

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Выпуск № 4 (43)

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет;

Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

Свентиков А. А., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет;

Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» – 66004
Оформить подписку можно на сайте <https://www.pressa-ru.ru>

Дата выхода в свет 25.12.2024. Усл. печ. л. 10,7. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 298.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
(строительный факультет, кафедра строительной механики),
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»
394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific Journal

Issue № 4 (43)

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.

Territory of distribution — Russian Federation.

The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,

Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University;

Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev;

Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Nguyen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

Nuguxhinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University;

Trechshev A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Subscription index in the United catalogue «Press of Russia» – 66004

You can subscribe on the website www.press-rf.ru

Publication date 25.12.2024. Conventional printed sheets 10.7. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 298.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation

(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),

tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.....	7
<i>Пахомова Л. В., Щербакова О. В., Инкижинов Н. С.</i>	
Несколько задач с выводом уравнения ядра сечения в декартовых координатах	7
<i>Кирсанов М. Н.</i>	
Формула для оценки первой частоты собственных колебаний плоской фермы со сложной решеткой	25
<i>Астахов С. В.</i>	
Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырёхскатного покрытия	34
<i>Льонг Конг Луан</i>	
Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей	42
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	54
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г., Селезнев И. Р.</i>	
Изгиб кольцевой пластины на упругом основании, выполненной из материала с двойной анизотропией	54
ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ	66
<i>Юрьев В. В., Ефрюшин С. В., Габриелян Г. Е.</i>	
Проблема моделирования динамической реакции мостовых сооружений на действие подвижных транспортных средств.....	66
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ.....	73
<i>Чесноков А. В., Михайлов В. В.</i>	
Устойчивое равновесие несущего ребра вантовой конструкции покрытия.....	73
МЕХАНИКА ГРУНТОВ.....	85
<i>Ким В. Х., Ким М. С.</i>	
Оценка давления пучения при промерзании мерзлого грунта в замкнутом объеме	85
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ	92

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS	7
<i>Pahomova L. V., Scherbakova O. V., Inkizhinov N. S.</i>	
Several Tasks with the Derivation of the Equation of the Kernel of a Section in Cartesian Coordinates.....	7
<i>Kirsanov M. N.</i>	
Formula for Estimation of the First Frequency of Natural Oscillations of a Flat Truss with a Complex Lattice.....	25
<i>Astakhov S. V.</i>	
Analytical Assessment of the Deflection of the Rod Model of a Four-Slope Roof Frame	34
<i>Luong Cong Luan</i>	
Estimates of Deflection and Natural Frequency of Vibrations of a Hinged-Rod Truss with an Arbitrary Number of Panels	42
APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS OF SOLID BODY UNDER DEFORMATION.....	54
<i>Treschev A. A., Telichko V. G., Seleznev I. R.</i>	
Bending of a Ring Plate Made of Material with Double Anisotropy on an Elastic Foundation	54
MOBILE LOAD DYNAMIC EFFECT ON ELASTIC SYSTEMS.....	66
<i>Yuryev V. V., Efryushin S. V., Gabrielyan G. E.</i>	
Problem of Modeling the Dynamic Response of Bridge Structures to the Action of Mobile Vehicles.....	66
CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES	73
<i>Chesnokov A. V., Mikhailov V. V.</i>	
Stable Equilibrium of the Load-Bearing Truss of a Cable Roof Structure	73
SOIL MECHANICS	85
<i>Kim V. Kh., Kim M. S.</i>	
Evaluation of the Heaving Pressure During Freezing of Frozen Soil in a Closed Volume	85
RULES OF PREPARATION OF ARTICLES	92

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3/6

DOI 10.36622/2219-1038.2024.43.4.001

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ С ВЫВОДОМ УРАВНЕНИЯ ЯДРА СЕЧЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Л. В. Пахомова¹, О. В. Щербакова², Н. С. Инкижинов³Сибирский государственный университет водного транспорта^{1,2,3}
Россия, Новосибирск

¹ Канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой технической механики и подъемно-транспортных машин, тел.: +7(913)904-00-57, e-mail: Pahomova_l_v@mail.ru

² Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры технической механики и подъемно-транспортных машин, тел.: +7(913)925-84-39, e-mail: fisher-54@yandex.ru

³ Ст. преп. кафедры технической механики и подъемно-транспортных машин, тел.: +7(913)799-81-52, e-mail: inkizhinov47@bk.ru

Рассматриваются два поперечных сечения, имеющих по одной оси симметрии.

Первое сечение представлено прямоугольником с полукругом. Кривые ядра сечения, соответствующие полуокружности, имеют две разновидности в зависимости от относительной координаты $\alpha = a / r$ центра окружности в главных центральных осях u, v . Если $\alpha < 1$, то кривой ядра сечения является эллипс. В противном случае, при $\alpha > 1$, кривой ядра сечения является гипербола. В промежуточном случае, при $\alpha = 1$, полуоси эллипса стремятся к бесконечности, при этом ветви эллипса вырождаются в ветви гиперболы.

Второе сечение представляет собой квадратную параболу. Ядро сечения, соответствующее этой параболе, описывается эллипсом.

Координаты ядра сечения, выведенные по формулам непрерывного способа, являются параметрическими. Параметром для этих координат является величина $u-a$. Выразив указанный параметр из явной координаты $u_я$ и подставив его в другую явную координату $v_я$, получаем неявную зависимость $v_я = f(u_я)$. Далее, выполнив математические преобразования, получим неявную зависимость $F(u_я, v_я) = 0$, которая представляет собой каноническое уравнение эллипса, либо гиперболы.

Ключевые слова: ядро сечения, декартовы координаты, эллипс, гипербола, параболa, касательная.

В дисциплине «Сопроотивление материалов» в разделе «Внецентренное растяжение – сжатие прямолинейных стержней» рассматривается вопрос построения ядра сечения. Координаты $u_я, v_я$ ядра сечения определяются по формулам:

$$u_я = -\frac{i_v^2}{a_u}, \quad (1)$$

$$v_я = -\frac{i_u^2}{a_v}, \quad (2)$$

где i_u^2, i_v^2 – квадраты радиусов инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей u, v ; a_u, a_v – отрезки главных центральных осей u, v , отсекаемые касательной к поперечному сечению.

Контур поперечного сечения может состоять из прямых, кривых либо из сочетания этих линий. Если контур состоит только из прямых линий, то касательные совпадают с прямыми линиями. В этом случае ядро сечения будет представлять собой многоугольник. В случае же, когда поперечное сечение ограничено кривой линией, касательные проводят с некоторым угловым шагом, и чем меньше этот угловой шаг, тем ядро сечения будет больше приближено к кривой линии.

Этот способ построения ядра сечения с использованием формул (1), (2) является общепринятым. Назовем такой способ дискретным, или прерывным.

Другой способ авторы назвали непрерывным. Такое название способ получил благодаря использованию бесконечно большого количества касательных на криволинейной части поперечного сечения. В результате этого ядро сечения приобретает вид кривой линии вместо ломаных прямых. Идея использования бесконечного количества касательных взята из математического анализа, где геометрический смысл производной равен тангенсу угла наклона касательной, т. е.:

$$v' = \frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Разумеется, такое возможно, если кривая имеет свое уравнение, т. е. она является аналитической.

Ядро сечения, построенное непрерывным способом, имеет наибольшую площадь по сравнению с ядром сечения, построенным дискретным способом. Это доказывается на основании двух следующих положений: во-первых, ядро сечения является выпуклой линией; во-

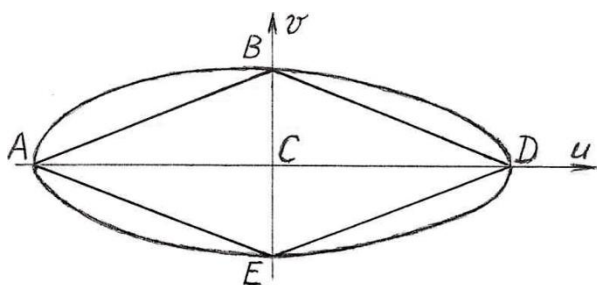


Рис. 1. Два ядра сечения для одного поперечного сечения

вторых, для конкретного поперечного сечения с криволинейным контуром координаты ядра сечения (A, B, D, E), построенного дискретным способом, ложатся на ядро сечения, построенное непрерывным способом (кривая ABDEA).

Как видно из рис. 1, многоугольник ABDE, построенный дискретным способом, вписан в кривую ABDEA, построенную непрерывным способом. Утверждение доказано.

В источниках [2–4] показано, что отрезки:

$$a_u = u - \frac{v}{v'}, \quad a_v = v - uv', \quad (4)$$

где u, v – абсцисса и ордината кривой в главных центральных осях координат u, v .

Подставляя (4) в (1), (2), получим координаты ядра сечения для непрерывного способа:

$$u_{\text{я}} = -\frac{i_v^2}{u - \frac{v}{v'}}, \quad (5)$$

$$v_{\text{я}} = -\frac{i_u^2}{v - uv'}. \quad (6)$$

Или:

$$u_{я} = -i_v^2 \frac{v'}{uv' - v}, \quad (7)$$

$$v_{я} = i_u^2 \frac{1}{uv' - v}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) выводится тангенс угла наклона касательной к ядру сечения:

$$\frac{dv_{я}}{du_{я}} = -\frac{i_u^2}{i_v^2} \cdot \frac{u}{v}. \quad (9)$$

В дисциплине «Сопротивление материалов» очень мало уделяется внимания вопросу построения ядра сечения для стержней с криволинейной формой поперечного сечения. Таких сечений только два: окружность и эллипс.

Для окружности ядром сечения является окружность с радиусом, вчетверо меньшим радиуса поперечного сечения. Для эллипса ядром сечения является эллипс с полуосями, вчетверо меньшими полуосяей поперечного сечения.

Далее рассмотрим примеры построения ядра сечения для поперечных сечений без вывода геометрических характеристик.

Симметричное поперечное сечение с криволинейной частью в виде полуокружности.

Запишем некоторые геометрические характеристики изображенного поперечного сечения с осью симметрии x (рис. 2) без вывода.

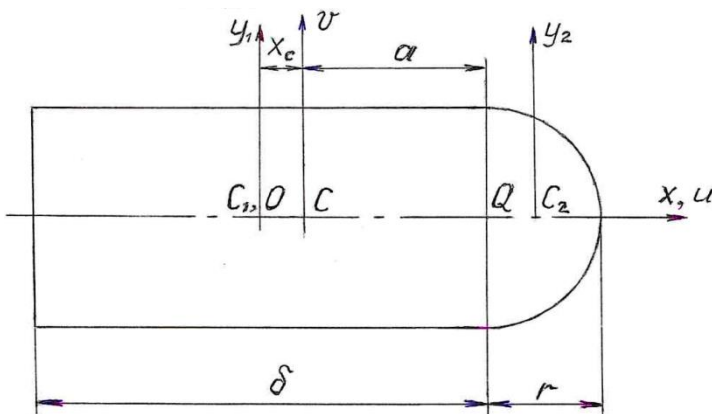


Рис. 2. Стержень с круглой частью поперечного сечения

Координата центра тяжести площади поперечного сечения:

$$x_c = \frac{r(3\pi\delta + 8r)}{6(4\delta + \pi r)}. \quad (10)$$

Оси u, v являются главными центральными осями.

Величина δ с использованием относительной координаты $\alpha = \frac{a}{r}$:

$$\delta = \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \alpha + \frac{2}{3}} \right) r. \quad (11)$$

Квадраты радиусов инерции:

$$i_u^2 = \frac{r^2(16\delta + 3\pi r)}{12(4\delta + \pi r)}; \quad (12)$$

$$i_v^2 = \frac{1}{4\delta + \pi r} \left[\frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta r}{9\pi} \cdot \frac{(3\pi\delta + 8r)^2}{4\delta + \pi r} + 2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) r^3 \right]. \quad (13)$$

Запишем уравнение дуги окружности в главных центральных осях u, v :

$$(u - a)^2 + v^2 = r^2. \quad (14)$$

Найдем координаты $u_я, v_я$ ядра сечения, воспользовавшись формулами (5), (6) или (7), (8). Предварительно найдем v^2, v из уравнения (14):

$$v^2 = r^2 - (u - a)^2; \quad (15)$$

$$v = \pm \sqrt{r^2 - (u - a)^2}. \quad (16)$$

Из уравнения (14) определим $v' = \frac{dv}{du}$:

$$2(u - a) + 2v \cdot v' = 0,$$

$$v' = -\frac{u - a}{v}. \quad (17)$$

$$u_я = -i_v^2 \cdot \frac{v'}{uv' - v} = -i_v^2 \cdot \frac{1}{u - \frac{v}{v'}} = -i_v^2 \cdot \frac{1}{u + \frac{v^2}{u - a}} = -i_v^2 \cdot \frac{1}{u + \frac{r^2 - (u - a)^2}{u - a}} = -i_v^2 \cdot \frac{u - a}{r^2 + a(u - a)}.$$

Получили координату:

$$u_я = -i_v^2 \cdot \frac{u - a}{r^2 + a(u - a)}. \quad (18)$$

Определяем вторую координату $v_я$:

$$\begin{aligned} v_я &= i_u^2 \cdot \frac{1}{uv' - v} = i_u^2 \cdot \frac{\frac{1}{v'}}{u - \frac{v}{v'}} = i_u^2 \cdot \frac{-\frac{v}{u - a}}{u + \frac{v^2}{u - a}} = -i_u^2 \cdot \frac{\frac{v}{u - a}}{\frac{u(u - a) + v^2}{u - a}} = \\ &= -i_u^2 \cdot \frac{v}{u^2 - au + v^2} = -i_u^2 \cdot \frac{\pm \sqrt{r^2 - (u - a)^2}}{u^2 - au + r^2 - (u - a)^2} = \pm i_u^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - (u - a)^2}}{r^2 + a(u - a)}. \end{aligned}$$

Получили:

$$v_я = \pm i_u^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - (u - a)^2}}{r^2 + a(u - a)}. \quad (19)$$

Верхний знак в формуле (19) соответствует верхней четверти окружности, а нижний знак – нижней четверти.

Эти уравнения координат ядра сечения записаны в параметрическом виде, где параметром является переменная $u - a$. Преобразуем эти уравнения так, чтобы координаты ядра сечения были записаны в декартовых координатах в явном и неявном виде, то есть чтобы получить зависимость $v_я = f(u_я)$. Для этого сначала выразим $u - a$ через $u_я$ из уравнения (18), а затем подставим этот параметр $u - a$ в уравнение (19).

Делаем первый шаг, выражаем $u-a$ через $u_{\text{я}}$:

$$u_{\text{я}} \left[r^2 + a(u-a) \right] = -i_v^2 (u-a); (u-a)(au_{\text{я}} + i_v^2) = -r^2 u_{\text{я}}; \quad (20)$$

$$u-a = \frac{-r^2 u_{\text{я}}}{au_{\text{я}} + i_v^2}.$$

Приступаем ко второму шагу:

$$v_{\text{я}} = \pm i_u^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - \left(\frac{-r^2 u_{\text{я}}}{au_{\text{я}} + i_v^2} \right)^2}}{r^2 + a \left(\frac{-r^2 u_{\text{я}}}{au_{\text{я}} + i_v^2} \right)} = \pm i_u^2 \cdot \sqrt{(au_{\text{я}} + i_v^2)^2 - r^2 u_{\text{я}}^2}.$$

Получили явную зависимость $v_{\text{я}} = f(u_{\text{я}})$:

$$v_{\text{я}} = \pm \frac{i_u^2}{r i_v^2} \cdot \sqrt{(au_{\text{я}} + i_v^2)^2 - r^2 u_{\text{я}}^2}. \quad (21)$$

Для получения неявной зависимости в декартовых координатах $F(u_{\text{я}}, v_{\text{я}}) = 0$ преобразуем выражение (21), возведя его в квадрат:

$$v_{\text{я}}^2 = \pm \frac{i_u^4}{r^2 i_v^4} \cdot \left[(au_{\text{я}} + i_v^2)^2 - r^2 u_{\text{я}}^2 \right]; \quad (22)$$

$$(au_{\text{я}} + i_v^2)^2 - r^2 u_{\text{я}}^2 = \frac{r^2 i_v^4}{i_u^4} v_{\text{я}}^2.$$

Приведем левую часть выражения (22) к квадратному уравнению относительно переменной $u_{\text{я}}$:

$$(au_{\text{я}} + i_v^2)^2 - r^2 u_{\text{я}}^2 = 0; a^2 u_{\text{я}}^2 + 2ai_v^2 u_{\text{я}} - r^2 u_{\text{я}}^2 = 0;$$

$$(a^2 - r^2)u_{\text{я}}^2 + 2ai_v^2 u_{\text{я}} + i_v^4 = 0.$$

Разделим выражение на $a^2 - r^2$:

$$u_{\text{я}}^2 + 2 \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2} u_{\text{я}} + \frac{i_v^4}{a^2 - r^2} = 0;$$

$$\left[u_{\text{я}}^2 + 2 \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2} u_{\text{я}} + \frac{i_v^4 a^2}{(a^2 - r^2)^2} \right] - \frac{i_v^4 a^2}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{i_v^4}{a^2 - r^2} = 0;$$

$$\left(u_{\text{я}} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{-i_v^4 a^2}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{i_v^4}{a^2 - r^2} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2 - r^2} = 0;$$

$$\left(u_{\text{я}} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{-i_v^4 a^2 + i_v^4 a^2 - i_v^4 r^2}{(a^2 - r^2)^2} = 0;$$

$$\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2}\right)^2 - \frac{i_v^4 r^2}{(a^2 - r^2)^2} = 0.$$

После преобразования левой части выражения (22) добавим правую часть этого же выражения, деленную на $a^2 - r^2$:

$$\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2}\right)^2 - \frac{i_v^4 r^2}{(a^2 - r^2)^2} = \frac{i_v^4 r^2}{i_u^4 (a^2 - r^2)^2} \cdot v_{я}^2.$$

Продолжим преобразование:

$$\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2}\right)^2 - \frac{i_v^4 r^2}{i_u^4 (a^2 - r^2)^2} \cdot v_{я}^2 = \frac{i_v^4 r^2}{(a^2 - r^2)^2}.$$

Разделим полученное выражение на правую его часть:

$$\frac{\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2}\right)^2}{\frac{i_v^4 r^2}{(a^2 - r^2)^2}} - \frac{a^2 - r^2}{i_u^4} \cdot v_{я}^2 = 1. \quad (23)$$

Или:

$$\frac{\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2}\right)^2}{\left(\frac{i_v^2 r}{a^2 - r^2}\right)^2} - \frac{v_{я}^2}{\left(\frac{i_u^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right)} = 1. \quad (24)$$

Если в полученном выражении $a > r$, то оно представляет собой уравнение гиперболы. Это уравнение более кратко можно представить в следующем виде:

$$\frac{(u_{я} + u_G)^2}{a_2^2} - \frac{v_{я}^2}{b_2^2} = 1, \quad (25)$$

где $u_G = \frac{i_v^2 a}{a^2 - r^2}$ – абсцисса центра G симметрии гиперболы, лежащая в начале координат осей $u_{я}$,

$v_{я}$; $a_2 = \frac{i_v^2 r}{a^2 - r^2}$ – действительная полуось гиперболы, совпадающая с осью $u_{я}$; $b_2 = \frac{i_u^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ –

мнимая полуось гиперболы, совпадающая с осью $v_{я}$.

Если же в выражении (23) $a < r$, то оно будет иметь вид:

$$\frac{\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{r^2 - a^2}\right)^2}{\frac{i_v^4 r^2}{(r^2 - a^2)^2}} + \frac{r^2 - a^2}{i_u^4} \cdot v_{я}^2 = 1. \quad (26)$$

Или:

$$\frac{\left(u_{я} + \frac{i_v^2 a}{r^2 - a^2}\right)^2}{\left(\frac{i_v^2 r}{r^2 - a^2}\right)^2} + \frac{v_{я}^2}{\left(\frac{i_u^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right)} = 1. \quad (27)$$

Это уравнение эллипса.

Представим уравнение (27) короче:

$$\frac{(u_{я} + u_G)^2}{a_3^2} - \frac{v_{я}^2}{b_3^2} = 1, \quad (28)$$

где $u_G = \frac{i_v^2 a}{r^2 - a^2}$ – абсцисса центра G эллипса, лежащая в начале координат осей $u_{я}$, $v_{я}$;

$a_3 = \frac{i_v^2 r}{r^2 - a^2}$ – полуось эллипса, совпадающая с осью $u_{я}$; $b_3 = \frac{i_u^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$ – полуось эллипса, совпадающая с осью $v_{я}$.

Следует заметить, что при $a = r$ полуоси эллипса стремятся к бесконечности, что видно из уравнений для a_3 , b_3 , причем так как

$$\lim_{(r-a) \rightarrow 0} \frac{b_3}{a_3} = 0,$$

b_3 , являясь бесконечно большой величиной по сравнению с a_3 , становится бесконечно малой величиной. В этом предельном случае эллипс превращается в гиперболу.

После проведенного анализа подведем итоги. Если симметричное сечение ограничено полудугой окружности, то часть ядра сечения, соответствующая этой полудуге, имеет форму эллипса, либо гиперболы. Величиной, определяющей ту или иную форму кривой ядра сечения, является относительная координата $\alpha = \frac{a}{r}$ центра окружности в главных центральных осях.

Если эта координата $\alpha < 1$, то ядро сечения имеет форму эллипса, если $\alpha > 1$, то ядро сечение имеет форму гиперболы. В предельном случае при $\alpha = 1$ ядро сечения имеет форму эллипса, переходящего в гиперболу.

Приведем два примера, иллюстрирующие вышесказанное.

Пример 1 ($\alpha < r$). Примем $a = 0,6r$.

Используя вышеприведенные формулы, запишем вычисленные при $\alpha = 0,6$ величины:

$$\delta = 2,003r; \quad x_c = 0,402r; \quad i_u^2 = 0,310r^2; \quad i_v^2 = 0,671r^2.$$

Полуоси эллипса ядра сечения:

$$a_3 = \frac{i_v^2 r}{r^2 - a^2} = \frac{0,671r^2 \cdot r}{r^2 - (0,6r)^2} = 1,049r;$$

$$b_3 = \frac{i_u^2}{\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{0,310r^2}{\sqrt{r^2 - (0,6r)^2}} = 0,387r.$$

Точку 3 определяем с помощью касательной III-III.

$$a_u = -0,5\delta - x_c = -0,5 \cdot 4,794r - 0,397r = -2,794r; \quad a_v \rightarrow \infty;$$

$$u_{3я} = -\frac{i_v^2}{a_u} = -\frac{2,619r^2}{-2,794r} = 0,937r;$$

$$v_{3я} = -\frac{i_u^2}{a_v} = -\frac{i_u^2}{\infty} = 0.$$

Ядро сечения представляет собой заштрихованную область 1-2-3-4-1, где 4-1-2 является частью правой ветви гиперболы.

Пример 3 ($a = r$) (предельный случай).

Запишем величины, вычисленные при $\alpha = 1$.

$$\delta = 2,799r; \quad x_c = 0,400r; \quad i_u^2 = 0,315r^2; \quad i_v^2 = 1,095r^2.$$

Абсцисса центра эллипса:

$$u_G = i_v^2 \frac{a}{r^2 - a^2} = 1,095r^2 \frac{r}{r^2 - r^2} = \infty.$$

Полуоси эллипса ядра сечения:

$$a_3 = i_v^2 \frac{r}{r^2 - a^2} = i_v^2 \frac{r}{r^2 - r^2} \rightarrow \infty;$$

$$b_3 = i_u^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} = i_u^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 - r^2}} \rightarrow \infty.$$

Отношение полуосей эллипса:

$$\frac{b_3}{a_3} = \frac{i_u^2}{i_v^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} = \frac{i_u^2}{i_v^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - r^2}}{r} = 0.$$

Полуось a_3 совпадает с осью u .

Найдем характерные точки ядра сечения с помощью касательных к поперечному сечению, используя уравнения сопротивления материалов.

Касательная I-I:

$$a_v = r, a_u = \infty; \quad v_{1я} = -\frac{i_u^2}{a_v} = -\frac{0,315r^2}{r} = -0,315r; \quad u_{1я} = -\frac{i_v^2}{a_u} = -\frac{i_v^2}{\infty} = 0.$$

Касательная II-II:

$$a_u = a + r = 2r, a_v = \infty; \quad u_{2я} = -\frac{i_v^2}{a_u} = -\frac{1,095r^2}{2r} = -0,547r; \quad v_{2я} = -\frac{i_u^2}{a_v} = -\frac{i_u^2}{\infty} = 0.$$

Касательная III-III симметрична касательной I-I.

Касательная IV-IV:

$$a_u = a - \delta = r - 2,799r = -1,799r; \quad a_v = \infty;$$

$$u_{4я} = -\frac{i_v^2}{a_u} = -\frac{1,095r^2}{-1,799r} = 0,608r; \quad v_{4я} = -\frac{i_u^2}{a_v} = -\frac{i_u^2}{\infty} = 0.$$

Расчетные величины используем при построении ядра сечения 1-2-3-4-1, изображенного на поперечном сечении (рис. 5). Ветви эллипса, на который накладывается кривая 1-2-3 ядра сечения, уходят в бесконечность.

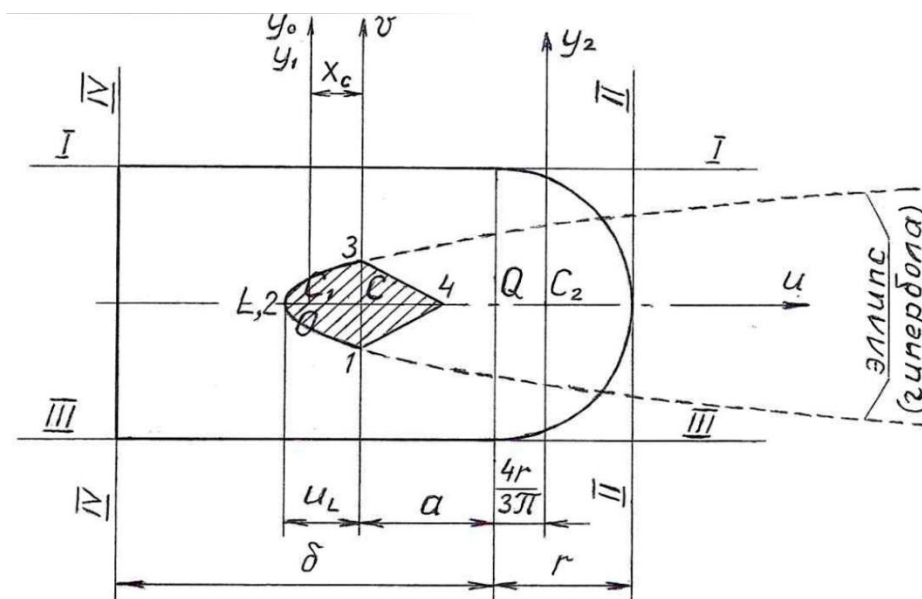


Рис. 5. Предельный случай ($a = r$)

Симметричное сечение с параболической частью.

Уравнение квадратной параболы в осях x, y :

$$y^2 = b^2 - ax. \quad (29)$$

Отсюда:

$$x = \frac{b^2 - y^2}{a}. \quad (30)$$

Тогда высота параболы (рис. 6):

$$H = x_{1y=0} = \frac{b^2 - 0^2}{a} = \frac{b^2}{a}. \quad (31)$$

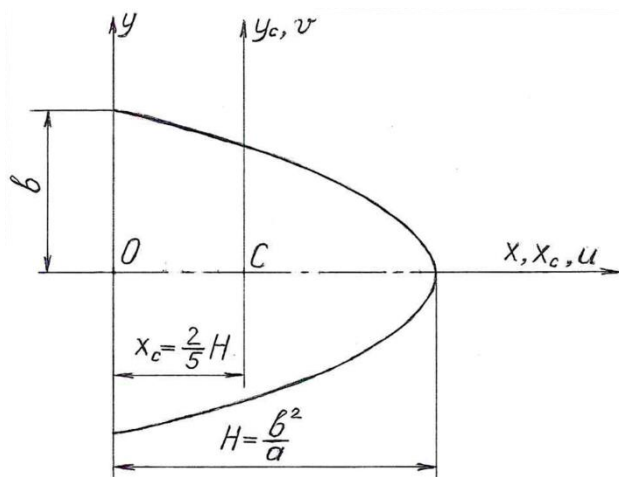


Рис. 6. Параболическое очертание стержня

Квадраты радиусов инерции данного поперечного сечения взяты из источника [2]:

$$i_u^2 = i_{xc}^2 = \frac{b^2}{5}; \quad (32)$$

$$i_v^2 = i_{yc}^2 = \frac{12}{175} H^2 = \frac{12}{175} \cdot \frac{b^4}{a^2}. \quad (33)$$

Координаты ядра сечения для параболической части поперечного сечения определяем по преобразованным формулам непрерывного способа (5), (6) или (7), (8):

$$u_{я} = -i_v^2 \cdot \frac{1}{u - \frac{v}{v'}}; \quad (34)$$

$$v_{я} = i_u^2 \cdot \frac{\frac{1}{v'}}{u - \frac{v}{v'}}. \quad (35)$$

Уравнение (29) квадратной параболы в главных центральных осях x_c , y_c , и в другом обозначении u , v , с учетом параллельного переноса оси u на величину $x_c = \frac{2}{5} H = \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{a}$ будет иметь вид

$$v^2 = b^2 - a\left(u + \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{a}\right) = \frac{3}{5} \cdot b^2 - au,$$

т. е.:

$$v^2 = \frac{3}{5} \cdot b^2 - au. \quad (36)$$

Найдем первую производную:

$$v' = \frac{dv}{du} \cdot 2v \cdot v' = -a,$$

тогда:

$$v' = -\frac{a}{2v}. \quad (37)$$

Теперь определяем координаты ядра сечения, используя уравнения (34) и (35):

$$u_{я} = -i_v^2 \cdot \frac{1}{u - \frac{v}{v'}} = -i_v^2 \cdot \frac{1}{u - \frac{v}{-\frac{a}{2v}}} = -i_v^2 \cdot \frac{a}{au + 2v^2};$$

$$v_{я} = i_u^2 \cdot \frac{\frac{1}{v'}}{u - \frac{v}{v'}} = i_u^2 \cdot \frac{-\frac{2v}{a}}{u - \frac{v}{-\frac{a}{2v}}} = -i_u^2 \cdot \frac{2v}{au + 2v^2}.$$

Подставим в последние два уравнения величины i_u^2 , i_v^2 , v^2 , v' из формул (32), (33), (36), (37):

$$u_{я} = -\frac{12}{175} \cdot \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{a}{au + 2\left(\frac{3}{5}b^2 - au\right)} = -\frac{12}{175} \cdot \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{a}{\frac{6}{5}b^2 - au} = -\frac{12}{35} \cdot \frac{b^4}{a(6b^2 - 5au)};$$

$$v_{я} = -\frac{b^2}{5} \cdot \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}b^2 - au}}{au + 2\left(\frac{3}{5}b^2 - au\right)} = \pm \frac{2b^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - 5au}}{6b^2 - 5au}.$$

Получим:

$$u_{я} = -\frac{12}{35} \cdot \frac{b^4}{a(6b^2 - 5au)}; \quad (38)$$

$$v_{я} = \pm \frac{2b^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - 5au}}{6b^2 - 5au}. \quad (39)$$

Уравнения (38) и (39) для координат $u_{я}$, $v_{я}$ являются параметрическими, где параметром является величина u . Преобразуем эти параметрические уравнения в декартовые с главными центральными осями u , v . Для этого определим параметр u из уравнения для $u_{я}$ и подставим его в уравнение для $v_{я}$:

$$1) u = f_1(u_{я}).$$

$$35a(6b^2 - 5au)u_{я} = -12b^4; \quad 175a^2uu_{я} = 210ab^2u_{я} + 12b^4.$$

Отсюда:

$$u = \frac{210ab^2u_{я} + 12b^4}{175a^2u_{я}}; \quad (40)$$

$$2) v_{я} = f_2(u_{я}).$$

$$v_{я} = \pm \frac{2b^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - 5a \frac{210ab^2u_{я} + 12b^4}{175a^2u_{я}}}}{6b^2 - 5a \frac{210ab^2u_{я} + 12b^4}{175a^2u_{я}}} = \pm \frac{2b^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{-3b^2 - \frac{12b^4}{35au_{я}}}}{-\frac{12b^4}{35au_{я}}}.$$

Получили уравнение ординаты $v_{я}$ в зависимости от абсциссы $u_{я}$ в явном виде:

$$v_{я} = \pm \frac{35au_{я}}{6\sqrt{5} \cdot b} \cdot \sqrt{-3 - \frac{12b^2}{35au_{я}}}. \quad (41)$$

Полученное уравнение для функции $v_{я}$ является уравнением в декартовых координатах v , u , записанное в явном виде. Чтобы перевести это уравнение в неявный вид, возведем обе части в квадрат:

$$180b^2v_{я}^2 = 1225a^2u_{я}^2 \cdot \left(-3 - \frac{12b^2}{35au_{я}}\right); \quad 180b^2v_{я}^2 + 3675a^2u_{я}^2 + 420ab^2u_{я} = 0.$$

Получим:

$$\frac{12}{7}b^2v_y^2 + (35a^2u_y^2 + 4ab^2u_y) = 0. \quad (42)$$

Приведем выражение в скобках к полному квадрату:

$$\left(\sqrt{35}au_y + \frac{2}{\sqrt{35}}b^2\right)^2 = \left(35a^2u_y^2 + 4ab^2u_y + \frac{4}{35}b^4\right) - \frac{4}{35}b^4.$$

Получим:

$$35a^2u_y^2 + 4ab^2u_y = \left(\sqrt{35}au_y + \frac{2}{\sqrt{35}}b^2\right)^2 - \frac{4}{35}b^4.$$

Подставим последнее выражение в уравнение (42):

$$\left(\sqrt{35}au_y + \frac{2}{\sqrt{35}}b^2\right)^2 + \frac{12}{7}b^2v_y^2 - \frac{4}{35}b^4 = 0;$$

или:

$$\left(\sqrt{35}au_y + \frac{2}{\sqrt{35}}b^2\right)^2 + \frac{12}{7}b^2v_y^2 = \frac{4}{35}b^4.$$

Разделим последнее уравнение на первую часть $\frac{4}{35}b^4$:

$$\left(\sqrt{35}au_y + \frac{\sqrt{35}}{2b^2} + 1\right)^2 + \frac{12}{7}b^2v_y^2 \cdot \frac{35}{4b^4} = 1; \quad \left(\frac{35}{2} \cdot \frac{au_y}{b^2} + 1\right)^2 + \frac{15}{b^2}v_y^2 = 1;$$

или:

$$\frac{\left(u_y + \frac{2}{35} \cdot \frac{b^2}{a}\right)^2}{\left(\frac{2}{35} \cdot \frac{b^2}{a}\right)^2} + \frac{v_y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{15}}\right)^2} = 1.$$

С учетом того, что $\frac{b^2}{a} = H$ (см. (31)), последнее уравнение примет вид:

$$\frac{\left(u_y + \frac{2}{35} \cdot H\right)^2}{\left(\frac{2}{35} \cdot H\right)^2} + \frac{v_y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{15}}\right)^2} = 1. \quad (43)$$

Уравнение (43) представляет собой уравнение (41), преобразованное к неявному виду.

Уравнение (43) является уравнением эллипса, центр которого расположен левее центра тяжести S поперечного сечения на расстоянии $\frac{2}{35} \cdot H$. Полуосями эллипса являются величины

$$a_s = \frac{2}{35} \cdot H \quad \text{и} \quad b_s = \frac{b}{\sqrt{15}}.$$

Построим ядро сечения, соответствующее заданному поперечному сечению. Ввиду симметрии поперечного сечения ядро сечения также будет симметричным (ось симметрии Ou). Рассуждения будем вести для верхней половины сечения. Параболической части 1-2 поперечного сечения (рис. 7), как доказано, соответствует эллиптическая часть 1-2 ядра сечения. Повороту касательной II вокруг точки 2 до положения III, как известно, соответствует прямая 2-3 ядра сечения. Так как касательная III параллельна оси v , то точка 3 ядра сечения находится на оси и правее точки C . Построенное с помощью таких рассуждений ядро сечения приведено на рис. 7.

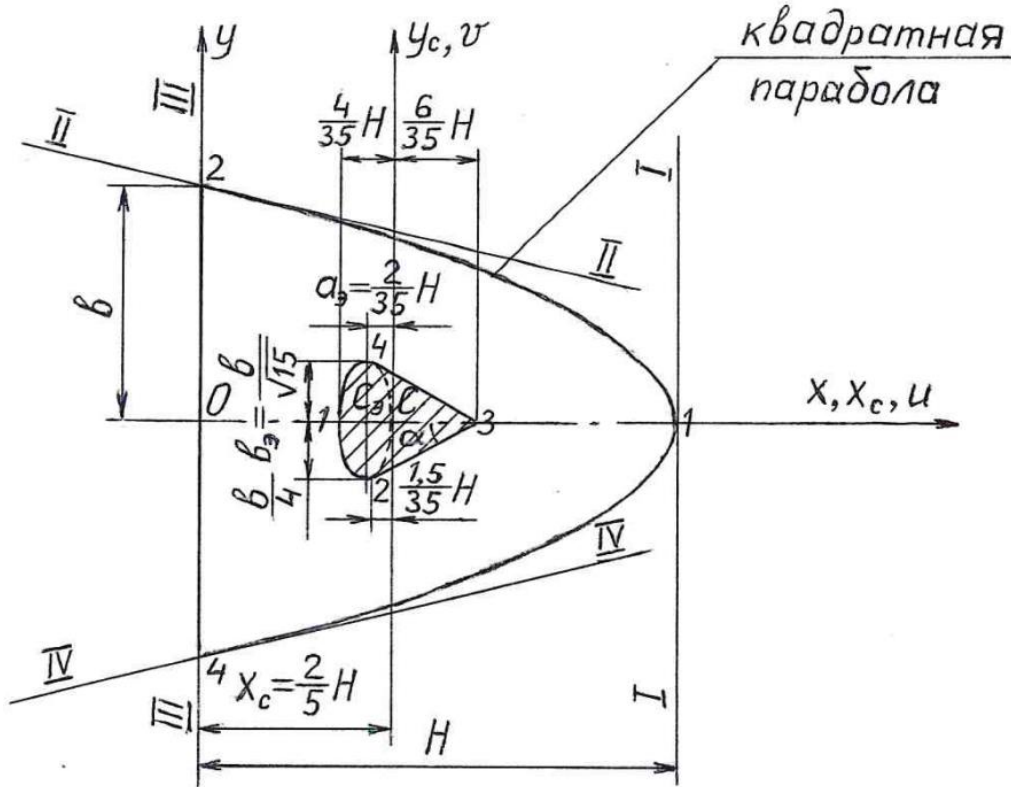


Рис. 7. Ядро сечения для стержня с параболической формой сечения

Убедимся с помощью известных формул (1) и (2) сопротивления материалов, что точка 1 ядра сечения лежит на эллипсе:

$$u_{1я} = -\frac{i_v^2}{a_u} = -\frac{\frac{12}{175}H^2}{\frac{3}{5}H} = -\frac{4}{35}H,$$

что соответствует точке 1 эллипса.

Теперь определим углы наклона к оси u прямой 2-3 ядра сечения и касательной к эллипсу в точке 2:

1. Определение угла наклона прямой 2-3 ядра сечения. Для этого надо найти координаты точек 2 и 3. Используем для координат точки 2 формулы (38) и (39):

$$u_{2я} = -\frac{12}{35} \cdot \frac{b^4}{a(6b^2 - 5au_2)} = -\frac{12}{35} \cdot \frac{b^4}{a\left(6b^2 - 5a\left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{a}\right)\right)} = -\frac{1,5b^2}{35a} = -\frac{1,5}{35}H;$$

$$v_{2я} = -\frac{2b^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - 5au_2}}{6b^2 - 5au_2} = -\frac{2b^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - 5a\left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{a}\right)}}{6b^2 - 5a\left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{a}\right)} = -\frac{b}{4}.$$

Координаты точки 3 определяем с помощью известных формул (1) и (2):

$$u_я = -\frac{i_v^2}{a_u}; v_я = -\frac{i_u^2}{a_v}.$$

$$u_{3я} = -\frac{\frac{12}{175}H^2}{-\frac{2}{5}H} = \frac{6}{35}H; v_{3я} = -\frac{\frac{b^2}{\infty}}{\infty} = 0.$$

Искомый угол определяем через $tg\alpha$:

$$tg\alpha_{2-3} = \frac{v_{3я} - v_{2я}}{u_{3я} - u_{2я}} = \frac{0 - \left(-\frac{b}{4}\right)}{\frac{6}{35}H - \frac{1,5}{35}H} = \frac{7}{6} \cdot \frac{b}{H} = \frac{7}{6} \cdot \frac{b}{\frac{b^2}{a}} = \frac{7}{6} \cdot \frac{a}{b}.$$

2. Определение углового коэффициента касательной к эллипсу в точке 2.

Определим угловой коэффициент касательной, используя уравнение (43) эллипса:

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{35} \cdot H\right)^2} \cdot 2\left(u_я + \frac{2}{35} \cdot H\right) + \frac{1}{\left(\frac{b}{\sqrt{15}}\right)^2} \cdot 2v_я^2 \cdot v_я' = 1;$$

$$v_я' = -\frac{\left(\frac{b}{\sqrt{15}}\right)^2}{\left(\frac{2}{35} \cdot H\right)^2} \cdot \frac{u_я + \frac{2}{35} \cdot H}{v_я} = -\frac{35^2}{2^2 \cdot 15} \cdot \frac{b^2}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{u_я + \frac{2}{35} \cdot H}{v_я} = -\frac{245}{12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{u_я + \frac{2}{35} \cdot H}{v_я}.$$

Получим:

$$v_я' = -\frac{245}{12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{u_я + \frac{2}{35} \cdot H}{v_я}. \quad (44)$$

$$tg\alpha_2 = v_я' = -\frac{245}{12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{u_{2я} + \frac{2}{35} \cdot H}{v_{2я}} = -\frac{245}{12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{-\frac{1,5}{35}H + \frac{2}{35} \cdot H}{-\frac{b}{4}} =$$

$$= -\frac{245}{12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{4H}{-70b} = \frac{7}{6} \cdot \frac{a^2}{b^3} \cdot H = \frac{7}{6} \cdot \frac{a^2}{b^3} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{7}{6} \cdot \frac{a}{b}.$$

Так как $\alpha_{2-3} = \alpha_2 = \alpha$, то, следовательно, прямая 2-3 ядра сечения является касательной к эллипсу в точке 2 (точке схода с эллипса).

Итак, для построения ядра сечения (см. рис. 7) выполняем следующее:

- 1) откладываем на оси x центр C площади поперечного сечения с абсциссой $x_c = \frac{2}{5}H$;
- 2) проводим главные центральные оси u, v , проходящие через точку C ;
- 3) слева от центра C площади поперечного сечения на расстоянии $\frac{2}{35}H$ откладываем

центр C_3 эллипса ядра сечения;

- 4) строим эллипс ядра сечения с полуосями $a_3 = \frac{2}{35}H; b_3 = \frac{b}{\sqrt{15}}$;

5) откладываем точку 3 ядра сечения общепринятым способом, соответствующую касательной III ;

6) через эту точку 3 проводим две прямые 3-2 и 3-4, являющиеся касательными к эллипсу.

Ядро сечения располагается между эллипсом и двумя касательными к нему. На рис. 7 ядро сечения заштриховано.

Библиографический список

1. Александров А. В. Сопроотивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 2009. – 559 с.
2. Инкижинов Н. С. Особенности построения ядра сечения: монография. – Новосибирск: Изд-во Сиб. гос. унив. водн. трансп., 2016. – 80 с.
3. Инкижинов Н. С. О построении ядра сечения для стержней с криволинейной частью поперечного сечения // Сибирский научный вестник / Новосибирский научный вестник «Ноосферные знания и технологии» Российской академии естественных наук. – Новосибирск: Изд. СГУВТ, 2018. – Вып. XXII. – С. 16–18.
4. Викулов С. В. Сопоставление двух способов построения ядра сечения: дискретного и непрерывного / С. В. Викулов, Л. В. Пахомова, Н. С. Инкижинов // Строительная механика и конструкции. – 2023. – № 1 (36). – С. 38–41.
5. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука, 1980. – 976 с.

References

1. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Strength of materials. M.: High School, 2009. 559 p.
2. Inkizhinov N.S. Features of constructing the cross-section core: monograph. Novosibirsk: Publishing House of the Siberian State University of Water Transport, 2016. 80 p.
3. Inkizhinov N.S. On constructing the cross-section core for rods with a curvilinear part of the cross-section // Siberian scientific bulletin. Novosibirsk scientific bulletin "Noospheric knowledge and technologies" of the Russian Academy of Natural Sciences. Novosibirsk: Publishing House of the Siberian State University of Water Transport, 2018. Issue XXII. Pp. 16–18.
4. Vikulov S.V., Pakhomova L.V., Inkizhinov N.S. Comparison of two methods for constructing the core of a section: discrete and continuous // Construction Mechanics and Structures. No. 1 (36). 2023. Pp. 38–41.
5. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of mathematics for engineers and students of higher technical universities. M.: Science, 1980. 976 p.

SEVERAL TASKS WITH THE DERIVATION OF THE EQUATION OF THE KERNEL OF A SECTION IN CARTESIAN COORDINATES

L. V. Pahomova¹, O. V. Scherbakova², N. S. Inkizhinov³

Siberian State University of Water Transport^{1,2,3}
Novosibirsk, Russia

¹ PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Technical Mechanics and Lifting and Transport Machines, tel.: +7(913)9040057, e-mail: Pahomova_l_v@mail.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Technical Mechanics and Lifting and Transport Machines, tel.: +7(913)9258439, e-mail: fisher-54@yandex.ru

³ Associate Professor of the Department of Technical Mechanics and Lifting and Transport Machines, tel.: +7(913)7998152, e-mail: inkizhinov47@bk.ru

This article considers two cross-sections with one axis of symmetry.

The first section is represented by a rectangle with a semicircle. The curves of the core of the section corresponding to the semicircle have two varieties, depending on the relative coordinate of the center $\alpha = a / r$ of the circle in the main central axes u, v . If $\alpha < 1$, then the curve of the core of the section is an ellipse. Otherwise $\alpha > 1$, the section core curve is a hyperbola. In the intermediate case $\alpha = 1$, the semi-axes of the ellipse tend to infinity, while the branches of the ellipse degenerate into branches of the hyperbola.

The second section is a square parabola. The core of the section corresponding to this parabola is described by an ellipse.

The coordinates of the core of the section, derived from the formulas of the continuous method, are parametric. The parameter for these coordinates is the value $u-a$. Expressing the specified parameter from the explicit coordinate of $u_{\mathcal{R}}$ and substituting it into another explicit coordinate of $v_{\mathcal{R}}$, we get an explicit dependence $v_{\mathcal{R}} = f(u_{\mathcal{R}})$. Further, by performing mathematical transformations, we obtain a non implicit dependence $F(u_{\mathcal{R}}, v_{\mathcal{R}}) = 0$, which is the canonical equation of an ellipse or hyperbola.

Keywords: section core, Cartesian coordinates, ellipse, hyperbola, parabola, tangent.

ФОРМУЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ

М. Н. Кирсанов ¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ» ¹
Россия, г. Москва

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: mpei2004@yandex.ru

Выводятся аналитические зависимости прогибов и первой собственной частоты колебаний фермы с параллельными поясами, шарнирно опертой по концам. Рассмотрены равномерные узловыи нагрузки по верхнему и нижнему поясам, а также сосредоточенная нагрузка в середине пролета. Ферма имеет регулярный тип, что позволяет применить индуктивный вывод искомых зависимостей. В задаче о колебании предполагается, что масса конструкции равномерно распределена по ее узлам, а стержни невесомые и имеют одинаковую жесткость. Для вычисления частоты колебаний использован модифицированный метод Донкерлея. Жесткость конструкции рассчитывается по формуле Максвелла – Мора. Аналитическое решение имеет простую формулу и дает результат, близкий к решению, полученному численно для системы с многими степенями свободы.

Ключевые слова: статически определимая ферма, первая собственная частота, аналитический метод, формула Максвелла – Мора, индукция, прогиб.

Введение. В задачах о численном расчете регулярных конструкций с большим числом элементов одной из проблем является преодоление «проклятия размерности», ограничивающее точность решения. Это относится и к статическим задачам о прогибе фермы в зависимости от размеров, нагрузки и числа панелей, и к задачам о нахождении границ собственных частот. Аналитические методы свободны от этого недостатка. Для получения решения задачи о прогибе или частоте колебаний в зависимости от числа панелей регулярной фермы используется индуктивный метод [1–3], реализуемый в системах компьютерной математики «Maple», «Mathematica», «Derive», «Maxima». В задачах о частоте колебаний есть дополнительная трудность – характеристическое уравнение высокого порядка решить аналитически нельзя. Поэтому здесь часто используют приближенные подходы. Наиболее известны метод Донкерлея, дающий оценку первой частоте снизу, и метод Рэлея для верхней оценки частоты. Метод Рэлея точнее метода Донкерлея, но более трудоемок, и формула для частоты получается более громоздкой.

Аналитические решения для прогиба регулярных ферм с применением индуктивного метода и формулы Максвелла – Мора для плоских регулярных ферм получены в [4–7]. Приближенная формула для расчета первой частоты собственных колебаний фермы выведена в [8] для случая произвольного числа панелей в конструкции в предположении о вертикальных колебаниях узлов. Метод конечных элементов для расчета прогибов и частот строительных конструкций применялся в [9–11]. Аналитический расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной регулярной фермы выполнен в [12]. Формула для первой частоты регулярной пространственной фермы консольного типа методом индукции с применением системы компьютерной математики «Maple» получена в [13]. Спектр частот плоской регулярной решетчатой фермы изучен в [14]. В [15, 16] для аналитического расчета первой частоты колебаний плоской фермы используется упрощенный вариант метода Донкерлея. Для расчета границ первой частоты собственных колебаний простой регулярной балочной фермы с треугольной решеткой в [17] применялись приближенные методы Рэлея и Донкерлея.

Конструкция фермы. Плоская статически определимая ферма с двумя опорами состоит из $2n$ одинаковых панелей длиной $4a$ (рис. 1). В каждой панели содержится три стержня нижнего пояса длиной a , два стержня верхнего пояса длиной $2a$, четыре стойки высотой h и $2h$ и шесть раскосов длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Высота фермы равна $2h$, длина – $8na$.

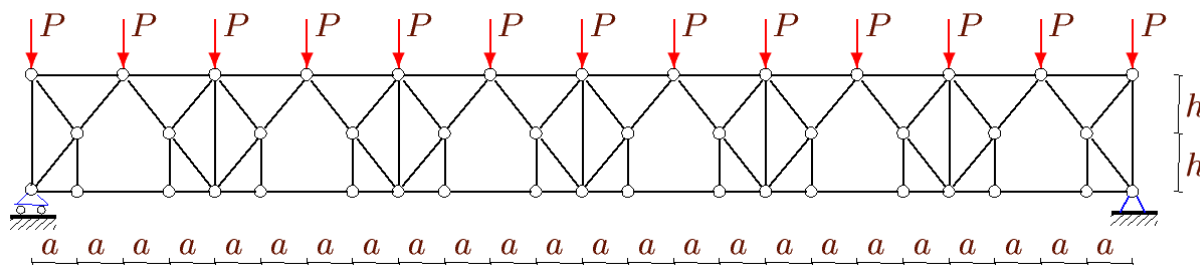


Рис. 1. Модель фермы с нагрузкой по верхнему поясу, $n = 3$

Принимается, что узлы фермы колеблются по вертикали. Число степеней свободы рассматриваемой системы масс m равно числу узлов конструкции: $K = 14n + 2$. Без учета трех опорных стержней ферма содержит $v = 28n + 1$ стержней.

Расчет усилий в стержнях. Усилия в стержнях рассчитываются аналитически из условия равновесия узлов в системе «Maple». Уравнения равновесия узлов составляются в систему вида:

$$\mathbf{GS} = \mathbf{R}, \tag{1}$$

где обозначено: \mathbf{R} – вектор узловых нагрузок; \mathbf{G} – матрица размером $v \times v$ направляющих косинусов; \mathbf{S} – вектор неизвестных усилий в стержнях. Три опорные реакции входят в число неизвестных. Значения элементов матрицы жесткости \mathbf{G} рассчитываются по заданным координатам концов стержневых элементов, соединенных в узлах с известными координатами. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). Координаты узлов фермы с $2n$ панелями имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{3i-2} &= 4(i-1)a, \quad y_{3i-2} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \\ x_{3i-1} &= (4i-3)a, \quad y_{3i-1} = 0, \\ x_{3i} &= (4i-a), \quad y_{3i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ x_{i+6n+1} &= (2i-1)a, \quad y_{i+6n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 4n, \\ x_{i+10n+1} &= 2(i-1)a, \quad y_{i+10n+1} = 2h, \quad i = 1, \dots, 4n+1. \end{aligned}$$

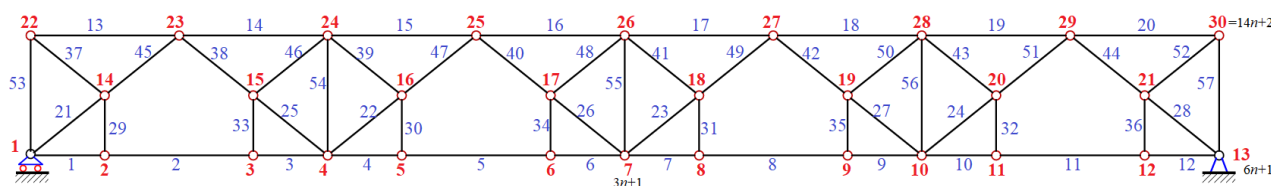


Рис. 2. Номера узлов и стержней, $n = 2$

Решение системы уравнений равновесия ищется с помощью операторов системы «Maple».

Прогиб. Нагрузка, равномерно распределенная по узлам верхнего или нижнего пояса. По величине прогиба середины пролета можно оценить жесткость всей конструкции фермы. Если загружены узлы верхнего пояса (рис. 3), то вектор правой части системы уравнений равновесия узлов имеет вид: $R_{2j} = P, \quad j = 10n + 2 \dots 14n + 2$.

Формула Максвелла – Мора для расчета прогиба содержит суммирование по всем усилиям в стержнях конструкции:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

где $S_{\alpha}^{(1)}$ – усилие в стержне α при действии единичной вертикальной силы на центральный узел с номером $3n+1$ нижнего пояса, в котором фиксируется прогиб; $S_{\alpha}^{(p)}$ – усилия в стержнях фермы от распределенной нагрузки; l_{α} – длина этого стержня. Жесткость EF стержней принимается одинаковой для всех стержней фермы.

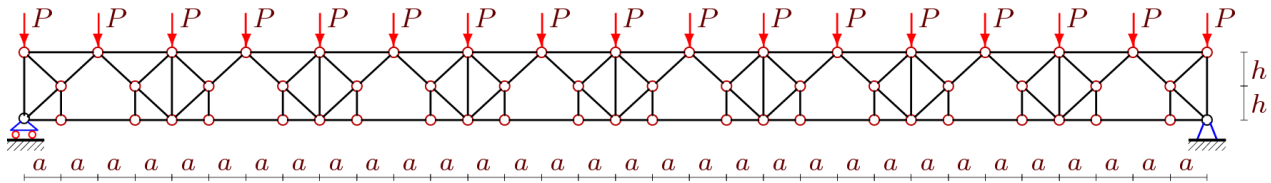


Рис. 3. Нагрузка на узлы верхнего пояса, $n = 4$

Последовательный расчет прогиба для различных n дает следующий ряд формул:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(14a^3 + 4c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(216a^3 + 16c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(1086a^3 + 36c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_4 &= P(3424a^3 + 64c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_5 &= P(8350a^3 + 100c^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Обобщение этих формул средствами «Maple» приводит к следующей формуле зависимости прогиба от числа панелей:

$$\Delta_n = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3}{h^2 EF}, \quad (2)$$

где коэффициенты имеют вид полиномов: $C_1 = 2(1 + 20n^2)n^2 / 3$, $C_2 = 4n^2$.

Аналогично в случае нагружения нижнего пояса (рис. 4) вектор правой части системы уравнений имеет вид: $R_{2j} = P$, $j = 2 \dots 6n$.

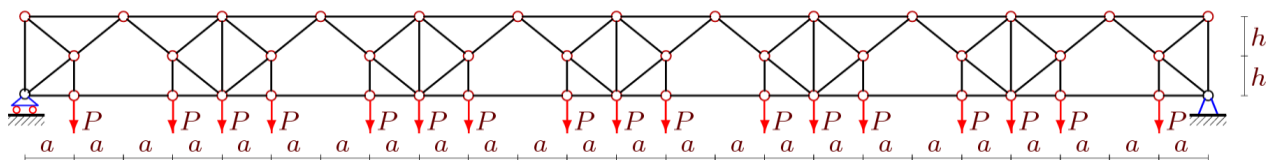


Рис. 4. Нагрузка на узлы нижнего пояса, $n = 3$

Коэффициенты в (2) будут иметь вид: $C_1 = 2(1 + 10n^2)n^2$, $C_2 = 6n^2$. Характерно для этих двух решений то, что они не зависят от жесткости стоек в решетке фермы, так как слагаемое, содержащее множитель h^3 , отсутствует в числителе формулы (2).

Прогиб. Сосредоточенная нагрузка в середине пролета. В этом случае только один элемент вектора правой части уравнения (1) отличен от нуля: $R_{2(3n+1)} = P$. В результате обобщения серии решений, полученных при различном числе панелей, формулы для коэффициентов в зависимости (2) прогиба от числа панелей приобретают вид: $C_1 = 2(1+8n^2)n/3$, $C_2 = 2n$.

Для иллюстрации решений на рис. 5 построены кривые зависимости безразмерного прогиба от числа панелей при нагружении нижнего пояса: $\Delta' = \Delta EF / (P_{sum} L)$, где $L = 8na$. Для нагрузки по нижнему поясу $P_{sum} = P(6n+1)$. Для нагрузки по верхнему поясу $P_{sum} = P(4n+1)$, кривые почти совпадают с кривыми прогиба середины пролета для нагрузки по нижнему поясу, хотя суммарная нагрузка на ферму заметно меньше.

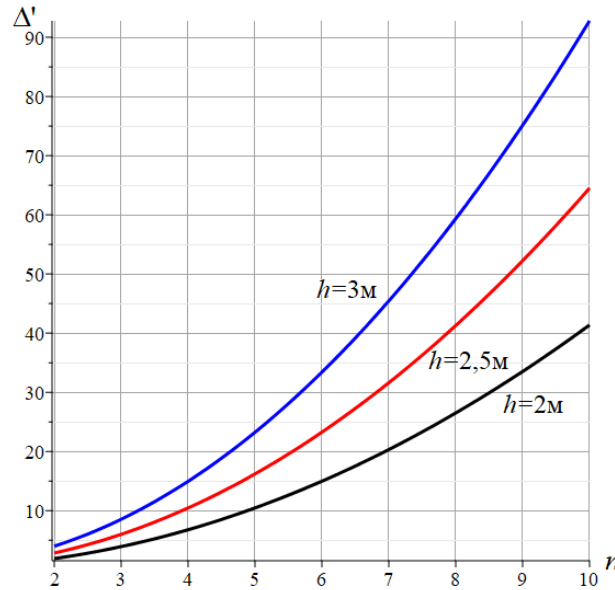


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей

Вычисление первой частоты собственных колебаний по упрощенному методу Донкерлея. Для расчета первой собственной частоты ω_D используется следующая формула:

$$\omega^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \tilde{\Delta}_n,$$

где δ^{\max} – наибольшее по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$, от действия вертикальной единичной силы на узел p . В рассматриваемой ферме это узел нижнего пояса в середине пролета с номером $3n+1$. Упрощение метода Донкерлея состоит в способе вычисления суммы $\sum_{p=1}^K \delta_p$. Для вычисления суммы используется теорема о среднем. Аналитическое значение $\tilde{\Delta}_n$ рассчитывается по формуле Максвелла – Мора в виде суммы по всем стержням конструкции, включая и три опорные:

$$\tilde{\Delta}_n = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ – значение усилия в стержне с номером α при воздействии на узел с номером p единичной вертикальной силы; l_{α} – длина соответствующего стержня. Жесткости EF всех

стержней фермы считаются равными. Левая подвижная опора моделируется вертикальным стержнем длиной h , правая неподвижная – двумя взаимно перпендикулярными стержнями длиной h и a .

Расчет сумм в (3) для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает формулы:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_1 &= K(12a^3 + 4c^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \tilde{\Delta}_2 &= K(88a^3 + 8c^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \tilde{\Delta}_3 &= K(292a^3 + 12c^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \tilde{\Delta}_4 &= K(688a^3 + 16c^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \tilde{\Delta}_5 &= K(1340a^3 + 20c^3 + h^3) / (4h^2EF), \dots\end{aligned}$$

Встроенные операторы «Maple» и оператор `rgf_findrecur` позволяют вывести аналитическое выражение для общего члена полученной последовательности. Для этого надо рассмотреть не менее 10 решений. Итоговая формула получает вид:

$$\tilde{\Delta}_n = K \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{h^2 EF}.$$

Коэффициенты в этой формуле получаются как решения рекуррентных уравнений и зависят только от числа панелей n в половине пролета конструкции:

$$C_1 = (8n^2 + 1) / 3, \quad C_2 = n, \quad C_3 = 1 / 4.$$

Итоговая формула для определения первой частоты свободных колебаний фермы имеет вид:

$$\omega_1 = h \sqrt{\frac{EF}{Km(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (4)$$

Численное решение. Для оценки точности полученного аналитического решения можно получить численное решение для собственных частот колебания узлов фермы с учетом всех K степеней свободы системы при условии, что узлы совершают вертикальные колебания. Для расчета частот в системе «Maple» применяется оператор вычисления собственных чисел матрицы «Eigenvalues» из специализированного пакета линейной алгебры «LinearAlgebra». Приняты размеры панели фермы: $a = 3$ м, $h = 2$ м, $h = 3$ м. Для стержней, выполненных из стали, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Площади поперечных сечений стержней одинаковые: $F = 9 \text{ см}^2$. Масса каждого шарнирного узла принята равной $m = 200$ кг. Аналитическое решение (4) для первой частоты ω_1 в зависимости от числа панелей сопоставлено с первой частотой численного спектра ω_n , полученной с учетом K степеней свободы грузов m в узлах (рис. 6). С ростом числа панелей численное решение сближается с аналитическим, при этом частота колебаний по первой форме уменьшается. Полученное аналитическое решение оказывается нижней границей численного.

Более точную оценку погрешности приближенного аналитического метода дает относительная величина: $\varepsilon = (\omega_n - \omega_1) / \omega_n$. Зависимости погрешности от числа панелей при длине стержня в панели $a = 3$ м для двух различных значений высоты h представлены на рис. 7. С увеличением числа панелей относительная погрешность аналитического решения уменьшается, достигая в пределе вполне приемлемой величины в 1 %.

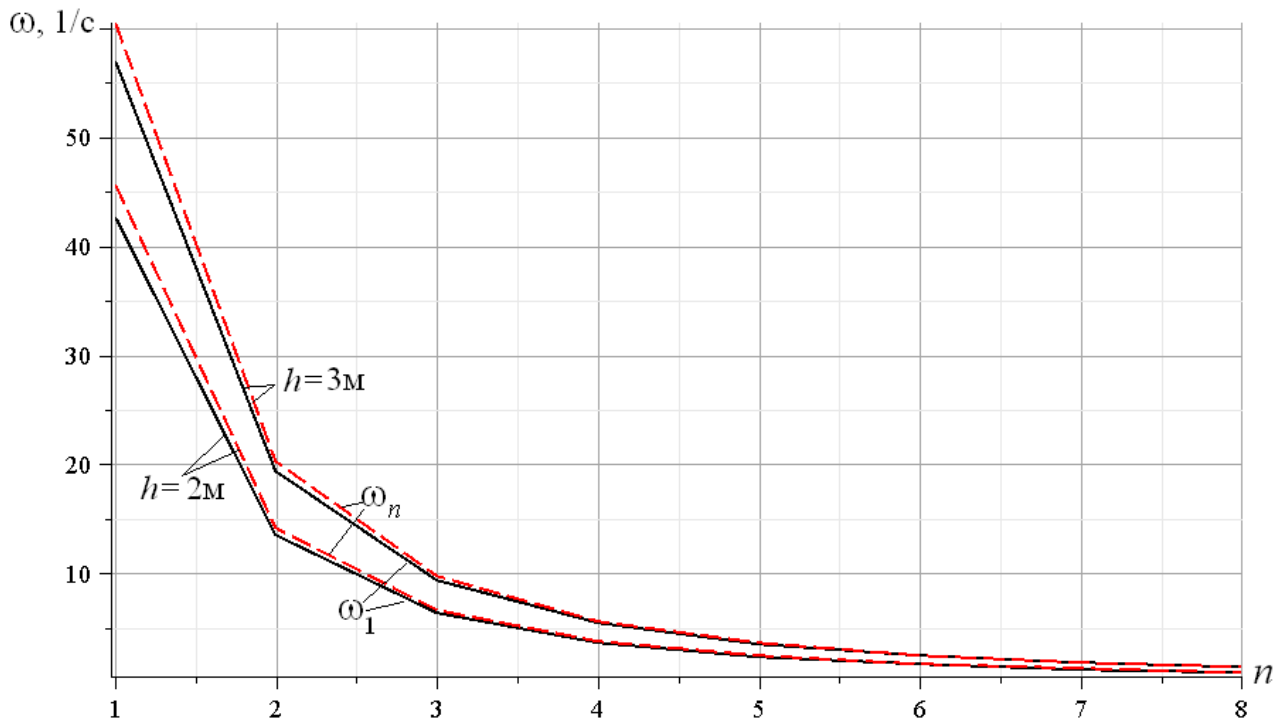


Рис. 6. Аналитическое решение ω_1 и численное ω_n

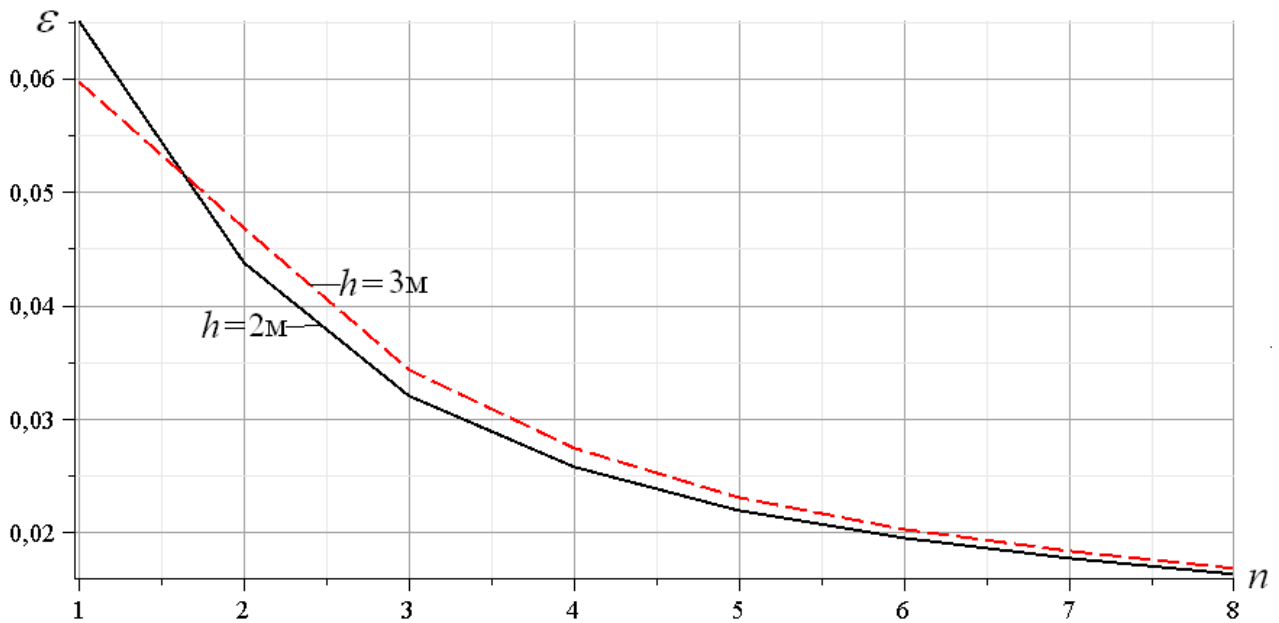


Рис. 7. Погрешность аналитической оценки (4) основной частоты

Заключение. Рассмотрена схема статически определимой решетчатой фермы. Выведены конечные формулы для зависимости прогиба конструкции под действием трех типов нагрузок и основной частоты собственных колебаний от числа панелей. Точность аналитической зависимости растет с увеличением количества панелей.

Библиографический список

1. Льюнг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 2 (41). – С. 16–26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002.
2. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
3. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. – 2023. – № 29. – Article No 2902. – DOI: 10.57728/ALF.29.2.
4. Белянкин Н. А., Бойко А. Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. – 2019. – № 1 (20). – С. 21–29.
5. Бойко А. Ю., Ткачук Г. Н., Плясова А. А. Зависимость прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей // *Механизация и автоматизация строительства [Электронный ресурс]: сборник статей*. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. – С. 31–36.
6. Ткачук Г. Н., Бойко А. Ю. Аналитический расчет прогиба рамной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // *Механизация и автоматизация строительства [Электронный ресурс]: сборник статей*. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. – С. 48–53.
7. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. – 2021. – № 17. – Article No 1701. – DOI: 10.34910/ALF.17.1.
8. Кирсанов М. Н. Формула для расчета первой частоты собственных колебаний фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 42–50. – DOI 10.36622/VSTU.2023.39.4.005.
9. Игнатъев В. А., Игнатъев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: Издательство АСВ, 2022. – 306 с.
10. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // *Engineering Structures*. – 2015. – Vol. 82. – С. 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>
11. Liu H. et al. Study on updating finite element model of steel truss structure based on knowledge-enhanced deep reinforcement learning // *Engineering Structures*. – 2024. – Vol. 316. – P. 118576. – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118576>.
12. Комерзан Е. В., Ниналалов И.Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – № 101. – Article No 10101. – DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – № 111 (3). – Article No. 11114. – DOI: 10.34910/MCE.111.14.
15. Kirsanov M. N., Luong C. L. Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss // *Magazine of Civil Engineering*. – 2024. – № 17 (6). – Article No. 13001. – DOI: 10.34910/MCE.130.1.
16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – № 108. – Article No 10801. – DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2023. – № 109. – Article No 10912. – DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

References

1. Luong Kong L. Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss // Structural Mechanics and Structures. 2024. No. 2 (41). P. 16-26. DOI 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002 (in Russian).
2. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels // Structural Mechanics and Structures, 2021. 2 (29). 29-30. (in Russian).
3. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // AlfaBuild. 2023. 29 Article No 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.
4. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for the deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels under uniform loading // Structural mechanics and structures. 2019. No. 1 (20). P. 21–29.
5. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N., Plyasova A. A. Dependence of the deflection of a flat hinged-rod frame on the number of panels // Mechanization and automation of construction [Electronic resource]: a collection of articles. Samara: Samara state tech. univ, 2019. P. 31–36.
6. Tkachuk G. N., Boyko A. Yu. Analytical calculation of the deflection of a frame truss with an arbitrary number of panels in the Maple system // Mechanization and automation of construction [Electronic resource]: a collection of articles. Samara: Samara state tech. un-t, 2019. pp. 48–53.
7. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17; Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1.
8. Kirsanov M. N. Formula for calculating the first frequency of natural oscillations of a truss // Structural mechanics and structures. 2023. No. 4 (39). P. 42-50. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.005. (in Russian).
9. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
10. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // Engineering Structures. 2015. 82. 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>.
11. Liu H. et al. Study on updating finite element model of steel truss structure based on knowledge-enhanced deep reinforcement learning // Engineering Structures. 2024. 316. P. 118576. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118576>.
12. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss // Structural mechanics and structures. 2023. No. 4 (39). P. 27–34 (in Russian).
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111 (3). Article 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
15. Kirsanov M. N., Luong C. L. Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss // Magazine of Civil Engineering. 2024. 17 (6). Article no. 13001. DOI: 10.34910/MCE.130.1.
16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109. Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

FORMULA FOR ESTIMATION OF THE FIRST FREQUENCY OF NATURAL OSCILLATIONS OF A FLAT TRUSS WITH A COMPLEX LATTICE

M. N. Kirsanov ¹

National Research University «MPEI» ¹
Moscow, Russia

¹ Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Analytical dependencies of deflections and the first natural frequency of oscillations of a truss with parallel chords with hinged support at the ends are derived. Uniform nodal loads along the upper and lower chords, as well as a concentrated load in the middle of the span, are considered. The truss has a regular type, which allows applying the inductive derivation of the sought dependencies. In the problem of oscillation, it is assumed that the mass of the structure is uniformly distributed among its nodes, and the rods are weightless and have the same rigidity. The modified Dunkerley method is used to calculate the oscillation frequency. The rigidity of the structure is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The analytical result has a simple formula and yields a result close to the solution obtained numerically for a system with many degrees of freedom.

Keywords: statically determinate truss, first natural frequency, analytical method, Maxwell – Mohr formula, induction, deflection.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРОГИБА СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ КАРКАСА ЧЕТЫРЕХСКАТНОГО ПОКРЫТИЯ

С. В. Астахов¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: nccl@mail.ru

Прямоугольный в плане статически определимый стержневой каркас регулярного покрытия опирается по периметру на вертикальные стойки. Приводится алгоритм вывода формулы зависимости прогиба конструкции от числа панелей при действии на нее нагрузки, равномерно распределенной по узлам. Предполагается, что упругие стержни конструкции соединены идеальными шарнирами. Жесткость фермы вычисляется по формуле Максвелла – Мора. Составление системы уравнений равновесия узлов и ее решение в аналитическом виде выполнены в системе компьютерной математики «Maple». Обобщение итоговой формулы на произвольное число панелей производится по данным расчета нескольких ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей методом индукции.

Ключевые слова: статически определимая конструкция, прогиб, индукция, формула Максвелла – Мора, пространственная ферма.

Введение. Расчет деформаций конструкций – одна из основных задач строительной механики. На практике она решается в основном численно в стандартных вычислительных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1, 2]. В некоторых случаях для простых статически определимых моделей возможны и аналитические расчеты [3, 4]. Достоинства таких расчетов на основе простых конечных формул – это их удобство и возможность проводить анализ и оптимизацию конструкций выбором параметров системы без использования сложных и зачастую длительных численных расчетов с большими затратами машинного времени и памяти компьютера, характерными для численных методов. Для регулярных систем с периодической структурой появляется еще одна задача – определение зависимости решения от порядка конструкции, например, от числа панелей. Использование аналитического подхода позволяет решить эту задачу методом индукции без потери точности расчетов для систем с большим числом элементов.

Ряд решений для плоских ферм собран в справочниках [5]. Здесь приводятся конечные формулы зависимости прогибов и смещений опор балочных, консольных и арочных ферм для различных видов нагрузок. В работах [6–9] методом индукции в системе компьютерной математики «Maple» получены также решения для первой собственной частоты свободных колебаний плоских ферм. Численное сравнение динамических расчетных моделей при определении частот и форм собственных колебаний большепролетной стальной фермы покрытия здания велодрома выполнено в [10]. Собственные частоты двухпролетной модели плоской фермы в аналитической форме получены в [11] для произвольного числа панелей в пролете. Расчет частоты собственных колебаний фермы Больмана в системе «Maple» произведен в [12].

Решения для пространственных ферм усложняются математической моделью самой конструкции сооружения. Деформации и собственные частоты пространственной стержневой статически определимой регулярной фермы произвольного порядка в аналитической форме

рассчитаны в [13]. Формулы для деформации фермы составной статически определимой пространственной рамы выведены в [14] для произвольного числа панелей. Исследование разрушения при повреждении пространственной конструкции из двойных треугольных ферм в численной форме выполнено в [15]. Пространственная модель прямоугольного покрытия и аналитическое решение для его прогиба для произвольного числа панелей приведены в [16]. В [17] предложена формула для расчета деформаций пространственного каркаса антенны для космической связи. Приближенная оценка частоты колебаний опоры линии электропередач получена в [18] для произвольного числа вертикальных панелей в мачте. В [19] с использованием системы компьютерной математики «Maple» выведена формула для расчета деформаций пространственной модели опоры линии электропередач регулярного типа. Пространственная ферма балочного типа рассчитана и проанализирована методом конечных элементов в [20]. Формулы зависимостей прогибов пространственной статически определимой фермы под действием различных узловых нагрузок получены в [21]. Расчет прогибов пространственных прямоугольных в плане покрытий в аналитической форме выполнен в [22–24]. В [25] на примере аналитического расчета деформаций пространственной фермы в форме бипирамиды показано, что при определенных размерах конструкции ферма становится кинематически изменяемой.

На основе индуктивного метода с помощью системы компьютерной математики «Maple» в [26] получены аналитические формулы для прогибов консольной фермы с боковыми гранями пирамидальной формы в зависимости от числа поясов и размеров фермы. Проведено асимптотическое сравнение результатов с простыми фермами с плоскими гранями тех же размеров. Найдены оптимальные по жесткости геометрические параметры фермы. Все результаты обобщены на фермы с большим числом боковых граней.

В [27] при аналитическом расчете прогиба пространственной осесимметричной купольной стержневой системы обнаружено, что для четного числа опорных панелей конструкция допускает кинематическую изменяемость. Приведена соответствующая картина распределения виртуальных скоростей узлов.

Конструкция фермы. Прямоугольная в плане ферма с раскосами, образующими четырехскатную симметричную конструкцию, опирается по периметру на $2(n+1)$ вертикальные стойки высотой H . Каждая из n панелей фермы имеет размеры $2a \times 2b \times h$ и состоит из четырех раскосов длиной $c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ и двух стержней длиной $2a$ нижнего пояса. Панели по верхнему поясу соединены стержнями длиной $2a$. Высота конструкции равна $h+H$, длина $2na$. Все стержни имеют шарнирное соединение, общее число стержней $v = 9n + 6$. В это число входят опорные стойки и три стержня, моделирующие боковые шарнирные опоры в узлах A и B (рис. 1).

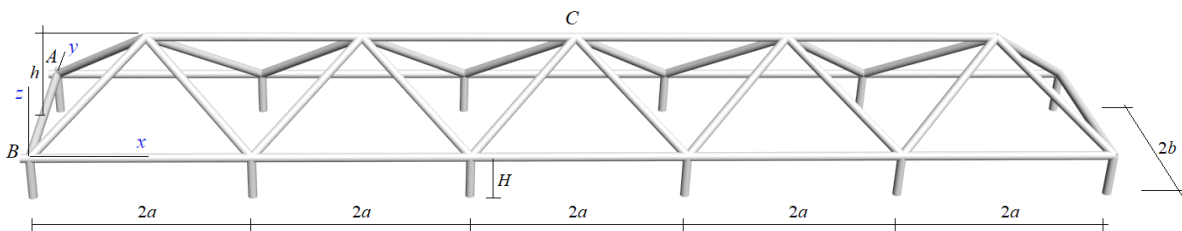


Рис. 1. Модель фермы, $n = 5$

Расчет усилий в стержнях. Из условия равновесия узлов в системе «Maple» рассчитываются реакции опор и усилия в стержнях, необходимые для нахождения жесткости фермы. Для составления уравнений равновесия узлов в аналитическом виде $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$ при произвольном числе панелей по данным о координатах узлов вычисляются направляющие косинусы усилий. Обозначено: \mathbf{R} – вектор узловых нагрузок; \mathbf{G} – матрица направляющих косинусов размером $v \times v$; \mathbf{S} – вектор неизвестных усилий в стержнях. В число неизвестных включаются и три опорные реакции в угловых узлах A и B . Элементы матрицы \mathbf{G} рассчитываются по

координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах. Для этого в программу вводятся координаты узлов. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2).

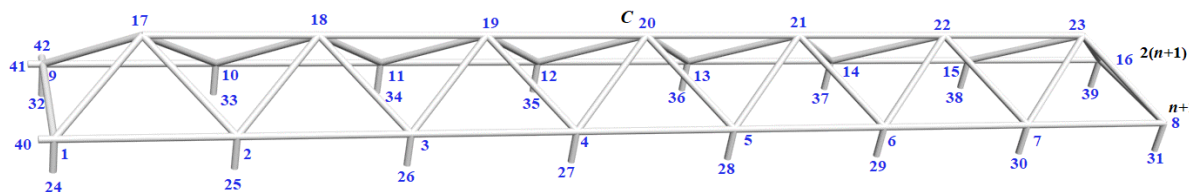


Рис. 2. Нумерация узлов фермы, $n = 7$

Координаты узлов вводятся в программу расчета усилий в циклах:

$$\begin{aligned}
 x_i &= 2a(i - 1), y_i = 0, z_i = 0, \\
 x_{i+n+1} &= 2a(i - 1), y_{i+n+1} = 2b, z_{i+n+1} = 0, \\
 x_{i+2n+2} &= 2ai - a, y_{i+2n+2} = b, z_{i+2n+2} = h, i = 1, \dots, n + 1, \\
 x_{i+3n+2} &= x_i, y_{i+3n+2} = y_i, z_{i+3n+2} = -H, i = 1, \dots, 2n + 2.
 \end{aligned}$$

Элементы матрицы \mathbf{G} вычисляются по значениям направляющих косинусов, полученным по значениям координат узлов. Решение системы $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$ ищется в программе «Maple». Для нахождения аналитического решения используется метод обратной матрицы – более быстрый, чем специализированные операторы системы линейной алгебры «LinearAlgebra». В случае вертикальной нагрузки вектор правой части состоит из следующих ненулевых элементов: $R_{3i} = -P, i = 1, \dots, 3n + 2$. Решение системы линейных уравнений дает распределение усилий по стержням. Распределение усилий в стержнях конструкции при действии на нее вертикальной узловой нагрузки представлено на рис. 3, $n = 4, a = 3 \text{ м}, h = 2 \text{ м}$. Синим цветом выделены сжатые стержни, красным – растянутые.

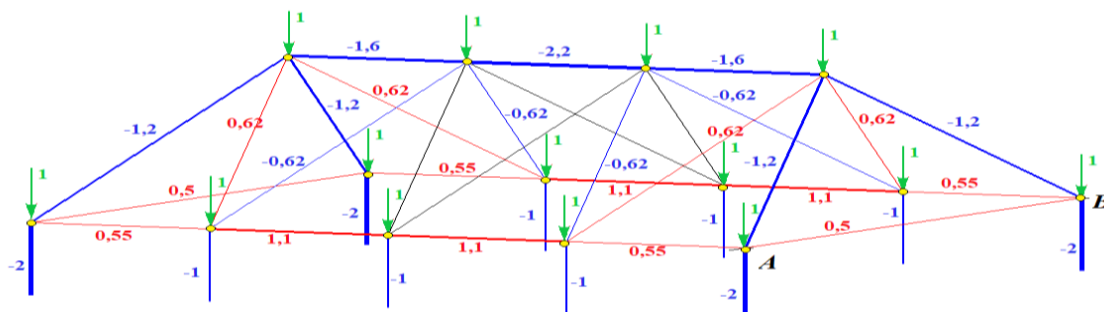


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях от действия вертикальной узловой нагрузки, $n = 4$

Некоторые диагональные стержни, боковые в середине пролета при такой нагрузке оказываются ненапряженными. Они обозначены черным цветом. Все вертикальные опорные стержни сжаты, причем на угловые опоры приходится вдвое большая нагрузка, чем на опоры по сторонам фермы. Наиболее сжатый стержень находится в верхнем поясе в середине пролета. Здесь требуется проверка на устойчивость. Толщина отрезков условно пропорциональна модулям усилий в соответствующих стержнях. Значения усилий (кН) от действия узловых сил $P = 1 \text{ кН}$ округлены до двух значащих цифр.

Для вычисления прогиба в середине C верхнего пояса для нечетного числа панелей при $n = 2k + 1$ используется формула Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(1)} S_i^{(P)} l_i / (EF),$$

где l_j – длина стержня; $S_i^{(P)}$ – усилие от действия распределенной узловой нагрузки; $S_i^{(1)}$ – усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу C , в котором вычисляется прогиб; EF – продольная жесткость стержней. Усилия трех опорных стержней не входят в сумму, эти стержни приняты недеформируемыми. Последовательный расчет прогиба ферм с различным числом панелей n дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(53a^3 + 3b^3 + 5c^3 + 7Hh^2) / (4h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(357a^3 + 5b^3 + 13c^3 + 9Hh^2) / (4h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(1513a^3 + 7b^3 + 25c^3 + 11Hh^2) / (4h^2 EF), \\ \Delta_4 &= P(4121a^3 + 9b^3 + 41c^3 + 13Hh^2) / (4h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

В системе компьютерной математики «Maple» есть оператор **rgf_findrecur** из специализированного пакета **genfunc**, позволяющий определить общий член найденной последовательностей выражений для прогибов. Результат имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b^3 + C_4 h^2 H) / (h^2 EF). \quad (1)$$

Коэффициенты в этом выражении зависят только от числа k , связанного с числом панелей в конструкции:

$$\begin{aligned} C_1 &= (10k^4 + 20k^3 + 16k^2 + 1) / 4, \quad C_2 = (2k^2 + 2k + 1) / 4, \\ C_3 &= (2k + 1) / 4, \quad C_4 = (2k + 5) / 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Несколько проще решение в случае действия на ферму одной сосредоточенной вертикальной силы в среднем узле C верхнего пояса конструкции. Решение имеет тот же вид (1), но с коэффициентами:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2k + 1)^3 / 4, \\ C_2 &= (2k + 1) / 4, \quad C_3 = C_4 = 1 / 4. \end{aligned}$$

На рис. 4 представлены графики зависимости (1) с коэффициентами (2) прогиба от числа панелей в случае действия распределенной нагрузки по всем узлам фермы.

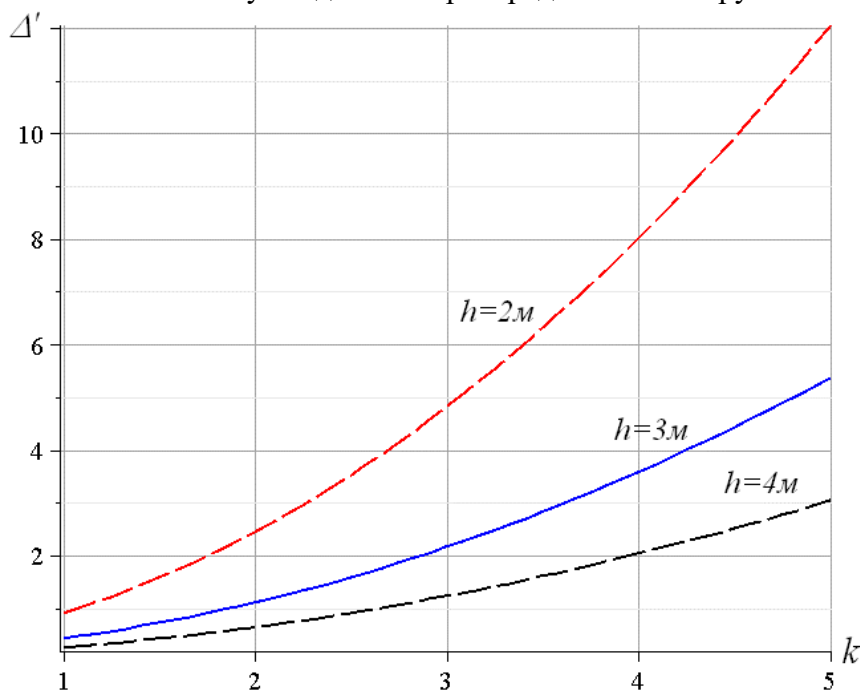


Рис. 4. Зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей, $n = 2k + 1$, $a = 4$ м, $b = 1$ м, $H = 0,5$ м

Относительный прогиб $\Delta' = EF\Delta / (P_0L)$, где $P_0 = P(3n + 2)$, $L = 2an$, монотонно растет с увеличением числа панелей. Для меньших значений высоты h прогиб, как и следовало полагать, почти пропорционально больше.

Полученное решение для прогиба в случае действия распределенной нагрузки в пределе стремится к квадратичной параболе. Это можно заметить, вычисляя системе «Maple» следующий предел для относительного прогиба:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = 5a^2 / (48h^2).$$

Соответствующий оператор «Maple» имеет вид: **limit(DEL/k^2,k=infinity).**

Аналогичный предел имеет решение и для сосредоточенной в точке C нагрузки:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = a^2 / (2h^2).$$

Заключение. Предложена схема регулярной статически определимой фермы пространственного покрытия. Математическая модель схемы имеет три независимых геометрических параметра. Для произвольного числа панелей получены формулы зависимости прогиба конструкции от действия равномерно распределенной по узлам и сосредоточенной вертикальной нагрузки. Найденная зависимость обнаруживает нелинейные асимптоты.

Библиографический список

1. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: Издательство АСВ, 2022. – 306 с.
2. Wang Q., Yang W., Wang L., Zhang D., Li Z., Ma G. Flexural performance of the integrated steel truss reinforced 3D printed concrete beams: Experimental and numerical analysis // *Journal of Building Engineering*. – 2024. – P. 110794. – <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.110794>.
3. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 17–26. – DOI 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
4. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
5. Кирсанов М. Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник: в 3 т. Т. 1–3. – М.: ИНФРА-М, 2024. – 238 с. – doi: 10.12737/textbook_5c3c4183ee7be5.95025996.
6. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. – 2023. – № 29. – Article No 2902. – doi: 10.57728/ALF.29.2.
7. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34.
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – № 101. – Article No 10101. – doi: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – № 111 (3). – Article No. 11114. – doi: 10.34910/MCE.111.14.
10. Хазов П. А., Н. И. Молодушная, Б. Б. Лампси (мл.) и др. Сравнение динамических расчетных моделей при определении частот и форм собственных колебаний большепролетной

стальной фермы покрытия здания велодрома // Приволжский научный журнал. – 2019. – №. 2. – С. 16–24.

11. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. – 2021. – № 20. – Article No 2001. – doi: 10.34910/ALF.20.1.

12. Скулова П. А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Больмана // Механизация и автоматизация строительства: сборник статей. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2020. – С. 102–107.

13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2022. – № 101. – Article No 10101. – doi: 10.4123/CUBS.101.1.

14. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 4 (35). – С. 40–48. – doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.

15. Zhongliang C., Sixin Y. Study on damage failure for a new double-triangular truss core sandwich structure // Heliyon. – 2023. – Vol. 9. – No. 9. – <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e19917>.

16. Kirsanov M. Mathematical model of a spatial rectangular contour-type truss deformations AlfaBuild. – 2022. – № 25. – Article No 2505. – doi: 10.57728/ALF.25.5.

17. Ivanitskii A. D., Kirsanov M. N. Mathematical model of deformations of the antenna frame for space communications // 5th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). – IEEE, 2023. – Vol. 5. – P. 1–5.

18. Кирсанов М. Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник МЭИ. – 2022. – № 5. – С. 150–156. – doi: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.

19. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2021. – № 96. – Article No 9602. – doi: 10.4123/CUBS.96.2.

20. Podkoritovs, A., Serdjuks, D., Goremikins, V., Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. Behaviour of a space inverted triangular steel truss // Baltic Journal of Road and Bridge Engineering. – 2020. – Vol. 15. – No. 4. – P. 54–70. – doi: 10.7250/bjrbe.2020-15.494.

21. Kirsanov M. N. Analytical dependence of the deflection of the spatial truss on the number of panels // Magazine of Civil Engineering. – 2020. – № 96 (4). – Pp. 110–117. – doi: 10.18720/MCE.96.9.

22. Kirsanov M. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2020. – Vol. 91. – Article No 9104. – doi: 10.18720/CUBS.91.4.

23. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет деформаций фермы для большого пролета // Вестник МГСУ. – 2020. – Т. 15. – Вып. 10. – С. 1399–1406. – doi: 10.22227/1997-0935.2020.10.1399-1406.

24. Kirsanov M. N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. – 2017. – No. 8. – Pp. 58–66. – doi: 10.18720/MCE.76.6.

25. Кирсанов М. Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 5. – С. 11–15.

26. Кирсанов М. Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – № 5 (49). – С. 37–43. – doi: 10.5862/MCE.49.4.

27. Кирсанов М. Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 3 (242). – С. 48–51.

References

1. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p. (in Russian).
2. Wang Q., Yang W., Wang L., Zhang D., Li Z., Ma G. Flexural performance of the integrated steel truss reinforced 3D printed concrete beams: Experimental and numerical analysis // *Journal of Building Engineering*. 2024. P. 110794. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.110794>
3. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical assessment of the fundamental frequency of natural vibrations of a regular truss // *Structural Mechanics and Structures*. 2023. № 2 (37). P. 17–26. DOI 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. (in Russian).
4. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels // *Structural mechanics and structures*. 2021. № 2 (29). P. 29–37. (in Russian).
5. Kirsanov M. N. Flat trusses. Schemes and calculation formulas: handbook. Moscow: INFRA-M, 2024. 238 p. DOI: 10.12737/textbook_5c3c4183ee7be5.95025996. (in Russian).
6. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. 2023. № 29. Article No 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.
7. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss // *Structural Mechanics and Structures*. 2023. № 4 (39). P. 27–34. (in Russian).
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. № 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. № 111 (3). Article No. P. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
10. Khazov P. A., Molodushnaya N. I., Lampsi (Jr.) B. B. et al. Comparison of dynamic calculation models for determining the frequencies and modes of natural vibrations of a large-span steel truss of a velodrome building roof // *Privolzhsky Scientific Journal*. 2019. No. 2. P. 16–24. (in Russian).
11. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. 2021. № 20. Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1.
12. Skulova P. A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Bohlmann truss. In the collection: *Mechanization and automation of construction. Collection of articles*. Samara State Technical University. Samara. 2020. P. 102–107. (in Russian).
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. № 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Static deformations of a composite spatial frame truss. Analytical solutions // *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4 (35). P. 40–48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005. (in Russian).
15. Zhongliang C., Sixin Y. Study on damage failure for a new double-triangular truss core sandwich structure // *Heliyon*. 2023. V. 9. No. 9. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e19917>.
16. Kirsanov M. Mathematical model of a spatial rectangular contour-type truss deformations // *AlfaBuild*. 2022. № 25. Article No 2505. doi: 10.57728/ALF.25.5.
17. Ivanitskii A. D., Kirsanov M. N. Mathematical model of deformations of the antenna frame for space communications // *5th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE)*. IEEE, 2023. V. 5. P. 1–5.

18. Kirsanov M. N. Estimation of the frequency of oscillations of a transmission line support. *Bulletin of MPEI*. 2022. No. 5. P. 150–156. doi: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156. (in Russian).
19. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 96 Article No. 9602. doi: 10.4123/CUBS.96.2.
20. Podkoritovs A., Serdjuks D., Goremikins V., Buka-Vaivade K., Kirsanov M. N. Behavior of a space inverted triangular steel truss // *Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*. 2020. V. 15. No 4. 54–70. doi: 10.7250/bjrbe.2020-15.494.
21. Kirsanov M. N. Analytical dependence of the deflection of the spatial truss on the number of panels // *Magazine of Civil Engineering*. 2020. 96 (4). P. 110–117. doi: 10.18720/MCE.96.9.
22. Kirsanov M. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 91. Article No. 9104. doi: 10.18720/CUBS.91.4.
23. Kirsanov M. N. Analytical calculation of deformations of a truss for a long span covering // *Bulletin of MGSU*. 2020. V. 15. No. 10. P. 1399–1406. doi: 10.22227/1997-0935.2020.10.1399-1406 (in Russian).
24. Kirsanov M. N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 8. P. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6.
25. Kirsanov M. N. Features of analytical calculation of spatial rod systems // *Structural mechanics and calculation of structures*. 2011. No. 5. P. 11–15. (in Russian).
26. Kirsanov M. N. Bending, torsion and asymptotic analysis of a spatial rod console // *Civil engineering journal*. 2014. No. 5(49). P. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4. (in Russian).
27. Kirsanov M. N. Calculation of a spatial rod system allowing instantaneous variability // *Structural mechanics and calculation of structures*. 2012. No. 3(242). P. 48–51. (in Russian).

ANALYTICAL ASSESSMENT OF THE DEFLECTION OF THE ROD MODEL OF A FOUR-SLOPE ROOF FRAME

S. V. Astakhov ¹

National Research University «MPEI» ¹
Moscow, Russia

¹ PhD of Technical Sciences Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: nccl@mail.ru

A rectangular rod frame of a regular roof rests on vertical posts along the perimeter. An algorithm is given for deriving a formula for the dependence of the structure deflection on the number of panels under the action of a load uniformly distributed over the nodes. It is assumed that the elastic rods of the structure are connected by ideal hinges. The rigidity of the truss is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The system of equations for the equilibrium of nodes and its solution in analytical form are compiled in the Maple computer mathematics system. Generalization of the final formula to an arbitrary number of panels is performed based on the calculation data of several trusses with a successively increasing number of panels using the induction method.

Keywords: statically determinate structure, deflection, induction, Maxwell – Mohr formula, spatial truss.

ОЦЕНКИ ПРОГИБА И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Льонг Конг Луан ¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ» ¹
Россия, г. Москва

¹ Аспирант, тел.: +7(917)633-24-68; e-mail: luongcongluan96@gmail.com

Объектом исследования является плоская модель статически определенной симметричной ферменной системы. Жесткость и частота собственных колебаний фермы анализируются аналитическим методом. Решение системы линейных уравнений с использованием операторов математической программы «Maple» позволяет определить усилия в стержнях.

Применяя метод индукции, можно найти аналитические выражения для прогиба. По результатам расчета прогиба ферм с различным количеством панелей построена зависимость прогиба от нагрузки, упругих свойств стержней, а также количества панелей. С помощью формулы Максвелла – Мора находится матрица жесткости конструкции. Используя формулу Донкерлея и два упрощения формул Донкерлея и Рэлея для произвольного количества панелей, находят первую собственную частоту колебаний фермы. Результаты аналитического метода сравниваются с результатами численного метода. Проводится анализ частотного спектра фермы, делаются выводы о зависимости частоты от размера панелей.

Ключевые слова: ферма, усилие, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, упрощенный метод.

Введение. Первая собственная частота фермы является критически важным параметром в инженерии и строительстве. Она определяет, как конструкция будет реагировать на внешние воздействия, такие как ветровые нагрузки или землетрясения. Определение первой собственной частоты позволяет провести динамический анализ структуры, что помогает выявить потенциальные резонансные явления и предотвратить разрушения. В данной работе рассмотрен пример статически определимой симметричной фермы регулярного типа. Предлагаются различные методы определения первой частоты собственных колебаний фермы в аналитическом виде. Решение, представленное в виде графика, является результатом анализа, основанного на аналитическом решении задачи о спектре собственных частот свободных колебаний фермы.

Для расчета частоты собственных колебаний ферменной конструкции необходимо учитывать свойства материала, массу и жесткость элементов фермы. На практике метод конечных элементов [1–3] является наиболее популярным численным методом для определения собственной частоты колебаний фермы. Во время проектирования, оптимизации, строительства и обслуживания ферменной системы инженеры часто интересуются только верхней и нижней оценками частоты. Метод Донкерлея [4–6] широко используется для определения собственных частот колебаний и форм колебаний структурных систем. Этот метод особенно эффективен для анализа таких конструкций, как фермы. В некоторых случаях метод Рэлея [7–9] также применяется для определения первой частоты колебаний. Метод Рэлея часто дает весьма точные результаты, однако коэффициенты этого метода достаточно громоздки. Для некоторых ферм сложной конструкции вывести общие коэффициенты затруднительно или невозможно. В данной работе, помимо метода Донкерлея, предложены также две упрощенные формулы метода Донкерлея и Рэлея для определения первой частоты колебаний фермы. Формулы коэффициентов, полученные по упрощенным формулам, зачастую значительно короче, чем

полученные методом Донкерлея, и дают результаты с более высокой точностью. В данной работе необходимые операции аналитических преобразований для получения решения выполняются с помощью специальных операторов в программе математического языка «Maple» [10–12].

Общие вопросы существования решений для статически определимых регулярных структур рассматривали R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [13], [14]. Нелинейные параметрические колебания панелей переменной толщины изучались в [15].

Конструкция фермы. Рассматриваемая симметричная ферма с $2n$ панелями представляет собой плоскую рамную конструкцию с пролетом $L = 4a(n + 1)$ и имеет ромбовидную решетку с двумя неподвижными опорами (рис. 1). Вся масса фермы равномерно распределена между $K = 4n + 14$ узлами конструкции. Ферма содержит $v = 8n + 20$ стержней, включая четыре опорных стержня, моделирующих неподвижные опоры. Программа на языке символьной математики «Maple» с помощью встроенных функций позволяет найти усилия в стержнях в аналитическом виде.

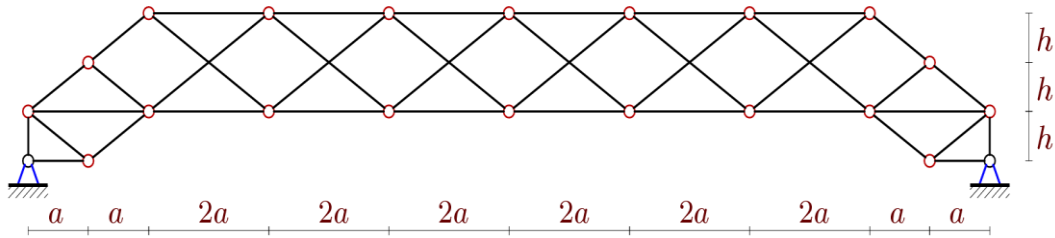


Рис 1. Ферма, $n = 3$

Нумерация стержней и узлов, приведенная на рис. 2, необходима для алгоритмизации расчетов. Программа для ввода координат узлов фермы в «Maple» на языке этой компьютерной системы с использованием операторов цикла по числу панелей выглядит следующим образом:

```

> x[1]:=0:y[1]:=0:x[2]:=a:y[2]:=0:
> for i to 2*n+1 do x[i+2]:=2*i*a;
  y[i+2]:=h; x[i+2*n+7]:=2*i*a; y[i+2*n+7]:=3*h; end:
> x[2*n+4]:=L-a: y[2*n+4]:=0:
> x[2*n+5]:=L: y[2*n+5]:=0:
> x[2*n+6]:=0: y[2*n+6]:=h:
> x[2*n+7]:=a: y[2*n+7]:=2*h:
> x[4*n+9]:=L-a: y[4*n+9]:=2*h:
> x[4*n+10]:=L: y[4*n+10]:=h:
    
```

Здесь L – длина пролета фермы.

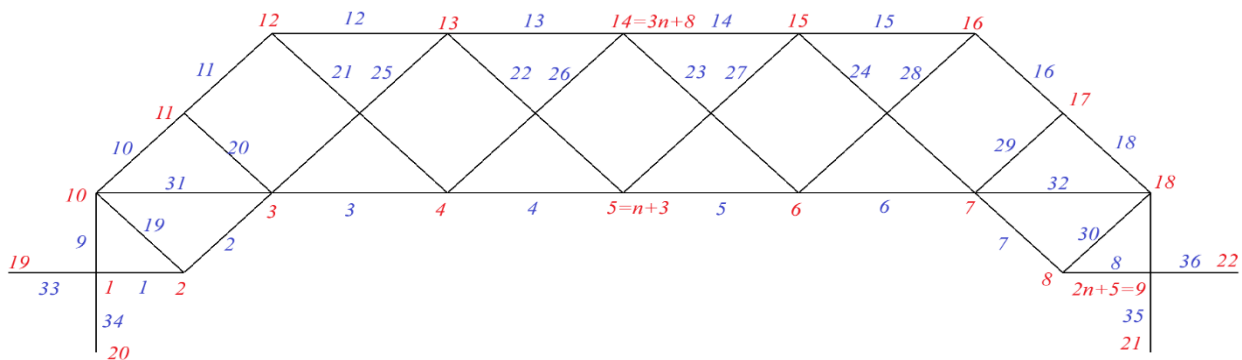


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n = 2$

Расчет усилий в стержнях. С помощью стандартных операторов «Maple» решение системы линейных уравнений позволяет получить аналитические выражения для усилий в стержнях. На рис. 3 показано распределение усилий в стержнях фермы под действием вертикальных нагрузок, равномерно распределенных по всем узлам фермы, полученное по численному варианту этого решения при $n = 2$, $a = 3$ м, $h = 2$ м. Толщина линий пропорциональна величине модуля усилия в соответствующем элементе фермы. Сжатые стержни показаны синим цветом, растянутые выделены красным. Большая часть нагрузки приходится на верхний сжатый пояс и боковые стержни нижнего пояса. Усилия в решетке незначительны.

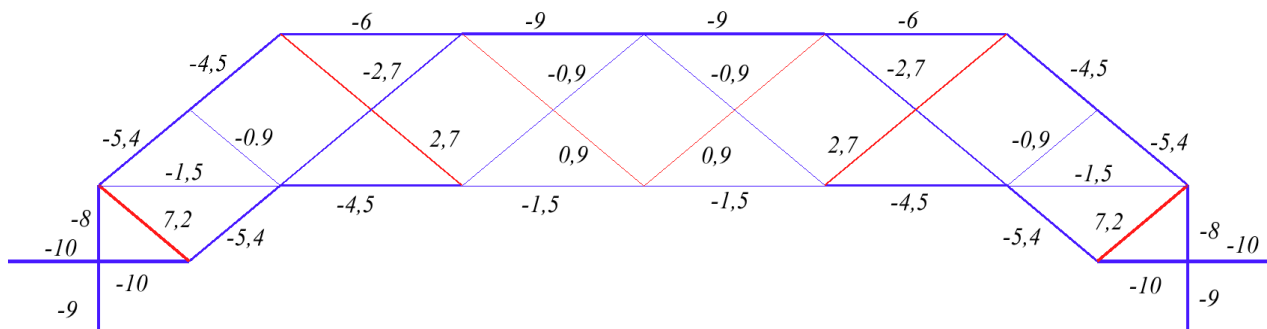


Рис. 3. Распределение усилий, нагрузка по всем узлам, $n = 2$

Расчет прогиба. С помощью формулы Максвелла – Мора рассчитывается прогиб фермы:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{v-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \quad (1)$$

где $S_i^{(P)}$ – усилие в стержне i от действия нагрузки; $S_i^{(1)}$ – усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, в котором вычисляется прогиб; E и F – модуль упругости и площадь сечения стержней; l_i – длина стержня. Поскольку четыре опорных стержня в принятой постановке задачи условно приняты жесткими и не деформируются, их реакции в общую сумму (1) не включаются. Прогиб фермы с нагруженным верхним поясом для последовательности решений при $n = 1, \dots, 5$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(8a^3 + 5c^3 + 10h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(23a^3 + 5c^3 + 7h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(208a^3 + 17c^3 + 18h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_4 &= P(179a^3 + 13c^3 + 11h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_5 &= P(1368a^3 + 37c^3 + 13h^3) / (2h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Здесь обозначено $c = \sqrt{h^2 + a^2}$. Общая формула зависимости прогиба от количества панелей и размеров конструкции выглядит следующим образом:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 + 8n^2 + 36n + 27 - (16n^3 + 12n^2 + 28n + 9)(-1)^n) / 12, \\ C_2 &= (n^2 + 2n + 2) / 2, \\ C_3 &= 2n + 3. \end{aligned}$$

Аналогично при загрузке нижнего пояса рамы получаем следующие коэффициенты:

$$C_1 = (10n^4 - 16n^2 + 60n + 63 - (16n^3 + 12n^2 + 100n + 69)(-1)^n) / 12,$$

$$C_2 = (n^2 + 4n + 3(-1)^n + 5) / 4,$$

$$C_3 = 2n + 3.$$

На рис. 4 представлена зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей фермы:

$$\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L),$$

где фиксирована суммарная нагрузка $P_{sum} = 2nP$ и длина пролета $L = 4a(n+1) = 30m$.

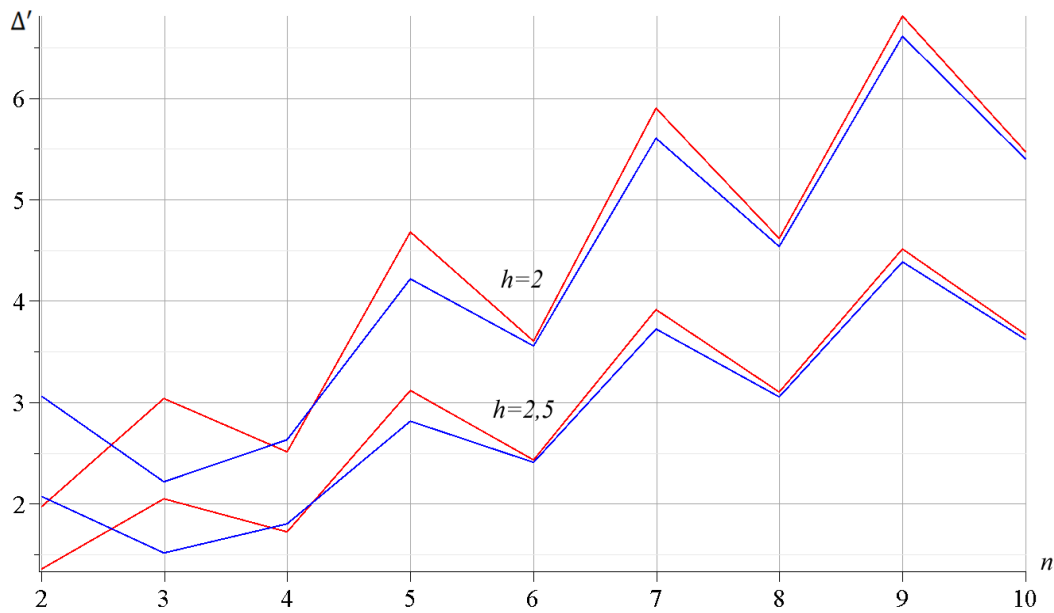


Рис. 4. Зависимость прогиба фермы от количества панелей:
красный – верхний пояс, синий – нижний пояс

Зависимость прогиба от количества панелей при разной высоте конструкции h особенно удобно прогнозировать в тех случаях, когда число панелей в ферме велико. В отличие от численных решений, точность полученного аналитического решения не зависит от числа панелей. Из графика видно, что чем больше высота фермы, тем меньше прогиб. Зависимости прогиба от числа панелей скачкообразные. Увеличение или уменьшение числа панелей меняет величину прогиба почти вдвое. Это делает особенно актуальным правильный выбор числа панелей в проектируемой ферме такой конструкции.

Первая собственная частота фермы по методу Донкерлея. Нижняя оценка первой частоты колебания масс M в узлах фермы по методу Донкерлея имеет следующий вид [16, 17]:

$$\omega_D^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p = M \Delta_n. \quad (3)$$

Коэффициент Δ_n зависит от количества панелей n . Решения для ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей имеют вид:

$$\Delta_1 = \frac{210a^3 + 67c^3 + 77h^3}{4h^2 EF},$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{433a^3 + 110c^3 + 75h^3}{3h^2 EF}, \\ \Delta_3 &= \frac{5460a^3 + 1034c^3 + 489h^3}{16h^2 EF}, \\ \Delta_4 &= \frac{18265a^3 + 2515c^3 + 901h^3}{25h^2 EF}, \\ \Delta_5 &= \frac{77433a^3 + 5205c^3 + 1493h^3}{36h^2 EF}, \dots\end{aligned}$$

Методом индукции в системе «Maple» с использованием специальных операторов можно получить общую формулу Δ_n :

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (4)$$

Для получения этой формулы потребовалось рассчитать фермы с числом панелей от 1 до 12. Из решения однородных линейных рекуррентных уравнений получаются следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{(64n^5 + 80n^4 + 680n^3 + 1750n^2 + 1566n + 585)}{45(n+1)}, \\ C_2 &= \frac{(8n^3 + 24n^2 + 25n + 10)}{2(n+1)}, \\ C_3 &= \frac{16n^3 + 78n^2 + 98n + 39}{3(n+1)^2}.\end{aligned} \quad (5)$$

Формулу расчета первой частоты колебаний рассматриваемой фермы в общем виде можно записать следующим образом:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (6)$$

Упрощенный метод Донкерлея. Упрощенная формула метода Донкерлея использована в [18–20] для получения аналитической зависимости первой частоты колебаний от числа панелей. Формула, основанная на упрощенном вычислении суммы по значению максимального ее слагаемого (теорема о среднем), имеет следующий вид:

$$\omega_*^{-2} = \sum_{p=1}^K u_p = K u_* / 2. \quad (7)$$

Здесь u_* – максимальный парциальный прогиб некоторого узла фермы от действия на ферму единичной силы, приложенной к этому же узлу.

В исследуемой ферме при разных значениях n величина u_* достигает максимального значения в среднем узле нижнего пояса с номером $n+3$. Вычисление величины $\tilde{u}_* = \tilde{u}_{n+3}$ для различных порядков фермы дает следующую последовательность:

$$n = 1: \tilde{u}_* = \frac{42a^3 + 14c^3 + 7h^3}{h^2 EF},$$

$$n = 2: \tilde{u}_* = \frac{99a^3 + 27c^3 + 9h^3}{h^2 EF},$$

$$n = 3: \tilde{u}_* = \frac{484a^3 + 44c^3 + 11h^3}{h^2 EF},$$

$$n = 4: \tilde{u}_* = \frac{429a^3 + 65c^3 + 13h^3}{h^2 EF},$$

$$n = 5: \tilde{u}_* = \frac{2190a^3 + 90c^3 + 15h^3}{h^2 EF}, \dots$$

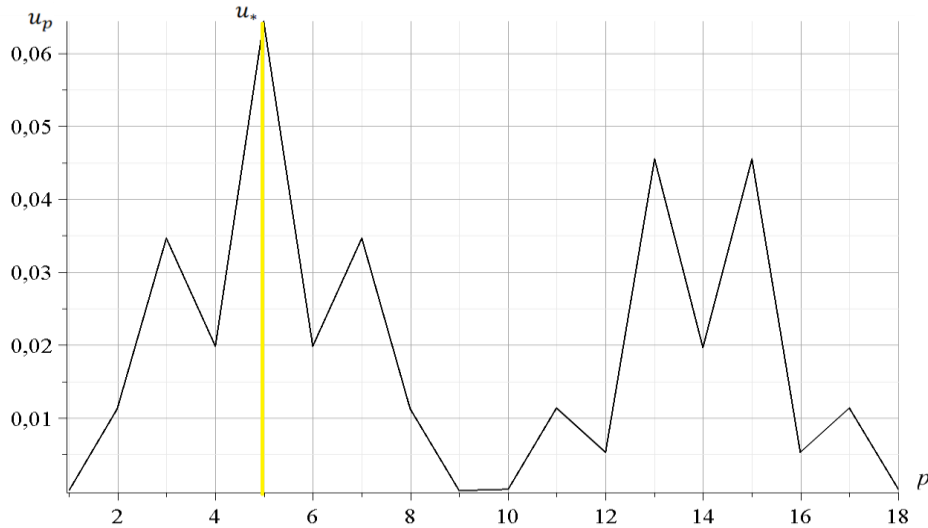


Рис. 5. Зависимость коэффициента от номера узла фермы при $n = 2$

При произвольном количестве панелей n коэффициенты общей формулы (6) принимают следующий вид

$$C_1 = (n^4 + 10n^3 + 20n^2 + 68n + 45 - (12n^3 - 24n^2 + 27n + 30)(-1)^n) / 3,$$

$$C_2 = 2n^2 + 7n + 5,$$

$$C_3 = 2n + 5.$$

Модификация метода Рэлея. Альтернативный метод упрощения вычислений первой собственной частоты – метод Рэлея. Формула Рэлея для определения первой собственной частоты фермы имеет следующий вид:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2. \quad (8)$$

Приняты размеры фермы: $a = 3$ м, $h = 2$ м. Продольная жесткость стальных стержней сечением $F = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ равна $EF = 2.1 \cdot 10^5$ кН, число панелей $n = 2$, число степеней свободы $K = 18$. На рис. 6 дана зависимость \tilde{u}_i^2 от номера. На оси абсцисс отложены номера узлов. Максимальная ордината обозначена \tilde{u}_*^2 . Если ранжировать по увеличению слагаемые \tilde{u}_i^2 (рис. 6), то площадь кривой, представляющей зависимость \tilde{u}_i^2 от номера узла i с массой, можно заме-

нить на площадь треугольника: $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2 = \tilde{u}_*^2 K / 2$.

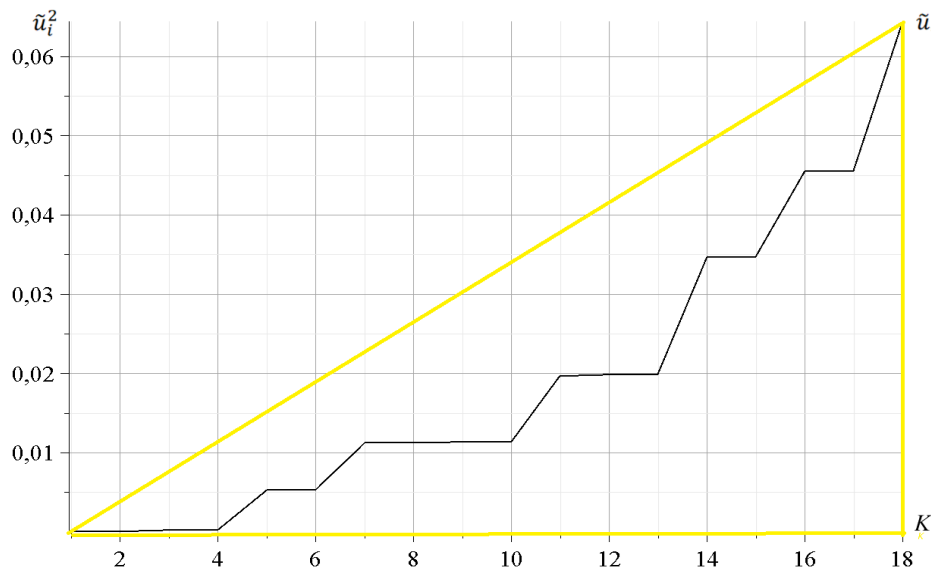


Рис. 6. Ранжированная зависимость \tilde{u}_i^2 от номера узла i с массой

В этом случае на рис. 6 на оси абсцисс уже отмечены номера ранжированного по увеличению списка значений \tilde{u}_*^2 . Вычисление величины \tilde{u}_* для различных порядков фермы дает следующую последовательность:

$$\begin{aligned} n = 2: \tilde{u}_* &= (62a^3 + 11c^3 + 17h^3) / (h^2 EF), \\ n = 3: \tilde{u}_* &= (352a^3 + 33c^3 + 42h^3) / (2h^2 EF), \\ n = 4: \tilde{u}_* &= (366a^3 + 27c^3 + 25h^3) / (h^2 EF), \\ n = 5: \tilde{u}_* &= (2592a^3 + 73c^3 + 58h^3) / (2h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Общий член последовательности имеет вид:

$$\tilde{u}_* = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF),$$

Коэффициенты получены методом индукции:

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 - 4n^2 + 48n + 45 - (16n^3 + 12n^2 + 64n + 39)(-1)^n) / 6, \\ C_2 &= (4n^2 + 8n + 9 - 3n(-1)^n) / 4, \\ C_3 &= 4n + 9. \end{aligned}$$

Результаты и обсуждение. Зависимость частоты собственных колебаний от порядка фермы, полученная тремя предложенными методами, сравнивается с минимальным значением всего спектра частот, полученным численным методом. Приняты размеры $a = 3$ м, $h = 2$ м. Площадь поперечного сечения стержней $F = 4$ см², модуль упругости материала стержней $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $M = 100$ кг.

На рис. 7 кривыми показана зависимость первой частоты фермы от числа панелей. На рисунке синяя кривая ω_1 – это результат, полученный численным методом. Кривая ω_D (зеленая) соответствует методу Донкерлея, кривая ω_{D*} (красная) – упрощенному методу Донкерлея, а кривая ω_{R*} (желтая) – методу Рэлея.

Первое, что видно из графика, это то, что первая частота фермы, полученная всеми тремя предложенными методами, монотонно убывает и быстро сходится к решению

численного метода по мере увеличения числа панелей фермы. Результаты, полученные методом Донкерлея и его упрощенным вариантом, имеют небольшие погрешности по сравнению с численным методом. Для метода Рэлея при небольшом количестве панелей полученные результаты сильно отклоняются от всех других методов, однако это не оказывает существенного влияния на применимость этого метода. На практике фермы с таким малым количеством панелей используются редко. При $n \geq 2$ результаты этого метода хорошо сходятся и приближаются к кривой численного решения. Это показывает, что все методы, предложенные в аналитическом примере, дают хорошие результаты и подходят для первой оценки частоты при большом количестве рассматриваемых панелей фермы.

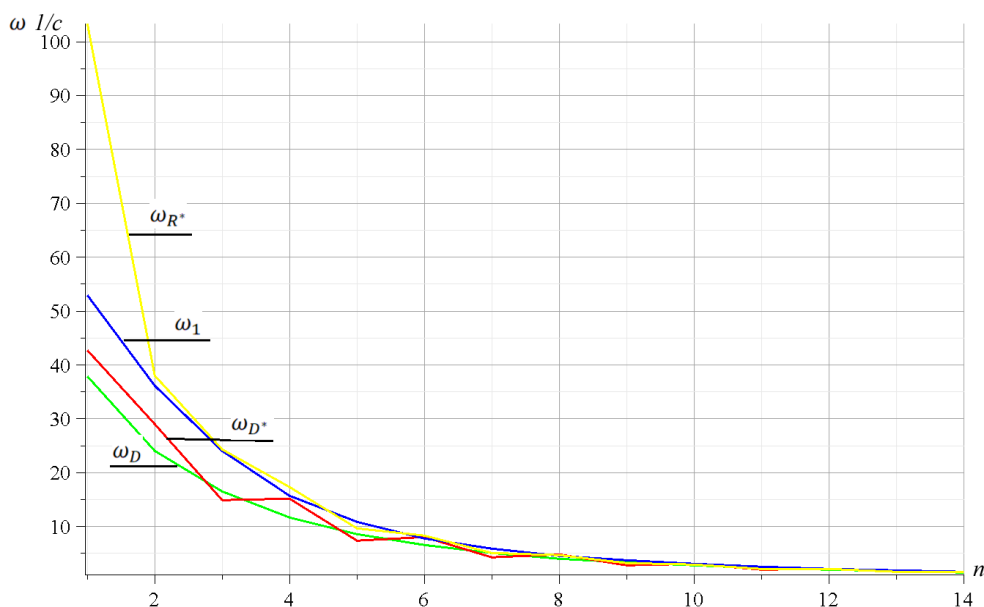


Рис. 7. Зависимость первой частоты от количества панелей фермы

Для более точной оценки погрешностей методов введем величины $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$, $\varepsilon_{D^*} = (\omega_{D^*} - \omega_1) / \omega_1$ и $\varepsilon_{R^*} = (\omega_{R^*} - \omega_1) / \omega_1$.

На рис. 8 представлены зависимости относительных погрешностей от числа панелей.

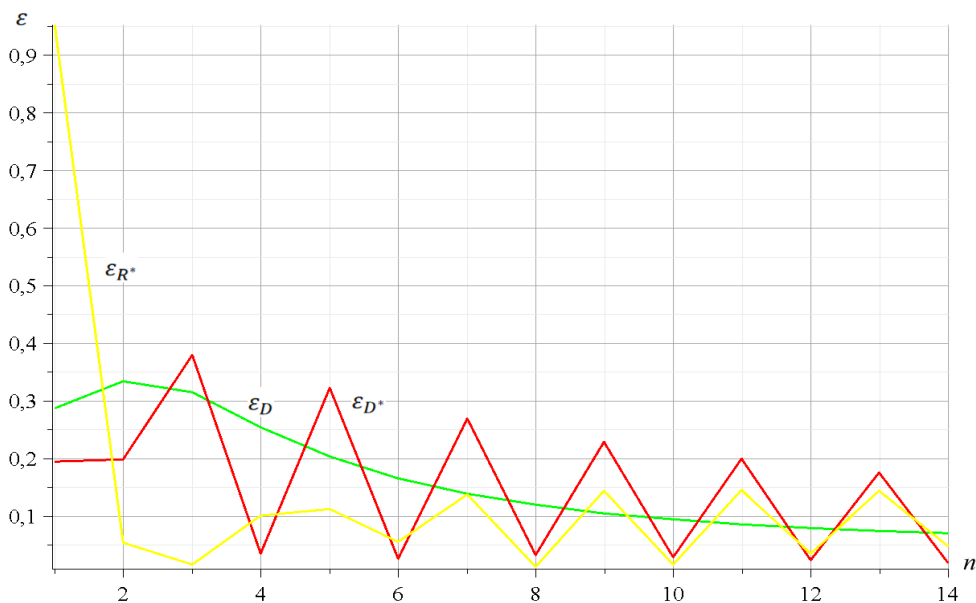


Рис. 8. Относительные погрешности методов

Из рис. 8 видно, что для метода Донкерлея при числе панелей $n > 3$ погрешность не превышает 25 %. При достаточно больших размерах фермы эта погрешность неуклонно снижается и всегда находится ниже 15 %. Это почти идеальная погрешность для приближенного аналитического метода. Для упрощенного метода Донкерлея и метода Рэля существует большая разница в погрешности при нечетном и четном количестве панелей фермы. В частности, когда n четные, погрешности обоих методов всегда ниже 5 или даже 2 % (например, при $n = 6, 8, 10$). Наоборот, при рассмотрении нечетных чисел панелей n эти два метода показывают меньшую эффективность, чем метод Донкерлея, однако даже в этом случае погрешность меньше 20 % – это приемлемый результат. Отсюда можно сделать вывод, что для ферм с большим количеством панелей и при четном числе панелей упрощенные методы показывают гораздо более высокую пригодность и эффективность, чем метод Донкерлея, и наоборот, при нечетном n метод Донкерлея дает лучшие результаты.

Спектры собственных частот регулярных ферм. Спектр собственных частот представляет собой совокупность дискретных величин, соответствующих частотам собственных колебаний, возникающих в ферме под действием возмущающих внешних сил. В зависимости от конкретной структуры и характеристик фермы их собственный частотный спектр будет различным. Эти частотные спектры помогают оценить динамические характеристики фермы. На рис. 9 показан частотный спектр 14 ферм для $n = 1, \dots, 14$. В анализируемом примере предполагается, что стержни фермы имеют размеры $a = 3$ м, $h = 2$ м. На графике 9 появляются две горизонтальные линии, соединяющие точки, представляющие практически постоянные значения собственной частоты колебаний для фермы разных порядков (*изолинии*).

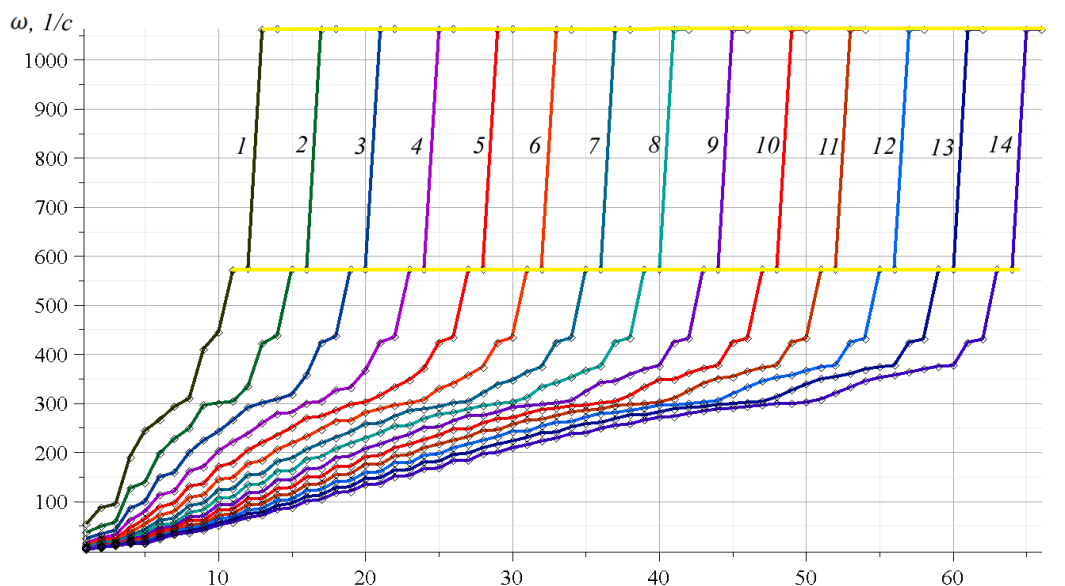


Рис. 9. Спектры регулярных ферм при $a = 3$ м, $h = 2$ м

На основе расчетных данных и свойств, полученных для ферм с небольшим количеством панелей, полученные спектральные константы можно использовать для анализа и оптимизации ферм с большим числом панелей. Это важно при оптимизации конструкции фермы с учетом различных требований к жесткости и прочности ее элементов. На рис. 9 отмеченная область между двумя константами не имеет собственной частоты фермы. Такую область можно называть *зоной резонансной безопасности*. Наличие зоны резонансной безопасности играет большую роль при анализе реакции конструкции на внешние воздействия. Возмущения с частотой из этой зоны не приводят к резонансу и не окажут негативного воздействия на конструкцию.

Заключение. На примере расчета собственной частоты статически определимой плоской фермы спектр собственных частот фермы представлен графически. С помощью метода Донкерлея, упрощенного варианта метода Донкерлея и метода Рэля в аналитическом виде найдена зависимость первой собственной частоты колебаний фермы от числа панелей. Все три предложенных метода подходят для решения задач ферм с большим количеством панелей. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Точность всех трех предложенных методов возрастает с увеличением числа панелей фермы;
2. В рассматриваемом примере при числе панелей фермы четная первая формула частоты, полученная двумя упрощенными методами, дает большую точность, чем метод Донкерлея. При нечетном количестве панелей метод Донкерлея дает результаты с более высокой точностью.

Библиографический список

1. Low K. H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2020. – № 42. – P. 1287–1305. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
2. Lardeur P., Arnoult É., Martini L., Knopf-Lenoir C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2012. – № 50. – P. 231–242. – <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.09.013.4>.
3. Rakhmatulina A. R. Smirnova A. A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // *Science Almanac*. – 2018. – № 28. – P. 268–271. – <https://doi.org/10.17117/na.2017.02.03.268>.
4. Kirsanov M., Luong, C. L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – № 107. – Article No 10702. – <https://doi.org/10.4123/CUBS.107.2>.
5. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 1–06 Article. – No. 10604. – doi: 10.4123/CUBS.106.04.
6. Петренко В. Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 4 (31). – С. 16–25. – DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
7. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. – 2021. – № 17. – Article No 1701. – <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
8. Vatin N., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A. S., Orlova A. V., Salamakhin S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling // *Advanced Materials Research*. – 2014. – P. 945–949. – <https://doi.org/10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMR.945-949.1211>.
9. Shchigol E. D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt // *Building mechanics and structures*. – 2023. – № 2 (37). – P. 46–53. – <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
10. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. – 2018. – № 36. – P. 137–141. – https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15.
11. Kirsanov M. Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2020. – № 99. – P. 9904. – <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
12. Lyushin A. S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Structural mechanics and structures*. – 2019. – № 22 (3). – P. 29–38. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
13. Hutchinson R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2006. – № 54. – P. 756–782. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.

14. Hutchinson R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2005. – № 8. – P. 607–617. – <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
15. Macareno L. M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. (2008) FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. – № 44 (6–7). – P. 346–357. – <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>.
16. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution // *AIP Conference Proceedings*. – AIP Publishing LLC, 2023. – T. 2612. – № 1. – Pp. 040005.
17. Kirsanov M. N., Luong C. L. Analytical solution of the dependence of the first natural frequency of the frame truss on the number of panels // *Building mechanics and structures*. – 2023. – № 3 (38). – P. 108–116. – <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.38.3.010>.
18. Kirsanov V. N. Formulas for two-sided assessment of the fundamental vibration frequency of a lattice truss // *Vestnik MGSU*. – 2024. – № 1–9. – P. 377–386.
19. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica // *Applied Mathematics and Computation*. – 2007. – № 188. – P. 1426–1429. – <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008>.
20. Luong C. L., Kirsanov M. Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2024. – № 110. – Article No 11003. – <https://doi.org/10.4123/CUBS.110.3>.

References

1. Low K. H. Modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. № 42. Pp. 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
2. Lardeur P., Arnoult É., Martini L., Knopf-Lenoir C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. № 50. Pp. 231–242. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.09.013.4>.
3. Rakhmatulina A. R. Smirnova A. A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // *Science Almanace*. 2018. № 28. Pp 268–271. <https://doi.org/10.17117/na.2017.02.03.268>.
4. Kirsanov M, Luong C. L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. № 107. Article No 10702. <https://doi.org/10.4123/CUBS.107.2>.
5. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. № 106. Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04.
6. Petrenko V. F. Estimation of the natural frequency of a two-span truss, Taking into account the support stiffness // *Structural Mechanics and Structures*. 2021. № 4 (31). Pp.16–25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
7. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. № 17. Article No 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
8. Vatin N., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A. S., Orlova A. V., Salamakhin S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. № 945–949. P. 1211–1215. <https://doi.org/10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMR.945-949.1211>.
9. Shchigol E. D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Building mechanics and structures*. 2023. № 2 (37). 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
10. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. № 36. P. 137–141. https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15.

11. Kirsanov M. Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. № 99. P. 9904. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
12. Lyushin A. S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // Structural mechanics and structures. 2019. № 22 (3). P. 29–38. <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. № 54. P. 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. № 8. P. 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
15. Macareno L. M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. (2008) FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // Finite Elements in Analysis and Design. № 44 (6–7). P. 346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>.
16. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC. 2023. V. 2612. № 1. Pp. 040005.
17. Kirsanov M. N, Luong C. L. Analytical solution of the dependence of the first natural frequency of the frame truss on the number of panels // Building mechanics and structures. 2023. № 3 (38). P. 108-116. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.38.3.010>.
18. Kirsanov V. N. Formulas for two-sided assessment of the fundamental vibration frequency of a lattice truss // Vestnik MGSU. 2024. № 19. P. 377–386.
19. Zotos, K. Performance comparison of Maple and Mathematica // Applied Mathematics and Computation. 2007. № 188. P. 1426–1429. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008> 12.
20. Luong C. L., Kirsanov M. Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. № 110. Article No 11003. <https://doi.org/10.4123/CUBS.110.3>.

ESTIMATES OF DEFLECTION AND NATURAL FREQUENCY OF VIBRATIONS OF A HINGED-ROD TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

Luong Cong Luan ¹

National Research University «MPEI» ¹
Moscow, Russia

¹ Graduate student, tel.: +7 (917) 633-24-68; e-mail: luongcongluan96@gmail.com

The object of the study is a flat model of a statically determined symmetric truss system. The rigidity and natural frequency of the truss are analyzed using an analytical method. Solving a system of linear equations using operators of the mathematical program Maple, it is possible to determine the forces in the rods. Using the induction method, it is possible to find analytical expressions for the deflection. Based on the results of calculating the deflection of trusses with a different number of panels, the dependence of the deflection on the load, elastic properties of the rods, and the number of panels is constructed. Using the Maxwell-Mohr formula, the rigidity matrix of the structure is found. Using the Dunkerley formula and two simplifications of the Dunkerley and Rayleigh formulas for an arbitrary number of panels, the first natural frequency of truss oscillations is found. The results of the analytical method are compared with the results of the numerical method. The frequency spectrum of the truss is analyzed and conclusions are made about the dependence of the frequency on the size of the panels.

Keywords: truss, force, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, Simplified method.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

DOI 10.36622/2219-1038.2024.43.4.005

ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ МАТЕРИАЛА С ДВОЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

А. А. Трещев¹, В. Г. Теличко², И. Р. Селезнев³Тульский государственный университет^{1, 2, 3}
Россия, г. Тула

¹ Чл.-корр. РААСН, д-р. техн. наук, проф., зав. кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7 (905) 622-90-58, e-mail: taa58@yandex.ru

² Д-р. техн. наук, проф. кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7 (952) 019-84-65, e-mail: katranv@yandex.ru

³ Аспирант кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7 (953) 425-62-08, e-mail: il.seleznev@yandex.ru

Построена математическая модель и решена осесимметричная задача об определении напряженно-деформируемого состояния тонкой кольцевой пластины, выполненной из материала с двойной анизотропией, покоящейся на упругом «винклеровом» основании. Геометрические зависимости записаны в рамках теории тонких пластин, с использованием гипотез Киргхофа – Лява. Физические зависимости приняты согласно модели деформирования материалов с двойной анизотропией, представленной в нормированном тензорном пространстве, предложенном одним из авторов. Структурная анизотропия ограничена классом ортотропных материалов. Пластина нагружена внешним, ортогональным к срединной поверхности, давлением в предположении малых прогибов. Полученная система разрешающих дифференциальных уравнений аппроксимирована методом конечных разностей до уровня алгебраических равенств, которые, в свою очередь, решены с применением метода Холлецкого. На основе полученных результатов построены графики напряжений и прогибов. В рамках анализа и обсуждения полученных данных проведено сравнение с результатами решения аналогичной задачи с использованием других физических моделей и сделан вывод об эффективности использования усовершенствованных соотношений.

Ключевые слова: тонкая кольцевая пластина, ортотропия, разносопротивляемость, упругое основание, метод конечных разностей, малые прогибы пластины, нормированное пространство.

Введение. В проектировании, строительстве и машиностроении все чаще находят применение материалы с усложненными свойствами. Большой пласт из них составляют анизотропные материалы, например композиты [1–5]. Такие материалы за счет своих уникальных свойств могут эффективно использоваться в различных конструкциях, существенно снижая их материалоемкость. Однако в таком случае при проектировании необходимо принимать во внимание нелинейные свойства композитов, и классическая теория деформирования материалов, подчиняющихся закону Гука, становится неприменима. Разработка новых физических моделей для подобных материалов является важной задачей современной механики, в особенности если речь идет о материалах одновременно с двумя видами анизотропии. На текущий момент существует несколько заслуживающих внимания теорий деформирования для таких материалов, особенности и недостатки которых подробно изложены в работах [4, 5].

В то же время для решения прикладных задач в строительстве и машиностроении есть необходимость в создании полноценных расчетных моделей сооружений и их элементов с учетом, помимо свойств материалов, геометрии конструкций и условий взаимодействия с другими элементами сооружения или его основанием [6–8]. Одним из видов такого взаимодействия является система «пластина – упругое основание», встречающаяся при проектировании многих зданий и сооружений, например, как расчетная схема фундаментных плит. Несмотря на достаточно подробно разработанную теорию расчета пластин на упругом основании, существующие расчетные модели используют в качестве физических зависимостей либо классическую теорию, либо известные теории анизотропных материалов, имеющие определённые неточности и противоречия [4, 5, 9–12].

Целью проведенного исследования является создание расчетной модели для определения напряженно-деформированного состояния тонкой кольцевой пластины на упругом основании, выполненной из материала с двойной анизотропией. При построении системы разрешающих дифференциальных уравнений в настоящей работе использована энергетическая модель определяющих соотношений для материалов, имеющих структурную и деформационную анизотропии, представленная в работе [10]. Полученная модель позволит решать прикладные задачи по расчету подобных конструкций, а приведённые результаты решения тестовой задачи в виде графиков дают возможность оценить эффективность используемых физических соотношений.

Постановка задачи исследования. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние тонкой кольцевой пластины из ортотропного стеклопластика толщиной h , м, покоящейся на упругом основании (рис. 1). Радиус внешнего контура пластины принят равным R , м, а отверстия – r_0 , м. Пластина загружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой постоянной интенсивности p , МПа.

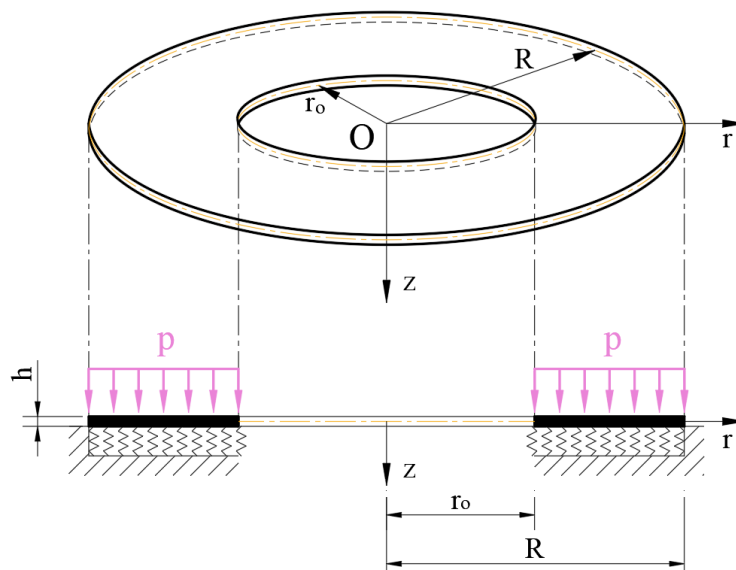


Рис. 1. Схема кольцевой пластины

Так как рассматриваемая задача является осесимметричной, то для построения всех уравнений используем систему цилиндрических координат r , t , z . Ось z ориентируем вниз, по направлению прогибов пластины, а начало координат расположим в центре срединной поверхности.

Запишем кинематические соотношения для рассматриваемой пластины в рамках теории тонких пластин Киргхофа – Лява. Так как решается осесимметричная задача, деформации будут зависеть только от радиальной координаты r .

Компоненты деформации в срединной поверхности пластины представляются следующим образом:

$$\varepsilon_r = u_{,r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (1)$$

где ε_r – радиальная деформация; ε_θ – тангенциальная; u – радиальные перемещения; r – радиальная координата.

Запишем компоненты изгибной деформации:

$$\chi_r = -w_{,rr}; \quad \chi_\theta = -\frac{w_{,r}}{r}, \quad (2)$$

где χ_r – изменение кривизны срединной поверхности пластины в радиальном направлении; χ_θ – в тангенциальном; w – прогибы пластины.

Тогда компоненты полного тензора деформаций через перемещения и прогибы представим в виде:

$$e_r = u_{,r} - z w_{,rr}; \quad e_\theta = \frac{u}{r} - z \frac{w_{,r}}{r}, \quad (3)$$

где z – вертикальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности пластины.

Физические свойства материала пластины примем как модель для ортотропного тела с цилиндрической системой ориентации главных материальных осей, проявляющего также деформационную анизотропию. Соотношения, основанные на использовании нормированного тензорного пространства напряжений, предложены в публикации [10]. В работе сформулирован потенциал деформаций с учетом представления констант ортотропного материала в виде функций от нормированных напряжений, определенных в системе главных материальных осей:

$$\begin{aligned} W = & 0,5(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11}^2 + 0,5(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}^2 + \\ & + 0,5(A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}^2 + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11}\sigma_{22} + \\ & + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22}\sigma_{33} + [A_{3311} + B_{3311}(\alpha_{33} + \alpha_{11})]\sigma_{33}\sigma_{11} + \\ & + 0,5[A_{1212}\tau_{12}^2 + A_{2323}\tau_{23}^2 + A_{3131}\tau_{31}^2], \end{aligned} \quad (4)$$

где A_{kkkk} , B_{kkkk} , A_{ijij} , B_{ijij} – параметры материала, зависящие от модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации материала; $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$ – нормированные напряжения; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ – модуль вектора полных напряжений (все параметры определены в главных осях ортотропии).

Дифференцирование потенциала (4), по правилам Кастильяно, дало возможность получить уравнения состояния структурно ортотропных материалов, проявляющих деформационную анизотропию [10]. Для рассматриваемой задачи при совпадении осей цилиндрической системы координат с главными осями ортотропии и с учётом принятых гипотез приведем эти уравнения к виду:

$$e_r = K_{11}\sigma_r + K_{12}\sigma_\theta; \quad (5)$$

$$e_\theta = K_{21}\sigma_r + K_{22}\sigma_\theta,$$

где

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_r) + 0,5B_{1111}\alpha_r(1 - \alpha_r^2) - B_{2222}\alpha_\theta^3 + B_{1122}\alpha_\theta(1 - \alpha_r^2 - \alpha_r\alpha_\theta); \\
 K_{12} &= K_{21} = A_{1122} + B_{1122}(\alpha_r + \alpha_\theta); \\
 K_{22} &= (A_{2222} + B_{2222}\alpha_\theta) + 0,5[B_{2222}\alpha_\theta(1 - \alpha_\theta^2) - B_{1111}\alpha_r^3] + B_{1122}\alpha_r(1 - \alpha_\theta^2 - \alpha_r\alpha_\theta).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Значения параметров материала A_{kkkk} , B_{kkkk} , A_{ijij} , B_{ijij} выражаются через технические характеристики следующим образом [10]:

$$\begin{aligned}
 A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; & A_{ijij} &= -(v_{ij}^+/E_j^+ + v_{ij}^-/E_j^-)/2; \\
 B_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; & B_{ijij} &= -(v_{ij}^+/E_j^+ - v_{ij}^-/E_j^-)/2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем физические зависимости (5) в связи напряжений с деформациями:

$$\sigma_r = C_{11}e_r + C_{12}e_\theta; \tag{8}$$

$$\sigma_\theta = C_{12}e_r + C_{22}e_\theta,$$

где

$$C_{11} = K_{22}/\Delta; \quad C_{12} = -K_{12}/\Delta; \quad C_{22} = -K_{11}/\Delta; \quad \Delta = K_{11}K_{22} - K_{12}^2.$$

Усилия и момент найдем через напряжения традиционным способом:

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz; & N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz; \\
 M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz; & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Интегрируя напряжения (8) по правилам (9) и учитывая компоненты тензора деформаций (3), запишем внутренние усилия через перемещения:

где

$$\begin{aligned}
 N_r &= -w_{,rr} F_{11} + u_{,r} P_{11} + u P_{12}/r - w_{,r} F_{12}/r; \\
 N_\theta &= -w_{,rr} F_{12} + u_{,r} P_{12} + u P_{22}/r - w_{,r} F_{22}/r; \\
 M_r &= -w_{,rr} D_{11} + u_{,r} F_{11} + u F_{12}/r - w_{,r} D_{12}/r; \\
 M_\theta &= -w_{,rr} D_{12} + u_{,r} F_{12} + u F_{22}/r - w_{,r} D_{22}/r, \\
 P_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz; & F_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z dz; & D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z^2 dz.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения равновесия для кольцевой пластины запишем в традиционной форме [8]:

$$M_{r,rr} - M_{\theta,r}/r + 2M_{r,r}/r + N_r w_{,rr} = -q; \tag{11}$$

$$N_{r,r} + (N_r - N_\theta)/r = 0.$$

С учетом упругого основания, принятого по модели Винклера [13], полная интенсивность внешней нагрузки на пластину q будет являться суммой давлений:

$$q = p - r_{on} = p - \xi w, \quad (12)$$

где p – нагрузка на пластину, МПа; r_{on} – интенсивность реакции упругого основания, МПа; ξ – коэффициент отпора основания, МН/м³; w – величина прогиба, м.

Перепишем уравнения (11) с учетом полного воздействия на пластину (12):

$$M_{r,rr} - M_{\theta,r}/r + 2M_{r,r}/r + N_r w_{,rr} = -p + \xi w; \quad (13)$$

$$N_{r,r} + (N_r - N_{\theta})/r = 0.$$

Систему разрешающих дифференциальных уравнений относительно прогибов и радиальных перемещений получим, введя усилия и моменты (10) в статические условия (13):

$$\begin{aligned} & -w_{,rrr} D_{11} - 2w_{,rrr} D_{11,r} + u_{,rrr} F_{11} - w_{,rr} D_{11,rr} + 2u_{,rr} F_{11,r} + u_{,r} F_{11,rr} + \\ & + w_{,rr} (-F_{11} w_{,rr} + P_{11} u_{,r}) + [-w_{,r} D_{12,rr} + u F_{12,rr} - w_{,rr} D_{12,r} + u_{,r} F_{12,r} - \\ & - 2w_{,rrr} D_{11} - 2w_{,rr} D_{11,r} + 2u_{,rr} F_{11} + 2u_{,r} F_{11,r} + w_{,rr} (u P_{12} - w_{,r} F_{12})] / r + \\ & + (w_{,rr} D_{22} - u_{,r} F_{22} + w_{,r} D_{22,r} - u F_{22,r}) / r^2 + \\ & + (u_{,r} F_{22} - w_{,r} D_{22}) / r^3 - \xi w = -p; \\ & -w_{,rrr} F_{11} - w_{,rr} F_{11,r} + u_{,rr} P_{11} + u_{,r} P_{11,r} + (-w_{,rr} F_{11} + u_{,r} P_{11} + \\ & + u P_{12,r} - w_{,r} F_{12,r}) / r + (-u P_{22} + w_{,r} F_{22}) / r^2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где P_{ij} , F_{ij} , D_{ij} – функции, зависящие от принятых физических зависимостей для ортотропных материалов.

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений сформулируем граничные условия. По контуру центрального отверстия примем свободный (не опертый) край, а по внешнему контуру свободное опирание, не подверженное перемещению по оси z . В таком случае:

– для контура центрального отверстия $r = r_0$ изгибающий момент, поперечная сила и продольное усилие будут равны нулю:

$$(M_r)_{r=r_0} = 0; (Q_r)_{r=r_0} = 0; (N_r)_{r=r_0} = 0, \quad (15)$$

что в перемещениях выразится так:

$$\begin{aligned} & (-w_{,rr} D_{11} + u_{,r} F_{11} + u F_{12}/r - w_{,r} D_{12}/r)_{r=r_0} = 0; \\ & [-w_{,rrr} D_{11} - w_{,rr} D_{11,r} + u_{,rr} F_{11} + u_{,r} F_{11,r} + (-w_{,rr} D_{12} - w_{,r} D_{12,r} + \\ & + u_{,r} F_{12} + u F_{12,r}) / r + (w_{,r} D_{12} - u F_{12}) / r^2]_{r=r_0} = 0; \\ & (-w_{,rr} F_{11} + u_{,r} P_{11} + u P_{12}/r - w_{,r} F_{12}/r)_{r=r_0} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

– для внешнего контура $r = R$ прогиб, изгибающий момент и продольное усилие будут равны нулю:

$$(w)_{r=R} = 0; (M_r)_{r=R} = 0; (N_r)_{r=R} = 0, \quad (17)$$

что в перемещениях соответствует зависимостям:

$$(w)_{r=R} = 0;$$

$$\begin{aligned} (-w_{,rr} D_{11} + u_{,r} F_{11} + u F_{12}/r - w_{,r} D_{12}/r)_{r=R} &= 0; \\ (-w_{,rr} F_{11} + u_{,r} P_{11} + u P_{12}/r - w_{,r} F_{12}/r)_{r=R} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для аппроксимации полученной системы разрешающих дифференциальных уравнений целесообразно использовать наиболее просто реализуемый численный метод для данной задачи – метод конечных разностей [14].

Исходные данные для тестовой задачи. В качестве тестовой задачи была рассчитана пластина толщиной $h = 0,04$ м; радиусом $R = 1,5$ м; радиусом отверстия $r_0 = 0,75$ м. Форма и размеры пластины приведены на рис. 2.

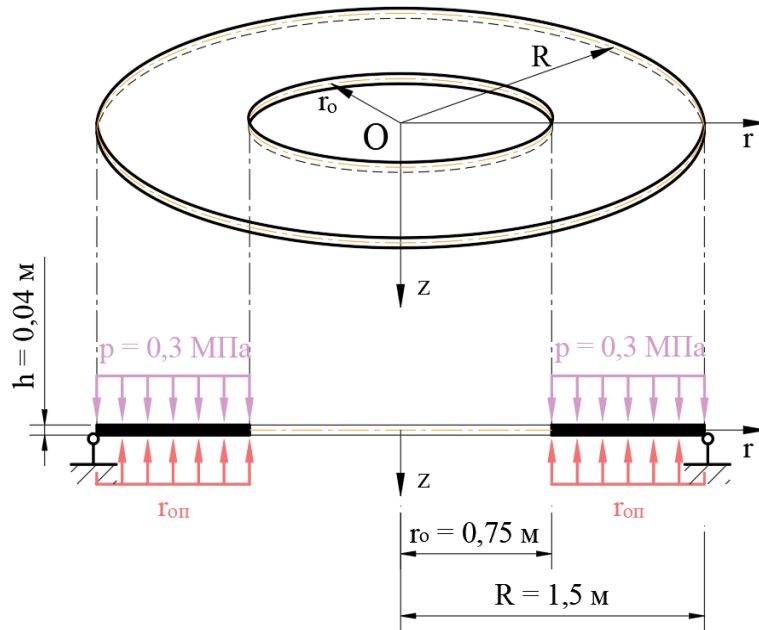


Рис. 2. Расчетная схема кольцевой пластины для решения тестовой задачи

В качестве материала пластины принят стеклопластик с двойной анизотропией [4], модули упругости на растяжение: $E_r^+ = 140$ ГПа, $E_\theta^+ = 280$ ГПа; на сжатие: $E_r^- = 70$ ГПа, $E_\theta^- = 140$ ГПа; коэффициенты поперечной деформации: $\nu_{r\theta}^+ = 0,2$, $\nu_{r\theta}^- = 0,3$.

Пластина загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 0,3$ МПа. Коэффициент отпора упругого основания принят равным $\xi = 125$ МН/м³.

Анализ полученных результатов. Решение произведено с помощью пакета прикладных программ MATLAB.

Результаты, полученные на основе разработанной модели с использованием усовершенствованных соотношений, сравнивались с результатами решения приведенной задачи с применением следующих теорий: а) классической модели деформирования материалов без учета разносопротивляемости (с усредненными характеристиками материала на растяжение/сжатие); б) модели С. W. Bert – J. N. Reddy [15, 16]; в) модели R. M. Jones – D. A. R. Nelson [17]; г) модели С. А. Амбарцумяна [18, 19].

Результаты сравнения основных из полученных характеристик приведены в таблице. Сравнение моделей проводилось для максимальных величин. В серых ячейках под результатами расчета для каждой теории приведена разница с расчетом с использованием усовершенствованных соотношений [10].

Сравнение результатов расчёта

Модель уравнений состояния \ Параметр	Прогибы w срединной плоскости, мм	Напряжения σ_r при $z = h/2$, кН/м ²	Напряжения σ_θ при $z = h/2$, кН/м ²	Напряжения σ_r при $z = -h/2$, кН/м ²	Напряжения σ_θ при $z = -h/2$, кН/м ²
Соотношения [10]	4,61	15,08	21,14	-17,34	-23,80
Классическая модель ортотропии	3,30	12,57	17,29	-12,57	-17,29
	30 %	17 %	18 %	28 %	27 %
Модель Bert – Reddy	4,15	14,32	20,04	-15,71	-21,56
	11 %	5 %	5 %	9 %	9 %
Модель Jones – Nelson	4,36	13,82	19,67	-16,46	-22,61
	6 %	8 %	7 %	5 %	5 %
Модель С. А. Амбарцумяна	3,69	13,44	18,02	-13,82	-18,97
	21 %	11 %	15 %	20 %	20 %

На рис. 3–7 приведена графическая интерпретация результатов рассчитанных распределений напряжений и перемещений вдоль радиуса пластины.

При использовании усовершенствованных уравнений состояния разница с классической моделью материала без учета разносопротивляемости составила для прогибов до 30 %, для радиальных напряжений – до 28 %, для окружных – до 27 %; с моделью С. А. Амбарцумяна для прогибов – до 21 %, для радиальных и окружных напряжений – до 20 %. Разница с моделью Bert – Reddy составила для прогибов до 11 %, а для радиальных и окружных напряжений – до 9 %. Наиболее схожие результаты были получены по сравнению с моделью Jones – Nelson: разница для прогибов составила до 6 %, для радиальных напряжений – до 8 %, а для окружных – до 7 %.

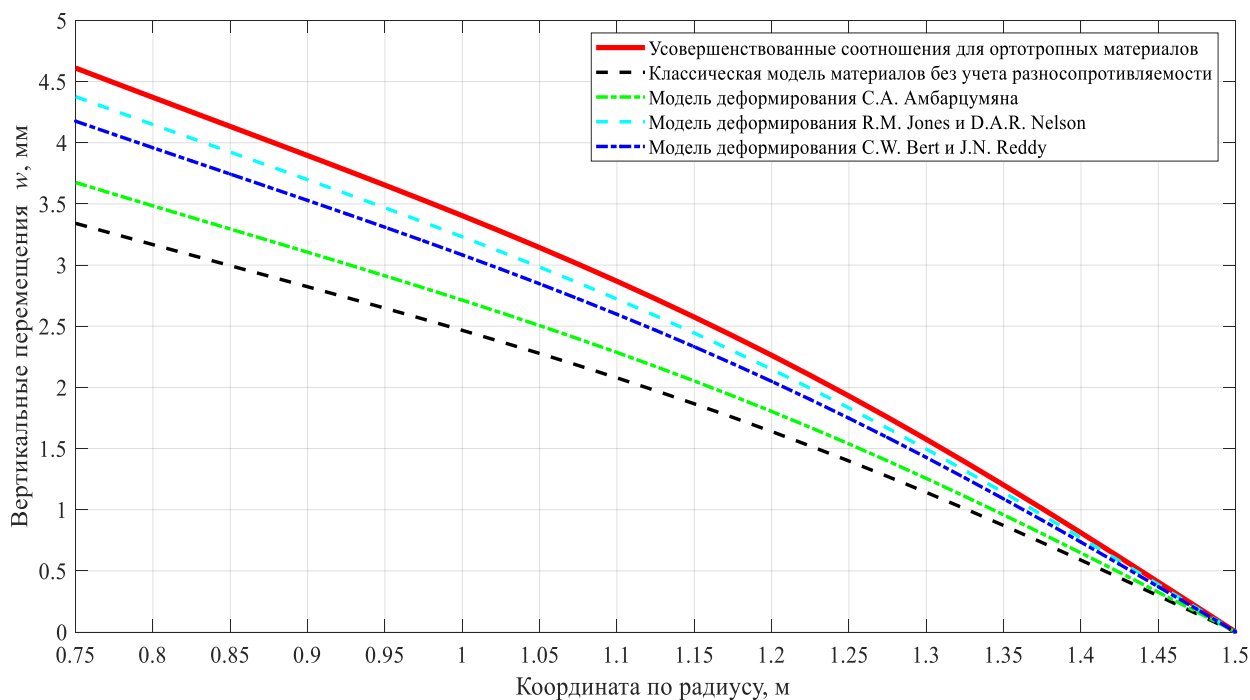


Рис. 3. Вертикальные перемещения срединной поверхности пластины

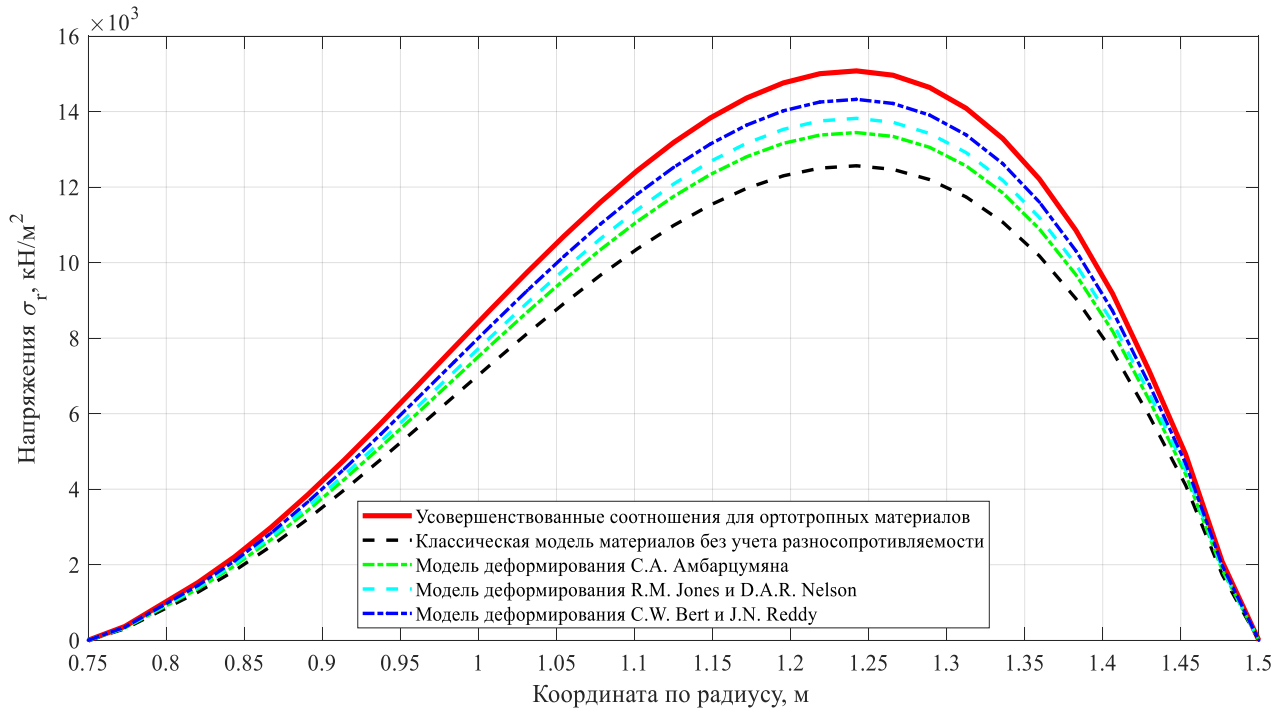


Рис. 4. Напряжения σ_r на нижней поверхности пластины

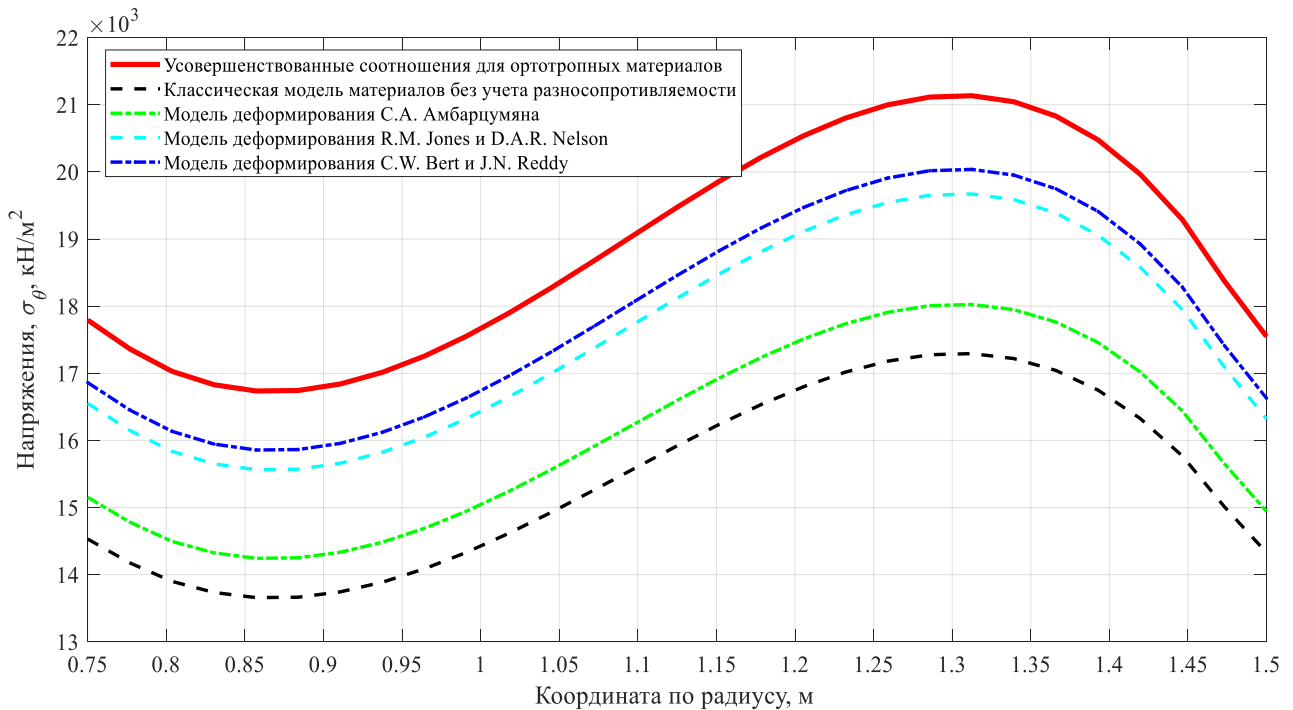


Рис. 5. Напряжения σ_θ на нижней поверхности пластины

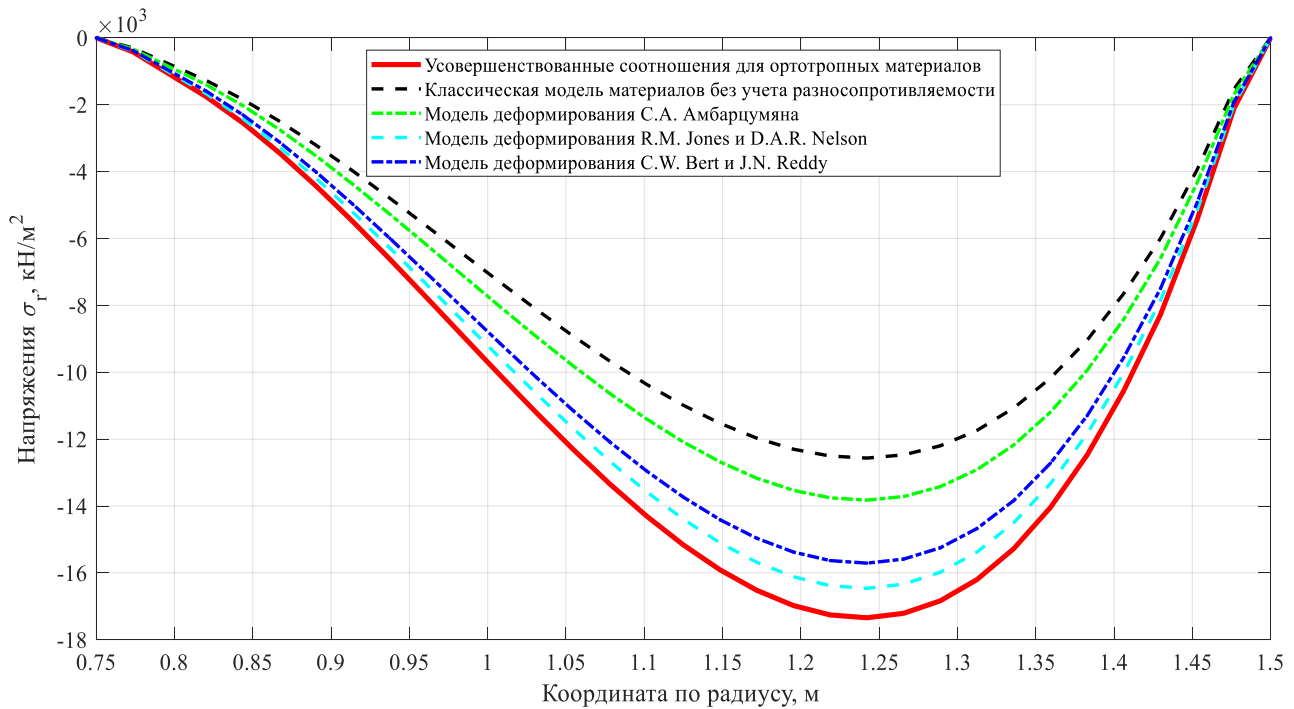


Рис. 6. Напряжения σ_r на верхней поверхности пластины

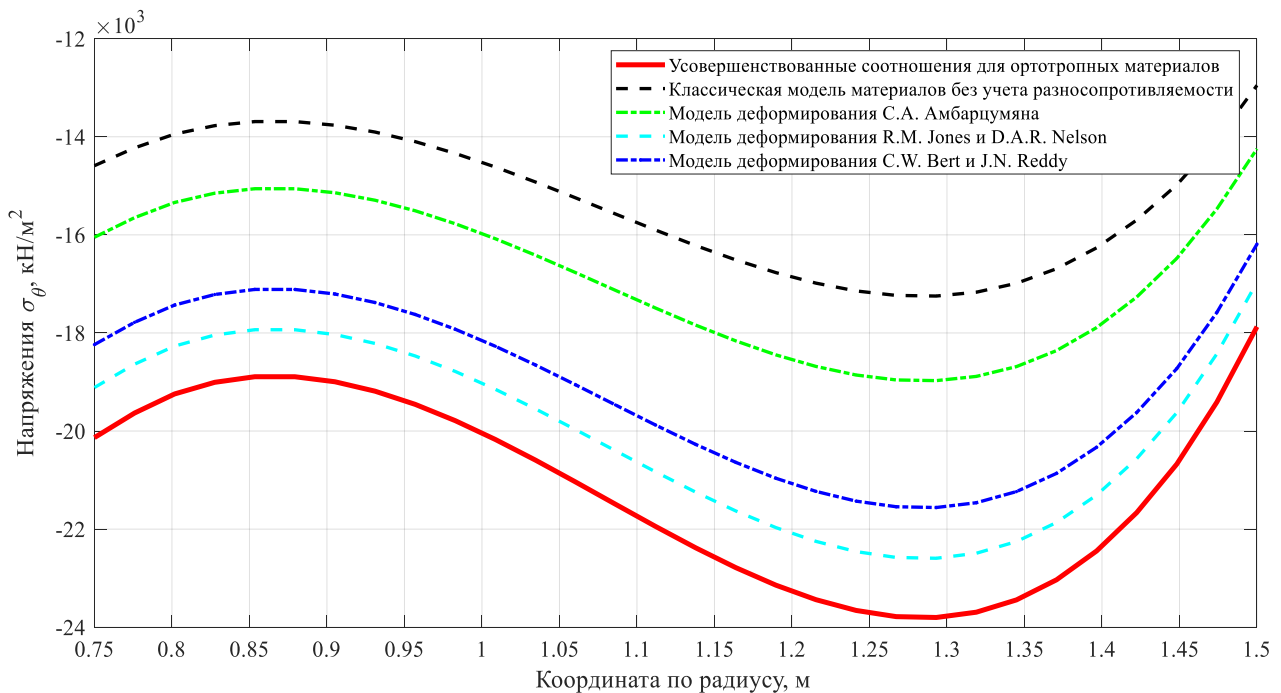


Рис. 7. Напряжения σ_θ на верхней поверхности пластины

Выводы. По результатам проведенного исследования изгиба ортотропных кольцевых пластин на упругом основании можно сделать следующие выводы:

– использование усовершенствованных соотношений, предложенных в работе [10], в качестве физических зависимостей позволяет получить результаты, которые в общем соответствуют ожидаемому напряженно-деформированному состоянию кольцевой пластины. При

этом полученные результаты, как показано в работах [5, 9–11], характеризуются более высокой точностью по сравнению с рассмотренными теориями;

– конкретное решение тестовой задачи с использованием разработанной модели показывает, что учет двойной анизотропии материала существенно влияет на распределение характеристик напряженно-деформируемого состояния пластин.

Библиографический список

1. Амелина Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е. В. Амелина [и др.] // Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 27–52.
2. Каюмов Р. А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р. А. Каюмов, С. А. Луканкин, В. Н. Паймушин, С. А. Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 112–132.
3. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L. N. Shafigullin, A. A. Bobrishev, A. N. Shafigullina [et al.] // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10, № 23. – P. 43758–43762.
4. Трещев А. А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов / А. А. Трещев. – М.: РААСН; Тула: ТулГУ, 2007. – 160 с.
5. Трещев А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 326 с.
6. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Доннел – М.: Наука, 1984. – 440 с.
7. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
8. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
9. Трещев А. А. Определяющие соотношения для нелинейных анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / А. А. Трещев, Д. А. Ромашин // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2011. – № 4. – Ч. 4. – С. 1740–1742.
10. Treschev A. A. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn // Chebyshevskii Sbornik. – 2021. – Vol. 22, № 4. – P. 369–383.
11. Трещев А. А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов / А. А. Трещев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 4–1 (324). – С. 71–74.
12. Treschev A. A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law / A. A. Treschev, A. A. Bobrishev, L. N. Shafigullin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 481. – UNSP012014. – DOI: 10.1088/1757-899X/481/1/012014. – P. 1–7.
13. Черкасов, И. И. Механические свойства грунтовых оснований / И. И. Черкасов. – М.: Науч-техн. изд-во Автотрансиздат, 1958. – 156 с.
14. Варвак П. М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П. М. Варвак, Л. П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.
15. Bert C. W. Bending of Thick Rectangular Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / C. W. Bert, J. N. Reddy, W. C. Chao // AIAA Journal. – 1981. – Vol. 19, № 10. – P. 1342–1349.

16. Bert C. W. Deflection of Thick Beams of Multimodular Materials / C. W. Bert, F. Gordaninejad // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1984. – Vol. 20. – P. 479–503.
17. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R. M. Jones // *AIAA Journal*. – 1980. – Vol. 18, №8. – P. 995–1001.
18. Амбарцумян С. А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела / С. А. Амбарцумян // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1969. – № 3. – С. 51–61.
19. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

References

1. Amelina E. V. On the Nonlinear Deformation of Carbon-Fiber Reinforced Plastics: Experiment, Model, Calculation / E. V. Amelina [et al.] // *Computational Technologies*. – 2015. – Vol. 20, No. 5. – P. 27–52.
2. Kayumov R. A. Identification of Mechanical Properties of Fiber-Reinforced Composites / R. A. Kayumov, S. A. Lukankin, V. N. Paimushin, S. A. Kholmogorov // *Kazan University Scientific Notes. Physical and Mathematical Sciences*. – 2015. – Vol. 157, Book 4. – P. 112–132.
3. Development of the Recommendations on Selection of Glass-Fiber Reinforced Polyurethanes for Vehicle Parts / L. N. Shafigullin, A. A. Bobrishev, A. N. Shafigullina [et al.] // *International Journal of Applied Engineering Research*. – 2015. – Vol. 10, № 23. – P. 43758–43762.
4. Treschev A. A. Anisotropic Plates and Shells Made of Materials with Different Resistance Properties / A. A. Treschev. – Moscow: RAASN; Tula: Tula State University, 2007. – 160 p.
5. Treschev A. A. Theory of Deformation and Strength of Materials with Initial or Induced Sensitivity to Stress State. Constitutive Relations / A. A. Treschev. – Moscow; Tula: RAASN; Tula State University, 2016. – 326 p.
6. Donnell L. G. Beams, Plates, and Shells / L. G. Donnell. – Moscow: Nauka, 1984. – 440 p.
7. Vlasov V. Z. Beams, Plates, and Shells on an Elastic Foundation / V. Z. Vlasov, N. N. Leontiev. – Moscow: Fizmatgiz, 1960. – 491 p.
8. Timoshenko S. P. Plates and Shells / S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. – Moscow: Nauka, 1966. – 636 p.
9. Treschev A. A. Constitutive Relations for Nonlinear Anisotropic Materials Sensitive to the Type of Stress State / A. A. Treschev, D. A. Romashin // *Nizhny Novgorod State University Bulletin*. – 2011. – № 4, Part 4. – P. 1740–1742.
10. Treschev A. A. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn // *Chebyshevskii Sbornik*. – 2021. – Vol. 22, № 4. – P. 369–383.
11. Treschev A. A. Potential Relationship Between Strains and Stresses for Orthotropic Physically Nonlinear Materials / A. A. Treschev // *Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. – 2017. – № 4–1 (324). – P. 71–74.
12. Treschev A. A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law / A. A. Treschev, A. A. Bobrishev, L. N. Shafigullin // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2019. – Vol. 481. – UNSP012014. – DOI: 10.1088/1757-899X/481/1/012014. – P. 1–7.
13. Cherkasov I. I. Mechanical Properties of Soil Foundations / I. I. Cherkasov. – Moscow: Autotransizdat, 1958. – 156 p.
14. Varvak P. M. Grid Method in Structural Design Calculations / P. M. Varvak, L. P. Varvak. – Moscow: Stroyizdat, 1977. – 154 p.
15. Bert C. W. Bending of Thick Rectangular Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / C. W. Bert, J. N. Reddy, W. C. Chao // *AIAA Journal*. – 1981. – Vol. 19, № 10. – P. 1342–1349.

16. Bert C. W. Deflection of Thick Beams of Multimodular Materials / C. W. Bert, F. Gordaninejad // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1984. – Vol. 20. – P. 479–503.
17. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R. M. Jones // *AIAA Journal*. – 1980. – Vol. 18, № 8. – P. 995–1001.
18. Ambartsumyan S. A. Fundamental Equations and Relations of Bimodular Elasticity Theory of Anisotropic Bodies / S. A. Ambartsumyan // *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of Solids*. – 1969. – № 3. – P. 51–61.
19. Ambartsumyan S. A. General Theory of Anisotropic Shells / S. A. Ambartsumyan. – Moscow: Nauka, 1974. – 446 p.

**BENDING OF A RING PLATE
MADE OF MATERIAL WITH DOUBLE ANISOTROPY
ON AN ELASTIC FOUNDATION**

A. A. Treschev¹, V. G. Telichko², I. R. Seleznev³

Tula State University^{1,2,3}
Russia, Tula

¹ Corresponding member of RAACS, Dr. of Tech. Sciences, Professor, Head of the Department of Construction, Building Materials and Structures, tel.: +7(905)622-90-58, e-mail: taa58@yandex.ru

² Dr. of Tech. Sciences, Professor of the Department of Construction, Building Materials and Structures, tel.: +7(952)019-84-65, e-mail: katranv@yandex.ru

³ Postgraduate student of the Department of Construction, Building Materials and Structures, tel. +7(953)425-62-08, e-mail: il.seleznov@yandex.ru

This study develops a mathematical model and solves the axisymmetric problem of determining the stress-strain state of a thin ring plate made of a double-anisotropy material resting on an elastic Winkler foundation. Geometric dependencies are recorded within the framework of thin plate theory, using Kirchhoff – Love hypotheses. The physical dependencies are assumed according to the model of deformation of materials with double anisotropy, presented in a normalized tensor space proposed by one of the authors. Structural anisotropy is limited to the class of orthotropic materials. The plate is loaded with an external pressure orthogonal to the median surface, assuming small deflections. The resulting system of resolving differential equations is approximated by the finite difference method to the level of algebraic equalities, which, in turn, are solved using the Cholesky method. Stress and deflection graphs are constructed based on the results obtained. As part of the analysis and discussion of the data obtained, a comparison was made with the results of solving a similar problem using other physical models and a conclusion was made about the effectiveness of using improved ratios.

Keywords: thin ring plate, orthotropy, different resistance, elastic base, finite difference method, small deflections of the plate, normalized space.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.042.8:624.21

DOI 10.36622/2219-1038.2024.43.4.006

ПРОБЛЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

В. В. Юрьев¹, С. В. Ефрюшин², Г. Е. Габриелян³Воронежский государственный технический университет^{1, 2, 3}
Россия, г. Воронеж¹ Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: vvuriev@gmail.com² Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: ooo.stroynauka@mail.ru³ Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: grayr2010@rambler.ru

Анализируется проблема расчета взаимодействия транспортных сооружений с подвижными нагрузками. Приводится описание задачи динамического взаимодействия подвижной нагрузки с сооружениями на основе применения подрессоренных инертных моделей автотранспортных средств. Обсуждается разрабатываемая универсальная программа конечно-элементного анализа для решения динамических задач мостовых конструкций. Приводятся тестовые задачи и сравнение с результатами расчетов по сертифицированному ПК.

Ключевые слова: подвижная нагрузка, динамическое воздействие, транспортное сооружение, моделирование, программный комплекс, метод конечных элементов

Тенденции увеличения скоростей и грузоподъемности современных транспортных средств, рост интенсивности транспортных потоков предъявляют повышенные требования к надёжности и эксплуатационным качествам мостов. Применение в мостостроении высокопрочных сталей, тонкостенных и комбинированных систем с повышенной деформативностью приводит к необходимости на стадии проектирования проводить анализ их динамической чувствительности, в том числе на действие транспортного потока.

Динамическое воздействие подвижной нагрузки на мосты могут вызывать различные труднопредсказуемые эффекты в виде резонансных колебаний, биений и т. д. При интенсивных колебаниях проблемой, кроме прочности, может являться накопление повреждений в элементах конструкций, приводящее к их преждевременному износу и снижению долговечности. Следует отметить проблему неблагоприятного психологического действия вибраций на людей, находящихся на пролётных строениях. Существенное влияние на пассажиров транспортных средств отмечается при частотах вибрации в диапазоне 1...30 Гц, что также соответствует распространённому диапазону спектров частот колебаний различных автотранспортных средств при их движении по неровному пути [1].

В современных нормах проектирования мостов для учёта динамики применяются динамические коэффициенты к нормативным статическим нагрузкам от автотранспорта, которые назначаются в зависимости от типа конструкции и материала. В статье [2] отмечается, что использование динамического коэффициента во многих случаях не описывает сущность

возникающих динамических эффектов, не имеет обоснования в части определения величины динамического коэффициента. Возникает необходимость в применении уточненных методов расчета взаимодействия подвижных нагрузок с транспортными сооружениями.

В процессе моделирования взаимодействия подвижной нагрузки с транспортными сооружениями интерес представляет качественная и количественная оценка негативных факторов, способствующих снижению эксплуатационных свойств сооружения в результате динамического воздействия подвижной нагрузки. Инструментом для таких оценок может служить прямое имитационное моделирование эксплуатационных нагрузок на основе математических методов и современных вычислительных алгоритмов.

В настоящее время развитие получила теория динамического взаимодействия подвижной нагрузки с сооружениями на основе применения подрессоренных инертных моделей автотранспортных средств [3]. Теория позволила учитывать связность в системе «мост – автомобиль», а также вероятностный характер их взаимодействия. Существенное теоретическое и практическое развитие теория динамического взаимодействия подвижной нагрузки с сооружениями в 70-е годы получила в трудах Воронежского ИСИ под руководством проф. А. Г. Барченкова, проф. В. С. Сафронова и их учеников [4–7].

Механико-математическая модель системы «мост – автомобиль» (задача с обратной связью) характеризуется нестационарностью общей расчётной схемы с усложняющими факторами в виде необходимости учёта нелинейностей в конструкциях мостов, подвесках автомобилей и шин [4–6]. Существенным элементом указанной модели является задание пути под колёсами автомобиля в виде детерминированных или стохастических неровностей как случайного процесса. Необходимая точность модели может быть проанализирована с помощью сопоставления спектров подсистем «мост» и «автомобиль». Так, при определённых условиях возможно разделение задачи на два этапа. На первом этапе производится расчёт динамической модели «автомобиль», движущейся по неровному пути, и формируется функция давления, на втором этапе функция давления участвует в расчёте пролётного строения как нестационарная нагрузка, изменяющая во времени своё расположение и значение.

Существующие универсальные программы и вычислительные комплексы конечно-элементного анализа не содержат возможности моделирования динамического взаимодействия подвижных нагрузок с транспортными сооружениями. Наличие такой возможности позволит повысить качество проектирования транспортных сооружений.

Для частичного решения изложенной проблемы поставлена задача разработки специализированной универсальной программы, основанной на методе конечных элементов. Разработка универсальной программы предполагает включение в неё возможности удобного ввода исходной информации, достаточную степень автоматизации построения расчётной модели на основе метода конечных элементов, современные алгоритмы решателя и информативные способы постпроцессорной обработки результатов. Программа должна предоставлять возможность создания пользователем библиотеки укрупнённых блоков в виде моделей типовых мостовых конструкций и транспортных средств, набор характерных профилей проезжей части. Выбор режимов исследований – как для одиночного автомобиля, так и для потока (регулярного или случайного) – позволит качественно проводить исследования объекта.

Разрабатываемая программа состоит из 3-х укрупнённых блоков: препроцессор, процессор, постпроцессор.

Блок подпрограмм «препроцессор» предназначен для хранения, обработки и подготовки исходных данных для конечно-элементного расчета. В качестве исходных данных программа принимает всю необходимую информацию о геометрии конструкции, материалах, нагрузках, параметрах автомобилей, геометрических характеристиках сечений элементов и т.д. Для обеспечения удобства ввода исходных данных, а также в целях снижения ошибок предусматриваются готовые библиотеки, ускоряющие процесс моделирования. Библиотеки создаются с целью уменьшения вводимых пользователем исходных данных.

Предусмотрены такие библиотеки, как:

- библиотека поперечных сечений конструкций. Содержит в себе базу типовых балок пролетных строений железобетонных и стальных автодорожных мостов;
- библиотека материалов строительных конструкций;
- библиотека укрупненных блоков пролетных строений. Включает в себя набор типовых пролетных строений железобетонных и стальных автодорожных мостов;
- библиотека автотранспортных средств. Содержит набор подрессоренных инертных моделей автомобилей различных типов (легковых, грузовых и т. д.);
- библиотека характерных профилей проезжей части. Содержит набор случайных и детерминированных функций, описывающих неровности пути.

Препроцессор подготавливает исходные данные для расчета путем формирования матриц узлов, элементов, векторов нагрузок и т. д. Реализуемый подход к работе препроцессора позволяет сокращать время и уменьшать количество ошибок на стадии подготовки конечно-элементной модели.

В блоке подпрограмм «процессор» конечно-элементный решатель выполняет следующие этапы расчета [8]:

- формирование матриц конечных элементов;
- введение в расчетную модель кинематических и силовых граничных условий;
- построение матриц жесткости, масс и др.;
- выполнение расчётов в зависимости от выбранного типа анализа.

В программе реализован метод конечных элементов в форме метода перемещений [9], позволяющий решать задачи на собственные значения для определения собственных частот и форм колебаний конструкций, а также уравнения динамического равновесия для определения реакции исследуемой конструкции на изменяющиеся во времени нагрузки. При решении динамических задач применяется метод численного интегрирования уравнений вынужденных колебаний Ньюмарка [10]. Решение задач с геометрической и физической нелинейностями на каждом временном шаге выполняется с помощью метода Ньютона – Рафсона.

Результатами работы блока программ «процессор» являются узловые перемещения и усилия в узлах конечно-элементной модели, деформации элементов, напряжения, собственные формы и частоты колебаний.

Блок подпрограмм «постпроцессор» реализует вывод результатов расчета решателя в виде графического и табличного представления результатов. Например, осуществляет построение деформированной сетки конечных элементов, выводит усилия, возникающие в конечных элементах, формы собственных колебаний, предусматривает анимирование результатов расчета поведения модели под нагрузкой и многие другие операции.

Три рассмотренных составных элемента конечно-элементной программы имеют одно свойство – модульность, которая позволяет при необходимости добавлять новые блоки, в частности, использовать новые конечные элементы, совершенствовать методы решения разрешающих уравнений, создавать новые способы представления результатов.

Приведём несколько тестовых примеров, иллюстрирующих работоспособность применяемых алгоритмов.

Пример 1. Решение статической задачи. Рассмотрим расчет многопролетной неразрезной шарнирно опертой балки и проведем сравнение результатов с данными, полученными с помощью сертифицированного программного комплекса «Midas Civil». Сечением балки является двутавр № 24 по ГОСТ 8239-89, площадь поперечного сечения $A = 34,8 \text{ см}^2$, момент инерции $I = 3460 \text{ см}^4$. Продольная схема балки $5 \times 6 \text{ м}$, равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью $Q = 10 \text{ кН/м}$. На рис. 1 представлены результаты статического расчета балки в программном комплексе «Midas Civil» и в разрабатываемой программе.

Сравнение результатов статического расчета приведено в табл. 1.

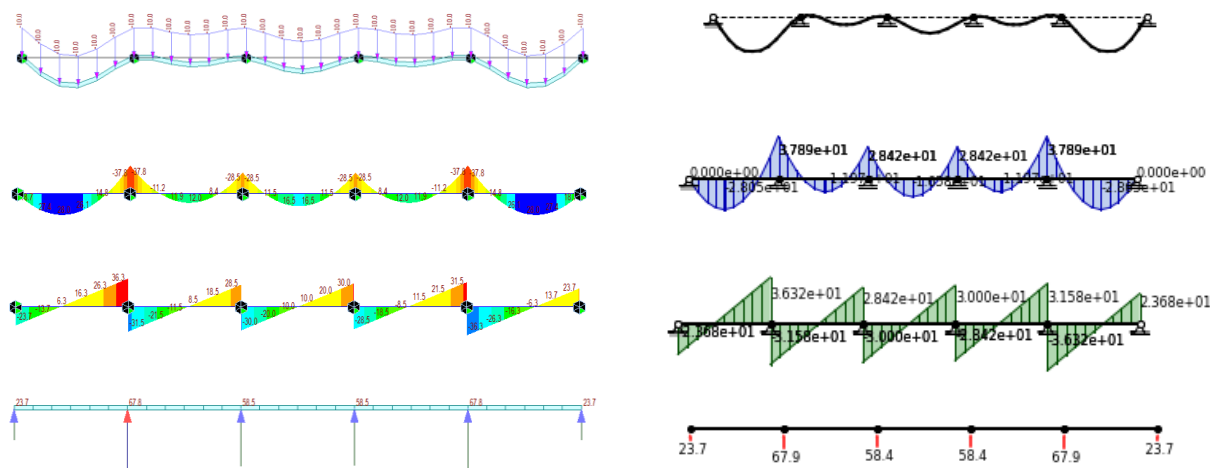


Рис. 1. Результаты расчета в ПК «Midas Civil» (слева) и в разрабатываемом ПК (справа): общий вид расчетной схемы; деформированный вид; эпюра изгибающих моментов M , кНм; эпюра поперечных сил Q , кН; опорные реакции, кН

Анализ полученных данных показывает хорошее соответствие результатов расчета, погрешность не превышает 0,3 %.

Таблица 1

Сравнение результатов расчета статического расчета

Метод расчета	Прогиб в середине 3-го пролета при $Q = 10$ кН/м, мм	Изгибающий момент M в середине 3-го пролета при $Q = 10$ кН/м, кНм
Расчет авторов	6,11	16,58
Расчет в ПК «Midas Civil»	6,12	16,53
Погрешность результатов расчета, %	0,16	0,30

Пример 2. Модальный анализ. Рассмотрим рамную конструкцию (рис. 2), для которой проводится модальный анализ. Сравниваются результаты расчета с данными, полученными с помощью ПК «ЛИРА-САПР» и с помощью аналитического решения, представленного в [11].

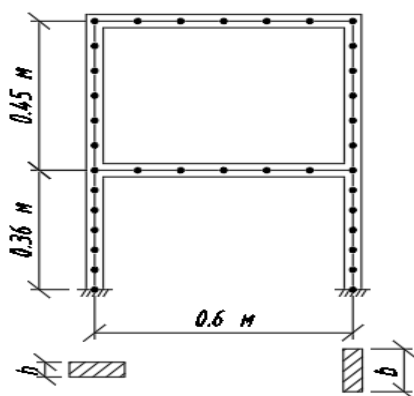


Рис. 2. Расчетная схема рамы

Характеристика поперечных сечений: толщина $h = 4,8$ мм, ширина $b = 29$ мм, площадь $A = 1,392 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, момент инерции $I_z = 2,673 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4$. Характеристики материала: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Граничные условия: стойки защемлены.

Результаты расчета представлены на рис. 3–5.

Загрузка 1
Форма колебаний в л. с. 1

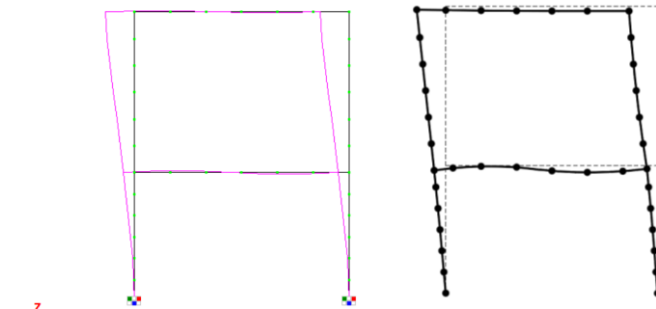


Рис. 3. Первая форма собственных колебаний в ПК «ЛИРА-САПР» (слева) и в разрабатываемой программе (справа)

Загрузка 1
Форма колебаний в л. с. 2

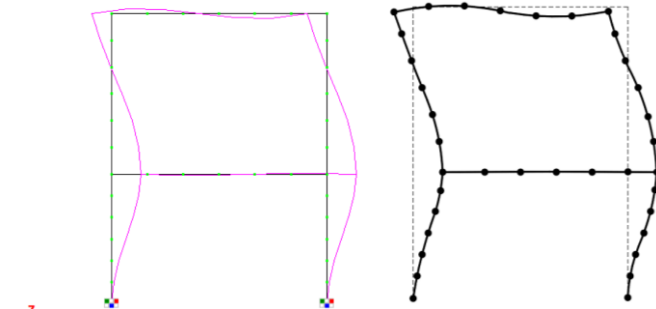


Рис. 4. Вторая форма собственных колебаний в ПК «ЛИРА-САПР» (слева) и в разрабатываемой программе (справа)

Загрузка 1
Форма колебаний в л. с. 3

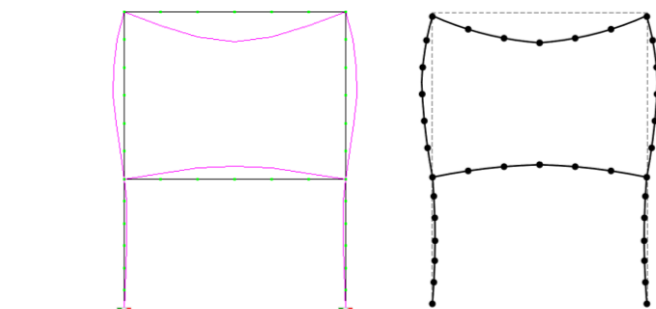


Рис. 5. Третья форма собственных колебаний в ПК «ЛИРА-САПР» (слева) и в разрабатываемой программе (справа)

Сравнение результатов модального анализа приведено в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение результатов расчета модального анализа

Порядок формы	Частота, Гц			Погрешность с аналитическим решением, %	Погрешность с «ЛИРА-САПР», %
	Расчет авторов	Аналитическое решение	Результат «ЛИРА-САПР»		
1	8,782	8,8	8,778	0,20	0,05
2	29,431	29,4	29,408	0,11	0,08
3	43,865	43,8	43,837	0,15	0,06
4	56,281	56,3	56,275	0,03	0,01
5	95,834	96,2	95,825	0,38	0,01
6	102,513	102,6	102,704	0,08	0,19
7	147,003	147,1	146,818	0,07	0,13
8	174,834	174,8	175,008	0,02	0,10
9	178,497	178,8	178,464	0,17	0,02
10	206,112	206	205,972	0,05	0,07

Сравнение показывает, что результаты расчета собственных частот и форм колебаний имеют хорошее совпадение, что свидетельствует о работоспособности реализованного метода расчета. Погрешность не превышает 0,38 %.

В заключение следует отметить, что численные исследования с использованием специализированной программы позволят расширить применение теории динамического взаимодействия подвижной нагрузки с сооружениями на основе применения подрессоренных инертных моделей автотранспортных средств. Применение данной методики актуально при проектировании технически сложных транспортных сооружений. Создаваемые на базе метода конечных элементов программы позволят корректно оценивать динамическую реакцию сооружений при проезде по ним различных подвижных нагрузок, использовать технически сложные проектные решения, уменьшать материалоемкость конструкций, избегая при этом возникновения опасных динамических явлений.

Библиографический список

1. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
2. Картопольцев А. В., Картопольцев В. М., Кухаренко С. А. К вопросу о динамическом коэффициенте // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2021. – Т. 23, № 5. – С. 127–141. – DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-5-127-141.
3. Моргаевский А. Б. О влиянии рессор на динамическую величину динамического эффекта от подвижной нагрузки // Исследования по теории сооружений. Вып. XIV. – М.: Стройиздат, 1965. – С. 65–71.
4. Барченков А. Г. Динамический расчет автодорожных мостов. – М.: Транспорт, 1976. – 198 с.
5. Ананьин А. И., Барченков А. Г., Сафронов В. С. Динамика автодорожных мостов // Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Справочник проектировщика. – Москва, 1986. – С. 327–348.
6. Сафронов В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та. 1983. – 196 с.
7. Ефрюшин С. В. Развитие метода расчленения для расчета динамического воздействия подвижных нагрузок на комбинированные системы: дис. канд. техн. наук: 01.02.03 / ВИСИ. – Воронеж, 1987. – 243 с.
8. Секулович М. Метод конечных элементов / пер. с серб. Ю. Н. Зуева; под ред. В. Ш. Барбакадзе. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
9. Даутов Р. З. Программная реализация метода конечных элементов в MATLAB. – 106 с.
10. Бате К., Вилсон Е. Численные метода анализа и метод конечных элементов – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
11. Верификационный отчет по программному комплексу ЛИРА – САПР. Т. III. – М., 2015. – 131 с.

References

1. Chelomey V. N. Vibrations in Engineering: Handbook in 6 Volumes. M.: Mashinostroenie, 1981. Vol. 6. Protection from Vibration and Shocks. Ed. K.V. Frolov, 1981. 456 p.
2. Kartopoltsev A. V., Kartopoltsev V. M., Kukhareenko S. A. On the issue of the dynamic coefficient. Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. Vol. 23. No. 5. 2021. Pp. 127–141. DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-5-127-141.

3. Morgaevsky A. B. On the influence of springs on the dynamic value of the dynamic effect of a moving load. *Studies in the Theory of Structures. Issue XIV.* Moscow: Stroyizdat, 1965. Pp. 65–71.
4. Barchenkov A. G. *Dynamic Calculation of Highway Bridges.* Moscow: Transport, 1976. 198 p.
5. Ananyin A. I., Barchenkov A. G., Safronov V. S. Dynamics of highway bridges. In: *Dynamic Calculation of Special Engineering Structures and Constructions. Designer's Handbook.* Moscow, 1986. Pp. 327–348.
6. Safronov V. S. *Calculation of Suspension and Cable-Stayed Bridges for Moving Load.* Voronezh: Publishing House of Voronezh State University. 1983. 196 p.
7. Efrushin S. V. Development of the method of dismemberment for calculating the dynamic impact of moving loads on combined systems. Diss. candidate of technical sciences. 01.02.03. VISI. Voronezh, 1987. 243 p.
8. Sekulovich M. Finite element method. Transl. from Serbian. Yu. N. Zuev. Ed. V. Sh. Barbakadze. M.: Stroyizdat, 1993. 664 p.
9. Dautov R. Z. Software implementation of the finite element method in MATLAB. 106 p.
10. Bate K., Wilson E. *Numerical methods of analysis and the finite element method.* M.: Stroyizdat, 1982. 448 p.
11. Verification report on the LIRA-CAD software package. Volume III. M.: 2015. 131 p.

PROBLEM OF MODELING THE DYNAMIC RESPONSE OF BRIDGE STRUCTURES TO THE ACTION OF MOBILE VEHICLES

V. V. Yuryev ¹, S. V. Efrushin ², G. E. Gabrielyan ³

Voronezh State Technical University ^{1, 2, 3}
Russia, Voronezh

¹ Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: vvuriev@gmail.com

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

³ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: grayr2010@rambler.ru

The problem of calculating the interaction of transport structures with moving loads is analyzed. A description of the problem of dynamic interaction of a moving load with structures is given based on the use of sprung inert models of vehicles. The universal finite element analysis program being developed for solving dynamic problems of bridge structures is discussed. Test problems and comparison with the results of calculations using certified PCs are given.

Keywords: moving load, dynamic impact, transport structure, modeling, software package, finite element method.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.014 + 624.047.2

DOI 10.36622/2219-1038.2024.43.4.007

УСТОЙЧИВОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕСУЩЕГО РЕБРА ВАНТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ⁷

А. В. Чесноков¹, В. В. Михайлов²

Липецкий государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Липецк

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры строительного производства, тел.: +7(4742)32-80-74,
e-mail: andreychess742@mail.ru

² Д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой строительного производства, тел. +7(4742)32-80-74,
e-mail: mmvv46@rambler.ru

Постановка цели. Предложено новое конструктивное решение пространственного вантового покрытия (защищено патентом на полезную модель), обладающее меньшей габаритной высотой и материалоемкостью по сравнению с рациональными типами строительных конструкций. Проблема устойчивого равновесия вантовых конструкций и образующих их подсистем конструктивных элементов является актуальной. Цель настоящей работы заключается в разработке методики оценки равновесного состояния несущего ребра вантовой конструкции, образованного гибкой вантой и рядом стоек, с учетом его отклонения от номинально вертикального положения.

Результаты. Получены выражения в безразмерной форме и разработан итерационный алгоритм поиска нормальной и тангенциальной составляющей внешней нагрузки на ванту с учетом её удлинения при заданном угле наклона плоскости ванты к вертикали. Предложены критерии устойчивого равновесного состояния несущего ребра вантовой конструкции. Установлены минимальные выпуски стоек (превышение вершин стоек над опорными узлами ванты), необходимые для обеспечения устойчивого равновесия исследуемого несущего ребра.

Выводы. Предложенные выражения, не зависящие от абсолютных значений геометрических размеров конструкции и интенсивности внешней нагрузки, удобны с точки зрения практического применения. Полученные минимальные выпуски стоек необходимы при разработке проекта предложенного вантового покрытия. Разработанная методика оценки равновесного состояния несущего ребра вантового покрытия вносит вклад в развитие современных эффективных строительных конструкций.

Ключевые слова: устойчивое равновесие, вантовая конструкция покрытия, гибкая нить, комбинированная строительная конструкция

Введение. Вантовые строительные конструкции обладают малым собственным весом и хорошей архитектурной выразительностью. Они эффективны для перекрытия большепролетных зданий и сооружений гражданского и промышленного назначения с редкой сеткой несущих колонн [1–3].

Пространственные системы за счет обеспечения совместной работы конструктивных элементов получают преимущество перед одиночными вантами и плоскими вантовыми фермами. Для круглых в плане зданий и сооружений разработаны предварительно напряженные тросовые купола [4, 5]. Решения, предложенные Н. М. Кирсановым, А. С. Щегловым и

А. Г. Трущевым, предназначены для прямоугольных зданий, находящихся широкое применение в промышленном и гражданском строительстве [6–8]. Проблема образования снеговых мешков на поверхности и повышенная габаритная высота покрытия вместе с тем свидетельствуют о необходимости дальнейшего совершенствования вантовых конструкций.

С целью уменьшения неэксплуатируемого объема перерываемого здания, обеспечения свободной планировки и снижения материалоемкости предложена пространственная вантовая конструкция (рис. 1) [9, 10]. Конструкция относится к т. н. tensegrity-системам, в которых непрерывные гибкие ванты объединены между собой относительно короткими и малочисленными сжатыми стойками [11–13].

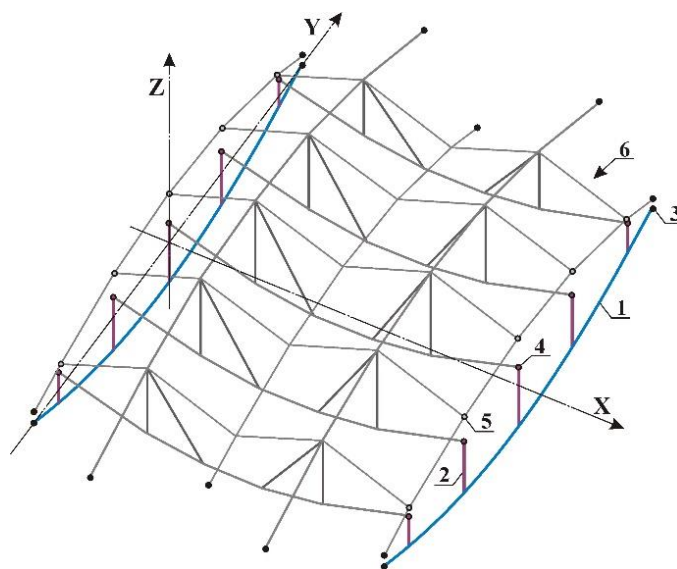


Рис. 1. Рядовая секция исследуемой вантовой конструкции:

- 1, 2 – гибкая ванта и стойки, образующие несущее ребро; 3 – неподвижная опора;
- 4 – узел, закреплённый в горизонтальной плоскости связями (условно не показаны на рисунке);
- 5 – узел, закреплённый по оси X ; 6 – несущие элементы и связи по верхнему поясу

Практическая реализация вантовых систем требует совершенствования расчетных методик, учитывающих геометрическую и конструктивную нелинейность, проявляемую конструкцией под действием внешних нагрузок и в процессе создания предварительных напряжений [5, 14, 15].

Для статического анализа вантовых систем применяются численные и аналитические методы. Численные методы, основанные на построении касательной матрицы жесткости и итерационном поиске решения, представлены достаточно полно в имеющихся литературных источниках [16–19]. Вместе с тем разработка аналитических методов, используемых в оптимизационных алгоритмах, сохраняет свою актуальность [20].

Усовершенствованная методика расчета одиночных вант, являющихся основными несущими элементами исследуемой конструкции (рис. 1), предложена в работе [21]. Методика нахождения требуемых жесткостных параметров и величины предварительного напряжения вантовых ферм, применимая для расчета пространственных конструкций, разработана в [22].

Обеспечение устойчивого равновесного состояния вантовых конструкций и образующих их подсистем конструктивных элементов является важной задачей. В работе [23] приведены основные методы по обеспечению устойчивости висячих и вантовых мостов, включающие применение гасителей колебаний и введение дополнительных связей. Систематизация технических решений, направленных на повышение жесткости и устойчивости большепролетных вантовых покрытий, предложена в работе [24].

Результаты исследования устойчивости комбинированной арочной системы, состоящей из изгибно-жесткого верхнего пояса, объединенного с натягающей вантой нижнего пояса при помощи распорок, приведены в работах [25, 26]. Делается вывод, что комбинированная система является геометрически неизменяемой, а ее равновесное положение устойчиво при действии на нижний (не раскрепленный связями) пояс горизонтальной возмущающей нагрузки, перпендикулярной плоскости конструкции. Вместе с тем влияние случайных эксцентриситетов и удлинений связей, удерживающих верхний пояс в проектном положении, требуют дополнительных исследований.

Постановка цели. Цель предлагаемой работы заключается в разработке методики оценки равновесного состояния несущего ребра вантовой конструкции, образованного гибкой вантой и рядом стоек с закрепленными в горизонтальной плоскости вершинами (рис. 1) и имеющими отклонение от номинально вертикального положения.

Методы исследования. В качестве объекта исследования выбрана гибкая ванта с установленными стойками (рис. 2). Верхние концы стоек, нагруженные внешней нагрузкой q , закреплены в горизонтальной плоскости. Принято, что стойки являются несжимаемыми и расположены с малым шагом, что позволяет считать нагрузку, передаваемую стойками на ванту, равномерно распределенной.

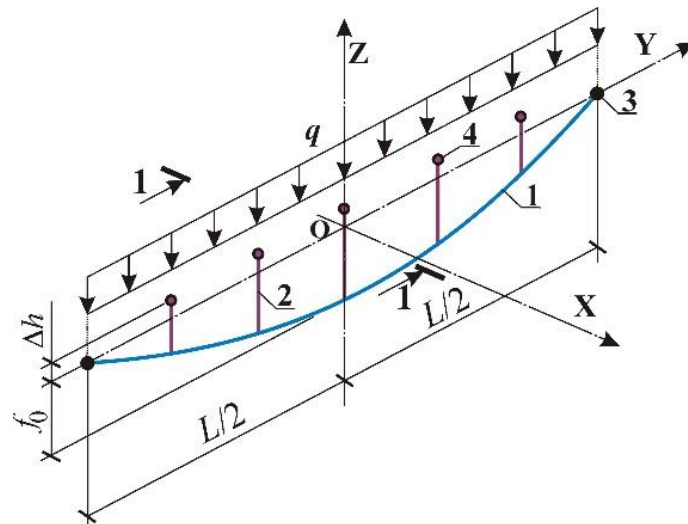


Рис. 2. Несущее ребро вантовой конструкции:
 1 – гибкая ванта; 2 – ряд стоек; 3 – неподвижная опора;
 4 – узел, имеющий закрепления только в горизонтальной плоскости

При отклонении ванта от вертикального положения за счет смещения верхних концов стоек на заданное расстояние Δ , конструкция перейдет в равновесное состояние, показанное на рис. 3а, в котором углы наклона плоскости стоек и плоскости ванта к вертикали одинаковы, $\alpha_{Eq} = \beta_{Eq}$, а ванта подвержена действию только нормальной нагрузки от стоек P_n :

$$P_n = q \cdot k_n, \quad (1, a)$$

где q – внешняя вертикальная, равномерно распределенная нагрузка на исследуемое ребро вантовой конструкции; k_n – коэффициент нормальной нагрузки:

$$k_n = \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \tan(\alpha), \quad (1, б)$$

где α – угол между плоскостью стоек и вертикалью; β – угол между плоскостью ванта и вертикалью.

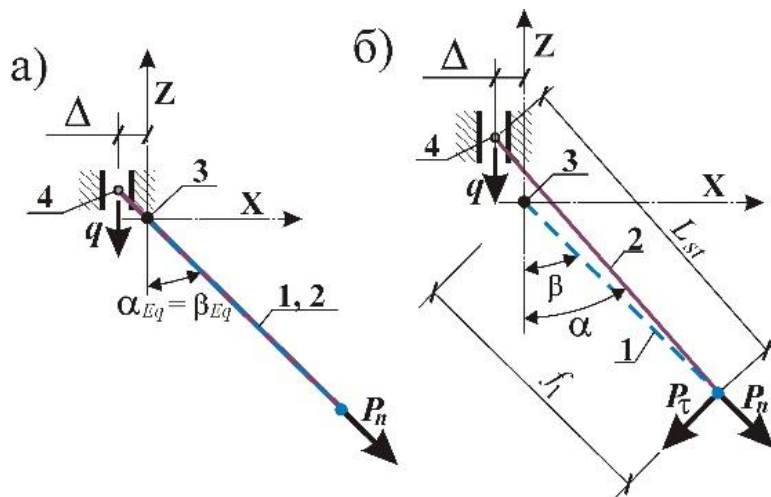


Рис. 3. Разрез 1–1 по рис. 2:
а) равновесное состояние; б) отклонение от равновесия (кинематическая схема);
обозначения – по рис. 2

Выход рассматриваемой конструкции из равновесного состояния за счет поворота ванты относительно оси Y , проходящей через опорные узлы, при $\alpha \neq \beta \neq \beta_{Eq}$, сопровождается появлением тангенциальной нагрузки P_τ , положительное направление которой показано на рис. 3б:

$$P_\tau = q \cdot k_\tau, \quad (2, a)$$

где k_τ – коэффициент тангенциальной нагрузки:

$$k_\tau = \sin(\beta) - \cos(\beta) \cdot \tan(\alpha). \quad (2, б)$$

Угол наклона стоек α находится из условия их несжимаемости от действия нагрузки, а также возможности перемещения концов стоек строго в вертикальной плоскости:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{f_1 \cdot \sin(\beta) + \Delta}{L_{st}}\right), \quad (3)$$

где f_1 – стрела ванты в деформированном состоянии; Δ – заданное горизонтальное смещение вершины стойки, расположенной в центре пролета вантовой конструкции, включающее случайные эксцентриситеты и удлинение горизонтальных связей, удерживающих стойку в проектном положении; L_{st} – длина стойки, расположенной в центре пролета:

$$\Delta = f_0 / 100 + L / 1000, \quad (4)$$

$$L_{st} = f_0 + \Delta h, \quad (5)$$

где L – пролет ванты; f_0 – начальная стрела ванты; Δh – начальное заданное превышение верхних концов стоек над опорами ванты (выпуск стойки, обозначенный на рис. 2):

$$f_0 = L \cdot k_{f,0}, \quad (6, a)$$

$$\Delta h = L \cdot k_{\Delta h}, \quad (6, б)$$

где $k_{f,0}$ – заданная относительная стрела ванты в исходном положении; $k_{\Delta h}$ – относительное превышение вершины стойки.

Стрела ваныты в деформированном состоянии при действии внешней нагрузки P_n равна сумме начальной стрелы и приращения Δf_p :

$$f_1 = f_0 + \Delta f_p. \quad (7)$$

Приращение стрелы получено в [21]:

$$\Delta f_p = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4 \cdot A_2 \cdot (A_3 - A_0 \cdot f_0)}}{2 \cdot A_2}, \quad (8)$$

где A_0, A_1, A_2 и A_3 – параметры, выраженные через коэффициенты Φ_2, Φ_4, Ψ_x и kq_1 , а также начальную длину ваныты $L_{c,0}$ и её продольную жесткость EA .

С учетом равномерного характера нагрузки P_n коэффициенты составляют $\Phi_2 = 8 / (3 \cdot L)$, $\Phi_4 = -32 / (5 \cdot L^3)$, $\Psi_x = \pi^3 / 32$ и $kq_1 = q \cdot k_n \cdot kq_1^{Eq,1}$, где $kq_1^{Eq,1} = 4 / \pi$. Начальная длина равна:

$$L_{c,0} = L \cdot k_{Lc,0}, \quad (9, a)$$

где $k_{Lc,0}$ – относительная начальная длина ваныты:

$$k_{Lc,0} = \frac{-32}{5} \cdot k_{f,0}^4 + \frac{8}{3} \cdot k_{f,0}^2 + 1. \quad (9, б)$$

Продольную жесткость ваныты EA найдем из уравнения ваныты, полученного в [21] по условию достижения ванытой предельно допустимой относительной деформации, $\varepsilon_c = \varepsilon_{lim}$, под действием нагрузки P_n^{max} , определяемой коэффициентом $k_{n,max}$:

$$EA = \frac{L}{\pi^2} \cdot \frac{\Psi_x}{k_{f,lim} \cdot \varepsilon_{lim}} \cdot kq_1^{Eq,1} \cdot q \cdot k_{n,max} \cdot \zeta, \quad (10)$$

где ζ – коэффициент неравномерности усилий по длине ваныты:

$$\zeta = \sqrt{1 + 16 \cdot k_{f,lim}^2}, \quad (11)$$

где $k_{f,lim}$ – предельно допустимая относительная стрела ваныты при заданной относительной начальной длине $k_{Lc,0}$ и предельно допустимой деформации ε_{lim} :

$$k_{f,lim} = 0.5 \cdot \sqrt{5/6} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - 3.6 \cdot [k_{Lc,0} \cdot (\varepsilon_{lim} + 1) - 1]}}. \quad (12)$$

Предельно допустимая относительная деформация определяется расчетным сопротивлением R_c и модулем упругости материала ваныты E_c :

$$\varepsilon_{lim} = \frac{R_c}{E_c}. \quad (13)$$

Выражение (7) преобразовано к виду:

$$f_1 = L \cdot (k_{f,0} + k_{\Delta f,p}), \quad (14)$$

где $k_{\Delta f,p}$ – относительное приращение стрелы:

$$k_{\Delta f,p} = \frac{-k_{A,1} + \sqrt{k_{A,1}^2 + 4 \cdot k_{A,2} \cdot (k_{A,3} - k_{A,0} \cdot k_{f,0})}}{2 \cdot k_{A,2}}, \quad (15)$$

где $k_{A,0}$, $k_{A,1}$, $k_{A,2}$ и $k_{A,3}$ – коэффициенты:

$$k_{A,0} = 0, \quad (16, \text{а})$$

$$k_{A,1} = 4 \cdot k_{f,0}^2 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{32}{5} \cdot k_{f,0}^2 \right), \quad (16, \text{б})$$

$$k_{A,2} = 8 \cdot k_{f,0} \cdot (1 - 8 \cdot k_{f,0}^2), \quad (16, \text{в})$$

$$k_{A,3} = k_{Lc,0} \cdot \frac{k_n}{k_{n,\max}} \cdot \frac{\varepsilon_{\lim}}{\sqrt{16 + 1/k_{f,\lim}^2}}. \quad (16, \text{г})$$

Учитывая (4)-(6), (14), выражение (3) преобразуем следующим образом:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{(k_{f,0} + k_{\Delta f,p}) \cdot \sin(\beta) + k_{\Delta}}{k_{f,0} + k_{\Delta h}} \right), \quad (17)$$

где

$$k_{\Delta} = k_{f,0} / 100 + 1 / 1000. \quad (18)$$

Поиск коэффициентов k_n и k_{τ} , определяющих нормальную и тангенциальную нагрузки на ванту при заданном угле β , производится итерационным методом в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Начальная итерация $i = 0$: относительное приращение стрелы ванты $k_{\Delta f,p} = 0$;
2. Определение угла наклона стоек $\alpha^{(i)}$ по (17);
3. Расчет коэффициентов $k_n^{(i)}$, $k_{A,3}$ и $k_{\Delta f,p}$ по (1, б), (16, г) и (15) соответственно, с учетом растяжения ванты под нагрузкой;
4. Если $i > 0$, проверка критерия достижения решения. Если $\xi \leq \varepsilon$, **завершение итерационного процесса**: $k_n = k_n^{(i)}$ и расчет коэффициента k_{τ} (2, б), где ε – допустимое расхождение значений коэффициента k_n на итерациях (принято $\varepsilon = 0,1$ %), ξ – фактическое расхождение, %:

$$\xi = 200 \cdot \frac{|k_n^{(i)} - k_n^{(i-1)}|}{k_n^{(i)} + k_n^{(i-1)}}; \quad (19)$$

5. Приращение номера итерации, $i = i + 1$, и переход к п. 2.

Приняты следующие критерии устойчивого равновесного состояния исследуемого несущего ребра вантовой конструкции:

1. Имеется действительное решение β_{Eq} уравнения:

$$k_{\tau}(\beta) = 0, \quad (20)$$

где $k_{\tau}(\beta)$ – функция (2, б);

2. В окрестности решения β_{Eq} выполнено условие:

$$\frac{dk_{\tau}}{d\beta} > 0. \quad (21)$$

Условие (20) означает, что равновесное состояние, в котором отсутствует тангенциальная составляющая внешней нагрузки, достижимо. В свою очередь, выполнение условия (21) гарантирует устойчивость данного равновесного состояния, отклонение от которого сопровождается появлением тангенциальной нагрузки, возвращающей конструкцию в состояние равновесия: при $\beta > \beta_{Eq}$ тангенциальная нагрузка положительна и направлена в сторону уменьшения угла β , а при $\beta < \beta_{Eq}$ тангенциальная нагрузка увеличивает данный угол (положительное направление угла и нагрузки – на рис. 3б).

Результаты численных исследований. На рис. 4 приведены графики коэффициента k_n (1, б) в зависимости от угла β при относительном превышении вершины стойки $k_{\Delta h} = 1/50$ (6, б) и различных относительных стрелах несущей ванта $k_{f,0}$ (6, а).

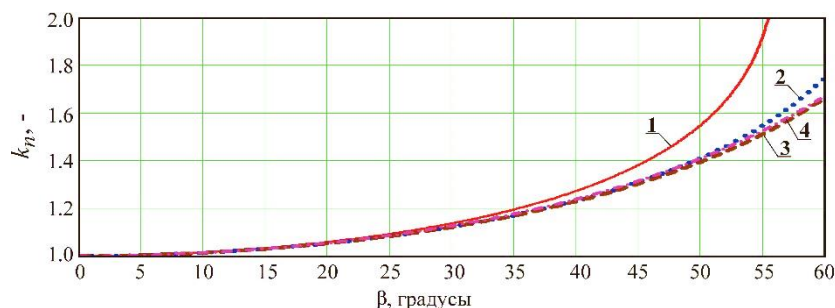


Рис. 4. Зависимости коэффициента k_n :

1...4 – графики при относительных стрелах несущей ванта $k_{f,0}$, равных 1/24, 1/16, 1/12 и 1/8 соответственно

Из рисунка видно, что с ростом угла β нормальная составляющая нагрузки P_n , определяемая коэффициентом k_n , монотонно возрастает. Для дальнейших расчетов, в запас надежности, принят коэффициент $k_{n, \max} = 2,0$.

На рис. 5 приведены графики коэффициента k_τ (2, б). Из рисунка видно, что условия (20) и (21) выполнены только при $k_{\Delta h} = 1/75$ и $k_{f,0} = 1/16$, а также при $k_{\Delta h} = 1/100$ и $k_{f,0} = 1/8$. При этом устойчивое равновесие достигается при угле наклона плоскости ванта $\beta = 26^\circ$, что неприемлемо с точки зрения нормальной эксплуатации исследуемой конструкции.

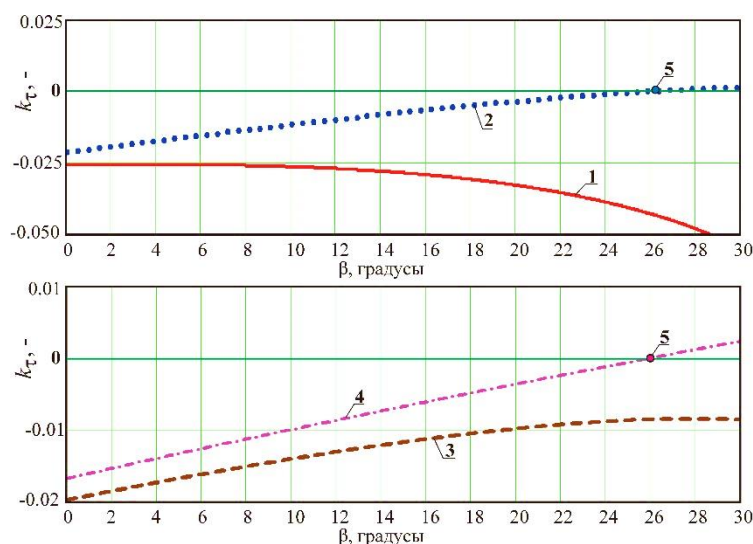


Рис. 5. Зависимости коэффициента k_τ :

1, 2 – графики при относительном превышении вершины стойки $k_{\Delta h} = 1/75$ и относительных стрелах несущей ванта $k_{f,0}$, равных 1/24 и 1/16 соответственно;
3, 4 – графики при $k_{\Delta h} = 1/100$ и относительных стрелах несущей ванта $k_{f,0}$, равных 1/12 и 1/8 соответственно;
5 – точки равновесия

Графики коэффициента k_τ при увеличенном относительном превышении вершин стоек $k_{\Delta h}$ приведены на рис. 6.

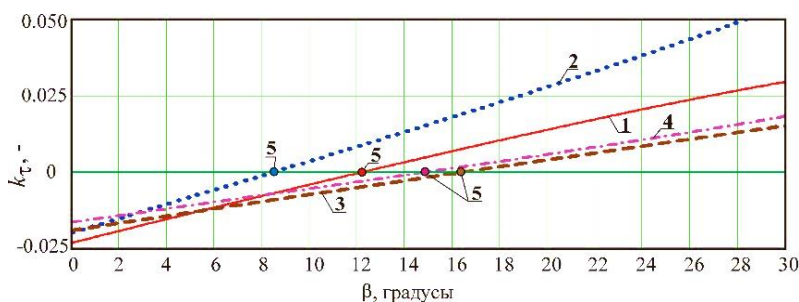


Рис. 6. Графики коэффициентов k_τ :

- 1, 2 – графики при относительном превышении вершины стойки $k_{\Delta h} = 1/50$ и относительных стрелах несущей ванты $k_{f,0}$, равных $1/24$ и $1/16$ соответственно;
3, 4 – графики при $k_{\Delta h} = 1/75$ и относительных стрелах несущей ванты $k_{f,0}$, равных $1/12$ и $1/8$ соответственно;
5 – точки равновесия

Из рисунка видно, что ростом коэффициента $k_{\Delta h}$ устойчивое равновесие достигается во всём рассмотренном диапазоне относительных стрел несущей ванты $k_{f,0} = 1/24 \dots 1/8$ при углах наклона плоскостей вант к вертикали, не превышающих $16,5^\circ$.

Выводы. По результатам работы можно сделать следующие выводы:

1. Разработана методика определения равновесного положения в пространстве и оценки состояния устойчивого равновесия несущего ребра новой вантовой конструкции покрытия (патент на полезную модель 169612) с учетом заданного отклонения стоек, образующих ребро, от номинально вертикального положения;
2. Методика включает разработанный итерационный алгоритм поиска нормальной k_n и тангенциальной k_τ составляющих внешней нагрузки на ванту с учетом её удлинения, при заданном угле наклона плоскости ванты к вертикали β . Полученные выражения записаны в безразмерной форме;
3. Предложены критерии устойчивого равновесного состояния исследуемого несущего ребра вантовой конструкции: отсутствие тангенциальной составляющей внешней нагрузки $k_\tau = 0$ и положительное значение первой производной от k_τ по углу β ;
4. Выяснено, что с ростом угла β нормальная составляющая внешней нагрузки на ванту монотонно возрастает. Рекомендовано предельное значение коэффициента нормальной нагрузки $k_{n,\max} = 2,0$;
5. Установлены минимальные коэффициенты $k_{\Delta h}$ (6, б), задающие выпуск стоек (превышение вершин стоек над опорными узлами ванты), необходимый для обеспечения устойчивого равновесия исследуемого несущего ребра вантовой конструкции: $k_{\Delta h} = 1/75$, при относительной стреле несущей ванты $k_{f,0} \geq 1/12$, и $k_{\Delta h} = 1/50$, при $k_{f,0} < 1/12$;
6. Результаты работы вносят вклад в развитие вантовых строительных конструкций, являющихся эффективным решением для покрытия большепролетных зданий и сооружений.

Библиографический список

1. Еремеев П. Г. Висячие конструкции // Строительные материалы. 2022. № 10. С. 62–67. DOI: 10.31659/0585-430X-2022-807-10-62-67.
2. Krivoshapko S. N. Cable-stayed structures for public and industrial buildings // Building and Reconstruction. 2019. № 1 (81). P. 23–47. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37265600> (дата обращения: 28.10.2024).

3. Кривошапко С. Н. Вантовые структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 9–22. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25055892> (дата обращения: 28.10.2024).
4. Yu X., Yaozhi L., Yafeng W., Xian X., Hua-Ping W., Yanbin S., Wenwei F. A new configuration of Geiger-type cable domes with sliding ridge cables. Computational framework and structural feasibility investigation // Engineering Structures. 2023. Vol. 286. Article 116028. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116028.
5. Sudarshan K. Structural design and behavior of prestressed cable domes // Engineering Structures. 2020. Vol. 209. Article 110294. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110294.
6. Кирсанов Н. М. Висячие и вантовые конструкции. М.: Стройиздат, 1981. 158 с.
7. Щеглов А. С. Висячие комбинированные покрытия производственных зданий с перекрестными несущими элементами: дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 1986. 210 с.
8. Трущев А. Г. Пространственные металлические конструкции. М.: Стройиздат, 1983. 215 с.
9. Чесноков А. В., Михайлов В. В. Вантовая конструкция покрытия: патент на полезную модель № 169612 Российская Федерация. № 2016142384; заявл. 27.10.2016; опубл. 24.03.2017. Бюл. № 9.
10. Чесноков А. В., Михайлов В. В. Разработка вантовой конструкции с тентовым покрытием // Строительная механика и конструкции. 2024. Вып. 1 (40). С. 56–67. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.40.1.005.
11. Gomez-Jauregui V., Carrillo-Rodriguez A., Manchado C., Lastra-Gonzalez P. Tensegrity applications to architecture, engineering and robotics: a review // Applied Sciences. 2023. № 13 (15). Article 8669. DOI: 10.3390/app13158669.
12. Habibi T., Rhode-Barbarigos L., Keller T. Effects of prestress implementation on self-stress state in large-scale tensegrity structure // Engineering Structures. 2023. Vol. 288. Article № 116222. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116222.
13. Snelson K. The art of tensegrity // International Journal of Space Structures. 2012. Vol. 27, № 2-3. P. 71–80.
14. Ибрагимов А. М., Гнедина Л. Ю., Долгушева В. В. Проблемы применения и проектирования арочных комбинированных систем // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. 2021. № 2. С. 25–35. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46513205> (дата обращения: 28.10.2024).
15. Yu Z., Jiamin G., Zhiyu J., Weigang C., Guangen Z. Control method for determining feasible pre-stresses of cable-struts structure // Thin-Walled Structures. 2022. Vol. 174, Article 109159. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109159.
16. Abad M. S. A., Shooshtari A., Esmaeili V., Riabi A. N. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings // Finite Elements in Analysis and Design. 2013. Vol. 73. P. 11–19. DOI: 10.1016/j.finel.2013.05.002.
17. Ma S., Yuan X. F., Deng M., Yang L. Minimal mass design of a new cable truss in two states // Mechanics Research Communications. 2022. Vol. 125, Article № 103995. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103995.
18. Costa R. S., Lavall A. C. C., Lanna da Silva R. G., Porcino dos Santos A., Viana H. F. Cable structures: an exact geometric analysis using catenary curve and considering the material non-linearity and temperature effect // Engineering Structures. 2022. Vol. 253. Article 113738. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113738.
19. Li X., Xue S. Prestress design and geometric correction method of cable–truss structures based on equivalent equilibrium force model // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 191, Article № 111058. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111058.

20. Wagner R. Bauen mit seilen und membranen. Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2016. 517 p. (In German).
21. Чесноков А. В., Михайлов В. В. Усовершенствованная методика расчета гибких вант // Вестник МГСУ. 2024. Том 19, № 7. С. 1091–1103. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.7.1091-1103.
22. Чесноков А. В., Михайлов В. В., Долматов И. В. Определение продольных жесткостей поясов и предварительного напряжения двухпоясных вантовых ферм // Известия вузов. Строительство. 2024. № 9. С. 5–18. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-789-9-5-18.
23. Карамышева А. А., Колотиенко М. А., Гранкина Д. В., Даниленко И. Ю. Основные методы повышения устойчивости и жесткости большепролетных вантовых и висячих мостовых сооружений // Инженерный вестник Дона. 2019. № 4 (55). 11 с. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5830> (дата обращения: 28.10.2024).
24. Карамышева А. А., Строев Д. А., Колотиенко М. А., Гранкина Д. В. Рационализация технологических, конструктивных и архитектурных решений вантовых покрытий большепролетных объектов спортивного назначения // Инженерный вестник Дона. 2019. № 5 (56). 10 с. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5930> (дата обращения: 28.10.2024).
25. Киселев Д. Б. Работа комбинированной арочной системы с учетом геометрической нелинейности и последовательности монтажа: специальность 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения»: дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2009. 135 с.
26. Киселев Д. Б. Численные исследования устойчивости комбинированных арочных систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. № 2 (211). С. 20–24. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30713939> (дата обращения: 28.10.2024).

References

1. Eremeev P. G. Hanging structures // Building materials. 2022. № 10. P. 62–67. DOI: 10.31659/0585-430X-2022-807-10-62-67.
2. Krivoshapko S. N. Cable-stayed structures for public and industrial buildings // Building and Reconstruction. 2019. № 1 (81). P. 23–47. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37265600> (date of application: 28.10.2024).
3. Krivoshapko S. N. Cable-stayed structures // Structural mechanics of engineering structures and buildings. 2016. № 1. P. 9–22. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25055892> (date of application: 28.10.2024).
4. Yu X., Yaozhi L., Yafeng W., Xian X., Hua-Ping W., Yanbin S., Wenwei F. A new configuration of Geiger-type cable domes with sliding ridge cables. Computational framework and structural feasibility investigation // Engineering Structures. 2023. Vol. 286. Article 116028. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116028.
5. Sudarshan K. Structural design and behavior of prestressed cable domes // Engineering Structures. 2020. Vol. 209. Article 110294. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110294.
6. Kirsanov N. M. Hanging and cable-stayed structures. M.: Strojizdat, 1981. 158 p.
7. Shheglov A. S. Suspended combined roofs of industrial buildings with cross-bearing elements: dis. ... kand. tehn. nauk. Voronezh, 1986. 210 p.
8. Trushhev A. G. Spatial metal structures. M.: Strojizdat, 1983. 215 p.
9. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V. Cable roof structure: utility model patent № 169612 RF. № 2016142384; zayavl. 27.10.2016; opubl. 24.03.2017. Byul. № 9.
10. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V. Development of the cable structure with the tent roofing // Structural mechanics and structures. 2024. Vyp. 1 (40). P. 56–67. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.40.1.005.

11. Gomez-Jauregui V., Carrillo-Rodriguez A., Manchado C., Lastra-Gonzalez P. Tensegrity applications to architecture, engineering and robotics: a review // *Applied Sciences*. 2023. № 13 (15). Article 8669. DOI: 10.3390/app13158669.
12. Habibi T., Rhode-Barbarigos L., Keller T. Effects of prestress implementation on self-stress state in large-scale tensegrity structure // *Engineering Structures*. 2023. Vol. 288. Article № 116222. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116222.
13. Snelson K. The art of tensegrity // *International Journal of Space Structures*. 2012. Vol. 27, № 2-3, P. 71–80.
14. Ibragimov A. M., Gnedina L. Yu., Dolgusheva V. V. Problems of application and design of arched combined systems // *Bulletin of the Volga State Technological University. Series: Materials. Structures. Technologies*. 2021. № 2. P. 25–35. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46513205> (date of application: 28.10.2024).
15. Yu Z., Jiamin G., Zhiyu J., Weigang C., Guangeng Z. Control method for determining feasible pre-stresses of cable-struts structure // *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 174, Article 109159. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109159.
16. Abad M. S. A., Shooshtari A., Esmaeili V., Riabi A. N. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2013. Vol. 73. P. 11–19. DOI: 10.1016/j.finel.2013.05.002.
17. Ma S., Yuan X. F., Deng M., Yang L. Minimal mass design of a new cable truss in two states // *Mechanics Research Communications*. 2022. Vol. 125, Article №103995. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103995.
18. Costa R. S., Lavall A. C. C., Lanna da Silva R. G., Porcino dos Santos A., Viana H. F. Cable structures: an exact geometric analysis using catenary curve and considering the material non-linearity and temperature effect // *Engineering Structures*. 2022. Vol. 253. Article 113738. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113738.
19. Li X., Xue S. Prestress design and geometric correction method of cable–truss structures based on equivalent equilibrium force model // *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 191, Article № 111058. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111058.
20. Wagner R. *Bauen mit seilen und membranen*. Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2016. 517 p. (In German).
21. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V. Advanced technique for flexible cable analysis // *Vestnik MGSU*. 2024. Vol. 19, № 7. P. 1091–1103. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.7.1091-1103.
22. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V., Dolmatov I. V. Determination of axial stiffness and pre-stress of two-chord cable trusses // *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2024. № 9. P. 5–18. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-789-9-5-18.
23. Karamysheva A. A., Kolotienko M. A., Grankina D. V., Danilenko I. Yu. Basic methods for increasing the stability and rigidity of large-span cable-stayed and suspension bridge structures // *Engineering journal of Don* 2019. № 4 (55). 11 p. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5830> (date of application: 28.10.2024).
24. Karamysheva A. A., Stroeve D. A., Kolotienko M. A., Grankina D. V. Rationalization of technological, design and architectural solutions for cable-stayed roofs of large-span sports facilities // *Engineering journal of Don*. 2019. № 5 (56). 10 p. <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5930> (date of application: 28.10.2024).
25. Kiselev D. B. Operation of a combined arch system taking into account geometric non-linearity and installation sequence: spetsial'nost' 05.23.01 «Stroitel'nye konstruksii, zdaniya i sooruzheniya»: dis. ... kand. tekhn. nauk. Moskva, 2009. 135 p.
26. Kiselev D.B. Numerical studies of stability of combined arch systems // *Structural mechanics and calculation of structures*. 2007. № 2 (211). P. 20–24. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30713939> (date of application: 28.10.2024).

STABLE EQUILIBRIUM OF THE LOAD-BEARING TRUSS OF A CABLE ROOF STRUCTURE

A. V. Chesnokov ¹, V. V. Mikhailov ²

Lipetsk State Technical University ^{1,2}
Russia, Lipetsk

¹ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Building Manufacturing Department, tel.: +7(4742)32-80-74, e-mail: andreychess742@mail.ru

² Dr. of Technical Sciences, Professor, Head of the Building Manufacturing Department, tel.: +7(4742)32-80-74, e-mail: mmvv46@rambler.ru

Problem statement. A new design solution for a spatial cable roof is proposed. The solution is confirmed by the utility model patent. The roof has smaller overall height and requires less amount of material in comparison to efficient types of building structures. The problem of stable equilibrium of cable structures and the subsystems of the structural elements is relevant. The purpose of the present work is to develop a method for assessing the equilibrium state of a load-bearing truss of the cable structure, which consists of a flexible cable and a number of struts. The method is to take into account the truss deviation from the desired vertical position.

Results. Dimensionless expressions are derived and an iterative algorithm for finding normal and tangential components of the external load on the cable is developed. Cable elongation and the angle of its inclination to the vertical are taken into account. Criteria for a stable equilibrium state of the load-bearing truss of the cable structure are proposed. Minimum extensions of the struts (which are the exceedings of the strut tops over the cable supports) are established. The extensions ensure stable equilibrium of the load-bearing truss under study.

Conclusions. The proposed expressions are independent on the absolute values of the geometric dimensions of the structure and the magnitude of the external load. They are convenient from the practical view point. The obtained minimum strut extensions are necessary for designing the proposed cable roof. The elaborated technique for assessing equilibrium state of the load-bearing truss of the cable roof contributes to the development of modern and efficient building structures.

Keywords: stable equilibrium, cable roof structure, flexible cable, hybrid building structure.

УДК 624.139.6:536.4

DOI 10.36622/2219-1038.2024.43.4.008

**ОЦЕНКА ДАВЛЕНИЯ ПУЧЕНИЯ ПРИ ПРОМЕРЗАНИИ МЕРЗЛОГО ГРУНТА
В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ**

В. Х. Ким¹, М. С. Ким²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов,
тел: +7(920) 423-90-78; e-mail: vyachhkim@yandex.ru

² Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов,
тел: +7(920) 468-91-36; e-mail: marskim@yandex.ru

Рассматривается метод оценки давления, возникающего при промерзании грунта в замкнутом объеме, с использованием термодинамического подхода. Показано различие давления, возникающего за счет кристаллизации в промерзающем грунте свободной воды, и давления, возникающего за счет замерзания пленочной воды. Доказано, что гидростатическое давление в пленочной воде не передается. Получена уточненная формула для определения давления пучения грунта в замкнутом объеме, исходя из позиций равновесной термодинамики. Результаты расчетов по полученной формуле показали высокую степень сходимости с экспериментальными данными. Описан механизм развития давления при замерзании пленочной воды в грунтах и предложена модель этого процесса.

Ключевые слова: промерзающий грунт, давление морозного пучения, фазовый переход пленочной воды, равновесная термодинамика.

Введение. Интенсивное освоение районов Севера и Северо-Востока России, богатых залежами полезных ископаемых, сопровождается строительством новых территориально-производственных комплексов промышленного и гражданского назначения.

Одной из проблем, возникающих при строительстве в районах распространения сезонно- и многолетнемерзлых грунтов, является взаимодействие фундаментов и конструкций сооружений с промерзающим пучающимся грунтом. В связи с этим большое значение приобретают исследования, направленные на изучение силовых воздействий пучинистых грунтов на сооружения и разработку приемов управления процессами пучения и эффективных мер борьбы с ними.

Изучению проблемы морозного пучения посвящены многочисленные экспериментальные и теоретические исследования [1–7]. Значительно менее изучены механизм и динамика развития давления морозного пучения в грунтах, промерзающих в замкнутом объеме. Целью и задачей данного исследования является установление на основе современных представлений о криогенных процессах закономерностей развития давления морозного пучения грунтов и разработка методов расчета этого давления применительно к возводимым сооружениям.

Механическая модель давления морозного пучения грунта в замкнутом объеме.

Как известно, при фазовом переходе свободной (гравитационной) воды в лед при понижении отрицательной температуры в замкнутом объеме возникают значительные величины давлений [1, 2]. Давление, развивающееся при замерзании воды, составляет свыше 10 МПа на один

градус понижения температуры. Однако такие величины давлений при промерзании грунта не возникают. На величину давления в промерзающих грунтах, кроме давления, развивающегося при замерзании свободной воды, оказывают значительное влияние процессы текстурообразования и теплопереноса фазовых переходов пленочной (рыхлосвязанной) незамерзшей воды [3–6].

Давление, возникающее при замерзании свободной (гравитационной) воды в замкнутом объеме без возможности ее объемного расширения, можно определить по формуле Тамманна-Бриджмена [7]:

$$p_{i,w}^{\infty} = 1 + 127 \cdot T - 1,519 \cdot T^2, \quad (1)$$

где $p_{i,w}^{\infty}$ – давление, 10^{-1} МПа;

T – температура плавления льда, $^{\circ}\text{C}$.

Увеличение объема грунта в зоне промерзания обусловлено не только кристаллизацией свободной воды, присутствующей в нем до замерзания, но и наличием в пучинистых грунтах пленочной (рыхлосвязанной) воды [8, 9] и ее миграцией в жидкой фазе к фронту промерзания.

Наличие в глинистых грунтах связанной (пленочной) воды, оказывающей доминирующее влияние на развитие процесса морозного пучения, вызывает специфическую динамику развития давления морозного пучения в замкнутом объеме. Анализ экспериментальных данных с учетом современных представлений о криогенных процессах и фазовых превращениях воды показал, что необходимо отличать давление, возникающее за счет кристаллизации свободной воды, и давление, возникающее в процессе охлаждения мерзлого грунта за счет кристаллизации незамерзшей пленочной воды. Миграция пленочной воды происходит за счет перемещения от толстых пленок к тонким и, таким образом, обеспечивает рост кристаллов льда в порах грунта в зоне промерзания. Фазовый переход пленочной воды в лед происходит при более низкой температуре, чем у свободной воды. Рост ледяных линз за счет миграции пленочной воды происходит тогда, когда свободная вода в порах грунта уже перешла из жидкой фазы в твердую и образовала лед. При взаимодействии грунта с пленочной водой давление растущих в порах кристаллов льда будет полностью восприниматься как льдом и минеральной частью скелета грунта, так и прочносвязанной водой, свойства которой аналогичны свойствам твердого тела. В зоне промерзания минеральные частицы вместе с прочносвязанной водой образуют жесткий решетчатый каркас, который, воспринимая давление, дает возможность пленочной воде свободно проникать через отверстия решетки к растущим в порах кристаллам льда (рис. 1).

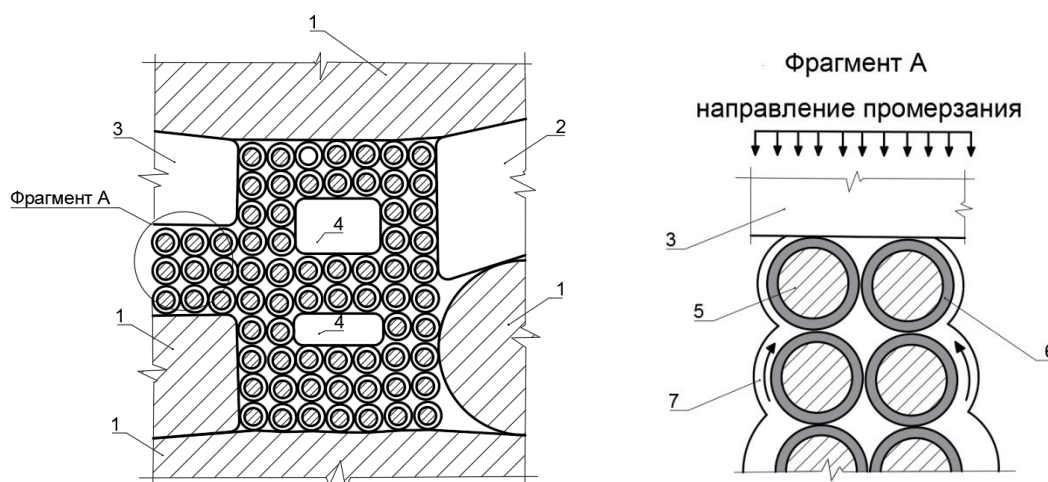


Рис. 1. Процесс развития давления морозного пучения в замкнутом объеме:

- 1 – минеральные частицы скелета грунта; 2 – лед межзернистых пор; 3 – лед в межмикроагрегатно-зернистых порах; 4 – лед в межмикроагрегатных порах; 5 – глинистые и пылеватые частицы микроагрегата грунта; 6 – прочносвязанная вода минеральной частицы; 7 – мигрирующая пленочная вода

В таком случае можно говорить, что в зоне промерзания грунта кристаллы льда, растущие за счет пленочной воды, создают и воспринимают давление, а в пленочной воде это давление отсутствует. Тогда получается, что в замкнутом объеме пор фазовый переход пленочной воды в лед совершается при наличии давления в твердой фазе и отсутствии давления в жидкой фазе.

Таким образом, мы можем утверждать, что при промерзании пленочной воды гидростатическое давление в пленочной воде не передается и равно нулю.

Предложенный механизм развития давления морозного пучения в замкнутом объеме грунта позволяет получить расчетную схематическую, механическую модель давления морозного пучения в замкнутом объеме грунта (рис. 2).

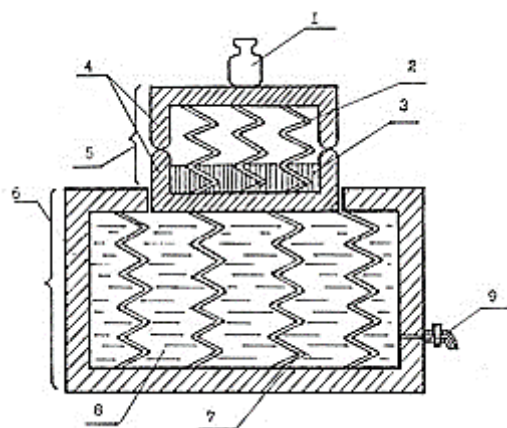


Рис. 2. Схематическая модель процесса формирования давления морозного пучения, возникающего при образовании льда в порах грунта:
 1 – внешнее давление;
 2 – лед, образованный за счет замерзания пленочной воды;
 3 – пленочная вода, $p_w = 0$;
 4 – жесткий грунтовый каркас в зоне промерзания;
 5 – зона промерзания;
 6 – зона оттаивания;
 7 – скелет из оттаявшего грунта;
 8 – свободная вода в порах грунта;
 9 – кран, который имитирует закрытую систему $p_w > 0$ и открытую систему $p_w = 0$

Количественная оценка давления пучения грунта в замкнутом объеме с позиций равновесной термодинамики. Для описания равновесия двухфазной системы «лед – связанная вода», находящейся под внешним давлением, можно использовать уравнение Гиббса-Дюгема, связывающее их химический потенциал с температурой, давлением, удельным объемом и энтропией.

Как известно из равновесной термодинамики [10], химический потенциал μ связан с температурой T , удельной энтропией S , удельным объемом V и давлением p следующим соотношением (уравнением Гиббса-Дюгема):

$$SdT - Vdp + d\mu = 0. \quad (2)$$

Для двухфазной системы «лед – связанная вода», находящейся под действием внешнего давления, приложенного к поверхности промерзающего грунта, уравнение (2) запишется в виде:

– для льда: $d\mu_i - V_i dp_i + S_i dT_i = 0,$

или: $d\mu_i = V_i dp_i - S_i dT_i; \quad (3)$

– для связанной воды: $d\mu_w - V_w dp_w + S_w dT_w = 0,$

или: $d\mu_w = V_w dp_w - S_w dT_w. \quad (4)$

Здесь μ_w, μ_i – химический потенциал связанной воды и льда;
 V_w, V_i – удельные объемы связанной воды и льда, $\text{м}^3/\text{кг}$;
 p_w, p_i – давление от внешней нагрузки в связанной воде и льде, Па;
 T_w, T_i – температура связанной воды и льда, $^\circ\text{K}$;
 S_w, S_i – удельная энтропия связанной воды и льда.

Базируясь на положении, что гидростатическое давление в пленочной воде не передается и напряженность ее силовых полей не зависит от внешнего давления, а обусловлена в

основном природой поверхности минеральной части пород, можем принять, что давление в пленках воды от действия внешнего давления будет равно нулю:

$$p_w = 0. \quad (5)$$

Тогда выражение (4) с учетом (5) примет вид:

$$d\mu_w = -S_w dT_w. \quad (6)$$

Запишем условие термодинамического равновесия – условие равенства химических потенциалов двух фаз – связанной воды и льда:

$$d\mu_w = d\mu_i. \quad (7)$$

Примем в двухфазной системе температуру воды и льда одинаковой:

$$T_w = T_i = T. \quad (8)$$

Тогда равенство (7) с учетом выражений (3), (4) и (8) примет следующий вид:

$$V_i dp_i - S_i dT = -S_w dT,$$

или:

$$\frac{dp_i}{dT} = \frac{S_i - S_w}{V_i}. \quad (9)$$

Скрытую теплоту фазового перехода связанной воды в лед $L(T)$ при абсолютной температуре T можно выразить через разность энтропий льда S_i и воды S_w [11]:

$$L(T) = T(S_i - S_w). \quad (10)$$

Для скрытой теплоты фазового перехода связанной воды в лед Л.В. Чистотиновым [12] предложена следующая зависимость от температуры:

$$L(T) = L^\circ(T) + \Delta\mu(h), \quad (11)$$

где $L^\circ(T)$ – скрытая теплота кристаллизации свободной воды, Дж/кг;

$\Delta\mu(h)$ – отклонение химического потенциала связанной (незамерзшей) воды от его значения для свободной воды.

Зависимость скрытой теплоты кристаллизации свободной воды от температуры имеет вид:

$$L^\circ(T) = L_0^\circ + \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \gamma\Delta T^3, \quad (12)$$

где L_0° – удельная теплота фазового перехода свободной гравитационной воды в лед при температуре 0°C , $L_0^\circ = 333350$ Дж/кг;

α, β, γ – коэффициенты, равные $\alpha = -2101,4$; $\beta = -6,2$; $\gamma = -5 \cdot 10^{-8}$.

Отклонение химического потенциала связанной незамерзшей воды от его значения для свободной воды в интервале изменения температур от 0 до -40°C определится из выражения:

$$\Delta\mu(h) = -\frac{L_0^\circ(T_0 - T)}{T_0}, \quad (13)$$

где T_0 – температура плавления или замерзания воды, находящейся под давлением в одну атмосферу, $^\circ\text{K}$; $T_0 = 273^\circ\text{K}$ (0°C);

T – температура связанной воды, $^\circ\text{K}$.

Выражение (11) с учетом (12) и (13) примет вид:

$$L(T) = \frac{L_0^\circ T}{T_0} + \alpha(T_0 - T) + \beta(T_0 - T)^2 + \gamma(T_0 - T)^3. \quad (14)$$

Уравнение (10) с учетом (14) запишем в виде:

$$L_0 \frac{T}{T_0} + \alpha(T_0 - T) + \beta(T_0 - T)^2 + \gamma(T_0 - T)^3 = T(S_i - S_w),$$

или:

$$S_i - S_w = \frac{L_0}{T_0} + \frac{\alpha(T_0 - T)}{T} + \frac{\beta(T_0 - T)^2}{T} + \frac{\gamma(T_0 - T)^3}{T}. \quad (15)$$

Подставляя формулу (15) в выражение (9), получим:

$$dp_i = \frac{1}{V_i} \left[\frac{L_0}{T_0} + \frac{\alpha(T_0 - T)}{T} + \frac{\beta(T_0 - T)^2}{T} + \frac{\gamma(T_0 - T)^3}{T} \right] dT. \quad (16)$$

Проинтегрировав уравнение (16) в пределах от T до T_0 , получим уравнение

$$\int_T^{T_0} dp_i = \int_T^{T_0} \frac{1}{V_i} \left[\frac{L_0}{T_0} + \frac{\alpha(T_0 - T)}{T} + \frac{\beta(T_0 - T)^2}{T} + \frac{\gamma(T_0 - T)^3}{T} \right] dT. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) позволяет получить формулу для определения давления пучения p_i (МПа), которое развивается в промерзающем грунте при температуре T , °К, за счет замерзания пленочной незамерзшей воды:

$$p_i = 1035,76 \ln(T) - 6,707T + 0,0031T^2 - 1,66 \cdot 10^{-11}T^3 - 4210. \quad (18)$$

Сравнение расчетных значений давления пучения в промерзающем грунте с результатами экспериментов. Результаты расчетов давления пучения, развивающегося в промерзающем грунте, по формуле (18) и формуле Бриджмена-Таммана (1) и сравнение их с результатами экспериментов Т. Такачи [13] приведены в таблице.

Таблица

Формула для расчета давления	Давление (МПа) при температуре (°C)				
	-2,6	-5,3	-10	-14	-25,1
(1)	32	63,1	111,9	148,1	223,2
(18)	3,24	6,45	11,90	16,38	28,01
Результаты экспериментов Т. Такачи [13]	2,73	6,34	11,53	14,06	25,29

Как следует из (18), давление p_i , возникающее при замерзании воды в замкнутом объеме пор грунта, зависит только от температуры грунта. Величина давления, определенная по формуле (18), показывает, что оно практически на один порядок меньше величин, рассчитанных по формуле Бриджмена-Таммана. Расхождение между теоретически вычисленными величинами по формуле (18) и экспериментальными данными Т. Такачи [13] находится в пределах 16 %, что показывает высокую степень сходимости между теоретическими расчетами и экспериментальными данными.

Высокая степень сходимости между теоретическими расчетами по полученной формуле и экспериментальными данными подтверждает наше положение о том, что при промерзании грунта гидростатическое давление в пленочной воде не передается.

Заключение. Разработанная расчетная модель развития давления в промерзающем глинистом грунте позволяет с позиций равновесной термодинамики получить аналитический метод расчета давления пучения в зависимости от температуры. Формула (18), расчеты по которой показали высокую сходимость с экспериментальными данными, дает возможность определять дополнительное давление промерзающего грунта в случаях устройства

искусственных ледогрунтовых ограждений, подземных резервуаров для хранения сжиженных газов и т. п., в которых возникают условия для развития пучения промерзающего грунта в замкнутом объеме на контакте с бетонной крепью.

Библиографический список

1. Дунаева А. Н., Анцышкин Д. В., Кусков О. Л. Фазовая диаграмма H₂O: термодинамические функции фазовых переходов льдов высокого давления // *Астрономический вестник*, 2010. – Т. 44. – № 3. – С. 222–243.
2. Choukroun, M. and Grasset, O. Thermodynamic Model for Water and High-Pressure Ices up to 2.2 GPa and down to the Metastable Domain, *J. Chem. Phys.*, 2007, vol. 127, p. 124506.
3. Старостин Е. Г., Кравцова О. Н., Таппырова Н. И. Модели равновесия фаз воды в мерзлых горных породах // *Наука и образование*. – 2017. – № 2. – С. 41–47.
4. Talamucci F. Freezing Processes in Porous Media: Formation of Ice Lenses, Swelling of the Soil. *J. Mathematical and Computer Modelling* 2003, vol. 37, pp 595–602.
5. Jianqiang Gao, Yuanming Lai, Mingyi Zhang, Ziliang Feng. Experimental study on the water-heat-vapor behavior in a freezing coarse-grained soil Original research article. *Applied Thermal Engineering*, Volume 128, 5 January 2018, pp 956–965.
6. Yunhu Shang, Fujun Niu, Xuyang Wu, Minghao Liu. A novel refrigerant system to reduce refreezing time of cast-in-place pile foundation in permafrost regions. *Applied Thermal Engineering* Volume 128, 5 January 2018, pp 1151–1158.
7. Орлов В. О., Ким В. Х. Метод оценки давления морозного пучения грунта на ледогрунтовое ограждение подземного сооружения // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. – 1988. – № 3. – С. 25–28.
8. Истомин В. А., Чувилин Е. М., Махонина Н. А., Буханов Б. А. Определение температурной зависимости содержания незамерзшей воды в грунтах по потенциалу влаги // *Криосфера Земли*, 2009. – Т. XIII. – № 2. – С. 35–43.
9. Ершов Э. Д. *Общая геокриология. Учебник* – М.: Изд-во МГУ, 2002. – 682 с.
10. Kim V., Kim M., Method of Evaluation of Ground Frost Heaving Pressure on Ice-Ground Barrier of an Underground Construction and Well Strengthening Walls. *International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017 Series: Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 692, Chapter 108.
11. Базаров И. П. *Термодинамика. Учебник*. – 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 377 с.
12. Чистотинов Л. В. Некоторые вопросы термодинамики незамерзшей воды в грунтах // *Геокриологические исследования* – М.: Изд-во ВСЕГИНГЕО, 1975. Вып. 87. – С.24-39.
13. Takashi T. Upper Limit of Heaving Pressure Derived by Pore water Pressure Measurements of Partially Frozen Soil Proc. 2-nd Int. Sump. Ground freezing. Trondheim, 1980. – Pp. 713–724.

References

1. Dunaeva A. N., Antsyshkin D. V., Kuskov O. L. Phase diagram of H₂O: thermodynamic functions of phase transitions of high-pressure ices. *Astronomical Bulletin*. Vol. 44. No. 3. 2010. Pp. 222–243.
2. Choukroun M. and Grasset O. Thermodynamic model for water and high-pressure ices up to 2.2 gpa and down to the metastable domain. *J. Chem. Phys.* Vol. 127. 2007. Pp. 124–506.
3. Starostin E. G., Kravtsova O. N., Tappyrova N. I. Models of water phase equilibrium in frozen rocks. *Science and Education*. No. 2. 2017. Pp. 41–47.
4. Talamucci F. Freezing processes in porous media: formation of ice lenses, swelling of the soil. *J. Mathematical and Computer Modeling*. Vol. 37. 2003. Pp. 595–602.

5. Jianqiang Gao, Yuanming Lai, Mingyi Zhang, Ziliang Feng. Experimental study on the water-heat-vapor behavior in a freezing coarse-grained soil original research article. *Applied Thermal Engineering*. Vol. 128. 2018. Pp. 956–965.
6. Yunhu Shang, Fujun Niu, Xuyang Wu, Minghao Liu. A novel refrigerant system to re-duce refreezing time of cast-in-place pile foundation in permafrost regions. *Applied Thermal Engineering*. Vol. 128. 2018. Pp. 1151–1158.
7. Orlov V. O., Kim V. H. Method for estimating the pressure of frost heaving of soil on the ice-soil enclosure of an underground structure. *Foundations, Bases and Soil Mechanics*. No. 3. 1988. Pp. 25–28.
8. Istomin V. A., Chuvilin E. M., Makhonina N. A., Bukhanov B. A. Determination of the temperature dependence of the content of unfrozen water in soils by the moisture potential. *Cryosphere of the Earth*. Vol. XIII. No. 2. 2009. Pp. 35–43.
9. Ershov E. D. *General geocryology*. M.: Moscow State University Publishing House, 2002. 682 p.
10. Kim V., Kim M. Method of evaluation of ground frost heaving pressure on ice-ground barrier of an underground construction and well strengthening walls. *International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017 Series: Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 692. Chap. 108.
11. Bazarov I. P. *Thermodynamics*. St. Petersburg: Lan, 2010. 377 p.
12. Chistotinov L. V. Some issues of thermodynamics of unfrozen water in soils. *Geocryological studies*. M.: VSEGINGEO Publishing House. Issue 87. 1975. Pp. 24–39.
13. Takashi T. Upper limit of heaving pressure derived by pore water pressure measurements of partially frozen soil. *Proc. 2nd Int. Sump. Ground Freezing*. Trondheim. 1980. Pp. 713–724.

EVALUATION OF THE HEAVING PRESSURE DURING FREEZING OF FROZEN SOIL IN A CLOSED VOLUME

V. Kh. Kim ¹, M. S. Kim ²

Voronezh State Technical University ^{1,2}
Voronezh, Russia

¹ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Bases and Foundations, tel.: +7(920)423-90-78; e-mail: vyachkim@yandex.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Bases and Foundations, tel.: +7(920)468-91-36; e-mail: marskim@yandex.ru

This article discusses a method for estimating the pressure that occurs when soil freeze in a closed volume using a thermodynamic approach. It shows the difference between the pressure that occurs due to crystallization of free water in freezing soil and the pressure that occurs due to freezing of film water. It is proven that hydrostatic pressure in film water is not transmitted. A refined formula for determining the heaving pressure of soil in a closed volume is obtained based on the positions of equilibrium thermodynamics. The results of calculations using the obtained formula showed a high degree of convergence with experimental data. The mechanism of pressure development during freezing of film water in soils is described and a model of this process is proposed.

Keywords: freezing soil, frost heaving pressure, phase transition of film water, equilibrium thermodynamics.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
 - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
 - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
 - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
 - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
 - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
 - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
 - 3.7. Текст статьи;
 - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
 - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
 - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,
ответственный секретарь – Габриелян Грэйр Егисеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.