alpha z^2 dz.$$

Плотность конуса выразим через его массу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 h} = \frac{3mtg\alpha}{\pi R^3}.$$

Следовательно, момент инерции выделенного элемента равен

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{3mtg^5\alpha}{2R^3}z^4 dz.$$

Момент инерции конуса найдем интегрированием

$$I = \frac{3mtg^5\alpha}{2R^3}\int_0^h z^4 dz = \frac{3mtg^5\alpha}{10R^3}h^5.$$

С учетом того, что

$$h = \frac{R}{tg\alpha},$$

Получим окончательно

$$I = \frac{3}{10} mR^2 .$$

Задача 3. Однородный диск радиуса R, толщиной h и плотностью ρ имеет сквозное круглое отверстие радиусом $r = \frac{R}{2}$, центр которого лежит на середине радиуса диска (рис.20). Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр диска.

Решение

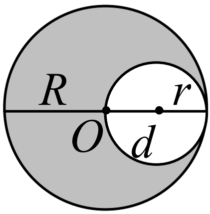


Рис.20

Момент инерции тела с отверстием или полостью можно представить в виде

$$I = I_o - I_1,$$

где I_0 и I_1 - моменты инерции сплошного тела и вырезанной части тела относительно указанной оси.

Момент инерции целого диска равен

$$I_0 = \frac{m_0 R^2}{2},$$

где $m_0 = \rho\pi R^2 h$ - масса диска.

Так как отверстие смещено относительно оси вращения, то момент инерции вырезанной части диска найдем с помощью теоремы Штейнера

$$I_1 = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1 d^2,$$

где $m_1 = \rho\pi r^2 h$ - масса вырезанной части диска; $r = R/2$ - радиус отверстия; $d = R/2$ расстояние между осями.

С учетом вышесказанного получим

$$I = I_0 - I_1 = \frac{m_0 R^2}{2} - (\frac{m_1 r^2}{2} + m_1 d^2).$$

После подстановки соответствующих значений и выполнив преобразования, получим

$$I = 0{,}4\pi\rho h R^4.$$

Задача 4. Через блок в виде диска массой m_0 перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами m_1 и m_2 $(m_2 > m_1)$. Найти ускорение грузов. Трением пренебречь.

Решение

Выполним чертеж, показав на нем все силы, действующие на грузы и блок, и ускорения движения (рис.21). Применим к решению задачи основные законы динамики поступательного и вращательного движения. В скалярной форме уравнения примут вид

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2,$$

$$I\varepsilon = r(T_2 - T_1).$$

Если нет проскальзывания нити по блоку, то линейное и угловое ускорение связаны между собой соотношением

$$\varepsilon = a / r.$$

Решая эти уравнения, получим

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I / r^2} g.$$

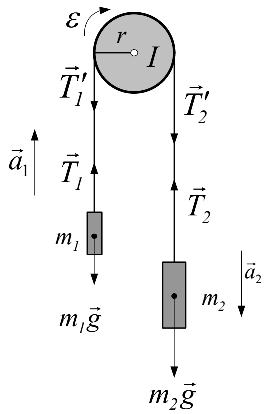


Рис. 21

Задача 5. К шкиву креста Обербека (рис.22) прикреплена нить, к которой подвешен груз массой $M = 0{,}5$ кг. Определить за какое время груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза массой m=250 г каждый на расстоянии R = 30 см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов.

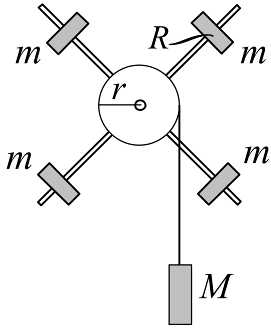


Рис.22

Решение

Составим уравнения динамики для данной системы:

$$Ma = Mg - T,$$

$$I\varepsilon = Tr.$$

Угловое ускорение шкива связано с ускорением груза соотношением $\varepsilon = a/r$, а момент инерции грузов креста Обербека равен $I = 4m\ R^2$.

Подставляя данные выражения и решая систему уравнений относительно ускорения, получим

$$a = \frac{Mr^2}{4mR^2 + Mr^2} g.$$

Время опускания груза определяется из уравнения пути равноускоренного движения

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Вычисления дают t=4,47с.

Задача 6. Однородный шар скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. Найти ускорение центра инерции шара.

Решение

Решим данную задачу двумя способами, как непосредственным использованием основных уравнений динамики для поступательного и вращательного движений, так и с помощью законов сохранения.

<u>1-й способ</u>.

На шар действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис.23). Последняя, являясь силой трения покоя, создает вращающийся момент относительно мгновенной оси, проходящей через центр инерции шара.

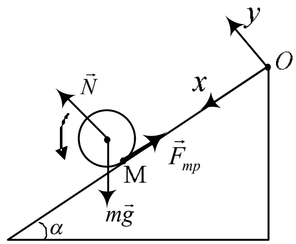


Рис. 23

Следовательно, шар совершает плоское движение, представляющее сумму поступательного движения центра масс шара и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс.

Уравнение динамики поступательного движения в проекции на ось x имеет вид

$$ma_c = mg\sin\alpha - F_{тр},$$

где a_c - ускорение цента масс.

В силу того, что вращательный момент относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс, создается только силой трения, основное уравнение динамики вращательного движения шара, запишется следующим образом

$$I_c\varepsilon = RF_{тр}.$$

Учитывая, что момент инерции шара $I = \frac{2}{5}mR^2$ и угловое ускорение $\varepsilon = \frac{a_c}{R}$, получим

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{a_c}{R} = RF_{тр}.$$

Решая уравнения динамики для поступательного и вращательного движений шара совместно, получим

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin\alpha \ .$$

2-й способ.

Рассмотрим шар в некоторый момент его движения по наклонной плоскости. Пусть его положение в данный момент определяется координатой x. Полная механическая энергия шара , при условии, что за нулевой уровень потенциальной энергии выбрана точка О, будет равна

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgx\sin\alpha$$

Дифференцируя данное уравнение по времени, получим

$$-mg\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{2m\upsilon}{2}\cdot\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{2I\omega}{2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = 0$$

После преобразования, с учетом того, что

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon\,,\ \frac{d\upsilon}{dt} = a_c\,,\ \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon\,,\ \varepsilon = \frac{a_c}{R}\,,$$

будем иметь

$$a_c(m + \frac{I}{R^2}) = mg\sin\alpha \ .$$

Наконец, заменяя момент инерции шара его значением, получим

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin\alpha \ .$$

Задача 7. Сплошной однородный диск радиуса *R*, вращающийся с угловой скоростью ω, кладут основанием на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов сделает диск до остановки, если коэффициент трения между основанием диска и горизонтальной поверхностью равен μ.

Решение

Сила трения приложена к каждому участку диска, и так как эти участки находятся на различных расстояниях от оси, то и моменты сил трения, приложенные к этим участкам, различны. Разделим диск на узкие кольца. Одно такое кольцо

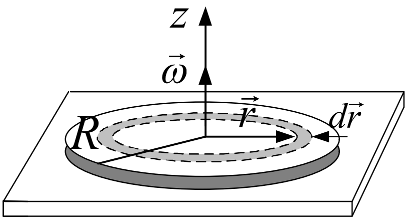


Рис.24

радиусом r и шириной dr заштриховано на рис.24. Площадь такого кольца

$$dS = 2\pi r dr,$$

а сила трения, действующая на выделенное кольцо,

$$dF = 2\pi r h\mu\rho g dr,$$

где h – толщина диска, ρ – плотность материала диска.

Момент этой силы трения равен

$$dM = 2\pi h\mu\rho g r^2 dr.$$

Интегрируя по r от нуля до R, получаем суммарный момент сил трения

$$M = 2\pi h\mu\rho g\int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\pi h\mu\rho g R^3.$$

Работа, совершенная силами трения, определится по формуле

$$A = \int M d\varphi = \frac{2}{3}\pi h\mu\rho g R^3\varphi,$$

где $\varphi = 2\pi N$ - угол поворота диска, а N – число оборотов диска до полной остановки.

С другой стороны, работа сил трения равна убыли кинетической энергии диска, т.е.

$$A = \frac{I\omega^2}{2},$$

где $I = \frac{mR^2}{2} = \frac{\pi h\rho R^4}{2}$ - момент инерции диска.

Приравнивая полученные выражения для работы, после преобразования найдем

$$N = \frac{3R\omega^2}{16\pi\mu g}.$$

Задача 8. Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m, туго насаженный на ось радиусом r, которая подвешивается на двух предварительно намотанных на нее нитях (рис.25). Когда маятник отпускают, то он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси. Не учитывая силы сопротивления и момент инерции оси, определить ускорение поступательного движения маятника и силу натяжения нити.

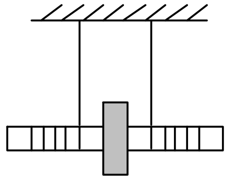


Рис.25

Решение

Уравнения динамики для поступательного и вращательного движения маятника Максвелла имеют вид

$$ma = mg - 2T$$

$$I\varepsilon = 2T \cdot r.$$

В данной системе уравнений T – сила натяжения одной нити, $I = mR^2/2$ - момент инерции диска, а $\varepsilon = a/r$ - угловое ускорение.

Решая уравнения, найдем: $a = \dfrac{g}{\left(1 + R^2/2r^2\right)}$.

Натяжение нити определим из первого уравнения

$$T = \frac{m(g-a)}{2}.$$

Задача 9. Рассмотрим некоторые примеры на закон сохранения момента импульса, которые можно осуществить с помощью скамьи Жуковского. В простейшем случае скамья Жуковского представляет собой платформу в форме диска, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси на шариковых подшипниках (рис.26). Демонстратор становится на скамью, после чего ее приводят во вращательное движение. Вследствие того, что силы трения благодаря применению подшипников очень малы, момент импульса системы, состоящей из скамьи и демонстратора, относительно оси вращения не изменяется во времени, если система предоставлена самой себе.

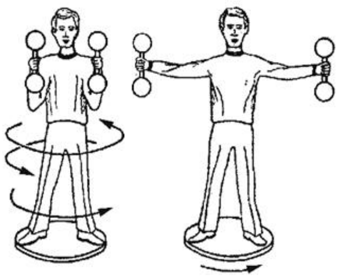


Рис.26

Если демонстратор держит в руках тяжелые гантели и разводит руки в стороны, то он увеличит момент инерции системы, а потому должна уменьшиться угловая скорость вращения, чтобы остался неизменным момент импульса.

По закону сохранения момента импульса составим уравнение для данного случая

$$\left(I_0 + 2mr_1^2\right)\omega_1 = \left(I_0 + 2mr_2^2\right)\omega_2 ,$$

где I_0 - момент инерции человека и скамьи, $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ - момент инерции гантелей в первом и втором положениях, ω_1 и ω_2 - угловые скорости системы.

Угловая скорость вращения системы при разведении гантелей в сторону будет равна

$$\omega_2 = \frac{\left(I_0 + 2mr_1^2\right)}{\left(I_0 + 2mr_2^2\right)}\omega_1 .$$

Работу, совершенную человеком при перемещении гантелей, можно определить через изменение кинетической энергии системы

$$A = \Delta T = \left(T_2 - T_1\right) = \frac{\left(I_0 + 2mr_2^2\right)\omega_2^2}{2} - \frac{\left(I_0 + 2mr_1^2\right)\omega_1^2}{2} .$$

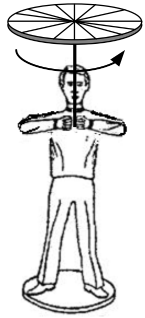


Рис. 27

Задача 10. Приведем еще один опыт со скамьей Жуковского. Демонстратор становится на скамью и ему передают быстро вращающееся колесо с вертикально направленной осью (рис.27). Затем демонстратор поворачивает колесо на 180^0. При этом изменение момента импульса колеса целиком передается скамье и демонстратору. В результате скамья вместе с демонстратором приходит во вращение с угловой скоростью, определяемой на основании закона сохранения момента импульса.

Момент импульса системы в начальном состоянии определяется только моментом импульса колеса и равен

$$L_1 = I_1\omega_1,$$

где $I_1 = mr^2$ - момент инерции колеса, ω_1- угловая скорость его вращения.

После поворота колеса на угол 180^0 момент импульса системы будет уже определяться суммой момента импульса скамьи с человеком и момента импульса колеса. С учетом того, что вектор момента импульса колеса изменил свое направление на противоположное, а его проекция на вертикальную ось стала отрицательной, получим

$$L_2 = I_2\omega_2 - I_1\omega_1,$$

где I_2 - момент инерции системы «человек-платформа», ω_2 - угловая скорость вращения скамьи с человеком.

По закону сохранения момента импульса

$$L_1 = L_2 = const \text{ и } I_1\omega_1 = I_2\omega_2 - I_1\omega_1.$$

В итоге, находим скорость вращения скамьи

$$\omega_2 = \frac{2I_1\omega_1}{I_2}.$$

Задача 11. Тонкий стержень массой m и длиной l вращается с угловой скоростью ω=10 с$^{-1}$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Продолжая вращаться в той же плоскости, стержень перемещается так, что ось вращения теперь проходит через конец стержня. Найти угловую скорость во втором случае.

Решение

В данной задаче за счет того, что распределение массы стержня относительно оси вращения изменяется, момент инерции стержня также изменяется. В соответствии с законом сохранения момента импульса изолированной системы, имеем

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 .$$

Здесь $I_1 = \frac{1}{12}m\ell^2$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину стержня; $I_2 = \frac{1}{3}m\ell^2$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец.

Подставляя данные выражения в закон сохранения момента импульса, получим

$$\frac{1}{12}m\ell^2\omega_1 = \frac{1}{3}m\ell^2\omega_2 ,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1 = 2{,}5(c^{-1}) .$$

Задача 12. Стержень длиной ℓ=1,5 м и массой m_1=10 кг подвешен шарнирно за верхний конец. В середину стержня ударяет пуля массой m_2=10 г, летящая горизонтально со скоростью υ=500 м/с, и застревает в стержне. На какой угол отклонится стержень после удара?

Решение

Система взаимодействующих тел «стержень-пуля». представлена на рис.28. Моменты внешних сил (сила тяжести, реакция оси) в момент удара равны нулю, поэтому воспользуемся законом сохранения момента импульса

$$L_1 = L_2 .$$

Момент импульса системы непосредственно перед ударом равен моменту импульса пули относительно точки подвеса

$$L_1 = m_2 \upsilon \frac{\ell}{2} .$$

Момент импульса системы сразу после неупругого удара определится по формуле

$$L_2 = \left(I_c + m_2 \frac{\ell^2}{4} \right) \omega ,$$

где $I_c = \frac{1}{3} m_1 \ell^2$ - момент инерции стержня относительно точки подвеса, $m_2 \frac{\ell^2}{4}$ - момент инерции пули, ω - угловая скорость стержня с пулей непосредственно после удара.

Решая после подстановки полученное уравнение, найдем

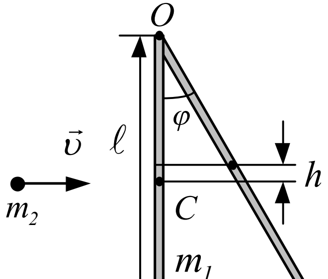


Рис.28

$$\omega = \frac{6 m_2 \upsilon}{(4 m_1 + 3 m_2) \ell} .$$

Воспользуемся теперь законом сохранения механической энергии. Приравняем кинетическую энергию стержня после попадания в него пули его потенциальной энергии в наивысшей точке подъема:

$$\frac{\left(I_c + m_2\ell^2/4\right)\omega^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

где h - высота поднятия центра масс данной системы.

Отсюда

$$h = \frac{\left(I_c + m_2\ell^2/4\right)\omega^2}{2(m_1 + m_2)g}$$

Угол отклонения стержня связан с величиной h соотношением

$$\cos\varphi = \frac{\ell/2 - h}{\ell/2} = 1 - \frac{2h}{\ell}.$$

Проведя вычисления, получим φ=0,1π=18^0.

1.4.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Пустотелый цилиндр с очень тонкими стенками имеет массу m и радиус R. Определите его момент инерции относительно оси OO′ (рис.29). [2mR^2]

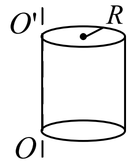


Рис. 29

2. Чему равен момент инерции проволочного квадрата (рис.30) со стороной d и ее массой m относительно оси OO′? [(5/3)md^2]

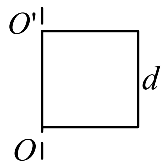


Рис.30

3. Прямолинейная однородная проволока длиной ℓ и массой m согнута так, что точка перегиба делит проволоку на две части, длины которых относятся как 1:2. Чему равен момент инерции проволоки относительно оси вращения,

проходящей через точку перегиба и перпендикулярной плоскости проволоки? [$m\ell^2/9$]

4. Определите момент инерции системы (рис. 31), состоящей из двух шариков массами m и $2m$, закрепленных на стержне массой $3m$, относительно оси OO′. [$(5/2)md^2$]

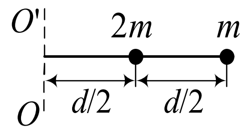


Рис.31

5. Однородный стержень длиной ℓ = 1 м и массой m = 1 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину, под действием момента сил M = 0,1 Н · м. Каково при этом угловое ускорение стержня? [1,2 рад/с^2]

6. Диск радиуса R и массы m может вращаться вокруг неподвижной оси. На диск намотана нить, к концу которой приложена постоянная сила F. Какова кинетическая энергия диска после того, как он совершит один оборот? [2πFR]

7. Шар радиусом R =10 см и массой m =5 кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где B = 2 рад/с^2, C = -0,5 рад/с^2. Чему равен вращательный момент силы в момент времени t = 3 с? [- 0,1 Н · м]

8. Частота вращения маховика, момент инерции которого 120 кг·м^2, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращательного момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время t = π мин. Чему равен момент силы трения? [16 Н·м]

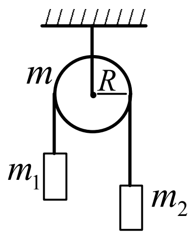


Рис. 32

9. В установке, показанной на рис.32, известны масса однородного сплошного цилиндра m=0,5 кг, его радиус

R=0,1 м и массы тел m_1=0,2 кг и m_2=0,3 кг. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение сил натяжений T_2/T_1 вертикальных участков нити в процессе движения. [13,3 рад/с^2; 1,15]

10. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна 1кДж. Под действием тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав N=80 оборотов, остановился. Определить момент силы торможения. [2 Н·м]

11. Платформа в виде однородного диска радиусом R =1 м вращается с частотой n = 6 об/мин. Масса платформы равна 240 кг. На краю платформы стоит человек, масса которого равна 80 кг. Как изменится кинетическая энергия системы, если человек перейдет в центр платформы? [*25,5 Дж*]

12. Два горизонтальных диска свободно вращаются в разных направлениях вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Массы дисков равны 10 кг и 40 кг, их радиусы 0,2 м и 0,1 м, угловые скорости 10 рад/с и 20 рад/с соответственно. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найдите изменение суммарной кинетической энергии дисков. [*95 Дж*]

Второй уровень сложности

1. Рассчитайте момент инерции однородного кольца массой m = 1 кг относительно оси вращения, совпадающей с его осью симметрии. Внутренний радиус кольца R_1 = 10 см, внешний радиус R_2 = 30 см. [$5\cdot10^{-2}$ кг·м^2]

2. Две частицы с массами m_1 и m_2 соединены жестким невесомым стержнем длиной ℓ. Найти момент инерции I этой системы относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через центр масс. [$I = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ell^2$]

3. Определить момент инерции тонкой прямоугольной пластины массы m с размерами $a \times b$ относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости пластины. [$m(a^2 + b^2)/12$]

4. Вычислить момент инерции однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии, если масса конуса m, а радиус его основания R. [$I = (3/10) \cdot mR^2$]

5. Определите момент инерции диска массой m = 10 кг и радиусом R =1м относительно оси вращения, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости, если в диске сделан вырез в виде круга радиусом r=0,3 м, центр которого находится на расстоянии ℓ=0,5 м от центра диска (рис.33). [4,75 кг·м^2]

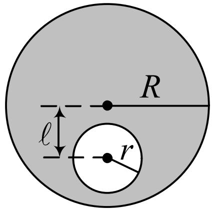


Рис.33

6. Цилиндр массой m_1 катится без скольжения под действием груза массой m_3 (рис.34). Масса блока m_2. Найти ускорение центра инерции цилиндра.

[$a = \dfrac{2m_3 g}{m_2 + 2m_3 + 3m}$]

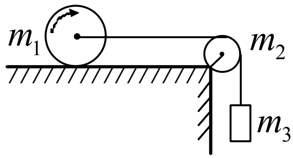


Рис. 34

7. Однородный цилиндр массой m и радиусом R начинает опускаться под действием силы тяжести (рис. 35). Найти угловое ускорение цилиндра и натяжение каждой нити. [$\varepsilon = \dfrac{2}{3}\dfrac{g}{R}$; $T = \dfrac{1}{6} mg$]

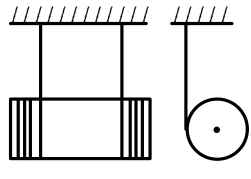


Рис. 35

8. Для определения мощности мотора на его шкив диаметром d = 20 см накинули ленту. К одному концу ленты

прикреплен динамометр, к другому подвесили груз массой m = 1 кг. Найти мощность N мотора, если мотор вращается с частотой n = 24 с$^{-1}$ и показание динамометра F = 24 Н.

[$N = \pi \cdot nd\left(F - mg\right) = 211\ Bm$]

9. На краю вращающегося достаточно большого горизонтального диска, имеющего радиус R и момент инерции I_1, стоит человек массой m. Диск совершает n_1 об/мин. Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Какую работу совершит человек при переходе? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.[$n_2 = n_1\left(1 + mR^2/I\right)$; $A = 2\pi^2 n_1^2\left(I + mR^2\right)\dfrac{mR^2}{I}$]

10. Шарик массой m = 0,1 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1 =1 м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, с частотой n_1 = 1 об/с. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2 = 0,5 м. С какой частотой будет при этом вращаться шарик? Какую работу совершит внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость [пренебречь. [$n_2 = n_1\left(\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$;

$A = 2\pi^2 m\ell_1^2 n_1^2\left(1 - \dfrac{\ell_1^2}{\ell_2^2}\right)$]

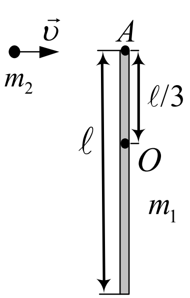


Рис.36

11. Однородный тонкий стержень массой m_1 = 0,2 кг и длиной ℓ может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O (рис.36). В точку A на конце стержня попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально со скоростью υ = 10 м/с, и прилипает к стержню. Масса шарика m_2=10 г, расстояние между точками A

и O равно $\ell/3$. Определите кинетическую энергию стержня после удара.[*2,38·10^{-2} Дж*]

12. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m = 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью υ=20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии r = 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно этой оси равен 6 кг/м^2. Найдите кинетическую энергию системы после того, как человек поймает мяч. [*6,55 Дж*]

13. Покоящийся стержень длиной L = 1,5 м и массой m_1 = 10 кг подвешен шарнирно за верхний конец. В середину стержня ударяет пуля массой m_2 = 10 г, летящая горизонтально со скоростью υ =500 м/с, и застревает в стержне. На какой угол отклонится стержень после удара? [$\approx 13^0$]

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

2.1.1. Основные формулы и уравнения

• Количество вещества, выраженное в молях

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

где m - масса вещества, M - молярная масса, N - число молекул, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$- число Авогадро.

• Уравнение Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где p, V, T - давление, объем, температура идеального газа, $R = 8{,}31 Дж/(моль \cdot K)$ - универсальная газовая постоянная.

• Соотношение между давлением и концентрацией молекул

$$p = nkT,$$

где $n = \frac{N}{V}$ - концентрация молекул, $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{K}$ - постоянная Больцмана.

• Закон Дальтона

$$p_{см} = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

где $p_{см}$ - давление смеси различных газов, p_i - парциальное давление газа, входящего в состав смеси.

• Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$$p=\frac{2}{3}n<\varepsilon_k>=\frac{1}{3}nm_0<\upsilon_{кв}>^2,$$

где $<\varepsilon_k>=\dfrac{m_0<\upsilon_{кв}>^2}{2}=\dfrac{3}{2}kT$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа, m_0 - масса одной молекулы, $<\upsilon_{кв}>=\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\upsilon_i^2}$ - средняя квадратичная скорость поступательного движения молекул газа.

- Распределение молекул по скоростям

$$dN=\frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du,$$

где dN - число молекул газа, скорости которых заключены в интервале от u до $(u+du)$, $u=\upsilon/\upsilon_в$ - относительная скорость молекул, $\upsilon_в$ - наиболее вероятная скорость.

- Скорости молекул:

средняя квадратичная $<\upsilon_{кв}>=\sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$,

средняя арифметическая $<\upsilon>=\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$,

наиболее вероятная $\upsilon_в=\sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}=\sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$

- Барометрическая формула

$$p=p_0\exp(-Mgh/RT),$$

где p - давление на высоте h, p_0 - давление на уровне моря ($h=0$).

- Закон распределения молекул в потенциальном силовом поле (распределение Больцмана)

$$n=n_0\exp(-m_0gh/kT),$$

где n и n_0-концентрации молекул на высоте h и h_0, m_0gh - потенциальная энергия молекулы в поле консервативных сил.

2.1.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Определение неизвестных параметров идеального газа и смеси не реагирующих между собой газов.

Метод решения. Использование уравнения состояния идеального газа (уравнения Менделеева-Клапейрона), закона Дальтона для смеси газов и основного уравнения молекулярно-кинетической теории, устанавливающих связь между значениями макропараметров и средними значениями физических характеристик молекул.

Тип 2. Определение скоростных и энергетических характеристик движения молекул на основании функции распределения Максвелла.

Метод решения. Прямое использование распределения Максвелла путем интегрирования выражения

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du$$

в соответствующем диапазоне скоростей. В том случае, когда искомый интервал скоростей существенно меньше той скорости, в которой он находится, т.е. $\Delta\upsilon << \upsilon$, а следовательно, и $\Delta u << u$, можно считать $du \approx \Delta u$, а $dN \approx \Delta N$.

Для нахождения энергетических характеристик молекул необходимо перейти к распределению Максвелла по кинетическим энергиям

$$dN = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} N e^{-\frac{E^2}{kT}} \sqrt{E} dE .$$

Тип 3. Определение давления газа на различных высотах и характера распределения молекул в потенциальном силовом поле.

Метод решения. Использование барометрической формулы и распределения Больцмана для молекул, находящихся в поле консервативных сил.

2.1.3. Примеры решения задач

Задача 1. В баллоне находится кислород массой $m_1 = 0{,}5$ кг. Через некоторое время, в результате утечки газа и уменьшения абсолютной температуры на 10%, давление газа в баллоне уменьшилось на 20%. Определить число молекул просочившихся из баллона?

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его к начальному и конечному состояниям газа в баллоне:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1 \quad \text{и} \quad p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2 .$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} .$$

По условию задачи $p_1 / p_2 = 10/8$, а $T_1 / T_2 = 10/9$, следовательно, масса кислорода после его утечки из баллона, равна

$$m_2 = \frac{8}{9} m_1 .$$

В соответствии с этим, убыль массы составит

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{1}{9} m_1 ,$$

а число молекул кислорода, просочившихся из баллона,

$$\Delta N = \frac{\Delta m}{M} N_A = \frac{m_1 N_A}{9M}.$$

Подставляя числовые значения, найдем

$$\Delta N = \frac{0{,}5 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{9 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 1{,}05 \cdot 10^{24}.$$

Задача 2. Определить, сколько молей и молекул воздуха содержится в объеме 10 л под давлением $2 \cdot 10^5$ Па при температуре $27^0 C$. Какова плотность газа?

Решение

В начале приведем все численные значения в единицы СИ: $V = 10л = 10^{-2}$ м^3 , $T = 300$ К, молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Число молей ν, содержащихся при данных условиях, определим на основании уравнения Менделеева-Клапейрона

$$\nu = \frac{pV}{RT}.$$

Произведя вычисления, получим

$$\nu = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{8{,}31 \cdot 300} = 0{,}8 \text{ (моль)}.$$

Используя число Авогадро, находим общее количество молекул

$$N = \nu N_A = 0{,}8 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 4{,}8 \cdot 10^{23}.$$

Плотность газа также определяем из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставляя числовые значения, найдем

$$\rho = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300} = 2{,}33 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

Задача 3. В сосуде объемом 1 м^3 находится смесь 4 кг гелия и 2 кг водорода при температуре 300 К. Определить давление и молярную массу смеси газов.

Решение

Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его к гелию и водороду:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT\,,\; p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT\,,$$

где p_1 и p_2 представляют собой парциальные давления гелия и водорода в данном сосуде.

По закону Дальтона для смеси газов с учетом предыдущего, имеем

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1 RT}{M_1 V} + \frac{m_2 RT}{M_2 V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}\,.$$

Молярную массу смеси найдем по формуле

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}}\,.$$

Молярные массы гелия и водорода соответственно равны

$$M_1 = 4 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль},\;\; M_2 = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}.$$

Подставляя все значения в формулы давления и молярной массы смеси, найдем

$$p = 5 \cdot 10^6 \text{ Па},\;\; M = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}.$$

Задача 4. Какая часть молекул воздуха ($M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) при температуре $17^0 C$ обладает скоростями, отличающимися не более чем на 0,5 м/с от наиболее вероятной скорости?

Решение

Наиболее вероятная скорость молекул воздуха в данных условиях равна

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 430 \text{ м/с.}$$

Относительная скорость, выраженная в единицах наиболее вероятной скорости, представляет собой безразмерную величину и равна

$$u = \frac{\upsilon}{\upsilon_в} = 1 .$$

Относительный интервал скоростей, скорости которых отличаются на 0,5 м/с от наиболее вероятной, т.е. $\Delta\upsilon = 1$ м/с, будет равен

$$\Delta u = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_в} = \frac{1}{430} = 2{,}3 \cdot 10^{-3} .$$

Поскольку $\Delta u << u$ можно считать, что $du \approx \Delta u$, $dN \approx \Delta N$ и согласно распределению Максвелла

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = 0{,}19\% .$$

Задача 5. Найти отношение числа молекул газа, скорости которых лежат в интервале от υ до $(\upsilon + \Delta\upsilon)$ при температуре T_1 к числу молекул, скорости которых лежат в том же интервале при температуре $T_2 = 2T_1$. Считать, что $\upsilon = \upsilon_в$, $\Delta\upsilon << \upsilon$.

Решение

Для достаточно узкого интервала скоростей, когда $\Delta\upsilon << \upsilon$, согласно распределению Максвелла для первого и второго случая, будем иметь:

$$\Delta N_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u_1^2} u_1^2 \Delta u_1 , \quad \Delta N_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u_{12}^2} u_2^2 \Delta u_2 ,$$

где $$u_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon_в} = 1 , \ \Delta u_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в1}} = \frac{\Delta\upsilon}{\sqrt{2RT_1 / M}} ;$$

$$u_2 = \frac{\upsilon}{\upsilon_{в2}} = \frac{\sqrt{2RT_1 / M}}{\sqrt{2RT_2 / M}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta u_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{в2}} = \frac{\Delta\upsilon}{\sqrt{2RT_2 / M}}.$$

Найдем искомое отношение молекул газа для одного интервала скоростей, но при разных температурах

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = e^{(u_2^2 - u_1^2)}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = 1{,}04$$

Задача 6. На какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха уменьшается в 2 раза? Температура воздуха $T = 273$ К. Считать, что температура и ускорение силы тяжести не зависят от высоты.

Решение

Исходя из определения плотности и с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона, имеем

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Давление воздуха на высоте h в соответствии с барометрической формулой равно

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT}.$$

Таким образом, плотность воздуха на высоте h определяется выражением

$$\rho = \rho_0 e^{-Mgh/RT}.$$

После логарифмирования и преобразования данного выражения, получим окончательно

$$h = \frac{RT \ln(\rho_0 / \rho)}{Mg} = 5{,}4 \text{ км}.$$

Задача 7. Определить массу газа, заключенного в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде. Площадь основания цилиндра S, высота h. Давление газа на уровне нижнего основания цилиндра p_0, температура T, молярная масса газа M.

Решение

Поскольку давление, а, следовательно, и плотность газа, заключенного в вертикальном сосуде, зависит от высоты, то массу газа необходимо находить путем интегрирования выражения

$$m = \int_V \rho dV = S\int_0^h \rho dh .$$

Считая, что температура и ускорение не зависят от высоты, а плотность уменьшается согласно закону

$$\rho = \rho_0 e^{-Mgh/RT} = \frac{p_0 M}{RT} e^{-Mgh/RT} ,$$

получим

$$m = \frac{SMp_0}{RT}\int_0^h e^{-Mgh/RT} dh .$$

Приведем данный интеграл к табличному виду, используя метод замены переменной:

$$m = \frac{SMp_0}{RT}\left(-\frac{RT}{Mg}\right)\int_0^u e^u du ,$$

где $u = -Mgh/RT$.

После интегрирования и преобразования, получим окончательно

$$m = \frac{Sp_0}{g}(1 - e^{-Mgh/RT}) .$$

2.1.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Найти число молекул азота в объеме $V = 1$ м^3, если давление $p = 3{,}7 \cdot 10^5$ Па, а средняя квадратичная скорость молекул $\upsilon_{кв} = 2400$ м/с. [$4{,}2 \cdot 10^{24}$]

2. В баллоне вместимостью $V = 25$ л находится водород при температуре $T = 290$ К. После того как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 0{,}4$ МПа. Определить массу израсходованного водорода. $[8{,}3 г]$.

3. Плотность газа, состоящего из смеси гелия и аргона при давлении $1{,}5 \cdot 10^5$ Па и температуре $27^0 C$, равна $\rho = 2{,}0$ г/л. Сколько атомов гелия содержится в 1 см^3 газовой смеси? $\left[7 \cdot 10^{18} см^{-3}\right]$

4. В резервуаре объемом 100 л находится смесь 10 кг азота и 4 кг водорода при температуре 300 К. Определить давление и молярную массу смеси. [$5{,}9 \cdot 10^7$ *Па*; $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ *кг / моль*]

Второй уровень сложности

1. В закрытом сосуде емкостью $V = 3$ м^3 находятся $m_1 = 1{,}4$ кг азота и $m_2 = 2$ кг гелия. Определить температуру газовой смеси и парциальное давление гелия, если парциальное давление азота $p = 1{,}3 \cdot 10^5$ Па. [*940 К*; $1{,}3 \cdot 10^6$ *Па*]

2. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на $\Delta\eta = 1\%$ от: а) наиболее вероятной скорости; б) средней квадратичной скорости. (1,66%; 1,85%).

3. Найти отношение числа молекул газа, скорости которых лежат в интервале от υ до $(\upsilon + \Delta\upsilon)$ при температуре T_1 к числу молекул, скорости которых лежат в том же

интервале при температуре $T_2 = 2T_1$. Рассмотреть случаи: а) $\upsilon = 0{,}5\upsilon_{в1}$, б) $\upsilon = 2\upsilon_{в2}$. [*2,5; 0,052*]

4. На какой высоте плотность кислорода уменьшается на 10%? Температуру считать равной $0^0 C$. [*747м*]

5. На какой высоте содержание водорода в воздухе по отношению к углекислому газу увеличится вдвое? Среднюю температуру считать равной $40^0 C$. [*4,2 км*]

6. Установленная вертикально закрытая с обоих концов труба наполнена кислородом (O_2). Высота трубы $h = 200$ м, объем $V = 200$ л. Стенки трубы имеют всюду одинаковую температуру $T = 300$ К. Давление газа внутри трубы, вблизи ее основания равно $p_0 = 10^5$ Па. Определить количество молекул кислорода, содержащихся в трубе. $\left[N = 4{,}19 \cdot 10^{24}\right]$

2.2. Явления переноса в газах

2.2.1. Основные уравнения и формулы

• Средняя длина свободного пробега молекулы

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d - эффективный диаметр молекулы.

• Среднее число столкновений молекулы в единицу времени

$$<z> = \sqrt{2}\pi d^2 n <\upsilon>.$$

• Уравнение диффузии

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt,$$

где $D = \frac{1}{3}<\upsilon><\lambda>$ - коэффициент диффузии, $\frac{d\rho}{dx}$ - градиент плотности в направлении перпендикулярном к площадке, dm -масса газа, перенесенная через площадку dS за время dt.

• Уравнение теплопроводности

$$dQ = -K\frac{dT}{dx}dSdt\,,$$

где $K = \frac{1}{3}c_V\rho < \upsilon >< \lambda >$ - коэффициент теплопроводности, c_V - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, $\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры, dQ - количество теплоты, перенесенное газом через площадку dS за время dt.

• Сила внутреннего трения, действующая между слоями газа

$$F = \eta\frac{d\upsilon}{dx}dS\,,$$

где $\eta = \frac{1}{3}\rho < \upsilon >< \lambda >$ - динамический коэффициент вязкости, $\frac{d\upsilon}{dx}$ - градиент скорости течения слоев в направлении, перпендикулярном площадке.

2.2.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Определение эффективного диаметра, средней длины свободного пробега и числа столкновений молекул. Исследование зависимости газокинетических характеристик молекул и коэффициентов переноса от изменения параметров состояния газа.

Методы решения:

1) использование соотношений между эффективным диаметром, длиной свободного пробега, числом столкновений молекул и их средней скоростью.

2) использование основного уравнения МКТ, устанавливающего связь между макро- и микропараметрами газа, и формул для коэффициентов переноса.

Тип 2. Определение неизвестных параметров для конкретного процесса переноса.

Метод решения. Использование соответствующих уравнений переноса и формул для коэффициентов переноса.

2.2.3. Примеры решения задач

Задача 1. Найти среднюю длину свободного пробега и частоту столкновений молекул воздуха при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы воздуха $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м, масса одного киломоля $M = 29$ кг/кмоль.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$< \lambda >= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Концентрацию молекул воздуха определим через параметры состояния при нормальных условиях

$$n = p_0 / kT_0,$$

где $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К.

С учетом этого, получим

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi d^2 p_0}.$$

Частота столкновений молекул воздуха, т.е. среднее число соударений, испытываемых одной молекулой в единицу времени, определится по формуле

$$< z >= \sqrt{2}\pi d^2 n < \upsilon >,$$

где $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}$ - средняя арифметическая скорость молекул.

Подставляя числовые значения в полученные выражения, найдем

$$\langle \lambda \rangle = 9{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ м}, \ \langle z \rangle = 4{,}7 \cdot 10^9.$$

Задача 2. Коэффициент вязкости углекислого газа при нормальных условиях равен $\eta = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Вычислить длину свободного пробега и коэффициент диффузии молекул CO_2 при нормальных условиях.

Решение

Коэффициент внутреннего трения (вязкости) газа определяется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3}\rho < \upsilon >< \lambda >,$$

отсюда

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{\rho\langle\upsilon\rangle}.$$

Средняя арифметическая скорость и плотность молекул углекислого газа при нормальных условиях определяется по формулам

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{p_0 M}{RT_0},$$

где $T_0 = 273$ К, $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Проведя расчеты по данным формулам, найдем

$$\rho = 1{,}94 \text{ кг/м}^3, \ \langle\upsilon\rangle = 362 \text{ м/с}, \ \langle\lambda\rangle = 5{,}9 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Из сопоставления выражения для коэффициентов диффузии и внутреннего трения следует

$$\eta = D\rho.$$

С учетом выражения для плотности, имеем

$$D = \frac{\eta R T_0}{p_0 M}.$$

После подстановки числовых значений, получим

$$D = 7{,}21 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2\text{/с}.$$

Задача 3. Как изменится вязкость двухатомного газа при уменьшении объема в 2 раза, если процесс перехода был: а) изотермическим, б) изобарическим, в) адиабатическим?

Решение

Вязкость или внутреннее трение газа определяется динамическим коэффициентом

$$\eta = \frac{1}{3}\rho < \upsilon >< \lambda > .$$

В данную формулу объем не входит в явном виде, поэтому необходимо установить зависимость от объема каждого из сомножителей.

Средняя длина свободного пробега молекул

$$< \lambda >= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

обратно пропорциональна концентрации молекул, а с учетом того, что $n = N / V$, прямо пропорциональна объему

$$\langle \lambda \rangle \sim V .$$

С другой стороны, величина плотности, равная

$$\rho = \frac{m}{V} \sim \frac{1}{V},$$

обратно пропорциональна объему. Следовательно, коэффициент вязкости может зависеть от объема только через среднюю арифметическую скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} .$$

Для изотермического процесса ($T = const$), и поэтому, $\eta = const$.

Для изобарического процесса, с использованием уравнения Менделеева-Клапейрона, получим

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8pV}{\pi m}} \sim \sqrt{V} .$$

Следовательно, $\eta \sim \sqrt{V}$, т.е. с уменьшением объема в 2 раза при изобарическом процессе, вязкость уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

Адиабатический процесс описывается уравнением Пуассона

$$pV^{\gamma} = const\ ,$$

где $\gamma = (i+2)/i$ - показатель адиабаты газа, i - число степеней свободы молекул.

Тогда зависимость от объема средней арифметической скорости молекул газа в адиабатическом процессе можно представить в виде

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8pV}{\pi m}} \sim V^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

Учитывая, что для двухатомного газа $i = 5$, $\gamma = 1{,}4$, зависимость вязкости от объема в адиабатическом процессе имеет вид

$$\eta \sim V^{-0,2}.$$

Задача 4. Пространство между двумя большими параллельными пластинами заполнено водородом. Расстояние между пластинами $L = 0{,}05$ м. Одна пластина поддерживается при температуре $T_1 = 290$ К, другая – при $T_2 = 330$ К. Давление газа близко к нормальному. Найти плотность потока тепла. Эффективный диаметр молекулы водорода d=0,28 нм.

Решение

Так как температуры пластин поддерживаются постоянными, то в пространстве между ними установится постоянное распределение температур. Плотность потока тепла, т.е. количество теплоты, переносимой через единицу площади за единицу времени, не будет зависеть от времени и определится из уравнения теплопроводности

$$q = \frac{\Delta Q}{S\Delta t} = K\frac{dT}{dx} = const\ .$$

Коэффициент теплопроводности выражается формулой

$$K = \frac{1}{3} c_V \rho < \upsilon >< \lambda >,$$

где $c_V = \dfrac{i}{2M}R$ - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, $\rho = \dfrac{p_0 M}{RT}$ - плотность газа, $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ - средняя арифметическая скорость $<\lambda>= \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p_0}$ - средняя длина свободного пробега.

С учетом данных соотношений, получим

$$K = \frac{ik}{3d^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}} = A\sqrt{T}\text{, где } A = \frac{ik\sqrt{R}}{3d^2\pi^{3/2}\sqrt{M}}.$$

Таким образом, для плотности потока тепла имеем уравнение

$$q = A\sqrt{T}\,\frac{dT}{dx}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{q}{A}\int_0^L dx = \int_{T_1}^{T_2}\sqrt{T}\,dT,$$

$$\frac{qL}{A} = \frac{2}{3}\left(T_2^{3/2} - T_1^{3/2}\right).$$

Окончательно

$$q = \frac{2A}{3L}\left(T_2^{3/2} - T_1^{3/2}\right),$$

Подстановка числовых значений приводит к следующему результату

$$q = 4\ Вт/м^2.$$

2.2.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Баллон емкостью $V = 10$ л содержит водород массой $m = 1$г. Определить среднюю длину свободного пробега молекул. [*142 нм*]

2. Определить плотность разреженного азота, если средняя длина свободного пробега равна 10 см. [$1{,}1\cdot 10^{-6}$кг/м^3]

3. Определить среднюю длину свободного пробега и число соударений, происходящих между всеми молекулами азота за 1 с в сосуде емкостью $V = 4$ л, содержащегося при нормальных условиях. [87,4 нм; $2{,}8\cdot 10^{32}\,c^{-1}$]

4. Зная коэффициент вязкости гелия при нормальных условиях ($\eta = 18{,}9$ *мкПа·с*), вычислить эффективный диаметр его атома. [0,18 нм]

Второй уровень сложности

1. Найти, как зависят от давления средняя длина свободного пробега и число столкновений в 1 с молекул идеального газа, если газ совершает процесс: а) изохорический, б) изотермический. Эффективный диаметр молекул считать постоянным. [а) $<\lambda>= \mathrm{const}, <z>\sim \sqrt{p}$; б) $<\lambda>\sim p^{-1}, <z>\sim p$]

2. Найти, как зависят от температуры средняя длина свободного пробега и число столкновений в 1 с молекул идеального газа, если газ совершает процесс: а) изохорический, б) изотермический. Эффективный диаметр молекул и массу газа считать постоянными. [а) $<\lambda>= \mathrm{const}, <z>\sim \sqrt{T}$; б) $<\lambda>\sim T, <z>\sim 1/\sqrt{T}$]

3. Двухатомный газ адиабатически расширяется до объема в два раза большего начального. Определить, как изменятся коэффициенты теплопроводности и диффузии газа. [$<\lambda>$ уменьшается в 1,15 раза; D увеличивается в 1,75 раза]

4. Давление двухатомного газа вследствие сжатия увеличивается в 10 раз. Определить, как изменится длина свободного пробега молекул и коэффициент вязкости газа. Рассмотреть случаи, когда сжатие происходит: а) изотермически, б) адиабатически. [а) $<\lambda>$ уменьшится в

10 раз; $\eta = const$; б) $<\lambda>$ уменьшится в 5,2 раза; η увеличивается в 1,39 раза]

5. Между двумя параллельными очень большими пластинами имеется зазор $\ell = 1$ см. Температуры пластин $T_1 = 299{,}5$ К и $T_2 = 300{,}5$ К поддерживаются постоянными. Зазор заполнен аргоном при давлении $p = 10^5$ Па. Оценить плотность потока тепла. [0,5Вт/м^2]

6. Через площадку $S = 100$ см^2 за время $\tau = 10$ с вследствие диффузии проходит некоторое количества азота. Градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке равен 1,26 кг/м^4. Процесс идет при температуре $T = 300$ К, средняя длина свободного пробега молекул азота $\lambda = 10^{-7}$ м, эффективный диаметр его молекул $d = 3{,}75 \cdot 10^{-10}$ м. Определить массу продиффундировавшего азота за указанное время. [$2{,}1 \cdot 10^{-6}$ *кг*]

2.3. Термодинамика

2.3.1. Основные формулы и уравнения

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT,$$

где i - число степеней свободы молекулы.

- Первое начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где δQ - количество теплоты, сообщенное системе, $\delta A = pdV$ - элементарная работа, совершенная системой против внешних сил, $dU = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RdT$ - изменение внутренней энергии.

- Теплоемкость идеального газа

удельная теплоемкость $c = \dfrac{\delta Q}{mdT}$, молярная теплоемкость $C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = cM$.

• Молярная теплоемкость для изохорического и изобарического процессов:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2}R .$$

• Уравнение Пуассона

$$pV^{\gamma} = const, \quad TV^{\gamma-1} = const, \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = const,$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ - коэффициент Пуассона.

• Работа, совершаемая газом

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV ;$$

при $V = const \Rightarrow A = 0$;
при $p = const \Rightarrow A = p(V_2 - V_1)$;
при $T = const \Rightarrow A = \frac{m}{M}RT \ln\frac{V_2}{V_1}$;
при $\delta Q = 0 \Rightarrow A = -\Delta U = \frac{m}{M}C_V \Delta T = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$.

• КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 - температуры нагревателя и холодильника, Q_1 - тепло, получаемое рабочим телом, Q_2 - отдаваемое тепло холодильнику.

• Приращение энтропии системы

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} .$$

2.3.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Определение количества теплоты, полученного газом, работы расширения газа и изменения его внутренней энергии в заданном процессе перехода.

Метод решения. Использование первого начала термодинамики, уравнения состояния идеального газа, формул внутренней энергии, работы расширения газа и количества теплоты для заданного процесса.

Тип 2. Определение теплоемкостей газа или смеси газов по заданной массе, молярной массе и числу степеней свободы.

Метод решения. Используются: а) формулы для расчета количества теплоты для заданного процесса; б) связь между удельной и молярной теплоемкостями газа; в) формулы для определения молярных теплоемкостей при постоянном объеме и постоянном давлении через число степеней свободы.

Тип 3. Нахождение характеристик тепловых и холодильных машин, определение их эффективности.

Метод решения. Представление тепловой или холодильной машины в виде соответствующего обратимого цикла на диаграмме pV; проведение энергетических расчетов на основе уравнения состояния для рабочего тела и уравнений процессов перехода для участков цикла.

Тип 4. Расчет изменения энтропии идеального газа при переходе из одного состояния в другое.

Метод решения. Применение формулы $\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}$.

Подсчет изменения энтропии целесообразно проводить по тому пути, который связан с наибольшей простотой расчета, независимо от реального процесса перехода из одного состояния в другое.

2.3.3. Примеры решения задач

Задача 1. Один киломоль идеального газа, имеющего первоначально температуру $T_1 = 290$ K, расширяется изобарически до тех пор, пока его объем не возрастет в 2 раза. Затем газ охлаждается изохорически до первоначальной температуры. Определить: а) приращение внутренней энергии газа; б) работу, совершенную газом; в) количество полученного газом тепла.

Решение

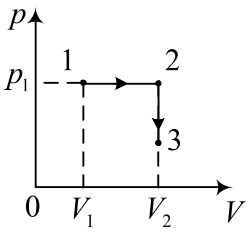


Рис.37

Представим переход газа из одного состояния в другое графически в системе координат pV (рис.37). При изобарном переходе (прямая 1-2) происходит повышение температуры, следовательно, увеличение внутренней энергии газа, и, кроме того, совершается работа, представленная на графике заштрихованной площадью. При этом переходе газ получает от внешнего источника количество теплоты, определяемое первым началом термодинамики

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}.$$

Работа в этом процессе с учетом того, что $V_2 = 2V_1$, будет равна

$$A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1.$$

При изохорном охлаждении газа от температуры T_2 до первоначальной температуры T_1 происходит уменьшение внутренней энергии газа за счет теплоты Q_{23}, отданной газом окружающей среде. Газ в этом процессе работы не совершает, следовательно

$$A_{23} = 0, \quad Q_{23} = \Delta U_{23}.$$

Полное изменение внутренней энергии складывается из изменения энергии на участке 1-2 и изменения энергии на участке 2-3. Поскольку в данном случае начальная и конечная температуры совпадают, то

$$\Delta U_{12} = -\Delta U_{23},$$

и поэтому

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} = 0.$$

Количество полученного газом тепла в процессе перехода 1-2-3 определяется алгебраической суммой

$$Q_{13} = Q_{12} + Q_{23}.$$

С учетом предыдущего, имеем

$$Q_{13} = A_{12} = \nu R T_1 = 2{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Задача 2. Определить удельные теплоемкости c_V и c_P смеси газов, содержащей кислород массой $m_1 = 0{,}01$ кг и аргон массой $m_2 = 0{,}02$ кг. Молярная масса кислорода $M_1 = 32$ кг/кмоль, молярная масса аргона $M_2 = 40$ кг/кмоль.

Решение

По определению, количество теплоты, сообщенное смеси газов при постоянном объеме, равно

$$\delta Q = c_V m dT,$$

где c_V - удельная теплоемкость рассматриваемой смеси идеальных газов.

С другой стороны, выражение для δQ можно записать как сумму

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = (c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2) dT,$$

где c_{V1}, c_{V2}, m_1, m_2 - удельные теплоемкости и массы кислорода и азота соответственно. Приравнивая правые части этих выражений, получим

$$c_V (m_1 + m_2) = c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2,$$

отсюда

$$c_V = \frac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}.$$

Проведя аналогичные преобразования, получим выражение, связывающее удельную теплоемкость смеси при постоянном давлении с удельными теплоемкостями кислорода и азота

$$c_p = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2}.$$

В свою очередь, удельные теплоемкости идеальных газов при постоянном объеме и постоянном давлении определяются формулами

$$c_{V1} = \frac{C_{V1}}{M_1} = \frac{i_1 R}{2M_1}, \quad c_{V2} = \frac{C_{V2}}{M_2} = \frac{i_2 R}{2M_2},$$

$$c_{p1} = \frac{C_{p1}}{M_1} = \frac{(i_1+2)R}{2M_1}, \quad c_{p2} = \frac{C_{p2}}{M_2} = \frac{(i_2+2)R}{2M_2},$$

где i - число степеней свободы молекулы.

Кислород, как двухатомный газ, обладает пятью степенями свободы, т.е. $i_1 = 5$, а одноатомный газ аргон, обладает тремя степенями свободы, т.е. $i_2 = 3$.

Учитывая представленные выражения для удельных теплоемкостей кислорода и азота, для смеси газов получим

$$c_V = \frac{R}{2(m_1 + m_2)}\left(\frac{i_1 m_1}{M_1} + \frac{i_2 m_2}{M_2}\right);$$

$$c_p = \frac{R}{2(m_1 + m_2)}\left(\frac{(i_1+2)m_1}{M_1} + \frac{(i_2+2)m_2}{M_2}\right).$$

Подстановка числовых значений дает следующий результат

$c_V = 424$ Дж/(кг·К); $c_p = 649$ Дж/(кг·К).

Задача 3. Определить коэффициент полезного действия цикла, состоящего из двух изобар и двух изохор, если в пределах цикла давление изменяется в 2 раза, а объем в 4 раза. Рабочим веществом является один моль идеального газа с показателем адиабаты γ .

Решение

Представим данный цикл в координатах pV (рис.38). При обходе контура по часовой стрелке система работает как тепловой двигатель с коэффициентом полезного действия

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

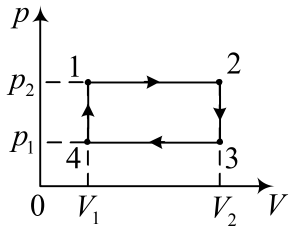


Рис.38

где Q_1 - теплота, полученная от нагревателя.

Полная работа, совершенная рабочим телом, определяется интегралом по замкнутому контуру, который может быть заменен суммой работ на каждом участке и равен

$$A = \oint p dV = \int_1^2 p_2 dV + \int_3^4 p_1 dV = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 6 p_1 V_1 .$$

Найдем теперь теплоту, которую получает или отдает рабочее тело на каждом этапе цикла. Этапы 1-2 и 3-4 представляют собой изобарические процессы, поэтому

$$Q_{12} = C_p (T_2 - T_1) > 0,$$

$$Q_{34} = C_p (T_4 - T_3) < 0.$$

Для этапов 2-3 и 4-1, являющихся изохорическими, имеем

$$Q_{23} = C_V (T_3 - T_2) < 0,$$

$$Q_{41} = C_V (T_4 - T_1) > 0.$$

Следовательно, получаемое тепло от нагревателя определяется суммой $Q_1 = Q_{12} + Q_{41}$, а теплота $Q_2 = Q_{34} + Q_{23}$ отдается холодильнику.

Используя уравнения состояния идеального газа, определим соотношения между температурами. Для изобарных процессов 1-2 и 3-4, получим $V_2 / V_1 = T_2 / T_1 = 4$, или $T_2 = 4T_1$, и аналогично $T_3 = 4T_4$.

С другой стороны, для изохорных процессов $p_1 / p_4 = T_1 / T_4 = 2$, или $T_1 = 2T_4$, и аналогично $T_2 = 2T_3$.

Общее количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41} = 3C_p T_1 + C_V T_1 = C_V T_1 (3\gamma + 1).$$

Учитывая, что для одного моля идеального газа

$$C_V = \frac{i}{2} R = \frac{3}{2} R, \text{ и } \frac{p_1 V_1}{T_1} = R,$$

получим окончательно

$$\eta = \frac{6 p_1 V_1}{C_V T_1 (3\gamma + 1)} = \frac{4}{(3\gamma + 1)}.$$

Задача 4. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изобарного, адиабатного и изотермического процессов. При изобарном процессе рабочее тело, представляющее идеальный газ, нагревается от температуры $T_1 = 200$ К до $T_2 = 500$ К. Определить коэффициент полезного действия данного теплового двигателя и сравнить его с максимальным КПД цикла Карно, работающего при тех же температурах.

Решение

Представим данный цикл в координатах pV (рис.39). После изобарного расширения (прямая 1-2), газ нагревается от температуры T_1 до температуры T_2, затем адиабатно (кривая 2-3) расширяется до тех пор, пока его температура не будет равна начальной T_1, после чего изотермическим сжатием (кривая 3-1) газ возвращается в исходное состояние.

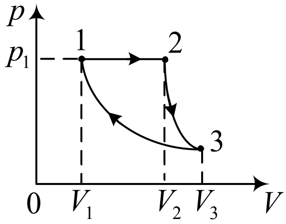


Рис.39

Количество теплоты Q_1 газ получает только в процессе 1-2, а отдает тепло в процессе 3-1. Процесс 2-3 происходит без теплообмена. В этом случае, согласно определению коэффициента полезного действия, имеем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Количество теплоты, получаемое рабочим телом при изобарном процессе,

$$Q_1 = \frac{m}{M} C_p R \Delta T = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R(T_2 - T_1),$$

где $C_p = \frac{i+2}{2} R$ - молярная теплоемкость при постоянном давлении, $i = 3$ - число степеней свободы одноатомного газа.

Количество теплоты, отдаваемое рабочим телом при изотермическом сжатии,

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

Для нахождения неизвестного отношения V_3 / V_1, воспользуемся уравнениями изобарного и адиабатного процессов.

Для изобарного процесса 1-2

$$V_2 / V_1 = T_2 / T_1.$$

Для адиабатного процесса 2-3, согласно уравнению Пуассона,

$$(V_3 / V_2)^{\gamma - 1} = T_2 / T_3.$$

Учитывая, что $T_3 = T_1$, получаем

$$\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Перемножая почленно первое и последнее равенства, имеем

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Тогда

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Выразив коэффициент Пуассона через число степеней свободы, найдем

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{i+2}{2},$$

$$Q_2 = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

После подстановки полученного выражения в формулу для КПД цикла и преобразования, имеем окончательно

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} = 0{,}39.$$

Коэффициент полезного действия цикла Карно при тех же температурах будет, как и ожидалось, существенно выше

$$\eta_K = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 0{,}6.$$

Задача 5. Тепловую машину, работающему по циклу Карно с коэффициентом полезного действия $\eta = 40\%$, начинают использовать при тех же условиях как холодильную машину. Найти величину холодильного коэффициента и количество теплоты, которое эта машина может перенести за один цикл от холодильника к нагревателю, если к ней подводится работа, равная 200 Дж.

Решение

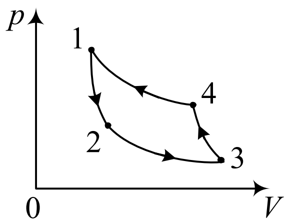


Рис.40

В данном случае холодильная машина работает по обратному циклу Карно (рис.40). Эффективность такой машины характеризуется отношением отнятой у холодильника теплоты Q_{2x} к совершенной для этого работе внешних сил A^*:

$$\varepsilon = \frac{Q_{2x}}{A^*}.$$

Эту величину принято называть холодильным коэффициентом.

Полная работа за цикл, согласно первому началу термодинамики, равна количеству теплоты, получаемой и отдаваемой за цикл, т.е.

$$A = -Q_{1x} + Q_{2x},$$

где Q_{1x} - количество тепла, переданного окружающей среде.

При этом

$$Q_{2x} = Q_{23} = \frac{m}{M} R T_2 \ln\frac{V_3}{V_2}, \quad Q_{1x} = Q_{41} = \frac{m}{M} R T_1 \ln\frac{V_4}{V_1}.$$

Записав уравнения адиабат для процессов 1-2 и 3-4

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \qquad T_4 V_4^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1},$$

с учетом того, что $T_1 = T_4$ и $T_2 = T_3$, получим

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \text{ и тогда } Q_{1x} = \frac{m}{M} R T_1 \ln\frac{V_3}{V_2}.$$

Работа внешних сил за один цикл

$$A^* = -A = Q_{1x} - Q_{2x} = \frac{m}{M} R \ln\frac{V_3}{V_2}(T_1 - T_2).$$

Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{Q_{2x}}{Q_{1x} - Q_{2x}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

С другой стороны, при прямом цикле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Поскольку машина обратима, она забирает от холодильника столько же теплоты, сколько передает ему при прямом цикле. Отсюда

$$|Q_{2x}| = |Q_2| = A\frac{(1-\eta)}{\eta}, \quad \varepsilon = \left|\frac{Q_{2x}}{A}\right| = \frac{1-\eta}{\eta}.$$

Подстановка числовых значений дает:

$$Q_{1x} = 300 \text{ Дж}, \quad \varepsilon = 1{,}5.$$

Задача 6. Найти изменение энтропии при переходе водорода массой $m = 0{,}006$ кг от объема $V_1 = 20$ л под давлением $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, к объему $V_2 = 60$ л под давлением $p_2 = 10^5$ Па.

Решение

По определению

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T},$$

С учетом первого закона термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V},$$

после подстановки и интегрирования, получим

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}.$$

Подставляя данное соотношение, найдем

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{M} C_V \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} =$$

$$= \frac{m}{M} \left(C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Значения молярных теплоемкостей при постоянном объеме и давлении для водорода соответственно равны

$$C_V = \frac{5}{2} R \text{ и } C_p = \frac{7}{2} R .$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta S = 71 \text{ Дж/К}.$$

2.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. При изотермическом расширении азота при температуре $T = 280 K$ объем его увеличился в два раза. Определить: а) совершенную при расширении работу; б) изменение внутренней энергии; в) количество теплоты, полученное газом. Масса азота $m = 0{,}2$ кг. [$Q = A = 11{,}5$ Дж; $\Delta U = 0$]

2. Определить работу, которую совершает азот, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты $Q = 21$ кДж. [$A = 6$ кДж; $\Delta U = 15$ кДж]

3. Какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличился в три раза? [6,62 кДж]

4. Определить работу адиабатного расширения водорода массой $m = 4$ г, если температура газа понизилась на $\Delta T = 10$ К. [416 Дж]

5. В сосуде вместимостью $V = 6$ л находится при нормальных условиях двухатомный газ, массой $m = 5$ г. Определить удельную теплоемкость газа при постоянном объеме. [1,1 кДж/(кг·К)]

6. Чему равны удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и постоянном давлении c_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна $\rho_0 = 1{,}43$ кг/м^3. [650 Дж/(кг·К); 910 Дж/(кг·К);]

7. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p газообразной окиси углерода (СО). Молекулы считать жесткими. [742 Дж/(кг·К); 1,04 кДж/(кг·К)]

8. В цикле Карно рабочее вещество получает от нагревателя тепло $Q = 300$ кДж. Температуры нагревателя и холодильника равны соответственно $T_1 = 450$ К и $T_2 = 280$ К. Определить работу, совершенную рабочим телом за цикл. [113 кДж]

9. Идеальная тепловая машина имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой $T_1 = 373$ К, а в качестве холодильника – сосуд со льдом при $T_2 = 273$ К. Какая масса льда растает при совершении машиной работы $A = 10^6$ Дж? [8 кг]

10. Определить изменение энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л. [3,6 Дж/К]

Второй уровень сложности

1. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 200$ кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем его давление возросло до $p_2 = 500$ кПа при неизменном объеме. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную газом работу и теплоту, переданную газу. Построить график процесса. [$\Delta U = 3{,}25 МДж$; $A = 0{,}4 МДж$; $Q = 3{,}65 МДж$]

2. Водород при нормальных условиях имел объем $V_1 = 100$ м^3. Найти изменение внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема $V_2 = 150$ м^3. [$-3{,}8 МДж$]

3. В цилиндре под поршнем находится водород, который имеет массу $m = 0{,}02$ кг и начальную температуру $T_1 = 300$ К. Водород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в 5 раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатического расширения и работу, совершенную газом. Изобразить процесс графически. [T_2=157К; А=8,8 кДж]

4. Определить отношение $\gamma = c_p / c_V$ для смеси 3 молей аргона и 5 молей кислорода. [1,46]

5. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p для смеси газа, состоящего по массе из 85% кислорода (O_2) и 15% озона (O_3). Молекулы считать жесткими. [630 Дж/(кг·К); 880Дж/(кг·К)]

6. 25% молекул кислорода диссоциировано на атомы. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p такого газа. [67Дж/(кг·К); 1,05 кДж/(кг·К)]

7. Цикл состоит из изотермы ($T_1 = 600$ К), изобары и изохоры. Отношение $V_2 / V_3 = 2$. Рабочее вещество – идеальный газ ($i = 5$). Построить график цикла. Определить КПД цикла. [10%]

8. Найти КПД цикла, состоящего из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), изохорические – при объемах V_1 и V_2 (V_2 в e раз больше, чем V_1). Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ. [$\eta = \dfrac{(\gamma - 1)(T_1 - T_2)}{(\gamma T_1 - T_2)}$]

9. Найти приращение энтропии одного моля углекислого газа при увеличении его абсолютной температуры в 2 раза, если процесс нагревания: а) изохорический; б) изобарический. [а) 19 Дж/К; б) 25Дж/К]

10. Гелий массой $m = 1{,}7$ г адиабатически расширили в 3 раза, а затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии газа в этом процессе. [-10 Дж/К]

3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

3.1. Электростатическое поле в вакууме

3.1.1. Основные понятия, законы и формулы

- Электрический заряд

$e = \pm 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл - элементарный заряд;

$q = \pm eN$ - квантованность заряда, N – число избыточных или недостающих электронов;

$\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$ - взаимодействие точечных зарядов (закон Кулона).

$\tau = \dfrac{dq}{dl}$, $\sigma = \dfrac{dq}{ds}$, $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ - линейная, поверхностная и объемная плотность заряда;

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const$$ - закон сохранения заряда.

- Напряженность электрического поля

$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$ - напряженность поля точечного заряда;

$\vec{F} = q\vec{E}$ - силовая характеристика электрического поля.

- Потенциал электрического поля

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$ - потенциал поля точечного заряда;

$W = q\varphi$ - потенциальная энергия точечного заряда в электрическом поле.

- Принцип суперпозиции полей

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i .$$

- Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right), \quad E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}.$$

- Теорема Гаусса для электростатического поля – поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов в объеме, ограниченном этой поверхностью, деленной на ε_0:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i ;$$

при непрерывном распределении зарядов с поверхностной σ или объемной ρ плотностью

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \sigma dS, \quad \Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho dV .$$

- Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ - условие консервативности сил электростатического поля

$$\oint_L E_l dl = 0.$$

- Работа сил электростатического поля по перемещению заряда равна убыли потенциальной энергии заряда

$$A_{12} = -\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2), \; A_{12} = q\int_1^2 E_e dl \cdot$$

- Напряженность и потенциал поля диполя

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}; \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

где $p = q\ell$ - электрический момент диполя; θ- угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

- Сила и момент сил, действующих на диполь во внешнем поле:

$$\vec{F} = \vec{p}\frac{\partial \vec{E}}{\partial \ell}; \ \overrightarrow{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$$

3.1.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Определение напряженности и потенциала заданного распределения точечных зарядов.

Метод решения. Применение принципа суперпозиции электростатических полей.

Потенциал заданного распределения точечных зарядов находится алгебраическим суммированием потенциалов, создаваемых каждым из зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}.$$

Знаки потенциалов учитываются автоматически через знаки зарядов.

Напряженность заданного распределения точечных зарядов определяется векторной суммой, напряженностей создаваемых каждым из зарядов

$$\vec{E} = \sum_{1}^{n} \vec{E}_i, \text{ где } E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_i|}{r_i^2}.$$

В этом случае целесообразно сделать рисунок и показать направления всех векторов $\vec{E}_i$ с последующим их сложением по правилу параллелограмма. При расчете E_i заряд q_i следует брать по модулю, так как знак каждого заряда уже был учтен при изображении соответствующего вектора напряженности.

Тип 2. Определение потенциала и напряженности электростатического поля заданного непрерывного распределения линейных, поверхностных или объемных зарядов.

Метод решения. Разбиение заряженного тела на элементарные участки, которые можно рассматривать как точечные заряды, определение напряженности $d\vec{E}$ и потенциала $d\varphi$ выделенного элементарного заряда в искомой точке, с последующим интегрированием в соответствии с принципом суперпозиции.

Потенциал является величиной скалярной, поэтому его величина найдется непосредственным интегрированием

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}.$$

Для нахождения напряженности поля необходимо, прежде всего, вектор $d\vec{E}$ выразить через его проекции на оси координат

$$d\vec{E} = \vec{i}\,dE_x + \vec{j}dE_y,$$

и лишь после этого переходить к интегрированию

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \vec{i}\int dE_x + \vec{j}\int dE_y.$$

Модуль вектора напряженности определится по теореме Пифагора

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Тип 3. Определение напряженности электростатического поля и потенциала заданного непрерывного распределения зарядов, обладающих плоской, осевой или центральной симметрией. К данным видам симметрии относятся поля, создаваемые равномерно заряженной сферой, шаром, протяженной плоскостью или длинным цилиндром (нитью).

Метод решения. Применение теоремы Гаусса.

Вспомогательная замкнутая поверхность, называемая гауссовой, выбирается исходя из соображений симметрии. В данных случаях теорема Гаусса, определяющая поток вектора напряженности через суммарный заряд внутри данной поверхности, позволяет достаточно просто найти напряженность результирующего поля как функцию координат. Потенциал или разность потенциалов в этом случае рассчитывается по формуле, связывающей напряженность и разность потенциалов, т.е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_\ell d\ell .$$

Тип 4. Определение работы электрического поля по перемещению заряда и повороту диполя.

Метод решения. Нахождение работы электрических сил по перемещению заряда в поле через разность потенциалов в начальной и конечной точке перемещения, либо путем прямого интегрирования напряженности поля как функции координат по линии перемещения заряда. В зависимости от условий задачи характеристики поля ($\vec{E}$, $\Delta\varphi$) определяются согласно выше рассмотренным методом.

Работа электрических сил по повороту диполя определяется с использованием формулы работы при вращательном движении

$$A = \int_0^\varphi M d\varphi ,$$

или через убыль потенциальной энергии

$$A = -\Delta W .$$

3.1.3. Примеры решения задач

Задача 1. В вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}1$ м находятся точечные заряды $q_1 = q_2 = q_3 = 10$ нКл и $q_4 = -10$ нКл. Определить напряженность электростатического поля и потенциал в центре квадрата.

Решение

Напряженности электростатического поля каждого из рассматриваемых зарядов в центре квадрата одинаковы по величине и равны

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

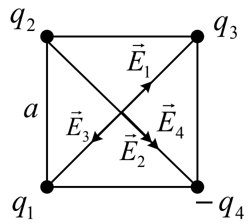


Рис.41

где $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Направления векторов $\vec{E}_i\,(i = 1,2,3,4)$ показаны на рис.41. В соответствии с принципом суперпозиции результирующий вектор $\vec{E}$ находим как векторную (геометрическую) сумму напряженностей, создаваемых каждым из зарядов, модуль которого равен

$$E = 2\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$E = \frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 2}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1^2} = 36 кВ/м.$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов. В условиях данной задачи

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},\ \varphi_4 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Окончательно

$$\varphi = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{2\cdot 10^{-8}\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1} = 2{,}52 кВ.$$

Задача 2. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q = 4$ мкКл. Какой точечный заряд необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды q_1 и q_2, чтобы напряженность электрического поля в третьей вершине оказалась равной нулю?

Решение

Модуль вектора напряженности электростатического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2 в третьей вершине равностороннего треугольника, определяется выражением

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

где r - сторона треугольника.

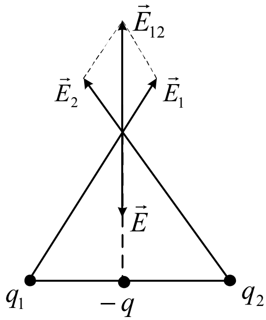


Рис.42

Направление векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и результирующего вектора $\vec{E}_{12}$ показано на рис.42. Модуль результирующего вектора напряженности, равен

$$E_{12} = 2 \cdot E_1 \cdot \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}.$$

Для того чтобы напряженность в третьей вершине стала равной нулю, дополнительный электрический заряд должен создавать электрическое поле, напряженность которого равна по величине, но противоположна по направлению вектору $\vec{E}_{12}$. Учитывая, что квадрат расстояния от заряда до вершины равен $\frac{3}{4}r^2$, получим

$$q = -E \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{3}{4}r^2 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}q_1.$$

Задача 3. Положительный заряд равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом a с линейной плотностью λ. Найти напряженность E электрического поля на оси кольца как функцию расстояния x от его центра. Исследовать случаи: а) $x = 0$, б) $|x| >> a$.

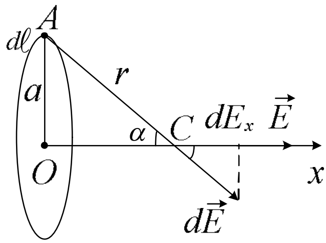


Рис.43

Решение

Выделим на кольце около точки A малый элемент $d\ell$ (рис.43), несущий элементарный заряд $dq = \lambda d\ell$. Вектор напряженности поля, создаваемого этим зарядом в точке C равен

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda d\ell}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор направленный от элемента $d\ell$ к точке C, в которой определяется напряженность.

Разложим вектор $d\vec{E}$ на составляющие вдоль координатных осей

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y = \vec{i}\,dE_x + \vec{j}dE_y,$$

и перейдем к интегрированию.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \vec{i}\int dE_x + \vec{j}\int dE_y .$$

В силу симметрии $E_y = \int dE_y = 0$. Тогда результирующий вектор напряженности $\vec{E}$ направлен по оси x, модуль которого найдем интегрированием

$$E = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\alpha \int_0^{2\pi a} d\ell = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi a\lambda\cos\alpha}{r^2} .$$

Учитывая, что $r = \left(a^2 + x^2\right)^{1/2}$ и $\cos\alpha = \dfrac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{1/2}}$,

получаем

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} .$$

а) Если $x = 0$, то $E = 0$; б) если $|x|$>>а, то $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,

т.е. на больших расстояниях кольцо можно считать точечным зарядом.

Задача 4. Тонкий стержень длиной L = 10 см равномерно заряжен с линейной плотностью λ = 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии d = 20 см от ближайшего его конца находится точечный заряд q = 100 нКл. Определите силу взаимодействия стержня и точечного заряда.

Решение

Выполним рисунок. За начало отсчета оси OX возьмем точечный заряд, направив ось в сторону стержня (рис.44).

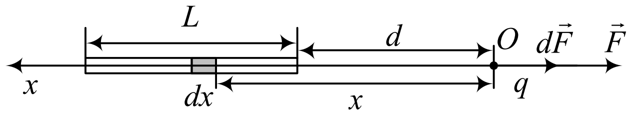


Рис.44

Выделим на стержне элемент dx, несущий элементарный заряд $dq = \lambda dx$. Взаимодействие данного элементарного заряда с точечным зарядом определится по закону Кулона

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda}{x^2}dx.$$

Сила взаимодействия стержня и точечного заряда определится интегрированием

$$F = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right) = \frac{q\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 d(d+L)}.$$

Произведя вычисления, получим

$$F = 1{,}5 \cdot 10^{-3} H.$$

Задача 5. Тонкая прямая нить длиной 2ℓ заряжена равномерно с линейной плотностью λ. Найти напряженность E поля в точке, отстоящей на расстоянии x от центра нити и расположенной симметрично относительно ее концов. Исследовать случаи: а) x>>ℓ; б) $\ell \to \infty$.

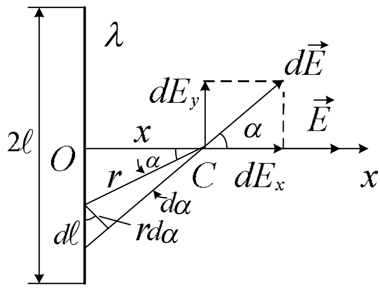


Рис.45

Решение.

Выделим на нити элементарный участок $d\ell$ (рис.45). Электрический заряд данного участка $dq = \lambda d\ell$ можно считать точечным. Вектор напряженности поля, создаваемого данным зарядом на расстоянии *x* от центра нити в точке *C*, равен

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\ell}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор направленный от элемента $d\ell$ к точке *C*, в которой определяется напряженность.

Разложим вектор $d\vec{E}$ на составляющие вдоль координатных осей

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y = \vec{i}\,dE_x + \vec{j}dE_y,$$

и перейдем к интегрированию.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \vec{i}\int dE_x + \vec{j}\int dE_y.$$

В силу симметрии $E_y = \int dE_y = 0$. Тогда результирующий вектор напряженности $\vec{E}$ направлен по оси *x*, модуль которого найдем интегрированием

$$E = \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\ell}{r^2}\cos\alpha .$$

Приведем это выражение к виду, удобному для интегрирования. С этой целью выразим две переменные $d\ell$ и r через одну, а именно угол α. Из рисунка видно, что

$$r = \frac{x}{\cos\alpha};\ dl = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha}.$$

Поэтому $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\lambda}{x}2\displaystyle\int_0^{\alpha_0}\cos\alpha d\alpha = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}2\sin\alpha_0$,

где $\sin\alpha = \dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}$.

Окончательно имеем

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{\ell^2 + x^2}}.$$

а) Если x>>ℓ, то $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$, как поле точечного заряда;

б) Если $\ell \to \infty$, то $E = \dfrac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}$.

Задача 6. Определить напряженность электрического поля в центре полусферы радиуса R, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ.

Решение

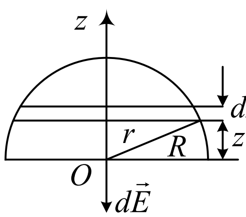


Рис.46

Разобьем полусферу на тонкие кольца, представленные на рис.46. Элементарный заряд кольца будет равен

$$dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r R d\varphi .$$

Для определения напряженности поля на оси кольца как функции расстояния от его центра, воспользуемся формулой, полученной при решении задачи №3. С учетом новых обозначений, данная формула будет иметь вид

$$dE = \frac{adq}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{a\sigma r d\varphi}{2\varepsilon_0 R^2}.$$

Учитывая, что $r = R\sin\varphi$, а $a = R\cos\varphi$, получим

$$dE = \frac{\sigma\cos\varphi\sin\varphi d\varphi}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma\sin d(\sin\varphi)}{4\varepsilon_0}.$$

Интегрируя данное выражение в пределах угла φ от 0 до $\pi/2$, найдем напряженность в центе полусферы

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\sin d(\sin\varphi)}{4\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Задача 7. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma > 0$. Определить напряженность электрического поля и представить график $E(x)$.

Решение

Линии векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ всюду перпендикулярны плоскости и параллельны по отношению друг к другу (рис.47а). Это значит, что поля в обоих полупространствах однородные. Одно векторное полупространство будет зеркальным отображением другого. Следовательно $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$.

Вычислим модуль напряженности $E = \left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right|$,

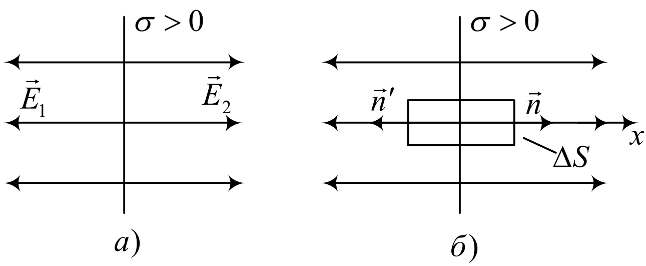


Рис.47

опираясь на интегральную теорему Гаусса. Сообразно картине полей в качестве замкнутой поверхности возьмем прямой цилиндр с основаниями по разные стороны плоскости (рис.47б). Поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность цилиндра равен нулю. Поэтому полный поток через всю поверхность будет равен сумме потоков через основания цилиндра, т.е.

$$\oint_S E_n dS = 2E \cdot \Delta S,$$

где ΔS - площадь основания цилиндра.

Заряд внутри цилиндра

$$q = \sigma \cdot \Delta S.$$

Согласно теореме Гаусса

$$2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0},$$

отсюда получаем

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

График зависимости $E(x)$ представлен на рис.48.

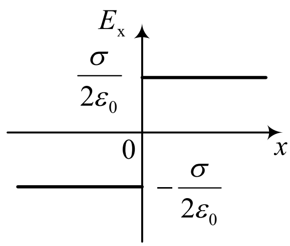


Рис.48

Задача 8. На поверхности бесконечного пустотелого проводящего цилиндра радиусом R равномерно распределен заряд с линейной плотностью λ. Определить напряженность и потенциал электрического поля в зависимости от расстояния от оси цилиндра. Построить графики $E(r)$ и $\varphi(r)$.

Решение

Из соображений симметрии следует, что вектор напряженности электрического поля может быть направлен только радиально. Внутри цилиндра поле отсутствует. Для определения напряженности в произвольной точке C снаружи цилиндра выберем вспомогательную замкнутую поверхность в виде коаксиального цилиндра высотой h, радиус которого

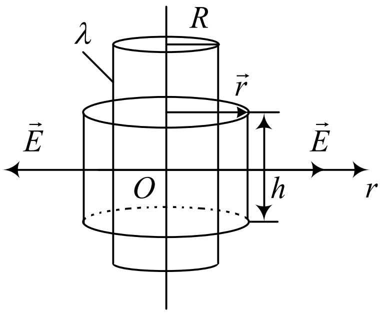


Рис.49

равен расстоянию от точки С до оси цилиндра (рис.49). Теорема Гаусса для выбранной поверхности запишется в виде

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda h,$$

отсюда $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

При $r = R$ напряженность поля принимает максимальное значение $E_{\max} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$.

Рассмотрим теперь потенциал данного поля. Примем за начало отчета потенциала, точку, удаленную от оси цилиндра на расстояние $3R$ (точка заземления). В этом случае потенциал на расстоянии $r>R$ от оси цилиндра определится интегралом

$$\varphi(r) - \varphi(0) = -\int_{3R}^{r} E(r)dr,$$

$$\varphi(r) = -\int_{3R}^{r} E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{3R}^{r}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{3R}{r}.$$

В частности, потенциал поверхности цилиндра ($r=R$)

$$\varphi(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3.$$

В виду отсутствия поля внутри цилиндра ($r \le R$) потенциал имеет постоянное значение

$$\varphi(r) = \varphi(R) = \text{const}.$$

На основании полученных результатов представим графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$ (рис.50).

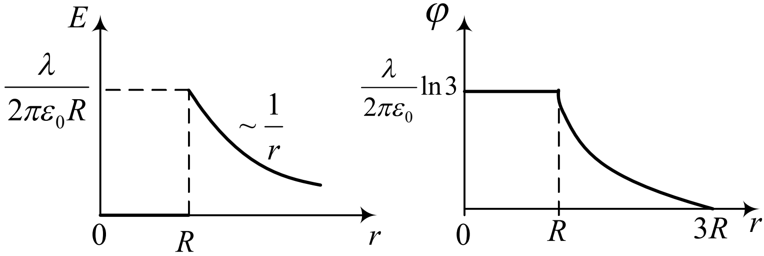


Рис.50

Задача 9. Две концентрические сферы с радиусами R_1=0,1 м и R_2=0,2 м равномерно заряжены с поверхностными плотностями σ_1=10нКл/м^2 и σ_2=15нКл/м^2 (рис.51). Найти напряженности и потенциалы электростатического поля на поверхностях сфер. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$.

Решение

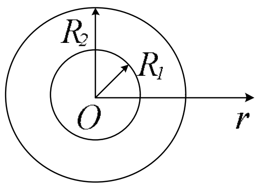


Рис.51

Поле такой системы является центрально-симметричным. Предполагаемая симметрия позволяет использовать теорему Гаусса для нахождения напряженности в различных областях электростатического поля, выбирая в качестве замкнутой поверхности концентрические сферы различного радиуса.

Очевидно, что для сферы радиуса $r < R_1$ из-за отсутствия внутри сферы заряда, согласно теореме Гаусса напряженность равна нулю.

Для концентрической сферы радиуса $R_1 < r < R_2$, применяя теорему Гаусса, получим

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2 \text{ и } E = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

В частности, при $r = R_1$, т.е. на поверхности первой сферы, напряженность равна

$$E = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 {R_1}^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = 1{,}13 кВ/м.$$

Применяя теорему Гаусса к концентрической сфере радиуса $r > R_2$, найдем зависимость $E(r)$ в данной области поля

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2 + \sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2\right) \text{ и } E = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Из полученного выражения следует, что на поверхности второй сферы при $r = R_2$ напряженность равна

$$E = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 {R_2}^2} = 1{,}98 кВ/м.$$

Для определения потенциала в различных областях поля, используем связь между E и φ в сферических координатах:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ и } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr.$$

Полагая потенциал поля в бесконечности равным нулю, путем интегрирования найдем зависимость $\varphi(r)$ в области $r > R_2$:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E dr = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 r}, \qquad \varphi_\infty = 0,$$

отсюда находим потенциал на поверхности внешней сферы

$$\varphi(R_2) = \int_{R_2}^\infty E dr = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 R_2} = 395 В.$$

Проведя интегрирование в области $R_1 < r < R_2$, получим

$$\varphi(r)-\varphi(R_2)=\int_r^{R_2} Edr=-\frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 R_2}+\frac{\sigma_1 R^2{}_1}{\varepsilon_0 r},\ \varphi(r)=\frac{\sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_0 R_2}+\frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r}.$$

Следовательно, потенциал внутренней сферы будет равен

$$\varphi(R_1)=\frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}=452B.$$

В области $r<\mathrm{R}_1$ потенциал постоянен и равен потенциалу на поверхности внутренней сферы, т.е.

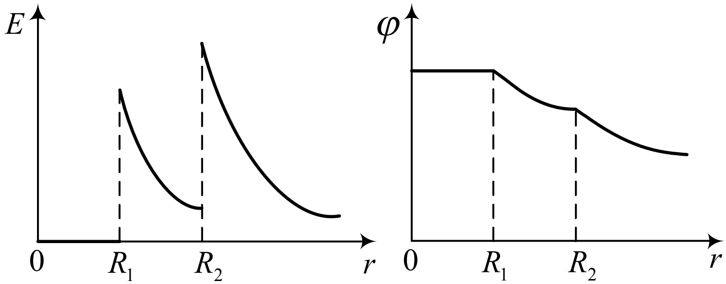


Рис.52

$$\varphi(r)=\varphi(R_1)=\frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}=452B.$$

На основании полученных результатов представим графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$ (рис.52).

Задача 10. Длинный цилиндр радиуса $R=0{,}02$ м равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho=2$ мкКл/м^3. Найти напряженность поля в точках, лежащих на расстояниях $r_1=0{,}01$ м и $r_2=0{,}03$ м от оси цилиндра, и разность потенциалов между этими точками. Построить графики $E_r(r)$ и $\varphi(r)$.

Решение

В данном случае поле обладает осевой симметрией (силовые линии радиальны), что позволяет искать напряженность поля с помощью теоремы Гаусса. В качестве вспомогательной гауссовой поверхности следует выбрать цилиндрическую поверхность, коаксиальную заряженному цилиндру. Построим две таких поверхности с радиусами $r < R$ и $r > R$ (рис.53). Поток вектора напряженности сквозь торцевые поверхности равен нулю. Поэтому полный поток вектора напряженности определяется только потоком через боковую поверхность. При этом напряженность в точках, принадлежащих боковой поверхности, в силу симметрии одинакова. Заряд внутри вспомогательной поверхности легко может быть найден через объемную плотность.

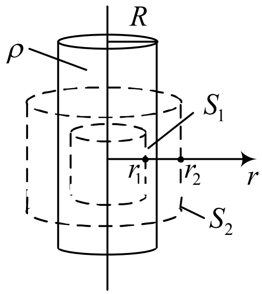


Рис.53

Следовательно, для поверхности радиуса $r < R$ теорема Гаусса будет иметь вид

$$E_r \cdot 2\pi rh = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0}, \quad \text{тогда} \quad E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r.$$

При $r > R$

$$E_r \cdot 2\pi rh = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0}, \quad \text{и} \quad E_r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Используя полученные формулы, рассчитаем значения напряженностей в точках 1 и 2,

$$E_1 = 1{,}1 \cdot 10^3 \text{ В/м}, \quad E_2 = 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

График зависимости $E_r(r)$ представлен на рис.54а.

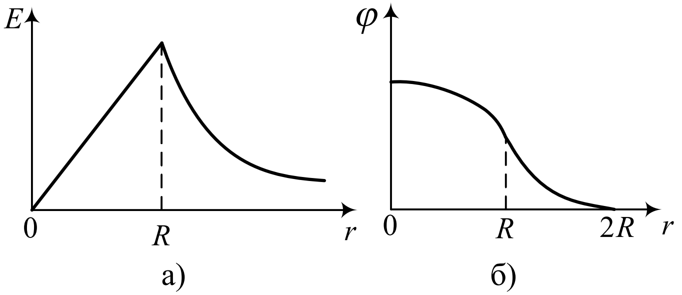


Рис.54

Максимальное значение напряженность поля приобретает при $r = R$:

$$E(R) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} = 2{,}3 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Для нахождения разности потенциалов между двумя точками воспользуемся соотношением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr\,.$$

В силу того, что характер функциональной зависимости $E_r(r)$ между точками 1 и 2 меняется, данный интеграл распадается на два

$$\int_1^2 E_r dr = \int_1^R E_r dr + \int_R^2 E_r dr\,.$$

В результате интегрирования получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{r_1}^{R} r dr + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^{r_2}\frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} + R^2 \ln\frac{r_2}{R}\right) = 35 B.$$

Для построения графика зависимости $\varphi(r)$ необходимо выбрать точку нулевого потенциала, которая. За начало отсчета потенциала возьмем, например, цилиндрическую поверхность, удаленную на расстояние $2R$ от оси цилиндра. Рассчитаем потенциалы на поверхности и оси цилиндра.

Потенциал на поверхности цилиндра найдем интегрированием выражения $E(r)$ в пределах от R до $2R$:

$$\varphi(R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot \ln 2 = 45{,}2\,\text{В}.$$

Потенциал на оси цилиндра определим уже при интегрировании $E(r)$ в пределах от 0 до R:

$$\varphi(0) - \varphi(R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^R r dr = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0},$$

отсюда $\varphi(0) = \dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + \varphi(R) = 67{,}9\,\text{В}.$

График зависимости $\varphi(r)$ представлен на рис.54б.

Задача 11. Кольцо радиусом R = 1 см имеет равномерно распределенный отрицательный заряд q = -1 нКл. Какую скорость приобретет электрон, удаляясь без начальной скорости из центра кольца в бесконечность?

Решение

Очевидно, что потенциал в центре кольца является отрицательным и равным

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}.$$

Потенциал поля в бесконечности равен нулю, т.е. $\varphi_2 = 0$ а, следовательно, его потенциальная энергия также равна нулю. Используя закон сохранения энергии, получим

$$W_1 = W_2 + \frac{m\upsilon^2}{2} ,$$

где $W_1 = e\varphi_1 = \dfrac{qe}{4\pi\varepsilon_0 R}$ - потенциальная энергия электрона в центре кольца, W_2=0 – потенциальная энергия электрона, удаленного в бесконечность.

Решая данное уравнение, получим

$$\upsilon = \sqrt{\frac{qe}{2\pi\varepsilon_0 mR}} = 17{,}8\,\text{Мм/с.}$$

Задача 12. Диполь с электрическим моментом $p = 10\,\text{нКл·м}$ находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 50\,\text{кВ/м}$. Направление вектора $\vec{p}$ составляет угол $\alpha = 60^0$ с направлением линий напряженности электрического поля (рис.55). Определить работу сил электрического поля при повороте диполя на угол $\Delta\alpha = 30^0$.

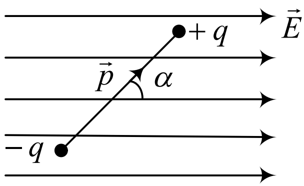


Рис.55

Решение

Рассмотрим диполь в однородном электрическом поле (рис.54). Вектор $\vec{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному заряду и составляет угол $\alpha = 60^0$ с направлением линий напряженности электрического поля.

По определению, момент сил, действующий на диполь со стороны электрического поля равен

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right] ,$$

или в скалярной форме $M = pE\sin\alpha$.

Механический момент сил поля стремится повернуть диполь в сторону совпадений векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$. Работа электрических сил будет положительной и может быть найдена путем интегрирования

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M_z d\alpha = pE\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha = -pE(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) .$$

Произведя вычисления, получим

$$A = 22{,}0 \text{ мкДж.}$$

Работу электрических сил можно также определить через изменение потенциальной энергии диполя в электрическом поле:

$$A = -\Delta W = W_1 - W_2 .$$

С учетом формулы потенциальной энергии диполя в электрическом поле, получим аналогичный результат

$$A = -pE(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 22{,}0 \text{ мкДж.}$$

3.1.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. В вершинах квадрата со стороной a = 5 см находятся одинаковые положительные заряды q = 2 нКл. Определить напряженность и потенциал поля в середине одной из сторон квадрата. [$E = \dfrac{4\sqrt{5}}{25}\cdot\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}$; $\varphi = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$]

2. Заряды по 1нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2м. Равнодействующая сил, действующих на четвертый заряд, помещенный на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6мкН. Определить этот заряд, напряженность и потенциал поля в точке его расположения. [2.10^{-9} Кл, 300 В/м, 232 В]

3. Тонкое полукольцо радиусом R = 20 см заряжено равномерно зарядом q = 0,7 нКл. Найдите модуль вектора

напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца. [20 В/м]

4. Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными с поверхностной плотностью σ_1=1нКл/м^2 и σ_2=-2 нКл/м^2. Определить напряженность электростатического поля: между плоскостями; за пределами плоскостей. Построить график $E(x)$. [E_1= 169 В/м; E_2= 56,5 В/м]

5. Тонкая нить изогнута в виде полуокружности радиусом R = 10 см и несет отрицательный заряд с линейной плотностью λ = -10 нКл/м. Определите потенциал электрического поля в центре окружности. [-282,6 В]

6. Заряд $q = 1$нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 1 см от поверхности заряженного шара радиусом 9 см. Поверхностная плотность заряда шара $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл/м^2. Определить совершаемую при этом работу. Какая работа совершается на последних 10 см пути? [$A_1 = 9{,}2 \cdot 10^{-4}$ *Дж*; $A_2 = 4{,}6 \cdot 10^{-4}$ *Дж*]

Второй уровень сложности

1. Полубесконечная прямая равномерно заряжена с линейной плотностью λ. Найти модуль и направление напряженности поля в точке, которая отстоит от нити на расстоянии x и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через ее конец. [$E = \sqrt{2}\lambda / 4\pi\varepsilon_0 x$, $\alpha = 45^\circ$]

2. Тонкий стержень длиной l=10см заряжен с линейной плотностью $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенному через один из его концов, на расстоянии r = 8 см от этого конца. [$E = 35{,}6$ кВ/м]

3. Бесконечная тонкая прямая нить заряжена с линейной плотностью λ = 2,0 мкКл/м. Найти E и φ как функции

расстояния r от нити. Потенциал на расстоянии r_0= 1м положить равным нулю. [$E = \lambda / 2\pi\varepsilon_0 r$, $\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r / r_0$]

4. Пространство заполнено зарядом, плотность которого изменяется по закону $\rho = \rho_0 / r$,где ρ_0 - константа, r - расстояние от начала координат. Найти зависимость $E(r)$. [$E = \rho_0 / 2\varepsilon_0$]

5. Электростатическое поле создается в вакууме шаром радиусом R = 10 см, равномерно заряженным с объемной плотностью ρ = 20 нКл/м^3. Определите разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях r_1 = 2 см и r_2 = 8 см от его центра. [2,26 В]

6. Шар, имеющий радиус R = 10 см, заряжен так, что объемная плотность электрического заряда изменяется по закону ρ = βr, где β = 1 мкКл/м^4. Определите разность потенциалов между поверхностью и центром шара. Постройте график зависимости напряженности от расстояния до центра шара. [9,4 В]

7. Электростатическое поле создается отрицательно заряженной бесконечной нитью с линейной плотностью $\lambda = 1$ нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, удалившись под действием поля вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 1$ см до $r_2 = 1{,}5$ см ? [1,6 $\cdot 10^6$ м/с]

3.2. Проводники и диэлектрики в электрическом поле

3.2.1. Основные законы и формулы

- Поляризованность диэлектрика – дипольный момент единицы объема диэлектрика, определяется полем связанных зарядов

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}{\Delta V}$$

где $\vec{p}_i$ - дипольный момент i-й молекулы; ΔV - объем диэлектрика.

- Связь между поляризованностью диэлектрика, напряженностью электростатического поля и плотностью связанных зарядов

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \quad P_n = \chi\varepsilon_0 E_n = \sigma',$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость вещества, P_n, E_n - проекции векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$ на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика, σ' - поверхностная плотность связанных зарядов.

- Вектор электрического смещения - определяется полем сторонних (свободных) зарядов в диэлектрике

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}; \quad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ - диэлектрическая проницаемость.

Вектор напряженности $\vec{E}$ – определяется результирующим полем свободных и связанных зарядов.

В однородном диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon, \quad \vec{D} = \vec{D}_0.$$

где $\vec{E}_0$, $\vec{D}_0$ - напряженность и электрическое смещение внешнего поля.

- Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i + \sum_{i=1}^{n} q_i'}{\varepsilon_0},$$

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} q_i \ ,$$

где Φ_E и Φ_D – потоки векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ сквозь произвольные замкнутые поверхности; $\sum_{i=1}^{n} q_i$, $\sum_{i=1}^{n} q_i'$ - алгебраическая сумма сторонних и связанных электрических зарядов, заключенных в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью.

- Условия на границе раздела двух диэлектриков

$$D_{2n} = D_{1n} \ , \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} \ ,$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ .$$

- Соотношения между напряженностью, электрическим смещением и поверхностной плотностью зарядов у поверхности проводника:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0}, \quad D_n = \sigma \ , \quad \sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma \ ,$$

где σ и σ'- поверхностная плотность соответственно сторонних и связанных зарядов.

3.2.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Расчет электростатических полей в диэлектрических средах, обладающих плоской, осевой или центральной симметрией. Определение напряженности, электрического смещения (индукции) и потенциала электростатического поля внутри однородного, изотропного диэлектрика.

Метод решения. Применение теоремы Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.

В диэлектриках поле создается как свободными, так и связанными зарядами, возникающими при его поляризации и приводящими к ослаблению поля. Воспользоваться теоремой Гаусса для поля $\vec{E}$ не представляется возможным, поскольку не известен связанный заряд. В то же время, применение аналогичной теоремы для вектора электрического смещения $\vec{D}$ позволяет находить этот вектор, не зная значения и распределения связанных зарядов. Использование соотношения, связывающего между собой $\vec{E}$ и $\vec{D}$, позволяет в дальнейшем определить как напряженность, так и потенциал электрического поля.

Тип 2. Нахождение напряженности, электрического смещения (индукции) и поверхностной плотности связанного заряда на границе раздела двух сред.

Метод решения. Использование соотношений между нормальными и тангенциальными составляющими векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух сред. Поверхностная плотность связанных зарядов на границе двух сред находится по изменению нормальной составляющей напряженности поля.

Тип 3. Нахождение характеристик полей, создаваемых системой индуцированных зарядов на проводниках.

Метод решения. Метод зеркальных изображений. Сущность метода заключается в том, что реальная картина электрического поля, создаваемая индуцированными зарядами, заменяется системой дополнительных зарядов, создающих эквивалентное поле.

3.2.3. Примеры решения задач

Задача 1. Точечный заряд q находится в центре шара радиусом R из однородного изотропного диэлектрика проницаемостью ε. Найти напряженность поля как функцию расстояния r от центра шара. Представить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

Решение

Сделаем рисунок, представив электрическое поле с помощью вектора $\vec{D}$ (рис.56). Силовые линии обладают радиальной симметрией, поэтому можно воспользоваться теоремой Гаусса. Поток вектора $\vec{D}$ через гауссову сферическую поверхность S радиусом r:

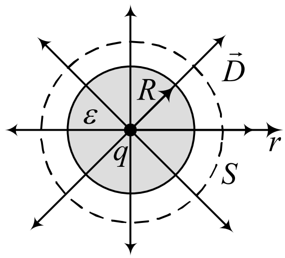


Рис.56

$$\oint D_n dS = 4\pi r^2 D.$$

Согласно теореме Гаусса для диэлектрика:

$$4\pi r^2 D = q\text{, откуда } D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Электрическое смещение связано с напряженностью электрического поля соотношением $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, из которого определим напряженность электрического поля в разных областях

1) для $r < R$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

2) для $r > R$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

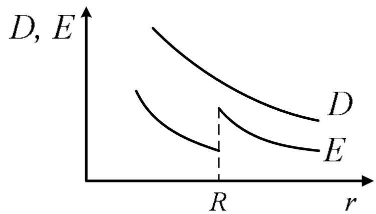


Рис.57

Графики зависимостей $D(r)$ и $E(r)$ представлены на рис.57.

Задача 2. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho > 0$ по шару радиусом R из однородного диэлектрика с проницаемостью ε (рис.58). Найти E и φ как функции расстояния r от центра шара. Изобразить примерные графики функций $E(r)$ и $\varphi(r)$. Найти поверхностную плотность связанных зарядов.

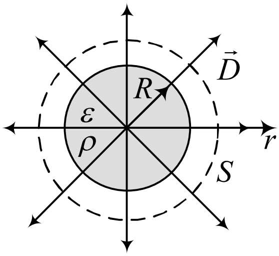


Рис.58

Решение

Выполним рисунок, представив электрическое поле шара, сторонний заряд которого равномерно распределен с объемной плотностью $\rho > 0$, с помощью вектора $\vec{D}$ (рис.58). Силовые линии поля обладают радиальной симметрией, поэтому можно воспользоваться теоремой Гаусса. Поток вектора $\vec{D}$ через гауссову сферическую поверхность радиусом r, равен

$$\oint D_n dS = 4\pi r^2 D .$$

Для поверхности S_1 внутри шара ($r < R$) в соответствии с теоремой Гаусса, имеем

$$4\pi r^2 \cdot D_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \ ,$$

откуда

$$D_1 = \frac{\rho}{3} r \text{ , и } E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon} r \ .$$

Для поверхности S_2 вне шара ($r > R$), получим

$$4\pi r^2 \cdot D_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho ,$$

тогда

$$D_2 = \frac{\rho R^3}{3r^2}, \text{ и } \; E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Приняв потенциал в бесконечности равным нулю ($\varphi_\infty = 0$), определим зависимость $\varphi(r)$ в области $r > R$, используя соотношение между напряженностью поля и потенциалом

$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty E_{2r} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

В частности, потенциал на поверхности шара ($r = R$) равен

$$\varphi_R = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}.$$

Аналогичным образом исследуем функциональную зависимость $\varphi(r)$, для $r < R$:

$$\varphi_1 - \varphi_R = \int_r^R E_{1r} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \int_r^R r dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0 \varepsilon}(R^2 - r^2),$$

следовательно,

$$\varphi_1(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0 \varepsilon}(R^2 - r^2) + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}.$$

При этом в центре шара потенциал равен

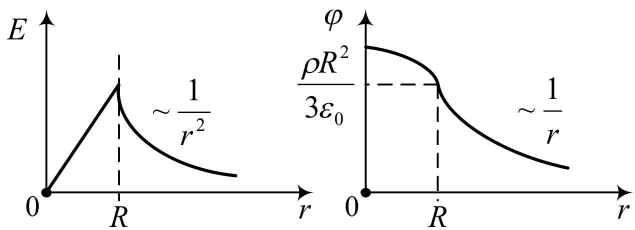


Рис.59

$$\varphi(0) = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right).$$

Графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$ представлены на рис.59.

Для нахождения поверхностной плотности связанных зарядов на поверхности шара, воспользуемся соотношением

$$\sigma' = \chi\varepsilon_0 E_n,$$

где $\chi = \varepsilon - 1$ - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, E_n - нормальная составляющая напряженности поля внутри диэлектрика. Вблизи поверхности шара

$$E_n = E_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}R,$$

следовательно,

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\rho R.$$

Задача 3. Однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε имеет вид сферического слоя радиусов a и b ($a < b$) (рис.60). Изобразить примерные графики модуля напряженности электрического поля E и потенциала φ как функции расстояния r от центра системы, если диэлектрик имеет положительный равномерно распределенный с объемной плотностью ρ сторонний заряд.

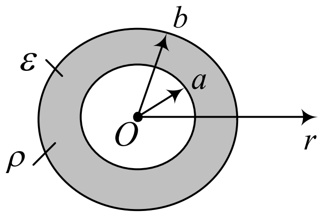


Рис.60

Решение

Учитывая сферически-симметричное распределение стороннего заряда в диэлектрике, для определения напряженности поля E воспользуемся теоремой Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$.

Электрический заряд внутри сферы радиуса r ($a < r < b$) определится интегрированием

$$q = \int \rho dV = 4\pi\rho \int_a^r r^2 dr = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - a^3),$$

в частности, для $r > b$, имеем

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3).$$

С учетом этого на основе теоремы Гаусса, получим

1) для $0 < r < a$, $D = 0$ $E = 0$;

2) для $a < r < b$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3r^2}, \quad E = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 \varepsilon r^2};$$

3) для $r > b$

$$D = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3r^2}, \quad E = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Перейдем к определению потенциалов.

При $r \to \infty$ $\varphi \to 0$, поэтому для $r > b$

$$\varphi(r) = \int_\infty^r E(r)dr = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0} \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r}.$$

На основании данной формулы при $r = b$, имеем

$$\varphi(b) = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 b}.$$

Внутри диэлектрического слоя

$$\varphi(r) - \varphi(b) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \int_r^b \frac{(r^3 - a^3)}{r^2} dr =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{r} \right)$$

отсюда

$$\varphi(a)=\frac{\rho(b^2-a^2)}{6\varepsilon_0\varepsilon}+\frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0 b}.$$

На промежутке $0 \geq r \leq a$ $\varphi = const = \varphi(a)$.

На основе полученных результатов построим примерные графики зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$ (рис.61).

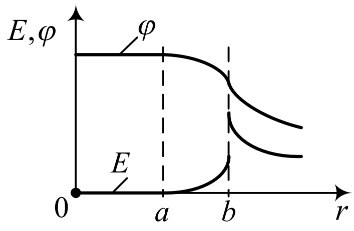


Рис.61

Задача 4. Точечный заряд $q>0$ находится в центре шара радиуса R с проницаемостью ε_1, который в свою очередь окружен диэлектриком с проницаемостью ε_2. Найти поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности раздела этих диэлектриков.

Решение

Вследствие поляризации диэлектриков под действием поля точечного заряда на границе сферы радиуса R возникнут поверхностные связанные заряды σ_1' и σ_2' противоположных знаков (рис.62). Если $q>0$ и $\varepsilon_1>\varepsilon_2$, то $|\sigma_1' > \sigma_2'|$. Введем суммарную плотность зарядов

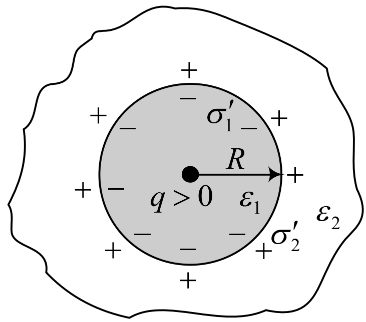


Рис.62

$$\sigma' = \sigma_1' + \sigma_2'.$$

Учитывая сферическую симметрию поля, на основании теоремы Гаусса для диэлектрика, напишем

$$\oint\limits_S D_n dS = D \cdot 4\pi r^2 = q\ ,\ D_n = D_r = D\ ,$$

отсюда $D = \dfrac{q}{4\pi r^2}$, а нормальные составляющие напряженности на границе раздела диэлектриков ($r = R$) соответственно равны

$$E_{1n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R^2} \text{ и } E_{2n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 R^2}\ .$$

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем по изменению нормальной составляющей напряженности поля. Согласно теореме Гаусса, записанной для потока вектора $\vec{E}$, сквозь выделенный элементарный цилиндр в окрестности границы раздела диэлектриков, нормальная составляющая вектора $\vec{E}$ претерпевает разрыв

$$\Delta E_n = E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}\ .$$

Отсюда для поверхностной плотности связанных зарядов получаем

$$\sigma' = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 R^2}\ .$$

Задача 5. Металлический шар радиуса $R_1 = 2$ см с зарядом $Q_1 = 1$ нКл окружен металлической концентрической оболочкой, радиусы которой $R_2 = 5$ см и $R_3 = 7$ см. Пространство между шаром и оболочкой заполнено парафином ($\varepsilon = 2$) (рис.63). Металлической

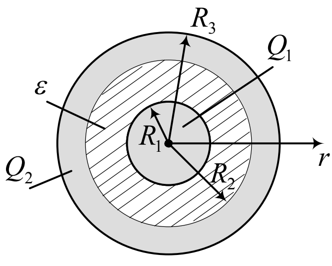


Рис.63

оболочке сообщен заряд $Q_2 = 4$ нКл. Определить потенциал шара и поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика. Построить графики $E(r)$ и $\varphi(r)$.

Решение

Заряженный шар вызовет появление индуцированных зарядов на поверхностях металлической оболочки и связанных зарядов на поверхностях диэлектрика вследствие его поляризации. Сферическая симметричность системы предполагает равномерное распределение зарядов по соответствующим поверхностям и радиальность силовых линий векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$. Воспользуемся теоремой Гаусса для диэлектрика и определим электрическое смещение D, а затем и напряженность электрического поля E как функцию координат.

Для вспомогательной поверхности S_1 в толще диэлектрика ($R_1 < r < R_2$) в соответствии с теоремой Гаусса, имеем

$$D_1 \cdot 4\pi r^2 = Q_1,$$

откуда

$$D_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2}, \qquad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

На поверхности металлического шара радиуса R_1 напряженность составит

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1^2} = 11{,}3 кВ/м.$$

Для вспомогательной поверхности S_2 за пределами металлической оболочки ($r > R_3$) поток вектора электрического смещения равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных данной поверхностью, т.е.

$$D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q_1 + Q_2 + q_1 + q_2,$$

где q_1, q_2 - индуцированные заряды, сумма которых по закону сохранения зарядов равна нулю, $q_1 + q_2 = 0$. С учетом этого, получим

$$D_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r^2}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Вычислим напряженность при $r=R_2$ и $r=R_3$

E_2=1,8*кВ/м* , E_3=9,2*кВ/м.*

Отметим также, что в толще металла при $r < R_1$ и $R_2 < r < R_3$ поле отсутствует, т.е. $E = D = 0$.

Приступим теперь к нахождению потенциала. Приняв потенциал в бесконечности равным нулю ($\varphi_\infty = 0$), определим потенциал металлической оболочки

$$\varphi(R_3) = \int_{R_3}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_3}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 64{,}3B.$$

Металл представляет собой эквипотенциальную область, поэтому

$$\varphi(R_2) = \varphi(R_3).$$

Потенциала шара определится из уравнения

$$\varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\varphi(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 135B.$$

На основании полученных формул построим графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$ (рис. 64).

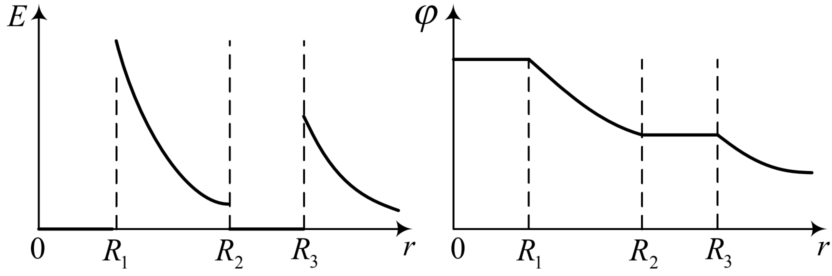


Рис.64

Для определения поверхностной плотности связанных зарядов на поверхности диэлектрика воспользуемся соотношением

$$\sigma' = P_n = \chi\varepsilon_0 E_n,$$

где $\chi = \varepsilon - 1$ - диэлектрическая восприимчивость среды.

Подставляя значение напряженности поля на поверхности шара, получим

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

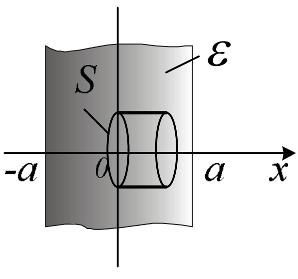


Рис.65

Задача 6. Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью ε заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью $\rho > 0$ (рис. 65). Толщина пластины 2a. Найти $E(x)$ и $\varphi(x)$ как функции расстояния x от середины пластины (потенциал в середине пластины положить равным нулю). Определить поверхностную плотность связанного заряда.

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что в середине пластины $E = 0$, а во всех остальных точках вектор $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности пластины. Воспользуемся теоремой Гаусса для вектора $\vec{D}$. В качестве замкнутой поверхности возьмем прямой цилиндр высотой x, один торец которого совпадает со средней плоскостью пластины. Пусть площадь сечения этого цилиндра равна S, тогда

1) для $x \le a$: $DS = \rho Sx$, $D = \rho x$, $E = \rho x / \varepsilon_0 \varepsilon$,

где ρ - объемная плотность стороннего заряда..

2) для $x \ge a$: $DS = \rho Sa$, $D = \rho a$, $E = \rho a / \varepsilon_0$

Используя выражение $E_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, получаем

1) для $x \le a$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_0^x x dx \ ;$$

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ и } \varphi(a) = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon};$$

2) для $x \ge a$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} d\varphi = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} \int_a^x dx \, ;$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) - \frac{\rho a}{\varepsilon_0}(x - a) =$$

$$= \frac{\rho a^2}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon}\right) - \frac{\rho a}{\varepsilon_0} x \, .$$

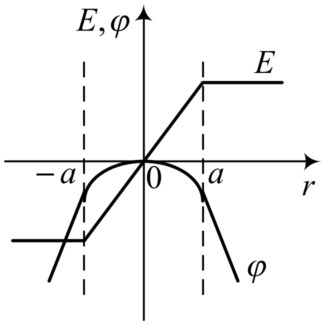


Рис.66

Графики функции $E(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис.66.

Поверхностную плотность связанного заряда определим из выражения

$$\sigma' = P_n = \chi\varepsilon_0 E_n = (\varepsilon - 1)\rho a / \varepsilon > 0.$$

Таким образом, если сторонний заряд ρ > 0, то на обеих поверхностях пластины будет также положительный связанный заряд.

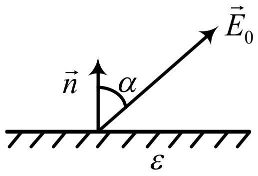


Рис.67

Задача 7. Вблизи границы раздела вакуум - диэлектрик напряженность электрического поля в вакууме равна E_0, причем вектор $\vec{E}_0$ составляет угол α с нормалью к поверхности раздела (рис.67). Проницаемость диэлектрика ε. Найти отношение E/E_0, где E напряженность поля внутри диэлектрика.

Решение

Рассмотрим преломление вектора напряженности электрического поля на границе раздела диэлектрик-вакуум (рис.68).

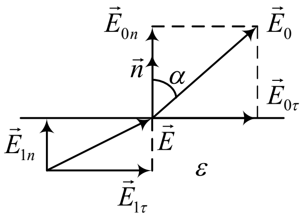


Рис.68

Согласно граничным условиям тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ не изменяется при переходе через границу раздела, т.е.

$$E_{1\tau} = E_{0\tau} = E_0 \sin\alpha .$$

В то же время, нормальная составляющая вектора $\vec{E}$ претерпевает скачок, а именно

$$E_{1n} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon} = \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon} .$$

Таким образом, напряженность поля внутри диэлектрика

$$E = \sqrt{E_\tau^2 + E_n^2}\,,$$

а, искомое отношение напряженностей E / E_0, равно

$$E / E_0 = \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon^2}} < 1, \text{ т.е } E < E_0 \;.$$

Задача 8. Точечный заряд q находится на расстоянии h от проводящей плоскости (рис.69). Определить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.

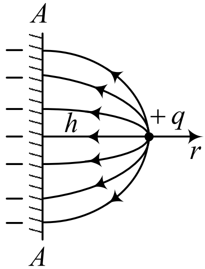


Рис.69

Решение

При решении задачи мы действие проводящей плоскости с ее индуцированными зарядами заменим действием точечного заряда противоположного знака, являющегося зеркальным изображением данного заряда в проводящей плоскости. На рис.70. показаны положения зарядов q и $-q$ относительно плоскости АА, а также произвольной точки М у поверхности АА. Плоскость АА, являющаяся плоскостью зеркальной симметрии, везде перпендикулярна к линиям напряженности электрического поля и, следовательно, будет эквипотенциальной поверхностью. Поле в правом полупространстве (между этой плоскостью и зарядом q) не изменилось и совпадает с полем

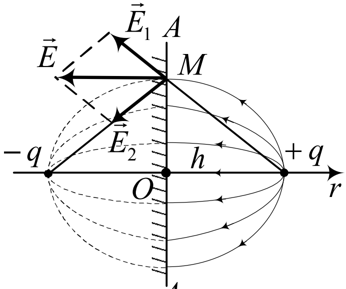


Рис.70

двух точечных зарядов q и $-q$. Это позволяет просто учесть действие индуцированных зарядов на проводящей плоскости под действием только заряда q.

Напряженности полей зарядов q и $-q$ в произвольной точке М у поверхности АА равны

$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_1\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right| = 2E_1\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}.$$

Как видно из рис.70, проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к поверхности АА отрицательна, поэтому индуцированный заряд q' будет иметь противоположный знак. С учетом этого замечания и соотношения между поверхностной плотностью заряда и напряженность поля, получаем

$$\sigma' = -\varepsilon_0\left|\vec{E}\right| = -\frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}.$$

Полученная формула позволяет сравнительно просто найти полный индуцированный заряд q' и убедится в том, что по абсолютному значению он равен данному заряду и противоположен по знаку.

Выделим в плоскости *АА* кольцо с центром в точке *О*, ограниченное радиусами r и $r+dr$. Элементарный индуцированный заряд этого кольца равен

$$dq' = \sigma' dS = 2\pi\sigma' r dr.$$

Интегрированием, получаем

$$q' = -qh\int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{qh}{2}\int (r^2+h^2)^{-3/2}\cdot d(r^2+h^2) = -q.$$

Задача 9. Точечный заряд q находится на расстоянии a между двумя проводящими и взаимно перпендикулярными плоскостями (рис.70). Найти результирующую напряженность поля в точке М, находящейся на диагонали прямого угла, образованного полуплоскостями, и удаленной от них на расстояние $a/2$.

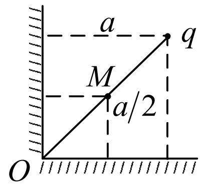


Рис.71

Решение

Проводящие плоскости эквипотенциальны. Будем считать потенциал проводящих плоскостей равным нулю. Для того чтобы удовлетворить этому граничному условию, требуется ввести три фиктивных заряда: два заряда по $-q$ и один заряд q (рис.72). Только такая система зарядов удовлетворяет граничному условию, а именно, потенциалы проводящих плоскостей одинаковы $(\varphi = 0)$ и абсолютное значение алгебраической суммы индуцированных зарядов равно q. Таким образом, три фиктивных заряда создают тоже поле внутри прямого угла, что и заряды, индуцированные на проводящих полуплоскостях. Векторы напряженностей, создаваемые в точке М всеми зарядами, представлены на рис.71. Ось Ox проведем из точки М в направление вершины прямого угла. Расстояния от точки М до соответствующих зарядов обозначим через x, ℓ и $(r+x)$. С учетом введенных обозначений, напряженности полей будут равны

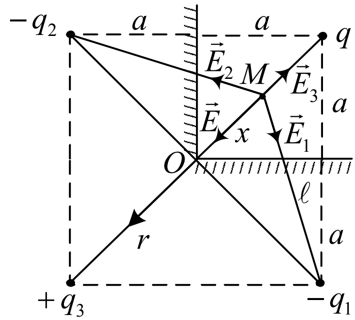


Рис.72

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2};$$

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left|-q\right|}{\ell^2} = \frac{q}{10\pi\varepsilon_0 a^2};$$

$$\left|\vec{E}_3\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+x)^2} = \frac{q}{18\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Результирующая напряженность, создаваемая всеми зарядами, определится в соответствии с принципом суперпозиции и будет равна

$$E_0 = E - E_3 + 2E_1 \cdot \frac{x}{\ell} = 0{,}53\left(\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}\right).$$

3.2.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Эбонитовый ($\varepsilon = 2$) сплошной шар радиусом R =5см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках: а) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра сферы; б) на поверхности сферы; в) на расстоянии $r_2 = 10$ см от цента сферы. Изобразить примерные графики функций $E(r)$ и $D(r)$. Найти поверхностную плотность связанных зарядов. [$E(r < R) = \rho r / 3\varepsilon_0\varepsilon$; $E(r > R) = \rho R^3 / 3\varepsilon_0 r^2$; $\sigma' = \rho R(\varepsilon - 1)/3\varepsilon$]

2. Однородный диэлектрик имеет вид сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2. Найти $E(r)$ и $\varphi(r)$, где r - расстояние от центра, если диэлектрику сообщили положительный сторонний заряд q, распределенный равномерно по внутренней поверхности слоя.

[$r<R$: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\varepsilon r} - \dfrac{1}{\varepsilon R}\right)$; $r>R$: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$]

3. В однородное электростатическое поле напряженностью E_0=700В/м перпендикулярно полю помещается бесконечная плоскопараллельная стеклянная (ε=7) пластина. Определите: 1) напряженность электростатического поля внутри пластины; 2) электростатическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле. [100 В/м; 6,19 нКл/м^2; 5,31 нКл/м^2 ; 5,31 нКл/м^2]

4. Стеклянная пластинка с проницаемостью $\varepsilon = 6$ внесена в однородное электрическое поле напряженностью E_1 = 10 В/м и расположена так, что угол α_1 между нормалью к пластинке и направлением внешнего поля равен 30°. Найти напряженность E_2 поля в пластинке, угол α_2, который это поле образует с нормалью к пластинке, а также плотность σ' связанных зарядов, индуцированных на поверхностях пластинки. [E_2 = 5,2 В/м, α_2 = 74°, σ' = 64 нКл/$м^2$]

5. Металлический шар радиусом $R = 5$ см окружен равномерно слоем фарфора толщиной $d = 2$ см. Определить поверхностные плотности σ_1' и σ_2' связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд шара равен 10 нКл. [-0,255 мкКл/м^2; 0,130 мкКл/м^2]

6. На расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд $+q$. Определить напряженность поля в точке, отстоящей от плоскости и от заряда на расстояние h.

Второй уровень сложности

1. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии ℓ от плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика равна ε. Найти поверхностную плотность связанных зарядов как функцию расстояния r от точечного заряда. Рассмотреть случай $\ell \to 0$. [$\sigma' = -ql\left(\varepsilon_1 - 1\right)/\, 2\pi r^3 \left(\varepsilon + 1\right)$]

2. Пространство между пластинами заполнено парафином (ε=2). Расстояние между пластинами d=8,85 мм. Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла 0,1 нКл/см^2? [1 кВ]

3. Стеклянный шар ($\varepsilon = 6$) имеет электрический заряд, объемная плотность которого зависит от расстояния r до центра шара по закону $\rho = \beta / r$, где $\beta = 1$ нКл/м^2. Радиус шара $R = 10$ см. Определить разность потенциалов между поверхностью и центром шара. Построить график зависимости напряженности от расстояния до центра шара. [$0{,}94B$]

4. На расстоянии $a = 5$ см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд $q = 1$ нКл. Определить силу, действующую на заряд со стороны индуцированного им заряда на плоскости.[0,9 мкН]

5. Найти силу, действующую на точечный заряд q, помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями. Расстояние между зарядом q и вершиной двугранного угла O равно d. [$F = 0{,}63 \cdot 10^9 \left(\dfrac{q}{d}\right)^2$]

3. 3. Электроемкость. Энергия электрического поля

3.3.1. Основные законы и формулы

- Электроемкость уединенного проводника и конденсатора

$$\mathrm{C} = q/\varphi \ ; \quad C = q/(\varphi_1 - \varphi_2).$$

- Емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d \ ,$$

где S - площадь каждой пластины; d - расстояние между пластинами.

- Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon\ell}{\ln(r_2/r_1)},$$

где ℓ - длина обкладок конденсатора; r_2 и r_1 - радиусы коаксиальных цилиндров.

- Емкость сферического конденсатора.

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2/(r_2 - r_1) \ ,$$

где r_1 и r_2 - радиусы концентрических сфер.

- Емкость системы конденсаторов при последовательном и параллельном соединении

$$1/C = \sum_{i=1}^{n} 1/C_{\mathrm{i}} \ , \quad C = \sum_{i=1}^{n} C_i \ .$$

- Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \ ,$$

где φ_i - потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_1, всеми зарядами, кроме i - го.

- Полная энергия системы с непрерывным распределением заряда

$$W = \frac{1}{2}\int_{v} \varphi \rho dV .$$

- Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} .$$

- Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 / 2 .$$

3.3.2. Основные типы задач и методы их решения

Тип 1. Определение емкости уединенного проводника и емкости конденсатора.

Метод решения. Использование соотношений, определяющих емкость уединенного проводника и конденсатора. При этом первоначально определяется с использованием теоремы Гаусса напряженность поля уединенного проводника или конденсатора, при сообщении им некоторого заряда q, а затем путем интегрирования выражения $\Delta\varphi = \int E_l dl$ находится приобретаемая разность потенциалов.

Тип 2. Определение емкости системы конденсаторов, нахождение зарядов и напряжений в представленных системах.

Метод решения. Использование эквивалентных схем соединения конденсаторов. Учет потенциальности электростатического поля. Применение закона сохранения заряда и условия независимости циркуляции вектора $\vec{E}$ между двумя точками поля ($\int_1^2 E_\ell d\ell = const$).

Тип 3. Определение энергии взаимодействия точечных зарядов, энергии заряженного проводника и конденсатора, энергии поля, локализованного в заданном объеме.

Метод решения. Использование формул для энергии взаимодействия точечных зарядов, энергии заряженного конденсатора.

Интегрирование выражения для объемной плотности энергии электрического поля:

$$W = \int_v \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV .$$

Применение уравнения энергетического баланса.

3.3.3. Примеры решения задач

Задача 1. Найти емкость шарового проводника радиусом R_1, окруженного примыкающим к нему слоем однородного диэлектрика с наружным радиусом R_2 и проницаемостью ε (рис.73).

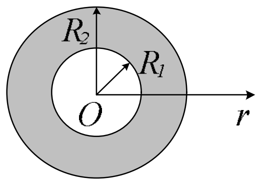


Рис. 73

Решение

Для нахождения емкости проводника по формуле $C = q/\varphi$ надо мысленно зарядить данный проводник зарядом q и вычислить его потенциал φ. С этой целью, воспользовавшись теоремой Гаусса для вектора $\vec{D}$, найдем $D = q/4\pi r^2$, после чего, с учетом соотношения $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, получим

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} \quad \text{для} \quad R_1 \le r \le R_2 ;$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{для} \quad r \ge R_2 .$$

Зная зависимость $E(r)$ можно непосредственно приступить к нахождению потенциала шара. В силу различной зависимости $E(r)$ интеграл разбивается на два:

$$\varphi = \int_{R_1}^{\infty} E_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr - \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \,;$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon - 1}{R_2}\right).$$

Окончательно

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}{1 + (\varepsilon - 1)R_1 / R_2} \,.$$

Задача 2. Найти емкость цилиндрического конденсатора, радиусы обкладок которого равны R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), если пространство между обкладками заполнено: а) однородным диэлектриком с проницаемостью ε; б) диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha / r$, где $\alpha = const$.

Решение

Предположим, что внутренняя обкладка конденсатора заряжена с линейной плотностью λ. Используя теорему Гаусса, найдем первоначально вектор электрического смещения

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \,,$$

а затем, и напряженность электрического поля между обкладками

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} \,.$$

При этом разность потенциалов на конденсаторе в случае однородного диэлектрика ($\varepsilon = const$)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора в случае а) равна

$$C_{ед} = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln R_2 / R_1} \quad .$$

Для диэлектрика, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha / r$, напряженность поля между обкладками будет величиной постоянной

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\alpha}.$$

Тогда разность потенциалов на обкладках конденсатора равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\alpha}\int_{R_1}^{R_1} dr = \frac{\lambda(R_2 - R_1)}{2\pi\varepsilon_0\alpha}.$$

Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора в случае б), равна

$$C_{ед} = \frac{2\pi\varepsilon_0\alpha}{R_2 - R_1}.$$

Задача 3. Имеется плоский конденсатор, заполненный диэлектриком, проницаемость которого линейно растет в перпендикулярном обкладкам направлении от ε_1 до ε_2. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти емкость конденсатора.

Решение

У левой обкладки согласно граничному условию

$$D_n = D = \sigma,$$

где $\sigma = \dfrac{q}{S}$ - поверхностная плотность стороннего заряда.

Отсюда имеем соотношения

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$, $0 \le x \le d$.

Подставляя полученное выражение в предыдущую формулу, получим

$$E = \frac{qd}{\varepsilon_0 S\left[\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) x\right]}.$$

Разность потенциалов между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int E(x) dx = \frac{qd}{\varepsilon_0 S} \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) x} =$$

$$= \frac{qd}{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Емкость данного конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{d \ln \varepsilon_2 / \varepsilon_1}.$$

Задача 4. Найти емкости системы конденсаторов, которые показаны на рис.74.

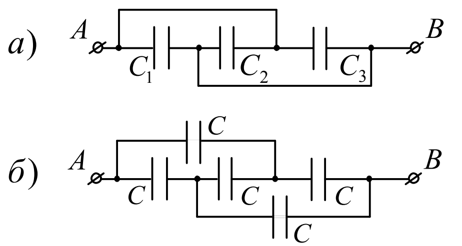
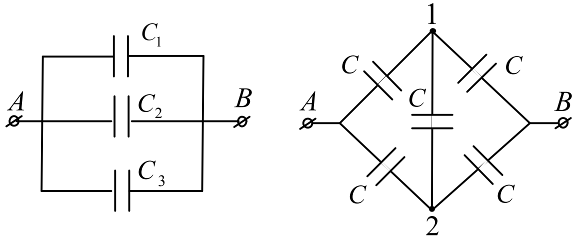


Рис. 74

Решение

Перейдем к эквивалентным схемам соединения конденсаторов (рис.75, а и б).



а) б)

Рис.75

В первом случае конденсаторы соединены между собой параллельно (рис.74а), поэтому емкость этой системы

$$C = C_1 + C_2 + C_3 .$$

Во втором случае представленная эквивалентная схема (рис.74б) является симметричной, поскольку емкости всех конденсаторов одинаковы. Из симметрии следует, что потенциалы узлов 1 и 2 равны и, следовательно, узлы можно объединить. Тогда емкость системы легко определяется

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{2C}, \quad C' = C .$$

Задача 5. В схеме (рис.76) найти разность потенциалов между точками A и B, если E=110 В и отношение емкостей $C_2 / C_1 = 2$.

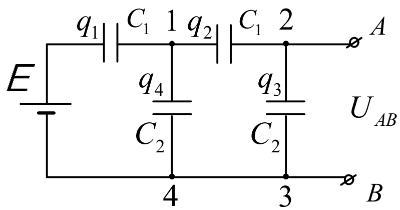


Рис.76

Решение

Введем соответствующие обозначения зарядов на конденсаторах и узловых точек цепи (рис.76).

При решении данной задачи воспользуемся условием потенциальности электростатического поля, согласно которому циркуляция вектора $\vec{E}$ между двумя точками поля не зависит от пути

$$\int_1^2 E_\ell d\ell = const\,.$$

Для участка $\mathcal{E}$-1-4

$$\mathcal{E}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2}{C_2}\,;$$

для участка $\mathcal{E}$-2-3

$$\mathcal{E}=\frac{q_1+q_2}{C_1}+\frac{q_4}{C_2}\,.$$

В то же время, согласно условию электрической нейтральности участков цепи и закона сохранения заряда в узловых точках, можно записать

$$q_2=q_3\,;$$

$$q_1=q_2+q_4\,.$$

Решая данную систему уравнений, найдем

$$q_3=\frac{C_1^2C_2\mathcal{E}}{C_1^2+3C_1C_2+C_2^2}\,.$$

Напряжение между точками А и В определим из соотношения

$$U_{AB}=\frac{q_3}{C_2}=\frac{C_1^2\mathcal{E}}{C_1^2+3C_1C_2+C_2^2}\,.$$

В завершение, поделим числитель и знаменатель этой дроби на C_1^2 и учтем, что $C_2/C_1=2$. В результате, получим

$$U_{AB}=\frac{110}{1+6+4}=10\,(\text{В}).$$

Задача 6. Найти разность потенциалов меду точками А и В в цепи, показанной на рис.77.

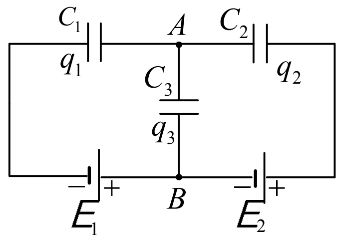


Рис.77

Решение

Введем обозначения зарядов на соответствующих конден-саторах и выберем направление обхода контуров по часовой стрелке. В соответствии с теоремой о циркуляции для двух контуров, включающих ЭДС, получим

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = E_1, \tag{1}$$

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = E_2, \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), найдем

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_1}{C_1} = E_1 + E_2. \tag{3}$$

С другой стороны, из электрической нейтральности узла А, имеем

$$q_2 = q_1 + q_3 . \tag{4}$$

Решая совместно (3) и (4), получим

$$q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(E_1 + E_2 - \frac{q_3}{C_2}\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), найдем заряд на третьем конденсаторе

$$q_3 = \frac{C_3(C_2 E_2 - C_1 E_1)}{(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

Разность потенциалов между точками А и В, равна

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q_3}{C_3} = \frac{E_2 C_2 - C_1 E_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Задача 7. Вычислить энергию взаимодействия четырех одинаковых точечных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата со стороной a.

Решение

Воспользуемся формулой

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i .$$

В данном случае $q_i = q$, $\varphi_i = \varphi = const$, где φ - потенциал в месте нахождения одного из зарядов, обусловленный полем всех остальных зарядов.

В соответствии с формулой для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции, найдем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Окончательно

$$W = \frac{1}{2}\sum q_i \varphi_i = \frac{1}{2} 4q\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a}\left(4+\sqrt{2}\right).$$

Задача 8. Заряд q распределен равномерно по объему шара радиусом R. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, найти собственную электрическую энергию шара и отношение энергии W_1, локализованной внутри шара, к энергии W_2 в окружающем пространстве.

Решение

Прежде всего, найдем с помощью теоремы Гаусса напряженность поля внутри и вне шара

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \quad (r \le R);$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2} \quad (r \ge R).$$

Объемная плотность энергии будет также являться функцией расстояния:

$$w_1 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^6}\cdot r^2 \qquad (r \le R);$$

$$w_2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \qquad (r \ge R).$$

Поскольку зависимость $w(r)$ различна для областей пространства внутри и вне шара, то нахождение полной энергии электрического поля разбивается на два интеграла

$$W = \int\limits_{v_1} w_1 dV + \int\limits_{v_2} w_2 dV$$

где V_1 - объем пространства, занимаемый зарядом; V_2 - объем остального пространства.

Объем dV следует выбрать в виде тонкого шарового слоя толщиной dr (в пределах такого объема E и w постоянны):

$$dV = 4\pi r^2 dr .$$

Подставляя выражения для w и dV и проводя интегрирование, получаем $W = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{3q^2}{5R}$.

Аналогично найдем, что $W_1 / W_2 = 1/5$ т.е не зависит от радиуса шара.

Задача 9. Плоский воздушный конденсатор (S=200 $см^2$, d_1=0,3см) заряжен до разности потенциалов U_0 = 600 В. Определить работу, которую надо совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками до d_2 =0,5см. Расчет произвести для двух случаев: 1) конденсатор отключен от источника; 2) конденсатор соединен с источником.

Решение

Рассмотрим первый случай.

При отключении конденсатора от источника сохраняется заряд на обкладках конденсатора

$$q = CU_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_0}{d_1} = const\,.$$

Работа внешних сил приведет к увеличению энергии конденсатора, которую в этом случае удобно рассчитать по формуле

$$\Delta W = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right).$$

С учетом выражений для заряда и емкости воздушного конденсатора, получим окончательно

$$A = \Delta W = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1)\,.$$

Рассмотрим второй случай.

Конденсатор соединен с источником, поэтому при любых манипуляциях разность потенциалов на его зажимах остается постоянной и равной U_0, при этом заряд может изменяться. При раздвижении пластин внешняя сила равна и противоположна силе электростатического взаимодействия и ее работа определяется интегралом

$$A = \int_1^2 F_x dx\,.$$

Поскольку поле, создаваемое каждой из пластин, на небольших расстояниях однородно, то

$$F = E_1 q_2\,,$$

где $E_1 = \dfrac{q_1}{2S\varepsilon_0}$ - напряженность поля, создаваемого одной из пластин; $q_1 = q_2 = q$ - абсолютное значение заряда пластин. Напряженность поля, созданного одной пластиной, вдвое меньше напряженности между обкладками конденсатора и равна

$$E_1 = U_0 / 2x\,.$$

Подставляя найденные соотношения в выражение для силы, получаем

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2x^2}.$$

При раздвижении обкладок x изменяется в пределах от d_1 до d_2, тогда

$$A = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2}\int_{d_1}^{d_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 4{,}2\,мкДж\,.$$

Аналогичный результат можно получить при энергетическом подходе.

В соответствии с уравнением энергетического баланса

$$\Delta W = A + A_{ист},$$

где ΔW - изменение энергии конденсатора; $A_{ист}$ - работа, совершаемая источником, A - работа внешних сил.

Так как $U_0 = const$ изменение заряда конденсатора

$$\Delta q = (C_2 - C_1)U_0,$$

отсюда

$$A_{ист} = \Delta q U_0 = U_0^2(C_2 - C_1).$$

Изменение энергии конденсатора найдем по формуле

$$\Delta W = U_0^2(C_2 - C_1)/2.$$

где C_1 и C_2 - соответственно конечная и начальная емкости конденсатора.

Из уравнения энергетического баланса с учетом того, что $C_2 - C_1 = \varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$, окончательно получим

$$A = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right).$$

3.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Первый уровень сложности

1. Две концентрические металлические сферы радиусами $R_1 = 10\,\text{см}$ и $R_2 = 10{,}2\,\text{см}$ образуют сферический конденсатор. Промежуток между сферами заполнен парафином ($\varepsilon = 2$). Внутренней сфере сообщен заряд $q = 5$ мкКл. Определить разность потенциалов между сферами. [4,4 кВ]

2. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора U = 100 В. Площадь каждой пластины S = 200 см^2, расстояние между пластинами d = 0,5 мм, пространство между ними заполнено парафином (ε = 2). Определите силу притяжения пластин друг к другу. [7,08 мН]

3. Две пластины площадью 100см^2 погружены в масло, диэлектрическая проницаемость которого ε =2, и подключены к полюсам батареи с ЭДС, равной 300В. Какую работу необходимо совершить, чтобы после отключения батареи расстояние между пластинами уменьшилось от 5 до 1см? [0,127мкДж]

4. Конденсаторы электроемкостями $C_1 = C_2 = 2\,\text{мкФ}$, $C_3 = 3\,\text{мкФ}$, $C_4 = 1\,\text{мкФ}$ соединены так, как указано на рис.78. Разность потенциалов на обкладках четвертого конденсатора $U_4 = 100\,\text{В}$. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов. [200 мкКл; 120 мкКл; 12-мкКл; 100мкКл; 110В; 60В; 40В; 220мкКл; 210В]

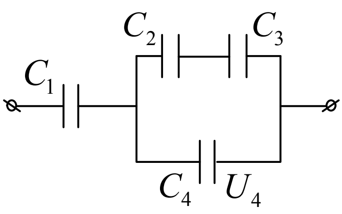


Рис.78

5. Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со

стороной a, для случаев: а) $q_1=q_2=q$; $q_3=q_4=-q$; б) $q_1=q_3=q$; $q_2=q_4=q$. Xа) $W=-\sqrt{2}q^2/4\pi\varepsilon_0 a$; б) $W=\left(\sqrt{2}-4\right)q^2/4\pi\varepsilon_0 a$]

6. Точечный заряд q = 3,0 мкКл находится в центре шарового слоя из однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 3$. Внутренний радиус слоя a=350 мм, внешний b=600 мм. Найти электрическую энергию в данном слое. [$W=\left(q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon\right)\left(1/a-1/b\right)=27\,мкДж$]

Второй уровень сложности

1. Найти емкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны a и b ($b>a$), если пространство между обкладками заполнено: а) однородным диэлектриком с проницаемостью ε; б) диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon=\alpha/r$, где $\alpha=const$. [а) $C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon ab/\left(b-a\right)$; б) $C=4\pi\varepsilon_0\alpha/\ln\left(b/a\right)$]

2. Определить электроемкость схемы, представленной на рис.79, где $C_1=1$ пФ, $C_2=C_3=2$ пФ, $C_4=4$ пФ, $C_5=3$ пФ.

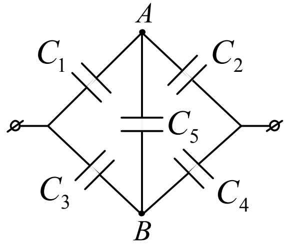


Рис.79

Указание. Доказать, что если $\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{C_3}{C_4}$, то $\varphi_A=\varphi_B$ и, следовательно, емкость C_5 при определении общей емкости схемы значения не имеет.

3. Энергия заряженного плоского конденсатора, заполненного диэлектриком, равна $W=2\cdot10^{-5}$Дж. После отключения конденсатора от источника напряжения диэлектрик из конденсатора вынули, совершив при этом работу $A=7.10^{-5}$Дж. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика. [4,5].

4. Площадь каждой обкладки воздушного конденсатора 314 см^2, расстояние между ними 2 мм. Напряженность поля между обкладками 60 кВ/м. Какую работу нужно совершить,

чтобы вдвинуть между обкладками конденсатора стеклянную пластинку, если она полностью заполняет конденсатор и конденсатор после зарядки отключен от источника напряжения? [-086 мкДж].

5. Расстояние между обкладками плоского конденсатора равно 8 мм, площадь обкладок 62,8 см^2. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть между обкладками конденсатора стеклянную пластинку той же площади и толщиной 6 мм, если конденсатор присоединен к источнику напряжения 600 В? [2,25 мкДж]

6. Уединенная металлическая сфера электроемкостью C = 4 пФ заряжена до потенциала φ = 1 кВ. Определите энергию поля, заключенную в сферическом слое между сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в 4 раза больше радиуса уединенной сферы. [1,5 мкДж]

7. Сплошной эбонитовый шар (ε = 3) радиусом R = 5 см заряжен равномерно с объемной плотностью ρ = 10 нКл/м^3. Определите энергию электростатического поля, заключенную внутри шара. [0,164 пДж]

8. Сферическую оболочку радиусом R_1, равномерно заряженную зарядом q, расширили до радиуса R_2. Найти работу, совершенную электрическими силами. [$A = \left(q^2 / 8\pi\varepsilon_0\right)\left(1 / R_1 - 1 / R_2\right)$]

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1. Некоторые сведения о векторах

Векторной величиной, или *вектором*, , направленный отрезок AB при заданном масштабе, характеризует силу в 4 Н, направление которой совпадает с направлением AB, указанным стрелкой (рис.П1).

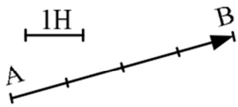


Рис.П1

Вектор, началом которого служит точка A, а концом точка B, обозначается $\overrightarrow{AB}$. Вектор обозначается также одной буквой. Эту букву печатают жирным шрифтом (***a***), или ставят над буквой стрелку ($\vec{a}$) (рис.П2).

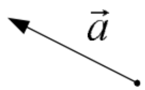


Рис.П2

Длина вектора называется также его *модулем*. Обозначается: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или *AB*, $|\vec{a}|$ или *a*. Модуль есть *скалярная величина.* Если начало и конец вектора совпадают, то отрезок AB обращается в точку и теряет направление. Этот особый вектор называется *нуль-вектором.*

Два ненулевых вектора и называются *равными*, если они равнонаправлены и имеют один и тот же модуль $\vec{a}=\vec{b}$ (рис.П3). Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные, называются *противоположными* $\vec{a}=-\vec{c}$ (рис.П3).

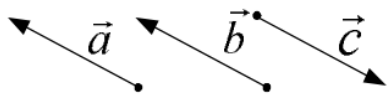


Рис.П3

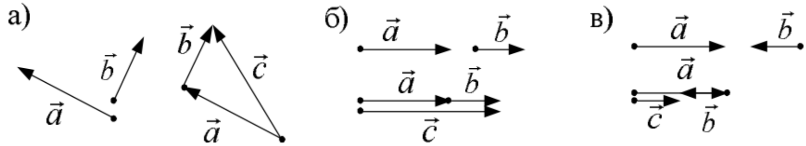


Рис.П4

Суммой двух вектров $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, получаемый следующим построением («*правило треугольника*»): совмещаем начало вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$. Вектор, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ и есть искомый вектор $\vec{c}$ (рис.П4). Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору.

«*Правило параллелограмма*». Суммарный вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ можно получить следующим построением: совместив начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, достраиваем параллелограмм. Вектор, проведенный из общего начала вдоль диагонали и будет искомым вектором $\vec{c}$ (рис.П5).

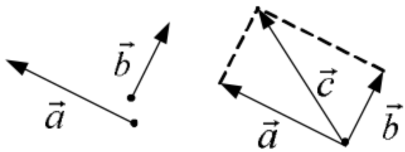


Рис.П5

Суммой *нескольких векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 ... \vec{a}_n$, называется вектор, получающийся после последовательных сложений.

Вычесть вектор $\vec{b}$ (вычитаемое) из вектора $\vec{c}$ (уменьшаемое) значит найти построением новый вектор $\vec{a}$ (разность), который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{c}$. Т.е. вычитание векторов есть действие обратное сложению.

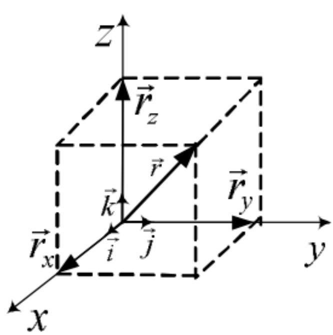


Рис.П6

Геометрической проек-цией вектора на

координатную ось называется вектор, полученный с помощью перпендикуляров, опущенных из начала и конца вектора на соответствующую координатную ось (рис.П6). В трехмерном пространстве это будут три проекции $\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z$, причем их векторная сумма равна самому вектору $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$.

Через базисные вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, задающих направление координатных осей:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} ,$$

где r_x, r_y, r_z - алгебраические проекции вектора на координатные оси, или координаты вектора (можно обозначать также через *x, y, z*).

Координаты вектора можно определить через углы α, β, γ между направлением вектора и соответствующими осями координат

$$r_x = r\cos\alpha,\ r_y = r\cos\beta,$$

$$r_z = r\cos\gamma.$$

Кроме того всякий вектор можно представить в виде

$$\vec{a} = a\vec{e}_a ,$$

где a - модуль вектора $\vec{a}$, $\vec{e}_a$ - единичный вектор или орт вектора $\vec{a}$. Орты можно сопоставлять любым направлениям в пространстве.

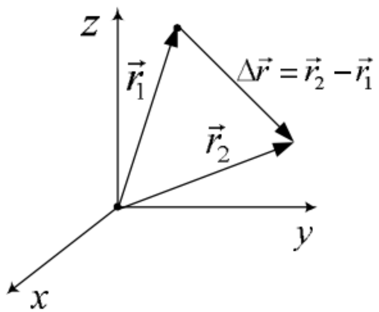


Рис.П7

Например, $\vec{n}$ - орт нормали к кривой или поверхности, $\vec{\tau}$ - орт касательной к кривой и т.д.

Выражение вектора через радиусы-векторы его начала и конца (рис.П7)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Если координаты векторов $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_1$, соответственно $\{x_2, y_2, z_2\}$ и $\{x_1, y_1, z_1\}$, то координаты вектора $\Delta\vec{r}$ находятся как разница между соответствующими координатами конца и начала

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} .$$

Длина вектора выражается через его координаты формулой

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

1.2. Скалярное и векторное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = ab\cos\alpha .$$

Скалярное произведение обращается в нуль, если один из сомножителей есть нуль-вектор, или если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярный квадрат вектора есть квадрат его модуля.

$$\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = \vec{a}^2 = a^2 .$$

Скалярного куба (и тем более высших степеней) в векторной алгебре нет.

Скалярное произведение коммутативно, т.е. не зависит от порядка сомножителей

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right),$$

и дистрибутивно, т.е. произведение вектора $\vec{a}$ на сумму нескольких векторов равно сумме произведений вектора $\vec{a}$ на каждый из складываемых векторов, взятый в отдельности.

В декартовой системе координат выражение скалярного произведения через координаты сомножителей имеет вид

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на не коллинеарный (не параллельный) ему вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который строится следующим образом:

1) его модуль численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. он равен $c = ab\sin\alpha$;
2) его направление перпендикулярно плоскости упомянутого параллелограмма;
3) при этом направление вектора $\vec{c}$ выбирается так, чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ составляли правовинтовую систему, т.е. его направление связано с направлением вращения от первого сомножителя ко второму правилом винта (рис.П8)

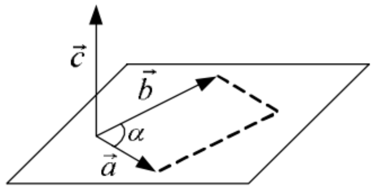


Рис.П8

Обозначение векторного произведения:

$$\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \text{ или } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Векторное произведение дистрибутивно, но не обладает свойством коммутативности. Перестановка сомножителей вызывает изменение направления результирующего вектора на противоположное

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right].$$

В декартовой системе векторное произведение можно представить в виде определителя

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанным (или *векторно-скалярным*) произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (взятых в указанном порядке) называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение

$\vec{b} \times \vec{c}$, т.е. число $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$, или, что то же $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$. Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

При круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется, при перестановке двух сомножителей – меняет знак на обратный:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}).$$

Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно нулю

$$\vec{a}\vec{a}\vec{c} = 0.$$

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Двойным векторным произведением называется выражение

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right).^{*}$$

1.3. Производная и дифференциал

Предел к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции $y = f\left(x\right)$ к бесконечно малому приращению аргумента Δx, называется *производной* и обозначается следующим образом

---

* Запоминание этой формулы облегчается тем, что ее можно прочесть как «бац» минус «цаб».

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x).$$

Производная численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $f(x)$ (рис.П9) Если $f'(x) > 0$, то при увеличении x функция $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$ то при возрастании x функция $f(x)$ уменьшается.

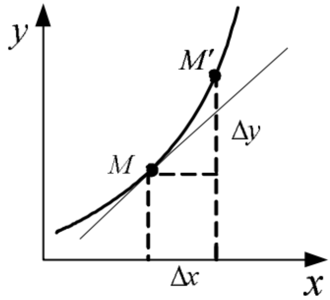


Рис.П9

В физике принято производные по времени обозначать символом соответствующей величины с точкой над ним, например,

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}\ , \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}.$$

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной на приращение аргумента:

$$dy = f'(x)dx,$$

где $f'(x)$- производная $f(x)$ по x.

Производную функции y по аргументу x бывает удобно обозначать через дифференциалы

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Производная сложной функции равна производной по вспомогательной переменной, умноженной на производную этой переменной по аргументу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Дифференциал произведение двух функций равен сумме произведений каждой функции на дифференциал другой

$$d(uv) = udv + vdu \ .$$

Дифференцировал дроби:

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2} \ .$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных $u = f(x, y, z)$ определяется по формуле

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \ ,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ - частные производные функции по соответствующим переменным. Для нахождения частной производной, например $\frac{\partial f}{\partial x}$, достаточно найти обыкновенную производную переменной *f*, считая последнюю функцией одного аргумента *x*.

Таблица П1

Производные элементарных функций

Функция	**производная**	**функция**	**производная**
$y = C = conct$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = n^x$	$y' = n^x \ln n$	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Продолжение табл.П1

$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e$	$y=arctgx$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=arcctgx$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

1.4. Элементы интегрального исчисления

Понятие об интеграле. Пусть задана функция $y=f(x)$ и надо найти площадь «криволинейной трапеции» $aABb$. Разобьем площадь под кривой на n частей и построим ступенчатую фигуру, показанную штриховкой на рис.П10. Предел суммы площадей «прямоугольных ступенек» при $n\to\infty$ и есть интеграл. Обозначение

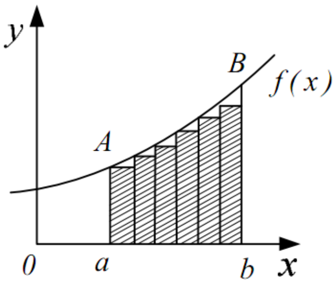


Рис. П10

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta x_i$$

Т.о. геометрический смысл определенного интеграла – площадь фигуры ограниченной ординатами графика $y=f(x)$.

Механический смысл – путь материальной точки: $S=\int_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)dt$;

работа силы: $A=\int_{s_1}^{s_2}F(s)ds$. Кроме того с помощью определенного интеграла можно вычислить массу, момент инерции и т.п.

Функция $F(x)$называется первообразной от функции $f(x)$, если выполняется равенство

$$F' = \frac{\mathrm{dF(x)}}{dx} = f(x).$$

Вычисление интеграла сводится к нахождению функции по данному выражению ее дифференциала.

Неопределенным интегралом данной функции $f(x)$ называется наиболее общий вид его первообразной функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. Если известно, что при данном значении аргумента $x = a$ функция принимает значение $f(a) = b$, то C находится из соотношения

$$b = F(a) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

- знак дифференциала перед знаком интеграла уничтожает последний:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

- постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

- интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Таблица П2

Первообразные элементарных функций

интеграл	первообразная	Интеграл	первообразная
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos x}$	$\ln\left\|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\|+C$
$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$tgx+C$
$\int e^x dx$	e^x+C	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$-ctgx+C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$
$\int \sin xdx$	$-\cos x+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\int \cos xdx$	$\sin x+C$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$arctgx+C$
$\int tgxdx$	$-\ln\|\cos x\|+C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
$\int ctgxdx$	$\ln\|\sin x\|+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$
$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$

Используя свойства неопределенного интеграла, можно в ряде случаев свести интегрирование к табличным формулам.

При интегрировании способом подстановки вместо переменной *x* вводят вспомогательную переменную *z=z(x)*. Тогда подынтегральное выражение преобразуется в более простой вид, что облегчает интегрирование

$$\int f(x)dx = \int \varphi(z)dz .$$

Пример: $\int \sqrt{2x-1}dx$.

Введем переменную

$$z = 2x - 1,$$

дифференцируя, получаем

dz=2dx, откуда *dx=dz/2.*

Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{z}\,\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}} + C .$$

Возвращаясь к переменной *x,* находим:

$$\int \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Интегрированием по частям называется сведение данного интеграла $\int u d\upsilon$ к интегралу $\int \upsilon du$ с помощью формулы

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du .$$

Примеры:

1) $\int e^x x dx$.

Представляем подынтегральное выражение в виде $x(e^x dx) = xde^x$. Здесь роль u играет x, роль υ - функция e^x. Тогда

$$\int x(e^x dx) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2) $\int x \ln x dx$

Подынтегральную функцию представим в виде $\ln x d(\frac{1}{2}x^2)$ (здесь $u = \ln x$, $\upsilon = \frac{1}{2}x^2$), это дает

$$\int \ln x d(\frac{1}{2}x^2) = \ln x(\frac{1}{2}x^2) - \int \frac{1}{2}x^2 d\ln x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Для вычисления интегралов вида
$$\int \sin^{2n} x dx, \int \cos^{2n} x dx$$
удобно пользоваться формулами
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример: $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Разложение элементарных функций в степенные ряды

Для разложения функции *f(x)* в ряд, расположенный по степеням используют ряд Тейлора
$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$
Ниже даны разложения простейших функций по степеням *x:*
$$e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \ldots$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$
$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \pm \ldots$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Многие интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, можно представить в виде рядов.

1.5. Понятие градиента потенциала

Градиент некоторой физической величины U – это вектор, совпадающий с нормалью $\vec{n}$ к поверхности одинакового значения $U(x,y,z)$, направленный в сторону его возрастания и имеющий величину $\partial U / \partial n$ (рис.1.9) .

В декартовой системе

$$\overrightarrow{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla} U \ ,$$

где $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ оператор Гамильтона (Набла).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т.И. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. - 560 с.

2. Детлаф, А.А. Курс физики [Текст] : учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. - М. : Высшая школа, 1989. - 608 с.

3. Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст]: в 5 кн.: учеб. пособие для втузов / И.В. Савельев. - М.: АСТ: Астрель, 2005.

4. Яворский Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов [Текст]: учеб. пособие / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, А.К. Лебедев. - М.:Оникс, 2006. – 1056 с.

5. Чертов А.Г. Задачник по физике [Текст]:учеб. пособие для студентов втузов / А.Г Чертов, А.А. Воробьёв. - М.: Высш. шк., 1988.-527с.

6. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст]:учеб. пособие для студентов втузов / В.С. Волькенштейн. - С.Пб.: Специальная литература, 1999. - 328с.

7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике : Учеб. пособие для вузов [Текст]/ И. Е. Иродов . – 3. изд., перераб . – Москва : Бином: Владос, 1998 . – 447 с.

8. Новодворская Е.М. Методика проведения упражнений по физике во втузе [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. – М.:Высш.школа, 1981.- 318 с.

9. Новиков С.М. Сборник заданий по общей физике [Тест]: учеб.пособие для студентов вузов / С.М. Новиков. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»», 2006. – 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Москаленко Александр Георгиевич
Тураева Татьяна Леонидовна
Татьянина Елена Павловна
Антипов Сергей Анатольевич

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

ЧАСТЬ 1.

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

В авторской редакции

Подписано к изданию 29.08.2016.
Объем данных 1,35 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп.,14