1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Действия со степенями

Степени чисел имеют следующие основные свойства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$; 5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Корни из чисел обладают свойствами

1) $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$; 2) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; 3) $\sqrt{a^2} = |a|$;

4) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a, b > 0$; 5) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a, b > 0$;

6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, $a > 0$; 7) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$, $a > 0$;

8) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$, $a, b > 0$.

Формулы сокращенного умножения

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Данные формулы можно рассматривать в расширенном смысле. Например, из формул 3 и 4 следует

$$a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right), \; a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2),$$

$$a \pm b = \left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 \mp \sqrt[3]{ab} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right),$$

$$a^6 \pm b^6 = (a^2 \pm b^2)(a^4 \mp a^2b^2 + b^4).$$

Пример 1.1. Вычислите $\left(5\sqrt{3}\right)^2-\sqrt[4]{625}$.

Решение. Так как $625=5^4$, то $\left(5\sqrt{3}\right)^2-\sqrt[4]{625}=75-5=70$.

Ответ: 70.

Пример 1.2. Вычислите $\sqrt[3]{324}\big/\sqrt[3]{12}$.

Решение. Разложим 324 на множители: $324=4\cdot 81=4\cdot 3^4$.

Тогда $\dfrac{\sqrt[3]{324}}{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[3]{\dfrac{4\cdot 3^4}{3\cdot 4}}=3$.

Ответ: 3.

Пример 1.3. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2-9}{x-3}-x-2 \text{ при } x=27.$$

Решение. Упростим заданное выражение:

$$\frac{x^2-9}{x-3}-x-2=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-x-2=x+3-x-2=1.$$

Ответ: 1.

Пример 1.4. Найдите значение выражения

$$\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}-x+5 \text{ при } x=15.$$

Решение. Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}-x+5=\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4}-x+5=x-2-x+5=3.$$

Ответ: 3.

Пример 1.5. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}}{1-a\sqrt{a}}:\dfrac{a+\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}$.

Решение. Воспользовавшись формулами сокращенного умножения, получим

$$\frac{\sqrt{a}}{1-a\sqrt{a}}:\frac{a+\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}}{1-\left(\sqrt{a}\right)^3}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\left(1-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{1-a}.$$

Ответ: $1/(1-a)$.

Задачи.

Вычислите:

1.01. $\sqrt[4]{625\cdot 0{,}0081}$.

1.02. $\sqrt{2^6\cdot 625}$.

1.03. $\sqrt[3]{0{,}125\cdot 64}$.

1.04. $\left(2\cdot 5^{1/2}\right)^2-\sqrt[3]{125}$.

1.05. $81^{\frac{1}{4}}-3\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

1.06. $3\sqrt{2}\cdot 2^{0,5}-\sqrt[4]{16}$.

1.07. $15\cdot 81^{\frac{1}{4}}-19$.

1.08. $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}-36^{\frac{1}{2}}$.

1.09. $25^{\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{32}:\sqrt[4]{2}$.

1.10. $(1/2)^{-2}\cdot\sqrt[3]{27}-16^{\frac{1}{2}}$.

1.11. $\sqrt[4]{0{,}5}\cdot\sqrt[4]{0{,}125}$.

1.12. $\sqrt{125}\cdot 5^{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{216}$.

1.13. $\sqrt[3]{32}:2^{\frac{2}{3}}-\sqrt{121}$.

1.14. $\sqrt[3]{81}-\sqrt{49}\cdot\sqrt[3]{24}$.

1.15. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$ и $\sqrt[4]{10}$.

1.16. Расположите в порядке убывания числа $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ и $\sqrt{3}$.

Упростите выражение:

1.17. $\sqrt[3]{25b^2}\cdot\sqrt[3]{5b^4}$.

1.18. $\sqrt[3]{16ab^{12}}:\sqrt[3]{2a^4b^9}$.

1.19. $\sqrt[5]{\dfrac{n^4}{8m^3}}:\sqrt[5]{\dfrac{4m^2}{n}}$.

1.20. $\sqrt[5]{\dfrac{8c^2}{d}}:\sqrt[5]{\dfrac{d^9}{4c^3}}$.

1.21. $\sqrt[3]{8a^3}-\left(2a+\sqrt[4]{a^2b^8}\right)$, $a>0$.

1.22. $1{,}4a^{1/7}:2a^{8/7}$.

1.23. $\dfrac{\sqrt[3]{a^6b^4}}{\sqrt[3]{b}}-2a^2b$.

1.24. $\left(b^{5/6}\right)^3\cdot\sqrt[4]{b^2}$, $b>0$.

1.25. $\dfrac{\sqrt[4]{y^{10}}}{\left(y^{1/3}\right)^{9/2}}$, $y>0$.

1.26. $\left(n^{1/4}\right)^{4/3}\cdot\sqrt[3]{n^2}$.

1.27. $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}-b^{-2}$.

1.28. $\dfrac{a-b^2}{a-b\sqrt{a}}:\left(\sqrt{a}\right)^{-1}$.

1.29. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}:\left(b-a\right)^{-1}$.

1.30. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\left(\dfrac{a^{-2}b+ab^{-2}}{b-a}\right)^{-1}$.

1.31. $\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)$.

1.32. $\dfrac{a^2-b^2}{a+b-2\sqrt{ab}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

1.33. $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}\cdot\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a+b-\sqrt{ab}}$.

1.34. $\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a+b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\left(\sqrt{ab}\right)^{-1}$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax+b=0$, где a и b –коэффициенты уравнения.

При $a\neq 0$ линейное уравнение имеет единственное решение $x=-b/a$. Если $a=0; b\neq 0$, то уравнение $0\cdot x=-b$ решений не имеет. В случае $a=0$ и $b=0$ имеем уравнение $0\cdot x=0$, у которого множество решений, т.к. любое x является решением этого уравнения.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – коэффициенты уравнения.

Для решения квадратного уравнения необходимо вычислить дискриминант этого уравнения, равный $D=b^2-4ac$.

Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

При $D=0$ квадратное уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_2 = -b/(2a)$. Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет корней на множестве действительных чисел.

Для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с корнями $x_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)/2$ справедлива теорема Виета: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Пример 2.1. Решите уравнение $2x^2 + 5x - 7 = 0$.

Решение. Дискриминант равен $D = 5^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 81$. Следовательно, корни уравнения равны $x_1 = (-5+9)/4 = 1$, $x_2 = (-5-9)/4 = -7/2 = -3{,}5$.

Ответ: 1; –3,5.

Пример 2.2. Решите уравнение $x^2 + 3\left(\sqrt{2-x}\right)^2 - 10 = 0$.

Решение. Область определения рассматриваемого уравнения задается неравенством $x \le 2$. Согласно условию

$$x^2 + 3\left(\sqrt{2-x}\right)^2 - 10 = x^2 + 6 - 3x - 10 = x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Корни полученного уравнения равны $x_1 = (3-5)/2 = -1$, $x_2 = (3+5)/2 = 4$. При этом второй корень не удовлетворяет ограничению $x \le 2$ и должен быть опущен.

Ответ: –1.

Пример 2.3. Решите уравнение $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$.

Решение. Введем переменную $y = x^3$, тогда придем к уравнению $y^2 - 5y + 4 = 0$, корни которого равны $y_1 = (5+3)/2 = 4$; $y_2 = (5-3)/2 = 1$, и исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений $x^3 = 4$ и $x^3 = 1$. Отсюда $x_1 = \sqrt[3]{4};\ x_2 = 1$.

Ответ: 1; $\sqrt[3]{4}$.

Пример 2.4. Решите уравнение $|x+3|+|x|=5$.

Решение. При решении задач с модулями необходимо использовать определение модуля x: $|x|=\left[\begin{array}{ll} x, & x\ge 0, \\ -x, & x<0. \end{array}\right.$ Согласно этому определению $|x+3|=\left[\begin{array}{ll} x+3, & x\ge -3, \\ -x-3, & x<-3 \end{array}\right.$. Тогда вместо исходного уравнения будем иметь

$$\left[\begin{array}{l} -x-3-x=5\,,\ x<-3\,, \\ x+3-x=5, \quad -3\le x<0, \\ x+3+x=5, \quad x\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4\,,\ x<-3\,, \\ \varnothing, \ -3\le x<0, \\ x=1, \quad x\ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4\,, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: –4; 1.

Пример 2.5. Решите уравнение $x^2-2\sqrt{x^2}-8=0$.

Решение. Так как $\sqrt{x^2}=|x|$, то имеем $x^2-2|x|-8=0$. Согласно определению модуля при $x\ge 0$ имеем уравнение $x^2-2x-8=0$, корни которого равны $x_1=4$, $x_2=-2<0$. Для $x<0$ получаем уравнение $x^2+2x-8=0$ с корнями $x_1=-4$, $x_2=2>0$.

Ответ: ± 4.

Пример 2.6. Решите уравнение $\sqrt{4-x^2}\cdot\left(x^2-2x-3\right)=0$.

Решение. Область определения этого уравнения характеризуется неравенством $x^2\le 4$ или $|x|\le 2$. Из условия $\sqrt{4-x^2}=0$ следует $x_{1,2}=\pm 2$. В свою очередь, из уравнения $x^2-2x-3=0$ получаем $x_3=-1$ и $x_4=3$. При этом корень x_4 не удовлетворяет условию $|x|\le 2$ и должен быть опущен.

Ответ: ± 2; -1.

Пример 2.7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$$

Решение. Решим заданную систему уравнений способом подстановки, который состоит в том, что из какого-либо уравнения системы выражают одно неизвестное через другие неизвестные, а затем подставляют значение этого неизвестного в остальные уравнения. Из первого уравнения выразим x через y и получим

$$\begin{cases} x=\dfrac{8-3y}{2}, \\ 3x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8-3y}{2}, \\ 3\left(\dfrac{8-3y}{2}\right)+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=10, \\ x=\dfrac{8-3y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=1. \end{cases}$$

Ответ: {1; 2}.

Задачи.

Решите уравнение:

2.01. $\dfrac{3x-1}{7}-\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{x}{14}-1$.

2.0.2. $\dfrac{x+3}{6}+\dfrac{2x-7}{3}=\dfrac{x+11}{2}$.

2.0.3. $3x^2-2x-1=0$.

2.04. $x^4-3x^2-4=0$.

2.0.5. $x^2-6|x|-7=0$.

2.06. $x^2-4\sqrt{x^2}-5=0$.

2.07. $|x-2|+|x+4|=8$.

2.08. $|x|+|x-2|=2$.

2.09. $x^2-2\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2=0$.

2.10. $x^2-3\left(\sqrt{x+2}\right)^2-12=0$.

2.11. $x^2-|x+2|-4=0$.

2.12. $x^2-3x+2|x-2|=0$.

Решите систему уравнений:

2.13. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 3x-y=9. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-2y=9. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x-y=16. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-y^2=12. \end{cases}$ 2.18. $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-xy-y^2=19. \end{cases}$

3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком корня. Одним из способов решения иррациональных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. Если показатель степени четный, то необходима проверка найденных корней.

Пример 3.1. Решите уравнение $\sqrt{x+2}=x$.

Решение. Так как $\sqrt{x+2}\ge 0$, то и $x\ge 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x)^2$ и получим $x+2=x^2$. Квадратное уравнение $x^2-x-2=0$ имеет корни $x_1=(1+3)/2=2$; $x_2=(1-3)/2=-1$. В силу условия $x\ge 0$ второй корень не учитываем.

Проверка: 1) $x=2$, тогда $\sqrt{2+2}=2$ или $2=2$. Следовательно, $x=2$ – корень уравнения.

2) при $x=-1$ получим $\sqrt{-1+2}=-1$ и $1=-1$, чего не может быть, поэтому $x=-1$ – посторонний корень.

Ответ: 2.

Пример 3.2. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+x+6}=x.$

Решение. Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $-x^2+x+6=x^2$, причем здесь $x\ge 0$. Решим квадратное уравнение $2x^2-x-6=0$. Корни уравнения равны $x_1=-1{,}5;\ x_2=2.$

Проверка:

1) для $x=-1{,}5$ получим $\sqrt{6{,}75}\ne -1{,}5;$ следовательно, $x=-1{,}5$ – посторонний корень.

2) при $x=2$ имеем $\sqrt{-4+2+6}=2$, $2=2$.

Ответ: 2.

Пример 3.3. Решите уравнение $\sqrt{x+4}=2+\sqrt{x-4}$.

Решение. Если ввести переменные $u=\sqrt{x+4}\ge 0$, $v=\sqrt{x-4}\ge 0$, то исходное уравнение сведется к системе уравнений $\begin{cases} u-v=-2, \\ u^2-v^2=8 \end{cases}$ или $\begin{cases} u-v=2, \\ u+v=4. \end{cases}$ Отсюда $u=\sqrt{x+4}=3$, $v=\sqrt{x-4}=1$ и $x=5$.

Проверка: $\sqrt{5+4}=2+\sqrt{5-4}$, $3=2+1$, 3=3.

Ответ: 5.

Задачи.

Решите уравнение:

3.01. $\sqrt{3x-2}=2-x$.

3.02. $\sqrt{5-4x}=x+4$.

3.03. $x-\sqrt{x+1}=5$.

3.04. $\sqrt{6-x}=x$.

3.05. $\sqrt{x^2-5x+7}=1$.

3.06. $\sqrt{x^2-4x-1}=2$.

3.07. $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$.

3.08. $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.

3.09. $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$.

3.10. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=3$.

4. НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

4.1. Рациональные неравенства

Неравенства вида $P_n(x)>0$, $P_n(x)<0$, $P_n(x)/Q_m(x)>0$, $P_n(x)/Q_m(x)<0$, где $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ – многочлены n – ой и m – ой степеней, соответственно, решаются методом интервалов. При этом неравенства $P_n(x)/Q_m(x)>0$ и $P_n(x)/Q_m(x)<0$ равносильны неравенствам $P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$ и $P_n(x)\cdot Q_m(x)<0$ с $Q_m(x)\ne 0$.

Для решения неравенства $P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$ вначале необходимо найти корни многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ и разложить эти многочлены на множители. Далее на числовой оси отметить точки, соответствующие корням многочленов. Эти точки разбивают числовую ось на интервалы, в которых знак $P_n(x)\cdot Q_m(x)$ постоянен, далее определяется знак произведения $P_n(x)\cdot Q_m(x)$ в каждом из интервале. Это можно сделать, подставив определенное значение x из каждого интервала в выражение $P_n(x)\cdot Q_m(x)$. После этого выбираются те интервалы, где выполняется неравенство $P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$. Аналогично решается неравенство $P_n(x)\cdot Q_m(x)<0$.

Неравенства $P_n(x)/Q_m(x)\ge 0$ и $P_n(x)/Q_m(x)\le 0$ равносильны системам $\begin{cases} P_n(x)\cdot Q_m(x)\ge 0, \\ Q_m(x)\ne 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} P_n(x)\cdot Q_m(x)\le 0, \\ Q_m(x)\ne 0. \end{cases}$. При использовании метода интервалов из основного решения в этом случае следует исключить точки, в которых $Q_m(x)=0$.

Пример 4.1. Решите неравенство $x^2-2x\le 0$.

Решение. Рассмотрим равносильное неравенство $x\cdot(x-2)\le 0$. Точки $x_1=0,\ x_2=2$ разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty;0)$, $(0;2)$ и $(2;\infty)$. Определив знаки многочлена $x(x-2)$ в каждом интервале, получим $x\in[0;2]$.

Ответ: $x\in[0;2]$.

Пример 4.2. Решите неравенство $x^3-4x^2+3x>0$.

Решение. Равносильное неравенство имеет вид $x(x-1)(x-3)>0$. Левая часть этого неравенства обращается в нуль в точках $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$, которые разбивают числовую ось на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;3)$ и $(3;\infty)$. Выбрав интервалы, в которых выполняется неравенство $x(x-1)(x-3)>0$, получим $x\in(0;1)\bigcup(3;\infty)$.

Ответ: $(0;1)\bigcup(3;\infty)$.

Пример 4.3. Решите неравенство $\dfrac{x^2+x}{x-3}>0$.

Решение. Запишем равносильное неравенство $(x^2+x)\cdot(x-3)>0$ с $x\neq 3$. Разложим его на множители: $x(x+1)(x-3)>0$. Корни левой части неравенства $x_1=0, x_2=-1, x_3=3$ разбивают числовую ось на четыре интервала: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;3)$ и $(3;\infty)$. Выбрав интервалы, в которых выполняется равносильное неравенство, получим $x\in(-1;0)\bigcup(3;\infty)$.

Ответ: $(-1;0)\bigcup(3;\infty)$.

Пример 4.4. Решите неравенство $\dfrac{x^2-3x+2}{x}\leq 0$.

Решение. Рассмотрим равносильное неравенство $(x^2-3x+2)\cdot x\leq 0$ с $x\neq 0$. Корни уравнения $x^2-3x+2=0$ равны $x_1=1$; $x_2=2$. Нанесем на числовую ось точки $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$ и получим интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$ и $(2;\infty)$. Выберем интервалы, для которых выполняется равносильная система неравенств, и получим $x\in(-\infty;0)\bigcup[1;2]$.

Ответ: $(-\infty;0)\bigcup[1;2]$.

4.2. Иррациональные неравенства

Иррациональными неравенствами называются неравенства, в которых неизвестные величины находятся под знаком радикала (корня). Обычный способ решения таких неравенств заключается в сведении их к рациональным неравенствам (не содержащим корней). Освободиться от корней в ряде случаев удается путем возведения обеих частей неравенства в соответствующую степень. При этом из-за того, что проверка полученных решений подстановкой невозможна, необходимо находить область допустимых значений неизвестного и при преобразованиях получать неравенство, равносильное исходному неравенству.

Следует помнить, что при возведении неравенства в нечетную степень, получается неравенство, равносильное данному, а при возведении в четную степень – неравенство будет равносильно исходному только в случае, если обе части исходного неравенства неотрицательные.

В качестве иллюстрации этих слов рассмотрим неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$, для которого имеем

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{f(x)} \ge g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{f(x)} \ge 0 > g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0\ ; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Если формально возвести исходное неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ сразу в квадрат, то получим вместо этой совокупности систем только неравенство $f(x) \ge g^2(x)$. Во избежание такого рода ошибок следует постоянно контролировать равносильность уравнений и неравенств при их преобразованиях, учитывать область определения, использовать при решении неравенств метод интервалов.

Пример 4.5. Решите неравенство $\sqrt{x-3} < 1$.

Решение. Найдем область допустимых значений (О.Д.З.) исходного неравенства: $x-3 \ge 0$, откуда $x \in [3; \infty)$. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то для решения неравенства возведем его в квадрат $(\sqrt{x-3})^2 < (1)^2$, $x-3 < 1$. Отсюда $x < 4$ или $x \in (-\infty; 4)$. Найдем пересечение полученного множества с областью допустимых значении исходного неравенства: $\begin{cases} x \geq 3, \\ x < 4 \end{cases}$ или $x \in [3; 4)$.

Ответ: $[3; 4)$.

Пример 4.6. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x - 8/(x+2)}.$$

Решение. Так как квадратный корень определен для неотрицательных чисел, то для области определения имеем $x - 8/(x+2) \geq 0$. Преобразовав это выражение, получим равносильную систему неравенств: $\begin{cases} (x^2 + 2x - 8)(x+2) \geq 0, \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$ Корни квадратного уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$ равны $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Тогда $\begin{cases} (x+4)(x-2)(x+2) \geq 0, \\ x \neq -2 \end{cases}$. Далее с помощью метода интервалов получим $x \in [-4; -2) \cup [2; \infty)$.

Ответ: $[-4; -2) \cup [2; \infty)$.

Пример 4.7. Решите неравенство $\sqrt{9x - 20} < x$.

Решение. Учитывая ОДЗ: $9x - 20 \geq 0$ и $x > 0$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 9x - 20 \geq 0, \\ (\sqrt{9x-20})^2 < (x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq \dfrac{20}{9}, \\ 9x - 20 < x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 20/9, \\ (x-4)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом интервалов для решения последней системы неравенств, найдем $x \in [20/9; 4) \cup (5; \infty)$.

Ответ: $[20/9; 4) \cup (5; \infty)$.

Пример 4.8. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - x - 1} \geq 2x + 1$.

Решение. Для решаемого неравенства имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-x-1\ge(2x+1)^2,\\ 2x\ge -1,\end{cases}\\ \begin{cases}2x<-1,\\ 2x^2-x-1\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+2)\cdot(x+1/2)\le 0,\\ x\ge -1/2,\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)\cdot(x+1/2)\ge 0,\\ x<-1/2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Применяя теперь метод интервалов, установим, что $x\in(-\infty;-0{,}5]$. Если возвести исходное неравенство сразу в квадрат и учесть область определения квадратного корня, то получится ошибочный ответ: $x\in(-2;-0{,}5]$.

Ответ: $(-\infty;-0{,}5]$.

Задачи.

Решите неравенство:

4.01. $7x-1>16(x-1)-2$.

4.02. $x-8\le 2(x+1/2)+7$.

4.03. $\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{2-x}{3}>2$.

4.04. $\dfrac{3x+7}{2x-7}\ge 5$.

4.05. $\dfrac{2x-3}{x+2}>1$.

4.06. $\dfrac{x+4}{1-x}>1$.

4.07. $7-6x-x^2>0$.

4.08. $x^2-5x+4>0$.

4.09. $x^2(x-1)(x+2)\le 0$.

4.10. $x^2(3-x)(x+1)>0$.

4.11. $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5}>0$.

4.12. $\dfrac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4}\le 0$.

4.13. $\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{3-x}<0$.

4.14. $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$.

4.15. $\sqrt{x^2-9}\le 1$.

4.16. $\sqrt{x^2+x-1}>1$.

4.17. $\sqrt{x+2}>x$.

4.18. $\sqrt{x-3}<x-2$.

4.19. $\sqrt{5x-x^2}<x-2$.

4.20. $\sqrt{9-x^2}>3x$.

4.21. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

4.22. $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

Найдите область определения функции:

4.23. $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}$.

4.24. $y=\sqrt{\left(1-x^2\right)/\left(4x-1\right)}$.

4.25. $y=\sqrt{9-x^2}$.

4.26. $y=\sqrt{x^2-2x-3}$.

4.27. $y=\sqrt{5x^2-6x+1}$.

4.28. $y=\sqrt{20-x-x^2}$.

4.29. $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}-2}$.

4.30. $y=\sqrt{\dfrac{5x-6}{7x-14}}$.

5. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Основные тригонометрические формулы

5.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2. $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3. $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4. $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

5. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

6. $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

5.2. Тригонометрические функции суммы или разности углов

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$.
2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
3. $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$.

5.3. Тригонометрические функции двойного аргумента

1. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

2. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

3. $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

5.4. Преобразование суммы или разности тригонометрических функций в произведение.

1. $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}.$

2. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$

3. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}.$

4. $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$ 5. $\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$

5.5. Преобразование произведения в сумму или разность тригонометрических функций

1. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$

2. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$

3. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$

5.6. Формулы понижения степени

1. $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$ 2. $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$

5.7. Формулы половинного аргумента

1. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$ 2. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$

3. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$ 4. $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}.$

5.8. Формулы приведения.

1. $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha.$ 2. $\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin\alpha.$

3. $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{ctg}\alpha.$ 4. $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{tg}\alpha.$

5. $\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$. 6. $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$.

7. $\mathrm{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \mathrm{tg}\alpha$. 8. $\mathrm{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \mathrm{ctg}\alpha$.

9. $\sin(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = -\cos\alpha$. 10. $\cos(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$.

11. $\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \mathrm{ctg}\alpha$. 12. $\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \mathrm{tg}\alpha$.

13. $\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$. 14. $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$.

5.9. Значения тригонометрических функций основных углов

Функция	Угол				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Функция $y = \sin x$ положительна в первой $(0 \le x \le \pi/2)$, второй $(\pi/2 \le x \le \pi)$ четвертях тригонометрического круга и отрицательна в третьей $(\pi \le x \le 3\pi/2)$, четвертой $(3\pi/2 \le x \le 2\pi)$ четвертях этого круга.

Функция $y = \cos x$ положительна в первой, четвертой четвертях и отрицательна во второй и третьей четвертях тригонометрического круга.

Пример 5.1. Вычислите $\sin 37^0 \cos 8^0 + \sin 8^0 \cos 37^0$.

Решение. Воспользовавшись формулой для синуса суммы, получим $\sin 37^0 \cos 8^0 + \sin 8^0 \cos 37^0 = \sin\left(37^0 + 8^0\right) = \sqrt{2}/2$.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

Пример 5.2. Вычислите $\sin 22{,}5^\circ$.

Решение.

Воспользуемся формулой $\sin\alpha = \pm\sqrt{(1-\cos 2\alpha)/2}$, тогда $\sin 22{,}5^0 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где учтено, что в первой четверти синус положительный.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Пример 5.3. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Решение. Для вычисления $\sin\alpha$ воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, согласно которому $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Так как во второй четверти синус положителен, то $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

Ответ: $\sin\alpha = 0{,}6$.

Пример 5.4. Вычислите $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -3/5$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Решение.

1) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Для вычисления $\cos\alpha$ воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, согласно которому $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Так как в третьей четверти с $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ косинус отрицательный, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}.$$

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{-4/5}{-3/5} = \dfrac{4}{3}.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 3/4; \operatorname{ctg}\alpha = 4/3.$

Пример 5.5. Упростите

$$\sin 3\alpha \sin 5\alpha + \cos 3\alpha \cos 5\alpha - \sin(2\alpha + 3\pi/2).$$

Решение. Применив формулу для косинуса разности, получим $\sin 3\alpha \sin 5\alpha + \cos 3\alpha \cos 5\alpha + \cos 2\alpha = \cos(5\alpha - 3\alpha) +$

$$+\cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 2\cos 2\alpha.$$

Ответ: $2\cos 2\alpha$.

Пример 5.6. Упростите $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Выразим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

Задачи.

Найдите:

5.01. $\operatorname{tg}255^\circ - \operatorname{tg}195^\circ$.

5.02. $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$.

5.03. $(2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1)\cdot(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8})$.

5.04. $4\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)$.

5.05. $12\sin^2\frac{2\pi}{3} - 2\cos\pi - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$.

5.06. $5\sin^2\frac{3\pi}{4} - 6\cos^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\pi$.

5.07. $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

5.08. $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$.

5.09. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5.10. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2};\ \pi)$.

5.11. $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

5.12. $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5.13. $\operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, если $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.14. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

5.15. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5.16. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5.17. $\frac{\sin 84^0}{\cos 2^0} - \frac{\cos 84^0}{\sin 2^0}$.

5.18. $\frac{8\cos 5^0 - 5\sin 95^0}{\cos 175^0}$.

Упростите выражение:

5.19. $\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha$.

5.20. $1 - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \cos\alpha$.

5.21. $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

5.22. $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

5.23. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$.

5.24. $\frac{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

5.25. $5\sin^2\alpha - 4 + 5\cos^2\alpha$.

5.26. $\sin 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1$.

5.27. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5.28. $\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

5.29. $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) \cdot \cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \frac{3\pi}{2})$.

5.30. $\sin(180^\circ + \alpha) - \cos(90^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$.

5.31. $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha$. 5.32. $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 1} - \mathrm{ctg}\,\alpha$.

5.33. $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$. 5.34. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} - \mathrm{tg}2\alpha$.

6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком тригонометрических функций. Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, где $|a| \le 1$; $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$, где $a \in (-\infty; \infty)$.

Решения этих уравнений записываются следующим образом:

1) $\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in Z.$

При $a = 0$ $\quad x = n\pi;$ при $a = \pm 1$ $\quad x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi.$

2) $\cos x = a,\quad x = \pm\arccos a + 2n\pi,\ n \in Z.$

При $a = 0$ $\ x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi;$ при $a = 1$ $\quad x = 2n\pi;$

при $a = -1$ $\quad x = \pi + 2n\pi.$

3) $\mathrm{tg}x = a,\ \ x = \mathrm{arctg}a + n\pi,\ \ n \in Z.$

При $a = 0$ $\ x = n\pi.$

4) $\mathrm{ctg}x = a,\ \ x = \mathrm{arcctg}a + n\pi = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{a} + n\pi,\ \ n \in Z.$

При $a = 0$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi.$

Пример 6.1. Решите уравнение $\sin 2x = \sin x.$

Решение. Применяя формулу $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, получим $2\sin x \cdot \cos x = \sin x,$ $\quad \sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$. Приравнивая нулю последовательно каждый из сомножителей, найдем решения уравнения: 1) $\sin x = 0, \quad x = \pi n, n \in Z$; 2) $2\cos x - 1 = 0$; $\cos x = 0,5; \quad x = \pm\arccos 0,5 + 2\pi k$ или $x = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pi n; \quad \pm\pi/3 + 2\pi k, \ n, k \in Z.$

Пример 6.2. Решите уравнение $2\cos x + \cos 3x = 0$.

Решение. Применяя $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cdot \cos x$, преобразуем уравнение: $\cos x + \cos x + \cos 3x = \cos x + 2\cos x \cdot \cos 2x = = \cos x\left(2\cos 2x + 1\right) = 0$. Приравниваем последовательно нулю сомножители и получаем: 1) $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos 2x = -0,5$, $2x = \pm\arccos\left(-0,5\right) + 2\pi k = \pm\left(\pi - \arccos 0,5\right) + +2\pi k = \pm\left(\pi - \pi/3\right) + 2\pi k = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$ и $x = \pm\pi/3 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\pi/2 + \pi n; \quad \pm\pi/3 + \pi k, \ n, k \in Z.$

Пример 6.3. Решите уравнение $\sin 3x - 2\sin x = 0$.

Решение. Применяя формулу $\sin 3x - \sin x = 2\sin x \cdot \cos 2x$, получим $2\sin x \cdot \cos 2x - \sin x = 2\sin x\left(\cos 2x - 0,5\right) = 0$. Отсюда получаем решения: 1) $\sin x = 0, \ x = \pi n, \quad n \in Z$; 2) $\cos 2x = 0,5$; $2x = \pm\arccos 0,5 + 2\pi k = \pm\pi/3 + 2\pi k$ или $x = \pm\pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\pi n; \quad \pm\pi/6 + \pi k, \ n, k \in Z.$

Пример 6.4. Решите уравнение $\mathrm{tg}(2x - \pi/6) = \sqrt{3}$.

Решение. Для уравнения $\mathrm{tg}(2x - \pi/6) = \sqrt{3}$ по формуле решения получим $2x - \pi/6 = \mathrm{arctg}(\sqrt{3}) + \pi n = \pi/3 + \pi n$, откуда $2x = \pi/2 + n\pi$ и $x = \pi/4 + \pi n/2, n \in Z$.

Ответ: $\pi/4 + \pi n/2, \ n \in Z$.

Пример 6.5. Решите уравнение $2\cos^2 x = \sqrt{3}\cos x$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0; \quad 2\cos x(\cos x - \sqrt{3}/2) = 0.$$

Следовательно, уравнение имеет решения: 1) $\cos x = 0$,

$x=\pi/2+n\pi, n\in Z$; 2) $\cos x=\sqrt{3}/2$; $x=\pm\arccos(\sqrt{3}/2)+2k\pi$, т.к. $\arccos(\sqrt{3}/2)=\pi/6$, то $x=\pm\pi/6+2k\pi, k\in Z$.

Ответ: $\pi/2+n\pi; \pm\pi/6+2k\pi, n,k\in Z$.

Пример 6.6. Решите уравнение $\cos^4 x-\sin^4 x=\sqrt{2}/2$.

Решение. Так как имеем $(\cos^2 x)^2-(\sin^2 x)^2=\sqrt{2}/2$, то можно разложить левую часть этого уравнения на множители по формуле разности квадратов. Используя тождество $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, далее получим $\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{2}/2$. Учитывая, что $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$, придем к уравнению $\cos 2x=\sqrt{2}/2$, откуда $2x=\pm\arccos\left(\sqrt{2}/2\right)+2\pi n$ или

$$x=\pm\pi/8+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\pi/8+\pi n, n\in Z$.

Пример. 6.7. Решите уравнение

$$\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x-3\sin^2 x=0.$$

Решение. Так как $\cos x\neq 0$, то разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим $3\mathrm{tg}^2 x+2\mathrm{tg}x-1=0$. Решив это квадратное уравнение, найдем: 1) $(\mathrm{tg}x)_1=-1$, $x_1=-\pi/4+\pi n, n\in Z$, 2) $(\mathrm{tg}x)_2=1/3$, $x_2=\mathrm{arctg}(1/3)+\pi k, k\in Z$.

Ответ: $-\pi/4+\pi n$, $\mathrm{arctg}(1/3)+\pi k$, $n, k\in Z$.

Пример. 6.8. Решите уравнение $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$.

Решение. Преобразуем уравнение: $\sin x/\sqrt{2}-\cos x/\sqrt{2}=1$,

$$\sin x\cdot\cos(\pi/4)-\cos x\cdot\sin(\pi/4)=\sin(x-\pi/4)=1.$$

Тогда по формуле $x-\pi/4=\pi/2+2\pi n$ и $x=3\pi/4+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $3\pi/4+2\pi n$, $n\in Z$.

Задачи.

Решите уравнение:

6.01. $\mathrm{tg}2x=\sqrt{3}.$

6.02. $\sin 2x=\sqrt{3}\sin x.$

6.03. $\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}/4.$

6.04. $\sin 2x=\mathrm{tg}x.$

6.05. $3\mathrm{tg}(x-\pi/4)=-\sqrt{3}.$

6.06. $\mathrm{ctg}(x+\pi/3)=-1/\sqrt{3}.$

6.07. $\sin(x-\pi/6)=\sqrt{2}/2.$

6.08 $\sin^2 x=\sin x.$

6.09. $\cos^4 x-\sin^4 x=0{,}5.$

6.10. $\sin 2x=-\sqrt{2}\cos x.$

6.11. $\sqrt{3}\sin x=\cos x.$

6.12. $\cos x=\sin 2x\cdot\cos x.$

6.13. $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

6.14. $5-4\sin^2 x=5\cos^2 x$.

6.15. $\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0$.

6.16. $6\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=2$.

6.17. $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$.

6.18. $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$.

6.19. $\cos 2x=\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)$.

6.20. $1+\sin 2x+5\left(\sin x+\cos x\right)=0$.

6.21. $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

6.22. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$.

7. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Логарифмом положительного числа b по основанию a $\left(a>0;\ a\neq 1\right)$ называется показатель степени $c=\log_a b$, в которую надо возвести основание a, чтобы получить b.

Определение логарифма записывается в виде равенства

$$a^c=a^{\log_a b}=b,$$

которое называется основным логарифмическим тождеством.

Из данного тождества и свойств степени вытекают следующие свойства логарифмов:

1) $\log_a\left(xy\right)=\log_a x+\log_a y\quad\left(a,\ x,\ y>0;\ a\neq 1\right);$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (a,\, x,\, y > 0;\, a \neq 1)$;

3) $\log_a x^c = c \log_a x \qquad (a,\, x > 0;\, a \neq 1)$;

4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad (a,\, c,\, b > 0;\, a,\, c \neq 1)$

Из этих основных свойств следуют свойства

1а) $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y| \quad (a,\, x \cdot y > 0;\, a \neq 1)$;

2а) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y| \quad (a,\, x \cdot y > 0;\, a \neq 1)$

3а) $\log_a x^{2c} = 2c \log_a |x| \qquad (a > 0,\, x \neq 0,\, a \neq 1)$;

4а) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad (a,\, b > 0;\, a,\, b \neq 1)$.

Согласно свойствам 3) и 4а) имеем

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{\log_b a^c} = \frac{1}{c \cdot \log_b a} = \frac{1}{c} \log_a b \quad (a,\, b > 0;\, a,\, b \neq 1;\, c \neq 0),$$

откуда следует равенство

$$\log_{a^{2c}} b = \frac{1}{2c} \log_{|a|} b \; \left(|a| \neq 1;\, a,\, c \neq 0;\, b > 0\right).$$

Из определения логарифма получается формула для решения простейшего логарифмического уравнения $\log_a x = b$: $x = a^b$. Можно также считать, что $\log_a x = b = \log_a a^b \Rightarrow x = a^b$.

Логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, рассматриваемому совместно с неравенством $g(x) > 0$.

Простейшее показательное уравнение $a^x = b$ решается, исходя из определения логарифма и свойств степени, следующим образом: $x = \log_a b$ при $a,\, b > 0;\, a \neq 1$. Если же $b \leq 0$, то, очевидно, что уравнение $a^x = b$ решений не имеет ($x \in \varnothing$).

При $a=1$ получается показательное уравнение $1^x=b$, справедливое при $b=1$ для всех x и не имеющее решений при $b\neq 1$.

Пример 7.1. Вычислите $16^{\log_{81}3+\log_2\sqrt[4]{3}}$

Решение. При решении данного примера и подобных ему примеров необходимо применять основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$. Преобразуем первоначальное выражение:

$$16^{\log_{81}(81)^{1/4}+\log_2(3)^{1/4}}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}(1+\log_2 3)}=2^{\log_2 2+\log_2 3}=2^{\log_2 6}=6.$$

Ответ: 6.

Пример 7.2. Вычислите $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}$.

Решение. Воспользовавшись формулой $\log_a b=1/\log_b a$, получим $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}=\left(7^{1/3}\right)^{3\cdot\log_7 2}=7^{\log_7 2}=2$.

Ответ: 2.

Пример 7.3. Решите уравнение $5^{2x+2}-3\cdot 5^{2x}=550$.

Решение. Вынося за скобки общий множитель 5^{2x}, получим $5^{2x}\left(5^2-3\right)=550$, $5^{2x}\cdot 22=550$, $5^{2x}=25=5^2$, $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 7.4. Решить уравнение $3^{2x}-2\cdot 3^x-3=0$.

Решение. Полагаем $y=3^x>0$, тогда исходное уравнение примет вид $y^2-2y-3=0$, откуда $y_1=-1<0$, $y_2=3$. Оставляем второй из этих корней и получаем $y=3^x=3$, $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 7.5. Решите уравнение $\log_5(15x)-\log_5 3=\log_5 10$.

Решение. Воспользовавшись свойствами логарифмов, получим $\log_5(15x)-\log_5 3=\log_5(15x/3)=\log_5(5x)=\log_5 10$, откуда $5x=10$.

Ответ: $x=2$.

Пример 7.6. Решить уравнение

$$\lg(3x+1)-\lg(x-2)=1.$$

Решение. Найдем область допустимых значений (ОДЗ): $\begin{cases}3x+1>0,\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1/3,\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow x>2$. Представим исходное уравнение в виде $\lg\dfrac{3x+1}{x-2}=1=\lg 10$, откуда $\dfrac{3x+1}{x-2}=10$,

$$3x+1=10(x-2)=10x-20,\ 7x=21,\ x=3>2\ .$$

Ответ: 3.

Пример 7.7. Решить уравнение

$$\log_2^2(x-2)-2\cdot\log_2(x-2)-3=0.$$

Решение. Из ОДЗ логарифма следует $x-2>0$ или $x>2$. Полагаем $y=\log_2(x-2)$ и записываем исходное уравнение в виде $y^2-2y-3=0$, откуда $y_1=-1$, $y_2=3$. Тогда $\log_2(x-2)=-1$ и $x-2=2^{-1}$, $x_1=2{,}5$; $\log_2(x-2)=3$, $x-2=2^3=8$, $x_2=10$.

Ответ: 2,5; 10.

Задачи

Вычислите:

7.01. $\left(\log_2 32+27^{\log_3 4}\right)^{\log_{69} 14}$.

7.02. $\log_3 8-2\log_3 2+\log_3 4{,}5$.

7.03. $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

7.04. $\left(25^{\log_4 2}+1\right)^{\log_6 3}$.

7.05. $\left(\log_2 32+27^{\log_3 4}\right)^{\log_{69} 14}$

7.06. $\log_3 4\cdot\log_4 2\cdot\log_2 9$.

7.07. $2^{\log_4\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+3^{\log_9\left(\sqrt{3}+2\right)^2}$

7.08. $2^{\log_8\left(\sqrt{3}+5\right)^3}+5^{\log_{25}\left(\sqrt{3}-5\right)^2}$.

7.09. $\left(\log_5\sqrt{5}+\log_3 48-\log_3 16\right)\cdot 15^{\log_{15} 4}$.

7.10. $\left(3^{2/\log_2 3}\right)^{\log_4 5}$.

Решите уравнение:

7.11. $9^x-75\cdot 3^{x-1}-54=0$.

7.12. $4^{x+1}+15\cdot 2^{x-1}-1=0$.

7.13. $25^{x+1}+49\cdot 5^{x}-2=0$. 7.14. $35\cdot 7^{2x-4}=25^{x-1}$.

7.15. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$. 7.16. $\sqrt{2^{x}-7}=9-2^{x}$.

7.17. $4\cdot 3^{4x}-2^{4x-1}-3^{4x+1}-2^{4x}=0$. 7.18. $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x}$.

7.19. $\log_5(2x+8)=2\cdot\log_5 4$. 7.20. $\log_2 x^2=\log_2(2x)$.

7.21. $\log_2(2x+1)-\log_2 x=\log_4 64$.

7.22. $\log_2\left(x^2+4x+11\right)=\log_{0,5}0{,}125$.

7.23. $\log_2^2 x-3\cdot\log_2 x+5=3^{\log_9 81}$. 7.24. $3\cdot\lg^2 x-\lg x^2-1=0$.

8. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a x>b$ можно привести к виду $\log_a x>\log_a a^b$, из которого следует $x>a^b$ при $a>1$ или $0<x<a^b$ при $0<a<1$.

Неравенство $\log_{u(x)} f(x)\geq\log_{u(x)} g(x)$ с $f(x),\ g(x)>0$ и $u(x)>0,\ u(x)\neq 1$ равносильно следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<u(x)<1,\\ 0<f(x)\leq g(x);\end{cases}\\ \begin{cases}u(x)>1,\\ f(x)\geq g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Простейшее показательное неравенство $a^x>b$ с помощью основного логарифмического тождества приводится к виду $a^x>a^{\log_a b}$. Тогда $x>\log_a b$ при $a>1$ или $x<\log_a b$ при $0<a<1$.

При переменном основании $u(x)$ показательной функции имеем

$$\left(u(x)\right)^{f(x)} > \left(u(x)\right)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < u(x) < 1, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} u(x) > 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 8.1. Решить неравенство $\log_4(x-2) < 2$.

Решение. ОДЗ: $x-2>0$, откуда $x>2$. Представим неравенство в виде $\log_4(x-2) < \log_4 4^2 = \log_4 16$. Так основания логарифмов больше 1, то логарифмы можно опустить без изменения знака неравенства и тогда $x-2<16$, $x<18$. Далее с учетом ОДЗ получим решение неравенства: $x \in (2,18)$.

Ответ: $(2;18)$.

Пример 8.2. Решить неравенство $\log_{1/3}(3-2x) > -1$.

Решение. ОДЗ: $3-2x>0$ и $x<1,5$. Преобразуем неравенство: $\log_{1/3}(3-2x) > \log_{1/3}(1/3)^{-1} = \log_{1/3}3$. Так основания логарифмов меньше 1, то логарифмы опускаются с переменной знака неравенства на обратный и получается $3-2x<3$, $x>0$, причем согласно ОДЗ $x<1,5$.

Ответ: $(0;1,5)$.

Пример 8.3. Решите неравенство $5^{x+1} - 4\cdot 5^x \ge 125$.

Решение. Представим исходное неравенство в виде

$$5\cdot 5^x - 4\cdot 5^x = (5-4)5^x = 5^x \ge 5^3 = 125, \text{ откуда } x \ge 3.$$

Ответ: $x \in [3;\infty)$.

Пример 8.4. Решите неравенство

$$2^{x+3} + 4\cdot 6^{x+2} < 6^{x+3} + 2^{x+2}.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$2^{x+2}\cdot 2 - 2^{x+2} < 6^{x+2}\cdot 6 - 4\cdot 6^{x+2}, \quad 2^{x+2} < 2\cdot 6^{x+2}, \quad (2/6)^{x+2} < 2,$$

$(1/3)^{x+2} < (1/3)^{\log_{1/3} 2}$. Так основания показательных функций меньше 1, то $x+2 > \log_{1/3} 2 = -\log_3 2$, $x > -2 - \log_3 2 = -\log_3 18$.

Ответ: $(-\log_3 18; \infty)$.

Пример 8.5. Решите неравенство $2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x + 3 \cdot 16^x \le 0$.

Решение. Представим неравенство в виде

$$2(9)^{2x} - 5(9 \cdot 4)^x + 3(4)^{2x} \le 0,$$

после чего разделим обе части неравенства на $4^{2x} > 0$ и получим $2(9/4)^{2x} - 5(9/4)^x + 3 \le 0$. Следовательно, можно ввести новую переменную $y = (9/4)^x > 0$ и иметь дело с квадратным неравенством $2y^2 - 5y + 3 \le 0$. Решая его, получим $1 \le y = (9/4)^x \le 3/2$ или $(3/2)^0 \le (3/2)^{2x} \le (3/2)^1$. Учитывая, что основание показательной функции больше единицы, далее имеем $0 \le x \le 1/2$.

Ответ: $[0; 1/2]$.

Пример 8.6. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + 4x}\right)^{x^2-5x-5} > 1.$$

Решение. Учитывая равенство $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$, приведем заданное неравенство к виду $|x+1|^{x^2-5x-6} > |x+1|^0 = 1$ и далее запишем равносильную ему совокупность систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < |x+1| < 1, \\ x^2 - 5x - 6 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} |x+1| > 1, \\ x^2 - 5x - 6 > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 < x < 0, \\ -1 < x < 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty), \\ x \in (-\infty; -1) \cup (6; \infty); \end{cases} \end{array}\right.$$

из которой следует $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (6; \infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(6;\infty)$.

Задачи

Решите неравенство:

8.01. $11\cdot 3^x - 8\cdot 3^x \ge 27$. 8.02. $7\cdot 5^x - 2\cdot 5^x < 25$.

8.03. $3\cdot 9^x - 4\cdot 3^x + 1 > 0$. 8.04. $16^x - 5\cdot 4^x + 4 < 0$.

8.05. $5^x\left(5^x + 5^{4-x} - 130\right) < 0$. 8.06. $7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 < 0$.

8.07. $(0{,}5)^{2x^2-4x} > 16^{x-2}$. 8.08. $\left(\sqrt{3}\right)^{4-2x^2} > (1/3)^x$.

8.09. $(2/5)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > 25/4$. 8.10. $(3/4)^{\frac{x+1}{x-2}} > \sqrt{3}/2$.

8.11. $5^{x-1} + 5\cdot 0{,}2^{x-2} \le 26$. 8.12. $5^{2x+1} < 6\cdot 5^x - 1$.

8.13. $9^{x+2} + 45\cdot 6^x \le 9\cdot 4^{x+1}$. 8.14. $3\cdot 16^x + 2\cdot 49^x \le 5\cdot 28^x$.

8.15. $\log_2\left(3x - x^2\right) > 1$. 8.16. $\log_3\left(4x - x^2\right) > 1$.

8.17. $\log_2(x+1)^2 - \log_2(x+1) < 2$. 8.18. $\lg^2 x + \lg x > 2$.

8.19. $\log_2\left(3\cdot 4^x + 2^{x+1}\right) \le 0$ 8.20. $\log_2\left(3\cdot 9^x - 3^{x+1}\right) < 0$.

9. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x называется предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, если он существует и конечен.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной $f'(x)$ при данном значении x равно тангенсу угла наклона, образованного с положительным направление оси OX касательной к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M\left(x,\, f(x)\right)$. Уравнение касательной, проведенной через точку $M_0\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right) = M_0\left(x_0,\, y_0\right)$ графика функции $y = f\left(x\right)$, имеет вид $y = y_0 + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$.

Если функции $u = u\left(x\right)$, $v = v\left(x\right)$ имеют производные в точке x (дифференцируемы), то справедливы следующие свойства производной:

$$1)\ \left(C\right)' = \left(\text{const}\right)' = 0,\quad 2)\ \left(Cu\right)' = Cu',\quad 3)\ \left(u+v\right)' = u' + v',$$

$$4)\ \left(uv\right)' = u'v + uv',\quad 5)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ \left(v \neq 0\right).$$

С помощью определения производной можно получить производные основных элементарных функций:

$$1)\ \left(x^a\right)' = ax^{a-1},\quad 2)\ \left(a^x\right)' = a^x \ln a,\ \left(e^x\right)' = e^x,$$

$$3)\ \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a},\ \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x},\quad 4)\ \left(\sin x\right)' = \cos x,$$

$$5)\ \left(\cos x\right)' = -\sin x,\quad 6)\ \left(\text{tg}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x},\quad 7)\ \left(\text{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 9.1. Найдите длину интервала, на котором убывает функция $f\left(x\right) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$.

Решение. При убывании функции ее производная отрицательна. Следовательно, в нашем случае имеем неравенство $f'\left(x\right) = 3x^2 - 6\cdot 2x - 15 < 0$ или $x^2 - 4x - 5 < 0$, решением которого является интервал $\left(-1;5\right)$ с длиной, равной $5 - \left(-1\right) = 6$.

Ответ: 6.

Пример 9.2. Для $f\left(x\right) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 23$ решите уравнение $f'\left(x\right) = 0$.

Решение.

Производная равна $f'\left(x\right) = 3\cdot 4x^3 - 4\cdot 3x^2 - 24\cdot 2x + 48$, приравнивая ее нулю, получим уравнение $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ или $\left(x^2 - 4\right)\cdot\left(x-1\right) = 0$. В результате $x_{1,2} = \pm 2$, $x_3 = 1$.

Ответ: ± 2; 1.

Пример 9.3. Составить уравнение касательной, проходящей через точку $(1;1)$ графика функции $y = x^3 - 12x^2 + 12x$.

Решение. Найдем угловой коэффициент касательной $f'(1)$: $f'(1) = f'(x)\big|_{x=1} = \left(3x^2 - 24x + 12\right)\big|_{x=1} = -9$. Тогда уравнение касательной примет вид $y = 1 - 9(x-1)$ или $y = 10 - 9x$.

Ответ: $y = 10 - 9x$.

Пример 9.4. Точка движется по прямой, причем пройденный путь определяется формулой $S(t) = t^2 + 3t + 2$. Найдите ее скорость в момент времени $t = 3$.

Решение. Так как скорость равна производной по времени от пройденного пути, то $v(t) = S'(t) = 2t + 3$, $v(3) = 9$.

Ответ: 9.

Задачи

Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0:

9.01. $y = -2\sin x + x^2$, $x_0 = \pi$; 9.02. $y = x^2 \ln x$, $x_0 = 1$;

9.03. $y = x^3 + x\cos x$, $x_0 = 0$; 9.04. $y = x^2 e^x$, $x_0 = 1$.

9.05. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

9.06. К графику функции $f(x) = x^2 - 4x$ проведена касательная в точке (1; –3). Найдите абсциссу точки пересечения этой касательной с осью *Ox*.

9.07. Для $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ решите уравнение $f'(x) = 0$.

9.08. Для $g(x) = (x-3)(x+2)^2$ решите неравенство $g'(x) < 0$.

9.09. Найдите длину интервала, на котором убывает функция
$y = 6x^3 - 15x^2 - 36x + 20$.

9.10. Найдите длину интервала, на котором возрастает функция $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 15$.

ОТВЕТЫ

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений

1.01. 1,5. **1.02.** 200. **1.03.** 2. **1.04**. 15. **1.05.** -6. **1.06.** 4. **1.07.** 26. **1.08.** -1. **1.09.** 7. **1.10.** 8. **1.11.** 0,5. **1.12.** 19. **1.13**. -9. **1.14.** $-11\sqrt[3]{3}$. **1.15.** $\sqrt[6]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$. **1.16.** $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$. **1.17.** $5b^2$. **1.18.** $2b/a$. **1.19.** $n/(2m)$. **1.20.** $2c/d^2$. **1.21.** $-b^2\sqrt{a}$. **1.22.** $0,7/a$. **1.23.** $-a^2b$. **1.24.** b^3. **1.25.** y. **1.26.** n. **1.27.** $1/a^2$. **1.28.** $\sqrt{a}+b$**.** **1.29.** ab**.** **1.30.** 1. **1.31.** $(1+a)^2$. **1.32.** $a+b$. **1.33.** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **1.34.** $2/\sqrt{b}$.

2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

2.01. $5/9$. **2.02.** 22. **2.03.** $1, -1/3$. **2.04.** ± 2. **2.05.** 7. **2.06.** ± 5. **2.07.** -5; 3. **2.08.** $x \in [0; 2]$. **2.09.** 2. **2.10.** 6. **2.11.** 3; -2. **2.12.** 1.

3. Иррациональные уравнения

3.01. 1. **3.02.** -1. **3.03.** 8. **3.04.** 2. **3.05.** 2; 3. **3.06.** – 1; 5. **3.07.** –1. **3.08.** 3. **3.09.** 7. **3.10.** 1.

4. Неравенства и системы неравенств

4.01. $(-\infty; 17/9)$. **4.02.** $[-16; \infty)$ **4.03.** $(37/11; \infty)$. **4.04.** $(3,5; 6]$. **4.05.** $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$. **4.06.** $(-3/2; 1)$. **4.07.** $(-7; 1)$. **4.08.** $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$. **4.09.** $[-2; 1]]$. **4.10.** $(-1; 0) \cup (0; 3)$. **4.11.** $(-\infty; -3) \cup (2,5; 5)$. **4.12.** $(-\infty; -4) \cup [1; 3) \cup (3; 4,5] \cup \{0\}$. **4.13.** $(-\infty; 0) \cup (15/8; 3)$. **4.14.** $(1; 3) \cup (3; 5)$. **4.15.** $[-\sqrt{10}; -3] \cup [3; \sqrt{10}]$. **4.16.** $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$. **4.17.** $[-2; 2)$. **4.18.** $[3; \infty)$. **4.19.** $(4; 5]$. **4.20.** $[-3; \sqrt{0,9})$. **4.21.** $[0; 3]$. **4.22.** $[4; \infty)$. **4.23.** $[2; 3]$. **4.24.** $(-\infty; -1] \cup (0,25; 1]$. **4.25.** $[-3; 3]$.

4.26. $(-\infty;-1]\cup[3;\infty)$. **4.27.** $(-\infty;0{,}2]\cup[1;\infty)$. **4.28.** $[-5;4]$. **4.29.** $[4/3;3)$. **4.30.** $(-\infty;1{,}2]\cup(2;\infty)$.

5. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

5.01. $2\sqrt{3}$. **5.02.** 0,25. **5.03.** $\sqrt{6}/4$. **5.04.** 0,5. **5.05.** 8. **5.06.** 1. **5.07.** $-7/25$. **5.08.** $-40/9$. **5.09.** $-4/3$. **5.10.** $-\sqrt{5}/2$. **5.11.** $-2/\sqrt{5}$. **5.12.** $\frac{3}{5};-\frac{3}{4};-\frac{4}{3}$. **5.13.** $1/8$. **5.14.** 7. **5.15.** $\left(8-15\sqrt{3}\right)/34$. **5.16.** $-\left(5\sqrt{3}+12\right)/26$. **5.17.** -2. **5.18.** -3. **5.19.** $1/\cos\alpha$. **5.20.** $\sin^2\alpha$. **5.21.** $\cos^2\alpha$. **5.22.** 1. **5.23.** $2\mathrm{ctg}2\alpha$. **5.24.** $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **5.25.** 1. **5.26.** $\sqrt{2}\sin\left(4\alpha-\pi/4\right)$. **5.27.** $2\mathrm{ctg}\alpha$. **5.28.** $-\sin\alpha$. **5.29.** $\sin^2\alpha$. **5.30.** $-2\mathrm{ctg}\alpha$. **5.31.** $-1/\cos\alpha$. **5.32.** $-1/\sin\alpha$. **5.33.** 2. **5.34.** 0.

6. Тригонометрические уравнения

6.01. $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$. **6.02.** $n\pi,\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **6.03.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$.

6.04. $\pi n;\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **6.05.** $n\pi+\frac{\pi}{12}$. **6.06.** $\frac{\pi}{3}+n\pi$.

6.07. $\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi$. **6.08.** $n\pi;\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **6.09.** $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$.

6.10. $\frac{\pi}{2}+n\pi;(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+k\pi$. **6.11.** $\frac{\pi}{6}+n\pi$. **6.12.** $\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi$.

6.13. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; $\pi+4\pi k$. **6.14.** $n\pi$. **6.15.** $-\frac{\pi}{4}+n\pi;$ $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+k\pi$. **6.16.** $-\frac{\pi}{4}+n\pi;$ **6.17.** $\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

6.18. $\frac{\pi}{4}+2n\pi$. **6.19.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$. **6.20.** $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. **6.21.** $\frac{n\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **6.22.** $\frac{n\pi}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$

7. Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения

7.01. 14. **7.02.** 2. **7.03.** 24. **7.04.** 3. **7.05.** 14. **7.06.** 2. **7.07.** 4. **7.08.** 10. **7.09.** 6. **7.10.** 5. **7.11.** 3. **7.12.** -3. **7.13.** -2. **7.14.** 1,5. **7.15.** 1. **7.16.** 3. **7.17** 0,25. **7.18.** 0; 0,5. **7.19.** 4. **7.20.** 2. **7.21.** $1/6$. **7.22.** -3; -1. **7.23.** 0,5; 16. **7.24.** 10; $1/\sqrt[3]{10}$.

8. Показательные и логарифмические неравенства

8.01. $[2;\infty)$. **8.02.** $(-\infty;1)$. **8.03.** $(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$. **8.04.** $(0;1)$. **8.05.** $(1;3)$. **8.06.** $(0;1)$. **8.07.** $(-2;2)$. **8.08.** $(-1;2)$. **8.09.** $(-2;-0,4)$. **8.10.** $(-4;2)$. **8.11.** $[1;3]$. **8.12.** $(-1;0)$. **8.13.** $(-\infty;-2]$. **8.14.** $\left[0;\log_{4/7}(2/3)\right]$. **8.15.** $(1;2)$. **8.16.** $(1;3)$. **8.17.** $(-1;3)$. **8.18.** $(0;0,1)\cup(10;\infty)$. **8.19.** $(-\infty;-\log_2 3)$. **8.20.** $\left(0;\log_3\left(\left(3+\sqrt{21}\right)/6\right)\right)$.

9. Производная функции, ее применения

9.01. $2\pi+2$. **9.02.** 1. **9.03.** 1. **9.04.** $3e$. **9.05.** $y=-2x+3$. **9.06.**. **9.07.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in Z$. **9.08.** $(-2;4/3)$. **9.09.** 7. **9.10.** 2.