ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

А.А. Катрахова   В.С. Купцов

Спецглавы математики: курс лекций

Часть 1

Утверждено учебго – методическим советом университета
в качестве учебного - методического пособия

Воронеж 2017

УДК 517.53 (075.8)
ББК 22.1я7
К 296

Катрахова А.А. Спецглавы математики: курс лекций для студентов по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах» ,13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», (все профили), Ч.1. Учеб. -метод. пособие. А.А. Катрахова, В.С. Купцов. – Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. 201 с.

В учебном пособии содержится тееоретический материа и задачи по курсу «Спецглавы математики».

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», (все профили), дисциплине «Спецглавы математики».

Табл 20. Ил. 37. Библиогр.: 10 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин);
д-р техн. наук, проф. Н.Д. Вервейко

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит теоретический материал и задачи по курсу «Спецглавы математики».

Содержание учебного пособия соответствует программе курса математики для бакалавров инженерно-технических специальностей втузов, утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Пособие состоит из двух частей: теории вероятностей и математической статистики

ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Случайные события

Любая современная математическая дисциплина основывается на некоторых исходных понятиях (аксиомах). В теории вероятностей такой аксиоматический подход был введен А.Н. Колмогоровым.

Аксиомы, лежащие в основе этого подхода, отражают и обобщают те свойства понятия ***вероятности случайных событий,*** которые использовались на интуитивном уровне с давних времен — с момента зарождения теории вероятностей как теории „азартных игр".

В этой и следующих главах будет показано, что основные понятия и аксиомы теории вероятностей представляют собой математические отражения понятий, хорошо известных любому человеку, наблюдавшему опыты со случайными исходами. Одним из таких понятий является ***пространство элементарных исходов,*** введение которого позволяет при решении конкретных практических задач оперировать общим для современной математики аппаратом теории множеств.

1.1. Пространство элементарных исходов

Определение 1.1. ***Элементарным исходом*** (или ***элементарным событием)*** называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов будем называть ***пространством элементарных исходов.***

Другими словами, множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

В дальнейшем пространство элементарных исходов будем обозначать прописной буквой Ω, а сами элементарные исходы — строчной буквой ω, снабженной, при необходимости, индексами. То, что элемент ω принадлежит Ω, записывают в виде $\omega \in \Omega$, а тот факт, что множество Ω состоит из элементов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$ и только из них, записывают в виде

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

или в виде

$$\Omega = \{\omega_i, \quad i = 1,2,..., n,...\}.$$

В частности, Ω может содержать конечное число элементарных исходов.

Рассмотрим примеры, поясняющие понятие пространства элементарных исходов.

Пример 1.1. Пусть опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. При математическом описании этого опыта естественно отвлечься от несущественных возможностей (например, монета встанет на ребро) и ограничиться только двумя элементарными исходами: выпадением „герба” (можно обозначить этот исход Г, $\omega_Г$ или ω_1) и выпадением „ цифры” (Ц, $\omega_Ц$ или ω_2). Таким образом, $\Omega = \{Г, Ц\}$, $\Omega = \{\omega_Г, \omega_Ц\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

При двукратном подбрасывании монеты (или однократном подбрасывании двух монет) пространство элементарных исходов будет, очевидно, содержать 4 элемента, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{ГГ}, \omega_{ГЦ}, \omega_{ЦГ}, \omega_{ЦЦ}\},$$

где $\omega_{ГГ}$ — появление „герба” и при первом, и при втором подбрасываниях, и т.д.

Пример 1.2. При однократном бросании игральной кости возможен любой из шести элементарных исходов $\omega_1, \ldots, \omega_6$, где ω_i, $i = \overline{1,6}$, означает появление i очков на верхней грани кости, т.е. $\Omega = \{\omega_i, \quad i = \overline{1,6}\}$.

При двукратном бросании игральной кости каждый из шести возможных исходов при первом бросании может сочетаться с каждым из шести исходов при втором бросании, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{ij}, \quad i, j = \overline{1,6}\},$$

где ω_{ij} — исход опыта, при котором сначала выпало i, а затем j очков.

Нетрудно подсчитать, что пространство элементарных исходов Ω содержит 36 элементарных исходов.

Пример 1.3. Пусть опыт заключается в определении числа вызовов, поступивших на телефонную станцию в течение заданного промежутка времени. Разумеется, реально это число не превышает некоторого значения (определяемого, в частности, пропускной способностью линий связи), но, поскольку это значение может быть достаточно большим, в качестве пространства элементарных исходов можно принять множество целых неотрицательных чисел, т.е.

$$\Omega = \{0,1,\ldots,n,\ldots\}.$$

Пример 1.4. Предположим, что стрелок производит единственный выстрел по плоской мишени. В этом случае Ω естественно отождествить с множеством точек на плоскости или множеством пар *(x;y)* действительных чисел, где *x* — абсцисса, а *y* — ордината точки попадания пули в мишень в некоторой системе координат. Таким образом,

$$\Omega = \{(x;y): -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}.$$

1.2. События, действия над ними

Введем понятие случайного ***события.*** Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только случайные события, то, начиная с этого момента, будем называть их, как правило, просто событиями.

Определение 1.2. Любой набор ***элементарных исходов,*** или, иными словами, произвольное подмножество ***пространства элементарных*** исходов, называют ***событием.***

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого подмножества (события), называют ***элементарными исходами, благоприятствующими*** данному ***событию,*** или ***образующими*** это ***событие.***

События будем обозначать прописными латинскими буквами, снабжая их при необходимости индексами, например: A, B, C и т.д.

Сразу же оговоримся, что определение 1.2 события будет уточнено в следующем параграфе в том случае, когда Ω не является счетным множеством. Здесь же мы вводим определение 1.2 по двум причинам.

Во-первых, основная цель настоящего параграфа — наглядно показать, как физическое понятие случайного события формализуется в математических понятиях теории множеств, и описать операции над событиями.

Во-вторых, определение 1.2 вполне удовлетворительно можно применять для решения практических задач, в то время как строгое определение события служит лишь для построения теории вероятностей как раздела современной математики, оперирующей логически безупречными, но сложными для неподготовленного читателя понятиями.

Часто используется следующая терминология: говорят, что событие A произошло (или наступило), если в результате опыта появился какой-либо из элементарных исходов $\omega \in A$.

Замечание 1.1. Во многих учебниках по теории вероятностей (и в данном пособии тоже) для удобства изложения материала, особенно при решении задач, термин „событие" как подмножество пространства элементарных событий Ω отождествляется с термином „событие, произошло в результате опыта", или „событие заключается в появлении таких-то элементарных исходов".

Так, в примере 1.2, где $\Omega = \left\{\omega_i, \quad i = \overline{1,6}\right\}$, событием A является подмножество $\left\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\right\}$. Но мы будем также говорить, что событие A — это появление любого из элементарных исходов ω_i, i =1,3,5.

Пример 1.5. В примере 1.2 было показано, что при однократном бросании игральной кости

$$\Omega = \left\{\omega_i, \quad i = \overline{1,6}\right\},$$

где ω_i — элементарный исход, заключающийся в выпадении i очков. Рассмотрим следующие события: A — выпадение четного числа очков; B — выпадение нечетного числа очков; C — выпадение числа очков, кратного трем. Очевидно, что

$$\mathrm{A}=\left\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\right\},\ \mathrm{B}=\left\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\right\} \text{ и } \mathrm{C}=\left\{\omega_3, \omega_6\right\}.$$

Определение 1.3. Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называют ***достоверным событием.***

Достоверное событие, как и пространство элементарных исходов, обозначают буквой Ω.

Определение 1.4. Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т.е. событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют ***невозможным событием.***

Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$.

Пример 1.6. При бросании игральной кости достоверное событие можно описать, например, как выпадение хотя бы одного очка, а невозможное — как выпадение 7 очков.

Часто бывает полезно наглядно представить события в виде ***диаграммы Эйлера-Венна.*** Изобразим все пространство элементарных исходов прямоугольником (рис. 1.1). При этом каждый элементарный исход ω соответствует точке внутри прямоугольника, а каждое событие A — некоторому подмножеству точек этого прямоугольника. Трактовкой диаграммы Эйлера — Венна может служить опыт с бросанием

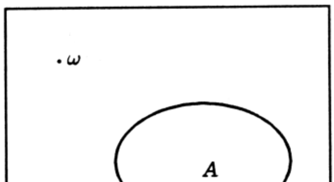


Рис. 1.1

случайным образом частицы в прямоугольник. Тогда элементарный исход ω — это попадание частицы в точку ω прямоугольника, а событие A— в часть прямоугольника, задаваемую подмножеством ***A*.**

Рассмотрим теперь ***операции (действия) над событиями,*** которые, по существу, совпадают с операциями над подмножествами. Эти операции будем иллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна. На рис. 1.2 заштрихованы области, которые соответствуют событиям, являющимся результатами таких операций.

Определение 1.5. ***Пересечением (произведением)*** двух ***событий*** A и B называют событие С, происходящее, тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B, те. событие, состоящее из тех и только тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A, и событию B — рис. 1.2,

а).Пересечение событий A и В записывают следующим образом: $C = A \cap B$, или $C = AB$.

Определение 1.6. *События A и B* называют ***несовместными,*** или ***непересекающимися,*** если их пересечение является невозможным событием, т.е. если $A \cap B = \varnothing$ (рис. 1.2,*б*). В противном случае ***события*** называют ***совместными,*** или ***пересекающимися.***

Определение 1.7. ***Объединением (суммой)*** двух ***событий*** A и B называют событие С, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B, т.е. событие С, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A или B (рис. 1.2, в).

Объединение событий A и B записывают в виде

$$C = A \cup B.$$

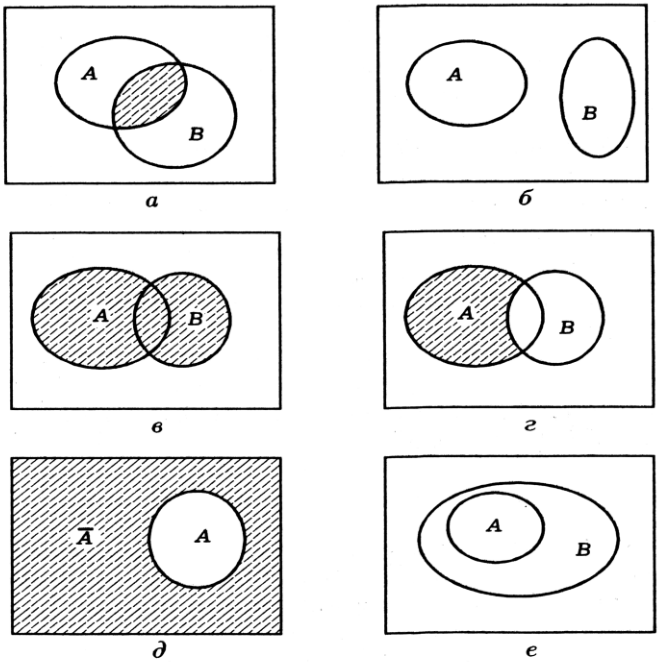


Рис. 1.2

Если события A и B несовместны, наряду со знаком „$\cup$” для их объединения употребляют знак „+”. Обычно знак „+” применяют в том случае, если заведомо известно, что A и B несовместны, и это особо хотят подчеркнуть. Например, поскольку невозможное событие $\varnothing$ несовместно с любым событием A, то

$$\varnothing \cup A = \varnothing + A = A.$$

Аналогично определяют понятия произведения и суммы событий для любого конечного числа событий и даже для бесконечных последовательностей событий. Так, событие

$$A_1 A_2 ..., A_n, ... = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих всем событиям A_n, $n \in N$, а событие

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A_n, $n \in N$. В частности, ***события*** $A_1 A_2 ... A_n$ называют ***попарно несовместными (непересекающимися),*** если

$$A_i A_j = \varnothing$$

для любых $i,j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, и ***несовместными (непересекающимися) в совокупности,*** если

$$A_1 A_2 ..., A_n = \varnothing .$$

Определение 1.8. ***Разностью*** двух ***событий*** *A и B* называют событие С, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие А, но не происходит событие *B,* т.е. событие С, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат *A*, но не принадлежат *B* (рис. 1.2, *г*).

Разность событий *A* и *B* записывают в виде:

$$C=A \backslash B.$$

Определение 1.9. ***Дополнением события*** *A* (обычно обозначают $\overline{A}$) называют событие, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие А (рис. 1.2, *д*). Другими словами,

$$\overline{A} = \Omega \backslash A.$$

Событие $\overline{A}$ называют также ***событием, противоположным*** событию *A*.

Если некоторое событие записано в виде нескольких действий над различными событиями, то сначала переходят к дополнениям, а затем умножают и, наконец, складывают и вычитают (слева направо) события. Так, формула

$$C=A_1\overline{A}_2B_1\cup A_3\overline{B}_2\backslash B_3$$

эквивалентна формуле

$$C=\{[A_1(\overline{A}_2)B_1]\cup[A_3(\overline{B}_2)]\}\backslash B_3.$$

Следует отметить, что все действия над событиями можно получить с помощью только двух действий — объединения и дополнения (или пересечения и дополнения). Основанием для этого утверждения служат законы де Моргана, а также соотношение

$$A\backslash B = A\overline{B}.$$

Кроме перечисленных выше действий над событиями нам в дальнейшем понадобится понятие включения.

Определение 1.10. Событие A включено в событие B, что записывают $A\subset B$, если появление события А обязательно влечет за собой наступление события B (рис. 1.2, *е*), или каждый элементарный исход ω, принадлежащий A, принадлежит и событию B.

Ясно, что включение $A\subset B$ эквивалентно равенству $AB=A$.

Используют и обратное понятие: событие B включает событие A ($B\supset A$), если $A\subset B$.

Пример 1.7. Рассмотрим техническое устройство (ТУ), состоящее из m элементов. В теории надежности принято говорить, что элементы соединены последовательно, если ТУ прекращает функционировать при отказе любого элемента, и соединены параллельно, если прекращение функционирования ТУ наступает только при отказе всех m элементов. Условное изображение последовательного и параллельного соединений представлено на рис 1.3, *а* и *б* соответственно.

Обозначим A событие, означающее отказ ТУ, а A_i — событие, означающее отказ i-го элемента ($i=\overline{1,m}$). Тогда события A и A_i связаны соотношениями:

для рис 1.3, *а* $\quad A=A_1\cup\ldots\cup A_m$, для рис. 1.3, *б* $A = A_1 \cap \ldots \cap A_m$.

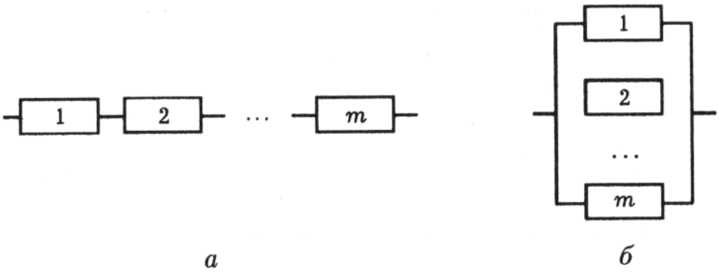


Рис. 1.3

Очевидно, что при параллельном соединении элементов событие A включено в каждое событие A_i, $i = \overline{1,m}$, а при последовательном соединении, наоборот, любое событие A_i, $i = \overline{1,m}$, включено в событие A.

Приведем основные свойства операций над событиями, справедливость которых нетрудно проверить, пользуясь диаграммами Эйлера — Венна (проделайте это самостоятельно).

1. Коммутативность суммы и произведения:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad AB = BA.$$

2. Ассоциативность суммы и произведения:

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (AB)C = A(BC).$$

3. Дистрибутивность относительно сложения:

$$(A \cup B)C = AC \cup BC.$$

4. Дистрибутивность относительно умножения (новое свойство, не выполняющееся для чисел):

$$AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

5. Включение A в B, т.е. $A \subset B$, влечет за собой включение $\overline{B}$ в $\overline{A}$, т.е. $\overline{A} \supset \overline{B}$.

6. Совпадение двойного дополнения с исходным событием:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

7. Совпадение суммы и произведения одинаковых событий с самим событием

$$A \cup A = AA = A.$$

8. ***Законы де Моргана:***

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}, \qquad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Замечание 1.2. Законы де Моргана верны для любого конечного числа событий:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 A_2 \ldots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}.$$

1.3. Сигма-алгебра событий

Необходимость введения настоящего параграфа обусловлена тем, что современная теория вероятностей основывается на понятии *вероятностного пространства,* одним из трех компонентов которого является *сигма-алгебра событий.*

В предыдущем параграфе мы назвали событием любое подмножество *пространства элементарных исходов* Ω. Такое определение допустимо, если Ω является конечным или счетным множеством. Оказывается, однако, что в случае несчетного множества элементарных исходов уже нельзя построить логически непротиворечивую теорию, называя событием произвольное подмножество множества Ω. Поэтому событиями в этом случае называют не любые подмножества элементарных исходов, а только подмножества из Ω, принадлежащие некоторому классу B. Этот класс в теории множеств принято называть сигма-алгеброй событий (пишут σ -алгебра).

С точки зрения здравого смысла *событие* — это то, что мы наблюдаем после проведения опыта. В частности, если можно после опыта установить, произошли или нет события *A* и *B*, то можно также сказать, произошли или нет события $\overline{A}$ и $\overline{B}$, *объединение, пересечение и разность событий A* и *B*. Таким образом, σ - алгебра событий обязана быть классом подмножеств, замкнутым относительно приведенных операций над подмножествами, т.е. указанные операции над элементами (подмножествами) данного класса приводят к элементам (подмножествам) того же класса.

Дадим теперь строгое определение σ -алгебры событий.

Определение 1.11. ***Сигма-алгеброй (σ -алгеброй)*** В называют непустую систему подмножеств некоторого множества **J** удовлетворяющую следующим двум условиям.

1. Если подмножество A принадлежит В, то дополнение $\overline{A}$ принадлежит В.

2. Если подмножества, $A_2, ..., A_n, ...$ принадлежат, то их объединение $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$ и их пересечение $A_1 A_2 ... A_n ...$ принадлежит В.

Поскольку $J = A \cup \overline{A}$ и $\varnothing = \overline{J}$, то множество J и пустое множество $\varnothing$ принадлежат В.

Рассмотрим пространство элементарных исходов Ω. Элементы некоторой σ -алгебры В, заданной на Ω, будем называть ***событиями.*** В этом случае σ -алгебру В принято называть ***сигма-алгеброй (σ -алгеброй) событий.***

Любая σ -алгебра событий содержит *достоверное событие* Ω и *невозможное событие* $\varnothing$.

В случае конечного или счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ -алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмножеств Ω.

Замечание 1.3. Если в условии 2 счетное множество событий заменить на конечное, то получим определение **алгебры *событий.*** Любая σ -алгебра событий обязательно является алгеброй событий. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 1.8. Пусть опыт состоит в подбрасывании один раз тетраэдра, каждая грань которого помечена одним из чисел 1, 2, 3 и 4.

Очевидно, что пространство элементарных исходов Ω в этом опыте имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

где ω_i — падение тетраэдра на грань с числом i, $i = \overline{1,4}$.

Поскольку в рассматриваемом опыте может происходить одно из следующих событий:

$$\varnothing,$$
$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\},$$
$$\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\},$$
$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

то алгебра событий будет содержать все подмножества Ω, включая Ω (достоверное событие) и $\varnothing$ (невозможное событие).

Пример 1.9. Пусть опыт состоит в случайном бросании точки на числовую прямую R^1 = $(-\infty, +\infty)$, которая в данном случае будет представлять собой пространство элементарных исходов Ω. Ясно, что, зная результат опыта, всегда можно установить, попала или нет точка в любой из промежутков [*a, b*], [*a, b*), (*a, b*], (*a, b*)**.** Поэтому относительно σ-алгебры событий B предполагают, что она содержит все эти промежутки.

В принципе могут существовать различные σ-алгебры, удовлетворяющие этому требованию. Но среди них есть одна σ-алгебра, элементы которой принадлежат всем остальным. Ее называют ***минимальной,*** или ***борелевской,*** ***σ-алгеброй*** на числовой прямой.

Аналогично определяют борелевскую σ-алгебру и в R^n, $n>1$**.**

В заключение заметим, что с точки зрения повседневной практики подмножества пространства Ω элементарных исходов, не являющиеся событиями, представляют собой чистую математическую абстракцию и в практических задачах никогда не встречаются. Даже само доказательство их существования представляет весьма сложную задачу. Поэтому мы предлагаем при первоначальном знакомстве с теорией вероятностей под событием понимать произвольное подмножество пространства Ω элементарных исходов, а под σ-алгеброй событий — совокупность всех подмножеств множества Ω.

Решение типовых примеров

Пример 1.10. Опыт состоит в однократном бросании игральной кости. Опишем пространство элементарных исходов Ω и укажем состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

а) A — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, кратно трем;

б) B — на верхней грани игральной кости выпало нечетное число очков;

в) C — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, больше трех;

г) D — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, меньше семи;

д) E — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, не является целым числом;

е) F — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, заключено в пределах от 0,5 до 1,5.

Установим пары совместных событий.

Пространство элементарных исходов в данном опыте имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где ω_i — выпадение на верхней грани игральной кости i очков.

а) Очевидно, что событие A происходит тогда и только тогда, когда выпадает либо 3, либо 6 очков, т.е.

$$A = \{\omega_3, \omega_6\}.$$

Аналогично получаем следующие выражения для остальных описанных событий:

б) $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$;

в) $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

г) $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega$;

д) $E = \varnothing$;

е) $F = \{\omega_1\}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: *A* и *B*; *A* и *C*; *A* и *D*; *B* и *C*; *B* и *D*; *B* и *F*; *C* и *D; D* и *F*.

Пример 1.11. Игральную кость бросают один раз. События *A, B, C, D, E* и *F* определены в примере 1.10. Опишем следующие события:

а) $G_1 = \overline{B}$;

б) $G_2 = \overline{C}$;

в) $G_3 = AB$;

г) $G_4 = A \cup B$;

д) $G_5 = A \setminus B$;

е) $G_6 = E \cup D$;

ж) $G_7 = EF$.

а) Событием, противоположным событию *B*, является выпадение четного числа очков, т.е. $G_1 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Аналогичные рассуждения приводят нас к следующим результатам:

б) $G_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$— выпало не более 3 очков;

в) $G_3 = \{\omega_3\}$ — выпавшее число очков нечетно и кратно трем, т.е. равно трем;

г) $G_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$ — выпавшее число очков или нечетно, или кратно трем;

д) $G_5 = AB = G_3$;

е) $G_6 = \varnothing \cup D = D = \Omega$;

ж) $G_7 = \varnothing F = \varnothing$.

Пример 1.12. Из множества супружеских пар наугад выбирают одну пару. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Выясним смысл событий:

а) ABC; б) $A \backslash AB$; в) $A\overline{B}C$.

Покажем, что $A\overline{C} \subset B$.

а) ABC — оба супруга старше 30 лет, причем муж старше жены;

б) $A \backslash AB$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены;

в) $A\overline{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, причем муж не старше своей жены.

$A\overline{C}$ — пересечение событий; мужу больше 30 лет, а жене не больше 30 лет. Следовательно, муж старше жены, т.е $A\overline{C} \subset B$.

Пример 1.13. Пусть A, B — произвольные события. Докажем следующие равенства:

а) $(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A$;

б) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = AB$.

Пользуясь свойствами операций' над событиями, имеем:

а)

$$(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = AA \cup AB \cup A\overline{B} \cup B\overline{B} = A \cup A(B \cup \overline{B}) \cup \varnothing = A;$$

б) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = A(\overline{A} \cup B) = AB$.

Пример 1.14. Выясним, в каких случаях совместны (в совокупности) события $A \cup B$, $\overline{A} \cup B$ и $A \cup \overline{B}$?

Так как $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = AB$, то события $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$ и $\overline{A} \cup B$ совместны тогда и только тогда, когда совместны события A и B.

Пример 1.15. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.4. Выход из строя элемента i — событие, $i = \overline{1,4}$. Запишем выражения для событий A и $\overline{A}$, если A означает разрыв цепи.

Разрыв цепи произойдет, если выйдет из строя элемент 1 или все три элемента 2, 3, 4, т.е. произойдут событие A_1 или событие $A_2A_3A_4$. Поэтому

$$A = A_1 \cup A_2A_3A_4.$$

В соответствии с законами де Моргана находим

$$\overline{A} = \overline{A_1 \cup A_2A_3A_4} = \overline{A_1}\left(\overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4}\right).$$

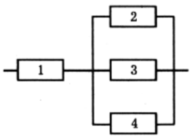


Рис. 1.4

Вопросы и задачи

1.1. Что понимают под пространством элементарных исходов?

1.2. Что называют случайным событием?

1.3. Какое событие называют достоверным? Какое событие называют невозможным?

1.4. Какие действия над событиями Вы знаете?

1.5. Какие два события называют несовместными? Какие события называют совместными?

1.6. Какие n событий ($n > 2$) называют несовместными попарно? в совокупности?

1.7. Какие события называют противоположными?

1.8. Перечислите свойства операций над событиями.

1.9. В каком случае говорят, что событие A включено в событие B?

1.10. Какими свойствами должна обладать некоторая система подмножеств пространства элементарных исходов Ω для того, чтобы быть σ-алгеброй событий? алгеброй событий?

1.11. Что называют борелевской σ-алгеброй на числовой прямой?

1.12. Случайным образом выбирают одну из 28 костей домино. Опишите пространство элементарных исходов Ω.

Перечислите все элементарные исходы, из которых состоят следующие события:

а) A — на выбранной кости очки совпадают;

б) B — сумма очков на выбранной кости равна 6;

в) C — произведение числа очков на кости нечетно;

г) $B \setminus A$; д) AB; е) AC; ж) $AB \setminus C$; з) $(A \cup B)C$.

Ответ: $\Omega = \{(i, j), i, j = \overline{0,6}, i \le j\}$;

а) $A = \{(0,0),(1,1),...,(6,6)\}$;

б) $B = \{(0,6), (1,5), (2,4), (3,3)\}$;

в) $C = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,3), (3,5), (5,5)\}$;

г) $B \setminus A = \{(0,6), (1,5)\ (2,4)\}$; д) $AB = \{(3,3)\}$;

е) $AC = \{(1,1), (3,3), (5,5)\}$; ж) $AB \setminus C = \varnothing$;

з) $(A \cup B)C = \{(1,1),(1,5),(3,3),(5,5)\}$.

1.13. Производят обследование случайным образом выбранной семьи, имеющей четырех детей, с целью определения пола этих детей. Пол каждого ребенка отмечают в порядке старшинства. Определите:

а) из какого числа элементарных исходов состоит пространство элементарных исходов;

б) сколько элементарных исходов соответствуют семьям, в которых первый ребенок — девочка;

в) сколько элементарных исходов соответствуют семьям, в которых есть дети обоего пола.

Ответ: а) 16; б) 8; в) 14.

1.14. По мишени производят три выстрела. Пусть событие A_i, $i = 1,2,3$, — попадание при i-м выстреле. Представьте в виде объединения и пересечения событий A_i или $\overline{A_i}$ следующие события:

а) A — три попадания в мишень;

б) B — три промаха;

в) C — хотя бы одно попадание;

г) D — хотя бы один промах;

д) E — не менее двух попаданий;

е) F — не больше одного попадания;

ж) G — попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

Ответ:

а) $A = A_1 A_2 A_3$; б) $B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$; в) $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

г) $D = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$;

д) $E = \overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3} \cup A_1 A_2 A_3$;

е) $F = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

ж) $G = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$.

1.15. Монету подбрасывают три раза. Опишите пространство элементарных исходов Ω и определите подмножества, соответствующие следующим событиям:

а) A — „герб" выпал ровно один раз;

б) B — ни разу не выпала „цифра";

в) C — выпало больше „гербов", чем „цифр";

г) D —„герб" выпал не менее двух раз подряд.

Ответ:

Ω ={(Г,Г,Г),(Ц,Г,Г),(Г,Ц,Г),
(Г,Г,Ц),(Г,Ц,Ц),(Ц,Г,Ц),(Ц,Ц,Г),(Ц,Ц,Ц)};

а) A = {(Г,Ц,Ц),(Ц,Г,Ц),(Ц,Ц,Г)};

б)B = {(Г,Г,Г)};

в) C = {(Г,Г,Г),(Ц,Г,Г),(Г,Ц,Г),(Г,Г,Ц)};

г)D = {(Г,Г,Г),(Ц,Г,Г),(Г,Г,Ц)}.

1.16. Пусть *A, B, C* — случайные события. Выясните смысл неравенств:

а) $ABC = A;$ б) $A \cup B \cup C = A$.

Ответ:

а) $A \subset BC$, т.е. событие BC происходит всегда, когда происходит событие A;

б) $B \subset A,\ C \subset A$, т.е. всякий раз, когда происходит B или С, происходит также и A.

1.17. Пусть $A \subset B$. Упростите выражения:

а) $AB;$ б) $A \cup B$; в) $ABC;$ г)$A \cup B \cup C$.

Ответ:

а) $AB = A$; б) $A \cup B = B;$ в) $ABC = AC;$ г)$A \cup B \cup C = B \cup C.$

1.18. Используя свойства операций над событиями, докажите следующие равенства:

а) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,;$ б) $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

1.19. Два игрока играют в шахматы. Событие A — выиграл первый игрок, событие B — выиграл второй игрок. Что означают события:

а) $\overline{A}\,\overline{B}\,;$ *б)* $\overline{B} \setminus A;$ в) $\overline{A} \setminus B$?

Ответ: Во всех случаях ничья.

1.20. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.5. Через участок схемы, вышедший из строя, ток не проходит. Пусть событие A_i — выход из строя элемента i, $i = \overline{1,6}$,. Выразите события A и $\overline{A}$ через события A_i, если A — выход из строя всей схемы.

Ответ: $A = A_1A_2 \cup A_5\left(A_3 \cup A_4\right)A_6$,
$\overline{A} = \left(\overline{A_1A_2}\right)\left(\overline{A_5\left(A_3 \cup A_4\right)}\right)\overline{A_6}$.

1.21. На рис. 1.6 представлена структурная схема надежности некоторой системы. Пусть события A и A_i означают отказ системы и i -го элемента соответственно, $i = \overline{1,4}$. Выразите события A и $\overline{A}$ через события A_i и $\overline{A_i}$, $i = \overline{1,4}$.

Ответ: $A = \left(A_1A_2 \cup A_3\right)A_4$, $\overline{A} = \left(\overline{A_1 \cup A_2}\right)\overline{A_3} \cup A_4$.

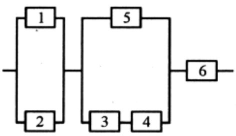


Рис. 1.5

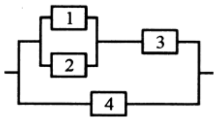


Рис. 1.6

2. ВЕРОЯТНОСТЬ

Говоря о ***событиях,*** мы с различной степенью уверенности относимся к возможности их наступления. Так, с большей уверенностью можно утверждать, что при однократном подбрасывании монеты выпадет „герб", чем при однократном бросании игральной кости — 6 очков. Говорят, что первое событие более вероятно, чем второе.

Что же такое ***вероятность*** события? Напрашивается каждому событию A поставить в соответствие число $P(A)$, которое будет являться мерой возможности его появления. Если принять $P(\Omega) = 1$, а $P(\varnothing) = 0$ (хотя можно было взять другую единицу измерения), то тогда для любого события *A* естественно ожидать, что $0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1$.

Определение вероятности как меры возможности появления события в современной математике вводится на основании аксиом. Но, прежде чем перейти к аксиоматическому определению, остановимся на нескольких других определениях, которые исторически возникли раньше. Они, с одной стороны, позволяют лучше понять смысл аксиоматического определения, а с другой — во многих случаях являются рабочим инструментом для решения практических задач. Приведем их, следуя хронологическому порядку появления.

2.1. Классическое определение вероятности

В классическом определении вероятности исходят из того, что ***пространство элементарных исходов*** Ω содержит конечное число элементарных исходов, причем все они равновозможны. Понятие равновозможности поясним следующим образом.

Элементарные исходы в некотором опыте называют ***равновозможными,*** если в силу условий проведения опыта можно считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие. Опыт, удовлетворяющий условию равновозможности элементарных исходов, часто называют также „ ***классической схемой".***

Пусть N — общее число равновозможных элементарных исходов в Ω, а N_A — число ***элементарных исходов, образующих событие*** *A* (или, как говорят, ***благоприятствующих*** событию *A*.

Определение 2.1. ***Вероятностью события*** *A* называют отношение числа N_A благоприятствующих событию *A* элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Данное определение вероятности события принято называть ***классическим определением вероятности.***

Заметим, что наряду с названием „классическая схема" используют также названия „случайный выбор", „равновероятный выбор" и т.д.

Пример 2.1. Из урны, содержащей $k = 10$ белых и $l = 20$ черных шаров (шары отличаются лишь цветом), наугад вынимают один шар. Требуется найти вероятность ***P(A)*** события A, заключающегося в том, что из урны извлечен белый шар.

Для решения поставленной задачи заметим, что число элементарных исходов в данном опыте совпадает с общим числом шаров в урне

$$N = k+l = 30,$$

причем все исходы равновозможны, а число благоприятствующих событию A исходов

$$N_A = k = 10.$$

Поэтому в соответствии с определением классической вероятности ,

$$P(A) = \frac{k}{k+l} = \frac{1}{3}.$$

Используя классическое определение вероятности события, докажем следующие свойства.

Свойство 2.1. Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству

$$P(A) \geq 0.$$

Свойство очевидно, так как отношение N_A/N не может быть отрицательным.

Свойство 2.2. Для достоверного события Ω (которое содержит все N элементарных исходов)

$$P(\Omega) = 1.$$

Свойство 2.3. Если события A и B несовместны $(AB = \varnothing)$, то

$$P(A + B) = P(A)+P(B).$$

Действительно, если событию A благоприятствуют N_1 исходов, а событию B — N_2 исходов, то в силу несовместности A и B событию $A + B$ благоприятствуют $N_1 + N_2$ исходов. Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{N_1+N_2}{N}=\frac{N_1}{N}+\frac{N_2}{N}=P(A)+P(B).$$

Оказывается, что эти три свойства являются основными. Из них как следствия можно получить другие полезные свойства (подробнее они будут рассмотрены ниже), например:

$$P(\overline{A})=1-P(A); \qquad P(\varnothing)=0;$$

$$P(A)<P(B), \quad \text{если} \quad A\subset B.$$

Недостаток классического определения заключается в том, что оно применимо только к пространствам элементарных исходов, состоящим из конечного числа равновозможных исходов. Этим определением нельзя воспользоваться даже в тех случаях, когда пространство элементарных исходов конечно, но среди исходов есть более предпочтительные или менее предпочтительные.

2.2 Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

При решении задач, заключающихся в определении ***вероятности,*** наибольшую трудность представляет подсчет общего числа ***элементарных исходов,*** благоприятствующих данному событию. В этом случае полезно обратиться к формулам комбинаторики.

Теорема 2.1. Пусть даны m групп элементов, причем i-я группа состоит из n_i элементов. Общее число N способов, с помощью которых можно осуществить указанный выбор, определяется равенством $N = n_1 n_2 \dots n_m$.

Это выражение называют ***основной формулой комбинаторики.***

Воспользуемся ***методом математической индукции*** по числу групп m.

Очевидно, что основная формула комбинаторики справедлива для $m = 1$. Предполагая ее справедливость для $m \geq 1$, покажем, что она выполняется также для $m+ 1$. Действительно, поскольку первые m элементов можно выбрать способами, а (m + 1)-й элемент можно выбрать n_{m+1} способами, то все $m+ 1$ элементов можно выбрать $(n_1 n_2 \dots n_m) n_{m+1} = n_1 n_2 \dots n_{m+1}$ способами.

Пример 2.2. В трех ящиках находятся радиодетали трех типов с различными значениями параметров. В первом ящике находится $n_1 = 20$ резисторов, во втором — $n_2 = 15$ конденсаторов и в третьем — $n_3 = 10$ транзисторов.

Найдем вероятность $P(A)$ того, что схема, собранная из выбранных наугад трех элементов разного типа, будет содержать элементы с минимальными значениями параметров. Согласно определению 2.1 классической вероятности,

$$P(A) = \frac{N_A}{N},$$

где N — общее число элементарных исходов; N_A — число исходов, благоприятствующих событию A. Очевидно, что

$$N_A = 1,$$

а в силу основной формулы комбинаторики

$$N = n_1 n_2 n_3 = 3000.$$

Поэтому искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1}{3000}.$$

Предположим теперь, что имеется группа из n различных элементов и из этой группы нужно выбрать m элементов.

Определение 2.2. Результат выбора m элементов из группы, содержащей n элементов, будем называть ***выборкой*** из n элементов по m. Если при этом элемент после выбора снова возвращается в группу, то выборку называют ***выборкой с возвращением.*** Если же выбранный элемент не участвует в дальнейшем выборе, то выборку называют ***выборкой без возвращения.*** Заметим, что в любом случае результат выбора элементов из группы, содержащей п элементов, будем называть ***выборкой.***

Определение 2.3. Выборку, в которой не учитывают порядок выбора элементов, называют ***сочетанием,*** а выборку, в которой учитывают порядок выбора элементов, — ***размещением.*** При этом если рассматривают выборку с возвращением, то сочетание (размещение) называют ***сочетанием (размещением) с повторениями,*** а если рассматривают выборку без возвращения, то сочетание (размещение) называют ***сочетанием (размещением) без повторений,*** или просто ***сочетанием (размещением).***

Замечание 2.1. Размещение без повторений из n элементов по n элементов называют ***перестановкой*** из n элементов.

Теорема 2.2. Число размещений (без повторений) из n элементов по m определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число A_n^m размещений (без повторений) подсчитаем следующим образом: первым можно выбрать любой из n элементов, вторым — любой из n- 1 оставшихся,..., m-м — любой из n — m + 1 элементов. Воспользовавшись основной формулой комбинаторики (выбор осуществляется из групп размером n,

n-1,...,n-m + 1), приходим к утверждению теоремы.

Замечание 2.2. Из этой теоремы, в частности, следует, что число P_n перестановок из n элементов равно n!

Пример 2.3. Из шести карточек, образующих слово „МАСТЕР", наудачу выбирают четыре и выкладывают слева направо. Найдем вероятность $P(A)$ того, что в результате получится слово „ТЕМА".

Элементарным исходом в данном опыте является любая четверка карточек с учетом порядка их выбора, т.е. размещение из n = 6 элементов по m = 4 элементов. Поэтому число этих исходов равно числу размещений из шести элементов по четыре элемента, т.е.

$$N = A_6^4 = 360.$$

Очевидно, что число исходов, благоприятствующих событию A,

$$N_A = 1.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{360}.$$

Пример 2.4. К Новому году четырем детям были приготовлены подарки. Дед Мороз перепутал подарки и вручил их детям случайным образом.

Найдем вероятность $P(A)$ того, что каждый ребенок получил свой подарок. В данном случае число элементарных исходов равно числу перестановок из n = 4 элементов, т.е.

$$N = P_4 = 24.$$

Поскольку число благоприятствующих событию A исходов

$$N_A = 1,$$

то $P(A)=\dfrac{1}{24}$.

Теорема 2.3. Число C_n^m сочетаний (без повторений) из n элементов по m определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Для нахождения числа сочетаний (без повторений) заметим, что сочетание от размещения отличается только тем, что входящие в него элементы не упорядочены, т.е. могут быть выбраны в любой последовательности. Но число способов, которыми можно упорядочить m элементов, совпадает с числом перестановок из m элементов, т.е. равно $m!$ Значит, каждое сочетание соответствует $m!$ размещениям и

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы.

Замечание 2.3. Число C_n^m называют также ***биномиальным коэффициентом***.

Пример 2.5. Группа состоит из n = 20 студентов. Для дежурства по институту наудачу выбирают m = 3 студента. Требуется найти вероятность $P(A)$ того, что будут выбраны первые три студента по списку.

Для решения поставленной задачи достаточно заметить, что, поскольку порядок выбора студентов не существен, общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 20 по 3, т.е.

$$N = C_{20}^3 = 1140.$$

Учитывая, что число благоприятствующих событию A исходов

$$N_A = 1,$$

получаем

$$P(A) = \frac{1}{1140} \approx 8{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Теорема 2.4. Число $\widetilde{A}_n^m$ размещений с повторениями из n элементов по m определяется формулой

$$\widetilde{A}_n^m = n^m.$$

Поскольку выбор осуществляется из одной и той же группы, причем элемент после возвращения каждый раз снова возвращается в группу, то в силу основной формулы комбинаторики число всех выборок с возвращением из n элементов по m равно n^m. ▷

Пример 2.6. Замок камеры хранения открывается при наборе определенной комбинации из четырех цифр от 0 до 9. Пассажир забыл свой номер и набирает комбинацию наугад.

Найдем вероятность $P(A)$ того, что он откроет замок с первого раза. Элементарным исходом является появление любой четверки из цифр $\overline{0{,}9}$, т.е. любое размещение с повторением из $n = 10$ элементов по $m = 4$ элемента. Значит,

$$N_A = \widetilde{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

Поскольку благоприятствующий событию A исход один, то

$$P(A) = \frac{1}{10000} = 0{,}0001.$$

Теорема 2.5, Число $\widetilde{C}_n^m$ сочетаний с повторениями из n элементов по m определяется формулой

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Рассмотрим разность

$$C_{n+m}^{m+1} - C_{n+m-1}^{m+1}.$$

Подставляя в нее вместо C_{n+m}^{m+1} и C_{n+m-1}^{m+1} их значения (см. теорему 2.3), имеем

$$C_{n+m}^{m+1}-C_{n+m-1}^{m+1}=\frac{(n+m)!}{(m+1)!(n-1)!}-\frac{(n+m-1)!}{(m+1)!(n-2)!}=$$

$$\frac{(n+m)(n+m-1)!}{(m+1)!(n-1)(n-2)!}-\frac{(n+m-1)!}{(m+1)!(n-2)!}=$$

$$=\frac{(n+m-n+1)!(n+m-1)!}{(m+1)!(n-1)!}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}=C_{n+m-1}^{m}.$$

Воспользуемся теперь методом математической индукции по переменной m. Поскольку число выборок из n элементов по одному элементу равно $n = C_n^1=\widetilde{C}_n^1$ то формула (2.1) справедлива при $m = 1$.

Пусть теперь формула (2.1) справедлива для некоторого $m\geq 1$. Покажем, что она справедлива и для $m + 1$. Для этого разобьем все выборки с повторениями из n элементов по $m + 1$ элементов на n типов. К первому типу отнесем те выборки, в которых хотя бы один раз встречается первый элемент, ко второму — выборки, в которых отсутствует первый элемент, но при этом хотя бы один раз встречается второй элемент, к третьему — выборки, в которых отсутствуют первый и второй элементы, но хотя бы один раз встречается третий элемент и т.д. Наконец, в выборке n-го типа (единственной!) встречается только n-й элемент. Число выборок i-го типа равно $\widetilde{C}_{n-i+1}^{m}$, так как выбор m элементов производится из группы, содержащей n - i + 1 элементов. Поэтому

$$\widetilde{C}_n^{m+1}=\widetilde{C}_n^{m}+\widetilde{C}_{n-1}^{m}+\ldots+\widetilde{C}_1^{m}=C_{n+m-1}^{m}+C_{n+m-2}^{m}+\ldots+C_m^m.$$

Используя теперь доказанное равенство

$$C_{k+m-1}^{m}=C_{k+m}^{m+1}-C_{k+m-1}^{m+1}$$

при $k = n, n—1,...,1$, получаем

$\widetilde{C}_n^{m+1}=\left(C_{n+m}^{m+1}-C_{n+m-1}^{m+1}\right)+\ldots+\left(C_{m+2}^{m+1}-C_{m+1}^{m+1}\right)+C_{m+1}^{m+1}=C_{n+m}^{m+1}.$ Формулы для числа размещений и сочетаний можно применять и при решении задач комбинаторики, описываемых в несколько отличных от приведенных выше постановках.

В частности, при распределении частиц по ячейкам:

- число способов, с помощью которых можно заполнить n Разных ячеек m различимыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу A_n^m размещений из n элементов по m элементов, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$;

- число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек га неразличимыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу C_n^m сочетаний из n элементов по m элементов, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;

- число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m различимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно числу $\widetilde{A}_n^m$ размещений с повторениями из n элементов по га элементов, $\widetilde{A}_n^m = n^m;$

- число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m неразличимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно числу $\widetilde{C}_n^m$ сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов, $\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Рассмотрим еще одну часто встречающуюся на практике задачу комбинаторики. Требуется найти число размещений с повторениями из n элементов по m элементов, в которых первый элемент встречается ровно m_1 раз, второй элемент встречается ровно m_2 раз,..., n-й элемент встречается ровно m_n раз

(m_1 + m_2 + ... m_n = m). Число таких размещений обозначим $C(m_1,...,m_n)$.

Теорема 2.6. Число $C(m_1,...,m_n)$ определяется формулой

$$C(m_1,..., m_n) = \frac{m!}{m_1!...m_n!}.$$

Для нахождения $C(m_1,...,m_n)$ вычислим сначала число различных способов, с помощью которых можно выбрать первый элемент. Это число равно $C_m^{m_1}$. После определения места, на котором появился первый элемент, вычислим число способов, с помощью которых можно выбрать второй элемент. Поскольку число мест теперь равно $m - m_1$, то число таких способов равно $C_{m-m_1}^{m_2}$. Число способов выбора третьего элемента равно $C_{m-m_1-m_2}^{m_3}$ и т.д. Используя теперь основную формулу комбинаторики, получаем

$$C(m_1,..., m_n) = C_m^{m_1} C_{m-m_1}^{m_2} ... C_{m-m_1-...-m_{n-1}}^{m_n} =$$

$$= \frac{m!(m-m_1)!...(m-m_1-...m_{n-1})!}{m_1!(m-m_1)!m_2!(m-m_1-m_2)!...m_n!0!} = \frac{m!}{m_1!...m_n!}.$$

Число $C(m_1,...,m_n)$ совпадает с числом способов, с помощью которых можно заполнить m разных ячеек n различимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц таким образом, чтобы в первой ячейке находилось m_1 частиц,..., в n-й ячейке находилось m_n частиц.

Замечание 2.4. Число $C(m_1,...,m_n)$ называют также ***полиномиальным (мультиноминальным) коэффициентом,*** поскольку оно появляется как коэффициент при $x_1^{m_1}...x_n^{m_n}$ в разложении функции $(x_1 + ... + x_n)^m$ по степеням $x_1,..., x_n$.

Пример 2.7. Из цифр 1,2 и 3 случайным образом составляют шестизначное число. Требуется найти вероятность $P(A)$ того, что в этом числе цифра 1 будут встречаться один раз, цифра 2 — два раза и цифра 3 — три раза.

Элементарными исходами опыта являются всевозможные Размещения с повторениями из трех элементов по шесть элементов, т.е.

$$N = \widetilde{A}_3^6 = 3^6 = 729.$$

Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно

$$N_A = C(1,2,3) = 60.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{60}{729} \approx 0{,}082.$$

В заключение приведем решение часто встречающейся в приложениях вероятностной задачи, которую формулируют в рамках классической схемы.

Пусть имеется $n = n_1 + \ldots + n_k$ различных элементов, причем из них n_1 элементов первого типа, n_2 — второго типа, ..., n_k — k-го типа. Случайным образом из этих элементов выбираются m элементов. Вероятность события A, состоящего в том, что среди выбранных элементов окажется ровно $m_1 \le n_1$ элементов первого типа, $m_2 \le n_2$ второго типа, ..., $m_k \le n_k$ элементов k-го типа, $m_1 + \ldots + m_k = m$, обозначают $P(m_1 \ldots m_k)$.

Определение 2.4. Рассмотренный способ выбора элементов называют ***гипергеометрической схемой,*** а совокупность вероятностей $P(m_1 \ldots m_k)$ в гипергеометрической схеме при фиксированных n, m, n_i, $i = \overline{1,k}$ и различных m_i, $i = \overline{1,k}$, $m_1 + \ldots + m_k = m$ называют ***гипергеометрическим распределением.***

Теорема 2.7. Вероятности $P(m_1...m_k)$ в гипергеометрической схеме определяют по формуле

$$P(m_1...m_k)=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}...C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}$$

Поскольку порядок выбора элементов не существен, то при определении общего числа элементарных исходов и числа благоприятствующих исходов будем пользоваться формулой для числа сочетаний. Общее число элементарных исходов есть число сочетаний из n элементов по m, т.е. C_n^m. Далее m_1 элементов первого типа можно выбрать $C_{n_1}^{m_1}$ способами, m_2 элементов второго типа — $C_{n_2}^{m_2}$ способами,…, m_k элементов k-го типа— $C_{n_k}^{m_k}$ способами. При этом любой способ выбора элементов определенного типа можно комбинировать с любыми способами выбора элементов остальных типов. Значит, в силу основной формулы комбинаторики (см. теорему 2.1) число благоприятствующих событию A исходов равно $C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}...C_{n_k}^{m_k}$. Поэтому

$$P(m_1...m_k)=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}...C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

что и доказывает теорему.

Пример 2.8. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 10 карт. Найдем вероятность P(A) того, что среди выбранных карт окажутся четыре карты пиковой масти, три — трефовой, две — бубновой и одна — червовой. Для этого воспользуемся гипергеометрической схемой, в которой n = 36, $n_1=n_2=n_3=9$, m_1 = 4, $m_2=3$ $m_3=2$, $m_4=1$. Следовательно,

$$P(A)=P(4,3,2,1)=\frac{C_9^4C_9^3C_9^2C_9^1}{C_{36}^{10}}\approx 0{,}0091.$$

Во многих случаях вычисление вероятности по схеме классической вероятности удобно проводить с помощью условной вероятности, которую мы введем в следующей главе.

2.3. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности обобщает классическое на случай ***бесконечного множества элементарных исходов*** Ω тогда, когда Ω представляет собой подмножество пространства R (числовой прямой), R^2 (плоскости), R^n (*n*-мерного евклидова пространства).

В пространстве R в качестве подмножеств будем рассматривать лишь ***промежутки*** или их объединения, т.е. подмножества, которые имеют длину. В пространстве R^2 — те подмножества, которые имеют площадь, и т.д.

Под мерой $\mu(A)$ подмножества *A* будем понимать его длину, площадь или объем (обобщенный объем) в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω: в R, в R^2 или в R^3 (R^n). Будем также считать, что пространство элементарных исходов Ω имеет конечную меру, а вероятность попадания „случайно брошенной" точки в любое подмножество пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы. В этом случае говорят, что рассматривается „геометрическая схема" или „точку наудачу бросают в область Ω".

Определение 2.5. ***Вероятностью события*** *A* называют число **P**(A), равное отношению меры множества *A* к мере множества Ω:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A)$ — мера множества *A*.

Данное определение вероятности события принято называть ***геометрическим определением вероятности.***

Заметим, что в литературе вероятность события А, определенную выше, на основе ***геометрической схемы,*** часто называют ***геометрической вероятностью.***

Геометрическая вероятность, очевидно, сохраняет отмеченные ранее свойства вероятности **P**(А) в условиях классической схемы.

Замечание 2.5. Приведенное определение геометрической вероятности с математической точки зрения не является корректным, поскольку в n-мерном пространстве существуют подмножества, не имеющие меры. Поэтому для строгости необходимо в качестве событий A рассматривать только элементы *борелевской* σ*-алгебры* В (см. **1.3**), что, впрочем, более чем достаточно для практических потребностей.

Пример 2.9. Студент и студентка договорились встретиться в определенном месте между двенадцатью часами и часом дня. Необходимо найти вероятность встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа происходит наудачу, причем известно, что студент ждет студентку ровно 20 минут, а студентка студента — 5 минут.

Для решения задачи воспользуемся геометрической схемой вероятности. Обозначим момент прихода студента через x, а студентки через y. Тогда любой элементарный исход ω в данной задаче можно отождествить с некоторой точкой $(x; y)$ на плоскости xOy. Выберем за начало отсчета 12 часов, а за единицу измерения 1 минуту и построим на плоскости xOy пространство элементарных исходов Ω. Очевидно, что это будет квадрат со стороной 60 (рис. 2.1). Событие A (студент и студентка встретятся) произойдет тогда, когда разность $y - x$ не превысит $t_1 = 20$, а разность $x - y$ не превысит $t_2 = 5$, т.е. условие встречи определяет систему неравенств.

$$\begin{cases} y - x \le 20; \\ x - y \le 5. \end{cases}$$

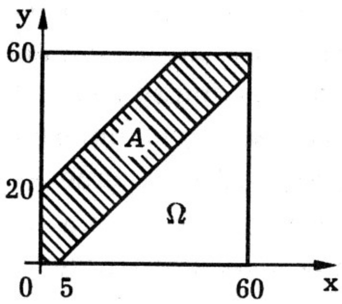


Рис. 2.1

Область A элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, на рис. 2.1 заштрихована. Ее площадь S_A равна площади квадрата без двух угловых треугольников, т.е.

$$S_A = 60^2 - \frac{(60-t_1)^2}{2} - \frac{(60-t_2)^2}{2} = 1287{,}5$$

Тогда, согласно определению 2.5, находим

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1287{,}5}{3600} \approx 0{,}36.$$

2.4. Статистическое определение вероятности

В основе статистического определения вероятности лежит общий принцип, в соответствии с которым методы теории вероятностей применимы только к таким испытаниям, которые могут быть, по крайней мере теоретически, повторены бесконечное число раз, и при этом имеет место **свойство *устойчивости частот*** появления связанных с этими испытаниями событий (см. Введение).

Пусть произведено n повторений опыта, причем в n_A из них появилось событие A. Обозначим $r_A = n_A / n$ наблюденную частоту события A. Практика показывает, что в тех экспериментах, для которых применимы методы теории вероятностей, частота события A с увеличением числа опытов n стабилизируется, т.е. стремится к некоторому пределу (допуская некоторую вольность речи).

Определение 2.6. ***Вероятностью события*** A называют (эмпирический) предел $\mathbf{P}(A)$, к которому стремится частота r_A события A при неограниченном увеличении числа n опытов.

Данное определение вероятности события принято называть ***статистическим определением вероятности.***

Можно показать, что при статистическом определении вероятности события сохраняются свойства вероятности события, справедливые в условиях классической схемы, т.е.

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \varnothing$.

С практической точки зрения статистическое определение вероятности является наиболее разумным. Однако с позиции теории вероятностей как раздела современной математики недостаток статистического определения очевиден: нельзя провести бесконечное число повторений опыта, а при конечном числе повторений наблюденная частота, естественно, будет разной при различном числе повторений.

Заметим, что связь между классическим и статистическим определениями была выявлена еще в период становления теории вероятностей как теории азартных игр. Было установлено, что при корректном использовании классического определения вероятность событий практически совпадает с их частотами при большом числе повторений эксперимента.И хотя игроков интересовала частота определенных событий, решение задач, полученное на основе классического определения вероятности, их вполне устраивало. Иными словами, даже игроки азартных игр знали о совпадении статистического определения с другими (классическим и его обобщением — геометрическим).Собственно говоря, задача определения связи вероятности с частотой не потеряла актуальности и в наши дни, когда в теории вероятностей повсеместно используется аксиоматическое определение вероятностей Колмогорова.

Это привело к появлению и широкому внедрению в практику обширного раздела теории вероятностей — математической статистики.

2.5. Аксиоматическое определение вероятности

Для того чтобы понять смысл ***аксиоматического определения вероятности,*** рассмотрим ***классическую схему***. В этом случае вероятность любого ***элементарного исхода*** $\omega_i, i = \overline{1,N}, P(\omega_i) = 1/N.$.

Вероятность любого ***события*** A при этом равна $P(A) = N_A / N,$**,** где N_A — число ***исходов, благоприятствующих событию*** *A*.

Вероятность $P(A)$ можно записать также в следующем виде

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i),$$

где суммирование ведется по всем значениям индекса *i*, при которых элементарные исходы ω_i образуют событие А.

Однако задать вероятность события по такому принципу уже в случае ***геометрической схемы*** нельзя, так как при этом вероятность любого элементарного события равна нулю.

Поэтому следует дать определение вероятности события для любого пространства элементарных исходов Ω, не связанное с вероятностями элементарных исходов, а учитывающее те свойства вероятности событий, которые имеют место для всех предыдущих определений вероятности события (***классического, геометрического, статистического)***.

Напомним, что этими свойствами являются следующие:

1) $P(A) \ge 0$; 2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P(A_1 + ... + A_m) = P(A_1) + ... + P(A_m)$, если ***события*** $A_1, \ldots,$ A_m *попарно* ***несовместны.***

Именно эти три свойства лежат в основе аксиоматического определения вероятности. При этом свойство 3 постулируется для суммы счетного множества попарно несовместных событий.

Определение 2.7. Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащему σ *-алгебры* В) поставлено в соответствие число Р(А). Числовую функцию Р (заданную на σ *-алгебры* В) называют ***вероятностью (или вероятностной мерой),*** если она удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 1 ***(аксиома неотрицательности):*** $P(A) \ge 0$;

Аксиома 2 ***(аксиома нормированности):*** $P(\Omega) = 1$;

Аксиома 3 ***(расширенная аксиома сложения):*** для любых попарно несовместных событий $A_1, ..., A_n, ...$ справедливо равенство

$$P(A_1 + ... + A_m + ...) = P(A_1) + ... + P(A_m) + ...$$

Значение Р(A) называют ***вероятностью события*** A.

Замечание 2.6. Если пространство элементарных исходов Ω является конечным или счетным множеством, то каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$, I = 1,2,..., можно поставить в соответствие число $P(\omega_i) = p_i \ge 0$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Тогда для любого события $A \subset \Omega$ в силу аксиомы 3 вероятность Р(A) равна сумме вероятностей $P(\omega_i)$ всех тех элементарных исходов, которые входят в событие A, т.е.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Таким образом, мы определили вероятность любого события, используя вероятности элементарных исходов. Заметим, что вероятности элементарных исходов можно задавать совершенно произвольно, лишь бы они были неотрицательными и в сумме составляли единицу. Именно в этом и состоит идея аксиоматического определения вероятности.

В следующей теореме докажем утверждения, описывающие ряд полезных свойств вероятности.

Теорема 2.8. Вероятность удовлетворяет следующим свойствам.

1. Вероятность *противоположного события*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

2. Вероятность *невозможного события*

$$\mathrm{P}(\varnothing) = 0.$$

3. Если $A \subset B$, то

$$P(A) \le P(B)$$

(„большему” события соответствует большая вероятность).

4. Вероятность заключена между 0 и 1:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

5. Вероятность *объединения* двух *событий*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

6. Вероятность объединения любого конечного числа событий

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - \ldots$$

$$- P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 A_n).$$

Поскольку

$$\Omega = A + \overline{A},$$

то, согласно расширенной аксиоме сложения,

$$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}),$$

откуда с учетом аксиомы нормированности получаем утверждение 1.

Утверждение 2 вытекает из равенства

$$A = A + \varnothing$$

и расширенной аксиомы сложения.

Пусть $A \subset B$. Тогда

$$B = A + (B \setminus A).$$

В соответствии с расширенной аксиомой сложения

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A).$$

Отсюда и из аксиомы неотрицательности приходим к утверждению 3.

В частности, так как всегда $A \subset \Omega$, то с учетом аксиомы неотрицательности получаем утверждение 4.

Поскольку

$$A \cup B = A + (B \setminus A), \qquad B = (B \setminus A) + AB,$$

то, используя расширенную аксиому сложения, находим

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A),$$

и

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(AB).$$

Подставляя в первое из последних двух равенств вероятность $\mathrm{P}(B \setminus A)$, выраженную из второго равенства, приходим к утверждению 5.

Утверждение 6 можно доказать с помощью метода математической индукции по n. Так, для трех событий A, B и C

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A(B \cup C)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB \cup AC) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC).$$

Для четырех и более событий это утверждение проверьте самостоятельно.

Замечание 2.7. Утверждения 5 и 6 называют ***теоремами сложения вероятностей*** для двух и для n событий соответственно.

Приведем пример, показывающий, что без учета того, что ***события совместные,*** можно прийти к неправильному результату.

Пример 2.10. Опыт состоит в двукратном подбрасывании симметричной монеты. Найдем вероятность события A, означающего появление „герба" хотя бы один раз. Обозначим A_i - появление „герба" при i-м подбрасывании, $i = 1,2$. Ясно, что

$$A = A_1 \cup A_2,$$

и в соответствии с классической схемой вероятности

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Если не учитывать, что A_1 и A_2 — совместные события, то можно получить „результат"

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

противоречащий здравому смыслу, поскольку ясно, что ***событие*** A не является ***достоверным***. Применяя теорему сложения для двух совместных событий и учитывая равенство

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4},$$

находим

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать две другие аксиомы.

Аксиома 3' ***(аксиома сложения):*** для любых ***попарно непересекающихся событий*** $A_1, \ldots, A_n$ справедливо равенство

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

Аксиома 4 ***(аксиома непрерывности):*** если последовательность событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ такова, что $A_n \subset A_{n+1}, n \in N$, и

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

Можно доказать, что аксиомы 3' и 4 в совокупности равносильны аксиоме 3.

Покажем, как конструктивно можно задать вероятность для некоторых наиболее часто встречающихся на практике пространств элементарных исходов, содержащих бесконечное число элементарных исходов.

Пусть Ω, содержит счетное множество элементарных исходов $\omega_1,...,\omega_n,...$ В этом случае любую вероятностную меру P можно получить, задав вероятности

$$p_1 = P(\omega_1),..., p_n = P(\omega_n),...$$

элементарных исходов, причем последовательность $p_1,..., p_n,...$ должна удовлетворять только условиям неотрицательности

$$p_i \geq 0, \quad i \in N,$$

и нормированности

$$p_1 + ... + p_n + ... = 1,$$

т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ является числовым рядом, сумма которого равна единице. Вероятность любого события A равна сумме $\sum p_i$ вероятностей всех входящих в A элементарных исходов ω_i.

Предположим теперь, что пространство элементарных исходов Ω представляет собой числовую прямую $(-\infty,+\infty)$ с *борелевской* ***σ-алгеброй*** на ней. Для задания вероятностной меры на числовой прямой можно взять произвольную неубывающую для любого $x \in R$ непрерывную слева функцию ***F(x),*** удовлетворяющую условиям

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,$$

и каждому событию $A_x = (-\infty, x)$ поставить в соответствие вероятность

$$P(A_x) = F(x),$$

а событию $A = [x_1, x_2)$ — вероятность

$$P(A) = F(x_2) - F(x_1).$$

Найденная таким образом для всех событий $A = [x_1, x_2)$ числовая функция $P(A)$ будет удовлетворять аксиомам в определении 2.7. Для других событий из борелевской σ-алгебры на числовой прямой, вероятность определяется единственным образом с помощью так называемой теоремы о продолжении меры, формулировку и доказательство которой можно найти в специальной литературе.

Определение 2.8. Тройку (Ω, B, P), состоящую из пространства элементарных исходов Ω, с σ-алгеброй событий B и определенной на B вероятности P, называют ***вероятностным пространством.***

Таким образом, понятие вероятностного пространства объединяет хорошо известные физические понятия: исход опыта, событие, вероятность события.

Решение типовых примеров

Пример 2.11. Куб с окрашенными гранями распилен на 27 одинаковых кубиков. Найдем ***вероятность*** того, что у выбранного наудачу кубика будет окрашена одна грань (две грани, три грани).

Общее число ***элементарных исходов*** в данном опыте N = 27. Обозначим: A — событие, заключающееся в том, что у выбранного кубика окрашена одна грань; B — две грани и С — три грани. Событию A благоприятствует N_A = *6* элементарных исходов (число граней у исходного куба), событию B — N_B =

12 исходов (число ребер у исходного куба), а событию C — 8 исходов (число вершин у исходного куба). Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{27}, \quad P(B) = \frac{12}{27}, \quad P(C) = \frac{8}{27}.$$

Пример 2.12. Из 33 карточек с написанными на них различными буквами русского алфавита наугад извлекаются пять карточек и располагаются слева направо в порядке извлечения. Найдем вероятность появления слова „РАДИО” (событие A**)**.

Поскольку карточки обратно не возвращаются и порядок выбора существен, то общее число элементарных исходов равно числу ***размещений без повторений*** из 33 элементов по пять элементов:

$$N = A_{33}^{5} = 28480320.$$

Событию A благоприятствует только один элементарный исход **(** $N_A = 1$). Значит,

$$P(A) = \frac{1}{28480320} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-8}.$$

Пример 2.13. Из колоды в 52 игральные карты выбирают наудачу три карты. Найдем вероятность того, что среди этих карт будут тройка „пик”, семерка „пик”, туз „пик”.

Поскольку порядок выбора в данном случае не существен и карты обратно в колоду не возвращаются, то число элементарных исходов равно числу ***сочетаний без повторений*** из 52 элементов по три элемента, т.е. $N = C_{52}^{3} = 22100.$

Рассматриваемому событию A благоприятствует единственный исход *(* $N_A = 1$). Поэтому $P(A) = \dfrac{1}{22100} \approx 0{,}000045.$

Пример 2.14. Группа, состоящая из восьми человек, занимает место за круглым столом. Найдем вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом.

Так как упорядочивается все множество из восьми элементов, то мы имеем дело с ***перестановкой*** из восьми элементов, т.е.

$$N = P_8 = 8!$$

Рассматриваемому событию A благоприятствуют такие перестановки, когда два отмеченных лица садятся рядом: всего восемь различных пар мест за столом и за каждую пару мест данные лица могут сесть двумя способами. При этом остальные шесть человек могут разместиться на оставшихся местах произвольно. Значит,

$$N_A = 2 \cdot 8 \cdot P_6 = 2 \cdot 8 \cdot 6! \quad \text{и} \quad P(A) = \frac{2}{7} \approx 0{,}29.$$

Для сравнения приведем еще одно решение поставленной задачи. Заметим, что поскольку нас интересуют только два определенных лица, то порядок размещения остальных не играет роли. В свою очередь, если первый человек сел на определенное место, то второй может сесть на оставшиеся семь мест. При этом в двух случаях оба лица окажутся рядом и $P(A) = \dfrac{2}{7}$.

Пример 2.15. Из 10 первых букв русского алфавита составлены всевозможные трехбуквенные „слова”. Найдем вероятность того, что случайно выбранное „слово” окажется „словом” „НИИ”.

Число различных „слов” равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по три элемента, т.е.

$$N = \widetilde{A}_{10}^3 = 10^3.$$

Поскольку благоприятствующий исход только один, то

$$P(A) = 0{,}001.$$

Пример 2.16. Опыт состоит в четырехкратном случайном выборе с возвращением одной буквы из букв алфавита „А”, Б”, „К”, „О” и „М” и записывании результата выбора слева направо в порядке поступления букв. Найдем вероятность того, что в результате будет записано слово „МАМА”.

Число элементарных исходов равно числу размещений с повторениями из пяти элементов по четыре элемента, т.е.

$$N = \widetilde{A}_5^4 = 5^4.$$

Слову „МАМА" соответствует лишь один исход. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{625} = 0{,}0016.$$

Пример 2.17. В урне имеются четыре шара различного цвета. Наудачу из урны извлекают шар и после определения его цвета возвращают обратно. Найдем вероятность того, что среди восьми выбранных шаров будут только шары одного цвета (событие A)? будет по два шара разного цвета (событие *B*). Число элементарных исходов равно числу размещений

$$N = \widetilde{A}_4^8 = 4^8$$

с повторениями из четырех элементов по восемь элементов.

Для того чтобы найти число исходов, благоприятствующих событию A, предположим сначала, что вынимают только шары первого цвета. Это можно сделать только одним способом. Аналогично только одним способом можно выбрать шары второго, третьего и четвертого цветов. Поэтому $N_A = 4$ и

$$P(A) = \frac{1}{4^7} \approx 0{,}00061.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу тех сочетаний с повторениями из четырех элементов по восемь элементов, в которых каждый элемент повторяется по два раза, т.е. $N_B = C(2{,}2{,}2{,}2) = 2520$.

Значит,

$$P(B) = \frac{2520}{4^8} \approx 0{,}0385.$$

Пример 2.18. Первенство по баскетболу оспаривают 18 команд, которые путем жеребьевки распределены на две подгруппы по девять команд в каждой. Пять команд обычно занимают первые места. Найдем вероятность попадания всех лидирующих команд в одну подгруппу (событие A); трех лидирующих команд в одну подгруппу, а двух — в другую (событие B). Пространство элементарных исходов в данном случае состоит из всевозможных способов выбрать из 18 команд, среди которых пять лидирующих, девять команд в первую подгруппу (тогда вторую подгруппу будут составлять оставшиеся девять команд), причем события A и B происходят тогда, когда в первую подгруппу попадет определенное число лидирующих команд и команд аутсайдеров. Значит, мы имеем дело с ***гипергеометрической схемой,*** в которой $k = 2$, $n = 18$, $n_1 = 5$, $m = 9$.

Событие A происходит тогда, когда в первую подгруппу попадают или пять лидирующих команд и четыре команды-аутсайдера ($m_1 = 5$, $m_2 = 4$), или девять команд-аутсайдеров ($m_1 = 0$, $m_2 = 9$). Значит,

$$P(A) = P(5{,}4) + P(0{,}9) = \frac{C_5^5 C_{13}^4 + C_5^0 C_{13}^9}{C_{18}^9} = \frac{1}{34} \approx 0{,}029.$$

Аналогично событие B происходит тогда, когда в первую подгруппу попадут или три лидирующие команды и шесть команд-аутсайдеров ($m_1 =3$, $m_2 = 6$) или две лидирующие команды и семь команд-аутсайдеров ($m_1 =2$, $m_2 = 7$). Таким образом,

$$P(B) = P(3{,}6) + P(2{,}7) = \frac{C_5^3 C_{13}^6 + C_5^2 C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17} \approx 0{,}71.$$

Пример 2.19. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросают монету радиуса r, $r < a/2$. Найдем вероятность того, что монета попадет целиком внутрь одного квадрата.

Пусть $(x; y)$ — координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата (рис. 2.2), можно записать множество элементарных исходов в виде

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}.$$

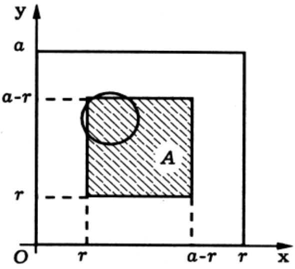


Рис. 2.2

Область А, соответствующая рассматриваемому событию, имеет вид $A = \{(x, y) : r \le x \le a - r, r \le y \le a - r\}$, т.е. является квадратом со стороной a – 2r. В соответствии с формулой геометрической вероятности находим

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(a - 2r)^2}{a^2}.$$

Пример 2.20. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Сигналы искажаются, если разность между моментами их поступления меньше τ. Определим вероятность того, что сигналы будут искажены.

Изобразим случайные моменты t_1 и t_2 поступления сигналов в приемник в виде точки на плоскости с координатами *(x; y)*. Областью возможных значений является квадрат площадью $\mu(\Omega) = T^2$ (рис. 2.3). Сигналы будут искажены, если $|t_1 - t_2| \le \tau$. Эта область лежит между прямыми $t_2 - t_1 = \tau$ и $t_1 - t_2 = -\tau$. Площадь ее равна

$$\mu(A) = T^2 - (T - \tau)^2.$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{T^2-(T-\tau)^2}{T^2}=1-\frac{(T-\tau)^2}{T^2}.$$

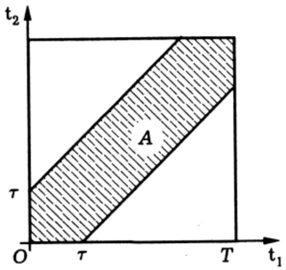


Рис. 2.3

Вопросы и задачи

2.1. Приведите классическое определение вероятности.

2.2. Напишите основную формулу комбинаторики.

2.3. Что называют выбором с возвращением? без возвращения?

2.4. Что называют сочетанием? размещением? перестановкой?

2.5. Приведите формулы для числа сочетаний и размещений из n элементов по m элементов с повторениями и без повторений и для числа перестановок из n элементов.

2.6. Чему равно число размещений с повторениями из n элементов по m элементов, в которых первый элемент встречается ровно m_1 раз, второй элемент — m_2 раз,…, n-й элемент — m_n раз?

2.7. Что называют гипергеометрической схемой? Напишите формулу, используя которую можно вычислить вероятности событий в гипергеометрической схеме.

2.8. Приведите геометрическое определение вероятности.

2.9. Приведите статистическое определение вероятности.

2.10. Дайте аксиоматическое определение вероятности.

2.11. Перечислите основные свойства вероятности.

2.12. Как можно задать вероятность в случае конечного пространства элементарных исходов? счетного пространства элементарных исходов?

2.13. Как можно задать вероятность на числовой прямой?

2.14. Что называют вероятностным пространством?

2.15. У человека имеется $\boldsymbol{N}$ ключей, из которых только один подходит к его двери. Он последовательно испытывает их, выбирая случайным образом (без возвращения). Найдите вероятность того, что этот процесс закончится на k-м испытании $k \le N$.

Ответ: $P = 1/N$.

2.16. Из десяти первых букв русского алфавита выбирают наудачу без возвращения четыре буквы и записывают в порядке поступления слева направо. Какова вероятность того, что составленное „слово" будет оканчиваться на букву „А"?

Ответ: P= 1/10.

2.17. Из шести карточек с буквами „Л", „И", „Т", „Е", „Р", „А" выбирают наугад в определенном порядке четыре. Найдите вероятность того, что при этом получится слово „ТИРЕ".

Ответ: $P = 1/A_6^4 \approx 0{,}0028$.

2.18. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наугад. Определите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Ответ: $P = 1/A_{10}^2 \approx 0{,}011$.

2.19. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найдите вероятность того, что номер набран правильно.

Ответ: $P = 1/A_5^2 = 0{,}05$.

2.20. Среди 25 экзаменационных билетов пять „хороших”. Три студента по очереди берут по одному билету. Найдите вероятности следующих событий: A — третий студент взял „хороший” билет; B — все три студента взяли „хороший” билет.

Ответ: $P(A)=5/25$; $P(B)=1/230\approx 0{,}0044$.

2.21. В урне пять белых и четыре черных шара. Из урны в случайном порядке извлекают все находящиеся в ней шары. Найдите вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

Ответ: $P=5/9\approx 0{,}56$.

2.22. Кодовые комбинации содержат пять различных цифр от 1 до 5. Какова вероятность того, что цифры в случайным образом выбранной кодовой комбинации образуют последовательность 1,2,3,4,5?

Ответ: $P=1/5!\approx 0{,}0083$.

2.23. Из урны, содержащей 10 перенумерованных шаров, наугад выбирают один за другим все находящиеся в ней шары. Найдите вероятность того, что все номера вынутых шаров будут идти по порядку.

Ответ: $P=1/10!\approx 2{,}8\cdot 10^{-7}$.

2.24. В шкафу находятся 10 пар ботинок. Из них наугад выбирают четыре ботинка. Найдите вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.

Ответ: $P=2^4 C_{10}^4/C_{20}^4\approx 0{,}69$.

2.25. Из урны, содержащей шары с номерами 1,2,...,9, пять раз наугад вынимают шар и каждый раз возвращают обратно. Найдите вероятность того, что из номеров шаров можно составить возрастающую последовательность.

Ответ: $P=C_9^5/9^5\approx 0{,}0021$.

2.26. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них случайным образом может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятности следующих событий: A — все пассажиры выйдут на четвертом этаже; B — все пассажиры выйдут на одном и том же этаже; C — все пассажиры выйдут на разных этажах.

Ответ: $P(A)=1/6^3 \approx 0{,}0046$; $P(B)=6/6^3 \approx 0{,}028$; $P(C)=A_6^3/6^3 \approx 0{,}56$.

2.27. Какова вероятность того, что в группе из $n (n \le 365)$ случайно отобранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения?

Ответ: $P=1-A_{365}^n/365^n$.

2.28. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 случайным образом выбранных человек придутся на разные месяцы года.

Ответ: $P=12!/12^{12} \approx 5{,}4\cdot 10^{-6}$.

2.29. Десять студентов договорились о поездке за город, но не договорились о вагоне. Любой из студентов наугад может сесть в любой из десяти вагонов поезда. Какова вероятность того**,** что они все попадут в разные вагоны?

Ответ: $P=10!/10^{10} \approx 0{,}00036$.

2.30. В отделение связи поступило шесть телеграмм. Телеграммы случайным образом распределяют по четырем каналам, причем каждая телеграмма может быть передана по любому из четырех каналов. Найдите вероятность того, что на первый канал попадут три телеграммы, на второй — две телеграммы, на третий — одна телеграмма и четвертый канал не будет загружен.

Ответ: $P=C(3{,}2{,}1{,}0)/4^4 \approx 0{,}23$.

2.31. Чему равна вероятность того, что дни рождения шести наугад выбранных человек придутся в точности на два месяца?

Ответ: $P=C_{12}^2[((1/6)^6-2(1/12)^6] \approx 0{,}000092$.

2.32. В партии из 50 изделий четыре нестандартных. Определите вероятность того, что среди выбранных наугад 10 изделий есть хотя бы одно нестандартное.

Ответ: $P = 1 - C_4^0 C_{46}^{10} / C_{50}^{10} \approx 0{,}60$.

2.33. На стеллаже в библиотеке стоят 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найдите вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Ответ: $P = 1 - C_5^0 C_{10}^3 / C_{15}^3 \approx 0{,}74$.

2.34. Колоду из 52 карт случайным образом делят пополам. Найдите вероятность того, что в каждой половине будет по два „туза".

Ответ: $P = C_4^2 C_{48}^{24} / C_{52}^{26} \approx 0{,}39$.

2.35. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу четырех карт из колоды в 52 карты ровно две окажутся трефовой масти?

О т в е т: $P = C_{13}^2 C_{39}^2 / C_{52}^4 \approx 0{,}39$.

2.36. Некто купил карточку „Спортлото 6 из 49" и отметил в ней шесть из имеющихся 49 номеров. **В** тираже разыгрываются шесть „выигрышных" номеров. Найдите вероятности следующих событий: A_3 — угадано три номера; A_4 — угадано четыре номера; A_5 — угадано пять номеров; A_6 — угадано шесть номеров.

Ответ: $P(A_3) = C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6 \approx 0{,}018$;
$P(A_4) = C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6 \approx 0{,}00097$; $P(A_5) = C_6^5 C_{43}^1 / C_{49}^6 \approx 1{,}8 \cdot 10^{-5}$;
$P(A_6) = C_6^6 C_{43}^0 / C_{49}^6 \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}$.

2.37. Из колоды в 32 карты наугад выбирают четыре карты. Найдите вероятности того, что среди них окажется: один „туз" (событие *A);* хотя бы один „туз" (событие *B);* хотя бы один „туз" и обязательно „туз пик" (событие *C)***.**

Ответ: $P(A) = C_4^1 C_{28}^3 / C_{32}^4 \approx 0{,}36$;
$P(B) = 1 - C_4^0 C_{28}^4 / C_{32}^4 \approx 0{,}43$; Р $P(C) = C_1^1 C_{31}^3 / C_{32}^4 \approx 0{,}125$.

2.38. Стержень длиной l ломают на три части, причем точки разлома выбирают наудачу. Найдите вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

Ответ: $P = 1/4 = 0{,}25$;

2.39. Два приятеля условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит.Чему равна вероятность встречи приятелей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

Ответ: $P = 11/36 \approx 0{,}31$.

3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим ***события*** A и B, связанные с одним и тем же опытом. Пусть из каких-то источников нам стало известно, что событие B наступило, но не известно, какой конкретно из ***элементарных исходов, составляющих событие*** B, произошел. Что можно сказать в этом случае о ***вероятности события*** A?

Вероятность события A, вычисленную в предположении, что событие B произошло, принято называть ***условной вероятностью*** и обозначать $P(A|B)$.

Понятие условной вероятности играет важнейшую роль в современной теории вероятностей. Условная вероятность позволяет учитывать дополнительную информацию при определении вероятности события. В ряде случаев при помощи условной вероятности можно существенно упростить вычисление вероятности. Понятию условной вероятности и посвящена настоящая глава.

3.1. Определение условной вероятности

Предположим сначала, что мы находимся в рамках ***классической схемы***. Пусть ***событиям*** A ***к*** B ***благоприятствуют*** N_A и N_B ***элементарных исходов*** соответственно. Посмотрим, что дает нам имеющаяся информация о событии *B*. Поскольку событие *B* произошло, то достоверно известно, что в результате опыта появился один из N_B элементарных исходов, составляющих событие *B*. Значит, теперь уже при определении степени возможности события *A* необходимо выбирать только из N_B ***возможных исходов,*** причем событию *A* благоприятствуют N_{AB} ***исходов***, при которых происходят и событие *A*, и событие *B*, или, другими словами, происходит событие *AB*. При этом по-прежнему будем считать все N_B входящих в событие *B* исходов равновероятными. Поэтому ***условную вероятность*** $P(A|B)$ события *A* при условии события *B* в рамках классической схемы вероятности естественно определить как отношение числа ***исходов*** N_{AB}, благоприятствующих совместному осуществлению событий *A* и *B*, к числу N_B ***исходов***, благоприятствующих событию *B*, т.е.

$$P(A|B)=\frac{N_{AB}}{N_B}.$$

Если теперь поделить числитель и знаменатель полученного выражения на общее число ***N*** элементарных исходов, то придем к формуле $P(A|B)=\dfrac{N_{AB}/N}{N_B/N}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Обратимся теперь к статистическому определению вероятности.

Пусть n — общее число экспериментов; n_A — число экспериментов, в которых наблюдалось событие *A*; n_B — число экспериментов, в которых наблюдалось событие *B*, n_{AB} — число экспериментов, в которых наблюдалось событие *AB*. Напомним, что ***частота события*** *A* — это отношение

$$r_A=\frac{n_A}{n}.$$

Условной частотой события *A* при условии, что *B* произошло (будем обозначать ее $r_{A|B}$) естественно назвать частоту события А, но только не среди всех повторений опыта *n*, а лишь среди тех, в которых наблюдалось событие *B,* т.е.

$$r_{A|B} = \frac{n_{AB}}{n_B}$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$r_{A|B} = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{r_{AB}}{r_B}.$$

При $n \to \infty$, согласно определению 2.6 ***статистической вероятности,*** $r_{AB} \to P(AB)$, $r_B \to P(B)$ и, следовательно, условная частота

$$r_{A|B} \to \frac{P(AB)}{P(B)},$$

т.е. условной вероятностью события А при условии события ***B*** естественно назвать число $P(A|B) = P(AB)/P(B)$.

Таким образом, мы пришли к тому же самому выражению, что и в случае классической схемы.

На основании изложенного выше можно дать следующее определение.

Определение 3.1. ***Условной вероятностью*** события *A* при условии (наступлении) события *B* называют отношение вероятности ***пересечения событий*** *A* и *B* к вероятности события *B***:**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{3.1}$$

При этом предполагают, что $P(B) \neq 0$.

В связи с появлением термина „условная вероятность" будем вероятность события называть также ***безусловной вероятностью*** события.

Рассмотрим теперь условную вероятность $P(A|B)$ как функцию события *A*.

Теорема 3.1. Условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности $P(A)$.

Для доказательства достаточно показать, что условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3.

Из определения 3.1 следует, что условная вероятность, удовлетворяет аксиоме неотрицательности, так как числитель дроби является неотрицательным числом, а знаменатель — положительным числом.

Поскольку $\Omega B = B$, то

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

т.е. условная вероятность удовлетворяет аксиоме нормированности.

Наконец, пусть $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ — *попарно непересекающиеся события.* Тогда

$$(A_1 + \ldots + A_n + \ldots)B = A_1B + \ldots + A_nB + \ldots$$

и

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots \mid B) = \frac{P(A_1B) + \ldots + P(A_nB) + \ldots}{P(B)} =$$

$$= P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots,$$

где в последнем равенстве использовано свойство умножения сходящегося ряда на постоянную. Следовательно, условная вероятность удовлетворяет *расширенной аксиоме сложения* 3. $\triangleright$ Смысл теоремы 3.1 заключается в том, что условная вероятность представляет собой безусловную вероятность, заданную на новом ***пространстве*** Ω_1 ***элементарных исходов,*** совпадающем с событием *B***.**

Пример 3.1. Рассмотрим опыт с однократным бросанием игральной кости, но не обычной, а с раскрашенными гранями: грани с цифрами 1, 3 и 6 окрашены красным, а грани с цифрами 2, 4 и 5 — белым цветом. Введем события: A_1 — впадение нечетного числа очков; A_2 — выпадение четного числа очков; B — появление грани красного цвета.

Интуитивно ясно, что если произошло событие B, то условная вероятность события A_1 больше, чем условная вероятность события A_2, поскольку на красных гранях нечетных чисел в два раза больше, чем четных. Заметим, что безусловные вероятности событий A_1 и A_2 при этом одинаковы и равны, очевидно, 1/2.

Найдем условные вероятности событий A_1 и A_2 при условии события B. Очевидно, что

$$P(A_1B)=\frac{N_{A_1B}}{N}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P(A_2B)=\frac{N_{A_2B}}{N}=\frac{1}{6},$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, в силу определения 3.1 условной вероятности имеем $P(A_1 \mid B)=\dfrac{1/3}{1/2}=\dfrac{2}{3}$ и $P(A_2 \mid B)=\dfrac{1/6}{1/2}=\dfrac{1}{3}$, что подтверждает наше предположение.

Геометрическая интерпретация условной вероятности. При практическом вычислении условной вероятности события A при условии, что событие B произошло, часто удобно трактовать условную вероятность как безусловную, но заданную не на исходном пространстве Ω, элементарных исходов, а на новом пространстве $\Omega_1 = B$ элементарных исходов. Действительно, используя ***геометрическое определение вероятности,*** получаем для безусловной и условной вероятностей события A (на рис. 3.1 заштрихованная область соответствует событию AB).

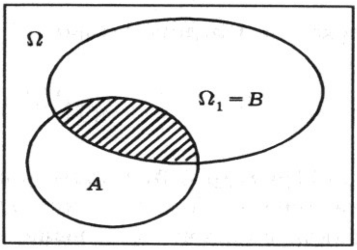


Рис. 3.1

$$P(A \mid B) = \frac{S_{AB} / S_{\Omega}}{S_B / S_{\Omega}} = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{A\Omega_1}}{S_{\Omega 1}}$$

Здесь S_A, S_{Ω} и т.д. обозначают соответственно площади A, Ω и т.д. Таким образом, выражение для $P(A|B)$ будет совпадать с выражением для $P(A)$, вычисленным в соответствии **со *схемой геометрической вероятности***, если исходное пространство Ω элементарных исходов заменить новым пространством $\Omega_1 = B$.

Пример 3.2. Из урны, в которой $a = 7$ белых и $b = 3$ черных шаров, наугад без возвращения извлекают два шара. Пусть событие A_1 состоит в том, что первый извлеченный из урны шар является белым, а A_2 — белым является второй шар. Требуется найти $\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)$.

Приведем решение этой задачи двумя способами.

Первый способ. В соответствии с определением условной вероятности имеем (опуская пояснения):

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{C_7^2 / C_{10}^2}{C_7^1 C_{10}^1} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Перейдем к новому пространству Ω_1 элементарных исходов. Так как событие A_1 произошло, то это означает, что в новом пространстве элементарных исходов всего равновозможных исходов

$$N_{\Omega_1} = a + b - 1 = 9,$$

а событию A_2 благоприятствует при этом

$$N_{A_2} = a - 1 = 6$$

исходов. Следовательно,

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3.3. Пусть событие B — выпадение 4 или 6 очков на игральной кости, событие A_1 — выпадение четного числа очков, событие A_2 — выпадение 3, 4 или 5 очков, событие A_3 — выпадение нечетного числа очков.

Найдем условные вероятности событий A_1, A_2 и A_3 при условии события B.

Так как событие B принадлежит событию A_1, то при наступлении события B событие A_1 обязательно произойдет, т.е. событие A_1 имеет условную вероятность

$$P(A_1 \mid B) = 1.$$

Поскольку события A_3 и B несовместные, то при наступлении события B событие A_3 уже не может произойти и его условная вероятность

$$P(A_3 \mid B) = 0.$$

Наконец, в соответствии с классической схемой вероятности приходим к следующему значению условной вероятности события A_2 при условии события B:

$$P(A_2 \mid B) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что условная вероятность события A_2 при условии B совпадает с безусловной вероятностью события A_2.

3.2. Формула умножения вероятностей

При решении различных задач вероятностного характера часто интересующее нас ***событие*** A можно достаточно просто выразить через некоторые события $A_1, A_2, ..., A_n$ с помощью ***операций объединения*** или ***пересечения***. Если

$$A = A_1 A_2 ... A_n ,$$

то для нахождения *вероятности* $P(A)$ события A обычно удобно использовать следующую теорему.

Теорема 3.2 (теорема умножения вероятностей).

Пусть событие $A = A_1 A_2 ... A_n$

(т.е. А — пересечение событий $A_1, A_2, ..., A_n$ и $P(A) > 0$). Тогда справедливо равенство

$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)...P(A_n \mid A_1 A_2 ... A_{n-1})$, называемое ***формулой умножения вероятностей.***

Поскольку $P(A) = P(A_1 A_2 ... A_n) > 0$, а

$$A_1 A_2 ... A_k \supseteq A_1 A_2 ... A_n \quad (k = \overline{1, n-1}) ,$$

то и $P(A) = P(A_1 A_2 ... A_k) > 0$. Учитывая это неравенство, согласно определению 3.1 ***условной вероятности***, имеем

$$P(A_n \mid A_1 A_2 ... A_{n-1}) = \frac{P(A_1 A_2 ... A_n)}{P(A_1 A_2 ... A_{n-1})}.$$

Умножая обе части этого равенства на $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$, получаем

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1 A_2 ... A_{n-1}) P(A_n \mid A_1 A_2 ... A_{n-1})$$

Аналогично находим

$$P(A_1A_2...A_{n-1})=P(A_1A_2...A_{n-2})P(A_{n-1}\mid A_1A_2...A_{n-2}).$$

Тогда

$$P(A_1...A_n)=P(A_1...A_{n-2})P(A_{n-1}\mid A_1...A_{n-2})\times P(A_n\mid A_1...A_{n-1})$$

Продолжая эту процедуру, получаем формулу умножения вероятностей.

Замечание 3.1. Из свойства коммутативности пересечения событий следует, что правая часть формулы умножения для пересечения одних и тех же событий может быть записана поразному. Например, как

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1),$$

так и в виде $P(A_1A_2)=P(A_2A_1)=P(A_2)P(A_1\mid A_2)$.

Обычно выбирают тот вариант формулы, который приводит к более простым вычислениям.

Пример 3.4. На семи карточках написаны буквы, образующие слово „СОЛОВЕЙ". Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найдем вероятность того, что получится слово „ВОЛ" (событие *A).*

Введем события: A_1 — на первой выбранной карточке написана буква „В"; A_2 — на второй карточке — буква „О"; A_3 — на третьей карточке — буква „Л". Тогда событие A есть пересечение событий A_1, A_2 и A_3**.** Следовательно, в соответствии с формулой умножения вероятностей

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2).$$

Согласно ***классическому определению*** 2.1 ***вероятности,*** имеем

$$P(A_1)=\frac{1}{7}.$$

Если событие A_1 произошло, то на шести оставшихся карточках буква „О" встречается два раза, поэтому условная вероятность

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично определяем $P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{1}{5}$.

Окончательно получаем

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105} \approx 0{,}0095).$$

3.3. Независимые и зависимые события

Из рассмотренных выше примеров видно, что ***условная вероятность*** $P(A|B)$ ***события*** A при условии, что событие B произошло, может как совпадать с ***безусловной вероятностью*** $P(A)$, так и не совпадать, т.е. наступление события B может влиять или не влиять на ***вероятность события*** A. Поэтому естественно степень связи (или степень зависимости) событий A *и* B оценивать путем сопоставления их условных вероятностей $P(A|B)$, $P(B|A)$ с безусловными.

Определение 3.2. ***События*** A и B, имеющие ненулевую вероятность, называют ***независимыми,*** если условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A или если условная вероятность B при условии A совпадает с безусловной вероятностью B, т.е.

$$P(A|B) = P(A) \tag{3.2}$$

или

$$P(B|A) = P(B) \tag{3.3}$$

в противном случае ***события*** A и B называют ***зависимыми.***

Теорема 3.3. События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пусть выполнено равенство (3.3). Воспользовавшись ***формулой умножения вероятностей*** для двух событий, получим $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$.

К аналогичному выводу приходим и в случае выполнения равенства (3.2), т.е. из условия независимости событий следует (3.4).

Обратно, пусть выполнено равенство (3.4). Тогда, согласно определению 3.1 условной вероятности,

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A), \quad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B),$$

т.е. в силу определения 3.2 события A и B независимы.

Таким образом, в качестве эквивалентного определения независимости двух событий, имеющих ненулевую вероятность, может служить следующее определение.

Определение 3.3. События A и B называют независимыми, если выполняется равенство (3.4).

Отметим, что последним определением можно пользоваться даже в том случае, когда вероятности событий A или B равны нулю.

Замечание 3.2. Из теоремы 3.3 следует, что если в определении 3.2 независимости выполняется одно из равенств (3.2) или (3.3), то выполняется автоматически и другое, т.е. в определении 3.2 достаточно потребовать выполнения любого одного из них.

Пример 3.5. Из колоды карт, содержащей $n = 36$ карт, наугад извлекают одну карту. Обозначим через A событие, соответствующее тому, что извлеченная карта будет пиковой масти, а B — событие, соответствующее появлению „дамы". Определим, являются ли зависимыми события A и B. После вычислений получаем

$$P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}, \qquad P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$

$$P(AB)=\frac{1}{36}, \qquad P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/36}{9/36}=\frac{1}{9}=P(B),$$

т.е. события *A и B* независимы. Как отмечалось в замечании 3.2, имеет место и равенство

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/36}{4/36}=\frac{1}{4}=P(A).$$

Следовательно, события *A* и *B* независимы.

Изменим теперь условия опыта, дополнительно добавив в колоду, допустим, $N = 100$ „пустых” карт (без рисунка). Изменится ли ответ? Имеем

$$P(B)=\frac{4}{136}=\frac{1}{34},$$

т.е. безусловная вероятность события *B* уменьшилась. Однако условная вероятность

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/136}{9/136}=\frac{1}{9}$$

не изменилась, т.е события *A* и *B* стали зависимыми.

Теорема 3.4, Если события *A* и *B* независимые, то независимыми также являются пары событий $\overline{A}$ и *B*, *A* и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, если вероятности соответствующих событий ненулевые.

В силу теоремы 3.1 и независимости событий *A* и *B* имеем:

$$P(\overline{A}\,|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = \mathrm{P}(\overline{A}),$$

что означает независимость событий $\overline{A}$ и *B*. Независимость остальных пар событий можно доказать аналогично.

Определение 3.4. ***События*** $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***независимыми в совокупности,*** если вероятность ***пересечения*** любых двух различных ***событий*** равна произведению вероятностей этих событий; вероятность пересечения любых трех событий равна произведению их вероятностей; вероятность пересечения всех событий равна произведению их вероятностей.

Для событий $A_1, A_2, ..., A_n$ независимых в совокупности, имеет место утверждение, аналогичное утверждению теоремы 3.4.

Теорема 3.5. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности, то и события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ независимы в совокупности.

Если только любые два события из данной совокупности являются независимыми, то говорят о ***попарной независимости событий*** из этой совокупности.

Так же как и в случае двух событий, можно показать, что на вероятность каждого из независимых в совокупности событий не оказывает влияние появление или непоявление остальных событий.

Замечание 3.3. В силу определения независимости событий в совокупности ***формула умножения вероятностей*** *для* независимых в совокупности событий имеет вид

$$P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

Из независимости событий с ненулевыми вероятностями в совокупности, согласно теореме 3.3, следует их попарная независимость. Однако из попарной независимости, вообще говоря, независимость в совокупности не следует, что демонстрирует следующий пример.

Пример 3.6. Опыт состоит в однократном подбрасывании тетраэдра, грани которого „пронумерованы" следующим образом: на трех гранях стоят цифры 1, 2 и 3 соответственно (одна цифра на каждой из них), а на четвертой присутствуют все цифры 1, 2 и 3.

Введем события A_i — падение тетраэдра на грань, на которой присутствует цифра *i*, $i = \overline{1, 3}$. Покажем, что события A_1, A_2 и A_3 попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Согласно классическому определению вероятности, получаем

$$P(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad i = \overline{1,3},$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично

$$P(A_i \mid A_j) = \frac{1}{2}$$

при любых $i, j = \overline{1,3}$, $i \neq j$, т.е. события A_1, A_2 и A_3 являются попарно независимыми. Однако, например,

$$P(A_1 \mid A_2 A_3) = \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_2 A_3)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \neq P(A_1),$$

т.е. события A_1, A_2 и A_3 зависимы в совокупности.

Заметим, что, когда говорят о независимости событий $A_1, ..., A_n$, подразумевают именно независимость событий в совокупности, в отличие от попарной независимости событий $A_1, ..., A_n$.

Запишем формулу для вероятности ***объединения*** независимых ***событий***. Пусть

$$A = A_1 \cup ... \cup A_n.$$

Тогда в соответствии с ***законом де Моргана***

$$\overline{A} = \overline{A}_1 ... \overline{A}_n.$$

Если события $A_1, ..., A_n$ независимые, то, согласно теореме 3.5, события $\overline{A}_1 ... \overline{A}_n$ также независимые и, значит,

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) ... P(\overline{A}_n).$$

Отсюда окончательно получаем ***формулу*** для ***вероятности объединения независимых событий:***

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)] ... [1 - P(A_n)].$$

Замечание 3.4. (о связи между совместными и зависимыми событиями). Между понятиями „несовместные" и „независимые" события имеется следующая связь:

1) если A и B — несовместные события (и $P(A) \neq 0$, и $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые (убедитесь самостоятельно) ;

2) если A и B — совместные события, то они могут быть и зависимыми и независимыми;

3) если A и B — зависимые события, то они могут быть и совместными и несовместными.

Следует помнить, что при использовании теоремы сложения вероятностей нужно проверять несовместность событий, а при использовании теоремы умножения — независимость событий.

В заключение отметим, что понятие независимости является очень важным в теории вероятностей. При этом следует различать формальное понятие независимости событий, определяемое свойствами вероятностной модели, и понятие независимости событий, возникающее в прикладных задачах и означающее, что события не связаны причинно. При корректном построении вероятностной модели второе трансформируется в первое, но это может быть не всегда.

3.4. Формула полной вероятности

Предположим, что в результате опыта может произойти одно из *n* ***событий*** $H_1, H_2, ..., H_n$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) они являются ***попарно несовместными,*** т.е.

$$H_i H_j = \varnothing \qquad \text{при } i \neq j;$$

2) хотя бы одно из них обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их ***объединение*** есть ***достоверное событие,*** т.е.

$$H_1 \cup \ldots \cup H_n = \Omega.$$

Определение 3.5. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ удовлетворяющие условиям 1 и 2, называют ***гипотезами.***

Заметим, что если события удовлетворяют второму из двух указанных требований, то их совокупность называют ***полной группой событий.*** Таким образом, гипотезы — это попарно несовместные события, образующие полную группу событий.

Пусть также имеется некоторое событие A и известны ***вероятности*** гипотез $P(H_1), \ldots, P(H_n)$, которые предполагаются ненулевыми, и ***условные вероятности*** $P(A \mid H_1), \ldots, P(A \mid H_n)$ события A при выполнении этих гипотез. Задача состоит в вычислении ***безусловной вероятности*** события A. Для решения этой задачи используют следующую теорему.

Теорема 3.6. Пусть для некоторого события A и гипотез $H_1, \ldots, H_n$ известны $P(H_1), \ldots, P(H_n)$, которые положительны, и

$$P(H_1) + \ldots + P(H_n) = 1. \tag{3.4}$$

Тогда безусловную вероятность $P(A)$ определяют по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n), \tag{3.5}$$

которую называют ***формулой полной вероятности.***

Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + \ldots + H_n) = AH_1 + \ldots + AH_n$$

(на рис. 3.2, область, соответствующая событию A, заштрихована) .

С учетом того, что события $AH_i, i = \overline{1,n}$ несовместны, имеем

$$P(A) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n).$$

В соответствии с ***формулой умножения вероятностей*** получаем

$$P(AH_1) = P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(AH_n) = P(H_n)P(A \mid H_n).$$

Поэтому

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n).$$

Формула полной вероятности при всей своей простоте играет весьма существенную роль в теории вероятностей.

Пример 3.7. Путник должен попасть из пункта *B* в пункт *A* в соответствии со схемой дорог изображенной на рис. 3.3. Выбор любой дороги в любом пункте равновозможен. Найдем вероятность события *A* — достижения путником намеченной цели.

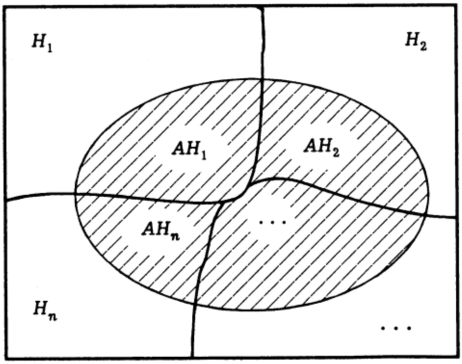


Рис. 3.2

Для того чтобы попасть в пункт *A*, путник должен пройти один из промежуточных пунктов H_1, H_2 или H_3. Введем гипотезы H_i, где H_i означает, что путник выбрал в пункте *B* путь, ведущий в пункт H_i, i = 1,2,3. Ясно, что события H_i несовместные и одно из них обязательно происходит, причем в силу равновозможности выбора дорог из *B* в H_i

$$P(H_i) = \frac{1}{3}.$$

Остается вычислить условные вероятности $P(A \mid H_i)$, которые легко найти, если рассматривать новое ***пространство элементарных исходов,*** соответствующее выбранной гипотезе H_i.

Например, появление H_1 означает, что есть два равновозможных исхода (из пункта H_1 выходят две дороги), из которых лишь один благоприятствует событию A, т.е. $P(A \mid H_1) = \frac{1}{2}$.

Аналогично находим, что $P(A \mid H_2) = \frac{1}{4}$, $P(A \mid H_3) = 0$.

Согласно формуле 3.5 полной вероятности, получаем

$$P(A) = \frac{1}{3} * \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 \right) = 0{,}25.$$

Заметим, что данная задача может иметь техническую интерпретацию: сеть дорог — это сеть каналов передачи информации, а $P(A)$ — вероятность передачи сообщения по такой сети.

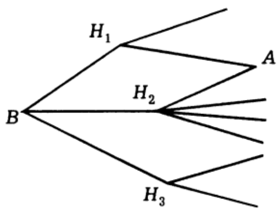


Рис. 3.3

Пример 3.8. Студент выучил все $N = 30$ экзаменационных билетов, но из них на „пять” — лишь $N_1 = 6$. Определим, зависит или нет вероятность извлечения „счастливого" билета (событие A) от того, первым или вторым выбирает студент свой билет.

Рассмотрим две ситуации.

Студент выбирает билет первым. Тогда

$$P(A)=\frac{N_1}{N}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}.$$

Студент выбирает билет вторым. Введем гипотезы: H_1 — первый извлеченный билет оказался „счастливым", H_2 — „несчастливым". Ясно, что

$$P(H_1)=\frac{N_1}{N}=\frac{1}{5}, \qquad P(H_2)=\frac{N-N_1}{N}=\frac{4}{5},$$
$$P(A\,|\,H_1)=\frac{N_1-1}{N-1}=\frac{5}{29}, \quad P(A\,|\,H_2)=\frac{N_1}{N-1}=\frac{6}{29}.$$

В силу формулы (3.5) полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{5}*\frac{5}{29}+\frac{4}{5}*\frac{6}{29}=\frac{1}{5}=\frac{N_1}{N},$$

что совпадает с первой ситуацией.

3.5. Формула Байеса

Пусть по-прежнему некоторое ***событие*** A может произойти с одним из событий $H_1,\dots,H_n$, образующих ***полную группу попарно несовместных событий,*** называемых, как уже отмечалось, ***гипотезами***. Предположим, что известны ***вероятности*** гипотез $P(H_1),\dots,P(H_n)$ ($P(H_i)>0$, $i=\overline{1,n}$) и что в результате опыта событие A произошло, т.е. получена дополнительная информация. Спрашивается, как „изменятся" вероятности гипотез, т.е. чему будут равны ***условные вероятности*** $P(A\,|\,H_1),\dots,P(A\,|\,H_n)$ **,** если известны также условные вероятности $P(A|H_1),...,P(A|H_n)$ события A? Для ответа на этот вопрос используют следующую теорему.

Теорема 3.7. Пусть для некоторого события А, $P(A)>0$, и гипотез $H_1,...,H_n$ известны $P(H_1),...,P(H_n)$ ($P(H_i)>0$, $i=\overline{1,n}$) и $P(A|H_1),...,P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i)>0$, $i=\overline{1,n}$, гипотезы H_i, при условии события A определяется ***формулой Байеса***

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1)+...P(H_n)P(A|H_n)}. \tag{3.6}$$

Согласно определению 3.1 условной вероятности,

$$P(H_i|A)=\frac{P(AH_i)}{P(A)}.$$

Выражая теперь по ***формуле умножения вероятностей*** $P(H_i)$ через $P(A|H_i)$ и $P(H_i)$, получаем

$$P(AH_i)=P(H_i)P(A|H_i).$$

Поэтому $P(H_i|A)=\dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$.

Подставляя вместо вероятности $P(A)$ ее значение, вычиненное в соответствии с ***формулой*** (3.5) ***полной вероятности,*** Приходим к утверждению теоремы.

Формула Байеса находят широкое применение в математической статистике, теории вероятности решений и их приложениях. Заметим, что ***вероятности*** $P(H_1),...,P(H_n)$ обычно называют ***априорным*** (т.е. полученными до “опыта”), а условные ***вероятности*** $P(A|H_1),...,P(A|H_n)$ - ***апостериорными*** (т.е. полученными “после опыта”).

Пример 3.9. Врач после осмотра больного считает, что возможно одно из двух заболеваний, которые мы зашифруем номерами 1 и 2, причем степень своей уверенности в отношении правильности диагноза он оценивает как 40% и 60% соответственно. Для уточнения диагноза бального направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании 1 в 90% случаев и при заболевании 2 – в 20% случаев. Анализ дал положительную реакцию. Как изменится мнение врача после этого?

Обозначим через A событие, означающее, что анализ дал положительную реакцию. Естественно ввести следующие гипотезы: H_1 - имеет место заболевание 1; H_2 - имеет место заболевание 2. Из условий задачи ясно, что априорные вероятности гипотез равны:

$$P(H_1)=0{,}4 \qquad \text{и} \qquad P(H_2)=0{,}6\,,$$

а условные вероятности события А при наличии гипотез H_1 и H_2 равны 0,9 и 0,2 соответственно. Используя формулу Байеса, находим

$$P(H_i \mid A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}2}=0{,}75\,.$$

Итак, врач с большей уверенностью признает наличие заболевания 1.

Пример 1.10. Рассмотрим случай когда

$$P(H_i \mid A)=const=C, \quad i=\overline{1,n}\,,$$

т.е. на вероятность появления события A все гипотезы влияют одинаково. Тогда, согласно формуле Байеса, получаем $P(H_i \mid A)=P(H_i)$, т.е. дополнительная информация о появлении события A не имеет никакой ценности, поскольку не меняет наших представлений об априорных вероятностях гипотез.

3.6. Схема Бернулли

Повторные испытания – это последовательное проведение n раз одного и того же опыта или одновременное проведение n одинаковых опытов. Например, при контроле уровня надежности прибора могут либо проводить n испытаний с одним и тем же прибором, если после отказа полностью восстанавливают его исходные свойства, либо ставить на испытание n опытных образцов этого прибора, которые считают идентичными.

Определение 3.6. ***Схемой Бернулли*** (или ***последовательностью независимых одинаковых испытаний,*** или ***биномиальной схемой*** испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющею следующим условиям:

1) при каждом испытании различают лишь два исхода: появление некоторого события A , называемого “успехом”, либо появление его дополнения $\overline{A}$, называемого “неудачей”;
2) испытания являются независимыми, т.е. вероятность успеха в k-м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k-го;
3) *вероятность* успеха во всех испытаниях постоянна и равна

$$P(A)=p.$$

Вероятность неудачи в каждом испытании обозначим q, т.е.

$$P(\overline{A})=1-p=q.$$

Приведем примеры реальных испытаний, которые в той или иной степени „вписываются” в рамки сформулированной модели испытаний по схеме Бернулли.

1. Последовательное подбрасывание n раз симметричной монеты (здесь успехом является появление „герба” с вероятностью $p = 1/2$) или последовательное бросание n раз игральной кости (здесь успехом можно считать, например, появление шестерки с вероятностью $p = 1/6$). Эти две реальные схемы испытаний являются примером идеального соответствия схеме испытаний Бернулли.

2. Последовательность n выстрелов стрелка по мишени можно лишь приближенно рассматривать как схему испытаний Бернулли, так как независимость результатов стрельбы может нарушаться либо из-за „пристрелки” спортсмена, либо в следствии его утомляемости.

3. Испытания n изделий в течение заданного срока при контроле уровня их надежности, как правило, хорошо согласуются с моделью испытаний по схеме Бернулли, если на испытания поставлены идентичные образцы.

При рассмотрении схемы испытаний Бернулли основной задачей является нахождение вероятности события A_k, состоящего в том, что в n испытаниях успех наступит ровно $к$ раз, $k=\overline{0,n}$, п. Для решения этой задачи используют следующую теорему, обозначая вероятность $P(A_k)$ через $P_n(k)$.

Теорема 3.8. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдет ровно k успехов, определяется ***формулой Бернулли***

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=\overline{0,n}. \tag{3.7}$$

Результат каждого опыта можно записать в виде последовательности УНН...У, состоящей из n букв „У" и „Н", причем буква „У" на i-м месте означает, что в i-м испытании произошел успех, а „Н" — неудача. Пространство элементарных исходов Ω состоит из 2^n исходов, каждый из которых отождествляется с определенной последовательностью УНН...У. Каждому элементарному исходу ω =УНН...У можно поставить в соответствие вероятность

$$P(\omega) = P(УНН...У).$$

В силу независимости испытаний события У,Н,Н,...,У являются независимыми в совокупности, и потому по теореме умножения вероятностей имеем $P(\omega)=p^i q^{n-i}, \quad i=\overline{0,n}$,

если в n испытаниях успех „У" имел место г раз, а неуспех „Н", следовательно, n — i раз.

Событие A_k происходит всякий раз, когда реализуется элементарный исход и, в котором i = k. Вероятность любого такого элементарного исхода равна $p^k q^{n-k}$.

Число таких исходов совпадает с числом способов, которыми можно расставить k букв „У" на n местах, не учитывая порядок, в котором их расставляют. Число таких способов равно C_n^k.

Так как A_k есть объединение (сумма) всех указанных элементарных исходов, то окончательно получаем для вероятности $P(A_k) = P_n(k)$ формулу (3.7).

Формулу (3.7) называют также ***биномиальной,*** так как ее правая часть представляет собой $(k + 1)$-й член формулы бинома Ньютона.

$$1 = (p+q)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^n p^n .$$

Набор вероятностей $P_n(k)$, $k = \overline{0,n}$, называют ***биномиальным распределением вероятностей.***

Из формулы Бернулли вытекают два следствия.

1. Вероятность появления успеха (события A) в n испытаниях не более k_1 раз и не менее k_2 раз равна:

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad . \qquad (3.8)$$

Это следует из того, что события A_k при разных k являются несовместными.

2. В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ из (3.8) получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях:

$$P\{k \ge 1\} = 1 - q^n .$$

Пример 3.11. Монету (симметричную) подбрасывают $n =$ = 10 раз. Определим вероятность выпадения „герба":

а) ровно пять раз;

б) не более пять раз;

в) хотя бы один раз.

В соответствии с формулой (3.7) Бернулли имеем:

а) $P_{10}(5)=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}=0{,}146$;

б) $P\{k\le 5\}=\frac{C_{10}^{0}+C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+C_{10}^{5}}{1024}=\frac{683}{1024}\approx 0{,}623$;

в) $P\{k\ge 1\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0{,}999$.

Пример 3.12. Вероятность выигрыша на один лотерейный билет равна 0,01. Определим, сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша в лотерее была не менее заданного значения $P_З = 0{,}9$.

Пусть куплено n билетов. Предположим, что общее число билетов, разыгрывающихся в лотерее велико (во много раз больше купленных билетов). При этом можно считать, что каждый билет выигрывает независимо от остальных с вероятностью $p = 0{,}01$. Тогда вероятность получить $к$ выигрышных билетов можно определить, используя формулу Бернулли. В частности, согласно (3.9), имеем при $q = \boldsymbol{1} - p$:

$$p\{k\ge 1\}=1-q^{n}=1-(1-p)^{n}\ge P_З,$$

откуда получаем

$$n\ge\frac{\ln(1-P_З)}{\ln(1-p)}=\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99}\approx 230.$$

Таким образом, нужно купить не менее 230 лотерейных билетов.

При больших значениях числа испытаний n использование формулы Бернулли затруднительно в вычислительном плане. Здесь существенную помощь могут оказать приближенные формулы.

Формула Пуассона. Пусть число испытаний n по схеме Бернулли „велико”, а вероятность успеха p в одном испытании „мала”, причем „мало” также произведение $\lambda = np$. Тогда $P_n(k)$ определяют по приближенной формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0,n},$$

называемой ***формулой Пуассона.*** Совокупность вероятностей $P(k;\ \lambda\ ) = P(k,\lambda) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!, \quad k = 0,1,\ldots$, называют ***распределением Пуассона.***

Значения функции $P(k;\ \lambda\ )$ для некоторых λ приведены в табл. П.1.

Формула Пуассона справедлива также для числа неудач, но только в том случае, когда „мало” $\lambda' = nq$**.**

Замечание 3.5. Слова „мало” и „велико” здесь и далее носят относительный характер. Рекомендации по выбору численных значений соответствующих величин будут приведены ниже.

Пример 3.13. Вероятность выпуска бракованного сверла равна 0,015. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Найдем вероятность того, что в коробке, выбранной наудачу, Не окажется ни одного бракованного сверла.

Очевидно, что мы имеем дело со схемой Бернулли, причем $n = 100$, $p = 0{,}015$ и $k = 0$. Поскольку число n испытаний „велико”, а вероятность успеха p в каждом испытании „мала”, воспользуемся приближенной формулой Пуассона, в которой

$$\lambda = np = 100 \bullet 0{,}015 = 1{,}5.$$

Тогда искомая вероятность

$$P \approx \frac{e^{-1,5} 1{,}5^0}{0!} = P(0;1{,}5).$$

По табл. П.1 находим

$$P(0;\ 1{,}5) = 0{,}22313.$$

Локальная формула Муавра — Лапласа. Если в схеме Бернулли число испытаний n „велико”, причем „велики” также вероятности p успеха и q неудачи, то для всех k справедлива приближенная формула

$$\sqrt{npq}P_n(k) \approx \varphi(x),$$

называемая ***локальной формулой Муавра — Лапласа,*** где

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Функцию *(р* называют ***плотностью стандартного нормального*** (или ***гауссова) распределения.***

Значения функции φ для некоторых x приведены в приложении (табл. П.2). Поскольку функция φ является четной, то при определении φ для отрицательных x нужно воспользоваться равенством

$$\varphi\ (x) = \varphi\ (-x).$$

Пример 3.14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Определим вероятность того, что при 400 выстрелах произойдет ровно 300 попаданий.

В данном случае „велики" и число $n = 400$ испытаний, и вероятности $p = 0{,}8$ успеха и $q = 1 — p = 0{,}2$ неудачи в одном испытании, поэтому воспользуемся локальной формулой Муавра — Лапласа при $к = 300$. Получим:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 8,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 320}{8} = -2{,}5$$

и

$$P \approx \frac{\varphi(-2{,}5)}{8}.$$

Отсюда, учитывая четность функции $\varphi\,(x)$, с помощью табл. П.2 окончательно получаем

$$P \approx \frac{0{,}01753}{8} \approx 0{,}0022.$$

Интегральная формула Муавра — Лапласа. Если число n испытаний по схеме Бернулли „велико”, причем „велики” также вероятности p успеха и q неудачи, то для вероятности $P\{k_1 \le k \le k_2\}$ того, что число успехов k заключено в пределах от k_1 до k_2, справедливо приближенное соотношение

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2),$$

называемое ***интегральной формулой Муавра — Лапласа,*** где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

Функцию *Ф(x)* называют ***функцией стандартного нормального*** (или ***гауссова) распределения.***

Определение 3.7. Функцию

$$\Phi(x) = \int_{0}^{x} \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-y^2/2} dy$$

называют ***интегралом Лапласа.***

В табл. П.3 приведены значения $\Phi_0(x)$

для положительных *x*. В силу четности *φ (x)* интеграл Лапласа $\Phi_0(x)$ является нечетной функцией, т.е. Φ_0 *(-x)* = -Φ_0 *(x),*

и, кроме того,

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}.$$

Используя интеграл Лапласа, интегральную формулу Муавра — Лапласа можно записать в виде

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

Пример 3.15. Найдем вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости выпадет от 90 до 120 „шестерок”.

Воспользуемся интегральной формулой Муавра — Лапласа, в которой нужно положить

$$x_1 = \frac{90 - 600 \cdot 1/6}{\sqrt{600 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx -1{,}10$$

и

$$x_2 = \frac{120 - 600 \cdot 1/6}{\sqrt{600 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx 2{,}19.$$

Тогда искомая вероятность приближенно равна: P $\approx$ Φ_0 (2,19)- Φ_0 (-1,10).

В соответствии с табл. П.3 имеем

$$P \approx 0{,}48574 + 0{,}36433 = 0{,}85007.$$

Дадим некоторые рекомендации (носящие, вообще говоря, условный характер) по применению приближенных формул.

Если число испытаний ***n*** = 10, 20, то приближенные формулы используют для грубых прикидочных расчетов. При этом формулу Пуассона применяют в том случае, когда А = ***np*** или ***У* = *nq*** изменяются в пределах от 0 до 2 (при ***n*** = 10) и от 0 до 3 (при ***n*** = 20); в противном случае необходимо пользоваться формулами Муавра — Лапласа.

При ***n*** = 20,100 приближенные формулы уже можно использовать для прикладных инженерных расчетов. Формулу Пуассона рекомендуется применять, когда А или А' заключены в пределах от 0 —3 ***(n* =** 20) до 0 — 7 ***(n*** = 100).

Если ***n*** = 100,1000, то практически при любых инженерных расчетах можно обойтись приближенными формулами. Формулу Пуассона используют в случае, когда λ или λ' изменяются в пределах от 0 — 7 ***(n* =** 100) до 0 —15 ***(n*** = 1000).

Наконец, при ***n*** > 1000 даже специальные таблицы рассчитывают с помощью приближенных формул (правда, для увеличения точности используют специальные поправки). В этом случае для применения формулы Пуассона необходимо, чтобы

λ или λ' лежали в пределах от 0 до а, где ***a*** = 15 при ***n*** = 1000 и увеличивается с ростом ***n.***

Во многих задачах рассматривают такие независимые одинаковые испытания, в каждом из которых может произойти не одно из двух несовместных событий (успех и неудача), как в схеме Бернулли, а одно из m таких событий.

Определение 3.8. Опыт, состоящий в n-кратном повторении одинаковых независимых испытаний, в каждом из Которых может произойти одно и только одно из m несовместных событий $A_1,...,A_m$, причем событие A_i наступает с вероятностью p_i, называют ***полиномиальной (мультиноминальной) схемой.***

Теорема 3.9. Вероятность $P(n_1,...,n_m)$ того, что в ***n*** испытаниях событие A_1 произойдет ровно n_1 раз, ..., событие A_m произойдет ровно n_m раз ($n_1 + ... + n_m = n$), определяется выражением

$$P(n_1,...,n_m) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m}$$

По аналогии со схемой Бернулли в полиномиальной схеме исход каждого опыта можно записать в виде набора чисел $k_1,...,k_n, k_i = \overline{1,m}$ число k_i на i-м месте означает, что в i -м испытании произошло событие A_{k_i}. Поскольку испытания являются независимыми, то исходу $k_1,...,k_n$ соответствует вероятность $p_{k_1},...,p_{k_n}$ которую можно записать в виде $p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m}$, где $n_k, k = \overline{1,m}$, — число испытаний, в которых произошло событие A_{k_i}.

Теперь, для того чтобы найти вероятность $P(n_1,...,n_m)$, необходимо подсчитать число способов, которыми n_1 символов A_1, n_2 символов A_2, ..., n_m символов A_m можно расставить на n местах (см. также 2.2). Поскольку порядок расстановки не существенен, то n_1 символов A_1 можно расставить на n местах $C_n^{n_1}$ способами. Затем n_2 символов A_2 можно расставить на оставшихся $n - n_1$ местах $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Продолжая эту процедуру и используя ***основную формулу комбинаторики***, получаем, что общее число способов равно:

$$C_n^{n_1} ... C_{n-n_1-...-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_m!}.$$

Отсюда приходим к утверждению теоремы.

Набор вероятностей $P(n_1,...,n_m)$ также называют ***полиномиальным распределением.***

Вероятность $P(n_1,...,n_m)$ можно получить как коэффициент при $x_1^{n_1} ... x_m^{n_m}$ в разложении полинома

$$(p_1 x_1 + ... + p_m x_m)^n$$

по степеням $x_1,..., x_m$.

Пример 3.16. В некотором государстве живут 60% блондинов, 25 % брюнетов и 15 % шатенов. Найдем вероятность того, что среди восьми наудачу отобранных подданных этого государства окажутся четыре блондина, три брюнета и один шатен.

В данном случае мы имеем дело с полиномиальной схемой, в которой $m = 3$, $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}25$, $p_3 = 0{,}15$, $n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ и $n_3 = 1$. Тогда

$$P = P(4,3,1) = \frac{8! \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}15^1}{4! \cdot 3! \cdot 1!} \approx 0{,}085.$$

Замечание 3.6. Иногда в практических приложениях рассматривают ***обобщенную схему Бернулли*** или ***обощенную полиномиальную (мультиноминальную) схему,*** для которой третье условие в определениях схемы Бернулли или полиномиальной схемы заменяют следующим: вероятность p успеха или вероятность p_k появления события A_k в i-м испытании могут меняться с изменением номера $i=\overline{1,n}$. Для обобщенных схем также можно указать соответствующие формулы для вероятностей сложных событий, рассматривавшихся выше.

Решение типовых примеров

Пример 3.17. Одновременно бросают две игральные кости (белую и черную). Рассмотрим следующие события: A — на белой кости выпало более двух очков; B — в сумме выпало четное число очков; C — в сумме выпало менее десяти очков.

Вычислим условные вероятности **P**(A|B), **P**(B|A), **P**(A|C), **P**(C|A), ***P****(B|C)* и ***P****(C|B)* и определим, какие из событий *A, B* и *C* являются независимыми.

Нетрудно подсчитать в соответствии с классическим определением вероятности, что

$$P(A)=\frac{2}{3},\quad P(B)=\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{5}{6},$$

$$P(AB)=\frac{1}{3},\quad P(AC)=\frac{1}{2},\quad P(BC)=\frac{7}{18}.$$

Поэтому

$$P(A\mid B)=\frac{2}{3},\quad P(B\mid A)=\frac{1}{2},\quad P(A\mid C)=\frac{3}{5},$$

$$P(C\mid A)=\frac{3}{4},\quad P(B\mid C)=\frac{7}{15},\quad P(C\mid B)=\frac{7}{9}.$$

Отсюда, в частности, следует, что независимыми являются события А и *B*. События *A* и С, *B* и С зависимые. Поэтому *события A, B* и *C* не являются независимыми в совокупности.

Пример 3.18. Каждая буква слова „МАТЕМАТИКА” написана на отдельной карточке. Карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекают четыре карточки. Найдем вероятность события *A* — получить слово „ТЕМА”?

Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 - события, состоящие в последовательном извлечении букв „Т”, „Е”, „М”, „А”. Тогда соответствующие вероятности равны:

$$P(A_1) = \frac{1}{5}, \qquad P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{9},$$

$$P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_4 \mid A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{7}.$$

Отсюда, согласно формуле умножения вероятностей, получаем

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)P(A_n \mid A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7}.$$

Пример 3.19. Обнаружение воздушной цели проводится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $P(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,7. вероятность $P(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,8. Определим вероятность **P**(C) того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

По условию события A и B являются независимыми, поэтому по формуле умножения вероятностей для независимых событий вероятность события AB (цель обнаружена обеими станциями) равна:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \bullet 0{,}8 = 0{,}56.$$

Значит, в силу теоремы сложения вероятностей

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}94.$$

Так как события A и B независимые, то P(C) можно найти путем перехода к противоположным событиям A и B. В *этом* случае, используя закон де Моргана и теорему 3.4, имеем

$$P(AB) = P\left(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\right) = 1 - P\left(\overline{AB}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = 0{,}94.$$

Пример 3.20. Система управления состоит из четырех узлов с номерами 1, 2, 3 и 4 (рис. 3.4). Вероятности P_i безотказной работы узлов равны $P_1 = 0{,}7$, $P_2 = 0{,}6$, $P_3 = 0{,}8$ и $P_4 = 0{,}9$ соответственно. Вычислим вероятность безотказной работы всей системы управления, считая отказы узлов независимыми событиями.

Вероятность P_{12} работы Участка 1 — 2 цепи, состоящего из двух соединенных последовательно элементов 1 и 2,

равна: $P_{12} = P_1 P_2 = 0{,}42$. Вероятность P_{34} работы участка 3 — 4 цепи, состоящего из двух соединенных последовательно элементов 3 и 4, равна:

$$P_{34} = 1 - (1 - P_3)(1 - P_4) = 0{,}98.$$

Поскольку вся система состоит из параллельно соединенных участков 1 — 2 и 3 — 4, то вероятность ее безотказной работы равна:

$$P = 1 - (1 - P_{12})(1 - P_{34}) = 1 - (1 - 0{,}42)(1 - 0{,}98) \approx 0{,}99.$$

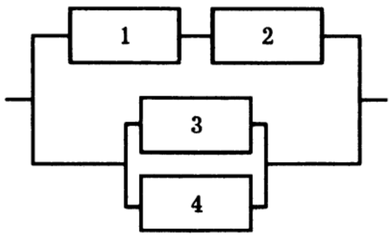


Рис. 3.4

Пример 3.21. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект, если он есть, и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан негодным. Найдем вероятность того, что проверяемый транзистор будет признан негодным?

Пусть A — событие, состоящее в том, что проверяемый транзистор признан негодным. С этим событием связаны две гипотезы: H_1 — проверяемый транзистор дефектный и H_2 — проверяемый транзистор исправный. По условию

$$P(H_1) = 0{,}1, \qquad P(H_2) = 0{,}1,$$

$$P(A \mid H_1) = 0{,}95, \quad P(A \mid H_1) = 0{,}03.$$

Тогда в силу формулы полной вероятности

$$P(A) = 0{,}1 \bullet 0{,}95 + 0{,}9 \bullet 0{,}03 = 0{,}122.$$

Пример 3.22. В поступивших на склад трех партиях деталей годные составляют 89%, 92% и 97% соответственно, а количества деталей в партиях относятся как 1:2:3. Ответим на два вопроса.

1. Чему равна вероятность того, что случайно выбранная со склада деталь окажется негодной?

2. Пусть известно, что случайно выбранная деталь оказалась негодной. Найдем вероятности того, что она принадлежит первой, второй и третьей партиям.

Обозначим H_1, H_2 и H_3 события, состоящие в том, что деталь принадлежит первой, второй и третьей партиям соответственно. Поскольку эти события попарно несовместные и образуют полную группу событий, то они являются гипотезами, причем, как нетрудно подсчитать,

$$P(H_1)=1/6, \quad P(H_2)=2/6, \qquad P(H_3)=3/6.$$

Событие A — выбранная деталь является негодной. Условные вероятности события A равны:

$$P(A|H_1) = 0{,}11, \; P(A|H_1) = 0{,}08, \; P(A|H_1) = 0{,}03.$$

Согласно формуле полной вероятности, найдем

$$P(A) = \frac{1}{6}*0{,}11+\frac{2}{6}*0{,}08+\frac{3}{6}*0{,}03=0{,}06$$

Вероятности того, что негодная деталь принадлежит первой, второй и третьей партиям, определяй, используя *формулу Байеса:*

$$P(H_1|A) = \frac{1}{6} * 0{,}11/0{,}06 \approx 0{,}31, \; P(H_2|A) = \frac{2}{6} * 0{,}08/0{,}06 \approx 0{,}44,$$

$$P(H_3|A) = \frac{3}{6} * 0{,}03/0{,}06 \approx 0{,}25$$

Пример 3.23. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передают одну из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд равны 0,7 и 0,3 соответственно. За счет помех вероятности правильного приема каждого из символов 1 и 0 уменьшаются до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо один от другого. На выходе зарегистрирована комбинация 10110. Определим, какая из команд наиболее вероятно была передана.

Пусть A — событие, состоящее в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 — была передана комбинация 11111; H_2 — была передана комбинация 00000. По условию задачи $P(H_1)= 0{,}7$ и $P(H_2) = 0{,}3$.

Определим условные вероятности $P(A|H_1)$и $P(A|H_2)$. В силу независимости искажения символов имеем:

$$P(A|H_1) = 0{,}6 * 0{,}4 * 0{,}6 * 0{,}6 * 0{,}4 \approx 0{,}035;$$

$$P(A|H_2) = 0{,}4 * 0{,}6 * 0{,}4 * 0{,}4 * 0{,}6 \approx 0{,}023.$$

Воспользовавшись теперь формулой Байеса, получим:

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}7 * 0{,}035}{0{,}7 * 0{,}035 + 0{,}3 * 0{,}023} \approx 0{,}78;$$

$$P(H_2|A) = \frac{0{,}3 * 0{,}035}{0{,}7 * 0{,}035 + 0{,}3 * 0{,}023} \approx 0{,}22.$$

Сравнивая найденные вероятности, заключаем, что при появлении комбинации 10110 с большей вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

Пример 3.24. По цели производят шесть независимых выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле p =0,75. Вычислим:

а) вероятность ровно пяти попаданий (событие А);

б) вероятность не менее пяти попаданий (событие В);

Очевидно, мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой n=6,p=0,75 и q=0,25.

Воспользовавшись формулой Бернулли, будем иметь:

а) $P(A) = P_6(5) = C_6^5 * 0{,}75^5 * 0{,}25^1 \approx 0{,}356$;

б)

$P(B)=P(k \geq 5)= C_6^5 * 0{,}75^5 * 0{,}25^1 + C_6^6 * 0{,}75^6 * 0{,}25^0 \approx 0{,}534.$

Пример 3.25. В коробке лежит 200 конденсаторов, причем два из них нужной емкости. Случайным образом из коробки вынимают один конденсатор и после определения его емкости возвращают обратно в коробку. Выясним, сколько раз нужно осуществить указанную операцию, чтобы вероятность хотя бы один встретить конденсатор нужной емкости была не меньше 0,95.

Поскольку выбор производят с возвращением, то имеем дело со схемой Бернулли, в которой

P = 2/200 и q = 1-p = 0,99.

Пусть А — интересующее нас событие. Тогда $\overline{A}$ — событие, состоящее в том, что при n испытаниях ни разу не появился конденсатор нужной емкости. Из условия задачи следует:

$P(\overline{A}) = 0{,}99^n \leq 1-0{,}95 = 0{,}05.$

Поэтому

$$n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}99} \approx 296.$$

Итак, указанную операцию необходимо осуществить, по крайней мере, 296 раз.

Пример 3.26. Вероятность искажения одного символа при передаче сообщения по линий связи равна 0,001. Сообщение считают принятым, если в нем отсутствуют искажения. Найдем вероятность того, что будет принято сообщение, состоящее из 20 слов по 100 символов каждое.

Передаваемое сообщение содержит 2000 символов. Пред.-полагая, что символы искажаются независимо, имеем дело со схемой Бернулли, в которой $n = 2000$, $p = 0{,}001$, $\kappa = 0$. Поскольку n „велико”, причем $\lambda = np = 2$ „мало” , то для вычисления интересующей нас вероятности применим приближенную формулу Пуассона. Тогда, используя табл. П.1, получаем

$P \approx P(0{,}2)=0{,}13534.$

Пример 3.27. На факультете обучаются 300 студентов. Предполагая, что вероятность родиться в каждый день года одинакова, найдем вероятность того, что ровно 80 студентов факультета будут праздновать дни рождения летом.

Вероятность того, что ровно κ студентов будут отмечать летом день рождения, определяется по формуле Бернулли, в которой $n = 300$, $p = 1/4$ и $q = 3/4$. Так как n,p и q „велики” и

$$\lambda = np = 75 \quad \text{и} \quad \lambda' = nq = 225,$$

то для вычисления искомой вероятности необходимо применить одну из формул Муавра — Лапласа. Поскольку в задаче нужно найти вероятность наступления ровно κ успехов, то применим локальную формулу Муавра — Лапласа, в которой

$$\sqrt{npq} = 75, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 75}{7{,}5} \approx 0{,}67.$$

Воспользовавшись табл. П. 2, имеем

$$P \approx \frac{\varphi(0{,}67)}{7{,}5} = \frac{0{,}31874}{7{,}5} \approx 0{,}0425.$$

Пример 3.28. Определим вероятность того, что при 900 бросаниях игральной кости „шестерка” выпадет от 130 до 300 раз.

Поскольку в данном примере „велики ” n = 800,

$$\lambda = np = 150 \text{ и } \lambda' = nq = 750,$$

то, согласно *интегральной формуле Муавра — Лапласа,* имем:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130-150}{\sqrt{800*1/6*5/6}} \approx -1{,}90.$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300-150}{\sqrt{800*1/6*5/6}} \approx 14{,}23.$$

Так как в табл. П.З значение $\Phi_0(14{,}23)$ отсутствует, заменим его на 0,5. Тогда

$P \approx \Phi_0(14{,}23) - \Phi_0(-1{,}90) = 0{,}5 + 0{,}47128 = 0{,}97128.$

Пример 3.29. Игральную кость бросают 10 раз. Требуется найти вероятность того, что „шестерка” выпадет два раза, а „пятерка” — 3 раза.

В данном опыте имеем дело с 10 независимыми испытаниями, причем в каждом испытании с вероятностью 1/6 происходит событие *A* — выпадает „шестерка”, с той же вероятностью 1/6 происходит событие A_2 — выпадает „пятерка” и, наконец, с вероятностью 4/6 происходит событие Аз — выпадает любое другое число очков. Поэтому искомую вероятность определяют, используя теорему 3.9, т.е.

$$P = P(2,3,5) = \frac{10!(1/6)^2(1/6)^3(1/6)^5}{2!3!5!} \approx 0{,}043.$$

4. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В предыдущих главах мы изучали случайные события*,* что позволяло нам исследовать вероятностные свойства (закономерности) случайных экспериментов на качественном уровне („да" — „нет"): попадание в цель — промах, отказал прибор за время t — не отказал и т.д. Однако с момента возникновения теории вероятностей ее основной задачей было изучение не вероятностных свойств экспериментов со случайными исходами, а связанных с этими экспериментами числовых величин, которые естественно назвать случайными величинами. Начиная, с настоящей главы и до конца книги мы будем изучать именно случайные величины.

4.1. Определение случайной величины

Для того чтобы лучше осознать связь, существующую между случайными величинами и случайными событиями, начнем с пояснения понятия случайной величины.

Случайной величиной естественно называть числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход произошел в результате эксперимента со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют ***множеством возможных значений*** этой ***случайной величины.***

Следовательно, для задания случайной величины необходимо каждому элементарному исходу поставить в соответствие число — значение, которое примет случайная величина, если в результате испытания произойдет именно этот исход.

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами, снабжая их при необходимости индексами: X, Y, Z и т.д., а их возможные значения — соответствующими строчными буквами: x, y, z. В русскоязычной литературе принято также обозначение случайных величин греческими буквами: ξ, η_1, μ_i и т.д.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.1. В опыте с однократным бросанием игральной кости случайной величиной является число X выпавших очков. Множество возможных значений случайной величины X имеет вид

$$\{x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6\}.$$

Если вспомнить, как выглядит пространство элементарных исходов в этом опыте, то будет очевидно следующее соответствие между элементарными исходами ω и значениями случайной величины X:

$$\begin{array}{ccccc} \omega = & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_6 \\ & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ X = & 1 & 2 & \dots & 6. \end{array}$$

Иными словами, каждому элементарному исходу $\omega_i, i = \overline{1,6}$,

ставится в соответствие число i.

Пример 4.2. Монету подбрасывают до первого появления „герба". В этом опыте можно ввести, например, такие случайные величины: X — число бросаний до первого появления „герба" с множеством возможных значений {1, 2, 3, ...} и Y — число „цифр", выпавших до первого появления „герба", с множеством возможных значений {0, 1, 2, ...} (ясно, что X =Y + 1). В данном опыте пространство элементарных исходов **й** можно отождествить с множеством

{Г, ЦГ, ЦЦГ,…Ц...ЦГ, ...},

причем элементарному исходу Ц...ЦГ ставится в соответствие число $m + 1$ или m, где m — число повторений буквы „Ц".

Пример 4.3. На плоский экран падает частица. Будем считать, что нам известна вероятность попадания частицы в любое (измеримое, т.е. имеющее площадь) множество на экране. Случайными величинами в данном случае будут, например, расстояние X от центра экрана до точки падения, квадрат этого расстояния $Y = X^2$, угол Z в полярной системе координат и т.д.

Теперь мы можем дать определение случайной величины.

Определение 4.1. Скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, называют ***случайной величиной,*** если для любого $x \in$ R $\{\omega: X(\omega) < x\}$ — множество элементарных исходов, для которых $X(\omega) < x$ является событием.

Для краткости условимся в дальнейшем вместо записи $\{\omega: X(\omega) < x\}$ использовать запись $\{X(\omega) < x\}$, если необходимо подчеркнуть связь случайной величины с пространством элементарных исходов Ω, или даже запись $\{X < x\}$, если не акцентируется внимание на этой связи.

4.2. Функция распределения случайной величины

Для исследования вероятностных свойств случайной величины необходимо знать правило, позволяющее находить вероятность того, что случайная величина примет значение из подмножества ее значений. Любое такое правило называют ***законом распределения вероятностей,*** или ***распределением (вероятностей)*** случайной величины. При этом слово „вероятностей" обычно опускают.

Общим законом распределения, присущим всем случайным величинам, является функция распределения.

Определение 4.2. ***Функцией распределения (вероятностей)*** случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$, т.е.события, состоящего из тех и только тех *элементарных исходов* ω, для которых $X(\omega) < x$:

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X < x\}.$$

Обычно говорят, что значение функции распределения в точке x равно вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Теорема 4.1. Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 \le x_2$ ($F(x)$ – неубывающая функция).

3. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

4. $P\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

5. F(x)=F(x-0), где F(x-0)= $\lim\limits_{y\to x-0}F(y)$ (F(x) – непрерывная слева функция).

При доказательстве будем использовать свойства вероятностей событий, доказанные в теореме 2.8.

Поскольку значение функции распределения в любой точке x является вероятностью, то из свойства 4 вероятности вытекает Утверждение 1.

Если $x_1 < x_2$, то событие $\{X<x_1$) включено в событие $\{X <x_2\}$ и, согласно свойству 3, $\mathbf{P}\{X < x_1\} < \mathbf{P}\{X < x_2\}$, т.е. в соответствии с определением 4.2 выполнено утверждение 2.

Пусть $x_1, ..., x_n, ...$ — любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся *к* $+\infty$. Событие $\{X < +\infty\}$, с одной стороны, является достоверным, ас другой стороны, представит собой объединение событий $\{X < x_n\}$. Отсюда в силу аксиомы непрерывности следует второе равенство в утверждении 3. Аналогично доказывают и первое равенство.

Событие $\{X < x_2\}$ при $x_1 < x_2$ представляет собой объединение двух непересекающихся событий: $\{X < x_1\}$ случайная величина X приняла значение, меньшее x_1, и $\{x_1 \le X < x_2\}$ случайная величина X приняла значение, лежащее в промежутке $[x_1,x_2]$ Поэтому в соответствии с аксиомой сложения получаем утверждение 4.

Наконец, пусть $x_1,...,x_n,...$ - любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к x. Событие $\{X <x\}$является объединением событий $\{X < x_n\}$. Снова воспользовавшись аксиомой непрерывности, приходим к утверждению 5.

На рис. 4.1 приведен типичный вид функции распределения.

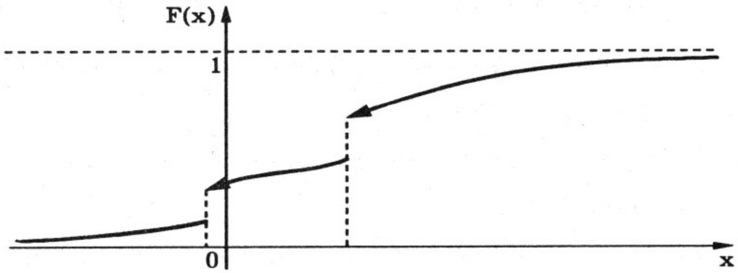


Рис. 4.1

Замечание 4.1. Можно показать, что любая *неубывающая* непрерывная слева функция F(x), удовлетворяющая условиям

$$F(-\infty) = 0 \quad \text{и} \quad F(+\infty) = 1,$$

является функцией распределения некоторой случайной величины *X*.

Для того чтобы подчеркнуть, какой именно случайной величине принадлежит функция распределения F(x), далее иногда будем приписывать этой функции нижний индекс, обозначающий конкретную случайную величину. Например, для случайной величины *X*

$$F_x(x) = P\{X<x\}.$$

В некоторых учебниках функцией распределения называют функцию, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \le x\}$. Такое определение ничего не меняет во всех наших рассуждениях. Единственное изменение касается свойства 5: функция $F(x)$ будет непрерывна справа.

Чтобы избежать сложных математических конструкций, обычно при первоначальном изучении теории вероятностей ограничиваются только дискретными и непрерывными случайными величинами. Не давая пока строгие определения, приведем примеры:

- дискретных случайных величин (число очков, выпавших при бросании игральной кости; число бросаний монеты до первого появления „герба"; оценка студента на экзамене и т. д.);

- непрерывных случайных величин (погрешность измерений; время до отказа прибора; время опоздания студента на лекцию и т. п).

4.3. Дискретные случайные величины

Определение 4.3. ***Случайную величину*** *X* называют ***дискретной,*** если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Распределение дискретной случайной величины удобно исследовать с помощью ряда распределения.

Таблица 4.1

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$\mathbf{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Определение 4.4. ***Рядом распределения (вероятностей) дискретной случайной величины*** *X* называют таблицу (табл. 4.1), состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $pi = \boldsymbol{P}\{X = x_i\}$ того, что случайная величина примет эти значения. Чтобы подчеркнуть, ряд распределения относится именно к случайной величине *X,* будем наряду с обозначением p_i употреблять также обозначение px_i-Для проверки правильности составления табл. 4.1 рекомендуется просуммировать вероятности p_i. В силу аксиомы нормированности эта сумма должна быть равна единице:

Покажем теперь, как по ряду распределения дискретной случайной величины построить ее функцию распределения

$F(x)$. Пусть X — дискретная случайная величина, заданная своим рядом распределения, причем значения $X_1, X_2, \ldots X_n$ расположены в порядке возрастания. Тогда для всех $x \le x_1$ событие $\{X < x\}$ является невозможным и поэтому в соответствии с определением 4.2 $F(x) = 0$ (рис. 4.2). Если $x_1 < x \le x_2,$

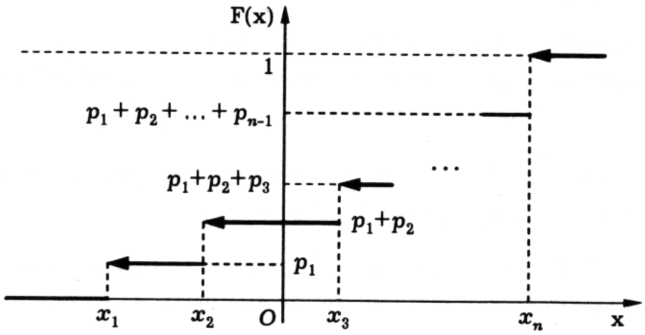


Рис. 4.2

событие $\{X < x\}$ состоит из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $X(\omega) = \boldsymbol{x_1}$ и, следовательно, $F(x)=p_1$..

Аналогично при $x_2 < x \le x_3$ событие $\{X < x\}$ состоит из элементарных исходов ω, для которых либо $X(\omega) = x_1$, либо $X(\omega)=x_2$, т.е. $\{X < x\} = \{X = x_1\} + \{X = x_2\}$, а следовательно, $F(x) = p_1+p_2$ и т.д. Наконец, при $x > x_n$ событие $\{X < x\}$ достоверно и $F(x) = 1$.

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией, принимающей на промежутке $(-\infty, x_1]$ значение 0, на промежутках$[_i, x_i + 1]$, $1 \le i < n$, — значение $p_1 + \ldots + p_i$ и на промежутке $(x_n, +\infty)$ — значение 1.

Для задания закона распределения дискретной случайной величины, наряду с рядом распределения и функцией распределения используют другие способы. Так, его можно задать аналитически в виде некоторой формулы или графически.

Например, распределение игральной кости (см. пример 4.1) описывают формулой $\mathrm{P}\{X=i\}=1/6, \qquad i=\overline{1,6}$.

Графическое изображение этого распределения приведено на рис. 4.3.

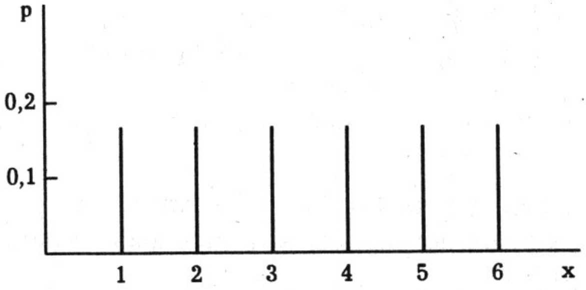


Рис. 4.3

4.4. Некоторые дискретные случайные величины

В этом параграфе рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся на практике ***распределения дискретных случайных величин.***

Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина X распределена по ***биномиальному закону,*** если она принимает значения 0,1, 2,..., n в соответствии с распределением, заданным формулой $\mathrm{P}\{X = i\}=P_n\ (i)=C_n^i p^i q^{n-1}$, i=$\overline{0,n}$ или, что тоже самое, рядом распределения, представленным в табл. 4.2, где $0<p,\ q<1$ и $p + q = 1$.

Таблица 4. 2

X	0	1	…	i	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^i p^i q^{n-i}$	…	p^n

Проверим корректность определения биномиального распределения. Действительно, $P_n(i)>0$

$$\sum_{i=0}^{n} P_n(i) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1.$$

Биномиальное распределение является не чем иным, как распределением числа успехов X в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $q= 1- p$**.**

Распределение Пуассона. Дискретная случайная величина X распределена по ***закону Пуассона,*** если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=i\} = P(i;\lambda) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

или, по-другому,с вероятностями, представленными рядом распределения в табл.4.3, где $\lambda >0$-параметр распределения Пуассона

Таблица 4.3

X	0	1	2	...	n	...
$\mathbf{P}$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	...

Проверка корректности определения распределения Пуассона дает:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

С распределением Пуассона мы тоже уже встречались в формуле Пуассона (см. 3.6). Распределение Пуассона также называют ***законом редких событий,*** поскольку оно всегда Появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит „редкое" *событие.* В соответствии с законом Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших в течение суток на телефонную станцию; число метеоритов, упавших в определенном районе; число распавшихся частиц при радиоактивном распад вещества.

Геометрическое распределение. Снова рассмотрим схему Бернулли. Пусть X — число испытаний, которое необходимо провести, прежде чем появится первый успех. Тогда X — дискретная случайная величина, принимающая значения 0,1, 2,...,n,... Определим вероятность события $\{X = n\}$. Очевидно, что X = О, если в первом же испытании произойдет успех. Поэтому $\boldsymbol{P}\{X = 0\}=p$.

Далее, $X = 1$ в том случае, когда в первом испытании произошла неудача, а во втором — успех. Но вероятность такого события (см. теорему 3.8), равна qp, т.е. $\boldsymbol{P}\{X = 1\} = qp$. Аналогично $X = 2$, если в первых двух испытаниях произошли неудачи, а в третьем — успех, и, значит, $\boldsymbol{P}\{X = 2\} = qqp$. Продолжая эту процедуру, получаем $\boldsymbol{P}\{X = i\} = pq^i \quad i = 0,1,...$

Таким образом, случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 4.4.

Таблица 4.4

X	0	1	2	...	n	...
P	p	qp	q^2p	...	q^np	...

Случайную величину с таким рядом распределения называют распределенной согласно ***геометрическому закону.*** Правильность составления табл. 4.4 вытекает из равенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X=i\}=\sum_{i=0}^{\infty}pq^i=p\sum_{i=0}^{\infty}q^i=\frac{p}{1-q}=1.$$

4.5. Непрерывные случайные величины

Определение 4.5. ***Непрерывной*** называют ***случайную величину*** *X, функцию распределения* которой $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)dy \qquad (4.1)$$

функцию *p(x)* называют ***плотностью распределения (вероятностей)*** случайной величины *X*.

Предполагают, что несобственный интеграл в представлении (4.1) сходится. Как и прежде, для того чтобы подчеркнуть принадлежность плотности распределения случайной величине X, будем наряду с записью *p(x)* употреблять запись $p_x(x)$.

Все реально встречающиеся плотности распределения случайных величин являются непрерывными (за исключением, быть может, конечного числа точек) функциями. Следовательно, функция распределения для непрерывной случайной величины является непрерывной на всей числовой оси и в точках непрерывности плотности распределения *p(x)* имеет место равенство

$$p(x) = F'(x), \tag{4.2}$$

что следует из свойств интеграла с переменным верхним пределом . Только такие случайные величины мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Замечание 4.2. Соотношения (4.1) и (4.2), связывающие между собой функцию и плотность распределения, делают понятной следующую терминологию, часто употребляемую На практике. Функцию распределения *F(x)* называют ***интегральным законом распределения*** случайной величины, а плотность распределения ***p(x) — дифференциальным законом распределения*** той же случайной величины. На рис. 4.4 изображен типичный вид плотности распределения P(x)

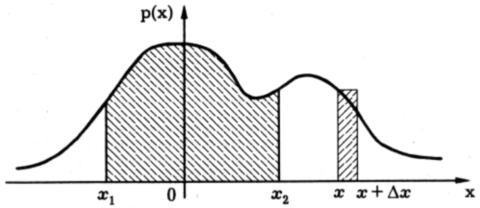


Рис.4.4

Теорема 4.2. Плотность распределения имеет свойства:

1. $p(x) \geqslant 0$.
2. $\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.
4. $\mathbf{P}\{x \leqslant X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$.
5. $\mathbf{P}\{X = x\} = 0$.

Утверждение 1 следует из того, что плотность распределения является производной от функции распределения, в силу свойства 1 функции распределения она является ***неубывающей функцией,*** а производная неубывающей функции неотрицательна. Согласно свойству 2 функции распределения,

$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

Отсюда в соответствии с определением непрерывной случайной величины и свойством аддитивности сходящегося несобственного интеграла имеем

что и доказывает утверждение 2.

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{x_2} p(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{x_1} p(x)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx,$$

В частности, если $\boldsymbol{x_1} \to -\infty$, $\boldsymbol{x_2} \to \infty$, то ***событие*** $\{-\infty < \boldsymbol{X} < \infty\}$ является ***достоверным,*** и поэтому справедливо утверждение 3.

Согласно свойству 4 (см. теорему 4.1),

$$P\{x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Если $\Delta \boldsymbol{x}$ мало (см. рис. 4.4), то $\Delta F(x) \approx dF(x) = F(x) = p(x)\Delta x$, что и доказывает утверждение 4.

Наконец, поскольку в силу определения 4.5 функция распределения случайной величины есть несобственный интеграл от плотности, то она является непрерывной, что приводит нас к утверждению 5.

Замечание 4.3. В силу свойства 2 плотности распределения вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[x_1, x_2]$ численно равна площади криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 4.4.

Согласно свойству 3 площадь, заключенная под всей кривой, изображающей плотность распределения, равна единице.

В соответствии со свойством 4 вероятность попадания случайной величины X в некоторый „малый" промежуток

$(x, x + \Delta x)$ практически пропорциональна Δx с коэффициентом пропорциональности, равным значению плотности распределения в точке x. Поэтому выражение $p(x)\Delta x$ или $p(x)dx$ называют иногда ***элементом вероятности.*** Можно также сказать, что непрерывная случайная величина реализует геометрическую схему с коэффициентом пропорциональности но только в „малой" окрестности точки x.

Наконец, согласно свойству 5, вероятность попадания в любую (заданную до опыта) точку для непрерывной случайной величины равна нулю.

В заключение отметим, что на практике иногда встречаются случайные величины, которые нельзя отнести ни к дискретным, ни к непрерывным случайным величинам, как показывает следующий пример.

Пример 4.4. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором t_1 = 1 мин горит зеленый свет, t_2 = 0,5 мин — красный, опять 1 мин — зеленый, 0,5 мин — красный и т.д. В случайный момент времени, не связанный с работой светофора, к перекрестку подъезжает автомобиль.

Пусть X — время ожидания у перекрестка. Покажем, что X не является ни дискретной, ни непрерывной случайной величиной.

Обозначим $t = t_1 + t_2 = 1{,}5$ мин цикл работы светофора. Естественно считать, что автомобиль подъезжает к перекрестку в случайный момент времени по отношению к циклу работы светофора. Тогда, с одной стороны, с вероятностью $t_1/t_2 = 2/3$ автомобиль проедет перекресток не останавливаясь, т.е. X принимает значение 0 с вероятностью $2/3 > 0$. Поэтому X не может быть непрерывной случайной величиной. С другой стороны, на второй 0,5-минутной части цикла работы светофора время ожидания X может принять любое значение от 0 до 0,5. Значит, X не может быть также дискретной случайной величиной.

Для того чтобы лучше понять существо дела, построим функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. Поскольку время ожидания не может принять отрицательное значение, то $F(x) = 0$ для всех $x < 0$. Далее если $0 < x < 0{,}5$, то событие $\{X < x\}$ происходит в том случае, когда автомобиль либо попадет на первую часть цикла работы светофора (зеленый свет), либо подъедет к светофору при красном свете, но до включения зеленого света останется время, меньшее x. В соответствии с определением геометрической вероятности

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \frac{\tau_1 + x}{\tau} = \frac{x+1}{1{,}5}.$$

Наконец, поскольку автомобиль в любом случае проведет у перекрестка не более 0,5 мин, то $F(x) = 1$, $x > 0{,}5$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{x+1}{1{,}5}, & 0 < x \leqslant 0{,}5; \\ 1, & x > 0{,}5. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ приведен на рис. 4.5.

Отметим, что в рассмотренном примере случайная величина X представляла собой „смесь" дискретной и непрерывной случайных величин, причем $\boldsymbol{P}\{X = 0\} = F(+0) - F(0)$ — скачку Функции распределения в точке $x = 0$. Можно привести и более сложные примеры, в которых случайные величины уже не являются „смесью" дискретной и непрерывной составляющих, однако эти примеры нужно отнести к разряду математических абстракций.

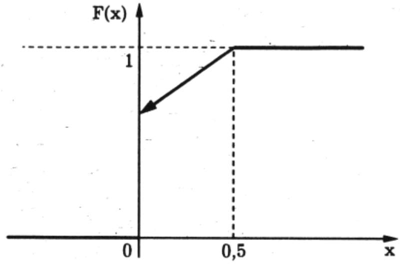


Рис.4.5

4.6. Некоторые непрерывные случайные величины

Приведем примеры некоторых наиболее важных распределений непрерывных случайных величин. То, что приводимые функции F(x) являются функциями распределения, следует из замечания 4.1 и проверяться не будет.

Равномерное распределение. Случайная величина имеет ***равномерное распределение*** на отрезке [a, b], если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция распределения в этом случае определяется выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики плотности распределения *p(x)* и функции распределения *F(x)* приведены на рис. 4.6 и 4.7.

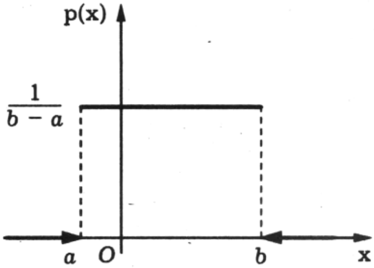


Рис. 4.6

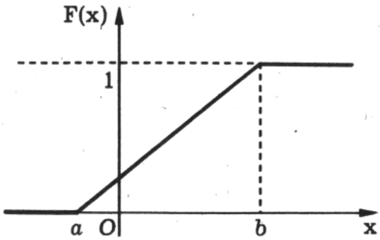


Рис. 4.7

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал ж2)> лежащий внутри отрезка [a,b], равна $F(x_2)$ - $F(x_1)$ = (b– a), т.е. пропорциональна длине этого интервала. Таким образом, равномерное распределение реализует схему геометрической вероятности при бросании точки на отрезок [a, b].

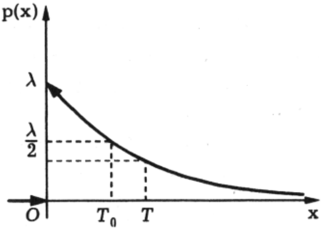
Экспоненциальное распределение. Случайная величина распределена по ***экспоненциальному (показательному) закону,*** если она имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — параметр экспоненциального распределения. Для Функции распределения в данном случае нетрудно получить бедующее выражение:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Графики плотности распределения и функции распределения экспоненциально распределенной случайной величины приведены на рис. 4.8 и 4.9.



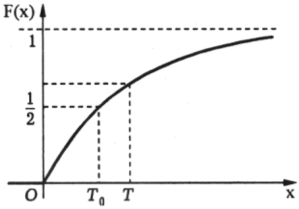


Рис. 4.8 Рис.4.9

Экспоненциально распределенная случайная величина может принимать только положительные значения.

Примером случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение, является время распада радиоактивных элементов. При этом число $T = 1/\lambda$ называют средним временем распада. Кроме того, употребляют также число $T_0 = \ln 2/\lambda$,называемое периодом полураспада.

Название „период полураспада" основано на следующем физическом соображении. Пусть у нас первоначально имелось ***n*** атомов вещества. Тогда спустя время T_0 каждый атом распадется с вероятностью

$$p = F(T_0) = 1 - e^{-\lambda \ln 2/\lambda} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому в силу независимости отдельных распадов число распавшихся за время T_0 атомов имеет биномиальное распределение с $p = q = 1/2$. Но, как мы увидим далее, согласно ***закону больших чисел***, при больших n это число будет примеру но равно $n/2$, т.е. период полураспада T_0 представляет собой Бремя, в течение которого распадается половина имеющегося вещества. Экспоненциально распределенная случайная величина X обладает весьма важным свойством, которое естественно назвать ***отсутствием последействия.*** Трактуя X как время распада атома, рассмотрим событие $A = \{x_г < X < x_1 + x_2\}$, найдем *условную вероятность* этого события при условии выполнения события $B = \{X > x_2\}$. В соответствии с определением условной вероятности $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Но событие AB, как нетрудно понять, совпадает с событием A. Поэтому $P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$. Далее, используя свойство 4 функции распределения (см. теорему 4.1), имеем:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{x_1 < X < x_1 + x_2\} =$$

$$= (1 - e^{-\lambda(x_1+x_2)}) - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1}(1 - e^{-\lambda x_2}).$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\{X > x_1\} = 1 - \mathbf{P}\{X < x_1\} = e^{-\lambda x_1}.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{e^{-\lambda x_1}(1 - e^{-\lambda x_2})}{e^{-\lambda x_1}} = 1 - e^{-\lambda x_2}.$$

Таким образом, вероятность распада атома за время x_2 при Уровни, что перед этим он уже прожил время x_1 совпадает с безусловной вероятностью распада того же самого атома за время x_2**.** Именно это свойство и представляет собой отсутствие последействия. Допуская некоторую вольность речи, отсутствие последействия можно трактовать как независимость остаточного времени жизни атома от того времени, которое он уже прожил. Можно показать и обратное: если случайная величина X обладает свойством отсутствия последействия, то она обязательно должна быть распределена по экспоненциальному закону. Таким образом, отсутствие последействия является характеристическим свойством экспоненциально распределенных случайных величин.

Практика показывает, что экспоненциальное распределение имеют и другие физические величины, например: времена между падениями метеоритов в определенный район, времена между соседними поступлениями вызовов на телефонную станцию и т.д. Экспоненциальное распределение тесно связано с распределением ***Пуассона,*** а именно: если времена между последовательными наступлениями некоторого события представляют собой независимые экспоненциально распределенные (с одним и тем же параметром А) случайные величины, то число наступлений этого события за время *t* распределено по закону Пуассона с параметром *Xt.* Отметим также, что дискретным аналогом экспоненциального распределения является геометрическое распределение.

Нормальное распределение. Случайная величина ***распределена по нормальному*** (или ***гауссову) закону,*** или имеет ***нормальное (гауссово) распределение,*** если ее плотность

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < m < +\infty,\ \sigma > 0).$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров: *m*, называемого ***математическим ожиданием*** или ***средним значением,*** и ***σ,*** называемого ***средним квадратичным отклонением.***

Графики плотности $\varphi_{m,\sigma}(x)$ и функции

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

нормального распределения для различных значении *m* и ***σ*** приведены на рис. 4.10 и рис. 4.11.

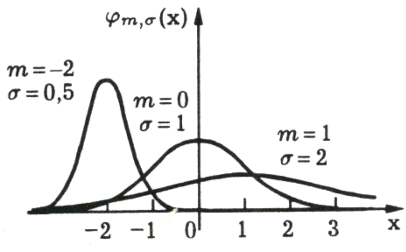


Рис. 4.10

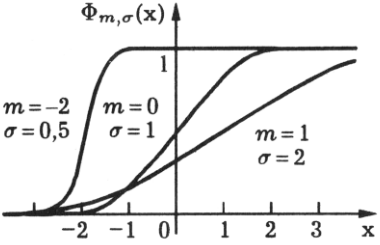


Рис. 4.11

Как следует из этих рисунков, параметр га определяет положение „центра симметрии" плотности нормального распределения, т.е. график плотности нормального распределения симметричен относительно прямой $x = m$, а σ — разброс значений случайной величины относительно центра симметрии. Если $m= 0$ и $\sigma = 1$, то такой ***нормальный закон*** называют ***стандартным*** и его функцию распределения обозначают $\Phi(x)$,а плотность распределения — $\varphi(x)$. С плотностью и Функцией стандартного нормального распределения мы уже встречались в локальной и интегральной формулах Муавра — Лапласа (см. 3.6). Как известно из курса математического анализа, интеграл $\int e^{-x^2/2}dx$ не может быть выражен через элементарные функции. Поэтому во всех справочниках и в большинстве учебников по теории вероятностей приведены таблицы значений функции стандартного нормального распределения, помним, что в табл.3 даны значения ***интеграла Лапласа*** $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(y)dy$. Покажем, как, используя эту таблицу, найти вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону с произвольными параметрами m и σ в интервал (a, b).

В соответствии со свойством 2 плотности распределения (см. теорему 4.2) вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ, в интервал (а, 6) задается формулой

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \int_a^b \varphi_{m,\sigma}(y)\,dy = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m)^2/(2\sigma^2)}\,dy.$$

Проводя замену $\boldsymbol{x} = (y - m)/\sigma$, интеграл будкт:

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{4.3}$$

Распределение Вейбулла. Случайная величина распределена по ***закону Вейбулла,*** если она имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x \geqslant 0 \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция распределения в этом случае определяется следующим выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\alpha x^\beta}, & x \geqslant 0 \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \end{cases}$$

Семейство распределений Вейбулла является двухпараметрическим (α, β — параметры) и описывает положительные случайные величины. Графики плотности $p(x)$ и функции $F(x)$ распределения Вейбулла представлены на рис. 4.12 и 4.13.

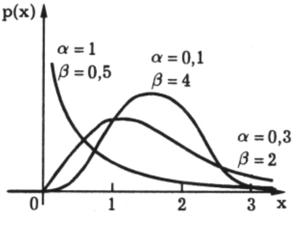


Рис.4.12

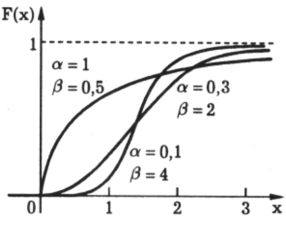


Рис.4.13

Считают, что распределению Вейбулла подчиняются времена безотказной работы многих технических устройств. Если β=1, то распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение, а если β = 2 — в так называемое ***рапределение Релея (закон Релея).***

Гамма-распределение. Другим распределением, также достаточно хорошо описывающим времена безотказной работы различных технических устройств, является ***гамма-распределение*** с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \qquad (\lambda > 0,\ \gamma > 0), \end{cases}$$

Где

$$\Gamma(\gamma) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\gamma-1} e^{-x}\, dx$$

есть гамма-функция Эйлера . При изучении гамма-распределения весьма полезными являются следующие свойства гамма-функции: Γ(γ +1) = γΓ(γ) и Γ(n) = (*n* -1)! для целых *n* .Графики плотности *p(x)* и функции *F(x)* гамма-распределения изображены на рис. 4.14 и 4.15.

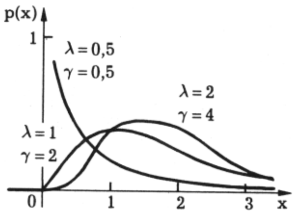


Рис. 4.14

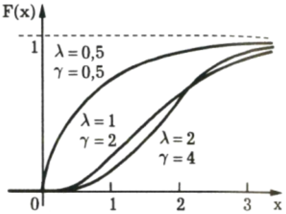


Рис. 4.15

Как видно на рис. 4.12-4.15, распределение Вейбулла и гамма-распределение весьма близки между собой. Основным преимуществом закона Вейбулла перед гамма-распределением является то, что его функция распределения является элементарной функцией. Поэтому раньше, когда ЭВМ еще не были достаточно распространены, распределение Вейбулла использовалось гораздо чаще, чем гамма-распределение. Хотя в общем случае гамма-распределение и не является элементарной функцией, гамма-распределение обладает некоторыми весьма полезными свойствами. Так, если γ =k т.е. γ принимает целые значения, то мы получаем ***распределение Эрланга*** порядка k находящее важные применения в *теории массового обслуживания.* Если же $\gamma = k/2$, где k — нечетное число, а $\lambda = ½$, то гамма-распределение превращается в так называемое ***распределение χ^2 (хи-квадрат)***, роль которого в математическое статистике невозможно переоценить. Параметр k называют в этом случае ***числом степеней свободы распределения*** χ^2,*а* само распределение — ***распределением χ^2 (хи-квадрат)*** с k степенями свободы. Наконец, при $\gamma = 1$ мы имеем дело все с тем же экспоненциальным распределением. Гамма-распределение обладает и другими интересными свойствами, которые мы здесь не будем рассматривать.

Решение типовых примеров

Пример 4.5. Игральную кость бросают один раз. Если выпадает четное число очков, игрок выигрывает 8 рублей, если нечетное, но больше одного — проигрывает 1 рубль, если выпадает одно очко — проигрывает 10 рублей. Найдем ***распределение случайной величины*** X — величины выигрыша в данной игре.

Пространство элементарных исходов в данном случае имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6,\ \},$$

где $\boldsymbol{\omega_i}$ — выпадение $\boldsymbol{i}$ очков. Считая, что игральная кость симметричная, имеем

$$\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{1}{6}, \qquad i = \overline{1,6}.$$

Случайная величина X может принять всего три значения $x_1 = 8$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -10$ (является ***дискретной***), причем каждому из этих значений соответствуют события

$$\{X=8\}=\{\omega\colon X(\omega)=8\}=\{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6\},$$

$$\{X=-1\}=\{\omega\colon X(\omega)=-1\}=\{\omega_3,\ \omega_5\},$$

$$\{X=-10\}=\{\omega\colon X(\omega)=-10\}=\{\omega_1\}$$

с вероятностями

$$p_1=\mathbf{P}\{X=8\}=\mathbf{P}\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}=\mathbf{P}(\omega_2)+\mathbf{P}(\omega_4)+\mathbf{P}(\omega_6)=\frac{1}{2}$$

$$p_2=\mathbf{P}\{X=-1\}=\mathbf{P}\{\omega_3,\omega_5\}=\mathbf{P}(\omega_3)+\mathbf{P}(\omega_5)=\frac{1}{3},$$

$$p_3=\mathbf{P}\{X=-10\}=\mathbf{P}\{\omega_1\}=\frac{1}{6}.$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X можно представить в виде табл. 4.5.

Таблица 4.5

X	-10	-1	8
$\mathbf{P}$	$1/6$	$1/3$	$1/2$

Графическое изображение распределения случайной величины X приведено на рис. 4.16.

Найдем теперь ***функцию распределения*** $F(x)$ ***случайной величины*** X. В соответствии с определением функции распределения

$$F(x)=\mathbf{P}\{X<x\}=\begin{cases} 0, & x\leqslant -10; \\ p_1=1/6, & -10<x\leqslant -1; \\ p_1+p_2=1/2, & -1<x\leqslant 8; \\ p_1+p_2+p_3=1, & x>8. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 4.17.

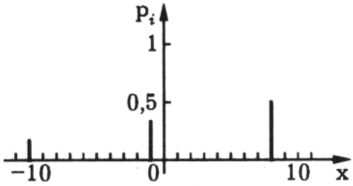


Рис. 4.16

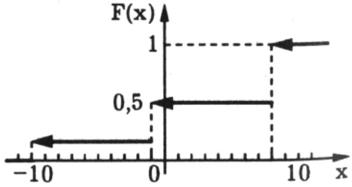


Рис.4.17

Пример 4.6. Производят четыре независимых опыта, в каждом из которых некоторое событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}8$. Построим ряд распределения и функций распределения случайной величины X — числа появлений события A в четырех опытах.

В соответствии с условием задачи мы имеем дело со схемой Бернулли, т.е. число появлений события А распределено по биномиальному закону с параметрами n = 4, p = 0,8и q=1-p = 0,2. Значит, случайная величина X может принимать только значения i, $i = \overline{0{,}4}$. Согласно формуле Бернулли

$$\mathbf{P}\{X = i\} = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{0, n},$$

определим вероятности возможных значений случайной величины X:

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}0016, \quad \mathbf{P}\{X = 1\} = C_4^1 p^1 q^3 = 0{,}0256,$$

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = C_4^2 p^2 q^2 = 0{,}1536, \quad \mathbf{P}\{X = 3\} = C_4^3 p^3 q^1 = 0{,}4096,$$

$$\mathbf{P}\{X = 4\} = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}4096.$$

Ряд распределения рассматриваемой случайной величины представлен в табл. 4.6.

Таблица 4.6

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 0{,}0016, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}0272, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}1808, & 2 < x \leqslant 3; \\ 0{,}5904, & 3 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения *F(x)* изображен на рис. 4.18

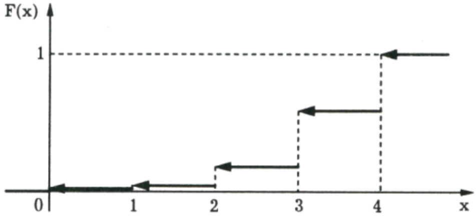


Рис. 4.18

Пример 4.7. Функция распределения непрерывной случайной величины *X* задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найдем:

а) плотность распределения *p(x)* случайной величины *X;*

б) вероятность попадания случайной величины *X* в интервал от 0,25 до 0,5;

в) вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее 0,3;

г) вероятность того, что случайная величина *X* примет значение большее 0,7;

д) графики *F(x)* и *p(x)*.

Воспользовавшись определением 4.5 и свойствами плотности распределения и функции распределения, (см. теоремы 4.1 и 4.2, имеем:

$$\text{а) } p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

б) $\mathbf{P}\{0{,}25 < x < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875;$

в) $\mathbf{P}\{x < 0{,}3\} = F(0{,}3) = 0{,}3^2 = 0{,}09;$

г) $\mathbf{P}\{x > 0{,}7\} = 1 - \mathbf{P}\{x \leqslant 0{,}7\} = 1 - F(0{,}7) = 1 - 0{,}7^2 = 0{,}51;$

д) **графики $F(x)$ и $p(x)$ приведены на рис. 4.19 и 4.20.**

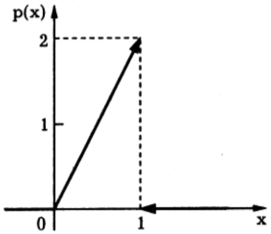


Рис. 4.19

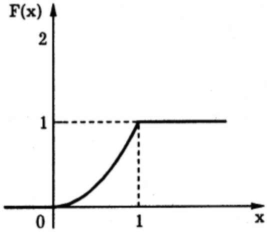


Рис.4.20

Пример 4.8. Функция распределения непрерывной случайной величины X задается формулой $F(x)=c+b\,\mathrm{arctg}(x/a)$ Найдем:

а) постоянные c и b;

б) плотность распределения случайной величины X;

в) $P\{x_1 < X < x_2\}$.

В соответствии с определениями 4.2 и 4.5 и свойствами Функции и плотности распределения (см. теоремы 4.1, 4.2): а) постоянные c и b определяем из условий

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(c + b\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = c - b\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(c + b\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = c + b\frac{\pi}{2} = 1,$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} c - b\dfrac{\pi}{2} = 0; \\ c + b\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

находим, что с=1/2и b=1/ π и поэтому

F(x) = 0,5+arctg(x/a)/ π ;

б) плотность рспределения равна

$$p(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)};$$

$$\mathbf{P}\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{a} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{a} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x_1}{a}\right)$$

Пример 4.9. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

Определим:

а) коэффициент a;

б) функцию распределения

в) графики $p(x)$ и F(x);

г) вероятность P{2 < X < 3} попадания случайной величины X в интервал (2, 3);

д) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал (2, 3).

а) Для нахождения коэффициента о воспользуемся свойством 3 плотности распределения. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2}\,dx = -\frac{a}{x}\Bigg|_1^{+\infty} = a,$$

откуда получаем a=l.

б) В соответствии с определением плотности распределения

$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0, & x \leqslant 1; \\ \int\limits_{1}^{x} \frac{dy}{y^2} = \frac{x-1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

в) Графики функций *p(x)* и F(x) изображены на рис. 4.21 и 4.22.

г) $P\{2<X<3\}$ = F(3)-F(2) = 2/3 -1/2 =1/6.

д) Вероятность того, что *X* не попадет в интервал (2, 3) при одном испытании равна 1 - 1/6 = 5/6, а при четырех испытаниях — $(5/6)^4 \approx 0{,}48$.

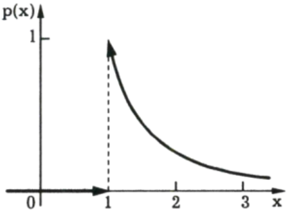


Рис. 4.21

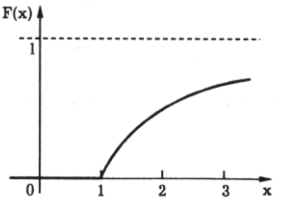


Рис. 4.22

Пример 4.10. Случайное отклонение размера детали $_0$ номинала имеет нормальное распределение со средним значением т = 1 мм и средним квадратичным отклонением *а* 2 мм. Найдем:

а) вероятность того, что отклонение от номинала будет отрицательным?

б) процент деталей будет иметь отклонение от номинала в пределах ±5 мм?

в) верхнюю границу отклонения от номинала, обеспечиваемую с вероятностью 0,9?

Обозначим через X отклонение от номинала. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m— 1мм и $\sigma = 2$ мм.

Используя формулу (4.3) и табл. П.3, в которой приведены значения интеграла Лапласа, находим:

а) $$\mathbf{P}\{X < 0\} = \Phi_0\left(\frac{0-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty - 1}{2}\right) =$$
$$= \Phi_0\left(\frac{-1}{2}\right) - \Phi_0(-\infty) = -0{,}19146 - (-0{,}5) = 0{,}30854;$$

б) $$\mathbf{P}\{-5 < X < 5\} = \Phi_0\left(\frac{5-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-5-1}{2}\right) =$$
$$= \Phi_0(2) - \Phi_0(-3) = 0{,}47725 - (-0{,}49865) = 0{,}9759.$$

Таким образом, в пределах допуска ±5 мм находится 97,59% деталей.

в) Для ответа на третий вопрос нужно найти такое число x^+, при котором $\mathbf{P}\{X < x^+\} = 0{,}9$.

Поскольку

$$\mathbf{P}\{X < x^+\} = \Phi_0\left(\frac{x^+ - 1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty - 1}{2}\right) =$$
$$= \Phi_0\left(\frac{x^+ - 1}{2}\right) + 0{,}5 = 0{,}9,$$

то

$$\Phi_0\left(\frac{x^+ - 1}{2}\right) = 0{,}4, \quad \frac{x^+ - 1}{2} = 1{,}28$$

И $x^+ = 3{,}56$. Значит, с вероятностью 0,9 отклонение от номинала будет меньше 3,56.

Пример 4.11. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 0$ и σ. При каком значении среднего квадратичного отклонения σ вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (a, b),

$0 < a < b < \infty$, будет наибольшей?

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (a, b) можно определить по формуле (4.3):

$$\mathbf{P}\{a<X<b\}=\Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right).$$

Поскольку $\Phi_0(b/\sigma)$ и $\Phi_0(a/\sigma)$ — дифференцируемые по σ функции, то необходимым условием экстремума является равенство нулю производной $(\mathbf{P}\{a < X < b\})'_\sigma$. Отсюда, согласно определению интеграла Лапласа, имеем

$$(\mathbf{P}\{a < X < b\})'_\sigma = -\frac{b}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \frac{a}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

есть плотность стандартного нормального распределения. Производя элементарные арифметические преобразования, приходим к уравнению

$$ae^{-a^2/(2\sigma^2)} - be^{-b^2/(2\sigma^2)} = 0$$

относительно $\sigma > 0$. Его решение имеет вид

$$\sigma = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2(\ln b - \ln a)}}.$$

Нетрудно проверить,что при фиксированных значениях a и b,в силу условия $0 < a < b < +\infty$ справедливы соотношения

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right) \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0$$

и

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right) \underset{\sigma\to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому вероятность $\mathbf{P}\{a < X < b\}$ при

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)}{2(\ln b - \ln a)}}$$

принимает максимальное значение.

5. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В прикладных задачах обычно приходится рассматривать не одну ***случайную величину***, а несколько случайных величин, одновременно измеряемых (наблюдаемых) в эксперименте. При этом с каждым элементарным исходом $\omega \in \Omega$ бывает связан набор числовых значений некоторых количественных параметров.

В этой главе мы обобщим ранее полученные результаты на совокупность из нескольких случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве.

5.1. Многомерная случайная величина. Совместная функция распределения

Определение 5.1. ***Совокупность случайных величин***

$$X_1 = X_1(\omega), ..., X_n = X_n(\omega),$$

Заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, B, P), называют ***многомерной (n-мерной) случайной величиной***, или ***n-мерным случайным вектором***. При этом сами случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ называют ***координатами случайного вектора***. В частности, при n=1 говорят об ***одномерной***, при n=2 – ***двумерной случайной величине*** (или ***двумерном случайном векторе***).

Для n-мерного случайного вектора воспользуемся обозначениями $(X_1, ..., X_n)$ и $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$. В случае двумерных и трехмерных случайных векторов на ряду с обозначениями (X_1, X_2) и (X_1, X_2, X_3) будем использовать также обозначения (X, Y) и (X, Y, Z).

Приведем примеры случайных векторов.

Пример 5.1. Отклонение точки разрыва снаряда от точки прицеливания при стрельбе по плоской цели можно задать двумерной случайной величиной (*X, Y*), где X – отклонение по дальности, а Y – отклонение в боковом направлении.

При стрельбе по воздушной цели необходимо рассматривать трехмерный случай вектора (*X, Y, Z*), где *X, Y, Z* – координаты отклонения точки разрыва зенитного снаряда от точки прицеливания в некоторой пространственной системе координат.

Пример 5.2. При испытании прибора на надежность совокупных внешних воздействий в некоторый момент времени можно описать случайным вектором (*X, Y, Z, ...*). Здесь, например, X – температура окружающей среды, Y – атмосферное давление, Z – амплитуда вибрации платформы, на которой установлен прибор и т.д. Размерность этого вектора зависит от количества учитываемых факторов и может быть достаточно большой.

Определение 5.2. ***Функцией распределения (вероятностей)***

$$F(x_1,..., x_n) = F_{X_1,...,X_n}(x_1,..., x_n)$$

(n-мерного) ***случайного вектора*** $(X_1,..., X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1,..., x_n) \in R^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1 < x_1\},...,\{X_n < x_n\}$, т.е.

$$F(x_1,..., x_n) = F_{X_1,...,X_n}(x_1,..., x_n) = P\{X_1 < x_1,...X_n < x_n\}$$

Функцию распределения $F(x_1,..., x_n)$ называют также ***совместной (n-местной) функцией распределения*** случайных величин $X_1,..., X_n$. В частности, при n=1 будем говорить об одномерной, при n=2 – о двумерной функции распределения.

Значение двумерной функции распределения в точке $(a_1; a_2)$, согласно определению 5.2, представляет собой не что иное, как вероятность попадания точки с координатами $(X_1; X_2)$ в квадрант с вершиной в точке $(a_1; a_2)$, заштрихованный на рис. 5.1.

Свойства двумерной функции распределения, аналогичные свойствам функции распределения одномерной случайной величины, доказываются в следующей теореме.

Теорема 5.1. Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.

1) $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$.

2) $F(x_1, x_2)$ - неубывающая функция по каждому из аргументов x_1 и x_2

3) $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$.

4) $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5)

$$P\{(X_1, X_2) \in a_1a_2\ b_1b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$$

6) $F(x_1, x_2)$ - непрерывная слева в любой точке $(x_1, x_2) \in R^2$ по каждому из аргументов x_1 и x_2 функция.

7) $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x), \quad F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$.

5.2. Дискретные двумерные случайные величины

Определение 5.3. ***Двумерную случайную величину*** (X,Y) называют ***дискретной***, если каждая из случайных величин X и Y является дискретной.

Так же как и в одномерном случае, распределение двумерной случайной величины естественно описать с помощью перечисления всевозможных пар (x_i, y_j) значений координат случайного вектора (X, Y) и соответствующих вероятностей, с которыми эти пары значений принимают случайные величины X и Y (для простоты ограничимся конечным множеством возможных значений, когда случайная величина X может принимать только значения $x_1, ..., x_n$, Y — значения $y_1, ..., y_m$, а координаты двумерного случайного вектора (X, Y) — пары значений (x_i, y_j), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Такое перечисление удобно представить в виде таблицы (табл. 5.1). В этой таблице в верхней строке перечислены все возможные значения $y_1,..., y_j,..., y_m$ случайной величины *Y*, а в левом столбце — значения $x_1,..., x_i,..., x_n$ случайной величины *X*. На пересечении столбца "y_j" со строкой "x_i" находится вероятность

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

Таблица 5.1

X	Y					
	y_1	y_1 y_2	y_2 ...	y_{n-1}	y_m y_n	P_X
x_1	x_1 p_{11}	p_{11} p_{12}	p_{12}	p_{1n-1}	p_{1m} p_{1n}	p_{X1}
x_2	x_2 p_{21}	p_{21} p_{22}	p_{22}	p_{2n-1}	p_{2m} p_{2n}	p_{X2}
...	...	...	...		... ...	...
x_m	P_Y p_{m1}	p_{Y1} p_{m2}	p_{Y2}	p_{mn-1}	p_{Ym} p_{mn}	

совместного осуществления событий $\{X = x_i\}, \{Y = y_j\}$.

В этой таблице обычно добавляют еще одну строку "P_Y" и столбец "P_X".

На пересечении столбца "P_X" со строкой "x_i" записывают число $p_{Xi} = p_{i1} + ... + p_{im}$.

Но p_{Xi} представляет собой не что иное, как вероятность того, что случайная величина *X* примет значение x_i, т.е.

$$p_{Xi} = P\{X = x_i\}.$$

Таким образом, первый и последний столбцы таблицы дают нам ряд распределения случайной величины X. Аналогично, в последней строке "P_Y" помещены значения

$$p_{Yi} = p_{1j} + \ldots + p_{nj},$$

а первая и последняя строки дают ряд распределения случайной величины Y. Для контроля правильности составления таблицы рекомендуется просуммировать элементы последней строки и последнего столбца. Если хотя бы одна из этих сумм не будет равна единице, то при составлении таблицы была допущена ошибка.

Используя таблицу 5.1, нетрудно определить совместную функцию распределения $F_{X,Y}(x,y)$. Ясно, что для этого необходимо просуммировать p_{ij} по всем тем значениям i и j, для которых $x_i < x, y_j < y$, т.е. $F(x,y) = \sum\limits_{\substack{i:x_i<x \\ j:y_j<y}} p_{ij}$.

5.3. Непрерывные случайные величины

Определение 5.4. ***Непрерывной двумерной случайной величиной*** (X, Y) называют такую двумерную случайную величину (X, Y), ***совместную функцию распределения*** которой

$$F(x_1, x_2) = P\{X < x_1, Y < x_2\}$$

можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 .$$

Функцию $p(x_1, x_2) = p_{X,Y}(x_1, x_2)$ называют ***совместной (двумерной) плотностью распределения*** случайных величин X и Y, или плотностью распределения случайного вектора (X, Y). Область интегрирования в двойном интеграле представляет собой квадрант $\{y_1 < x_1, y_2 < x_2\}$ с вершиной в точке (x_1, x_2). Как известно, двойной интеграл можно представить в виде повторного, причем в любом порядке, следовательно,

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{x_2} dy_2 \int_{-\infty}^{x_1} p(y_1, y_2) dy_1 .$$

Так же как и в одномерном случае, будем предполагать, что $p(x_1, x_2)$ непрерывная (или непрерывная за исключением отдельных точек или линий) функция по обоим аргументам. Тогда в соответствии с определением непрерывной случайной величины и теоремой о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом совместная плотность распределения представляет собой (в точках ее непрерывности) вторую смешанную производную совместной функции распределения:

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} . \qquad (5.1)$$

Заметим, что аналогичный смысл имеет ***совместная (n-мерная) плотность распределения*** случайных величин $X_1,.., X_n$ или ***плотность распределения случайного вектора*** ($X_1,.., X_n$):

$$p(x_1,.., x_n) = \frac{\partial^2 F(x_1,.., x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n} .$$

Нетрудно доказать следующие свойства двумерной плотности распределения.

Теорема 5.2. Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами.

1. $p(x_1, x_2) \geq 0$.
2. $P\{a_1 < X < b_1, a_2 < X < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} p(x_1, x_2) dx_2$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

4. $P\{x_1 < X < x_1 + \Delta x_1, x_2 < Y < x_2 + \Delta x_2\} \approx p(x_1, x_2)\Delta x_1 \Delta x_2$

5. $P\{X = x_1, Y = x_2\} = 0$

6. $P\{(X;Y) \in D\} = \iint\limits_D p(x_1, x_2)dx_1 dx_2$.

7. $p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y)dy$.

8. $p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y)dx$.

5.4. Независимые случайные величины

Определение 5.5. ***Случайные величины*** X и Y называют ***независимыми,*** если совместная функция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ является произведением одномерных функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$: $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.В противном случае ***случайные величины*** называют ***зависимыми.***

Теорема 5.3. Для того чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы для всех x и y $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$.

Теорема 5.4. Дискретные случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда для всех возможных значений x_i и y_j

$$p_{i.j} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_{X_i} p_{Y_j}.$$

Мы предоставляем возможность читателю доказать эту теорему самостоятельно.

Определение 5.6. ***Случайные величины*** $X_1, ..., X_n$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называют ***независимыми в совокупности,*** если

$$F_{X_1,\text{K},X_n}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n).$$

Замечание 5.3. Теоремы 5.3 и 5.4 распространяются на любое число случайных величин.

Пример 5.13. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0;\\ 1-e^{-x^2}-e^{-2y}+e^{-x^2-2y}, & x>0 \quad \text{и} \quad y>0. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\{-2\le X<2{,}1\le Y<3\},\quad \{X\ge 0,Y\ge 1\} \quad \text{и} \quad \{X<1,Y\ge 2\};$$

б) частные функции распределения случайных величин X и Y.

а) В соответствии со свойством 5 двумерной функции распределения имеем

$$P\{-2\le X<2{,}1\le Y<3\}=F(2{,}3)-F(2{,}1)-F(-2{,}3)+F(-2{,}1)=$$
$$=1-e^{-4}-e^{-6}+e^{-10}-(1-e^{-4}-e^{-2}+e^{6})-0+0=e^{-2}-2e^{-6}+e^{-10}.$$

Событие $\{X\ge 0,Y\ge 1\}$ представляет собой попадание двумерной случайной величины (X, Y) в квадрант $\{x\ge 0,y\ge 1\}$. Поэтому

$$P\{X<1,Y\ge 2\}=F(1,+\infty)-F(1{,}2)-F(-\infty,+\infty)+F(-\infty,2)=$$
$$=1-e^{-1}-(1-e^{-1}-e^{-4}+e^{-5})-0+0=e^{-4}-e^{-5}$$

б) В соответствии со свойством 7 двумерной функции распределения частные распределения случайных величин X и Y задаются формулами

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ 1-e^{-x^2}, & x>0; \end{cases}$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases} 0, & y\le 0;\\ 1-e^{-2y}, & y>0. \end{cases}$$

Пример 5.14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad или \quad y\le 0;\\ \sin x\sin y, & 0<x\le \pi/2 \quad и \quad 0<y\le \pi/2;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2 \quad и \quad y>\pi/2;\\ \sin y, & x>\pi/2 \quad и \quad 0<y\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2 \quad и \quad y>\pi/2.\end{cases}$$

Найдем: а) вероятности событий D_1, D_2, D_3, которые заданы соответственно:

$$\left\{-1\le X<\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\le Y<\frac{\pi}{3}\right\},\quad \left\{X\ge\frac{\pi}{4},Y\ge\frac{\pi}{4}\right\} \quad и \quad \left\{X<\frac{\pi}{3},Y\ge\frac{\pi}{6}\right\};$$

б) частные функции распределения случайных величин X и Y.

Действуя таким же образом, как в примере 5.13, имеем:

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-1,\frac{\pi}{3}\right)+F\left(-1,\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-0+0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$P\{(X,Y)\in D_2\}=F(+\infty,+\infty)-F\left(+\infty,\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},+\infty\right)+F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2},$$

$$P\{(X,Y)\in D_3\}=F\left(\frac{\pi}{3},+\infty\right)-F\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)-F(-\infty,-\infty)+F\left(-\infty,\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-0+0=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le\pi/2;\\ 1, & x>\pi/2;\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \sin y, & 0<y\le\pi/2;\\ 1, & y>\pi/2.\end{cases}$$

Пример 5.15. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины *(X, Y)* задано табл. 5.2. Найдем: а) ряды распределения случайных величин X и Y;

Таблица 5.2

X	Y		
	3	*8*	*12*
3	*0,17*	*0,13*	*0,25*
5	*0,10*	*0,30*	*0,05*

б) значения совместной функции распределения $F(x,y)$ в точках (4,5; 8) и (9; 11), а также вероятность события $\{4 \le X < 9,\ 8 \le Y < 11\}$.

а) Поскольку событие $\{X = 3\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий
$\{X = 3,\ Y = 3\}$, $\{X = 3,\ Y = 8\}$ и $\{X = 3,\ Y = 12\}$, то
$P\{X=3\} = P\{X=3,\ Y=3\} + P\{X=3,\ Y=8\} + P\{X=3,\ Y=12\} = 0{,}55.$

Аналогично

$$P\{X=5\} = P\{X=5,\ Y=3\} + P\{X=5,\ Y=8\} + P\{X=3,\ Y=12\} = 0{,}45.$$

Ряд распределения случайной величины X приведен в таб. 5.3.

Таблица 5.3

X	3	5
P	0,55	0,45

Таблица 5.4

$\boldsymbol{Y}$	3	8	12
P	0,27	0,43	0,30

Суммируя вероятности по столбцам (см. табл. 5.2), находим:

$$P\{Y = 3\} = P\{X = 3,\ Y = 3\} + P\{X = 5,\ Y = 3\} = 0{,}27,$$

$$P\{Y = 8\} = P\{X = 3,\ Y = 8\} + P\{X = 5,\ Y = 8\} = 0{,}43,$$

$$P\{Y = 12\} = P\{X = 3,\ Y = 12\} + P\{X = 5,\ Y = 12\} = 0{,}30.$$

Ряд распределения случайной величины Y приведен в табл. 5.4.

б) Используя определение 5.3 совместной функции распределения и то, что событие $\{X < 4{,}5,\ Y < 8\}$ совпадает с событием $\{X = 3,\ Y = 3\}$, получаем

$$F(4{,}5,\ 8) = P\{X < 4{,}5,\ Y < 8\} = P\{X = 3,\ Y = 3\} = 0{,}17.$$

Аналогично событие $\{X < 9,\ Y < 11\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий

$\{X = 3,\ Y = 3\}$, $\{X = 3,\ Y = 8\}$, $\{X = 5,\ Y = 3\}$ и $\{X = 5,\ Y = 8\}$, и, значит,

$$F(9{,}11) = P\{X < 9,\ Y < 11\} = P\{X = 3,\ Y = 3\} + P\{X = 3,\ Y = 8\} +$$
$$P\{X = 5,\ Y = 3\} + P\{X = 5,\ Y = 8\} = 0{,}70.$$

Наконец,

$$P\{4 \le X < 9{,}8 \le Y < 11\} = P\{X = 5,\ Y = 8\} = 0{,}30.$$

Пример 5.16. Совместная функция распределения непрерывной двумерной случайной величины $(X,\ Y)$ имеет вид

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{y}{b} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(a > 0, b > 0\right).$$

Найдем совместную плотность распределения.

Воспользовавшись равенством

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y},$$

Получим

$$p(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{y}{b} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = .$$

$$= \frac{\pi^{-2} ab}{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)}.$$

6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Из результатов предыдущих глав следует, что вероятности любых событий, связанных с каждой случайной величиной (в том числе многомерной), полностью определяются ее законом распределения, причем закон распределения дискретной случайной величины удобно задавать в виде ряда распределения, а непрерывной — в виде плотности распределения.

Однако при решении многих задач нет необходимости указывать закон распределения случайной величины, а достаточно характеризовать ее лишь некоторыми (неслучайными) числами. Такие числа (в теории вероятностей их называют числовыми характеристиками случайной величины) будут рассмотрены в настоящей главе. Отметим, что основную роль на практике играют математическое ожидание, задающее „центральное” значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая „разброс” значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

6.1. Математическое ожидание случайной величины

Как уже отмечалось выше, наиболее употребляемой на практике числовой характеристикой является математическое ожидание, или, по-другому, среднее значение случайной величины.

Определение 6.1. ***Математическим ожиданием (средним значением)*** *MX* дискретной случайной величины X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X = x_i\}$**,** с которыми случайная величина принимает эти значения*:* *M(X)* $= \sum_i x_i p_i$. При этом, если множество возможных значений случайной величины *X* счетно, предполагается, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty ,$$

т.е. ряд, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно; в противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины X не существует. (В расчетах будем применять $MX = M(X).$)

Математическое ожидание дискретной случайной величины имеет аналог в теоретической механике. Пусть на прямой расположена система материальных точек с массами $p_i(\sum_i p_i = 1)$ и пусть x_i — координата *i*-й точки. Тогда центр масс системы будет иметь координату

$$\overline{X} = \frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i p_i} = \frac{\sum_i x_i p_i}{1} = \sum_i x_i p_i ,$$

совпадающую с математическим ожиданием $M(X)$ случайной величины X.

Пример 6.1. Пусть случайная величина X имеет ***распределение Пуассона.*** Тогда

$$M(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda$$

Определение 6.2. ***Математическим ожиданием (средним значением)*** $M(X)$ непрерывной случайной величины называют интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx .$$

При этом предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)dx < +\infty ,$$

т.е. несобственный интеграл, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно.

Заметим, что определение 6.2 является естественным обобщением определения 6.1, так как для непрерывной случайной величины с плотностью распределения $p(x)$

$$P(x \le X < x + \Delta x) \approx p(x)dx .$$

Так же как и в дискретном случае, математическое ожидание непрерывной случайной величины можно интерпретировать как центр масс стержня, плотность массы которого в точке x равна $p(x)$.

Пример 6.2. Найдем математическое ожидание равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины X. Поскольку в этом случае $p(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2}.$$

Как и следовало ожидать, $M(X)$ совпадает с серединой $[a,b]$.

6.2. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания

Определим математическое ожидание функцией случайной величины. И так, пусть $y=y(x)$ – является функцией случайной величины.

Рассмотрим сначала ***дискретную случайную величину*** X, принимающую значения $x_1,..., x_n$. Тогда случайная величина $Y = Y(X)$, как мы уже знаем, принимает значения $Y(x_1),...,Y(x_n)$ с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$
и ее математическое ожидание определяется формулой

$$M(Y) = M(Y(X)) = \sum_{i=1}^{n} Y(x_i)p_i. \tag{6.1}$$

Если же величина X принимает счетное число значений, то математическое ожидание Y определяется формулой

$$M(Y) = M(Y(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} Y(x_i)p_i, \tag{6.2}$$

Но при этом для существования математического ожидания требуется абсолютная сходимость соответствующего ряда, т.е. выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Y(x_i)| p_i < +\infty . \qquad (6.3)$$

Для непрерывной случайной величины X, имеющей плотность распределения $p(x)$, математическое ожидание случайной величины $Y = Y(X)$ можно найти, используя аналогичную формулу

$$M = M(Y(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) p(x) dx, \qquad (6.4)$$

причем и здесь требуется выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(x)| p(x) dx < +\infty .$$

В дальнейшем, чтобы каждый раз не оговаривать условие существовании математического ожидания, будем предполагать, что соответствующие сумма или интеграл сходятся абсолютно. Аналогично можно вычислить математическое ожидание функции от многомерной случайной величины. Так, математическое ожидание $M(Y)$ функции $Y = Y(X_1, X_2)$ от дискретной двумерной случайной величины (X_1, X_2) можно найти, воспользовавшись формулой

$$M(Y) = MY(X_1, X_2) = \sum_{i,j} Y(x_i, y_j) p_{ij} ,$$

где $p_{ij} = P\{X_1 = x_i, X_2 = y_j\}$, а функции $Y = Y(X_1, X_2)$ от двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) — формулой

$$M(Y) = MY(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x, y) p_{X_1 X_2}(x, y), \qquad (6.5)$$

где $p_{X_1 X_2}(x, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2.

Докажем теперь теорему о свойствах математического ожидания.

Теорема 6.1. Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам.

1) Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица (т.е., по сути дела, не является случайной величиной), то $M(C) = C$.

2) $M(aX + b) = aM(X) + 6$, где a, b — постоянные.

3) $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$.

4) $M(X_1 X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2)$ для независимых случайных величин X_1 и X_2

Очевидно также, что свойство 3 можно обобщить на случай произвольного числа слагаемых, т.е.

$$M(X_1 + ... + X_n) = M(X_1) + ... + M(X_n).$$

Замечание 6.3. Свойство 4 также допускает обобщение на произведение конечного числа независисмых (в совокупности) случайных величин:

$$M(X_1 \cdot X_2 ... X_n) = M(X_1) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

6.3. Дисперсия. Моменты высших порядков

Две случайные величины могут иметь одинаковые средние значения, но их возможные значения будут поразному рассеиваться вокруг этого среднего. Например, средний балл на экзамене в двух группах равен „4", но в первой группе почти все студенты получили „4", а во второй группе „четверочников" нет вообще, но есть как „пятерочники", так и „троечники". Поэтому, наряду со средним значением, хотелось бы иметь и число, характеризующее „разброс" случайной величины относительно своего среднего значения. Такой характеристикой обычно служит дисперсия. Кроме дисперсии можно предложить и другие меры разброса, например центральные моменты любого четного порядка, которые также будут определены в этом параграфе. Однако именно использование дисперсии и других характеристик второго порядка (ковариаций) позволяет применить в теории вероятностей сильно развитый аппарат гильбертовых пространств.

Определение 6.4. ***Вторым начальным моментом*** (обычно опускают слово „начальный") m_2 случайной величины X называют математическое ожидание квадрата

$$X(Y(x) = x^2):\ m_2 = M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i$$

для дискретной случайной величины X и

$$m_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

для непрерывной.

Определение 6.5. ***Дисперсией*** *D(X)* случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения, т.е.

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Используя формулы (7.1)-(7.4), в которых положено

$$Y(x) = (x - M(X))^2,$$

легко написать расчетные формулы для дисперсий дискретной и непрерывной случайных величин соответственно:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i \qquad (6.6)$$

и

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 p(x) dx. \qquad (6.7)$$

Замечание 6.4. Из определения непосредственно следует, что дисперсия любой случайной величины является неотрицательным числом.

Дисперсия $D(X)$ представляет собой второй момент ***центрированной*** (имеющей нулевое математическое ожидание) ***случайной величины*** $X - M(X)$.

Поэтому иногда дисперсию называют ***вторым центральным моментом*** случайной величины.

Дисперсия имеет аналог в теоретической механике — центральный (относительно центра масс) момент инерции массы, распределенной на оси с линейной плотностью $p(x)$.

Выведем некоторые свойства дисперсии.

Теорема 6.2. Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам.

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица, то $D(C) = 0$.

2. $D(aX + b) = a^2 DX$.

3. $D(X) = MX^2 - (MX)^2$.

4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ для независимых случайных величин X и Y.

Если случайная величина X с вероятностью единица принимает всего одно значение C, то в силу свойства 1 математического ожидания ($M(X) = C$) получаем

$$DX = M(X - C)^2 = (C - C)^2 \cdot 1,$$

откуда вытекает утверждение 1.

Определим дисперсию случайной величины

$$Y = aX + b.$$

Используя свойство 2 математического ожидания, имеем

$$D(Y)=M(Y-M(Y))^2)=M(aX+b-M(aX+b))^2=$$
$$=M(a(X-MX))^2=M(a^2(X-MX)^2)=a^2M(X-MX)^2.$$

Поэтому справедливо утверждение 2.

Далее, согласно свойствам 2 и 3 математического ожидания, получаем

$$D(X)=M((X-M(X))^2)=M(X^2-2XM(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2,$$

т.е. приходим к утверждению 3. Наконец, пусть X и Y – независимые случайные величины. Тогда, используя независимость случайных величин, а также свойства 2-4 математического ожидания, получаем

$$D(X+Y)=M(X+Y-M(X+Y))^2=M((X-MX)+(Y-MY))^2=$$
$$=M(X-MX)^2+2M((X-MX)(Y-MY))+M(Y-MY)^2=D(X)+D(Y),$$

Замечание 6.7. Очевидно, что свойство 4 справедливо для суммы не только двух, но и любого числа n попарно независимых случайных величин

$$D(X_1+...+X_n)=D(X_1)+...+D(X_n).$$

Пример 6.3. Найдем дисперсию случайной величины *X*, распределенной по ***закону Пуассона***. Для этого воспользуемся свойством 3 дисперсии. Математическое ожидание $M(X)=\lambda$ было найдено в примере 6.1. Определим второй момент:

$$M(X^2)=\sum_{i=0}^{\infty}i^2\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum(j+1)\frac{\lambda^j}{i!}e^{-\lambda}=$$
$$=\lambda(MX+1)=\lambda^2+\lambda.$$

Таким образом, $DX=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$, и, значит, дисперсия *X*, так же как и математическое ожидание, совпадает с параметром λ.

Пример 6.4. Пусть X — число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли. Дисперсию X и математическое ожидание можно вычислить непосредственно воспользоваться определением . Однако мы поступим другим образом. Для этого представим X в виде суммы: $X = X_1 + ... + X_n$ Дисперсия каждого слагаемого равна:

$$D(X_i) = (0 - MX_i)^2 q + (1 - MX_i)^2 p = (-p)^2 q + (1-p)^2 p =$$
$$= p^{q2} + q^2 p = pq(p+q) = pq.$$

Учитывая, что случайные величины X_i являются независимыми, в силу свойства 4 дисперсии получаем

$$D(X) = D(X_1) + ... + D(X_n) = npq.$$

Пример 6.5. Дисперсия равномерно распределенной на отрезке [a,b] случайной величины X определяется формулой

$$D(X) = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{3^{-1}}{(b-a)}\left(\left(b - \frac{b+a}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{b+a}{2}\right)^3\right) = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин

Пусть (X_1, X_2) — двумерный случайный вектор.

Определение 6.6. ***Ковариацией (корреляционным моментом)*** **cov**(X_1, X_2) случайных величин X_1 и X_2 называют математическое ожидание произведения случайных величин

$$\operatorname{cov}(X_1 X_2) = M((X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)).$$

Запишем формулы, определяющие ковариацию.

Для дискретных случайных величин X_1 и X_2

$$\operatorname{cov}(X_1 X_2) = \sum_{i,j} (x_i - M(X_1))(y_j - M(X_2))p_{ij},$$

для непрерывных случайных величин X_1 и X_2

$$\operatorname{cov}(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - M(X_1))(x_2 - M(X_2))p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

.

Заметим, что введение понятия ковариации позволяет записать выражение для дисперсии суммы случайных величин и к уже имеющимся свойствам дисперсии добавить еще одно:

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

(свойство 5 дисперсии), справедливое для произвольных, а не только независимых случайных величин *X* и *Y*. Действительно,

$$D(X+Y) = M((X+Y) - M(X+Y))^2 =$$

$$= M(X - MX)^2 + 2M((X - MX)(Y - MY)) + M(Y - MY)^2 =$$

$$= D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Свойство 5 дисперсии допускает обобщение на произвольное число слагаемых:

$$D(X_1 + \ldots + X_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i, X_j)\,/$$

Следующая теорема устанавливает основные свойства ковариации.

Теорема 6.3. Ковариация имеет следующие свойства

1. cov(X,X) = D(X).

2. cov(X_1, X_2) = 0 для независимых случайных величин X_1 и X_2.

3. Если $Y_i = a_i X_i + b_i$, $i = 1,2$, то $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = a_1 a_2 \operatorname{cov}(X_1 X_2)$.

4. $-\sqrt{D(X_1)D(X_2)} \le \operatorname{cov}(X_1 X_2) \le \sqrt{D(X_1)D(X_2)}$.

5. $|\,|\operatorname{cov}(X_1 X_2)| = \sqrt{D(X_1)D(X_2)}$ (6.8)

тогда и только тогда, когда случайные величины X_1 и X_2 связаны линейной зависимостью, т.е. существуют такие числа a и b, при которых

$$X_2 = aX_1 - b\ . \tag{6.9}$$

6. $\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right) = M\left(X_1 X_2\right) - MX_1 MX_2$

Утверждение 1 вытекает из очевидного соотношения

$$\operatorname{cov}\left(X, X\right) = M(X - MX)^2 .$$

Если случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми (и имеют математические ожидания), то

$$\operatorname{cov}(X_1 X_2) = (M(X_1 - MX_1))(M(X_2 - MX_2)),$$

откуда приходим к утверждению 2.

Пусть $Y_1 = a_1 X_1 + b_1$, $Y_2 = a_2 X_2 + b_2$. Тогда

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = M(a_1 a_2 (X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)).$$

Поэтому справедливо утверждение 3.

Рассмотрим дисперсию случайной величины

$$Y_x = xX_1 - X_2 ,$$

где x — произвольное число. В силу свойств дисперсий можно получить свойства 3 ковариации

$$D(Y_x) = x^2 DX_1 - 2x \operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right) + DX_2 .$$

Дисперсия DY_x, как функции от x, представляет собой квадратный трехчлен. Но дисперсия любой случайной величины не может быть меньше нуля, а это означает, что дискриминант

$$D = \left(2\operatorname{cov}\left(X_1, X_2\right)\right)^2 - 4D(X_1)D(X_2) \tag{6.10}$$

квадратного трехчлена DY_x является неположительным, т.е. имеет место утверждение 4.

Далее, пусть выполнено равенство (6.8). Значит, дискриминант (6.10) равен нулю, и уравнение

$$D(Y_x) = 0$$

имеет решение, которое обозначим а. Тогда случайная величина $Y_a = aX_1 + X_2$ принимает всего одно значение (допустим, б), и, следовательно, $X_2 = aX_1 - b$, т.е. из (6.8) вытекает (6.9). Наоборот, пусть выполнено (6.9). Тогда в соответствии со свойством 1 дисперсии $D(Y_a)$ = 0, а значит, дискриминант (6.10) является неотрицательным. Поскольку при доказательстве утверждения 4 было показано, что этот дискриминант неположителен, то он равен нулю, откуда следует, что

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2)| = \sqrt{D(X_1)D(X_2)}.$$

Таким образом, из (6.9) вытекает (6.8). Утверждение 5 полностью доказано.

Наконец, раскрывая скобки в формуле, определяющей ковариацию, и используя свойства математического ожидания, получаем утверждение 6, которое часто бывает полезным при численном подсчете ковариации.

Замечание . Если случайные величины связаны линейной зависимостью $X_2 = aX_1 - b$,то в соответствии со свойствами 3 и 1

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = a\operatorname{cov}(X_1, X_2) = aD(X_1)$$

Поэтому знак ковариации совпадает со знаком коэффициента ***a*** и свойство 5 допускает следующее уточнение:

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sqrt{D(X_1)D(X_2)} \text{ при } a > 0;$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -\sqrt{D(X_1)D(X_2)} \text{ при } a < 0.$$

Определение 6.7. ***Случайные величины*** X и У называют ***некоррелированными,*** если их ковариация равна нулю, т.е.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = 0.$$

Приведенный выше пример показывает, что из некоррелированности случайных величин не следует их независимость, можно сказать, что ковариация случайных величин отражает, насколько их зависимость близка к линейной. Существенным недостатком ковариации является то, что ее размерность совпадает с произведением размерностей случайных величин. Естественно, хотелось бы иметь безразмерную

характеристику степени линейной зависимости. Но это очень просто сделать — достаточно поделить ковариацию случайных величин на произведение их средних квадратичных отклонений.

Определение 6.8. ***Коэффициентом корреляции*** случайных величин X и Y называют число $\rho = \rho(X, Y)$, определяемое равенством (предполагается, что $D(X) > 0$ и $D(Y) > 0$)

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}.$$

Теорема 6.5. Коэффициент корреляции имеет следующие свойства.

1. $\rho(X, X) = 1$.

2. Если случайные величины X и Y являются независимыми (и существуют $D(X) > 0$ и $D(Y) > 0$), то $\rho(X, Y) = 0$.

3. $\rho(a_1 X_1 + b_1, a_2 X_2 + b_2) = \pm\rho(X_1, X_2)$. При этом знак плюс нужно брать в том случае, когда a_1 и a_2 имеют одинакове знаки, и минус — в противном случае.

4. $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$.

5. $|\rho(X, Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.

Доказательство теоремы следует из свойств ковариации, и мы предлагаем провести его самостоятельно.

Пример 6.6. Найдем коэффициент корреляции случайных величин X — числа очков, выпавших на верхней грани игральной кости, и Y — на нижней (см. пример 5.5). Для этого сначала вычислим $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ и $\operatorname{cov}(X, Y)$. Воспользовавшись табл. 5.3, получим

$$M(X)=M(Y)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5,$$

$$D(X)=D(Y)=(1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+$$
$$+(4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12},$$

Аналогично можно вычислить: $\mathrm{cov}(XY)==-\dfrac{35}{12}$.

Таким образом, $\rho=\dfrac{-35/12}{35/12}=-1$.

Впрочем, это мы могли бы установить и без всяких вычислений в силу свойства 5 коэффициента корреляции, если бы вспомнили, что сумма чисел очков на противоположных гранях равна семи и, значит, $X\equiv 7-Y$

(X и Y связаны линейной зависимостью с отрицательным коэффициентом пропорциональности).

Решение типовых примеров

Пример 6.7. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, ряд распределения которой представлен в таблице.

X	0	1	2	3
P	0,41	0,43	0,11	0,05

В соответствии с определением математического ожидания дискретной случайной величины X

$$M(X)=\sum_{i=0}^{n} x_i p_i = 0\cdot 0{,}41+1\cdot 0{,}43+2\cdot 0{,}11+3\cdot 0{,}05=0{,}8\,.$$

Дисперсию находим по формуле $D(X)=M(X^2)-(MX)^2$. Математическое ожидание квадрата X равно

$$M(X^2)=\sum_{i=0}^{n} x_i^2 p_i = 0^2\cdot 0{,}41+1^2\cdot 0{,}43+2^2\cdot 0{,}11+3^2\cdot 0{,}05=1{,}32\,.$$

Поэтому $D(X) = 1{,}32 - 0{,}8^2 = 0{,}68$.

Наконец, среднее квадратичное отклонение

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}68}\approx 0{,}82\,.$$

Пример 6.7. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X, плотность распределения которой имеет вид

$$p(x)=\begin{cases} 0, & |x|>\pi/2; \\ \cos x/2, & |x|\le \pi/2. \end{cases}$$

В соответствии с определением математического ожидания непрерывной случайной величины X

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}x\cos x dx=0\,.$$

Вычислим теперь дисперсию X: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 p(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}x^2\cos x dx=\frac{\pi^2}{4}-2\approx 0{,}468\,.$

Наконец, $\sigma=\sqrt{DX}=\sqrt{0{,}468}\approx 0{,}684$

7. УСЛОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие условной вероятности, введенное в гл. **3.** Там же было показано, что условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности и так же, как и безусловная вероятность, представляет собой численную меру наступления события *A*, но только при условии, что событие B произошло. Аналогом понятия условной вероятности для двух случайных величин *X* и *Y* является условный закон распределения одной из них, допустим, *X* при условии, что вторая случайная величина Y приняла определенное значение. С помощью условного закона распределения вводят условные числовые характеристики. Именно эти понятия и рассматриваются в настоящей главе.

7.1. Условные распределения

Понятие условного распределения, как обычно, введем только для случаев дискретных и непрерывных случайных величин. В случае двумерной дискретной случайной величины *(X, Y*) будем предполагать для простоты изложения, что множества возможных значений случайных величин *X* и *Y* являются конечными, т.е. координаты *X* и Y принимают значения $x_i, i=\overline{1,n}$, и $y_j, j=\overline{1,m}$, соответственно. В этом случае, как мы знаем, закон распределения двумерного случайного вектора (X, Y) удобно задавать набором вероятностей

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

для всех значений i и j. Напомним, что, зная вероятности p_{ij} нетрудно найти законы распределений каждой из координат по формулам

$$p_{X_i}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\ ,\ p_{Y_j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\ .$$

Определение 7.1. Для двумерной дискретной случайной величины (*X, Y*) ***условной вероятностью*** $\pi_{ij}, i=\overline{1,n}$,

$j=\overline{1,m}$, того, что случайная величина X примет значение x_i при условии $Y=y_j$, называют условную вероятность события $\{X=x_i\}$ при условии события $\{Y=y_j\}$, т.е.

$$\pi_{ij}=P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{Y_j}} \qquad (7.1)$$

При каждом j, $j=\overline{1,m}$, набор вероятностей $\pi_{ij},i=\overline{1,n}$ определяет, с какими вероятностями случайная величина X принимает различные значения x_i -, если известно, что случайная величина Y приняла значение y_j. Иными словами, набор вероятностей $\pi_{ij},i=\overline{1,n}$, характеризует ***условное распределение*** дискретной случайной величины X при условии $Y=y_j$. Обычно условное распределение дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y примет все возможные значения, задают с помощью табл. 7.1. Элементы π_{ij} табл. 7.1 получают из элементов табл. 5.1, используя формулу $\pi_{ij}=\dfrac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$. Очевидно, что, наоборот, элементы табл. 5.1 можно выразить через элементы табл. 7.1 с помощью соотношения $p_{ij}=\pi_{ij}p_{Y_j}$

Для проверки правильности составления табл. 7.1 рекомендуется просуммировать π_{ij} по столбцам. Сумма элементов последней строки должна быть равна 1.

Таблица 7.1

X	Y					
	y_1	y_1 y_2	y_2 …	… y_m	y_1 P_X	y_1
x_1	x_1 p_{11}	p_{11} p_{12}	p_{12} …	… p_{1m}	p_{X1}	p_{X1}
…	…	… …	… …	… …	…	…
x_n	x_1 p_{11}	p_{n1} p_{11}	p_{n2} …	… p_{11}	p_{nm} p_{Xn}	p_{Xn}
P_Y	x_1 p_{Y1}	p_{Y2}	p_{Y2} …	p_{Ym}	p_{Ym}	

Аналогично определяют условную вероятность π_{ij}^* того, что случайная величина Y примет значение y_j при условии

$X = x_i$:

$$\pi_{ij}^* = P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{X_i}}.$$

Пример 7.1. Условное распределение случайной величины X (числа очков выпавших на верхней грани игральной кости, при условии $Y = y_j$ (числа очков, выпавших на нижней грани игральной кости), $j = \overline{1,6}$, представлено в табл. 7.2. Действительно, если, например, на нижней грани выпало одно очко, то на верхней грани может выпасть только шесть очков ($\pi_{61} = 1$).

Таблица 7.2

P_X

X	Y						
	1	2	3	4	5	6	P_X
1	0	0	0	0	0	1	1/6
2	0	0	0	0	1	0	1/6
3	0	0	0	1	0	0	1/6
4	0	0	1	0	0	0	1/6
5	0	1	0	0	0	0	1/6
6	1	0	0	0	0	0	1/6
P_Y	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

В общем случае (т.е. когда X и Y не обязательно дискретные случайные величины) хотелось бы ввести условную функцию распределения случайной величины X при условии $Y = y$ по формуле

$$F_X(x \mid Y = y) = \frac{P\{X < x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}. \tag{7.2}$$

Однако это не всегда возможно (например, для непрерывной случайной величины Y событие $\{Y = y\}$ имеет нулевую вероятность, т.е. $\mathrm{P}\{Y = y\} = 0$). Поэтому воспользуемся предельным переходом, рассматривая вместо события $\{Y = y\}$ событие $\{y \le Y < y + \Delta\}$ и устремляя Δ к нулю.

Ограничимся случаем, когда двумерный случайный вектор

(X, Y) имеет непрерывную совместную плотность распределения *p(x,y)*, а следовательно , и маргинальные плотности распределения

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \qquad \text{и} \qquad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx,$$

которые также будем считать непрерывными.

Таким образом, по определению, имеем

$$F_X(x \mid Y = y) = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p(u,y)du. \tag{7.3}$$

При сделанных предположениях о непрерывности случайного вектора *(X,* У) условная функция распределения $F_X(x \mid Y = y)$ имеет производную по *x*, т.е. существует условная плотность распределения случайной величины *X* при условии $Y = y$:

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}. \tag{7.4}$$

Аналогично определяют условную функцию распределения $F_Y(y \mid X = x)$ и условную плотность распределения $p_Y(y \mid X = x)$ случайной величины *Y* при условии $X = x$:

$$F_Y(y \mid X = x) = \frac{1}{p_X(x)} \int_{-\infty}^{y} p(x,v)dv, \qquad p_Y(y \mid X = x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}.$$

Для краткости далее вместо $p_X(x \mid Y = y)$ и $p_Y(y \mid X = x)$ будем писать $p_X(x \mid y)$ и $p_Y(y \mid x)$.

Итак, для непрерывного случайного вектора (*X*, *Y*) мы пришли к следующему определению условной плотности распределения.

Определение7.2. ***Условной плотностью распределения*** случайной величины *X*, являющейся координатой двумерного случайного вектора (*X, Y*), при условии, что другая его координата приняла некоторое фиксированное значение y, т.е. $Y = y$, называют функцию $p_X(x \mid y)$, определяемую соотношением

$$p_X(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}. \qquad (7.5)$$

Аналогично определяют условную плотность распределения $p_Y(y \mid x)$ координаты Y при условии $X = x$

$$p_Y(y \mid x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}\ . \qquad (7.6)$$

Введенные понятия — условное распределение (дискретной случайной величины), условная функция распределения и условная плотность распределения (для непрерывных случайных величин) — называют ***условными законами распределения.***

Для проверки независимости случайных величин часто удобно пользоваться следующим критерием.

Критерий независимости случайных величин X **и** Y. Случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда условное распределение (функция распределения, плотность распределения) случайной величины X при условии $Y = y$ совпадает с безусловным распределением (функцией распределения, плотностью распределения) случайной величины X.

В частности, дискретные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда все условные вероятности

$$\pi_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\}$$

совпадают с безусловными вероятностями

$$p_{X_i} = P\{X = x_i\},$$

т.е. все столбцы табл. 7.1 совпадают с последним.

7.2. Условные числовые характеристики

Рассмотрим двумерную случайную величину (*X, Y*). В соответствии с результатами предыдущего параграфа можно определить условное распределение случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла определенное значение у. Поскольку условное распределение обладает всеми свойствами обычного (безусловного) распределения, то по нему можно определить математическое ожидание, дисперсию и другие числовые характеристики, которые естественно назвать условными. Начнем со случая дискретной случайной величины *(X, Y*). Пусть случайная величина X принимает значения $x_1,\ldots,x_n$ случайная величина Y — значения $y_1,\ldots,y_m$ и пусть

$$\pi_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Y_{ji}}},$$

$$i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,m}$$

условные вероятности случайной величине X принять значение x_i при условии $Y = y_j$.

Определение 7.3. Для дискретной двумерной случайной величины (*X*, *Y*) ***значением*** $M(X \mid Y = y_j)$ ***условного математического ожидания*** дискретной случайной величины X при условии $Y = y_j$, называют число

$$M(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_{ij} .$$

Далее для краткости будем писать $M(X \mid y_j)$ вместо $M(X \mid Y = y_j)$. По аналогии с (безусловным) математическим ожиданием *M(X)* случайной величины X значение $M(X \mid y_j)$ условного математического ожидания при условии $Y = y_j$ задает „среднее" значение случайной величины X, но при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j.

Таким же образом интерпретируют значение $M(Y \mid X = x_i)$ условного математического ожидания случайной величины *Y* при условия $X = x_i$.

Согласно определению 7.3, значение $M(X \mid y_j)$ условного математического ожидания зависит от значения y_j случайной величины *Y*, и только от него. Вспоминая понятие функции от случайной величины, приходим к следующему определению условного математического ожидания.

Определение 7.4. ***Условным математическим ожиданием*** *M*(*X*|*Y*) дискретной случайной величины *X* относительно дискретной случайной величины *Y* называют функцию *M(X|Y)=g(Y)* от случайной величины *Y*, где область определения функции *g(y)* совпадает с множеством значений $y_1, \ldots, y_m$ случайной величины *Y*, а каждому значению y_j аргумента *y* поставлено в соответствие число $g(y_j) = M(X \mid y_j)$.

Подчеркнем еще раз, что условное математическое ожидание *M*(*X*|*Y*) является функцией от случайной величины, т.е. также случайной величиной.

Приведем примеры.

Пример 7.1. Пусть X_1 и X_2— числа успехов в первом и втором испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха *p*. Найдем М($X_1 \mid X_2$).

$$M(X_1 \mid 0) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad M(X_1 \mid 1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Таким образом, значения М(X_1|0) и М(X_1|1). условного математического ожидания совпадают для обоих значений 0 и 1 случайной величины X_2 и равны *p*. Поэтому

$$M(X_1 \mid X_2) \equiv p.$$

Пример 7.2. Найдем условное математическое ожидание *M*(*X*|*Y*) случайной величины *X* — числа очков, выпавших на верхней грани игральной кости, относительно случайной величины Y — числа очков, выпавших на нижней грани (см. пример 7.2).

$$M(X\,|\,1)=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 1=6,$$

$$M(X\,|\,2)=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 0=5,$$

....

$$M(X\,|\,6)=1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 0=1.$$

Полученный результат в терминах условного математического ожидания можно записать в виде $M(X|Y) = 7\text{-}Y$.

Определение 7.5. Для непрерывной двумерной случайной величины (X, У) значением $M(X|Y), Y=y)$ ***условного математического ожидания*** непрерывной случайной величины X при условии $Y=y$ называют число

$$M(X\,|\,Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x\,|\,y)dx\,, \text{ где } \quad p_X(x\,|\,y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

является условной плотностью распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

Определение 7.6. Для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) ***условным математическим ожиданием*** $M(X|Y)$ непрерывной случайной величины X относительно случайной величины Y называют функцию $g(Y) = M(X|Y)$ от случайной величины Y, принимающую значение $g(y) = M(X|y)$ при $Y = y$.

Определение 7.7. Функцию $g(y)$ называют ***функцией регрессии***, или просто ***регрессией***, случайной величины X на случайную величину Y, а ее график — ***линией регрессии*** случайной величины X на случайную величину Y, или просто X на Y.

Линия регрессии графически изображает зависимость „в среднем" случайной величины X от значения случайной величины Y. Совершенно аналогично определяют значение $M(Y|x)$ условного математического ожидания случайной величины Y при условии $X=x$ и условное математическое ожидание $M(Y|X) = h(X)$. При этом функцию $h(x)$ называют функцией регрессии, или просто регрессией, случайной величины Y на случайную величину X, а ее график — линией регрессии Y на X. Линия регрессии Y на X графически изображает зависимость среднем" случайной величины Y от значения случайной величины X.

8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С самого начала изучения курса теории вероятностей мы говорили о том, что практическое применение методов этой математической дисциплины основывается на законе предельного постоянства частоты события, установленном эмпирически. Согласно этому закону, если один и тот же опыт повторяется многократно, то частота появления конкретного случайного события теряет свойства случайности и приближается к некоторому пределу, который в соответствии со статистическим определением вероятности и называют вероятностью. Однако для того чтобы теория согласовывалась с практикой, при аксиоматическом определении вероятности, которое мы использовали, этот закон предельного постоянства частоты должен быть обоснован теоретически. Иначе говоря, он должен быть сформулирован и доказан в виде одной или нескольких теорем. В теории вероятностей теоремы такого типа обычно называют различными формами закона больших чисел. В настоящей главе мы докажем некоторые формы этого закона, которые, в частности, поясняют смысл математического ожидания случайной величины, и то, почему его называют также средним значением.

8.1. Сходимость последовательности случайных величин

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ представляет собой последовательность случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве. Опишем типы сходимости последовательности $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ к некоторой случайной величине X. Сразу же отметим, что естественно все определения сходимости вводить таким образом, чтобы сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ к случайной величине X была эквивалентна сходимости последовательности $Y_1 = X_1 - X, Y_2 = X_2 - X, ..., Y_n = X_n - X, ...$ случайных величин к нулю, т.е. к случайной величине, принимающей всего одно значение 0. Поэтому далее мы будем говорить только о сходимости последовательности $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ к нулю. Поскольку каждая из случайных величин X_i представляет собой функцию, заданную на пространстве элементарных исходов Ω, и существуют разные определения сходимости функций, то можно ввести и различные определения сходимости последовательности случайных величин.

Определение 8.1. Если последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ случайных величин удовлетворяет условию $P(A) = 1$, то говорят о сходимости этой последовательности *с* вероятностью 1, или почти наверное**.**

Сходимость к нулю с вероятностью 1 записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{П.Н.} 0 .$$

В дальнейшем мы в основном будем использовать ***сходимость по вероятности.***

Определение 8.2. Если последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ случайных величин для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n| < \varepsilon\} = 1,$$

то говорят о сходимости этой последовательности по вероятности. Сходимость к нулю по вероятности записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 .$$

Смысл сходимости по вероятности заключается в том, что вероятность нарушения неравенства $|X_n| < \varepsilon$ при увеличении n становится сколь угодно малой.

Наконец, во многих приложениях теории вероятностей важную роль играет сходимость в среднем квадратичном.

Определение 8.3. Если последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ случайных величин удовлетворяет условию

$\lim\limits_{n\to\infty} M(X_n^2) = 0$, то говорят о сходимости этой последовательности в среднем квадратичном. Сходимость к нулю в среднем квадратичном записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{с.к.} 0.$$

8.2. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел

Прежде чем приступить к рассмотрению закона больших чисел, рассмотрим два неравенства Чебышева. Заметим, что неравенства Чебышева представляют и самостоятельный интерес, поскольку в современной теории вероятностей широко используются неравенства такого типа.

Теорема 8.1. Для каждой неотрицательной случайной величины *X,* имеющей математическое ожидание *M(X)*, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{MX}{\varepsilon}$, **называемое *первым неравенством Чебышева.***

Пример 8.1. Пусть X — время опоздания студента на лекцию, причем известно, что $M(X) = 1$ мин. Воспользовавшись первым неравенством Чебышева, оценим вероятность $P\{X \geq 5\}$ того, что студент опоздает не менее, чем на 5 мин. Имеем

$$P\{X \geq 5\} \leq \frac{MX}{5} = 0,2.$$

Таким образом, искомая вероятность не более 0,2, т.е. в среднем из каждых пяти студентов опаздывает, по крайней мере, на 5 мин не более чем один студент.

Теорема 8.2. Для каждой случайной величины *X,* имеющей дисперсию $D(X)=\sigma^2$, при любом ε > 0 справедливо ***второе неравенство Чебышева***

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Пример 8.2. Пусть в условиях предыдущего примера известно дополнительно, что $\sigma=\sqrt{D(X)}=1$. Оценим минимальное значение x_0, при котором вероятность опоздания студента на время не менее x_0 не превышает заданного значения $P_з$ = 0,1.

Для решения поставленной задачи воспользуемся вторым неравенством Чебышева. Тогда

$$P_з\leq P\{X\geq x_0\}=P\{X-MX\geq x_0-MX\}\leq\frac{\sigma^2}{(x_0-MX)^2}.$$

Значит,

$$(x_0-MX)^2\leq\frac{\sigma^2}{P_з}\quad и\quad x_0\leq MX+\sqrt{\frac{\sigma^2}{P_з}}.$$

Подставляя конкретные значения, имеем

$$x_0\leq 1+\sqrt{\frac{1}{0,1}}\approx 4,16.$$

Таким образом, вероятность опоздания студента на время более 4,16 мин не более 0,1.Сравнивая полученный результат с результатом примера 8.1, видим, что дополнительная информация о дисперсии времени опоздания позволяет дать более точную оценку искомой вероятности.

Определение 8.5. Последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел (слабому)****,* если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Иными словами, выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость средних арифметических случайных величин: при большом числе испытаний они практически перестают быть случайными и совпадают со своими средними значениями. Очевидно, что последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ удовлетворяет закону больших чисел тогда и только тогда, когда среднее арифметическое случайных величин $X_1 - m_1, X_2 - m_2, ..., X_n - m_n, ...$ сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 8.3. Если последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ *независимых случайных величин* такова, что существуют $M(X_i) = m_i$ и $D(X_i) = \sigma_i^2$, причем дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leq C < +\infty$), то для последовательности $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ выполнен закон больших чисел. При этом говорят также, что к последовательности $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ случайных величин применим ***закон больших чисел в форме Чебышева.***

Следствие 8.1. Если случайные величины X_i, *i*= 1,2,..., в условиях теоремы 8.3 являются также одинаково распределенными (в этом случае $m_i = m$ и $\sigma_i^2 = \sigma^2$), то последовательность $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ случайных величин удовлетворяет закону больших чисел в следующей форме: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$.

Теорема 8.4. Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов $r_n = \dfrac{Y_n}{n}$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|r_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Обозначим X_i число успехов в i-м испытании Бернулли. Тогда частоту успехов в n испытаниях можно определить в виде

$$r_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \text{ причем } MX_i = p \quad \text{и} \quad D(X_i) = pq.$$

Значит, выполняются все условия следствия 8.1, из которого вытекает утверждение теоремы. Теорему 8.4 называют также ***теоремой Бернулли***, или ***законом больших чисел в форме Бернулли***. Из хода доказательства теоремы 9.4 видно, что закон больших чисел в форме Бернулли является частным случаем закона больших чисел в форме Чебышев.

9. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика занимается разработкой методов сбора, описания и обработки опытных данных, т.е. результатов наблюдений, с целью получения научных и практических выводов.

9.1. Выборочный метод. Основные понятия

Статистической совокупностью называется множество однородных объектов, объединенных по некоторому общему отличительному признаку. Примеры статистических совокупностей: множество рабочих данного цеха при изучении вопроса о количестве выпускаемой продукции, множество населения данной страны при исследовании ее трудовых ресурсов. Отличительные признаки: производительность труда в первом случае, возрастной состав населения во втором.

Пусть требуется изучить некоторый признак статистической совокупности. Для этого можно провести сплошное обследование. Но если число объектов достаточно велико, то осуществить указанное обследование не представляется возможным. Если же изучение связано с уничтожением объекта (например, при определении продолжительности времени работы электронного оборудования) или с большими материальными затратами, то сплошное обследование не имеет смысла. Вследствие этого для изучения интересующего признака применяется выборочный метод. Сущность этого метода заключается в том, что обследованию подвергаются не все объекты совокупности, а только некоторая их часть, случайно выбранная из данной совокупности; выводы, полученные при изучении этой части, распространяются на всю совокупность объектов.

Введем основные определения и понятия, связанные с выборочным методом.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, подлежащих изучению. ***Выборочной совокупностью,*** или ***выборкой,*** называется совокупность объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности. ***Объемом*** совокупности (генеральной или выборочной) называется число ее объектов. Например, если из 10 000 изготовленных деталей для обследования отобрано 100, то объем генеральной совокупности N = 10 000, объем выборки n = 100. Выборка бывает ***повторной*** (с возвращением исследуемого объекта в генеральную совокупность) и ***бесповторной*** (без указанного возвращения). На практике чаще используется бесповторная выборка. Выборка должна быть ***репрезентативной (представительной),*** т.е. такой, по которой можно уверенно судить об интересующем признаке всей генеральной совокупности. Выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайным образом.

При изучении некоторого признака выборочной совокупности производятся испытания (наблюдения). Пусть посредством независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, получены следующие числовые значения: $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ где n - объем выборки. Расположим эти значения в порядке их возрастания:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n) \tag{9.1}$$

Последовательность наблюдаемых значений x_i $(i=1,2 \ldots, n)$ записанных в возрастающем порядке (9.1), называется ***дискретным вариационным рядом***, а сами эти значения x_i называют ***вариантами***. Среди вариант могут оказаться равные, тогда дискретный вариационный ряд можно записать так:

$$\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_k \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{matrix} \tag{9.2}$$

где n_i - частота появления значения x_i, причем

$$n_1+n_2+\ldots+n_k = n, \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i = n \tag{9.3}$$

Относительной частотой ω_i варианты x_i называется отношение ее частоты к объему выборки:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n} \tag{9.4}$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i / n = 1, \qquad \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1 \tag{9.5}$$

т.е. сумма относительных частот всех вариантов равна 1.

9.2. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма

Статистическим распределением выборки называется соответствие между вариантами и их частотами (или относительными частотами). Статистическое распределение может быть задано, например, с помощью таблицы, в которой указаны варианты и соответствующие им частоты.

Пример.

Задано распределение частот выборки объема $n = 60$:

x_i	4	10	16	20	24	30
n_i	15	18	6	4	5	12

Найти распределение относительных частот.

Применяя формулу (9.4), вычисляем относительные частоты: $\omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$; $\omega_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$;

$$\omega_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}; \quad \omega_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15};$$

$$\omega_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}; \quad \omega_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, распределение относительных частот определяется таблицей

x_i	4	10	16	20	24	30
ω_i	1/4	3/10	1/10	1/15	1/12	1/5

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i = 1/4 + 3/10 + 1/10 + 1/15 + 1/12 + 1/5 = 1$$

В целях наглядности статистическое распределение изображается графически. Если статистическое распределение задано перечнем вариант x_i и соответствующих частот n_i, то на оси абсцисс откладывают варианты x_i на оси ординат – частоты n_i строят точки $M_1(x_1, n_1), M_2(x_2, n_2), \ldots, M_k(x_k, n_k)$ и последовательно соединяют их отрезками прямых; полученная ломаная называется ***полигоном частот***. Аналогично строится полигон относительных частот, т.е. ломаная, отрезки которой последовательно соединяют точки $M_1(x_1, \omega_1), M_2(x_2, \omega_2), \ldots, M_k(x_k, \omega_k)$, где ω_i - относительная частота x_i. На рис. 9.1 изображен полигон частот распределения, указанного в примере. Кроме дискретных вариационных рядов рассматриваются интервальные вариационные ряды, в которых значения признака могут меняться непрерывно. Примерами непрерывных случайных величин, валов, являются: урожай какой-либо зерновой культуры и др.

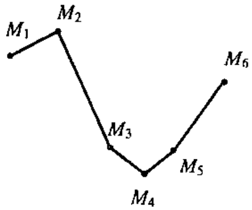


Рис.9.1

Пусть имеются результаты измерений непрерывной случайной величины X, для которой a и b - соответственно наименьшее и наибольшее значение. Отрезок $[a,b]$ разобьем на k элементарных отрезков. Обозначим через n_i число значений величины X, принадлежащих интервалу (x_{i-1}, x_i) Построим таблицу. Эта таблица называется ***интервальным вариационным рядом***. Относительной частотой соответствующей i-му интервалу, называется отношение частоты n_i к объему выборки n , где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} n_i / n = 1$

Значения признака	*Частота*
(x_0, x_1)	n_1
(x_1, x_2)	n_2
…	…
(x_{k-1}, x_k)	n_k
Сумма	n (объем выборки)

Разности $x_1 - x_0, x_2 - x_1, .., x_k - x_{k-1}$,называются ***интервальными разностями***. Разность между наибольшим и наименьшим значением признаках X , т.е. $x_к$-x_0 (или b-a), называется ***размахом вариации***. Плотностью распределения частот на интервале (x_{i-1}, x_i) называется частное

$$n_i /(x_i - x_{i-1}) \quad (i=1,2,...k) \tag{9.6}$$

Интервальный вариационный ряд будет наиболее простым, когда все интервальные разности равны между собой, т.е.$x_i - x_{i-1} = h \ (i = 1,2, .., k)$, плотность распределения частот на i-м интервале в этом случае равна n_i /h_i.Если статистическое распределение задано перечнем интервалов и соответствующих им частот, то строят гистограмму частот.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $h_i = x_i - x_{i-1}$ и высотами $\frac{n_i}{h_i}$. *В* случае равенства интервальных разностей все прямоугольники имеют одно и то же основание h, их высоты равны $\frac{n_i}{h}$. На оси абсцисс откладывают частичные интервалы длины h, над i-м интервалом строят прямоугольник высоты $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Отметим, что площадь S гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки. Действительно, если s_i – площадь i-го прямоугольника, то

$$s_i = h_i \frac{n_i}{h_i} = n_{i,} \ S = \sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} n_i = n \, .$$

Частичный интервал длины $h=4$	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
Сумма частот вариант частичного интервала n_i	10	20	50	12	8
Плотность частоты n_i/h	2,5	5	12,5	3	2

На рис. *9.2* изображена гистограмма частот распределения объема $n = 100$, указанного в таблице

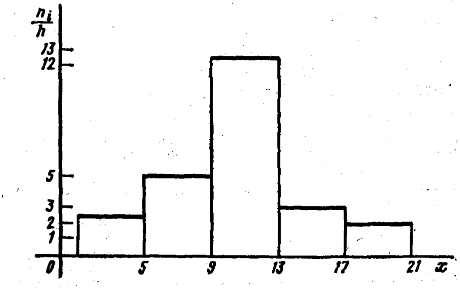


Рис. 9.2

Аналогично строится гистограмма относительных частот, т.е. ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны h_i (h_i – длина каждого частичного интервала), а высоты - ω_i / h_i (это отношение

называется плотностью относительной частоты). Очевидно, площадь s гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот, т.е. единице. В самом деле, если s_i - площадь i-го прямоугольника, то

$$s_i = h_i \frac{\omega_i}{h_i} = \omega_i, S = \sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1.$$

9.3. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения, или ***функцией распределения выборки,*** называется функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Обозначим эмпирическую функцию распределения через $F^*(x)$; если n_x - число вариант, меньших *x*, *n* - объем выборки, то по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}. \tag{9.7}$$

Из определения эмпирической функции следует, что $F^*(x)$ обладает следющими свойствами: 1)значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку [0,1]; 2) $F^*(x)$ – неубывающая функция; 3) если *a*- наименьшая , *b*- наибольшая варианта , то $F^*(x)=0$ при $x \le a$; $F^*(x) = 1$ при $x > b$. Функцию $F(x)$ распределения генеральной совокупности, в отличие от эмпирической функции $F^*(x)$ распределения выборки, называют ***теоретической функцией распределения***. Различие между эмпирической и теоретической функцией распределения состоит в том, что первая определяет относительную частоту события $X < x$, а вторая - вероятность того же события.

Пример.

Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки :

варианты x_i	*6*	*8*	*12*	*15*
частоты n_i	*2*	*3*	*10*	*5*

Объем выборки $\sum_{i=1}^{4} n_i = 2 + 3 + 10 + 5 = 20$. Наименьшая варианта $x_1 = 6$, поэтому $F^*(x) = 0$, если $x \leq 6$. Значение $X < 8$, т.е. $x_1 = 6$, *наблюдалось 2 раза*, поэтому $F^*(x) = \frac{2}{20} = 0,1$, если $6 < x \leq 8$. Значения $X < 12$, т.е. $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, наблюдались $2 + 3 = 5$ раз, поэтому $F^*(x) = 5/20 = 0,25$, если $8 < x \leq 12$.

Значения $X < 15$, т.е. $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = 12$, наблюдались $2 + 3 + 10 = 15$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{15}{20} = 0,75$, если $12 < x \leq 15$.

Поскольку $x_4 = 15$ - наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$, если $x > 15$. Итак, искомая эмпирическая функция определяется формулами

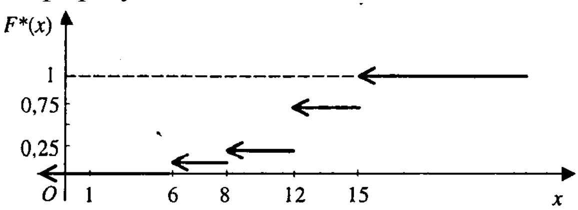


Рис. 9.3

9.4. Оценка параметров по выборке. Понятие несмещенности , состоятельности и эффективности оценки

Пусть случайная величина X имеет распределение $F(x,\alpha)$, содержащее неизвестный параметр. Требуется оценить параметр α , т.е. приближенно определить его значение по некоторой выборке $x_1, \ldots, x_n$. Оценку параметра *A*, обозначим через $\tilde{\alpha}$; очевидно, $\tilde{\alpha}$ зависит от $x_1, \ldots, x_n$, т.е.

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{9.8}$$

Отметим, что $\tilde{\alpha}$ является случайной величиной, так как в i- й серии из n испытаний $\tilde{\alpha}$ принимает некоторое значение $\tilde{\alpha}_i$.

Следовательно, можно говорить о распределении этой величины и о числовых характеристиках распределения.

Чтобы оценка $\tilde{\alpha}$ неизвестного параметра A имела практическую ценность, к ней предъявляются некоторые требования.

Оценка параметра α называется ***несмещенной,*** если математическое ожидание $\tilde{\alpha}$ равно α , т.е.

$$M(\tilde{\alpha}) = \alpha, \tag{9.9}$$

и ***смещенной***, если

$$M(\tilde{\alpha}) \neq \alpha. \tag{9.10}$$

Оценка $\tilde{\alpha}$ параметра α называется состоятельной, если при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{\alpha} - \alpha| < \varepsilon) = 1 \tag{9.11}$$

Очевидно равенство (9.11) выполняется, если

$$\lim_{n\to\infty} D(\tilde{\alpha}) = 0 \tag{9.12}$$

Это следует из неравенства Чебышева (см. *(9.1))*.

Оценка $\tilde{\alpha}$ называется эффективной, если при заданном n она имеет ***наименьшую дисперсию,*** т.е.

$$\boldsymbol{D(\tilde{\alpha}) = D_{min.}} \tag{9.13}$$

Желательно, чтобы полученные из опыта оценки характеристик генеральной совокупности удовлетворяли требованиям несмещенности, состоятельности и эффективности.

9.5. Генеральная средняя. Выборочная средняя

Пусть требуется изучить дискретную генеральную совокупность относительно количественного признака X.

Генеральной средней называется среднее арифметическое значений признака X генеральной совокупности. Обозначим генеральную среднюю через $\mathbf{x_Г}$. Если все значения $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_N}$ признака генеральной совокупности объема N являются различными, то

$$x_Г = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}, \quad x_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (9.14)$$

Поскольку признак X можно рассматривать как случайную величину, возможные значения которой $x_1, x_2, .., x_N$ имеют одну и ту же вероятность $p = 1: N$, математическое ожидание этой величины определяется формулой

$$M(X) = x_1 / N + ... + x_N / N = (1/N)\sum_{i=1}^{N} x_i = x_Г \qquad (9.15)$$

Если значения $x_1, x_2, .., x_m$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} N_i = N$, то

$$x_Г = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + .. + x_m N_m}{N}, \qquad x_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} x_i N_i \qquad (9.16)$$

Отметим, что формула (9.15) справедлива и для этого случая. При непрерывном распределении признака X по определению полагают

$$x_Г = M(X). \qquad (9.17)$$

Предположим, что для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X из нее извлечена выборка объема n.

Выборочной средней $x_в$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности. Если все значения $x_1, x_2, .., x_n$ различны, то

$$x_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \qquad x_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (9.18)$$

Если значения $x_1, x_2, .., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, .., n_k$, причем $n_1 + n_2 + .. + n_k = n$, то

$$x_в = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} \qquad x_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \tag{9.19}$$

Так как каждой выборке объема n, извлеченной из генеральной совокупности, соответствует некоторое число $x_в$, определяемое формулой(9.18) или (9.19), то выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину X_B.

Выборочную среднюю принимают в качестве оценки генеральной средней. Покажем, что эта оценка является несмещенной и состоятельной, т.е. $M(X_B) = x_Г$, $\lim_{n\to\infty} P(|X_в - x_Г| < \varepsilon) = 1$. Не уменьшая общности рассуждений, предполагаем, что все значения $x_1, x_2, .., x_n$ различны. Будем рассматривать эти значения как независимые, одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, .., X_n$; они имеют одинаковые числовые характеристики, в частности, одно и то же математическое ожидание *a.* Учитывая свойства математического ожидания, получаем

$$M(X_B) = M(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}) = a \tag{9.20}$$

$$M(X_B) = a \tag{9.21}$$

Поскольку каждая из величин $X_1, X_2, .., X_n$ имеет то же распределение, что и генеральная совокупность, математическое ожидание признака X генеральной совокупности равно a, т.е. $M(X) = a$. Из формул (9.15), (9.20) и (9.21) следует, что

$$M(X_B) = x_Г \tag{9.22}$$

Это равенство означает, что выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней. Предполагая, что дисперсии случайных величин $X_1, X_2, .., X_n$ ограничены, на основании следствия теоремы Чебышева имеем

$\lim_{n\to\infty} P(|X_в - a| < \varepsilon) = 1$, или $\lim_{n\to\infty} P(|X_в - x_Г| < \varepsilon) = 1$.

так как $a = x_Г$ *в* силу равенств (9.15) и (9.21). Следовательно, при неограниченном увеличении объема выборки выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней. Последнее равенство означает, что выборочная средняя будет состоятельной оценкой генеральной средней.

Из предыдущего следует , что выборочные средние, найденные по нескольким выборкам достаточно большого объема из некоторой генеральной совокупности, приближенно равны между собой. Это утверждение выражает свойство устойчивости выборочных средних.

9.6. Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия. Эмпирическая дисперсия

Для характеристики рассеяния значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения служат понятия генеральной дисперсии и генерального среднего квадратического отклонения.

Генеральной дисперсией $D_Г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений признака X генеральной совокупности от их среднего значения $x_Г$. Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N являются различными, то

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_Г)^2 \qquad (9.23)$$

Если значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$ причем $N_1 + N_2 + \ldots +, N_k = N$, то

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}N_i(x_i - x_Г)^2 \qquad (9.24)$$

Генеральным средним квадратическим отклонением $\sigma_Г$ называется корень квадратный из генеральной дисперсии, т.е.

$$\sigma_Г = \sqrt{D_{Г.}} \qquad (9.25)$$

Для характеристики рассеяния значений количественного признака выборки вокруг среднего значения $x_в$, вводят понятия выборочной дисперсии и выборочного среднего квадратического отклонения

Выборочной дисперсией D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений выборки от их среднего значения $\boldsymbol{x}_{\text{в}}$.

Если все значения $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, признака выборки объема n различны, то

$$D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_B)^2 \tag{9.26}$$

Если значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - x_B)^2 \tag{9.27}$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}_{\text{в}}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{в}} = \sqrt{\boldsymbol{D}_{\text{в.}}} \tag{9.28}$$

Для вычисления выборочной дисперсии можно пользоваться формуло

$$D_B = \boldsymbol{x}_{\text{в}}^2 - (\boldsymbol{x}_{\text{в}})^2, \tag{9.29}$$

где

$$x_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \qquad x_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 \tag{9.30}$$

Докажем формулу (9.29). Из формулы (9.27), получаем

$$\text{D}_\text{B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - x_B)^2 = x_B^2 - (x_B)^2$$

Из формулы (9.24) аналогично находим $D_\Gamma = x_\Gamma^2 - (x_\Gamma)^2$.

Следовательно, для обоих случаев

$$D = x - (x)^2 \tag{9.31}$$

где x^2 – среднее квадратов значение; (x^2) – квадрат общей средней.

Можно доказать, что

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г \qquad (9.32)$$

Так как $M(D_B) \neq D_Г$, то выборочная дисперсия D_B является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_Г$. Чтобы получить несмещенную оценку генеральной дисперсии $D_Г$, вводят понятие так называемой эмпирической (или исправленной) дисперсии s^2.

Эмпирическая, или ***исправленная***, дисперсия s^2 определяется формулой

$$s^2 = \frac{n-1}{n} D_B = \frac{n}{(n-1)n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_B)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_B)^2 \qquad (9.33)$$

Исправленная дисперсия (9.33) является несмешанной оценкой генеральной дисперсии, так как

$$M(s^2) = M\left(\frac{n-1}{n} D_B\right) = \frac{n}{n-1} M(D_B) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_Г = D_Г$$

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности служит «исправленное» среднее квадратическое отклонение, или эмпирический стандарт

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_B)^2} \qquad (9.34)$$

В случае, когда все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, т.е. все $n_i = 1$ и $k = n$, формулы

(9.33) и (9.34) принимают вид

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_B)^2 \qquad (9.35)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_B)^2} \qquad (9.36)$$

9.7. Доверительная вероятность. Доверительный интервал

Оценка, определяемая одним числом, называется ***точечной***. При выборке малого объема точечная оценка может существенно отличаться от истинного значения неизвестного параметра. Вследствие этого пользуются интервальными оценками.

Оценка, определяемая двумя числами – концами интервалов, называется ***интервальной***.

Пусть $\widetilde{\alpha}$ - оценка неизвестного параметра α, полученная по данным выборки. Очевидно оценка тем точнее, чем меньше модуль разности $\widetilde{\alpha} - \alpha$. Если $\delta > 0$ и $|\widetilde{\alpha} - \alpha| < \delta$, то чем меньше δ, тем точнее оценка $\widetilde{\alpha}$; число δ характеризует точность оценки.

Доверительной вероятностью, или ***надежностью***, оценки $\widetilde{\alpha}$ параметра α называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\widetilde{\alpha} - \alpha| < \delta$, т.е.

$$P(|\ \widetilde{\alpha} - \alpha\ | < \delta) = \gamma \qquad (9.37)$$

Обычно надежность γ задается заранее, в качестве γ берут число, близкое к единице. Так как неравенство $|\widetilde{\alpha} - \alpha| < \delta$ равносильно неравенствам $-\delta < \widetilde{\alpha} - \alpha < \delta$ или $\widetilde{\alpha} - \delta < \alpha < \widetilde{\alpha} + \delta$, то формулу (9.37) можно записать в виде

$$P(\widetilde{\alpha} - \delta < \alpha < \widetilde{\alpha} + \delta) = \gamma \qquad (9.38)$$

Эта формула означает следующее: вероятность того, что интервал $(\widetilde{\alpha} - \delta, \widetilde{\alpha} + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр α, равна γ. Интервал $(\widetilde{\alpha} - \delta, \widetilde{\alpha} + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр α с заданной надежностью γ, называется ***доверительным интервалом***. Концы доверительного интервала называют ***доверительными границами***. Доверительные границы являются случайными величинами (они изменяются от выборки к выборке).

Рассмотрим вопрос о построении доверительного интервала для оценки математического ожидания α нормального распределения при известном значении среднего квадратического отклонения σ.

Пусть количественный признак *X* генеральной совокупности имеет нормальное распределение с заданным σ и неизвестным α. Оценим неизвестный параметр α выборочной средней $x_в$; найдем доверительный интервал, покрывающий параметр α с надежностью γ. Так как выборочное среднее $x_в$ меняется от выборки к выборке, его можно рассматривать как случайную величину $x_в$. Выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ также меняются от выборки к выборке. Будем рассматривать их, как одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ (математическое ожидание каждой из этих величин равно α, среднее квадратическое отклонение равно σ). В соответствии с формулами п. 9.3 (см. (9.31) и (9.33)) имеем

$$M(X_в) = \alpha, \quad \sigma(X_в) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{9.39}$$

Потребуем, чтобы

$$P(|X_в - \alpha| < \delta) = \gamma \tag{9.40}$$

Поскольку случайная величина $X_в$ также имеет нормальное распределение, то, применяя формулу (см. п. 9.9)

$P(|X - \alpha| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ к величинам $X_в$ и $\sigma(X_в) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

находим

$$P(|X_в - \alpha| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \tag{9.41}$$

где

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, \tag{9.42}$$

Из последнего равенства определим $\sigma = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и подставим в формулу (9.41):

$$P(|X_в - \alpha| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 2\Phi(t) \tag{9.43}$$

или

$$P(x_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < x_b + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) \ ,$$

где x_B - выборочное среднее.

Поскольку вероятность P задана и равна γ, т.е.

$$P(x_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < x_b + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma, \tag{9.44}$$

то последнее означает, что доверительный интервал

$$(x_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, x_b + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}) \tag{9.45}$$

покрывает неизвестный параметр α с надежностью γ. Из формулы (9.42) находим точность оценки

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \tag{9.46}$$

Отметим, что число t определяется равенством

$$2\Phi(t) = \gamma, \tag{9.47}$$

получающимся из (9.43) и (9.44); значение t находится с поощью таблиц функции Лапласа.

10. ПРОЦЕСС ПУАССОНА. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.

Основные понятия

Практические задачи часто бывают связаны с изучением случайных величин, изменяющихся во времени. Например, помехи радиоприема случайны и зависят от времени, этим же свойством обладают отклонения управляемого объекта от расчетной траектории. Математической абстракцией подобных процессов является понятие случайного процесса или случайной функции *X(t)*. Случайный процесс *X(t)* характеризуется следующими чертами:

1) при каждом значении времени $t = t_0$ определена случайная величина $X(t_0)$ со своим законом распределения $f(x)$. Случайная величина $X(t_0)$ называется сечением случайного процесса $X(t)$ в точке t_0;

2) случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$, как правило, зависимы, в особенности, если t_1 и t_2 близки (т.е. при малых $|t_1 - t_2|$). Если рассмотреть последовательность моментов времени

$$t_1,\ t_2, ..., t_n \quad (|t_i - t_{i-1}| = \Delta) \tag{10.1}$$

и соответствующие им случайные величины

$$X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n) \tag{10.2}$$

- сечения процесса $X(t)$, то можно говорить о совместном распределении этих случайных величин.

Марковские случайные процессы

Марковские случайные процессы характеризуются следующими свойствами: их основные конечномерные функции распределения

$$P(t_n; x_n / t_1, x_1, t_2, x_2, ..., t_{n-1}, x_{n-1}) = P(t_n; x_n / t_{n-1}, x_{n-1}), \tag{11.12}$$

т.е. условное распределение $X(t_n)=x_{n-1}$ и не зависит от остальных условий при любых $t_1,t_2,...,t_{n-2}$. Марковский процесс вполне определяется своей второй конечномерной функцией $F(t_1,t_2;x_1,x_2)$ или первой конечной функцией распределения $F(t_1,x_1)$ совместно с “вероятностями перехода” $P(t_2,x_2/t_1,x_1)$, $t_2>t_1$. Марковский случайный процесс является процессом 2-го порядка.

Процесс Пуассона

Важным частным случаем Марковского процесс является процесс Пуассона. Типичным примером процесса Пуассона служит процесс, описывающий работу телефонной станции; реализация (траектория) такого процесса есть функция, равная количеству вызовов, поступивших на станцию за время *t*. Общий же случай, так же как и приведенный пример, характеризуется тем, что сечения процесса представляют собой дискретные величины, а реализация процесса – неубывающая функция. Кроме условий, которые определяют Марковский процесс, для пуассоновского процесса предполагается выполнение дополнительных условий. А именно, вторая конечномерная функция распределения должна обладать свойствами:

$$P(t_2,x_2/t_1,x_1)=\begin{cases}0, & при \quad x_2<x_1\\ 1-\alpha\cdot\Delta t+o(\Delta t) & при \quad x_2=x_1\\ \alpha\cdot\Delta t+o(\Delta t) & при \quad x_2=x_1+1\\ 0, & при \quad x_2>x_1+1\end{cases} \tag{10.3}$$

Здесь α - некоторая положительная постоянная (параметр распределения Пуассона), $o(\Delta t)$ - бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\Delta t=t_2-t_1$, т.е. $\lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$.

Вероятность $P(t_2,x_2/t_1,x_1)$ можно вычислить в явном виде. А именно, оказывается, что функция $P(t_2, x_2 / t_1, x_1)$ зависит только от ($x_2 - x_1$) и ($t_2 - t_1$), т.е. имеет вид $P(t_2, x_2 / t_1, x_1) = \varphi(k,t)$.

При этом

$$\varphi(k,t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}, \qquad t \geq 0, \; k = 0,1,2... \qquad (10.4)$$

Случайные процессы с независимыми приращениями

Пусть дано однопараметрическое семейство $X(t)$ случайных величин такое, что для любого конечного множества вещественных чисел $t_1 < t_2 < ... < t_n$ приращения $X(t_{k+1}) - X(t_k)$ попарно независимы. Это свойство определяет случайный процесс, который называется ***случайным процессом с независимыми приращениями***. Примером такого процесса является описанный выше пуассоновский процесс.

Определение 6. Случайный процесс с независимыми приращениями называется процессом *со* ***стационарными приращениями****,* если распределение $X(t+s) - X(t)$ зависит только от s и не зависит от *t*.

Случайные процессы со стационарными независимыми приращениями обладают рядом интересных свойств и описывают важные в практическом отношении реальные случайные процессы. Главным свойством процесса с независимыми приращениями являются следующее: пусть числовой интервал (*s*, *s*+*t*) разбит на *n* равных частей точками $t_0 = s < t_1 < t_2 < ... < t_n = s + t$. Рассмотрим случайные величины $X_{k,n} = X(t_k) - X(t_{k-1})$. Приращение случайного процесса $X(t+s) - X(t)$ является суммой *n* независимых случайных величин $X_{k,n}$: $X(t+s) - X(t) = \sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$. (10.5)

Если процесс стационарен, то все случайные величины $X_{k,n}$ распределены одинаково.

11. ПОНЯТИЕ О НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Основные понятия

В том случае, когда гипотеза линейной зависимости функции отклика y от фактора x не выполняется или когда при графическом изображении точек нелинейность явно просматривается «на глаз», нужно использовать нелинейную формулу парной зависимости. Следует только помнить, что речь идет о зависимости, нелинейной по фактору x. По параметрам зависимость должна оставаться линейной. Модель нелинейной парной регрессии имеет вид

$$y = \beta_0\varphi_0(x) + \beta_1\varphi_1(x) + ... + \beta_m\varphi_m(x), \qquad (11.1)$$

где $\varphi_j(x)$ - заданные функции, β_j - неизвестные ***коэффициенты уравнения регрессии*** *(*параметры модели*)*. Матрицу F с элементами $f_{ij} = \varphi_j(x_i)$, равными значению j-й функции в i-м опыте, называют ***регрессивной матрицей***:

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Оценки параметров модели вычисляются по формуле

$$B = \left(F^T F\right)^{-1} F^T Y, \qquad (11.2)$$

где $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ - матрица-столбец опытных значений функции отклика, n – число опытов, $B = (b_0, b_1, ..., b_m)^T$ - матрица-столбец оценок коэффициентов модели β_j. В результате расчетов получим ***эмпирическое уравнение регрессии***

$$\tilde{y} = b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + ... + b_m\varphi_m(x) \qquad (11.3)$$

Значимость коэффициентов регрессии β_j проверяют по критерию Стьюдента:

$$t = \frac{|b_j|}{s_{b_j}} \geq t_p(n-m-1), \quad (11.4)$$

где $p = 1 - \alpha / 2$ - доверительная вероятность, α - уровень значимости, погрешность коэффициента регрессии

$$s_{b_j} = \sqrt{s_{ост}^2 a_{jj}^{-1}}, \quad (11.5)$$

Остаточная дисперсия

$$s_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{y}(x_i))^2}{n-m-1}, \quad (11.6)$$

a_{jj}^{-1} - элемент матрицы $\left(F^T F\right)^{-1}$.

Доверительный интервал для коэффициентов регрессии:

$$b_j - t_p(n-m-1) \cdot s_{b_j} \leq \beta_j \leq b_j + t_p(n-m-1) \cdot s_{b_j}. \quad (11.7)$$

Если доверительный интервал накрывает нуль, то соответствующий коэффициент считается незначимым.

Для того чтобы выбрать лучшую формулу связи с точки зрения предсказания результатов опытов, необходимо проверить все известные функции $\varphi_j(x)$. Это нереальная задача, поэтому на практике проверяют ряд моделей: $y = \beta_0 + \beta_1 / x$, $y = \beta_0 + \beta_1 e^x$, $y = \beta_0 + \beta_1 \lg x$, $y = \beta_0 + \beta_1 x^n$ и т.д. Выбор оптимальной модели осуществляется по наименьшей остаточной дисперсии. Чаще всего используют ***полиномиальную*** модель регрессии: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots$. (11.8)

При этом проверку начинают с линейной модели, а затем постепенно увеличивают порядок уравнения регрессии. С некоторого момента при повышении порядка остаточная дисперсия вместо того, чтобы уменьшиться, может увеличиваться. Это, как правило, и является условием прекращения счета. Недостатком этого метода является то, что с ростом степени приходится заново вычислять все коэффициенты. Этот недостаток можно устранить, используя ***ортогональные полиномы***. В этом случае аппроксимирующий многочлен строится в виде суммы повышающих степеней $\widetilde{y} = a_0\varphi_0(x) + ... + a_m\varphi_m(x)$, причем добавления нового слагаемого $a_{m+1}\varphi_{m+1}(x)$ не изменяет вычисленных ранее коэффициентов.

На практике при анализе результатов исследований часто имеет место ситуация, когда количественное изменение изучаемого явления (функции отклика) зависит не от одной, а от нескольких причин (факторов). В этом случае модель имеет вид (***модель нелинейной множественной регрессии***)

$$y = \beta_0\varphi_0(\vec{x}) + \beta_1\varphi_1(\vec{x}) + ... + \beta_m\varphi_m(\vec{x}), \qquad (11.9)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ - вектор факторов. Регрессионная матрица будет выглядеть следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_0(\overrightarrow{x_1}) & \varphi_1(\overrightarrow{x_1}) & \cdots & \varphi_m(\overrightarrow{x_1}) \\ \varphi_0(\overrightarrow{x_2}) & \varphi_1(\overrightarrow{x_2}) & \cdots & \varphi_m(\overrightarrow{x_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(\overrightarrow{x_n}) & \varphi_1(\overrightarrow{x_n}) & \cdots & \varphi_m(\overrightarrow{x_n}) \end{pmatrix},$$

где $\overrightarrow{x_i}$ - значение факторов в i-м опыте. Оценки параметров модели (11.9) вычисляются по формуле (11.2). Значимость коэффициентов регрессии определяется по формулам (11.4)-(11.7), где вместо x_i используется $\overrightarrow{x_i}$. Чаще всего множественный нелинейный регрессионный анализ начинают с определения оценок коэффициентов квадратичной модели

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \le j)}}^{k}\beta_{ij}x_i x_j \,. \qquad (11.10)$$

Затем рассматривается кубичная модель и т.д. Степень модели можно повышать до тех пор, пока уменьшается остаточная дисперсия. Для практических целей, как правило, ограничиваются квадратичной формой (11.10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрен теоретический материал и задачи по теории вероятностей, математической статистики.

. Данная работа, которая содержит четкое и краткое изложение теории, большое количество задач и разобранных примеров, существенно восполнит имеющиеся пробелы в учебной литературе по вышеуказанным разделам математики для бакалавров инженерно-технических специальностей втузов

Издание рекомендуется для работы на практических занятиях, при подготовке к контрольным работам, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных заданий по указанным темам. Считаем, что данное пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами учебного материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Значения функции $P(m; \lambda) = \dfrac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	0,9048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007

8										00001
m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	0842	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	0076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	0014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	1032
9	0002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	0O89
16							00002	00005	00014	OO33
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Таблица П.2

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

X	Сотые доли *X*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26348
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566

1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

X	Десятые доли					
	0	2	4	6	8	
3,0	0,00443	00238	00123	00061	00029	
4,0	00013	00006	00002	00001		

Таблица П.3

Значения интеграла Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

X	Сотые доли *X*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327

1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
X	Десятые доли x									
	0	2	4	6	8					
3,0	0,4986	49931	49966	49984	49993					
4,0	49997	49999								

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гусак А.А. Высшая математика: учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. Минск: Изд. Тетрасистем, 2004. Т.2
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 2007.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 2002.
4. Зарубин В.С. Математика в техническом университете. Теория вероятностей / В.С. Зарубин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 1999. Вып. XVI.
5. Катрахова А.А., Купцов В.С., Купцов А.В. Теория вероятностей и элементы математической статистики: учеб. пособие. Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет». 2011.
6. Зубков А.М.. Сборник заданий по теории вероятностей /А.М. Зубков , В.А. Севостьянов , В.М Чистяков .- М. : Лань. 2009.

7. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики. Типовой расчет. М.: Высшая школа . 2007.

8. Битнер Г.Г. Теория вероятностей. : учеб. пособие. Ростов на Дону: Высшее образование. 2012.

9. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Справочное пособие к решению задач по теории вероятностей: учеб. пособие. Минск. 1999.

10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей Е.С. Вентцель .М. .: Наука, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Купцов Валерий Семенович

Спецглавы математики: курс лекций

Часть 1

В авторской редакции

Подписано к изданию 25.10.2017.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп.,14