# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

### Научный журнал

### Выпуск № 1 (36), 2023

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

### Воронеж

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет». Территория распространения — Российская Федерация.

#### Редакционная коллегия журнала:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор, Воронежский государственный технический университет Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, профессор, Воронежский государственный технический университет Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент, Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет; Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет; Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре; Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет; Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет; Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет; Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»; Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет; Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева; Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет; Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам; Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан; Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет; Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет; Свентиков А. А., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет; Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет; Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь; Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь; Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки - А.Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной, https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

Подписной индекс в «Каталоге периодических изданий. Газеты и журналы» ГК «Урал Пресс» - 66004 Физические лица могут оформить подписку в интернет-магазине «Деловая пресса» http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/

Дата выхода в свет 31.03.2023. Усл. печ. л. 12,3. Формат 60×84/8. Тираж 65 экз. Заказ №. Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018 г.

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84 (строительный факультет, кафедра строительной механики) тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84



ISSN 2219-1038 (print) ISSN 2949-3757(online)

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

## **Scientific Journal**

### ISSUE № 1 (36), 2023

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University. Territory of distribution — Russian Federation.

#### **EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:**

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University
The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University
Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

#### **EDITORIAL BOARD MEMBERS:**

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University; Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University; Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur; Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University; Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University; Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University; Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»; Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University; Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev; Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University; Nguen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam; Nugushinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan; Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University; Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University; Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University; Trechshev A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University; Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus; Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus; Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A.R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030

The journal "Structural mechanics and structures " is included into the list of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

Subscription index in the «Catalog of periodicals. Newspapers and magazines» of the «Ural Press» Group of Companies - 66004

Individuals can subscribe to it in the online store "Business Press" http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/

Publication date 31.03.2023. Conventional printed sheets 12,3. Format 60×84/8. Numbers of copies 65. Order №. Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications.

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 - 72895 or 22.05.2018.

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation (Faculty of construction, Department of Structural Mechanics) Tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University



84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2023

# СОДЕРЖАНИЕ

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	
Черников А. В., Козлов В. А. Зарубежный опыт проектирования и строительства гофрированных водопропускных труб	
Черников А. В., Козлов В. А. Нелинейный алгоритм оценки несущей способности гофрированных водопропускных труб на основе теории оболочек	
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ	
Сатанов А. А., Симонов А. В., Хазов П. А. Определение аэродинамических характеристик большепролетного здания экспериментальными методами	
Гербер Ю. А., Нагель А. Е., Табанюхова М. В. Напряжения вблизи вершины трещины-пропила	
<i>Малинин В. Г., Савич В. Л., Отев К. С.</i> Применение энергетического метода к прочностной оценке ресурса трубопровода при наличии макродефекта	
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Конструкций и материалов	
Викулов С. В., Пахомова Л. В., Инкижинов Н. С. Сопоставление двух способов построения ядра сечения: дискретного и непрерывного	
Кирсанов М. Н. Метод энергетической коллокации для оценки основной частоты собственных колебаний фермы	
Культербаев Х. П. Свободные продольные колебания стержня с сосредоточенной массой	
Кирсанов М. Н. Деформации и двухсторонняя оценка основной частоты собственных колебаний пространственной модели трехгранной башенной фермы	

Сафронов В. С., Киселев Д. А.	
Вероятностная оценка надежности нормального сечения изгибаемой железобетонной	
балки со стальной фиброй	93
Правила оформления статей	106

### CONTENTS

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

Kirsanov M. N.
Deformations and a two-sided evaluation of the natural vibrations fundamental frequency of a trihedral truss spatial model.
<i>Kulterbaev Kh.P.</i> Free longitudinal vibrations of the rod with concentrated mass
<i>Kirsanov M. N.</i> Energy collocation method for the truss fundamental frequency estimation
<i>Vikulov S. V., Pahomova L. V., Inkizhinov N. S.</i> Comparison of two ways of constructing a cross-section kernel: discrete and continuous
PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS
Malinin V. G., Savich V. L., Otev K. S. Application of the energy method for strength evaluation of pipeline life in the presence of a macrodefect
<i>Gerber Y.A., Nagel A.E., Tabanyukhova M.V.</i> Stresses near the top of the crack-cut
Satanov A. A., Simonov A. V., Khazov P. A. Experimental study of the aerodynamic characteristics of the large-span building
CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES
<i>Chernikov A. V., Kozlov V. A.</i> Nonlinear algorithm for bearing capacity evaluation corrugated culver pipes based on the theory of shells.
<i>Chernikov A. V., Kozlov V. A.</i> Foreign experience in design and construction of corrugated culverts
CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES
Safronov V. S., Kiselev D. A.

Probabilistic reliability assessment of normal section of a bended reinforced concrete beam with steel fiber.	93
Requirements for articles to be published	106

### СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.001 УДК 624.04:531.391.3

### ДЕФОРМАЦИИ И ДВУХСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ ТРЕХГРАННОЙ БАШЕННОЙ ФЕРМЫ

#### М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ» Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Предложены схема и аналитический расчет статически определимой пространственной башенной фермы с полураскосной решеткой. Дается вывод формул для прогиба конструкции от действия боковой равномерно распределенной по узлам нагрузки и двухсторонних оценок первой частоты собственных колебаний фермы. Предполагается, что масса фермы сосредоточена в ее узлах. Зависимость решений от числа панелей фермы разыскивается методом индукции с применением операторов символьной математики Maple. Расчет жесткости конструкции выполняется по формуле Максвелла-Мора. Аналитические оценки частоты по методам Донкерлея и Рэлея сравниваются с первой частотой спектра частот, найденной численно. Показана высокая точность верхней оценки частоты, растущая с увеличением числа панелей.

Ключевые слова: число панелей, ферма, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, метод Рэлея.

Введение. Легкие стержневые конструкции широко применяются в строительных конструкциях. Самая распространенная модель таких конструкций – ферма с узловой нагрузкой и массой, сосредоточенной в узлах. Расчет ферм на жесткость и собственные частоты колебаний, как правило, производится численно методом конечных элементов [1-3]. Простые статически определимые конструкции в некоторых случаях допускают и аналитические решения. В справочнике [4] собраны различные схемы плоских регулярных ферм с формулами для расчета их прогибов при действии распределенной узловой или сосредоточенной нагрузки. Более сложными объектами для аналитических решений являются пространственные фермы. В [5] получено решение для прогиба шестигранного купола и дана формула для нижней оценки первой частоты собственных колебаний при произвольном числе панелей. В [6] решена задача о нижней границе основной частоты собственных колебаний пространственной трехгранной консольной фермы. Формулы для статической деформации составной пространственной рамы получены методом индукции с применением системы компьютерной математики Maple в [7]. Отдельные формулы для расчета прогибов плоских ферм регулярного типа выведены в [8-10]. Двухсторонняя аналитическая оценка первой частоты собственных колебаний плоской фермы получена для произвольного числа панелей в [11]. В [12] найдена аналитическая оценка первой частоты

<sup>©</sup> Кирсанов М. Н., 2023

плоской регулярной фермы, допускающей при определенном числе панелей кинематическую изменяемость.

Конструкция фермы. Башня представляет собой трехгранную призму с пирамидальным куполом в верхней части конструкции (рис. 1, 2). Грани призмы полураскосные фермы. Отличительная особенность конструкции треугольные \_\_\_\_ стержневые элементы в средней части призмы, соединяющие узлы на боковых гранях. В основании конструкции находятся шесть опорных стоек и три дополнительные горизонтальные связи в двух угловых узлах фермы. Таким образом, две горизонтальные связи в узле А вместе с вертикальной стойкой моделируют сферический шарнир.



**Рис. 1.** Схема фермы, *n*=4

Рис. 2. Нагрузки на вершину

В узле *В* опорные стержни моделируют шарнир цилиндрический. Общее число внутренних узлов фермы с *n* панелями высотой *h* равно 6n+7. Ферма состоит из v=18n+21 стержней, включая девять опорных, шесть из которых — вертикальные стойки.

**Прогиб от действия горизонтальной узловой нагрузки.** Ветровая нагрузка на конструкцию моделируется сосредоточенными горизонтальными силами, равномерно распределенными по узлам боковой грани конструкции (рис. 3). Узлы фермы нумеруются (рис. 4). Расчет усилий в статически определимой ферме выполняется методом вырезания узлов. Матрица системы уравнений равновесия узлов в проекциях на три оси координат при выводе аналитических соотношений формируется в системе компьютерной математики Maple из направляющих косинусов усилий и реакций опор. Система уравнений решается в символьной форме. В программу на языке Maple [13] вводятся координаты узлов. При i = 1, ..., n + 1 координаты имеют вид:

$$\begin{split} &x_i=0, \ y_i=0, \ z_i=(i-1)h, \\ &x_{i+n+1}=2a, \ y_{i+n+1}=0, \ z_{i+n+1}=(i-1)h, \\ &x_{i+2n+2}=a, \ y_{i+2n+2}=a\sqrt{3}, \ z_{i+2n+2}=(i-1)h, \\ &x_{i+3n+3}=a, \ y_{i+2n+2}=0, \ z_{i+3n+3}=(i-1)h, \\ &x_{i+4n+4}=3a \ / \ 2, \ y_{i+4n+4}=a\sqrt{3} \ / \ 2, \ z_{i+4n+4}=(i-1)h, \\ &x_{i+5n+5}=a \ / \ 2, \ y_{i+5n+5}=a\sqrt{3} \ / \ 2, \ z_{i+5n+5}=(i-1)h. \end{split}$$

Порядок соединения стержней решетки в узлах формируется специальными векторами с номерами концов стержней. Составляется система уравнений равновесия узлов GS = R, где G — матрица системы, S — вектор неизвестных усилий и реакций опор. При расчете деформаций от ветровой нагрузки вектор правой части R состоит из усилий, приложенных к ферме. Ненулевые элементы этого вектора имеет вид:

$$\begin{split} R_{_{3i-1}} &= T, \\ R_{_{3j-1}} &= T, j = i+n+1, \\ R_{_{2k-1}} &= T, k = i+3n+3, i = 1, ..., n+1. \end{split}$$



**Рис. 3.** Схема фермы, *n*=3

**Рис. 4.** Номера узлов, *n* = 5

Для расчета прогиба (смещения верхнего шарнира *C* по оси *y*) используется интеграл Максвелла – Мора в следующей форме:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{v-9} S_i^{(T)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \tag{1}$$

где  $S_i^{(T)}$  – усилие в стержне *i* от действия горизонтальной нагрузки интенсивностью T,  $S_i^{(1)}$  – усилие от единичной силы, приложенной к узлу C по направлению оси y, E — модуль упругости материала стержней, F — площадь сечения стержней,  $l_i$  – длина стержня *i*. Значения усилий в девяти опорных недеформируемых стержнях не входят в сумму Максвелла – Мора (1). Расчет прогиба фермы при n = 1, 2, 3, ... дает следующую последовательность аналитических зависимостей:

$$\begin{split} \Delta_{1} &= T \frac{20a^{3} + 9c^{3}}{9EFa^{2}}, \\ \Delta_{2} &= T \frac{97a^{3} + 54c^{3} + 54h^{3}}{18EFa^{2}}, \\ \Delta_{3} &= T \frac{172a^{3} + 108c^{3} + 297h^{3}}{18EFa^{2}}, \\ \Delta_{4} &= T \frac{5(53a^{3} + 36c^{3} + 189h^{3})}{18EFa^{2}}, \ldots \end{split}$$

Общие члены последовательностей коэффициентов при степенях размеров фермы:  $a^3$ ,  $c^3$ ,  $h^3$ , где  $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ , находятся методами компьютерной математики Maple [4-8]. Общий вид зависимости прогиба вершины *C* по направлению оси *y* от размеров конструкции и числа панелей получается следующий:

$$\Delta = T \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{EFa^2},$$
(2)

где

$$C_{_1} = \left(9n^2 + 30n + 1\right) / 18, \ C_{_2} = n(n+1) / 2, \ C_{_3} = n(n^2 - 1)(3n+2) / 16$$

Аналогично, при нагружении верхнего узла *С* горизонтальной сосредоточенной силой *Р* по направлению оси *x* (рис. 2) методом индукции имеем решение:

$$\Delta = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{EF a^2},$$
(3)

где  $C_1 = (6n+13) / 18$ ,  $C_2 = n / 3$ ,  $C_3 = 1 / 54$ ,  $C_4 = n(n+1)(2n+1) / 12$ .

Если горизонтальная сосредоточенная нагрузка Q приложена к узлу C по направлению оси y, то результат будет отличаться от (3) только одним коэффициентом  $C_1$ :

$$\Delta = Q \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{EFa^2},$$
(4)

где  $C_1 = (6n+11) / 18$ ,  $C_2 = n / 3$ ,  $C_3 = 1 / 54$ ,  $C_4 = n(n+1)(2n+1) / 12$ .

Линейность задачи по нагрузкам комбинацией решений (2–4) позволяет получать формулы для широкого класса внешних сил. На рис. 5 выведенная зависимость (2) безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (T_{sum}H)$ , от числа панелей представлена для трех размеров a = 1m, a = 2m, a = 3m и высоты H = (n + 1)h = 50m. Суммарная нагрузка на ферму фиксирована:  $T_{sum} = 3(n + 1)T$ . Заметна нелинейная зависимость прогиба от размера *a*. С увеличением этого размера прогиб резко падает.



Рис. 5. Зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей

Найденные аналитические решения имеют линейную асимптоту по числу панелей, угол наклона которой можно получить средствами Maple:  $\lim \Delta '/n = a / (3H)$ .

Нижняя оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Принимается, что масса фермы распределена по узлам. Рассматриваются горизонтальные колебания масс. В такой постановке задача имеет K = 6n + 7 степеней свободы по числу внутренних узлов конструкции. Система уравнений движения масс записывается в матричной форме:

$$mI_{\mu}\ddot{Y} + D_{\mu}Y = 0, (5)$$

Здесь Y – вектор смещений масс в узлах фермы по оси y,  $\ddot{Y}$  — вектор ускорений масс,  $I_{K}$  — единичная матриц,  $D_{K}$  — матрица жесткости. Если выполнить замену  $\ddot{Y} = -\omega^{2}Y$ , справедливую для гармонических колебаний с частотой  $\omega$ , и умножить уравнение (5) слева на матрицу податливости  $B_{K}$ , то задача сведется к проблеме поиска собственных значений матрицы  $B_{K}$ :  $B_{K}Y = \lambda Y$ , где  $\lambda = 1 / (\omega^{2}m)$  — собственные числа матрицы  $B_{K}$ . Здесь использовано то, что матрица податливости — это матрица, обратная жесткости:  $B_{K} = 1 / D_{K}$ . Элементы матрицы  $B_{K}$  вычисляются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF),$$
(6)

в которой использованы те же обозначения, что и в формуле (1) и учтены жесткости девяти опор. Как и в задаче о прогибе жесткость всех стержней в ферме одинаковая.

Нижняя граница  $\omega_D$  основной частоты  $\omega_1$  разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2},$$
(7)

где  $\omega_p$  — парциальные частоты массы в узле *p*, расчет которой основан на уравнении движения отдельной массы:

$$m\ddot{y}_{p} + D_{p}y_{p} = 0, \quad p = 1, 2, ..., K.$$
 (8)

При вычислении коэффициента жесткости  $D_p$  учитывается, что податливость есть величина обратная жесткости и используется формула Максвелла – Мора:

$$\delta_{p} = 1 / D_{p} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left( S_{\alpha}^{(p)} \right)^{2} l_{\alpha} / (EF).$$
(9)

Из (8) при  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $A_p$  — амплитуда колебаний массы, следует выражение  $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$ . Отсюда и из (7) получается формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n.$$
<sup>(9)</sup>

Расчет сумм из формулы (9) для ферм с разным числом панелей дает:

$$\begin{split} &\Delta_1 = \left(2721a^3 + 387c^3 + 2d^3 + 594h^3\right) / \left(108a^2 EF\right), \\ &\Delta_2 = \left(4575a^3 + 1125c^3 + 2d^3 + 2700h^3\right) / \left(108a^2 EF\right), \\ &\Delta_3 = \left(3390a^3 + 1107c^3 + d^3 + 4050h^3\right) / \left(54a^2 EF\right), \\ &\Delta_4 = \left(4668a^3 + 1827c^3 + d^3 + 9585h^3\right) / \left(54a^2 EF\right), \ldots \end{split}$$

Решение имеет общий вид:

$$\Delta = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) \, / \, (a^2 EF),$$

где с помощью операторов системы Maple вычисляются общие члены последовательностей коэффициентов:

$$\begin{split} C_{_1} &= \left(117n^2 + 885n + 812\right) / \ 240, \\ C_{_2} &= n(47 + 39n) \ / \ 24, \\ C_{_3} &= 1 \ / \ 54, \\ C_{_4} &= (n+2)(n+1)(3n^2 + 5n + 3) \ / \ 12. \end{split}$$

Таким образом, аналитическое выражение для нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея получается в виде:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (a^2 EF).$$
<sup>(10)</sup>

Верхняя оценка первой частоты собственных колебаний по методу Рэлея. Формула Рэлея для верхней оценки первой частоты следует из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\max} = \Pi_{\max} \,. \tag{11}$$

Кинетическая энергия системы К одинаковых масс *m*, расположенных в узлах конструкции имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^{K} m v_i^2 / 2$$

Согласно  $y_i = u_i \sin(\omega t + \varphi)$  вертикальная скорость массы i имеет вид:

$$v_i=\dot{y}_i=\omega u_i\cos(\omega t+arphi_0)$$
 .

Отсюда, полагая  $\max(\cos(\omega t + \varphi_0)) = 1$ , что соответствует максимальной кинетической энергии, получаем:

$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^{K} u_i^2 / 2,$$
 (12)

где амплитуда вертикального смещения  $u_i$  вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$u_{i} = \sum_{\alpha=1}^{n_{s}} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} \ / \ (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{n_{s}} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} \ / \ (EF) = P \tilde{u}_{i} \ .$$

Введены обозначения:  $S_{\alpha}^{(P)}$  — усилие в стержне  $\alpha = 1, ..., n_s$  от действия нагрузки P, распределенной по узлам,  $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в этом же стержне от единичной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе в узле с номером i,  $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)} = S_{\alpha}^{(P)} / P$ . Выбор такой нагрузки интуитивный и определяется возможной близостью формы прогиба конструкции форме колебаний системы грузов по первой частоте. Кинетическая энергия (12) приобретает вид:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^{K} m \tilde{u}_i^2 / 2,$$
(13)

где  $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^v \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$  — относительная амплитуда смещений массы в узле *i* при действии распределенной нагрузки.

Соответствующая потенциальная энергия деформации стержней фермы имеет вид:  $\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{v} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{v} (S_{\alpha}^{(P)})^{2} l_{\alpha} / (2EF).$  С учетом линейности задачи по нагрузкам:  $S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{i=1}^{N} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)}.$  Следовательно,

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{i=1}^K \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha}^{n_s} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i / 2.$$
(14)

Из (11), (12) и (14) следует формула для верхней оценки первой частоты колебаний фермы по Релею:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2.$$
(15)

При выводе зависимости частоты от числа панелей перемещения  $\tilde{u}_i$  должны быть получены как функции *n*. Для этого надо сначала рассчитать перемещения какой-то одной массы, например с номером 1, при различных значениях *n* и найти аналитическое выражение для общего члена полученной последовательностей  $\tilde{u}_1(n)$ . Затем следует повторить эти действия для других масс и получить зависимости  $\tilde{u}_1(n)$ ,  $\tilde{u}_2(n)$ ,  $\tilde{u}_3(n)$ ,..., входящие в суммы

 $\sum_{i=1}^{K} \tilde{u}_{i}$  и  $\sum_{i=1}^{K} \tilde{u}_{i}^{2}$ . Для регулярных систем вид решения для  $\sum_{i=1}^{K} \tilde{u}_{i}$  не зависит от *n*. Отдельно вычислив числитель в (15), получим:

$$\sum_{i=1}^{K} \tilde{u}_{i} = \left(g_{a}a^{3} + g_{c}c^{3} + g_{d}d^{3} + g_{h}h^{3}\right) / \left(a^{2}EF\right) = \sum_{\alpha = [a,c,d,h]} mg_{\alpha}\alpha^{3} / \left(a^{2}EF\right),$$

где

$$\begin{split} g_{a} &= \left(36n^{3} + 342n^{2} + 705n + 406\right) / 9, \\ g_{c} &= n\left(12n^{2} + 24n + 13\right) / 3, \ g_{d} &= 1 / 54, \\ g_{h} &= (n+2)(n+1)(54n^{3} + 153n^{2} + 103n + 15) / 60. \end{split} \tag{16}$$

Знаменатель (15) имеет более сложный вид

$$\sum_{k=1}^{N} m \tilde{u}_{k}^{2} = \sum_{\alpha,\beta=[a,c,d,h]} m f_{\alpha\beta} \alpha^{3} \beta^{3} / (a^{4} E^{2} F^{2}).$$
(17)

Для получения общих членов последовательностей коэффициентов приходится составлять и решать сравнительно сложные рекуррентные уравнения, привлекая оператор *rsolve* системы Maple. Например, для коэффициента  $f_{hh}$  при  $h^6$  получается следующее однородное уравнение десятого порядка:

$$\begin{split} f_{hh,n} &= 10 f_{hh,n-1} - 45 f_{hh,n-2} + 120 f_{hh,n-3} - 210 f_{hh,n-4} + 252 f_{hh,n-5} - \\ &- 210 f_{hh,n-6} + 120 f_{hh,n-7} - 45 f_{hh,n-8} + 10 f_{hh,n-9} - f_{hh,n-10}. \end{split}$$

Решения рекуррентных уравнений дают следующие выражения:

$$\begin{split} f_{aa} &= \left(3468n^3 - 2033n^2 + 1782n - 81\right) / 96, \ f_{cc} &= \left(7n^2 + 203n - 14\right) / 54, \\ f_{dd} &= \left(n - 1\right)^2 / 2592, \ f_{hh} &= 3\left(90n^3 + 297n^2 + 507n + 560\right), \\ f_{ac} &= \left(180 - 241n + 845n^2\right) / 36, \ f_{ad} &= \left(25n + 3\right)\left(n - 1\right) / 144, \\ f_{ah} &= 3\left(153n^3 + 177n^2 + 122n + 108\right) / 2, \ f_{dh} &= 5\left(n - 1\right) / 2, \\ f_{cd} &= \left(n + 6\right)\left(n - 1\right) / 108, \ f_{hc} &= 63n^2 + 134n + 83. \end{split}$$

В результате верхняя оценка первой частоты фермы в зависимости от числа панелей имеет вид:

$$\omega_{R} = a \sqrt{\frac{EF \sum_{\alpha = [a,c,d,h]} g_{\alpha} \alpha^{3}}{m \sum_{\alpha,\beta = [a,c,d,h]} f_{\alpha\beta} \alpha^{3} \beta^{3}}}$$
(19)

с коэффициентами (16) и (18), зависящими только от порядка регулярности фермы *n*.

**Численное решение.** Найденные оценки зависимости первой частоты собственных колебаний от числа панелей можно сравнить с численным решением, вычисляя первую частоту всего спектра частот собственных колебаний конструкции с помощью специального оператора *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple. Оператор *Eigenvalues* предназначен для нахождения собственных чисел и векторов матриц в численной и символьной форме. Примем размеры башни a = 2m, h = 3m. Модуль упругости стали  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, массы в узлах m = 500 кг. Площадь поперечного сечения стержней одинаковая F = 9 см<sup>2</sup>. На рис. 6 даны кривые зависимости нижней ( $\omega_D$ ) и верхней ( $\omega_R$ ) оценки первой частоты колебаний башни по формулам (10) и (19) и первой частоты спектра  $\omega_1$ , полученной численно.



**Рис. 6.** Сравнение аналитических решений с численным. Первая частота колебаний фермы  $\omega_1$  и её нижняя оценка  $\omega_D$  по Донкерлею (10),  $\omega_R$  — верхняя оценка по Рэлею (19) при a = 2м, h = 3м

Численное решение занимает среднее значение между аналитическими оценками сверху и снизу, причем верхняя оценка почти совпадает с численным решением. С увеличением числа панелей высота фермы увеличивается и одновременно уменьшается первая собственная частота. Для того, чтобы оценить погрешность предложенных оценок введем относительные погрешности  $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$  и  $\varepsilon_R = (\omega_R - \omega_1) / \omega_1$ . Зависимость погрешности от количества панелей показано на рис. 7. Аналитическая оценка по методу Донкерлея существенно зависит от числа панелей и в выбранном диапазоне имеет погрешность от 3% до 17%. По методу Рэлея погрешность оценки значительно меньше,

почти не меняется при изменении числа панелей и не превышает 2%. Для больших значений высоты *h* погрешность по обоим методам меньше.



Рис. 7. Погрешность оценки по Донкерлею и Рэлею

Заключение. Предложена схема статически определимой пространственной фермы башенного типа и приведен алгоритм вывода аналитической зависимости прогиба и оценки наименьшей собственной частоты колебаний от числа панелей. Можно сделать следующие выводы:

1. Формула для вычисления частоты по энергетическому методу Рэлея более громоздкая, чем формула Донкерлея, но имеет значительно большую точность.

2. С увеличением числа панелей точность по обоим методам быстро растет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 22-21-00473.

### Библиографический список

- 1. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
- 2. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Дементьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
- 3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5 (date of application: 17.04.2021)
- 4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 c.
- 5. Кирсанов М.Н. Модель и аналитический расчет фермы пространственного шестигранного купола // Строительная механика и конструкции. 2022. №1(32). С.39-47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
- 6. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the

console truss on the number of panels; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1

- 7. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
- 8. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29-37.
- 9. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
- 10. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. №3(34). С.90-98.
- Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
- Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
- Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. 4. C. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

### References

- 1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
- 2. Kovalenko G. V., Makeev V. B., Dementieva V. V. Investigation of natural frequencies of trusses based on the finite element method (FEM). Young thought: Science, technology, innovation. 2015. pp. 44-48.
- 3. Vatin, N.I., Sinelnikov, A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL:https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5 (date of application: 04/17/2021)
- 4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
- 5. Kirsanov M. N. Model and analytical calculation of a spatial hexagonal dome truss. Structural mechanics and structures. 2022. No. 1 (32). pp. 39-47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
- 6. Sviridenko, O.; Komerzan, E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
- 7. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. Structural mechanics and structures. 2022. №4(35). pp. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
- 8. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). pp. 29-37.
- 9. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. No.

4 (27). pp. 16-25.

- 10. Ivanitsky A.D. Formulas for calculating the deformations of a flat frame. Structural mechanics and structures. 2022. No. 3 (34). pp. 90-98.
- Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020 Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
- 12. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022.111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
- Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. 4. pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

### DEFORMATIONS AND A TWO-SIDED EVALUATION OF THE NATURAL VIBRATIONS FUNDAMENTAL FREQUENCY OF A TRIHEDRAL TRUSS SPATIAL MODEL

#### M. N. Kirsanov

#### National Research University «MPEI»

#### Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

A scheme and analytical calculation of a statically determined spatial tower truss with a semi-diagonal lattice is proposed. The derivation of formulas for the deflection of the structure from the action of a lateral load uniformly distributed over the nodes and two-sided estimates of the first frequency of natural oscillations of the truss is given. It is assumed that the mass of the truss is concentrated in its nodes. The dependence of solutions on the number of truss panels in height is found by induction using Maple symbolic mathematics operators. Calculation of structural rigidity is carried out according to the Maxwell-Mohr formula. Analytical frequency estimates by the Donkerley and Rayleigh method are compared with the first frequency of the frequency spectrum found numerically. A high accuracy of the upper frequency estimate is shown, which increases with the number of panels.

Key words: number of panels, truss, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, Rayleigh method.

### СВОБОДНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

### Х. П. Культербаев

Северо-Кавказский центр математических исследований Северо-Кавказский федеральный университет Россия, г. Ставрополь

Д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник, тел.: +7(903)4943338, e-mail: kulthp@mail.ru

Постановка задачи. Рассматриваются продольные колебания вертикального стального стержня постоянного сечения с сосредоточенной массой на конце. Это сооружение находится вблизи эпицентра землетрясений, где сейсмические волны имеют вертикальное направление, наиболее опасное для прочности стержня. При выводе уравнения продольных колебаний предполагается, что гипотеза плоских поперечных сечений справедлива. Статическая часть деформаций не учитывается ввиду малости. Математическая модель колебаний состоит из основного дифференциального уравнения и краевых условий. Для решения задачи используются методы разделения переменных и конечных разностей. Дифференциальное уравнение и краевые условия преобразуются в систему алгебраических уравнений, по которым определены первые собственные значения и формы колебаний.

Ключевые слова: стержень постоянного сечения, продольные колебания, статическая и динамическая части колебаний, математическая модель колебаний, дифференциальное уравнение гиперболического типа, краевые условия, метод разделения переменных, частота колебаний, метод конечных разностей, система алгебраических уравнений, характеристическое уравнение, вычислительный комплекс Matlab, собственные значения и формы.

#### Введение

Продольные колебания являются наиболее опасными для строительных сооружений и зданий, находящихся вблизи эпицентра землетрясений; машин, робототехнических и мехатронных систем, подвергающихся вибрациям. Поэтому их изучение представляет значительный интерес для инженеров-проектировщиков и в настоящее время имеет обширную библиографию [1-7].



<sup>©</sup> Культербаев Х. П., 2023

Продольные колебания являются наиболее опасными для строительных сооружений и зданий, находящихся вблизи эпицентра землетрясений; машин, робототехнических и мехатронных систем, подвергающихся вибрациям. Поэтому их изучение представляет значительный интерес для инженеров-проектировщиков и в настоящее время имеет обширную библиографию [1-8].

Рассмотрим задачу о расчёте стального вертикального стержня постоянного сечения, представленного на рис. 1. Заданы его модуль упругости Е, погонная масса m = ρS, ρ - плотность материала, S - площадь поперечного сечения. Стержень несёт на верхнем конце дискретную массу М и совершает свободные колебания в продольном направлении.

При выводе уравнения продольных колебаний стержня будем полагать, что гипотеза плоских поперечных сечений справедлива, поперечными перемещениями частиц массы можно пренебречь ввиду их малости. Продольные перемещения сечений описываются функцией u(x, t). Они состоят из статической и динамической частей. Статическая часть, составляющая малую долю общих отклонений, образуется от собственного веса и вычисляется легко методами сопротивления материалов. Поэтому далее их не будем вычислять.

#### 1. Математическая модель свободных колебаний

Возьмем элемент стержня (рис. 1, в) и определим относительную деформацию. Как известно, относительная деформация определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}.$$

Здесь Δdx – абсолютная деформация элементарного участка. Из рисунка

$$\Delta dx = u + u'dx - u = u'dx.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{u'dx}{dx} = u'.$$

Штрих в верхнем индексе соответствует производной по аргументу х.

Рассмотрим колебания выделенного элемента длиной dx (рис. 1, б). К нему приложены продольные силы в сечениях N, N+N'dx и даламберова сила инерции [16]

$$dI = m \ddot{u} dx$$

Здесь точки над и соответствуют второй производной по времени t. По закону Гука [6]

$$N = \sigma S = ESu',$$

N- продольная сила,  $\sigma-$  нормальное напряжение в поперечном сечении стержня u'- относительная деформация. Проектируя все силы на ось x, в соответствии с принципом Даламбера имеем

$$-N - m \ddot{u} dx + N + N' dx = 0$$

Учтем (1) и получим уравнение

$$m\ddot{u} - ESu'' = 0.$$

Приведем его к стандартному виду и запишем [5]

$$\ddot{u} - a^2 u'' = 0,$$
  $a^2 = \frac{E}{\rho},$   $x \in (0, l),$   $t > -\infty.$  (2)

(1)

Получено основное дифференциальное уравнение для задачи о продольных колебаниях стержней. Оно является дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа.

Полнота математической модели задачи требует дополнения уравнения краевыми условиями, вытекающими из условий закрепления концов стержня. Нижний конец закреплён, верхний – свободен, из чего следует по [2]

 $u(0, t) = 0, \quad bu'(l, t) + M\ddot{u}(l, t) = 0, \quad b = ES, \quad t > -\infty.$  (3) Решение задачи (2), (3) запишем с помощью метода разделения переменных в виде [6]  $u(x,t) = X(x) e^{i\omega t},$  (4) где X(x) – собственная функция (иначе – форма свободных колебаний), і - мнимая единица, ω – частота свободных колебаний стержня. Подстановка (4) в (2), (3) даёт

$$ω2 X - a2 X''= 0, x ∈ (0, l)$$
 (5)

X(0) = 0,  $b u'(l) - \omega^2 M u(l) = 0$  (6)

Дальнейшее продолжение задачи требует выбора методов её решения. Наиболее подходящим в данном случае является численный метод конечных разностей [10-13] Рассмотрим два метода: традиционный аналитический и численно-графический.

#### 2. Аналитический метод

Задачу (5), (6) перепишем в виде, удобном для решения [6]

$$\ddot{u} - a^2 u'' = 0, \qquad a^2 = \frac{E}{\rho}, \qquad x \in (0, l), \qquad t \ge -\infty.$$
 (7)

$$u(0) = 0,$$
  $X'(l) - eX(l) = 0,$   $e = \omega^2 M/b.$  (8)

Общее решение уравнения (7) имеет вид [6]

$$A(x) = C \sin kx + D \cos kx$$

Для определения постоянных интегрирования С и D используем граничные условия

$$A(0) = D = 0,$$
  $A(l) = b.$ 

Отсюда

$$\operatorname{Csin} kl = b \implies \operatorname{C} = \frac{b}{\sin kl}.$$

Окончательное решение принимает вид

$$A(x) = b \sin kx / \sin kl.$$
(9)

Если знаменатель дроби (9) равен нулю, то колебания резонансные. Отсюда получим

sink 
$$l=0$$
,  $kl=n\pi$ ,  $n=1, 2..., \frac{\omega}{a}l=n\pi \Rightarrow \omega = \frac{n\pi a}{l}$ 

Эти частоты, как и следовало ожидать, совпадают с собственными частотами колебаний струны.

В частном случае, когда  $\omega \rightarrow 0$ 

$$\lim_{\omega \to 0} A(x) = \lim_{\substack{\omega \to 0 \\ k \to 0}} \frac{b \sin kx}{\sin kl} = \lim_{\omega \to 0} \frac{bx \cos kx}{l \cos kl} = \frac{bx}{l}.$$
 (10)

Подставим (10) в (2) и получим ( $\omega = 0!$ )

$$u(x,t) = \frac{bx}{l}$$
.

Такой результат представляет прямую линию, не зависящую от времени, и соответствует решению тривиальной статической задачи, когда правый отклонённый конец находится в покое.

### 3. Метод конечных разностей

Задачу (5) - (6) далее будем решать с помощью численного метода конечных разностей [10-13]. С этой целью вместо непрерывной области определения переменной х введём дискретную область *l*<sub>h</sub> в виде узлов равномерной сетки с шагом h

$$h_{h} = [x_{i}: x_{i} = (i-1)h, i=1, 2, ..., n], \qquad h = l/(n-1),$$

где n, h – количество узлов и шаг сетки. Значения функции X и производной заменим приближёнными значениями в узлах сетки с точностью O(h<sup>2</sup>) [11]

$$X_i(x_i) \approx \mathbf{U}(x_i), \quad X''(x_i) \approx \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{h^2}$$

Тогда вместо уравнения (5) получим алгебраические уравнения

$$X_{i-1} + \alpha X_i + X_{i+1} = 0, \quad i=2, 3, ..., n-1, \quad \alpha = -2 + (h\omega/a)^2.$$
 (11)

Граничные условия (6) при этом примут вид

$$X_1 = 0, \qquad X_{n-2} - 4X_{n-1} + cX_n = 0, \qquad r = 3 - 2\omega^2 Mh/b.$$
 (12)

Систему уравнений (7), (8) можно переписать в матрично-векторной форме

$$AX = 0, (13)$$

где А - квадратная матрица порядка n,  $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}^T$  – вектор – столбец, компонентами которого являются отклонения стержня в узлах сетки. Легко заметить, что матрица коэффициентов А является ленточной и четырёхдиагональной вида

	(1				÷					
A =	1	α	1		:					
		1	α	1	:					
			•••	•••		•••	•••	•••		•
					÷		1	α	1	
					÷		1	$^{-4}$	r)	

Здесь нулевые элементы не выписаны. Правая часть системы уравнений (13) является нулевым вектором.

Очевидно, что система уравнений (13) имеет тривиальное, т. е. нулевое решение X = 0, что соответствует статической задаче и не представляет интереса для данной работы. Нетривиальное решение может существовать лишь при условии, что определитель матрицы A равен нулю, т. е.

$$\det A(\mathbf{\Omega}) = 0. \tag{14}$$

Характеристическое уравнение (14) является алгебраическим уравнением относительно  $\omega$  и имеет множество корней мощности п. Можно обойтись без составления этого уравнения, пользуясь возможностью построения высокоточного графика функции det A( $\omega$ ), например, в среде вычислительного комплекса Matlab [14]. Точки пересечения графиком оси  $\omega$  определяют значения собственных частот.

Далее задача состоит в том, чтобы найти собственные векторы  $X_k$  (k = 1, 2, 3,... n) матрицы A, представляющие собственные функции математической модели (2), (3). Их можно определить из системы уравнений (8) при известных собственных значениях  $\omega_k$ . При этом определитель матрицы A становится нулевым, а её ранг равен r = n-1, так что собственные векторы определяются с точностью до множителя. Из этого следует, что одна из компонент (ненулевая!) может задаваться равной произвольному числу и исключаться из искомых. Система уравнений (9) из однородной превращается в неоднородную, из которой определяются остальные компоненты вектора X<sub>k</sub>.

Пример. На рис. 1 представлена водонапорная башня из стальной трубы длины l = 25 м, диаметром D =108 мм, толщиной стенки  $\delta = 4,71$  мм. Масса ёмкости с водой M = 30 т, n = 501. Требуется определить собственные частоты и формы колебаний.

Компьютерная программа, составленная по вышеприведённому алгоритму, дала первую собственную частоту (рис. 2).

$$\omega_1 = 20,16 \text{ c}^{-1}$$
.

Остальные частоты столь велики, что не представляют опасности при сейсмических колебаниях и потому не вычислены.





Определим собственную форму, соответствующую найденному собственному значению, по описанию, данному выше. Спектр собственных векторов, соответствующих собственным функциям, может быть установлен с помощью системы уравнений (9). Ввиду того, что определитель матрицы А равен нулю, собственные формы могут быть найдены лишь с точностью до сомножителя. Тогда в (9) можно принять, например, что x<sub>n</sub> =1, а остальные неизвестные найти из системы уравнений, образованной из (9) путём исключения последней строки или любой иной.

По алгоритму вычислений, описанному выше, получена и решена алгебраическая система уравнений (11). На рис. 3 показана первая собственная форма, найденная.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \\ 1 & \alpha & 1 & \vdots & & \\ & 1 & \alpha & 1 & \vdots & & \\ & & & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \end{pmatrix}$$
(15)

Заметим, что правая часть системы уравнений образована из элементов последнего столбца матрицы А, между элементами векторов X и Z имеется взаимно однозначное соответствие

$$\{X_1, X_2, X_3, ..., X_{n-1}, X_n\} = \{Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}, I\}.$$

Подстановка собственного значения в формулы для вычисления элементов матрицы А и далее решение системы уравнений (9) приведёт к получению собственного вектора матрицы, который в методе конечных разностей представляет собственную форму свободных колебаний.

По данным вышеприведённого примера проведены вычисления по изложенному алгоритму и получена собственная форма, нормированная к единице и изображённая на рис. 3. Собственная функция почти линейная, верхний конец обладает наибольшими перемещениями, нижний конец стержня неподвижен по условиям задачи. Фактически собственная функция образовалась под влиянием тяжёлой массы М на верхнем конце. Континуальная часть стержня мало влияет на форму свободных колебаний, а значит и на частоты колебаний.

В сейсмических вертикальных случайных воздействиях на основание стержня высокочастотные частоты имеют малые амплитуды. Поэтому они представляют лишь теоретический интерес и в данном случае не рассматриваются.



#### Выводы

1. Важные для практических приложений собственные частоты и формы свободных колебаний стержней легко определяются с помощью численного метода конечных разностей и вычислительного компьютерного комплекса Matlab.

2. Применение метода конечных разностей и числительного комплекса Matlab значительно упрощает определение важных параметров для расчёта, конструирования и проектирования зданий, сооружений, машин, робототехнических и мехатронных систем.

3. Использование современных численных методов, компьютеров и достижений науки делает труд инженеров и других специалистов легко адаптируемым к созданию и эксплуатации современного оборудования и инструментов.

#### Библиографический список

- 1. Акуленко Л.Д. Высокочастотные собственные колебания механических систем // Прикл. мат. и мех. 2000. Т. 64. № 5. С. 817-832.
- 2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1979. 416 с.
- Прончатов-Рубцов Н.В., Лисин А.А. Колебания механических систем с распределёнными параметрами. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 28 с.
- Культербаев Х.П., Барагунова Л.А. О реализации проблемы собственных значений сжато-растянутого стержня на компьютере // Компьютерные технологии в строительстве: материалы Всерос. науч.-техн. конф. ДГТУ. – Махачкала: Алеф (ИП Овчинников), 2013. – С. 90-94.
- 5. Культербаев Х.П., Джанкулаев Аз.Я. Свободные колебания стержней с сосредоточенными массами // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2002. № 4. С. 14-18.
- 6. Культербаев Х.П. Основы теории колебаний. Основы теории, задачи для домашних заданий, примеры решений. Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет, 2003. 130 с.

- 7. Масленников А.М. Динамика и устойчивость сооружений: учебник и практикум для вузов. – М. : Издательство Юрайт, 2016. – 366 с.
- 8. Культербаев Х.П., Пшеничкина В.А. Случайные процессы и колебания строительных конструкций и сооружений. Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. 335 с.
- 9. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.
- 10. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2005. 425 с.
- 11. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. М.: Стройиздат, 1981. 436 с.
- 12. Самарский А.А. Введение в численные методы. 2-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987. 288с.
- 13. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
- 14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 432 с.
- 15. Культербаев Х.П., Джанкулаев Ам.Я. Введение в Matlab. Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет, 2006. – 57 с.
- 16. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: учебник для втузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2004. 343 с.

### References

- 1. Akulenko L.D. High-frequency natural oscillations of mechanical systems. Applied Math's and Mechanics. Vol. 64. No. 5. 2000. Pp. 817-832.
- 2. Biderman V.L. Applied theory of mechanical oscillations. M.: High School, 1979. 416 p.
- 3. Pronchatov-Rubtsov N.V., Lisin A.A. Vibrations of mechanical systems with distributed parameters. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2021. 28 p.
- Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A. On the implementation of the problem of eigenvalues of a compressed-tensioned rod on a computer. Computer Technologies in Construction: materials of Russian Sci.-Tech. Conf. DSTU. Makhachkala: Aleph (IP Ovchinnikov), 2013. Pp. 90-94.
- 5. Kulterbaev Kh.P., Dzhankulaev Az.Ya. Free vibrations of rods with lumped masses. Universities News. North Caucasian region. Natural Sciences. No. 4. 2002. Pp. 14-18.
- Kulterbaev Kh.P. Fundamentals of the theory of oscillations. Fundamentals of theory, tasks for homework, examples of solutions. Nalchik: Kabardino-Balkarian State University, 2003. 130 p
- 7. Maslennikov A.M. Dynamics and stability of structures: textbook and workshop for universities. M.: Yurayt Publishing House, 2016. 366 p.
- 8. Kulterbaev Kh.P., Pshenichkina V.A. Random processes and oscillations of building structures and structures. Volgograd: VolgGASU, 2006. 335 p.
- 9. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. M.: High School, 2002. 840 p.
- 10. Ilyin V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M. Numerical methods for solving problems of structural mechanics. M.: Publishing house ASV; St. Petersburg: SPbGASU, 2005. 425 p.
- 11. Karamansky T.D. Numerical methods of structural mechanics. M.: Stroyizdat, 1981. 436 p.
- 12. Samarsky A.A. Introduction to numerical methods. 2nd ed. M.: Nauka, Main Edition of Physical and Mathematical Literature, 1987. 288 p.
- 13. Samarsky A.A. Introduction to the theory of difference schemes. M.: Nauka, 1971. 552 p.
- 14. Samarskii A.A., Gulin A.V. Numerical methods. M.: Nauka, Ch. ed. Phys.-Math. Lit., 1989. 432 p.
- 15. Kulterbaev Kh.P., Dzhankulaev Am.Ya. Introduction to matlab. Nalchik: Kabardino-Balkarian State University, 2006. 57 p.

 Tsyvilsky V.L. Theoretical mechanics: a textbook for technical colleges. 2nd ed., revised. M.: High School, 2004. 343 p.

### FREE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF THE ROD WITH CONCENTRATED MASS

#### Kh. P. Kulterbaev

North Caucasus Center for Mathematical Research North Caucasian Federal University Russia, Stavropol

Dr. of Tech. Sciences, Main Researcher, Tel.: +7(903)4943338, e-mail: kulthp@mail.ru

**Problem Statement.** Longitudinal vibrations of a vertical steel rod of constant cross section with a concentrated mass at the end are considered. This structure is located near the epicenter of earthquakes, where seismic waves have a vertical direction, the most dangerous for the strength of the rod. When deriving the equation of longitudinal vibrations, it is assumed that the hypothesis of flat cross sections is valid. The static part of the deformations is not taken into account due to their smallness. The mathematical model of oscillations consists of the main differential equation and boundary conditions. To solve the problem, methods of separation of variables and finite differences are used. The differential equation and boundary conditions are transformed into a system of algebraic equations, which are used to determine the first eigenvalues and vibration modes.

**Keywords:** rod of constant cross section, longitudinal oscillations, static and dynamic parts of oscillations, mathematical model of oscillations, differential equation of hyperbolic type, boundary conditions, method of separation of variables, oscillation frequency, finite difference method, system of algebraic equations, characteristic equation, Matlab computer complex, own meanings and forms.

### МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ

#### М. Н. Кирсанов

# Национальный исследовательский университет «МЭИ» Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Предлагается вариант метода Рэлея для расчета первой собственной частоты колебаний фермы. Используется приближенная оценка потенциальной и кинетической энергии системы. Если потенциальная энергия рассчитывается по сумме потенциальных энергий всех масс, то суммарная кинетическая энергия масс заменяется приближенным выражением, рассчитанным по максимальной кинетической энергии одного из узлов. Для примера приводится вывод формулы для первой собственной частоты плоской статически определимой балочной фермы с треугольной решеткой с произвольным числом панелей. Предполагается, что колебания масс, расположенных в узлах фермы, происходят только по вертикали. Жесткость фермы рассчитывается по формуле Максвелла – Мора. Сравниваются результаты, полученные по предлагаемому методу, методу Рэлея и методу Донкерлея. Все преобразования производятся в аналитическом виде с использованием системы компьютерной математики Maple. Результаты обобщаются на произвольное число панелей методом индукции. Показано хорошее совпадение предложенного метода с методом Рэлея и первой частотой, найденной численно с учетом всех степеней свободы фермы.

Ключевые слова: число панелей, ферма, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, метод Рэлея.

Введение. Для расчета частот собственных колебаний ферм на практике, как правило, применяются численные методы на основе метода конечных элементов [1-3]. В тех же случаях, когда требуются только нижняя или верхняя оценки первой частоты, используются методы Донкерлея (оценка снизу) или Рэлея (оценка сверху) [4-7]. На основе этих оценок можно получить не только численные, но и аналитические выражения для границ частоты в зависимости от масс, размеров фермы и числа панелей. Для получения зависимости частоты от числа панелей применяется метод индукции и система компьютерной математики. Аналитические решения некоторых задач о частоте колебаний получены для плоских и пространственных регулярных ферм [8-11]. В большинстве таких решений используется метод Донкерлея [12,13]. Формулы на основе этого подхода сравнительно просты, но точность их не всегда удовлетворительна, и погрешность составляет от 10 до 50%. Значительно точнее метод Рэлея. Однако из-за сложности преобразований при суммировании конечных сумм для расчета регулярных ферм с произвольным числом панелей, этот метод дает или слишком громоздкие формулы, или не дает решения вообще, если формулы для конечных сумм не существует. В настоящей работе предлагается вариант метода Рэлея, имеющий сравнительно компактное аналитическое решение с хорошей

<sup>©</sup> Кирсанов М. Н., 2023

точностью. Модифицированный метод Донкерлея для нижней оценки частоты собственных колебаний систем со многими степенями свободы рассмотрен в [14]. Метод динамической жесткости для нахождения аналитического решения задачи о продольных колебаниях стержней фермы на основе различных подходов использован в [15].

Конструкция фермы. Суть предлагаемого метода можно изложить на примере расчета собственной частоты простейшей плоской балочной фермы высотой h с 2n панелями по верхнему поясу. Во всех узлах фермы, кроме двух опорных, располагаются одинаковые массы m (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема фермы, *n*=4

Число внутренних узлов фермы равно числу степеней свободы системы с n панелями: K = 4n + 1. В это число не входят левый и правый опорные узлы. Ферма состоит из  $\nu = 8n + 6$  упругих стержней, включая и три стержня, моделирующие опоры.

**Расчет усилий в стержнях.** В программу расчета усилий, написанную на языке символьной математики Maple, вносятся координаты узлов и порядок соединения стержней, образующих решетку фермы. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Начало координат выбирается в левой опоре:

$$\begin{split} &x_i=2a(i-1),\,y_i=0,\ i=1,..,2n+2,\\ &x_{i+2n+2}=a(2i-1)),\,y_{i+2n+2}=h,\,i=1,..,2n+1 \end{split}$$

Для задания структуры решетки в программе используются специальные списки с номерами концов стержней. Для стержней нижнего пояса это следующие списки:  $Z_i = [i, i+1], i = 1, ..., 2n+1$ . Раскосы задаются списками узлов:  $Z_{i+2n+1} = [i, i+2n+2], Z_{i+4n+2} = [i+1, i+2n+2], i = 1, ..., 2n+1$ . Верхнему поясу соответствуют списки  $Z_{i+6n+3} = [i+2n+2, i+2n+3], i = 1, ..., 2n$ .

Система уравнений равновесия узлов записывается в векторном виде: GS = R, где **G** — матрица системы уравнений равновесия размером  $\nu \times \nu$ , **R** — вектор узловых нагрузок, **S** — вектор, составленный из неизвестных усилий в стержнях и трех опорных реакций. Элементы матрицы **G** — это направляющие косинуса усилий, рассчитанные по координатам концов стержней, соединенных с соответствующим узлом.



**Рис. 2.** Номера узлов и стержней, n = 3

**Нижняя оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея.** Для расчета частот колебаний система уравнений движения массивных узлов фермы записывается в матричной форме:

$$mI_{K}\ddot{Y} + D_{K}Y = 0, \tag{1}$$

где Y – вектор вертикальных смещений узлов фермы длиной K,  $\ddot{Y}$  — вектор ускорений,  $I_K$  — единичная матрица,  $D_K$  — матрица жесткости. С помощью замены  $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ , справедливой для гармонических колебаний с частотой  $\omega$ , умножением слева уравнения (1) на матрицу податливости  $B_K$ , задача сводится к проблеме поиска собственных значений матрицы  $B_K$  :  $B_K Y = \lambda Y$ , имеющей собственные числа  $\lambda = 1 / (\omega^2 m)$ . Матрица податливости является матрицей, обратной матрице жесткости:  $B_K = 1 / D_K$ , значения которой вычисляются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF),$$
<sup>(2)</sup>

где  $S_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в стержне с номером  $\alpha = 1, ..., \nu - 3$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу *i*. Жесткость *EF* всех стержней в ферме одинаковая. В общем случае для вычисления собственных чисел матрицы и спектра частот используются численные методы.

По формуле Донкерлея находится нижняя граница  $\omega_D$  основной частоты  $\omega_1$ :

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2},$$
(3)

где  $\omega_p$  — парциальная частота груза в узле *p*, вычисленная из уравнения его движения:

$$m\ddot{y}_{p} + D_{p}y_{p} = 0, \quad p = 1, 2, ..., K.$$
 (4)

Коэффициент жесткости  $D_p$  есть величина обратная податливости, которая вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \left(S_{\alpha}^{(p)}\right)^2 l_{\alpha} / (EF).$$
 (5)

Если принять форму колебаний в виде  $y_p = A_p \sin(\omega_p t + \varphi)$ , где  $A_p$  — амплитуда колебаний массы, то из (4) следует выражение  $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$ . Отсюда и из (3) получается формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n.$$
(6)

Расчет сумм  $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \left( S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF)$  для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает:

$$\begin{split} \Delta_{1} &= 4(17a^{3} + 3c^{3}) \,/ \, (9h^{2}EF), \\ \Delta_{2} &= 4(93a^{3} + 7c^{3}) \,/ \, (5h^{2}EF), \\ \Delta_{3} &= 8(281a^{3} + 11c^{3}) \,/ \, (7h^{2}EF), \\ \Delta_{4} &= 8(3161a^{3} + 75c^{3}) \,/ \, (27h^{2}EF), \ldots \end{split}$$

В общем случае:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF),$$

где с помощью операторов системы Maple вычисляются общие члены последовательностей коэффициентов:

$$\begin{split} C_{_1} &= (4n+5)(2n+3)(4n+7)(32n^2+96n+79) \, / \, 90, \\ C_{_2} &= (4n+5)(2n+3)(4n+7) \, / \, 6. \end{split}$$

Таким образом, уравнение для нахождения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея получается в виде:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF).$$
(7)

**Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Рэлея.** Формула Рэлея для верхней оценки первой частоты следует из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\max} = \Pi_{\max} \,. \tag{8}$$

Кинетическая энергия системы К одинаковых масс *m*, расположенных в узлах конструкции записывается в виде суммы:

$$T = \sum_{i=1}^{K} m v_i^2 / 2.$$

Для гармонических колебаний  $y_i = u_i \sin(\omega t + \varphi)$  вертикальная скорость массы i имеет вид:

$$v_i = \dot{y}_i = \omega u_i \cos(\omega t + \varphi).$$

При  $\cos(\omega t + \varphi) = 1$  кинетическая энергия максимальная:

$$T_{\max} = \omega^2 m \sum_{i=1}^{K} u_i^2 / 2.$$
(9)

По формуле Максвелла – Мора вычисляется амплитуда смещения  $u_i$ :

$$u_{i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF) = P \tilde{u}_{i}$$

Обозначения:  $S_{\alpha}^{(P)}$  — усилие в стержне  $\alpha$  от действия равномерно распределенной по всем узлам нагрузки P,  $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в стержне от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу i,  $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)} = S_{\alpha}^{(P)} / P$ . При такой нагрузке форма прогиба конструкции близка форме колебаний системы грузов по первой частоте. Формула (9) переписывается в виде:

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{i=1}^{K} m \tilde{u}_i^2 / 2,$$
 (10)

где  $\tilde{u}_i = u_i / P = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (EF)$ — относительные амплитуды смещений масс в узлах с номером *i* при действии равномерно распределенной узловой нагрузки.

Деформация стержня по закону Гука равна  $\Delta l_{\alpha} / l_{\alpha} = S_{\alpha}^{(P)} / (EF)$ . С учетом этого суммарная потенциальная энергия деформации всех стержней фермы от действия распределенной нагрузки имеет вид:  $\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF)$ . В силу

линейности задачи по нагрузкам:  $S^{(P)}_{\alpha} = P \sum_{i=1}^{K} \tilde{S}^{(i)}_{\alpha}$ . Отсюда:

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{i=1}^{K} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^{K} \sum_{\alpha}^{\nu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(i)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i / 2.$$
(11)

Из соотношений (10) и (11) имеем формулу для оценки сверху первой частоты колебаний фермы по методу Релея:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2.$$
(12)

Значения сумм в числителе и знаменателе этого выражения как функции числа панелей получаются методом индукции. Числитель в (12) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \tilde{u}_{i} = \left( C_{_{a3}}a^{^{3}} + C_{_{c3}}c^{^{3}} \right) / \left( h^{^{2}}EF \right),$$

где из решения рекуррентных уравнений следует:

$$\begin{split} C_{c3} &= (32n^4 + 80n^3 + 70n^2 + n + 6) / (3(2n + 1)), \\ C_{a3} &= (1536n^6 + 5120n^5 + 7040n^4 + 5200n^3 - 206n^2 + 1335n - 90)(45(2n + 1)). \end{split} \tag{13}$$

Знаменатель в (12) несколько сложнее:

$$\sum_{k=1}^{N} m \tilde{u}_{k}^{2} = m (C_{a6} a^{6} + C_{ac} a^{3} c^{3} + C_{c6} c^{6}) / (h^{4} E^{2} F^{2}),$$
(14)

где коэффициенты также получены методом индукции:

$$\begin{split} C_{a6} &= (1015808n^{11} + 5586944n^{10} + 14202880n^9 + 22010880n^8 + 23110272n^7 + \\ &\quad + 17277120n^6 + 9397672n^5 - 2887100n^4 + 6944120n^3 - 1893384n^2 + \\ &\quad + 327303n - 17010) \ / \ (2835(2n+1)^2), \\ C_{c6} &= (512n^7 + 1792n^6 + 2816n^5 + 2560n^4 + 1438n^3 - 107n^2 + 334n - \\ &\quad - 30) \ / \ (15(2n+1)^2), \\ C_{ac} &= (69632n^9 + 313344n^8 + 642560n^7 + 786688n^6 + 633360n^5 + 347816n^4 - \end{split}$$

 $-57760n^{3} + 154872n^{2} - 27162n + 2520) / (315(2n + 1)^{2}).$ 

Таким образом, верхняя оценка первой частоты фермы по Рэлею зависит от числа панелей и имеет вид:

$$\omega_{R} = h \sqrt{\frac{EF(C_{a3}a^{3} + C_{c3}c^{3})}{m(C_{a6}a^{6} + C_{ac}a^{3}c^{3} + C_{c6}c^{6})}}.$$
(16)

Модификация метода Рэлея (метод коллокации кинетической энергии). В формуле (16) для верхней оценки основной частоты наибольшую сложность при выводе зависимости частоты колебаний от числа панелей представляет знаменатель. Числитель выражения относительно прост и от метода Донкерлея отличается только тем, что прогибы, входящие в сумму, вычисляются не от единичной силы, приложенной к каждому узлу с массой, а от нагрузки, распределенной по всем узлам с массами. Знаменатель же представляет собой сумму квадратов этих прогибов. В рассмотренной ферме в решение входят только два ее геометрических размера *a* и *h*, поэтому знаменатель (16) содержит только три слагаемых и три коэффициента. Для нахождения зависимости этих коэффициентов от числа панелей используется метод индукции с довольно-таки громоздкими результатами (15). Если в решение для более сложной конструкции фермы войдут три размерных параметра, то число слагаемых в знаменателе (16) будет уже шесть. В задаче с *k* размерами сумма в (14) будет содержать k(k+1)/2 коэффициентов, конечно, в том случае, если удастся найти искомые закономерности изменения коэффициентов от числа панелей. Однако это бывает не всегда, и метод Рэлея для регулярных ферм произвольного порядка во многих случаях реализовать не удается.

Предлагается упростить вычисление знаменателя в классическом выражении (12).

Сумма  $\sum_{i=1}^{K} \tilde{u}_{i}^{2}$  в знаменателе (14) — это фактически сумма ординат кривой

зависимости  $\tilde{u}_i^2$  от номера узла (рис. 3).



Рис. 3. Зависимость  $\tilde{u}_i^2$  от номера узла *i* с массой

Приняты размеры фермы: a = 3м, h = 2м. Продольная жесткость стальных стержней сечением  $F = 4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> равна  $EF = 0, 8 \cdot 10^5$  кH, число панелей n=8, число степеней свободы K=33. На оси абсцисс отложены номера узлов. Максимальная ордината обозначена  $\tilde{u}_{*}^{2}$ . Если ранжировать по увеличению слагаемые  $\tilde{u}_{i}^{2}$  (рис. 4), то площадь кривой на рисунке 3 можно заменить на площадь треугольника:  $\sum_{i=1}^{K} \tilde{u}_{i}^{2} = \tilde{u}_{*}^{2}K / 2$  (метод коллокации).



При этом треугольник оказывается вписанно-описанной фигурой исходной площади, что делает такую замену оправданной. В этом случае на рис. 4 на оси абсцисс уже отмечены не номера узлов, а номера ранжированного по увеличению списка значений  $\tilde{u}_*^2$ . Пробные вычисления величины  $\tilde{u}_i^2$  при различных *n* показывают, что максимальное значение  $\tilde{u}_*^2$  приходится на средний узел верхнего пояса фермы, имеющий номер 3n+1. Вычисление величины  $\tilde{u}_* = \tilde{u}_{3n+1}$  для различных порядков фермы дает следующую последовательность:

$$n = 2: \tilde{u}_* = (525a^3 + 25c^3) / (2h^2 EF),$$
  

$$n = 3: \tilde{u}_* = (2009a^3 + 49c^3) / (2h^2 EF),$$
  

$$n = 4: \tilde{u}_* = (5481a^3 + 81c^3) / (2h^2 EF),$$
  

$$n = 5: \tilde{u}_* = (12221a^3 + 121c^3) / (2h^2 EF),...$$

Общий член последовательности имеет вид:

$$\tilde{u}_* = (2n+1)^2 (10a^3(n+1) + 3(a^3 + c^3) / (6h^2 EF))$$

Таким образом, формула для основной частоты по методу коллокации имеет вид:

$$\omega_*^2 = \frac{2\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i}{m\tilde{u}_*^2 K} = \frac{72(C_{a3}a^3 + C_{c3}c^3)h^2 EF}{mK(2n+1)^4 (10a^3(n+1) + 3(a^3 + c^3))^2}.$$
(17)

Коэффициенты  $C_{a3}$  и  $C_{c3}$  в числителе этой формулы вычисляются по формулам (13).

**Численное решение.** Три полученные оценки зависимости основной частоты колебаний от порядка фермы необходимо сравнить с минимальным значением всего спектра частот, полученным численно. Приняты размеры a = 4м, h = 2м. Площадь поперечного сечения стержней  $F = 4 \text{ см}^2$ , модуль упругости материала стержней  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, массы в узлах m = 350 кг. На рис. 5 сопоставлены кривые зависимости частот  $\omega_D$ ,  $\omega_R$  и  $\omega_*$  от числа панелей по формулам (10), (16) и (17) с первой частотой спектра  $\omega_1$ , полученной численно.



**Рис. 5.** Сравнение аналитических решений с численным. Первая частота колебаний фермы  $\omega_1$  и её нижняя оценка  $\omega_D$  по Донкерлею (7),  $\omega_R$  — верхняя оценка по Рэлею (16),  $\omega_*$  — метод энергетической коллокации (17)

Аналитическое решение по методу Донкерлея оказывается значительно меньше численного, хотя с увеличением числа панелей погрешность уменьшается. Метод Рэлея и предлагаемый его вариант (метод коллокации) имеют значительно большую точность. Для более точной оценки погрешностей методов введем величины  $\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ ,  $\varepsilon_R = (\omega_R - \omega_1) / \omega_1$  и  $\varepsilon_{R^*} = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1$ . На рис. 6 представлены зависимости относительных погрешностей от числа панелей.



Рис. 6. Погрешность оценки по Донкерлею  $\,\varepsilon_{_D}\,$ , Рэлею $\,\varepsilon_{_R}\,$ и метод коллокации $\,\varepsilon_{_{R^*}}\,$ 

Заключение. Предложен метод вывода аналитического решения для оценки первой частоты собственных колебаний регулярной фермы. Метод применим и для любых других регулярных механических систем с многими степенями свободы. Можно сделать следующие выводы:

1. Формула для вычисления частоты по предлагаемому методу проще, чем по методу Рэлея, а точность полученного результата сравнительно с численным методом расчета всего спектра частот значительно выше, чем по методу Донкерлея и сопоставима с методом Рэлея.

2. С увеличением числа панелей в ферме точность предлагаемого метода растет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 22-21-00473.

### Библиографический список

- 1. Коваленко Г. В., Макеев В. Б., Дементьева В. В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации. 2015. С. 44-48.
- 2. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
- 3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5 (date of application: 17.04.2021)
- 4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
- 5. Воробьев О.В. Оценка основной частоты двузвенного манипулятора // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2021. С. 1013.
- Петриченко Е.А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Финка // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2021. С. 999.
- 7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. 20. Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
- 8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures; 2022; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
- 9. Kirsanov, M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels // AlfaBuild. 2022. 25 Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7
- Kirsanov, M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023; 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01
- Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
- 12. Levy, C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. doi:10.1016/0022-460X(91)90405-9.

- Trainor, P.G.S., Shah, A.H., Popplewell, N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method // Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285– 292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
- Low, K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
- 15. Liu, X., Zhao, Y., Zhou, W., Banerjee, J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.

#### References

- 1. Kovalenko G. V., Makeev V. B., Dementieva V. V. Investigation of natural frequencies of trusses based on the finite element method (FEM). Young thought: Science, technology, innovation. 2015. Pp. 44-48.
- 2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
- 3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5 (date of application: 17.04.2021)
- 4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
- 5. Vorobyov O.V. Estimation of the fundamental frequency of a two-link manipulator. In the book: Radioelectronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the twenty-seventh international scientific and technical conference of students and graduate students. Moscow, 2021. Pp. 1013.
- 6. Petrichenko E.A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Fink truss. In the book: Radioelectronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the twenty-seventh international scientific and technical conference of students and graduate students. Moscow, 2021, Pp. 999.
- 7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
- 8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
- 9. Kirsanov, M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. AlfaBuild. 2022. 25. Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7
- Kirsanov, M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.01
- Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
- 12. Levy, C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. Journal of Sound and Vibration. 1991. 150(1). Pp. 111–118. doi:10.1016/0022-460X(91)90405-9.
- Trainor, P.G.S., Shah, A.H., Popplewell, N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method. Journal of Sound and Vibration. 1986. 109(2). Pp. 285– 292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
- Low, K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. International Journal of Mechanical Sciences. 2000. 42(7). Pp. 1287– 1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
- Liu, X., Zhao, Y., Zhou, W., Banerjee, J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.

# ENERGY COLLOCATION METHOD FOR THE TRUSS FUNDAMENTAL FREQUENCY ESTIMATION

### M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»

Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

A variant of the Rayleigh method for calculating the first natural frequency of the truss oscillations is proposed. An approximate estimate of the potential and kinetic energy of the system is used. If the potential energy is calculated from the sum of the potential energies of all masses, then the total kinetic energy of all masses is replaced by an approximate expression calculated from the maximum kinetic energy of one of the nodes. A recommendation is given on the choice of this node. For example, the derivation of the formula for the first natural frequency of a plane statically determined truss with a triangular lattice is given. It is assumed that the oscillations of the masses located in the truss nodes occur only along the vertical. Truss stiffness is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The results obtained by the proposed method, the Rayleigh method and the Dunkerley method are compared. All transformations are performed in an analytical form using the Maple computer mathematics system. The results are generalized to an arbitrary number of panels by induction. A good agreement between the proposed method and the Rayleigh method and the first frequency found numerically, taking into account all degrees of freedom of the truss, is shown.

Key words: number of panels, truss, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, Rayleigh method.

# СОПОСТАВЛЕНИЕ ДВУХ СПОСОБОВ ПОСТРОЕНИЯ ЯДРА СЕЧЕНИЯ: ДИСКРЕТНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО

С. В. Викулов<sup>1</sup>, Л. В. Пахомова<sup>2</sup>, Н. С. Инкижинов<sup>3</sup>

Сибирский государственный университет водного транспорта Россия, г. Новосибирск<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, профессор, доцент, заведующий кафедрой «Физика, химия и инженерная	і графика»,
тел.: +7(913)9390809, e-mail: vikulov-51@mail.ru	
<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов и подъ	ьемно-транспортные
машины», тел.: +7(913)9040057, e-mail: <u>Pahomova 1 v@mail.ru</u>	
<sup>3</sup> Старший преподаватель кафедры «Сопротивление материалов и подъемно-транспортные	е машины»,
тел.: +7(913)7998152, e-mail: <u>inkizhinov47@bk.ru</u>	

В данной работе приводятся два способа построения ядра сечения для цилиндрических стержней, имеющих различные формы поперечного сечения. Дается название этих способов. Один из способов, общеизвестный в сопротивлении материалов, назван дискретным в соответствии с конечным числом угловых шагов нейтральных прямых, касающихся контура поперечного сечения. Ядро сечения, построенное дискретным способом, имеет форму выпуклого многоугольника с числом сторон, равным числу угловых шагов при окатывании касательной вокруг контура поперечного сечения на 360°. Второй способ построения ядра сечения назван непрерывным в соответствии с непрерывным поворотом касательной по криволинейному контуру поперечного сечения. Ядро сечения или его часть, соответствующая этому криволинейному контуру, имеет вид гладкой непрерывной линии. Эта гладкая кривая строится по выведенному уравнению ядра сечения.

Формулы координат ядра сечения, соответствующие этим двум способам, сопоставляются между собой. Доказывается тождественность этих формул координат сечения.

Приведена формула углового коэффициента касательной к контуру ядра сечения, которая является справедливой для обоих способов.

Ключевые слова: ядро сечения, дискретный способ, непрерывный способ, касательная, квадраты радиусов инерции, тождественность.

Для построения ядра сечения при внецентренном растяжении-сжатии стержня существует общеизвестный способ [1], назовем его дискретным. Название дискретный или по-русски «прерывный» оправдывается тем, что соседние точки ядра сечения получаются при повороте касательной к контуру поперечного сечения на некоторый угловой шаг. Ядро сечения при этом образует некоторую выпуклую многостороннюю фигуру. Число сторон этой фигуры равно числу угловых шагов при окатывании касательной вокруг контура поперечного сечения на 360°.

Координаты ядра сечения в этом способе определяются по формулам:

$$U_{\rm s} = -\frac{i_V^2}{\alpha_U};\tag{1}$$

$$V_{\rm s} = -\frac{i_U^2}{\alpha_V},\tag{2}$$

<sup>©</sup>Викулов С. В., Пахомова Л. В., Инкижинов Н. С., 2023

где  $i_V^2$ ,  $i_U^2$  – квадраты радиусов инерции поперечного сечения;

 $\alpha_U, \alpha_V$  – отрезки СА, СВ главных центральных осей инерции, отсекаемых касательной АВ (рисунок).

В статье [2] координаты ядра сечения, соответствующие некоторой кривой 1-2, определяются по формулам:

$$U_{\rm s} = -i_V^2 \frac{V'}{UV'_1 - V}; \tag{3}$$

$$V_{\rm s} = i_U^2 \frac{1}{UV' - V}.$$
 (4)

Проверим формулы (3) и (4) на соответствие формулам (1) и (2). С этой целью преобразуем формулы (3) и (4), чтобы они были приближены к формулам (1) и (2).

$$U_{\rm s} = -\frac{i_V^2}{U - \frac{V}{V'}};$$
 (5)

$$V_{\rm g} = -\frac{i_U^2}{V - UV'}.\tag{6}$$

Сравнивая формулы (5) и (6) с формулами (1) и (2), видим, что:

$$\alpha_U = U - \frac{V}{W}; \tag{7}$$

$$\alpha_V = V - \dot{U}V'. \tag{8}$$



Касательная АВ

Из рисунка видно, что угловой коэффициент касательной AB к кривой 1-2  $V' = tg\alpha$ , но этот угол  $\alpha$  по правилу знаков математики является отрицательным. Значит, V' < 0. Тогда формулы (7) и (8) примут вид:

$$\alpha_U = U + \frac{V}{V'};\tag{9}$$

$$\alpha_V = V + UV'. \tag{10}$$

Рассмотрим вторые слагаемые в формулах (9) и (10), используя рисунок. С учетом того, что  $V' = tg\alpha = MD/DA$ , V = MD, U = CD, правая часть формулы (9) примет вид:

$$U + \frac{V}{V'} = CD + \frac{MD}{\frac{MD}{DA}} = CD + DA = CA = \alpha_U.$$

Далее, с учетом того, что  $V' = tg\alpha = BE/EM$ , V = CE, U = EM, правая часть формулы (10) примет вид:

$$V + UV' = CE + EM \cdot \frac{BE}{EM} = CE + BE = CB = \alpha_V.$$

Тождественность формул (9) и (10) доказана.

Итак, формулы (1), (2) и (3), (4) или (1), (2) и (5), (6) не противоречат друг другу.

Формулы (3), (4) или их замена в виде (5), (6) позволяют обходиться без использования касательных к криволинейному контуру поперечного сечения.

Ввиду того, что уравнения кривых поперечного сечения – аналитические, ядро сечения получается гладким. Такой способ построения ядра сечения назовем непрерывным.

Необходимо отметить, что если поперечное сечение не имеет ни одной оси симметрии, то построение ядра сечения непрерывным способом чрезвычайно затрудняется.

В добавление к вышесказанному приведем формулу углового коэффициента касательной к ядру сечения, вывод которой приведен в [3]:

$$\frac{dV_{\rm s}}{dU_{\rm s}} = -\frac{i_U^2}{i_V^2} \cdot \frac{U}{V}.$$
(11)

Формула (11) является универсальной, так как она применима как к непрерывному, так и к дискретному способам построения ядра сечения. При использовании дискретного способа в этой формуле величины U и V представляют собой координаты той или иной угловой точки поперечного сечения. Следовательно, отношение U/V для какой-либо угловой точки или, другими словами, для точки поворота касательной является постоянной величиной. Кроме того, в этой формуле первая дробь  $i_U^2/i_V^2$  также является постоянной величиной. Значит,  $dV_g/dU_g = const$ . Это означает, что при повороте касательной вокруг какой-либо угловой точки поперечного сечения точки ядра сечения ложатся на прямую линию, что является общеизвестным фактом.

Необходимо отметить, что непрерывный способ построения ядра сечения наиболее подходит в случаях, если поперечное сечение стержня ограничено кривыми линиями по всему контуру или частично. В других случаях, когда поперечное сечение ограничено прямыми линиями, удобнее использовать дискретный способ.

В случае, если кривая линия, принадлежащая части поперечного сечения, является вогнутой по отношению к центру тяжести этого сечения, то формулами (3), (4) или (5), (6) непрерывного способа пользоваться нельзя. Это объясняется тем, что в таком случае касательные, представляющие собой по сути нейтральные линии, будут пересекать поперечное сечение, что противоречит теории ядра сечения. Это же замечание, разумеется, остается справедливым и для дискретного способа.

#### Библиографический список

- 1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 2009. 559 с.
- 2. Инкижинов Н.С. О построении ядра сечения для стержней с криволинейной частью поперечного сечения // Сибирский научный вестник. Новосибирск: Изд. СГУВТ, 2018. Вып. ХХІІ. С. 16-18.
- 3. Инкижинов Н.С., Пахомова Л.В., Бутузов А.А. Построение ядра сечения для стержня с косинусоидальной формой поперечного сечения // Строительная механика и конструкции. 2022. –№4 (35). С. 34-37.

### References

- 1. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Strength of materials. M.: High School, 2009. 559 p.
- Inkizhinov N.S. On the construction of the section kernel for rods with a curvilinear part of the cross section. Siberian Scientific Bulletin. Novosibirsk: Ed. SGUVT. Issue. XXII. 2018. Pp. 16-18.
- Inkizhinov N.S., Pakhomova L.V., Butuzov A.A. Construction of a section kernel for a bar with a cosine cross-sectional shape. Construction Mechanics and Structures. No. 4(35). 2022. Pp. 34-37.

# COMPARISON OF TWO WAYS OF CONSTRUCTING A CROSS-SECTION KERNEL: DISCRETE AND CONTINUOUS

S. V. Vikulov<sup>1</sup>, L. V. Pahomova<sup>2</sup>, N. S. Inkizhinov<sup>3</sup>

Siberian State University of Water Transport

Novosibirsk, Russia<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Dr of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics, Chemistry and Engineering Graphics, Tel.: + 7(913)9390809, e-mail: <u>vikulov-51@mail.ru</u>

<sup>2</sup>PhD of Technical Sciences, Assosiate Professor, Head of the Department of Resistance of Materials and Lifting and Transport Machines, Tel.: +7(913)9040057, e-mail: <u>Pahomova 1 v@mail.ru</u>

<sup>3</sup>Assistant Professor of the Department of Resistance of Materials and Lifting and Transport Machines,

Tel.: +7(913)7998152, e-mail: inkizhinov47@bk.ru

Abstract. In this paper, two methods are given for constructing a cross-section core for cylindrical rods having different cross-sectional shapes. The name of these methods is given. One of the methods commonly known in the "Resistance of materials" is called discrete in accordance with a finite number of angular steps of neutral lines touching the contour of the cross section. The cross-section core, constructed in a discrete way, has the shape of a convex polygon with the number of sides equal to the number of angular steps when the tangent is rolled around the contour of the cross-section by 360°. The second method of constructing the cross-section core is called continuous in accordance with the continuous rotation of the tangent along the curved contour of the cross-section. The core of the section or its part corresponding to this curved contour has the form of a smooth continuous line. This smooth curve is constructed according to the derived equation of the cross-section kernel.

The formulas of the coordinates of the core of the section corresponding to these two methods are compared with each other. The identity of these formulas of the section coordinates is proved.

The formula of the angular coefficient of the tangent to the contour of the core of the section is given. This formula is valid for both ways.

Keywords: section core, discrete method, continuous method, tangent, squares of inertia radius identity.

# DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.005 УДК [622.691.4+622.692.4]:620.178.3

# ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА К ПРОЧНОСТНОЙ ОЦЕНКЕ РЕСУРСА ТРУБОПРОВОДА ПРИ НАЛИЧИИ МАКРОДЕФЕКТА

В. Г. Малинин<sup>1</sup>, В. Л. Савич<sup>2</sup>, К. С. Отев<sup>3</sup>

Орловский государственный аграрный университет имени Н.В. Парахина<sup>1</sup> Россия, г. Орел Ухтинский государственный технический университет<sup>2,3</sup> Россия, г. Ухта

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры техносферной безопасности, тел.: +7(953)8166990, e-mail: vg.malinin@orelsau.ru

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, заведующий кафедрой механики, тел.: +7(922)5968101, e-mail: <u>vsavich@ugtu.net</u> <sup>3</sup>Ассистент кафедры электроэнергетики и метрологии, тел.: +7(904)8691231, e-mail: <u>kotev@ugtu.net</u>

Исследуется осевое растяжение плоских стальных образцов с искусственными дефектами продольной и поперечной ориентации относительно центральной оси растяжения. Выполняется анализ теоретикоэкспериментальных исследований энергетическим методом обработки диаграмм испытаний на растяжение изделий. Дается обоснование выбора коэффициентов для диагностики изделия и определения его слабых мест при анализе напряжённо-деформированного состояния.

Ключевые слова: ресурс трубопровода, осевое растяжение, концентратор напряжений, энергетический метод, относительный коэффициент упругопластических энергий.

**Введение.** В современном мире трубопроводный транспорт нефти и газа занимает важнейшее место в обеспечении работоспособности различных объектов, конструкций, предназначенных для создания комфортных условий человеческой жизнедеятельности во всех ее направлениях.

Одной из распространенных трубопроводных систем являются магистральные нефтегазопроводы, которые прокладываются в самых разнообразных топографических, геологических, гидрологических и климатических условиях [1].

В ходе длительной эксплуатации газопроводов происходят процессы накопления дефектов различной физической природы, которые в конечном счете становятся причиной отказов.

Результаты анализа причин разрушений за несколько лет показывают рост числа повреждений длительно эксплуатируемых газопроводов, которые были вызваны конструкционными, монтажными дефектами. Следует отметить, что большую роль в этом играет материал труб, имеющий внутренние несовершенства и сварные соединения.

Проблемой прогноза ресурсоспособности и надежности газопроводов занимаются ведущие ученые в области механики и физики прочности материалов и конструкций нефтегазопроводов [2,3,4,5,6,7].

При решении задач о ресурсоспособности трубопроводов следует подходить, с одной

<sup>©</sup> Малинин В. Г., Савич В. Л., Отев К. С., 2023

стороны, обоснованно к анализу напряженно-деформируемого состояния (НДС), формируемого под воздействием различных силовых факторов, с другой – учитывать принципиальную особенность – присутствие наблюдаемых и скрытых дефектов, связанных с материалом труб, сваркой, строительством, коррозией, с условиями транспортировки газа (нефти), эксплуатации.

Для решения поставленной задачи были детально разработаны методы расчетов нефтегазопроводов на прочность, жесткость и устойчивость по методу предельных состояний [8]. Однако они не всегда удовлетворительно решают поставленные задачи с точки зрения анализа надежности вследствие изменения основных характеристик материала трубопровода.

Следовательно, имеет место постулат о необходимости определения основных параметров НДС конструкции с дефектами. Одним из научных приемов является энергетический метод обработки диаграмм испытаний на растяжения образцов с макродефектами с применением моделирования на производственные масштабы.

Исследование механических свойств материалов является неотъемлемой задачей при диагностике, неразрушающем контроле, расчетах на прочность различных объектов и конструкций. Известно, что все материалы обладают структурными несовершенствами, т. е. имеют структурные неоднородности. В механике деформируемого твердого тела исследование обычно производится на нормальных образцах, не имеющих визуальных дефектов. Одним из простейших испытаний для этих целей является испытание на статическое растяжение и разрыв. Стандартная диаграмма на растяжение представлена на рис. 1. При этом в процессе накопления повреждений в стандартной диаграмме имеются две крупных зоны – микро- и макротрещин (рис. 2).



**Рис. 1.** Стандартная диаграмма на растяжение: *ОА* – участок пропорциональности (закон Гука); *АВ* – участок текучести; *BD* – участок самоупрочнения; *DK* – участок, предшествующий разрушению



Рис. 2. Краткое описание процесса повреждений

Первая зона (*OA'BC*) представляет собой упругопластичную область, в которой происходит процесс накопления потенциальной энергии в условиях генерации структурных несовершенств под действием растягивающего усилия.

Вторая зона (CD) – это участок интенсивной генерации и перераспределения структурных несовершенств на различных масштабных и структурных уровнях, образования комплекса субмикро- и микротрещин на соответствующих структурных уровнях. При достижении максимального усилия в точке D комплексы микротрещины обеспечивают переход в скачкообразное образование первичной макротрещины (длиной до 1 мм). На заключительном участке диаграммы деформации (DK) формируется дискретная последовательность развивающихся макротрещин, приводящая к полному разрушению образца (в момент окончательного разрушения возникает звуковой эффект).

В процессе эксплуатации механических систем под воздействием различных факторов в структуре материала образуются соответствующие дефекты. К ним можно отнести появление макро- и микротрещин в металле конструкции, что вызвано внутренними несовершенствами при изготовлении, технологической стыковкой, а также усталостью материала в процессе длительной эксплуатации [9].

**Постановка и результаты экспериментальных исследований.** В рамках эксперимента проводились испытания на осевое растяжение плоских стальных образцов из *стали 09Г2С* с искусственными дефектами продольной и поперечной ориентации относительно центральной оси растяжения. Искусственные дефекты изготовлены различной длины (от 2 до 20 мм) с шагом 2 мм и постоянной глубиной 2 мм.

Создание искусственного дефекта было реализовано одним из простейших способов: производилось вдавливание заточенного зубила с заданными геометрическими параметрами с помощью гидравлического пресса МС-100. Процесс и результат создания дефекта представлены на рис. 3. Образовавшийся дефект представляет собой выдавку с постоянной глубиной и шириной. Эскиз образца с поперечным концентратором и основными геометрическими размерами дан на рис. 4, а фотография готовой партии испытательных образцов показана на рис. 5.

Далее образцы устанавливались в испытательную машину ИР-5145-500-11 с компьютерным обеспечением и производились соответствующие испытания на растяжение.



Рис. 3. Процесс и результат изготовления искусственных дефектов



Рис. 4. Эскиз испытательного образца



Рис. 5. Готовая партия испытательных образцов

Отметим, что процесс реализации эксперимента производился по двум основным направлениям: *первое* связано с непосредственным разрушением образцов с целью установления механических свойств материала образца; *второе* осуществлялось с остановками с целью сканирования напряженности магнитного поля на поверхности образца, а также получения результатов акустической эмиссии. Паузы длились *не более 5 мин* и реализовывались по границам переходов. Испытательная машина представлена на рис. 6.



Рис. 6. Общий вид испытательной машины ИР-5145-500-11

Приведем сравнительный результат испытаний образцов с продольным поперечным расположением концентратора длиной 6, 10 и 16 мм.

Влияние концентратора на формирование диаграммы растяжения иллюстрирует рис. 7.

По результатам сравнения и анализа представленных диаграмм (рис. 7) можно сделать промежуточные выводы: с одной стороны, с увеличением длины поперечного дефекта диаграмма сужается, а имеющиеся классические зоны (упругость, текучесть, упрочнение, сохраняется классический ползучесть) остаются, значит, эффект: с увеличением концентратора напряжений требуемое разрывное усилие уменьшается; с другой – с учетом влияния на предел текучести неоднородности напряженного состояния возникает конкурирующий эффект: в рассматриваемой группе изделий наличие концентратора напряжений, обусловливая неоднородное напряженное состояние, увеличивает предел прочности и текучести. Следовательно, неоднородные локальные характеристики компенсируют уменьшение «живучей площади сечения». Отсюда следует общий вывод о том, что в определенных ситуациях указанные эффекты на характеристики и свойства рассматриваемых изделий (испытательных образцов с искусственными дефектами) влияют по-разному.



**Рис. 7.** Диаграммы растяжения образцов с концентратором при его поперечном расположении, длиной 6, 10, 16 мм

В процессе разрушения образцов также было установлено, что при поперечном расположении концентратора разрушение происходило по нему, а при продольном – наблюдалось либо выше, либо ниже рассматриваемого концентратора. Граница разрушения по общей линии располагалась близко к горизонтальному направлению (рис. 8).



Рис. 8. Эскизы формирования границы разрушения образца с вертикальным расположением концентратора

Энергетический метод оценки процессов разрушения дефектного изделия. Для оценки результатов испытаний по первому направлению (без остановок в процессе проведения эксперимента) нами предложен энергетический метод, который основан на обработке диаграммы растяжения путем ступенчатого нахождения энергии деформации методом трапеции по контуру занимаемой кривой диаграммы растяжения. Затем полученные результаты подсчета изменения энергии в процессе разрушения образца накладывались на диаграмму растяжения и получилась энергосиловая диаграмма. Этот метод в качестве иллюстрации представлен на рис. 9 для концентратора длиной 10 мм.

Для дальнейшей реализации энергетического метода на силовой диаграмме с учетом колебания графика изменения энергии разрушения (срыв) расставлялись переходные точки (A, B, C и D), а также производился расчет площадей OA, AB, BC, CD, упруго-долевых треугольников ( $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$ ,  $S_D$ ), что схематично представлено на рис. 10.

Отметим, что первый срыв энергетической диаграммы, расположенный в упругой зоне растяжения образца, лежит в пределах 60–100 кН и соответствует расположению границы прочностной усталости.

В качестве аналитической обработки предлагаем использовать три основные группы энергетических критериев (таблица).

В таблице под параметрами  $U_i$  рассматривается энергия разрушения, которая описывает соответствующие площади на диаграмме. Границы этих площадей обусловливаются соответствующими точками (*OA*, *OAB* и т. д.). Под параметром  $\Pi_i$  понимается энергия, направленная на пластические деформации, в связи с чем относительный энергетический критерий  $T_i$  принимается единичным на участке *OA*, где действуют законы Гука.

Изменения энергии, проиллюстрированные на рис. 9, являются своеобразным ориентиром расстановки упруго-долевых треугольников, который связан с резким изменением направления энергетического потока разрушения структуры материала.



**Рис. 9.** Энергосиловая диаграмма растяжения с поперечным (*a*) и продольным (*б*) расположением концентратора

па растяжение образцов			
Критерии энергетического метода и их описание		Формулы критериев	
Kaabbuuuaur	C 11	$G_1 = \frac{U_{OA}}{U_{OA}^k};$	(1)
коэффициент концентрации энергии, Характ	Характеризует локализацию энергии	$G_2 = \frac{U_{OAB}}{U_{OAB}^k};$	(2)
энергетический критерий жесткости напряженного	и и включает все три главных ости напряжения ) ),	$G_3 = \frac{U_{OABC}}{U_{OABC}^k};$	(3)
		$G_4 = \frac{U_{OABCD}}{U_{OABCD}^k}.$	(4)

Базовые критерии энергетического метода для анализа диаграммы испытаний на растяжение образцов

Продолжение таблицы

		$T_1 = \frac{S_A}{\Pi_{OA}}; \qquad (5)$
Относительный коэффициент упругопластических энергий ( <i>Ti</i> )	Характеризует упругопластическое напряжённо-деформированное	$T_2 = \frac{S_B}{\Pi_{AB}}; \qquad (6)$
	состояние, так как весьма чувствителен к его изменению	$T_3 = \frac{S_C}{\Pi_{ABC}}; \qquad (7)$
		$T_4 = \frac{S_D}{\Pi_{ABCD}}.$ (8)
Комплексный критерий ( <i>KP<sub>i</sub></i> )	Используется для прочностной диагностики	$KP_i = G_i \cdot T_i \qquad (9)$



Рис. 10. Геометрическая схема обработки энергетического метода

Практическая реализация энергетического метода оценки живучести трубопровода по критерию относительного коэффициента упругопластических энергий. Проанализировав полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

При испытаниях стальных образцов, в которых имеется искусственный концентратор, возникает ряд сложных краевых задач. Решение этих задач требует глубокого понимания тех процессов, которые произошли при его возникновении. При этом следует иметь в виду, что рассматриваемые в данной статье концентраторы являются нестандартными и представляют собой «выдавки» различных геометрических размеров и с различной ориентацией по отношению к линии действия силы.

Разработаны комплексные энергетические критерии оценки напряженнодеформируемого состояния, учитывающие жесткость напряженного состояния, уровень напряженности изделий, нагруженных в упругой и упругопластической областях.

В задачах диагностики изделия и определения его слабых мест (в процессе эксплуатации начинается зарождение микро- и макротрещин) и при анализе напряжённодеформированного состояния предложены новые коэффициенты, обладающие гораздо большей информативностью и чувствительностью в упругой и упругопластических областях: коэффициент концентрации энергии (Gi); относительный коэффициент упругопластической энергии (Ti); комплексный критерий (KPi). Все названные коэффициенты позволяют выявлять области с максимальной величиной критериев (см. таблицу).

Анализ особенностей кинетики развития энергии в процессе нагружения на различных масштабах усреднения позволяет выявить степень подготовки и формирование глобальных структурных изменений в процессе нагружения, что даёт возможность прогнозировать процессы организации и развития повреждаемости структуры вплоть до макроскопического разрушения.

В целом развитие энергетического метода на различных масштабных и структурных уровнях позволит получить гибкий инструмент для решения краевых задач механики разрушения тел с макроконцентраторами.

Практическая реализация энергетического метода в качестве примера представлена на рис. 11 с учетом производственных задач.



Рис. 11. Иллюстрация энергетического метода с применением относительного коэффициента упругопластических энергий

В левой части представлены характеристики образца, в верхней части соответствующий энергетический критерий, формирующий качественные переходы поведения материала в процессе испытания на переменный разрыв (процесс растяжения с остановками). При этом граница поставлена непосредственно критическим событием перехода микроскопических трещин в трещину, что соответствует максимальной точке на диаграмме растяжения.

Внизу слева представлен график изменения удельного импульса (импульса напряжений), связанный с периодом жизни образца в процессе лабораторных испытаний. Фактор времени фиксировался в процессе испытаний на машине ИР-5145-500 с компьютерным обеспечением.

Правая нижняя часть представляет собой линию, установленную путем измерений механических характеристик на трассе с учетом динамик изменения напряжений в образце и в изделии через *коэффициент торможения*, с помощью которого устанавливается относительный срок службы изделия по площадке разрушения. По данной площадке

устанавливается конечный параметр жизни изделия.

Последовательность работы с ресурсной номограммой представлена на рис. 12, последовательность работы указана цифровыми параметрами.



Рис. 12. Ресурсная номограмма. Схема работы и принятия решения

Помимо относительного коэффициента упругопластических энергий возможно применение и комплексного критерия, который по траектории располагается выше в зонах процессов действия законов Гука и упрочнения материалов. В момент раскрытия трещины данные энергетические параметры располагаются достаточно близко друг к другу (рис. 13, а,б,в,г).



Рис. 13. Графики энергетических критериев для поперечно расположенных дефектов

Согласно представленным графикам на рис. 13 между сплошной линией (связанной с относительным коэффициентом упругопластических энергий) и пунктирной (связанной с комплексным критерием) существует область структурного коэффициента надежности (рис. 14).



**Рис. 14.** Область структурного коэффициента надежности (на примере макроконцентратора с поперечным расположением длиной 6 мм)

**Выводы.** Согласно теоретико-экспериментальным исследованиям можно отметить, что предлагается достаточно новый энергетический метод обработки диаграмм испытаний на растяжение изделий.

Указанный метод ориентирован на решение производственных задач, связанных с проблемами прогнозирования остаточного ресурса трубопроводных систем, содержащих трещиноподобные дефекты.

Для длительно эксплуатируемых трубопроводов в соответствии с изменениями свойств материала рекомендуется использовать относительный коэффициент упругопластических энергий, а для достаточно новых (замененных) - возможно применение комплексного критерия для установления относительного срока службы с применением коэффициента торможения.

Коэффициент торможения учитывает отличия между условиями развития подобных дефектов на испытательном оборудовании и на трубопроводе, который находится в эксплуатации.

Структурный коэффициент надежности в области действия законов Гука соответствует коэффициенту запаса прочности (как разность между границами энергетических параметров). В дальнейшем данный коэффициент надежности уменьшается, конкретно показывая процессы структурных разрушений, и в области перехода микротрещины в макротрещину практически сводится к нулевому значению, что соответствует полному отказу трубопровода при его эксплуатации.

Авторы выражают благодарность и глубокую признательность ООО «Газпром трансгаз Казань», в лице Романова С. В. за оказанную помощь при проведении данного исследования.

### Библиографический список

- 1. Кучерявый В.И., Яковлев А.Я. Статистическая модель оценки надежности газопроводов по критерию трещиностойкости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 30-33.
- 2. Гареев А.Г., Чукчалов М.В. Влияние расстояния от компрессорной станции на подверженность газопроводов различным типам КРН // Экспозизия НЕФТЬ ГАЗ. 2013. –№ 4 (29). С. 74-77.

- 3. Гареев А.Г., Насибуллина О.А., Ибрагимов И.Г. Оценка работоспособности труб, имеющих дефекты коррозионного происхождения // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2016. № 4 (106). С. 126-136.
- 4. Анализ аварийных отказов длительно эксплуатируемых магистральных газопроводов / И.Р. Байков, Н.М. Дарсалия, С.В. Китаев, О.В. Смородова, А.М. Шаммазов // Нефтегазовое дело. 2018. Т. 16. № 3. С. 114-119.
- 5. Шарыгин А.М. Дефекты в магистральных газопроводах // Обз. информ. Сер. Транспорт и подземное хранение газа. М.: ИРЦ Газпром, 2000. 50 с.
- 6. Агиней Р.В., Исламов Р.Р., Мамедова Э.А. Определение напряженнодеформированного состояния участка трубопровода под давлением по результатам измерения коэрцитивной силы // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2019. – Т.9. – № 3. – С. 284-294.
- Агиней Р.В., Фридлянд Я.М. Экспериментальные исследования скорости коррозии трубных сталей 09Г2С и 17Г1С для обоснования коррозионных критериев вывода участков магистральных нефтегазопроводов в капитальный ремонт // Трубопроводный транспорт: теория и практика. – 2018. – № 3(67). – С.10-16.
- 8. Кучерявый В.И., Мильков С.Н. Вероятностное определение толщины стенок нефтепродуктопровода заданной надежности // Проблемы машиностроения и надежности машин. –2007. № 4. С. 106-110.
- 9. К вопросу об энергетических критериях прочностной оценки образцов с концентраторами / В.Г. Малинин, В.И. Гультяев, В.Л. Савич, Д.А. Борейко //Современные вопросы устойчивости, пластичности и ползучести в механике деформируемого твердого тела // Сборник научных трудов, посвященный 90-летию заслуженного деятеля науки и техники РФ, доктора технических наук, профессора Владимира Георгиевича Зубчанинова / под общ. ред. В.И. Гультяева. – Тверь, 2020. – С. 148-161.

# References

- 1. Kucheryavy V.I., Yakovlev A.Ya. Statistical model for assessing the reliability of gas pipelines according to the criterion of crack resistance. Problems of Mechanical Engineering and Reliability of Machines. M.: Nauka. No. 6. 2002. Pp. 30-33.
- Gareev A.G., Chukchalov M.V. Influence of the distance from the compressor station on the susceptibility of gas pipelines to various types of SCC. OIL-GAS Exposure. No. 4(29). 2013. Pp. 74-77.
- 3. Gareev A. G., Nasibullina O. A., Ibragimov I. G. Evaluation of the performance of pipes with defects of corrosion origin. Problems of collection, preparation and transport of oil and oil products. No. 4(106). 2016. Pp. 126-136.
- 4. Baikov I.R., Darsalia N.M., Kitaev S.V., Smorodova O.V., Shammazov A.M. Analysis of emergency failures of long-term operated main gas pipelines. Oil and Gas Business. Vol. 16. No. 3. 2018. Pp. 114-119.
- 5. Sharygin A.M. Defects in main gas pipelines. Transport and Underground Gas Storage. M.: IRTs Gazprom, 2000. 50 p.
- 6. Aginey R.V., Islamov R.R., Mamedova E.A. Determination of the stress-strain state of a pipeline section under pressure based on the results of measuring the coercive force. Science and Technology of Pipeline Transportation of Oil and Oil Products. Vol. 9. No. 3. 2019. Pp. 284-294.
- Aginey R.V., Fridlyand Ya.M. Experimental studies of the corrosion rate of pipe steels 09G2S and 17G1S for the purpose of substantiating corrosion criteria for bringing sections of oil and gas pipelines into overhaul. Pipeline Transport: Theory and Practice. No. 3(67). 2018. Pp. 10-16.

- 8. Kucheryavy V.I., Milkov S.N. Probabilistic determination of the thickness of the walls of an oil product pipeline of given reliability. Problems of Mechanical Engineering and Reliability of Machines. M.: Nauka. No. 4. 2007. Pp. 106-110.
- 9. Malinin V.G., Gultyaev V.I., Savich V.L., Boreiko D.A. On the issue of energy criteria for the strength assessment of specimens with concentrators. Modern issues of stability, plasticity and creep in the mechanics of a deformable solid body. Collection of scientific papers dedicated to the 90th anniversary of the Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Doctor of Technical Sciences, Professor Vladimir Georgievich Zubchaninov. Under the general editorship of V.I. Gultyaev. Tver, 2020. Pp. 148-161.

## APPLICATION OF THE ENERGY METHOD FOR STRENGTH EVALUATION OF PIPELINE LIFE IN THE PRESENCE OF A MACRODEFECT

V. G. Malinin<sup>1</sup>, V. L. Savich<sup>2</sup>, K. S. Otev<sup>3</sup>

Oryol State Agrarian University named after N.V. Parakhin<sup>1</sup> Russia, Orel Ukhta State Technical University<sup>2, 3</sup> Russia, Ukhta

<sup>1</sup>Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Technospherical Safety, Tel.: +7(953)8166990, e-mail: vg.malinin@orelsau.ru <sup>2</sup>PhD of Technical Sciences, Head of the Department of Mechanics, Tel.: +7(922)5968101, e-mail: <u>vsavich@ugtu.net</u> <sup>3</sup>Assistant of the Department of Electricity and Metrology, Tel.: +7(904)8691231, e-mail: <u>kotev@ugtu.net</u>

Axial tension of flat steel specimens with artificial defects of longitudinal and transverse orientation relative to the central axis of tension is investigated. The analysis of theoretical and experimental studies by the energy method of processing diagrams of tensile tests of products is carried out. The substantiation of the choice of coefficients for the diagnostics of the product and the determination of its weak points in the analysis of the stress-strain state is given.

Keywords: axial tension, stress concentrator, energy method, relative elastoplastic energy coefficient.

## НАПРЯЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ-ПРОПИЛА

Ю. А. Гербер<sup>1</sup>, А. Е. Нагель<sup>2</sup>, М. В. Табанюхова<sup>3</sup>

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)<sup>1,2,3</sup> Россия, г. Новосибирск

<sup>1</sup>Старший преподаватель кафедры строительной механики, тел.: +7(905) 959-40-12, e-mail: yu.gerber@sibstrin.ru <sup>2</sup>Ассистент кафедры строительной механики, тел.: +7(913)486-48-12, e-mail: a.nagel@sibstrin.ru <sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(913)202-66-03, e-mail: tabanyukhova@sibstrin.ru

Центральное место в механике разрушения отводится зарождению и развитию трещин. В теоретических расчётах и численных экспериментах трещину можно моделировать с любыми требуемыми для исследования параметрами (глубина, расстояние между берегами, радиус закругления вершины или острый угол). В физических экспериментах всё значительно сложнее. Конечно, можно «вырастить» трещину, но далеко не все материалы позволяют это реализовать. Добиться конкретных характеристик трещины (угол наклона, глубина) в этом случае будет сложно, а то и вовсе невозможно. Как правило, в физических экспериментах, реализуемых посредством моделей, трещину выполняют в виде разреза или пропила (зависит от материала модели). Получить его вершину острой, а расстояние между берегами минимальным достаточно затруднительно. Кроме того, имеет место быть такой подход (техника изготовления образца), когда при моделировании трещины, не выходящей на контур модели, просверливают отверстия маленького диаметра и между ними образуют пропил, имитирующий трещину. С учётом всего вышесказанного возникает вопрос, а как же влияет радиус закругления пропила на напряжённое состояние вблизи вершины трещины. Данная работа посвящена поиску ответа на этот вопрос. Методом фотоупругости при прямом поперечном изгибе выполнено несколько серий экспериментов на образцах из пьезооптического материала (оргстекла марки Э2). Трещина на контуре модели имитировалась с помощью пропила, затем в его вершине сверлом небольшого диаметра образовывалось круглое отверстие. В результате экспериментов получены поля напряжений в двух партиях образцов при различных нагрузках. По ним определена интенсивность напряжений вблизи вершин трещинпропилов. Оценено влияние радиуса закругления вершины трещины-пропила на напряжения вблизи неё.

Ключевые слова: механика разрушения, модели, трещины, метод фотоупругости, напряжённое состояние, концентраторы напряжений

Введение. В механике разрушения большое количество исследований посвящено изучению напряжённого состояния элементов, имеющих повреждения в виде трещин, концентраторами напряжений. которые являются Особый интерес представляет распределение напряжений у вершины трещины, так как именно оно влияет на её дальнейшее развитие. Исследования в этом направлении носят как теоретический, так и экспериментальный характер. Что касается аналитических изысканий и численных экспериментов, результаты которых освещены в работах [1-6], то большой проблемы при моделировании трещины В исследованиях такого рода не возникает, трещина рассматривается в них как острый разрез. Вопрос о радиусе закругления вершины трещины также не поднимается и при проведении численных экспериментов, описанных в статьях [7-10]. В противовес аналитическим и численным решениям задач о трещинах, в физических экспериментах часто встаёт вопрос о том, как близко от правды находятся результаты исследований, полученные посредством имитации трещин пропилами или разрезами. К таким способам образования трещин приходится прибегать экспериментаторам в связи с тем, что «выращивание» трещин возможно не на всех материалах, да и трещины, образованные

<sup>©</sup> Гербер Ю. А., Нагель А. Е., Табанюхова М. В., 2023

этим способом, не будут удовлетворять ряду критериев (конкретная глубина, угол наклона), интересующих исследователей. Немалое количество экспериментальных работ отводится решению задач прочности элементов строительных конструкций, имеющих концентраторы напряжений в виде трещин. Результаты исследований, приведённые в публикации [11], отражают идею регулирования напряжённого состояния балок с помощью заранее организованных трещин. В работе методом фотоупругости получены поля напряжений в моделях балок с различным числом и глубиной трещин-пропилов, оценено влияние количества и глубины трещин на напряжённое состояние образца. Статья [12] содержит результаты экспериментального исследования напряжённого состояния плоского элемента, имеющего геометрические концентраторы напряжений в виде овального выреза и трещин, образованных на его контуре. Выполнен фотоупругий анализ напряжённого состояния пластины в зависимости от количества и угла наклона трещин. Посредством метода фотоупругости в работе [13] изучено напряжённое состояние образцов балок, усиленных углепластиком. Получены картины полос интерференции по всему полю модели балки с трещиной при варьировании угла наклона последней. Оценено влияние внешнего армирования на напряжённое состояние моделей балок при различном угле наклона трещины. Мероприятия, выполненные в рамках исследования [14], направлены на оценку влияния круглого отверстия на напряжения у вершины трещины в плоском элементе. В упомянутой работе рассматривается трещина (она не выходит на контур образца), для создания которой сначала были просверлены круглые отверстия, а потом соединены пропилом. Возможность снижения напряжений в плоских балках при наличии дефектов обсуждается в статье [15], в качестве дефектов подразумеваются в том числе и трещины, которые имитируются пропилами. В работе [16] описана серия исследований методом фотоупругости различных образцов, имеющих как трешины, так и надрезы. Публикация [17] посвящена определению напряжённо-деформированного состояния новых типов образцов при трёхточечном изгибе. Работа [18] направлена на изучение влияния пор на напряжения у вершин трещины, которая образована пропилом между двумя круглыми отверстиями небольшого диаметра. Исследование ориентировано на изучение состояния предразрушения материала вблизи трещины, определение механизма ее «подрастания» и выявление причин торможения. Анализ напряжённого состояния плоского элемента с вырезом и различным трещин-пропилов на его контуре представлен в работе [19]. количеством Bce экспериментальные исследования, описанные выше, выполнены на моделях, в которых трещины имитировались с помощью пропилов. Всё, что касается радиуса закругления вершин трещин, в указанных работах не рассмотрено. В связи с этим имеется интерес к тому, как влияет радиус закругления пропила на величину напряжений вблизи его вершины.

Целью данного исследования является изучение влияния радиуса закругления пропила на напряжённое состояние вблизи него. Для достижения поставленной цели изготовлена модель из оргстекла марки Э2 (этот материал имеет высокую пьезооптическую чувствительность и легко поддаётся обработке). Исследование напряжений производилось посредствам метода фотоупругости, как и в перечисленных выше экспериментальных работах [11-19]. Просвечивание нагруженного прозрачного образца поляризованным светом даёт картину полос интерференции. Интерференционная полоса – геометрическое место точек с одинаковой разностью главных в плоскости напряжений. Интерферограмма точно и позволяет интенсивность напряжений вблизи концентраторов. наглядно оценить Поляризационно-оптический метод представляет общую картину распределения напряжений по всему полю модели, являясь, по сути, методом тензометрии с нулевой базой измерения, в отличие от тензометров, которые дают усредненные сведения для определенных точек. Все эксперименты в рамках этой работы выполнены на поляризационно-проекционной установке ППУ-7. Схема нагружения и размеры используемой в исследовании модели балки в миллиметрах приведены на рис. 1. В прямоугольной пластине на вертикальной оси симметрии сделан пропил, имитирующий трещину (глубина 3 мм). На этой модели выполнена серия экспериментов. Затем в вершине пропила сверлом проделано отверстие (диаметр 0,4 мм). И затем, уже на этом образце, проведена серия аналогичных экспериментов. Обе партии моделей испытаны при прямом поперечном изгибе, нагрузка изменялась ступенчато от 25 H до 200 H с шагом 25 H. Материал образца работал в упругой стадии, после снятия нагрузки остаточных напряжений не было зафиксировано.



Рис. 1. Схема нагружения модели при прямом поперечном изгибе

Результаты. Картины полос интерференции на каждой ступени нагружения получены в трёх вариантах: при прямом просвечивании белым светом, затем с введением зелёного фильтра (длина волны  $\lambda = 541$  *нм*) в скрещенном и параллельном поле поляризатора и анализатора. Интерферограмма, зафиксированная в белом свете, содержит цветные полосы, следует отметить, что первому порядку полосы соответствует своя цветовая палитры, второму - своя и т.д., а вот нулевая полоса - чёрного цвета. С помощью картины полос, полученной в белом свете (рис. 2, а и рис. 3, а), крайне сложно просчитать максимальный порядок полос вблизи концентратора, её используют для определения начала отсчёта, т.е. поиска нулевой полосы (на рис. 2 и 3 она обозначена 0). Для получения более контрастной интерферограммы вводят цветной фильтр, который пропускает волны одной длины, обычно зелёный, как и в данной работе. Поле, пученное таким образом, представляет собой чередование чёрных и зелёных полос (рис. 2, б и рис. 3, б). Определить с его помощью порядок полос, не зная, где же проходит нулевая линия, невозможно, для этого и нужна предыдущая цветная картина полос интерференции. При высоком градиенте напряжений полосы вблизи концентратора, в данном случае у вершины трещины-пропила, сливаются и становится сложно вычислить точно их порядок. Да и максимальное количество полос на той или другой ступени нагружения может быть как целым, так и дробным. Для повышения точности снимаемых экспериментальных данных поляризатор и анализатор (ими укомплектована ППУ-7) располагают параллельно, это позволяет получить интерферограмму, на которой тёмные линии соответствуют дробному порядку полосы, например, 0,5 или 1,5 (рис. 2, в и рис. 3, в). На рис. 2 и 3 представлены фрагменты интерферограмм, зафиксированные при одинаковой нагрузке (150 Н), цифрами 0, 1, 2 и т. д. обозначен целый порядок полос интерференции, а 0,5; 1,5; 2,5 и т.д. - дробный. Максимальный порядок полос у вершины пропила определялся во время эксперимента при увеличении изображения вблизи концентратора напряжений (у вершины пропила) и многократно уточнялся на каждой ступени нагружения.

Первая серия экспериментов выполнена на образце с трещиной-пропилом без закругления вершины. Фрагменты картин полос интерференции, соответствующие этой модели, изображены на рис. 2. На фотографиях зафиксированы два ярко выраженных концентратора напряжений, находящиеся на вертикальной оси симметрии образца, – точка приложения нагрузки (вверху), но она в рамках данной работы интереса не представляет и

вершина трещины (внизу модели). Максимальное напряжение возникает у вершины трещины-пропила, находящейся в растянутой зоне. Порядок полосы, соответствующий этому напряжению, составил 5. Следует отметить, что трещина в нижней части образца привела к смещению нулевого порядка полос вверх (при отсутствии трещины в аналогичной ситуации нулевая полоса находилась бы на горизонтальной оси симметрии модели).



Рис. 2. Картины полос интерференции в образце с трещиной-пропилом без закругления вершины при F = 150 Н: а) в белом свете; б) при введении зелёного фильтра в скрещенном поле поляризатора и анализатора;
в) при введении зелёного фильтра в параллельном поле поляризатора и анализатора

Вторая серия экспериментов реализована на образце с трещиной-пропилом, имеющим закругление вершины (радиус закругления составляет 0,2 мм). Фрагменты интерферограмм представлены на рис. 3. Как и в предыдущей серии экспериментов, первая и вторая картины полос интерференции получены в разном свете при скрещенном поле анализатора и поляризатора, а третья интерферограмма при их параллельном расположении. В данном случае максимальный порядок полосы вблизи вершины трещины составил 6,5, что в сравнении с предыдущим экспериментом больше на 1,5 полосы и является весьма существенным.



**Рис. 3.** Фрагменты интерферограмм в образце с трещиной-пропилом с закруглением вершины при F = 150 H: а) в белом свете; б) при введении зелёного фильтра в скрещенном поле поляризатора и анализатора; в) при введении зелёного фильтра в параллельном поле поляризатора и анализатора

По полученным картинам полос интерференции в двух партиях образцов найдены максимальные порядки полос у вершины трещины на каждой ступени нагружения, их значения сведены в таблицу. Закругление вершины пропила привело к увеличению напряжений, которое в процентном отношение указано в последнем столбце таблицы (за 100% принят порядок полос вблизи вершины без закругления).

Порядок полос и	интерференции
-----------------	---------------

Ступень Нагрузка,		Максимальный порядок интерференционной полосы у вершины пропила		Увеличение
нагружения	Н	Трещина-пропил без	Трещина-пропил с	порядка полосы, %
		закругления вершины	закруглением вершины	
1	2	3	4	5
1	25	1	1,3	30
2	50	2	2,5	25
3	75	3	3,5	17

Продолжение таблицы

			1	
4	100	3,5	4,5	29
5	125	4,5	5	11
6	150	5	6,5	30
7	175	5,5	7,5	36
8	200	6	8,5	42

Графически зависимость порядка интерференционной полосы от нагрузки представлена на рис. 4, где нижний график соответствует образцу с пропилом без закругления вершины, а верхний график - с закруглением вершины.



Рис. 4. Зависимость порядка интерференционной полосы от нагрузки

На графиках показано, что до третьей ступени нагружения зависимость между нагрузкой и порядком полосы остается линейной как для верхнего, так и для нижнего графика, а вот при дальнейшем увеличении нагрузки зависимость перестаёт быть линейной.

**Выводы.** При прямом поперечном изгибе получены интерферограммы в моделях балок с пропилом на вертикальной оси симметрии образца, имитирующим трещину. С их помощью оценена интенсивность напряжений вблизи вершин пропилов, имеющих закругление (радиус 0,2 мм) и при его отсутствии. Показано, что увеличение закругления в настоящем исследовании вопреки ожиданиям привело к увеличению напряжений вблизи вершины пропила. Можно предположить, что к этому привело ослабление соседних по отношению к пропилу сечений. Это предположение следует проверить дополнительными исследованиями.

### Библиографический список

- 1. Корнев В.М., Кургузов В.Д. Многопараметрический достаточный критерий квазихрупкой прочности для сложного напряженного состояния // Физическая мезомеханика. 2006. Т. 9. №5. С. 43-52.
- 2. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Prefracture zones in quasibrittle materials with branched and kinked cracks // Physical Mesomechanics. 2010. T.13. №1-2. C. 54-61.
- 3. Корнев В.М., Кургузов В.Д. Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т.51. № 6 (304). С. 153-163.

- 4. Кургузов В.Д., Корнев В.М., Астапов Н.С. Модель разрушения биматериала при расслоении. Численный эксперимент // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т.17. №4. С. 462-473.
- 5. Демешкин А.Г., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Зарождение трещин в окрестности концентраторов напряжений в квазихрупких материалах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. №1. С. 110-121.
- 6. Кургузов В.Д., Астапов Н.С. Критерий упругопластического разрушения структурированной пластины с острым v-образным вырезом // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т.11. №2. С. 148-161.
- Likhachov A.V., Pickalov V.V. Three-dimensional tomography with finite aperture beams // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 1998. – Vol. 405. – №2-3. – P. 506-510.
- 8. Influence of unsharpness on crack length evaluation with computerized tomography methods / U. Ewert, B. Redme, A.V. Likhachov, V.V. Pickalov // 2nd World Congress on Industrial Process Tomography, Hannover, 2013. P. 711-718.
- 9. Лихачев А.В. Рентгеновская томография микродефектов при неоднородной чувствительности по поверхности детектора // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2013. Т.77. №2. С. 113-117.
- Likhachov N.A., Likhachov A.V. Application of entropy filter in the analysis of X-ray images // 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies, FarEastCon 2019, Vladivostok: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019. – P. 8933849.
- Албаут Г.Н., Канышев Ю.И., Табанюхова М.В. Фотоупругий анализ напряженного состояния балок с трещинами // Проблемы оптимального проектирования сооружений: докл. 2-й Всерос. конф. – Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 2011. – С. 28-35.
- 12. Зеркаль С.М., Табанюхова М.В. Фотоупругий анализ концентрации напряжений вблизи вершин трещин-пропилов // Инновации в жизнь. 2019. №2(29). С. 126-133.
- 13. Табанюхова М.В. Исследование напряжённого состояния балок с усиливающим слоем из углепластика // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т.18. №2. С. 248-254.
- 14. Албаут Г.Н., Табанюхова М.В., Морозов Н.Ф. Влияние круглого отверстия на напряженно-деформированное состояние у вершины трещины // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2000. № 9 (501). С. 143-145.
- Табанюхова М.В. Снижение напряжений в балках при наличии дефектов // Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций: материалы XIV науч.метод. конф. ВИТУ. – Санкт-Петербург: Военный инженерно-технический университет, 2010. – С. 104-108.
- 16. Степанова Л.В., Белова О.Н., Туркова В.А. Определение коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости и метода конечных элементов // Вестник Самарского университета. – Естественнонаучная серия. – 2019. – Т 25. – №3. – С. 62-82.
- 17. Степанова Л.В., Фролов К.В. Конечно-элементное исследование смешанного нагружения на примере полудиска с вертикальным и наклонным надрезами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. №3. С. 128-137.
- 18. Албаут Г.Н., Проскура А.В., Табанюхова М.В., Ястебкова Н.А. Изменение напряжений у вершин трещины из-за наличия в ее окрестности круглых пор //

Ресурсо- и энергосбережение в реконструкции и новом строительстве: науч. труды II и III Междунар. конгресса. – Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 2000. – С. 25-30.

19. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (Cutout and cuts) // Key Engineering Materials. – 2020. – Vol.827 KEM. – P. 330-335.

## References

- 1. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Ultiparameter sufficient criterion of quasi-brittle strength under complex stress. Physical Mesomechanics. Vol. 9. No. 5. 2006. Pp. 43-52.
- 2. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Prefraction zones in quasi-brittle materials with branched and kinked cracks. Physical Mesomechanics. Vol. 13. No.1-2. 2010. Pp. 54-61.
- 3. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient criterion of fracture in the case with a complex stress state and non-proportional deformation of the material in the pre-fracture zone. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. Vol. 51. No. 6(304). 2010. Pp. 153-163.
- 4. Kurguzov V.D., Kornev V.M., Astapov N.S. Fracture model of bi-material under exfoliation. Numerical experiment. Engineering Fracture Mechanics. Vol. 17. No. 4. 2011. Pp. 462-473.
- 5. Demeshkin A.G., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Crack nucleation near stress concentrators in quasi-brittle materials. Mechanics of Solids. No. 1. 2012. Pp. 110-121.
- 6. Kurguzov V.D., Astapov N.S. The criterion of elastoplastic fracture of a structured plate with a sharp v-notch. Computational Continuum Mechanics. Vol. 11. No. 2. 2018. Pp. 148-161.
- Likhachov A.V., Pickalov V.V. Three-dimensional tomography with finite aperture beams. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. Vol. 405. No. 2-3. 1998. Pp. 506-510.
- 8. Ewert U., Redme B., Likhachov A.V., Pickalov V.V. Influence of unsharpness on crack length evaluation with computerized tomography methods. 2nd World Congress on Industrial Process Tomography. Hannover. 2013. Pp. 711-718.
- Likhachev A.V. X-ray tomography of microdefects using a detector with nonuniform surface sensitivity. <u>Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics</u>. Vol. 77. <u>No. 2</u>. 2013. Pp. 95-98.
- Likhachov N.A., Likhachov A.V. Application of entropy filter in the analysis of X-ray images. 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies, FarEastCon 2019, Vladivostok: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2019. P. 8933849.
- 11. Albaut G.N., Kanyshev Y.I., Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of beams with cracks. Problems of optimal design of structures: Documents of the 2nd All-Russian Conference, Novosibirsk, 05-06 April 2011. Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) Siberian Branch of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Siberian Branch of the International Academy of Sciences of Higher Education. Novosibirsk: Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin). 2011. Pp. 28-35.
- 12. Zerkal S.M., Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of stress concentration near the tops of cracks-cuts. Innovations in Life. No. 2(29). 2019. Pp. 126-133.
- 13. Tabanyukhova M.V. Investigation of stress-strain state in beams with reinforcing carboplastic layer. Mechanics of composite materials and structures. Vol. 18. No. 2. 2012. Pp. 248-254.

- 14. Albaut G.N., Tabanyukhova M.V., Morozov N.F. Influence of a round hole on the stressstrain state at the crack tip. News of Higher Educational Institutions. Construction. 2000. No. 9(501). Pp. 143-145.
- 15. Tabanyukhova M.V. Stress reduction in beams in the presence of defects. Defects of buildings and structures. Strengthening of Building Structures: Materials of the XIV Scientific and methodological conference of VITU, Saint Petersburg: Military Engineering Institute of the Military Logistics Academy. 2010. Pp. 104-108.
- 16. Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. Determination of the Williams series expansion's coefficients using digital photo elasticity method and finite element method. Bulletin of Samara University. Natural Science Series. Vol. 25. No. 3. 2019. Pp. 62-82.
- 17. Stepanova L.V., Frolov K.V. Finite element study of mixed mode loading of the cracked semicircular disc under bending. PNRPU. Mechanics Bulletin. No. 3. 2018. Pp. 128-137.
- 18. Albaut G.N., Proskura A.V., Tabanyukhova M. V., Yastebkova N.A. Stress changes at the crack tops due to the presence of round pores in its vicinity. Scientific Papers of the II and III International Congress "Resource and Energy Conservation in Reconstruction and New Construction". Siberian Fair, Interregional Association "Siberian Accord", with Russian Academy of Sciences. Architecture and Construction Sciences, Administration of the Novosibirsk Region, Novosibirsk City Administration, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering. Novosibirsk: Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering(Sibstrin). 2000. Pp. 25-30.
- 19. Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometric stress concentrators (Cutout and cuts). Key Engineering Materials. Vol. 827 KEM. 2020. Pp. 330-335.

## STRESSES NEAR THE TOP OF THE CRACK-CUT

Y.A. Gerber<sup>1</sup>, A.E. Nagel<sup>2</sup>, M.V. Tabanyukhova<sup>3</sup>

#### Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)<sup>1,2,3</sup> Russia, Novosibirsk

<sup>1</sup>Assistant Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: 7(905)9594012, e-mail: <u>vu.gerber@sibstrin.ru</u> <sup>2</sup>Assistant of the Department of Structural Mechanics, Tel.: 7(913)4864812, e-mail: <u>a.nagel@sibstrin.ru</u> <sup>3</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.:7(913)2026603, e-mail: tabanyukhova@sibstrin.ru

The central place in fracture mechanics is given to crack initiation and development. In theoretical calculations and numerical experiments, a fracture can be modeled with any parameters required for the study (depth, distance between banks, tip rounding radius or acute angle). In physical experiments, everything is much more complicated. Of course, it is possible to "grow" a crack, but not all materials allow this to be realized. In this case, it will be difficult, if not impossible, to achieve specific crack characteristics (inclination angle, depth). As a rule, in physical experiments implemented by means of models, a crack is made in the form of a cut or cutout (depending on the material of the model). It is quite difficult to achieve that the angle of its top is sharp, and the distance between the banks is minimal. In addition, there is such an approach (sample manufacturing technique), when modeling a crack that does not go to the contour of the model, holes of small diameter are drilled and a cut is formed between them, simulating a crack. Taking into account all of the above, the question arises, how does the radius of curvature of the cut affect the stress state near the crack tip. This work is devoted to finding an answer to this question. Several series of experiments were performed using the photoelasticity method with direct transverse bending on samples of piezooptical material (E2 Plexiglas). A crack on the contour of the model was imitated using a cut, then a round hole was formed at its top with a drill of a small diameter. As a result of the experiments, stress fields were obtained in two groups of samples at different loads. According to them, the intensity of stresses near the tips of cracks-cuts was determined. The influence of the top-placed crack-cut radius of curvature on the stresses near it is estimated.

Keywords: fracture mechanics, models, cracks, photoelasticity method, stress state, stress concentrators.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БОЛЬШЕПРОЛЕТНОГО ЗДАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

А. А. Сатанов<sup>1</sup>, А. В. Симонов<sup>2</sup>, П. А. Хазов<sup>3</sup>

Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной физики Российской академии наук»<sup>1</sup>

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»<sup>2,3</sup>

Россия, г. Н. Новгород

<sup>1</sup>Аспирант, тел.: +7 (910)133-38-66, e-mail: <u>andrewsatanov@gmail.com</u> <sup>2</sup>Студент инженерно-строительного факультета, тел.: +7 (920)293-13-51, e-mail: <u>simonov.alex.nn@gmail.com</u> <sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры теории сооружений и технической механики, заведующий лабораторией непрерывного контроля технического состояния зданий и сооружений, тел.: +7 (951)919-09-19, e-mail: khazov.nngasu@mail.ru

Приводятся и анализируются результаты исследования распределения аэродинамических коэффициентов по поверхности большепролетного криволинейного покрытия проектируемого здания. Геометрическая форма покрытия здания не совпадает с предложенными в нормативных документах, вследствие чего для определения аэродинамических характеристик был выбран метод проведения эксперимента с макетом здания в аэродинамической трубе. Были получены изополя распределения аэродинамических коэффициентов по покрытию здания. Результаты эксперимента показывают, что на покрытие действует преимущественно отрицательное давление, значения коэффициентов распределяются крайне неравномерно в связи с наличием сложных изгибов его поверхности, а также имеет место взаимное влияние разновысотных частей здания друг на друга.

**Ключевые слова:** большепролетные покрытия, физический эксперимент, воздушный поток, аэродинамическая труба, аэродинамический коэффициент.

**Введение.** Строительство новых общественных зданий и сооружений играет огромную роль в развитии современного мира. Население крупных городов стремительно растет, в связи с чем повышается потребность в увеличении площадей возводимых зданий. Потому так важны сейчас большепролетные объекты, способные перекрыть просторные помещения без дополнительных опор в середине пролета. К большепролетным относят конструкции пролетом 60 метров и более. Такие конструкции применяются в строительстве спортивных сооружений, промышленных зданий, терминалов аэропортов и вокзалов, аквапарков и т.д.

Зачастую большепролетные здания имеют сложную геометрическую форму, что влечет за собой уникальный характер взаимодействия таких зданий с природными нагрузками, к которым, в частности, относится ветровая. Расчеты подобных конструкций требуют индивидуального подхода, учитывающего особое распределение аэродинамических коэффициентов по ограждающим поверхностям, так как руководствуясь стандартными методиками невозможно учесть все архитектурные особенности уникальных объектов [1]. Чтобы обеспечить прочность и надежность конструкций, безопасность нахождения людей в помещениях, способность воспринимать различные воздействия необходимо корректно подходить к вопросу сбора нагрузок на уникальные здания и сооружения. Это особенно

<sup>©</sup> Сатанов А. А., Симонов А. В., Хазов П. А., 2023

важно в наше время, так как современным проектировщикам нужно находить баланс между рациональным использованием материалов и обеспечением безопасной эксплуатации [1-3].

Исследования распределения аэродинамических коэффициентов на различные здания и сооружения – востребованное направление научных изысканий многих российских и зарубежных авторов, прибегающим в своих работах к использованию методов численного моделирования ветровых потоков и экспериментам [4-17]. Этот интерес объясняется тем, что стандартные методики, как было сказано ранее, не отражают в достаточной мере действительную картину распределения ветровой нагрузки по поверхности сложной кривизны, так как не учитывают влияние аэродинамической интерференции, завихренности, резонансных возбуждений и иных факторов с целью упрощения расчета. В частности, результаты многочисленных экспериментов, как правило, подчеркивают уникальность показателей аэродинамических характеристик большепролетных зданий и их очевидное отличие от стандартных.

Описание объекта исследования. Объектом исследования настоящей работы является проектируемое в научно-исследовательских целях здание (рис. 1). Здание в плане можно разделить на три объема: центральная трапециевидная часть с размерами оснований 90 и 18 метров и две симметрично расположенные к ней под углом 53 градуса боковые части прямоугольной формы размерами 72 х 60 метров. Большепролетное покрытие комплекса выполняется с применением криволинейных стропильных ферм пролетом 60 метров в каркасе боковых частей здания и с применением подстропильных и криволинейных стропильных ферм пролетом 40 – 60 метров в центральной части здания. Отметка верха конструкции покрытия: боковых частей – 22,050 м, центральной части – 28,600 м. Общие габариты здания по крайним его точкам: 206,8 х 91,8 метров.



Рис. 1. Главный фасад исследуемого здания

Принципиальная геометрическая схема здания не совпадает ни с одной из представленных в приложении В к действующим строительным нормам [1]. В этом случае аэродинамические коэффициенты покрытия устанавливаются на основании результатов математического или физического моделирования.

Описание эксперимента. Математическое моделирование, применимое к ветровой аэродинамике, основано на использовании численных схем решения трехмерных уравнений движения жидкости и газа с адекватными моделями турбулентности, реализованными в современных программно-вычислительных комплексах. Физическое моделирование подразумевает проведение испытания модели здания в аэродинамической установке с сохранением при этом аэродинамического подобия.

Аэродинамическая установка представляет собой трубу большого диаметра с продуваемым через неё воздухом, специально разработанную для исследования эффектов, возникающих при обтекании твердых тел воздушным потоком. Иными словами, она моделирует воздействие окружающей среды на испытуемое тело посредством создания равномерного потока в рабочей области.

При проведении модельных испытаний согласно приложению Ж [1] должно соблюдаться условие подобия числа Рейнольдса, соответствующего модели и исследуемому объекту.

Число Рейнольдса определяется соотношением:

$$R_e = \frac{V_0 l_y}{v},\tag{1}$$

где  $V_0$  – характерная средняя скорость ветра или потока в аэродинамической трубе  $(V_0^3)$ ;

 $l_y$  – размер сооружения или модели в направлении, перпендикулярном направлению скорости  $V_0$ ;

 $v \approx 1.45 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с – кинематическая вязкость воздуха.

Так как значение кинематической вязкости воздуха для потока в аэродинамической трубе практически не отличается от того же значения в естественных условиях, а  $V_0^{\exists}/V_0 \approx 1$ , то отношение чисел Рейнольдса, соответствующих модели и натурному сооружению, пропорционально линейному масштабу моделирования, т.е. условие подобия числа Рейнольдса при проведении аэродинамических испытании зданий и сооружений выполняется при соблюдении геометрического подобия модели и исследуемого объекта.

Следует заметить, что в большинстве задач гидрогазодинамики соблюдение геометрического подобия не является достаточным условием подобия аэродинамического. В частности, при исследовании воздушного обтекания гиперзвуковых объектов в воздухе или конструкций судов в жидкостях подобие соблюдается при гораздо более строгих условиях. Причиной этому является высокая скорость потока (в случае гиперзвукового обтекания) или значительная вязкость среды (в случае жидкостей при движении судов). Аэродинамика зданий и сооружений является своего рода "исключением" или частным случаем подобных задач.

С практической точки зрения основной особенностью аэродинамических испытаний в строительстве является то, что аэродинамические коэффициенты слабо зависят от числа Рейнольдса. Это обстоятельство позволяет с достаточной степенью надежности использовать результаты модельных испытаний при назначении ветровых нагрузок, действующих на реальные сооружения.



Рис. 2. Экспериментальная модель здания: а – схема сборки макета, б – фотография макета на подмакетнике с указанием рассматриваемых направлений ветра (крупный план)

Для проведения исследований в аэродинамической трубе был разработан макет в масштабе 1:500, выполненный методом послойного наплавления (FDM) их ABS-пластика на принтере для трехмерной печати (рис. 2). В характерных точках модели выполнена система дренажных отверстий для подключения гибких силиконовых трубок и последующего измерения давления ветрового потока на поверхность модели.

Эксперимент был проведен в аэродинамической трубе лаборатории кафедры отопления и вентиляция ННГАСУ (рис. 3). Исследуемый макет здания располагался внутри установки (рис. 4), где создавался равномерный поток воздуха скоростью 12 м/с. Измерение скорости ветрового потока производилось чашечным анемометром МС-13 У1.1 ГОСТ 6376-74, величины статического ветрового давления на поверхности модели – микроманометром ММН-240(5)-1,0 ТУ 25-01-816-79.

После преобразований показаний микроманометра вычислялись значения аэродинамических коэффициентов по формуле:

$$c_e = \frac{p_{\Pi 0 B}}{p_0},\tag{2}$$

где  $p_{\text{пов}}$  – динамическое давление, измеренное в изучаемой точке поверхности;

*p*<sub>0</sub> – динамическое давление, оказываемое ветровым потоком на вертикальную поверхность.

Для проведения эксперимента после анализа геометрической формы здания были выбраны несколько наиболее характерных направлений ветра, вектор каждого из которых перпендикулярен основным фасадам здания – «основаниям» трапециевидной части здания, боковым и торцевой стенам прямоугольных частей. Схема принятых направлений ветра представлена на рис. 5.



Рис. 3. Макет здания в аэродинамической трубе



Рис. 4. Схема экспериментальной установки:

 исследуемая модель объекта, 2 – рабочая область аэродинамической трубы, 3 – аэродинамическая труба с осевым вентилятором, 4 – подмакетник, 5 – направляющие ребра аэродинамической трубы, 6 – гибкая силиконовая трубка, 7 – микроманометр



Рис. 5. Направления ветровых потоков, выбранные для проведения экспериментов

**Результаты эксперимента.** На основании полученных по формуле (2) значений были построены изополя распределения аэродинамических коэффициентов по поверхности большепролетного покрытия здания для каждого из выбранных направлений ветра, представленные на рис. 6-10.

Анализ результатов эксперимента и выводы. Распределение аэродинамических коэффициентов по покрытию крайне неравномерно в связи с наличием сложных изгибов его поверхности и практически не поддается условному зонированию с целью упрощения дальнейшего расчета конструкций, что еще раз подчеркивает ограниченную применимость в данном конкретном случае стандартных схем приложения В к действующему своду правил.



Рис. 6. Изополя аэродинамических коэффициентов покрытия для направления ветра 1



**Рис.** 7. Изополя аэродинамических коэффициентов покрытия для направления ветра 2



для направления ветра 3



**Рис. 9.** Изополя аэродинамических коэффициентов покрытия для направления ветра 4



**Рис. 10.** Изополя аэродинамических коэффициентов покрытия для направления ветра 5

Аэродинамическое давление на поверхности покрытия преимущественно отрицательно, несмотря на его переменный уклон, т.е. наблюдается «отсос» воздушных масс с поверхности. При неблагоприятном сочетании нагрузок (наличие максимальной для данного ветрового района ветровой нагрузки и полное отсутствие снеговой в летний период) напряжения, возникающие в несущих конструкциях покрытия, в частности, поясах и раскосах ферм, могут заметно перераспределяться, что необходимо учитывать в дальнейших их расчетах по предельным состояниям.

Переменный уклон покрытия способствует снижению значения ветровой нагрузки при движении потока от наветренной стороны к подветренной, т.е. с наветренной стороны аэродинамические коэффициенты значительно больше по модулю. На некоторых подветренных участках покрытия при направлении ветра 2 и 3 имеет место «напор» ветровых потоков. Его возникновение также обусловливается характерными особенностями геометрической формы покрытия. Возникновение экстремальных отрицательных значений аэродинамических коэффициентов в центральной части покрытия также связано с наличием его «волнообразного» изгиба, что подтверждает характерный рисунок изополей.

Имеет место взаимное влияние разновысотных частей здания друг на друга. Так, при рассмотрении направлений ветра 2, 3 и 4 можно отметить, что из-за наличия более высокой центральной части здания одна из боковых частей (левая – при направлении ветра 2, правая – при направлениях ветра 3 и 4) подвержена ветровой нагрузке в меньшей степени, чем симметричная ей.

На основании предыдущего заключения можно сделать вывод о том, что при сборе ветровой нагрузки на подобные покрытия невозможно рассматривать каждый блок здания отдельно только на основании типовых схем, представленных в нормативных документах [1].

Так, при рассмотрении влияния ветровой нагрузки на боковой блок в осях 1-10/А-Е при направлении ветра 2 в соответствии с нормативным документом [1] следует применить схему В.1.3 для прямоугольных в плане зданий со сводчатыми покрытиями. При таком подходе схема распределения аэродинамических коэффициентов будет выглядеть следующим образом (рис. 11, слева). Однако согласно результатам эксперимента такое суждение будет ошибочным, т.к. из-за наличия и влияния более высокой центральной части здания участок «напора» на покрытии отсутствует, а значения отрицательных аэродинамических коэффициентов заметно меньше по модулю (рис. 11, справа). Иными словами, центральная, более высокая, часть здания препятствует движению воздушных потоков, рассеивает их, что приводит к возникновению разрежения и, как следствие, снижению модуля аэродинамических коэффициентов покрытия, расположенного с подветренной стороны.



**Рис. 11.** Схемы распределения аэродинамических коэффициентов по покрытию бокового блока здания в осях 1-10/А-Е при направлении ветра 2, построенные: слева – на основании рекомендаций СП 20.13330.2016, справа – по результатам эксперимента в аэродинамической трубе

Однако при направлении ветра 4 тот же боковой блок здания в осях 1-10/А-Е располагается с наветренной стороны, что делает его менее подверженным влиянию более высокого центрального блока. Полученная картина распределения аэродинамических коэффициентов по покрытию (рис. 12, справа) в этом случае в большей степени соответствует ожидаемой (рис. 12, слева), построенной на основании схемы В.1.3, представленной в нормативном документе [1]. Отсутствие на покрытии участка «напора» ветровых потоков с наветренной стороны здания и снижение модуля аэродинамических коэффициентов с подветренной стороны здесь объясняется более пологой формой покрытия, отличной от округлой, представленной на схеме В.1.3 [1], и наличием вертикального участка фасада пропорционально большей высоты.

Картина распределения аэродинамических коэффициентов по фасадам также не лишена своих особенностей. Так, при направлениях ветра 2 и 3 на фасадах в осях 20-29 и 1-10 соответственно, расположенных параллельно движению ветровых потоков, возникают участки положительных значений аэродинамических коэффициентов. Это связано с тем, что ветровые потоки при столкновении фасадом, перпендикулярным их движению (1-10 и 20-29 при направлениях ветра 2 и 3 соответственно) двигаются в обратном направлении и тем самым оказывают ветровое давление на участки фасада, изначально параллельные движению ветра.

Форма здания в плане также оказывает влияние на его аэродинамические характеристики. Особенно ярко это подтверждается при направлении ветра 5. В этом случае тупой угол, образуемый боковыми блоками здания, способствует рассеиванию ветровых потоков и возникновению разрежения с подветренной стороны здания, в результате чего значения аэродинамических коэффициентов на подветренных фасадах заметно ниже по модулю в сравнении с нормативными [1].



**Рис. 12.** Схемы распределения аэродинамических коэффициентов по покрытию бокового блока здания в осях 1-10/А-Е при направлении ветра 4, построенные: слева – на основании рекомендаций СП 20.13330.2016, справа – по результатам эксперимента в аэродинамической трубе

### Библиографический список

- 1. СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\* М.: Минстрой России, 2016. 80 с.
- 2. ГОСТ Р 56728-2015 Здания и сооружения. Методика определения ветровых нагрузок на ограждающие конструкции. М.: Стандартинформ, 2016. 12 с.
- 3. ТКП EN 1991-1-4-2009 Еврокод 1 Воздействия на конструкции. Часть 1-4. Общие воздействия. Ветровые воздействия.
- 4. Савицкий Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения. М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1972. 111 с.
- 5. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействия ветра на здания и сооружения. М.: Стройиздат, 1984. 360 с. (Перевод изд.: WindEffectsonStructures / E. Simiu, R. Scanlan (1978)).
- 6. Реттер Э.И. Архитектурно-строительная аэродинамика: монография. М.: Стройиздат, 1984. – 294 с.
- 7. Березин М.А., Катюшин В.В. Атлас аэродинамических характеристик строительных конструкций. Новосибирск: ООО Олден-полиграфия, 2003. 138 с.
- 8. Поддаева О.И., Кубенин А.С., Чурин П.С. Архитектурно-строительная аэродинамика: учеб. пособие. – Москва: НИУ МГСУ, 2015. – 88 с.
- 9. Барштейн М.Ф. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. М.: Стройиздат, 1978. – 216 с.
- Экспериментальное исследование распределения ветровой нагрузки на поверхность большепролетного здания / П.А. Хазов, А.В. Февральских, Б.Б. Лампси, Ю.Д. Щелокова, А.М. Анущенко // Приволжский научный журнал. – 2019. – № 2. – С. 9-16.
- Исследование обтекания воздушными потоками большепролетной поверхности численным и экспериментальным методами / А.М. Анущенко, В.И. Ерофеев, П.А. Хазов, А.А. Сатанов, А.В. Февральских // Приволжский научный журнал. – 2021. – № 1. – С. 9-18.
- 12. Сатанов А.А., Васин А.Д. Исследование обтекания потоками воздуха уникального высотного здания методом аэродинамического эксперимента // Приволжский научный журнал. 2021. № 3. С. 38-46.
- 13. Экспериментальное исследование распределения аэродинамических коэффициентов на высотное здание / А.А. Сатанов, М.Л. Поздеев, А.В. Симонов, А.П. Помазов, П.А. Хазов // Приволжский научный журнал. 2022. № 3. –С. 43-51.
- 14. Лампси Б.Б., Шилов С.С., Хазов П.А. Численное и физическое моделирование ветровых потоков на большепролетное покрытие // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. № 1. С. 21-31.
- 15. Трянина Н.Ю., Облетов Е.Н., Самохвалов И.А. Оценка ветрового воздействия на пояса башенной конструкции // Приволжский научный журнал. 2020. № 4(56). С. 64-70.
- 16. Трянина Н.Ю., Облетов Е.Н., Самохвалов И.А. Аэродинамическое воздействие на панельные антенны базовых станций // Приволжский научный журнал. 2022. № 1(61). С. 23-30.
- 17. Шилов С.С. Численное моделирование аэродинамики поверхностей двоякой кривизны различных геометрических параметров // Приволжский научный журнал. 2023. №1 (в печати).

## References

- 1. Set of Rules 20.13330.2016. Loads and impacts. Updated edition of SNiP 2.01.07-85\* M .: Ministry of Construction of Russia, 2016. 80 p.
- 2. Federal Standard 56728-2015. Buildings and structures. Method for determining wind loads on building envelopes. M.: Standartinform, 2016. 12 p.
- 3. TCP EN 1991-1-4-2009. Eurocode 1. Actions on structures. Part 1-4. General impacts. Wind Influences.
- 4. Savitsky G.A. Wind load on structures. M.: Ed. of Construc. Lit., 1972. 111 p.
- 5. Simiu E., Scanlan R. Influence of wind on buildings and structures. M.: Stroyizdat, 1984. 360 p. (Translated ed.: Wind Effects on Structures. 1978)).
- 6. Retter E.I. Architectural and construction aerodynamics: monograph. M.: Stroyizdat, 1984. 294 p.
- 7. Berezin M.A., Katyushin V.V. Atlas of aerodynamic characteristics of building structures. Novosibirsk: LLC Olden-polygraphy, 2003. 138 p.
- 8. Poddaeva O.I., Kubenin A.S., Churin P.S. Architectural and construction aerodynamics. Moscow: NRU MGSU, 2015. 88 p.
- 9. Barshtein M.F. Guidance for the calculation of buildings and structures for the action of the wind. M.: Stroyizdat, 1978. 216 p.
- 10. Khazov P.A., February A.V., Lampsy B.B., Shchelokova Yu.D., Anushchenko A.M. Experimental study of the distribution of wind load on the surface of a large-span building. Privolzhsk Scientific Journal. No. 2. 2019. Pp. 9-16.
- 11. Anushchenko A.M., Erofeev V.I., Khazov P.A., Satanov A.A., A.V. Fevralskikh. Investigation of airflow around a large-span surface by numerical and experimental methods. Privolzhsk Scientific Journal. No. 1. 2021. Pp. 9-18.
- 12. Satanov A.A., Vasin A.D. Investigation of air flow around a unique high-rise building by the method of aerodynamic experiment. Privolzhsk Scientific Journal. No. 3. 2021. Pp. 38-46.
- 13. Satanov A.A., Pozdeev M.L., Simonov A.V., Pomazov A.P., Khazov P.A. Experimental study of the distribution of aerodynamic coefficients for a high-rise building. Privolzhsk Scientific Journal. No. 3. 2022. Pp. 43-51.
- 14. Lampsi B.B., Shilov S.S., Khazov P.A. Numerical and physical modeling of wind flows on a large-span coating. Bulletin of MGSU. Vol. 17. No. 1. 2022. Pp. 21-31.

- 15. Tryanina N.Yu., Obletov E.N., Samokhvalov I.A. Evaluation of the wind impact on the belts of the tower structure. Privolzhsk Scientific Journal. No. 4(56). 2020. Pp. 64-70.
- 16. Tryanina N.Yu., Obletov E.N., Samokhvalov I.A. Aerodynamic impact on panel antennas of base stations. Privolzhsk Scientific Journal. No. 1(61). 2022. Pp. 23-30.
- 17. Shilov C.S. Numerical modeling of the aerodynamics of surfaces of double curvature of various geometric parameters. Privolzhsk Scientific Journal. No. 1 (in print). 2023.

## EXPERIMENTAL STUDY OF THE AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE LARGE-SPAN BUILDING

A.A. Satanov<sup>1</sup>, A.V. Simonov<sup>2</sup>, P.A. Khazov<sup>3</sup>

Institute for Physics of Microstructures – Branch of Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences<sup>1</sup>

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering»<sup>2,3</sup>

Russia, N. Novgorod

<sup>1</sup>Graduate student, Tel.: +7 (910)133-38-66, e-mail: <u>andrewsatanov@gmail.com</u> <sup>2</sup>Student of the Department of Civil Engineering, Tel.: +7 (920)293-13-51, e-mail: <u>simonov.alex.nn@gmail.com</u> <sup>3</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics, Head of the Laboratory for Continuous Monitoring of the Technical Condition of Buildings and Structures, Tel.: +7 (951)919-09-19, e-mail: khazov.nngasu@mail.ru

Abstract. The results of the study of the distribution of aerodynamic coefficients over the surface of a longspan curvilinear roofing of the designed building are given and analyzed. The geometric shape of the building roofing does not match with the ones presented in the regulatory documents, so the method of conducting an experiment with a building model in a wind tunnel was chosen to determine the aerodynamic characteristics. The isofields of the distribution of aerodynamic coefficients over the roofing of the building were obtained. The results of the experiment show that the roofing is mainly affected by negative pressure, the values of the coefficients are distributed extremely unevenly due to the presence of complex bends of its surface, and there is a mutual influence of parts of the building of different heights on each other.

Keywords: long-span roofing, physical experiment, air flow, wind tunnel, aerodynamic coefficient.

DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.008 УДК 624.014.27:628.145.5

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ГОФРИРОВАННЫХ ВОДОПРОПУСКНЫХ ТРУБ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

А. В. Черников<sup>1</sup>, В. А. Козлов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(920)2467077, e-mail: chernickov-andrei@yandex.ru <sup>2</sup>Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)276-40-06, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

В статье представлены выражения для определения внутренних напряжений в стенке металлических гофрированных труб через внутренние усилия. Алгоритм для определения внутренних усилий на базе полубезмоментной теории оболочек с учетом одностороннего двухпараметрического упругого основания был представлен авторами в более ранних публикациях. На базе этого алгоритма и с учетом дополнений по расчету напряжений представлен нелинейный алгоритм оценки несущей способности МГТ, реализованный с учетом рекомендаций ОДМ 218.2.001-2009. Также в статье приводятся примеры расчета внутренних напряжений МГТ и её несущей способности.

**Ключевые слова**: металлическая гофрированная труба, водопропускная труба, полубезмоментная теория оболочек, ортотропная оболочка, двухпараметрическое упругое основание, односторонние связи, упругий отпор грунта, модель Леонтьева-Власова, расчет несущей способности, нелинейный расчет

Введение. Для оценки напряженно-деформированного состояния (HДC) металлических гофрированных водопропускных труб (МГТ) ранее авторами была предложена расчетная математическая модель, подробно описанная в работах [8-10]. Она базируется на полубезмоментной теории оболочек [3] и дополнена моделью одностороннего однослойного двухпараметрического упругого основания Леонтьева-Власова [2]. Данная расчетная модель позволяет определять перемещения и внутренние усилия от действия заданной нагрузки. Важной особенностью является возможность определить значение изгибающего момента в поперечном сечении оболочки. Однако ранее не рассматривался вопрос определения предельных значений для внешней нагрузки и соответствующих ей предельных значений внутренних усилий и напряжений. А между тем это является важным и необходимым этапом в процессе проектирования, позволяющим оценить несущую способность МГТ. В данной статье предлагается алгоритм нелинейного расчета несущей способности МГТ на базе описанной выше математической модели.

**1. Основные расчетные положения.** В первую очередь дадим краткую характеристику расчетной модели, описанной в работах [8–10]. Расчетный математический аппарат базируется на полубезмоментной теории оболочек. Принятые гипотезы: гипотеза плоских нормалей (Кирхгофа–Лява); оболочка – тонкая, длинная, конструктивно ортотропная; характер изменения всех характерных функций (перемещений, напряжений,

<sup>©</sup> Черников А. В., Козлов В. А., 2023

усилий) в продольном направлении существенно более плавный, чем в окружном направлении [7]; модель упругого основания – Леонтьева–Власова [2]. Входные данные – основные геометрические, физические и механические параметры МГТ, характеристики грунтового основания, величина действующей нагрузки, координаты расчетного сечения. Выходные данные – перемещения и основные внутренние усилия, возникающие в расчетном сечении МГТ.

Для оценки несущей способности следует определиться с критериями, которые будут характеризовать наступление предельного состояния. Основным действующим документом, регламентирующим проектирование и строительство МГТ является ОДМ 218.2.001-2009 «Рекомендации по проектированию и строительству водопропускных сооружений из металлических гофрированных структур на автомобильных дорогах общего пользования с учетом региональных условий».

Для расчета по первому предельному состоянию в п. 6.2.6 дается ограничение на возникновение пластических деформаций в материале МГТ. А в качестве допустимых напряжений [ $\sigma$ ] принимается предел текучести  $\sigma_y$  материала МГТ, умноженный на коэффициент  $\phi = 0.8$ . При этом стоит заметить, что сравнивать с допустимыми напряжениями предлагается нормальные сжимающие напряжения. Однако, как было неоднократно доказано как в отечественных [11], так и в зарубежных [12 – 14] публикациях, в сечении МГТ наряду с сжимающими усилиями возникают также изгибающие моменты. В связи с этим для оценки несущей способности рекомендуется использовать не нормальные сжимающие, а эквивалентные напряжения.

Для расчета по второму предельному состоянию в п. 6.1.4 даются следующие ограничения по перемещениям. Предельные относительные изменения вертикального и горизонтального диаметров не должны превышать 5% при диаметре МГТ до 3 м, и 3% – при диаметре МГТ более 3 м.

Хотелось бы также отметить, что проектирование и строительство спиральновитых гофрированных водопропускных труб регламентируется металлических  $(CBM\Gamma T)$ собственным нормативным документом ОДМ 218.2.087-2017 «Рекоменлации по проектированию и строительству водопропускных сооружений из спиральновитых металлических гофрированных труб». Но в разделе расчета и проектирования он полностью ссылается на ОДМ 218.2.001-2009. Это позволяет использовать описанные выше предельные значения напряжений и перемещений при расчете как сборных гофрированных труб (МГТ). так и спиральновитых (СВМГТ).

**2.** Определение внутренних напряжений. Для дальнейшего расчета несущей способности следует дополнить математическую модель расчетом внутренних напряжений. Для этого запишем выражения для продольных и окружных напряжений, описанные через внутренние усилия. В общем виде для изотропной оболочки они имеют вид [1]:

$$\sigma_1(\beta) = \frac{N_1(\beta)}{h} + \frac{12 \cdot M_1(\beta)}{h^3} z; \ \sigma_2(\beta) = \frac{N_2(\beta)}{h} + \frac{12 \cdot M_2(\beta)}{h^3} z,$$

где  $\sigma_1(\beta)$ ,  $\sigma_2(\beta)$  – продольные и окружные напряжения соответственно;  $N_1(\beta)$ ,  $N_2(\beta)$ ,  $M_1(\beta)$ ,  $M_2(\beta)$  – сжимающие усилия и изгибающие моменты в продольном и окружном направлениях соответственно; h – толщина оболочки; z – координата расчетной точки по толщине оболочки.

Поскольку максимальные напряжения возникают на внутренней и внешней гранях оболочки при  $z = \pm h/2$ , перепишем выражения для максимальных значений продольных и окружных напряжений в следующем виде:

$$\sigma_1(\beta) = \frac{N_1(\beta)}{h} + \frac{6 \cdot M_1(\beta)}{h^2}; \ \sigma_2(\beta) = \frac{N_2(\beta)}{h} + \frac{6 \cdot M_2(\beta)}{h^2}.$$

Теперь полученные выражения необходимо адаптировать расчетной к математической модели с учетом принятых ранее гипотез. Расчетная модель базируется на полубезмоментной теории оболочек, особенностью которой является учет моментной составляющей только в поперечном направлении. В продольном направлении характер изменения всех характерных функций (в том числе нагрузки) принимается существенно более плавным, что позволяет не учитывать моментную составляющую в продольном направлении:  $M_1(\beta) = 0$ . Также МГТ рассматривается как конструктивно ортотропная оболочка, поэтому при вычислении окружных напряжений следует вместо номинальной толщины оболочки *h* принять приведенную толщину *h*. Тогда окончательно можно записать выражения для максимальных значений продольных и окружных напряжений:

$$\sigma_1(\beta) = \frac{N_1(\beta)}{h}; \ \sigma_2(\beta) = \frac{N_2(\beta)}{\overline{h}} + \frac{6 \cdot M_2(\beta)}{\overline{h}^2}.$$
(1)

Кроме того, в оболочке возникают радиальные напряжения, однако они настолько малы, что ими можно пренебречь при расчете на прочность [7]

$$\sigma_3(\beta) = 0. \tag{2}$$

Для определения эквивалентных напряжений воспользуемся четвертой гипотезой прочности Губера-Мизеса-Генки (энергетическая теория):

$$\sigma_{q}(\beta) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \left( \sigma_{1}(\beta) - \sigma_{2}(\beta) \right)^{2} + \left( \sigma_{2}(\beta) - \sigma_{3}(\beta) \right)^{2} + \left( \sigma_{3}(\beta) - \sigma_{1}(\beta) \right)^{2} \right], \tag{3}$$

где  $\sigma_{a}(\beta)$  – эквивалентные напряжения.

3. Пример расчета напряжений. Для качественной и количественной оценки напряженного состояния рассмотрим расчетный пример. Исходные данные представлены в табл. 1, а результаты расчета в табл. 2 и на рис. 1.

Таблица І	
-----------	--

R	h	L	$J_{{ m ro} \phi { m p}}$	E	μ	Н	${\gamma}_{ m rp}$	$E_{ m rp}$	$\mu_{ m rp}$	$h_{ m rp}$
М	М	М	м <sup>4</sup> /м	кПа	-	М	кH/м <sup>3</sup>	кПа	-	М
0,6	0,002	14,0	$3,2 \times 10^{-7}$	2,1×10 <sup>8</sup>	0,3	5,0	19,0	$15,0 \times 10^{3}$	0,27	2R
гле $H$ и $\gamma$ — высота насыпи и улельный вес грунта засыпки соответственно										

дельный вес грунта засыпки соответственно.



Рис. 1. Эпюра эквивалентных напряжений в расчетном сечении МГТ

Таблица 2

	Ед. изм.	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{4}\pi$	$\beta = \frac{1}{2}\pi$	$\beta = \frac{3}{4}\pi$	$\beta = \pi$
$N_1(\beta)$	(кН/м)	3,033	-0,00043	-0,370	0,00043	0,369
$N_2(\beta)$	(кН/м)	10,261	-0,737	12,103	-1,610	-9,138
$M_2(\beta)$	(кН·м)/м	-3,540	0,243	0,454	-0,155	-0,261
$\sigma_1(eta)$	кПа	1516,503	-0,214	-185,020	0,214	184,717
$\sigma_2(eta)$	кПа	-85990,515	5899,915	11887,145	-3895,778	-6964,682
$\sigma_{\mathfrak{q}}(eta)$	кПа	86758,708	5900,022	11980,727	3895,885	7058,853

Наиболее напряженная точка сечения находится в безотпорной замковой части МГТ ( $\beta = 0$ ). Значения эквивалентных напряжений здесь на порядок выше, чем в других расчетных точках. Это заключение хорошо согласуется с опытными данными и результатами наблюдений за эксплуатируемыми МГТ [13] и объясняется тем фактом, что в отпорной части сечение водопропускной трубы работает совместно с грунтовой обоймой, которая воспринимает часть внутренних усилий.

Также заметим, что напряжения от внутренних усилий в поперечном направлении составляют до 99% от эквивалентных, что согласуется с гипотезой о значительно более плавном характере изменения всех характерных функций в продольном направлении (в том числе и напряжений).

**4.** Алгоритм нелинейного расчета несущей способности. Нелинейный алгоритм расчета несущей способности строится на основе описанной выше математической модели для оценки НДС. В качестве переменной принимается величина действующей нагрузки q. Для каждого значения нагрузки производится вычисление перемещений  $(u(\beta), v(\beta), w(\beta))$ , внутренних усилий  $(N_1(\beta), N_2(\beta), M_2(\beta))$  и напряжений  $(\sigma_1(\beta), \sigma_2(\beta), \sigma_q(\beta))$  в расчетном сечении оболочки.

Предварительным условием для остановки расчета является наступление первого предельного состояния, когда эквивалентные напряжения  $\sigma_q(\beta)$  в наиболее опасной точке сечения достигают предельно допустимых напряжений [ $\sigma$ ], определяемых в соответствии с п. 6.2.6 ОДМ 218.2.001-2009. Как было показано в п. 3 настоящей статьи, наиболее опасной точкой поперечного сечения, где фиксируются наибольшие значения эквивалентных напряжений, является замковая часть МГТ в безотпорной зоне. После этого полученные в результате расчета перемещения проверяются по второму предельному состоянию в соответствии с п. 6.1.4 ОДМ 218.2.001-2009. В случае превышения предельных значений производится перерасчет предельной нагрузки.

Для определения предельной нагрузки в алгоритме используется метод дихотомии (однопараметрическая оптимизация поиска). Для этого задается минимальное и максимальное (с достаточным запасом) значения действующей нагрузки –  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. На каждом шаге процесса поиска вычисляется расчетная нагрузка как середина заданного интервала  $q = (q_1 + q_2)/2$ . Далее вычисляются перемещения, внутренние усилия и напряжения, и в зависимости от результата расчета происходит корректировка границ принятого интервала, а значение q устанавливается в качестве верхней или нижней границы. Дальнейшее деление интервала продолжается, пока расчетный параметр не достигнет заданной точности расчета  $\varepsilon$ . В качестве расчетного параметра выступают: для

первого предельного состояния – напряжения, для второго – перемещения. Принципиальная блок-схема расчета представлена на рис. 2.



Рис. 2. Блок-схема нелинейного расчета несущей способности

Данный метод позволяет значительно сократить количество итераций в процессе определения предельной нагрузки по сравнению с методом последовательного перебора, а также повысить точность расчета без ущерба для скорости вычислений.

Также можно определить предварительную максимальную высоту насыпи. Однако этот параметр требует дальнейших уточнений, так как здесь принимаются следующие допущения: не учитывается вес дорожной одежды и подвижной нагрузки, не учитывается эффект сводообразования [6], а также не учитывается влияние жесткости трубопровода на интенсивность вертикального давления грунта [5, 6].

$$H_{\rm lim} = q / \gamma$$
.

В рекомендациях ОДМ 218.2.001-2009 приводится расчет предельной нагрузки и предельных вертикальных перемещений для МГТ. Имеет смысл провести сравнительный расчет несущей способности МГТ по представленным в рекомендациях выражениям и по предлагаемому алгоритму.

**5. Пример оценки несущей способности.** Расчет производился в соответствии с прил. В ОДМ 218.2.001-2009, а также по предложенному нелинейному алгоритму. Исходные данные были приняты из примера в п. 3. При этом варьировался диаметр оболочки для оценки результатов расчета в различных условиях. Численные результаты приведены в табл. 3.

Тоблино 2

Таблица 5								
<i>D</i> , мм		ОДМ 218.	2.001-2009		Нелинейный алгоритм			
	$q_{ m lim}$ , кПа	w <sub>lim</sub> , %	$w_{ m lim}$ , MM	$H_{ m lim}$ , м	$q_{ m lim}$ , кПа	$w_{ m lim}$ , %	$w_{ m lim}$ , MM	$H_{ m lim}$ , м
500	396.581	1.101	5.505	20.9	2072.83	1.101	5.506	109.1
800	221.193	2.146	17.164	11.6	793.575	1.421	11.365	41.8
1000	169.842	2.620	26.199	8.9	501.884	1.560	15.595	26.4
1200	137.584	2.884	34.611	7.2	339.447	1.720	20.638	17.9
1500	106.906	3.024	45.362	5.6	214.483	2.095	31.420	11.3
1800	87.333	3.017	54.302	4.6	156.531	2.604	46.870	8.2
2000	77.809	2.980	59.598	4.1	134.214	2.962	59.242	7.1
2500	61.109	2.861	71.524	3.2	100.18	3.529	88.236	5.3
3000	50.292	2.749	82.467	2.6	72.555	3	90	3.8

Сравнивая полученные результаты можно отметить следующее. Предельные значения распределенной нагрузки  $q_{\rm lim}$  для МГТ небольшого диаметра, определенные по рекомендациям и по предложенному алгоритму, значительно расходятся. Однако с увеличением диаметра МГТ наблюдается резкое увеличение сходимости полученных результатов, это хорошо видно на графике (рис. 3).

При этом и по рекомендациям, и по предложенному алгоритму для всех расчетных ситуаций получены достаточно близкие значения для величины предельного уменьшения вертикального диаметра  $w_{\text{lim}}$  (рис. 4).

Также для большей наглядности была определена предварительная максимальная высота насыпи  $H_{\rm lim}$ .

В целом, нелинейный алгоритм предоставляет больший запас по несущей способности для конструкции МГТ. Это подтверждает озвученный в работе [4] тезис, что отечественные нормы выдвигают достаточно строгие ограничения на применение МГТ

диаметром до 3 м, что связывается с использованием ряда эмпирических коэффициентов, не затрагивающих напрямую прочностные характеристики металла трубы. Однако для труб малого диаметра (до 1 м) по нелинейному алгоритму получен чрезвычайно большой запас несущей способности. В связи с этим требуются проверка, верификация и при необходимости корректировка нелинейного алгоритма в соответствии с опытными данными или данными конечно-элементного расчета.



Рис. 3. График зависимости предельной нагрузки  $q_{\rm lim}$  от диаметра МГТ



**Рис. 4**. График зависимости предельного уменьшения вертикального диаметра *W*<sub>lim</sub> от диаметра МГТ

Заключение. В настоящей статье авторами предложен нелинейный алгоритм оценки несущей способности металлической гофрированной водопропускной трубы (МГТ). Для этого была использована методика расчета перемещений и внутренних усилий МГТ, выполненная на базе полубезмоментной теории оболочек с учетом одностороннего двухпараметрического упругого основания [8–10]. Методика была дополнена расчетом внутренних напряжений. А условия, регламентирующие наступление предельного состояния для МГТ, были приняты в соответствии с действующими рекомендациями ОДМ 218.2.001-2009.

Полученный нелинейный алгоритм был реализован в виде программы в ПК MathCad. С использованием данного алгоритма была проведена серия расчетов предельной нагрузки и предельно допустимых перемещений для выборки МГТ с различным диаметром. Сопоставляя полученные значения с результатами нормативного расчета несущей

способности, можно отметить, что нелинейный алгоритм предоставляет больший запас по несущей способности. При этом для величины предельного уменьшения вертикального диаметра получены достаточно близкие значения по обоим методикам.

## Библиографический список

- 1. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973. 456 с.
- 2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н.. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 491 с.
- 3. Власов В.З. Избранные труды. Т. 1. Общая теория оболочек. М.: Издательство академии наук СССР, 1962. 528 с.
- 4. Жинкин А. Проблемы и перспективы типового проектирования металлических гофрированных конструкций // Транспорт Российской Федерации. 2006. Вып. 5. С. 53-54.
- 5. Металлические гофрированные трубы под насыпями / Н.М. Колоколов, О.А. Янковский, К.Б. Щербина, С.Э. Черняховская. М.: Транспорт, 1973. 120 с.
- 6. Лисов В. М. Дорожные водопропускные трубы. М.: Информ.-изд. центр «ТИМР», 1998. 140 с.
- 7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпрогиз, 1951. 344 с.
- Черников А.В., Козлов В.А. Определение напряженно-деформированного состояния гофрированных водопропускных труб с эксплуатационными дефектами на основе полубезмоментной теории оболочек // Строительная механика и конструкции. 2021. № 2 (29). С. 12-28.
- 9. Черников А.В., Козлов В.А. Учет одностороннего упругого основания при расчете гофрированных водопропускных труб по полубезмоментной теории оболочек // Строительная механика и конструкции. 2022. № 2 (33). С. 87-97.
- 10. Черников А.В., Козлов В.А., Рябова О.В. Анализ и применение односторонних двухпараметрических моделей упругого основания к расчету гофрированных водопропускных труб // Научный журнал строительства и архитектуры. 2022. № 4 (68). С. 105-120.
- 11. Шапиро Д.М., Тютин А.П. Численный упругопластический расчет дорожных водопропускных труб // Строительная механика и конструкции. 2015. –№ 2 (11). С. 66-71.
- 12. Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Buried Corrugated Steel Culvert Failure Mechanisms Due to Environmental Deteriorations // International Conference on Sustainable Infrastructure. 2019. Pp. 29-40.
- Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Numerical Performance Assessment of Buried Corrugated Metal Culvert Subject to Service Load Conditions // Canadian Journal of Civil Engineering. – 2021. – Vol. 48. – №2. – Pp. 99-114.
- Mai V.T., Hoult N.A., Moore I.D. Effect of Deterioration on the Performance of Corrugated Steel Culverts // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 2014. – Vol. 140. – №32. – 11 p.

### References

- 1. Boyarshinov S.V. Fundamentals of Structural Mechanics of Machines. M.: Mashinostroenie, 1973. 456 p.
- 2. Vlasov V.Z., Leontiev N.N. Beams, Plates and Shells on an Elastic Foundation. M.: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1960. 491 p.

- 3. Vlasov V.Z. Selected Works. Vol. 1. General Theory of Shells. M.: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1962. 528 p.
- 4. Zhinkin A. Problems and prospects of typical design of metal corrugated structures. Transport of the Russian Federation. Issue. 5. 2006. Pp. 53-54.
- 5. Kolokolov N.M., Yankovsky O.A., Shcherbina K.B., Chernyakhovskaya S.E. Metallic Corrugated Pipes Under Embankments. M.: Transport, 1973. 120 p.
- 6. Lisov V. M. Road Culverts. M.: Center "TIMR", 1998. 140 p.
- 7. Novozhilov V.V. Theory of Thin Shells. L.: Sudprogiz, 1951. 344 p.
- 8. Chernikov A.V., Kozlov V.A. Determination of the stress-strain state of corrugated culverts with operational defects based on the semi-momentless theory of shells. Structural Mechanics and Constructions. No. 2(29). 2021. Pp. 12-28.
- 9. Chernikov A.V., Kozlov V.A. Accounting for a one-sided elastic foundation in the calculation of corrugated culverts according to the semi-momentless theory of shells. Structural Mechanics and Constructions. No. 2(33). 2022. Pp. 87-97.
- 10. Chernikov A.V., Kozlov V.A., Ryabova O.V. Analysis and application of one-sided twoparametric models of an elastic foundation to the calculation of corrugated culverts. Scientific Journal of Construction and Architecture. No. 4(68). 2022. Pp. 105-120.
- 11. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Numerical elastoplastic calculation of road culverts. Structural Mechanics and Constructions. No. 2(11). 2015. Pp. 66-71.
- Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Buried corrugated steel culvert failure mechanisms due to environmental deteriorations. International Conference on Sustainable Infrastructure. 2019. Pp. 29-40.
- 13. Nakhostin E., Kenny S., Sivatayalan S. Numerical performance assessment of buried corrugated metal culvert subject to service load conditions. Canadian Journal of Civil Engineering. Vol. 48. No. 2. 2021. Pp. 99-114.
- Mai V.T., Hoult N.A., Moore I.D. Effect of deterioration on the performance of corrugated steel culverts. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. Vol. 140. No. 32. 2014. 11 p.

## NONLINEAR ALGORITHM FOR BEARING CAPACITY EVALUATION CORRUGATED CULVER PIPES BASED ON THE THEORY OF SHELLS

A. V. Chernikov<sup>1</sup>, V. A. Kozlov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University Russia, Voronezh

<sup>2</sup>Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2764006, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

The article presents expressions for determining internal stresses in the wall of metal corrugated pipes through internal forces. An algorithm for determining internal forces based on the semi-momentum theory of shells, taking into account a one-sided two-parameter elastic foundation, was presented by the authors in earlier publications. On the basis of this algorithm and taking into account the additions to the calculation of stresses, a nonlinear algorithm for estimating the bearing capacity of the MGT is presented, implemented taking into account the recommendations of ODM 218.2.001-2009. The article also provides examples of calculating the internal stresses of the MGT and its bearing capacity.

**Keywords:** metal corrugated pipe, culvert, semi-momentum theory of shells, orthotropic shell, two-parameter elastic foundation, unilateral ties, elastic soil pressure, Leontiev-Vlasov model, calculation of bearing capacity, nonlinear calculation.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(920)2467077, e-mail: chernickov-andrei@yandex.ru

## ЗАРУБЕЖНЫЙ ОПЫТ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И СТРОИТЕЛЬСТВА ГОФРИРОВАННЫХ ВОДОПРОПУСКНЫХ ТРУБ

А. В. Черников<sup>1</sup>, В. А. Козлов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(920)2467077, e-mail: chernickov-andrei@yandex.ru <sup>2</sup>Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)276-40-06, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

В статье представлен зарубежный опыт проектирования и строительства гофрированных водопропускных труб, рассмотрены основные этапы их развития и проанализированы применяемые расчетные методы. Выделены основные тенденции в данном направлении и обозначены дальнейшие пути развития МГТ в зарубежной практике.

Ключевые слова: металлическая гофрированная труба (МГТ), металлические гофрированные конструкции (МГК), водопропускная труба, исторический обзор

**Введение.** В работе [2] представлен анализ отечественного опыта проектирования, строительства и эксплуатации МГТ. Можно отметить, что достижения наших ученых в этом направлении были впечатляющими и передовыми для своего времени. Однако положительной историю развития МГТ в России назвать нельзя. За более чем 140 лет периоды бурного и активного развития сменялись длительными периодами застоя вплоть до запрета использования и забвения в инженерной практике. На выходе, будучи пионерами в создании и производстве гофрированных водопропускных труб, на данный момент мы сильно отстаём в этой области. И, напротив, зарубежный опыт использования МГТ хоть и насчитывает меньший временной период, зато отличается своей последовательностью, всесторонним развитием и неизменным расширением области применения. Поэтому в рамках исследования металлических гофрированных водопропускных труб важно использовать положительный опыт, накопленный за рубежом.

Американский опыт. В 1960-е годы прошлого века в США начинается массовое строительство общенациональной дорожной которая представляет собой сети, систему автомагистралей, объединяющей между собой все штаты. Идею создания такой сети предложил лично президент Д. Эйзенхауэр после окончания Второй мировой войны [23]. В рамках этой работы на автомагистралях были устроены миллионы водопропускных труб для пропуска небольших рек и ручьев, обеспечения дренажа различных водных объектов, а также в мелиоративных целях. И значительное место здесь занимают именно конструкции из гофрированной стали (МГК). Ранее они уже применялись при строительстве железных дорог, частности, при строительстве в пути Калаверского филиала железнодорожного Южной железной Тихоокеанской дороги была уложена водопропускная труба диаметром 2,44 м, длиной 30,5 м (рис.



Рис. 1. МГТ на ж.д. пути Южной Тихоокеанской железной дороги [29]

<sup>©</sup> Черников А. В., Козлов В. А., 2023

1) [29]. Также МГК находили применение и при строительстве путепроводов. Так, например, при постройке железнодорожной ветки к угольному месторождению у Корлинвиля была уложена труба длиной 29 м эллиптического сечения, с размерами 8,9 м и 5,85 м по большей и меньшей осям соответственно (рис. 2). Она предназначалась для пропуска двухполосной автомобильной дороги [1].



**Рис. 2.** Путепровод из МГК для пропуска двухполосной автомобильной дороги при строительстве железнодорожной ветки к угольному месторождению, Корлинвиль, США [1]

В этот период металлические водопропускные трубы проектировались в основном с использованием таблиц глубины заложения, которые основывались на контроле сжимающей силы в стенке трубы [21] и величины прогиба, определяемой по формуле М. Спенглера [29], модифицированной Р. Уоткинсом [32], полученной ещё в 1920-х годах. А качеству обратной засыпки внимание практически не уделялось, в связи с чем преимущество уплотнения обратной засыпки вокруг водопропускных труб не было полностью реализовано.

Дальнейшее развитие в этом направлении привело к тому, что в 1970-х годах были достигнуты значительные успехи в области расчета и проектирования подземных водопропускных труб. Можно отметить первую программу расчета для ЭВМ для моделирования взаимодействия водопропускной трубы и грунта засыпки [10], а также совершенствование расчетных моделей грунта. А наиболее значительным достижением в этот период стала разработка большепролетных сборных гофрированных металлических водопропускных труб с длиной пролета более 12 м.

В 1980-х одним из достижений в проектировании водопропускных труб была разработка Т. Селигом параметров грунта для моделирования нелинейного упругого поведения уплотненных материалов обратной засыпки [28]. При этом были выделены три основные группы грунтов: крупнозернистые грунты с ограниченным содержанием мелких частиц (SW или Sn); крупнозернистые грунты с мелкими частицами / мелкозернистые грунты с песком или гравием (ML или Si); мелкозернистые грунты (CL или cl). И несмотря на не столь широкую классификацию, данные параметры легли в основу всех расчетных алгоритмов для проектирования водопропускных труб по стандарту AASHTO (Американская ассоциация государственных служащих автомобильных дорог и транспорта) [3].

В 1990-х всё больше внимания начинает уделяться пластиковым трубам, которые впервые появились ещё в 1970-х, а также этот период стал плодотворным для развития железобетонных водопропускных труб. В отношении МТГ работа была связана с разработкой более простых концепций для решения проблем проектирования.

С начала века продолжились разработки для всех типов труб. Основные достижения в области проектирования обеспечивались частично за счет разработки новых конструкций, а частично за счет расширения знаний о свойствах материалов. В отрасли производства

металлических гофрированных труб были разработаны и внедрены профили с глубоким гофрированием (150 мм и 230 мм). Они позволили перекрывать значительные пролёты, избегая при этом проблем с большими прогибами оболочки трубы.

Также в области расчета МГТ стоит отметить развитие метода конечных элементов (МКЭ) [17]. Этот мощный инструмент снискал большую популярность у инженеровпроектировщиков. В первую очередь за свою универсальность. Метод позволяет моделировать МГТ сложной формы, учитывать постепенную засыпку грунта, а также зоны переменного грунта. Однако подготовка и отладка сетки может занимать достаточно много времени, также расчетчик должен иметь хорошую подготовку и опыт работы в конечноэлементных комплексах, чтобы не допустить ошибок. Первая работа по методу конечных элементов в двумерной постановке была написана К. Брауном [8] ещё в 1967 г., а в трехмерной постановке – Дж. Олгудом и С. Такахаши [4] в 1972 г. С тех пор развитие в этом направлении неуклонно росло. Анализ методом конечных элементов сыграл важную роль в разработке новых типов конструкций для водопропускных труб, например, при разработке композитных труб анализ МКЭ был использован для оптимизации геометрии поперечного сечения пластика и стали [17]. Также предпринимаются попытки изучения с помощью МКЭ эксплуатационных дефектов [20, 24].

**Европейский опыт.** Первые гофрированные водопропускные трубы на территории Европы начали производиться на металлургическом заводе в Прушкове под Варшавой в 1900 г., которая на тот момент была частью России. Стоит заметить, что производство и использование гофрированных труб в России велось с 1875 г. После этого на долгое время использование этих конструкций было приостановлено пока после Второй мировой войны выпуск МГТ не был налажен на совместном предприятии Armco и Thyssen. При этом достаточно долго проектирование МГТ в Европе велось на основе американских нормативных стандартов. И лишь в 1970 г. немецкая железная дорога проводит серию полевых испытаний, по результатам которых выпускает собственный нормативный документ [6]. Одно из таких испытаний можно увидеть на рис. 3, здесь показано испытание арочной гофрированной трубы пролетом 6,27 м, высотой 4,03 м с толщиной листа 4,75 мм, расчетная нагрузка 1,079 тонн [18].



Рис. 3. Испытание арочной гофрирований трубы, Германия, 1970 г.[18]

Экспериментальные исследования являлись одними из самых надежных способов оценить поведение конструкции. В отношении гофрированных водопропускных труб это было особенно важно, поскольку достоверных расчетных моделей для проектирования и оценки НДС всё ещё не было. Здесь можно отметить вклад Швеции в развитие МГТ, где с 1983 по 2006 гг. было проведено множество полномасштабных испытаний гофрированных водопропускных труб. Вот некоторые из них: испытание сводчатой трубы с пролетом 6,1 м в Никопинге в 1983 г. [26], сводчатой трубы с пролетом 6,0 м в Энкопинге в 1987 г. [26], коробчатой водопропускной трубы с пролетом 12,0 м в Гимане в 2002 г., сводчатой трубы с пролетом 11,1 м в Скиварпсане в 2003 г. [11, 12], коробчатой водопропускной трубы с пролетом 8,0 м в Джарпасе в 2005 г., коробчатой водопропускной трубы с пролетом 14,2 м в Джарпасе в 2006 г. Результатом активной исследовательской деятельности стало появление Швеции собственного метода проектирования территории металлических на водопропускных труб и прочих подземных сооружений из МГК [25]. Авторами разработанной методики являются Х. Сундквист и Л. Петтерсон из Королевского технологического института. Методика учитывала важные особенности конструкции, например, метод взаимодействия металлической конструкции с грунтом [13] и эффект сводообразования (позитивный и негативный арочный эффект, описанный Дж. Васлестадом) [31]. Также в ней были учтены работа К. Клёппеля и Д. Глока по расчету потери устойчивости [18] и работа Л. Андреассона по определению модуля упругости грунта для фрикционных материалов [5]. Методика позволяет рассчитывать круглые и арочные сооружения из МГК на различную нагрузку и определять сжимающие усилия и изгибающие моменты. Возвращаясь к экспериментальным исследованиям, стоит упомянуть серию полномасштабных испытаний МГТ, проведенных в Польше с 1997 по 1999 гг. [30, 33]. Одной из важных проблем при эксплуатации МГТ является коррозия. Для исследования этой проблемы были проведены тесты и полномасштабные испытания водопропускных труб в этом направлении [27, 9]. Это помогло разработать эффективные методы для борьбы с коррозией. На данный момент для защиты элементов МГТ от коррозии применяется цинкование. Требования к защите зависят от типа МГТ. Защита спиральновитых фабричных труб регулируется стандартом EN 10346. Где для обычных условий эксплуатации достаточно покрытия в 600 г/м кв. цинка, а для более агрессивной среды применяется покрытие в 1000 г/м кв. в сочетании с полимерным слоем толщиной 300 мкм. Защита элементов сборных гофрированных труб регулируется стандартом EN 1461. Согласно которому стальные элементы должны быть покрыты слоем цинка толщиной от 50 до 85 мкм и эпоксидной смолой толщиной 200-400 мкм. Однако, как показывает практика, этого не всегда бывает достаточно и проблемы с коррозией во время эксплуатации МГТ до сих пор продолжают возникать, поэтому исследования и поиск более совершенных систем защиты продолжается и сейчас.

Одним из важнейших направлений в области расчетов в настоящее время в Европе также является развитие метода конечных элементов применительно к расчету гофрированных труб. МКЭ применяется как в процессе непосредственного проектирования сооружений, так и в исследовательской деятельности. Например, в работе [19] на базе МКЭ изучались особенности поведения конструкции путепровода из МГК арочного сечения во время прохождения над ним железнодорожного локомотива. А в работе [7] с помощью метода конечных элементов был детально смоделирован и проанализирован процесс обратной засыпки.

**Выводы.** В статье произведен краткий обзор зарубежного опыта использования МГТ, рассмотрены основные этапы их развития и применяемые расчетные методы. Проанализированы американский и европейский подходы в проектировании МГТ. Сравнивая их между собой, можно отметить определённые различия. Например, американские методики расчета больше опираются на эмпирические данные и прикладные

методы расчета. В частности, модуль реакции для различных грунтов (аналог коэффициента постели) был определен обратным расчетом по результатам измерения прогиба большого количества полевых водопропускных труб [15]. В свою очередь европейские методики, хоть и брали начало с американских стандартов, всё же пошли своим путем развития. Их отличает большая академичность и глубина анализа. В этом они ближе к нашим отечественным методикам. Расчетные модели более сложные, детальные и затрагивают много критичных особенностей конструкции МГТ, однако для прикладного использования и практического применения они подходят несколько меньше.

Несмотря на различия в подходах, и в Европе, и на территории США, опыт применения МГТ был положительным и данный тип конструкций очень хорошо зарекомендовал себя. Кстати, именно положительный западный опыт эксплуатации МГТ стал одной из причин возобновления программы по развитию этого направления в СССР. Сравнивая отечественный и зарубежный опыт можно выделить допущенные у нас ошибки. Во-первых, при отсутствии надёжных расчетных моделей и достоверных экспериментальных данных в производство были отправлены трубы с недостаточной жесткостью поперечного сечения и толщиной стенки. В погоне за значительной экономией был допущен ряд просчетов и не учтены важные особенности работы МГТ, повлекшие за собой выход из строя многих сооружений. Именно это в свою очередь наложило негативный отпечаток и бросило тень на сооружения из МГК. В такой ситуации лучшим вариантом было бы использование более консервативных подходов и применение в расчетах "запаса на неопределенность", который нивелировал бы недочеты расчетных методик. При этом экономия в сравнении с бетонными трубами всё равно была бы значительной. В дальнейшем же по мере изучения особенностей конструкции и уточнения расчетных методик можно было бы говорить об уменьшении расчетного сечения и увеличении экономии. Во-вторых, попытки внедрения МГТ всегда приходились на этапы массового строительства и развития дорожнотранспортных сетей, как правило, в удаленных регионах с суровыми климатическими условиями. В таком режиме при высоких темпах строительства было очень сложно обеспечивать надлежащее качество монтажа, тем более что требования к грунту обратной засыпки и степени его уплотнения на тот момент только изучались. Поэтому большое количество уложенных труб со временем, в ходе обследований, показали не самые хорошие результаты.

Возвращаясь к теме зарубежного опыта в развитии МГТ хотелось бы выделить наиболее актуальные и перспективные направления исследований [16]: методология определения несущей способности существующих мостов и сооружений, исследования влияние циклической нагрузки, возможность использования переработанных материалов (касается в основном гофрированных труб из полимерных материалов), совершенствование систем защиты от коррозии, изучение альтернативных металлов и других материалов для проектирования МГТ [14], совершенствование обратной засыпки, создание систем оперативного мониторинга водопропускных сооружений.

## Библиографический список

- 1. Цимбарг И.Е. Гофрированная труба большого сечения // Транспортное строительство. 1970. № 12. С. 54.
- 2. Черников А.В., Козлов В.А. Краткий исторический обзор использования гофрированных водопропускных труб и их применение на современном этапе // Строительная механика и конструкции. 2021. № 3. С. 61–73.
- AASHTO. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, Customary U.S. Units, 7th Ed. / American Association of State Highway and Transportation Officials. – Washington, D.C., 2016. – 195 p.

- 4. Allgood J.R., Takahashi S.K. Balanced Design and Finite-Element Analysis of Culverts // Highway Research Record. 1972. № 413. P. 45–56.
- Andréasson L. Kompressibilitet hos friktionsjord: laboratoriestudium (Compressibility of cohesionless soils: a laboratory investigation) (in Swedish). – National Swedish Building Research, Stockholm, Sweden, 1973. – 144 p.
- ARS-Nr. 20/1997. Wellstahlrohre. Bedingungen für die Anwendung von Wellstahlrohren, Allgemeines Rundschreiben Strassenbau: Ausgabe 1997, Reg. Nr.05.40, ARS 20/97, 23 Mai 1997. – 417 p.
- 7. Beben D. Numerical study of performance of soil-steel bridge during soil backfilling // Structural Engineering and Mechanics. 2012. Vol. 42. №. 4. P. 571-587.
- Brown C.B. Forces on rigid culverts under high fills // Journal of the Structural Division. 1967. – Vol. 93. – №. 5. – P. 195-215.
- Camitz G., Bergdahl U., Vinka T.G. Stålpålars beständighet mot korrosion i jord. En sammanställning av kunskaper och erfarenheter. Rapport 105 (The corrosion resistance of steel piles in soil-A compilation of knowledge and experience) (in Swedish) // Pålkommissionen. Commission on Pile Research, Linköping. 2009. 90 p.
- CANDE A Modern Approach for the Structural Design of Buried Culverts. Report No. FHWA-RD-77-5 : Engineering Manual / M. G. Katona, J. M. Smith, R. S. Odello, J. R. Allgood. – Publication RD-77-6. U.S. Naval Civil Engineering Lab, Port Hueneme, CA, 1976. – 475 p.
- Flener E.B. Field Testing of a Long-Span Arch Steel Culvert Railway Bridge Over Skivarpsan, Sweden, Part I // TRITA-BKN, Rapport 72, ISSN 1103-4289 ISRN/KTH/BKN/R-84-SE, Byggkonstruktion. – 2004.
- Flener E.B. Field Testing of a Long-Span Arch Steel Culvert Railway Bridge over Skivarpsan, Sweden, Part II // TRITA-BKN Rapport 84, ISSN 1103-4289 ISRN/KTH/BKN/R-84-SE, Byggkonstruktion. – 2004.
- Flener E.B., Sundquist H. Full-scale testing of two corrugated steel box culverts with different crown stiffness // Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej. – 2007. – №. 1. – P. 35-44.
- 14. Goddard J. Growth of thermoplastic pipe use in transportation applications // Transportation Research Circular. 2018. № E-C230. P. 34-48.
- 15. Howard A.K. Modulus of soil reaction values for buried flexible pipe // Journal of the Geotechnical Engineering Division. 1977. Vol. 103. №. 1. Pp. 33-43.
- 16. Janusz L., Vaslestad J., Miglio A. Fifty Years of Culverts and Soil–Structure Interaction: European Experience // Transportation Research Circular. – 2018. – № E-C230. – P. 21-33.
- 17. Katona M. G. History of soil–structure interaction models for buried culverts // Transportation Research Circular. 2018. № E-C230. Pp. 13-20.
- 18. Kloppel K., Glock D. Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu den Traglastproblemen beigewiecher, in die Erde eingebetteter Rohre (In German) // Veroffentlichung des Instituts Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt. - 1979. – H-10.
- Machelski C., Mumot M. Corrugated shell displacements during the passage of a vehicle along a soil-steel structure // Studia Geotechnica et Mechanica. – 2016. – Vol. 38. – №. 4. – P. 25-32.
- Mai V.T., Hoult N.A., Moore I.D. Effect of Deterioration on the Performance of Corrugated Steel Culverts // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 2014. Vol. 140. №32. – 11 p.
- 21. Marston A., Anderson A.O. The theory of loads on pipes in ditches and tests of cement and clay drain tile and sewer pipe // Iowa State College of Agriculture and Mechanic Arts, Ames, Iowa. 1913. 181 p.

- 22. Mattsson H.Å., Sundquist H. The real service life and repair methods of steel pipe culverts in Sweden // Proceedings of the 1st European Conference on Buried Flexible Steel Structures. 2007. P. 185-193.
- 23. McGrath T. J. Development of design and analysis methods for buried culverts // Transportation Research Circular. 2018. № E-C230. P. 1-12.
- 24. Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Buried Corrugated Steel Culvert Failure Mechanisms Due to Environmental Deteriorations // International Conference on Sustainable Infrastructure. 2019. P. 29-40.
- 25. Pettersson L., Sundquist H. Design of soil steel composite bridges. KTH Royal Institute of Technology, 2014. 82 p.
- Pettersson L. Full scale live load tests on a corrugated steel culvert // Proceedings of The Iabse Colloquium Held Stockholm 1998-Tunnel Structures. Iabse Reports. – 1998. Vol. 78. – P. 45–56.
- 27. Pettersson L., Wadi A. Full scale live load tests on older Soil-Steel Composite Bridges close to Skellefteå // Sweden, (test report) KTH Structural Engineering and Bridges. 2013.
- 28. Selig E.T. Soil parameters for design of buried pipelines // Pipeline Infrastructure. ASCE. 1988. P. 99-116.
- 29. Spangler M. G. The Structural Design of Flexible Pipe Culverts. Bulletin 153 // Iowa Engineering Experiment Station, Ames, Iowa. 1941. P. 235-239.
- Vaslestad J., Wysokowski A. Full scale testing of Multiplate corrugated steel structures in Poland // Proceeding of the 6th Conference "Shell structures and applications", Gdansk, Poland. – 1998.
- 31. Vaslestad J. Long-term behavior of flexible large-span culverts // Transportation Research Record. 1989. № 1231. P. 14-24.
- Watkins R.K., Spangler M.G. Some characteristics of the modulus of passive resistance of soil: A study in similitude // Highway Research Board Proceedings. – 1958. – Vol. 37. – P. 576-583.
- Wysokowski A., Vaslestad J. Full scale fatigue testing of large-diameter multi-plate corrugated steel culverts // Archives of civil engineering. 2002. Vol. 48. №. 1. P. 31-57.

#### References

- 1. Tsimbarg I.E. Large-section corrugated pipe. Transport Construction. No. 12. 1970. P. 54.
- 2. Chernikov A.V., Kozlov V.A. A brief historical review of the use of corrugated culverts and their application at the present stage. Structural Mechanics and Constructions. No. 3. 2021. Pp. 61-73.
- AASHTO. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, Customary U.S. Units, 7th Ed. American Association of State Highway and Transportation Officials. Washington, D.C., 2016. 195 p.
- 4. Allgood J.R., Takahashi S.K. Balanced design and finite-element analysis of culverts. Highway Research Record. No. 413. 1972. Pp. 45-56.
- 5. Andréasson L. Kompressibilitet hos friktionsjord: laboratoriestudium (Compressibility of cohesionless soils: a laboratory investigation) (in Swedish). National Swedish Building Research. Stockholm, Sweden. 1973. 144 p.
- ARS-Nr. 20/1997. Wellstahlrohre. Bedingungen f
  ür die Anwendung von Wellstahlrohren, Allgemeines Rundschreiben Strassenbau: Ausgabe 1997, Reg. Nr.05.40, ARS 20/97, 23 May 1997. 417 p.
- 7. Beben D. Numerical study of performance of soil-steel bridge during soil backfilling. Structural Engineering and Mechanics. Vol. 42. No. 4. 2012. Pp. 571-587.

- 8. Brown C.B. Forces on rigid culverts under high fills. Journal of the Structural Division. Vol. 93. No. 5. 1967. Pp. 195-215.
- Camitz G., Bergdahl U., Vinka T.G. Stålpålars beständighet mot korrosion i jord. En sammanställning av kunskaper och erfarenheter. Rapport 105 (The corrosion resistance of steel piles in soil-A compilation of knowledge and experience) (in Swedish). Pålkommissionen. Commission on Pile Research, Linköping. 2009. 90 p.
- Katona M.G., Smith J.M., Odello R.S., Allgood J.R. A Modern Approach for the Structural Design of Buried Culverts. Report No. FHWA-RD-77-5: Engineering Manual. Publication RD-77-6. U.S. Naval Civil Engineering Lab. Port Hueneme. 1976. 475 p.
- 11. Flener E.B. Field testing of a long-span arch steel culvert railway bridge over Skivarpsan. Sweden, Part I. TRITA-BKN. Rapport 72. ISSN 1103-4289 ISRN/KTH/BKN/R-84-SE. Byggkonstruktion. 2004.
- 12. Flener E.B. field testing of a long-span arch steel culvert railway bridge over Skivarpsan. Sweden, Part II. TRITA-BKN Rapport 84, ISSN 1103-4289 ISRN/KTH/BKN/R-84-SE. Byggkonstruktion. 2004.
- 13. Flener E.B. Sundquist H. Full-scale testing of two corrugated steel box culverts with different crown stiffness. Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej. No. 1. 2007. Pp. 35-44.
- 14. Goddard J. Growth of thermoplastic pipe use in transportation applications. Transportation Research Circular. No. E-C230. 2018. Pp. 34-48.
- 15. Howard A.K. Modulus of soil reaction values for buried flexible pipe. Journal of the Geotechnical Engineering Division. Vol. 103. No. 1. 1977. Pp. 33-43.
- 16. Janusz L., Vaslestad J., Miglio A. Fifty years of culverts and soil-structure interaction: European experience. Transportation Research Circular. No. E-C230. 2018. Pp. 21-33.
- 17. Katona M.G. History of soil-structure interaction models for buried culverts. Transportation Research Circular. No. E-C230. 2018. Pp. 13-20.
- Kloppel K., Glock D. Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu den Traglastproblemen beigewiecher, in die Erde eingebetteter Rohre (In German). Veroffentlichung des Instituts Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt. 1979. P. 10.
- 19. Machelski C., Mumot M. Corrugated shell displacements during the passage of a vehicle along a soil-steel structure. Studia Geotechnica et Mechanica. Vol. 38. No. 4. 2016. Pp. 25-32.
- Mai V.T., Hoult N.A., Moore I.D. Effect of deterioration on the performance of corrugated steel culverts. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. Vol. 140. No. 32. 2014. 11 p.
- Marston A., Anderson A.O. The theory of loads on pipes in ditches and tests of cement and clay drain tile and sewer pipe. Iowa State College of Agriculture and Mechanic Arts, Ames, Iowa. 1913. 181 p.
- 22. Mattsson H.A., Sundquist H. The real service life and repair methods of steel pipe culverts in Sweden. Proceedings of the 1st European Conference on Buried Flexible Steel Structures. 2007. Pp. 185-193.
- 23. McGrath T.J. Development of design and analysis methods for buried culverts. Transportation Research Circular. No. E-C230. 2018. Pp. 1-12.
- Nakhostin E., Kenny S., Sivatayalan S. Buried corrugated steel culvert failure mechanisms due to environmental deteriorations. International Conference on Sustainable Infrastructure. 2019. Pp. 29-40.
- 25. Pettersson L., Sundquist H. Design of soil steel composite bridges. KTH Royal Institute of Technology. 2014. 82 p.
- 26. Pettersson L. Full scale live load tests on a corrugated steel culvert. Proceedings of The Iabse Colloquium Held Stockholm 1998-Tunnel Structures. Iabse Reports. Vol. 78. 1998.

Pp. 45-56.

- 27. Pettersson L., Wadi A. Full scale live load tests on older Soil-Steel Composite Bridges close to Skellefteå. KTH Structural Engineering and Bridges. 2013.
- 28. Selig E.T. Soil parameters for design of buried pipelines. Pipeline Infrastructure. 1988. Pp. 99-116.
- 29. Spangler M.G. The structural design of flexible pipe culverts. Iowa Engineering Experiment Station. Ames, Iowa. 1941. Pp. 235-239.
- 30. Vaslestad J., Wysokowski A. Full scale testing of Multiplate corrugated steel structures in Poland. Proceeding of the 6th Conference "Shell structures and applications". Gdansk, Poland. 1998.
- 31. Vaslestad J. Long-term behavior of flexible large-span culverts. Transportation Research Record. No. 1231. 1989. Pp. 14-24.
- Watkins R.K., Spangler M.G. Some characteristics of the modulus of passive resistance of soil: A study in similitude. Highway Research Board Proceedings. Vol. 37. 1958. Pp. 576-583.
- 33. Wysokowski A., Vaslestad J. Full scale fatigue testing of large-diameter multi-plate corrugated steel culverts. Archives of Cvil Engineering. Vol. 48. No. 1. 2002. Pp. 31-57.

# FOREIGN EXPERIENCE IN DESIGN AND CONSTRUCTION OF CORRUGATED CULVERTS

A. V. Chernikov<sup>1</sup>, V. A. Kozlov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University Russia, Voronezh

<sup>1</sup>Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(920)2467077,

e-mail: chernickov-andrei@yandex.ru

<sup>2</sup>Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2764006, e-mail: vakozlov@ygasu.vrn.ru

The article presents foreign experience in the design and construction of corrugated culverts, considers the main stages of their development and analyzes the applied calculation methods. The main trends in this direction are identified and further ways of developing MHT in foreign practice are outlined.

Keywords: metal corrugated pipe (MGT), metal corrugated structures (MGK), culvert, historical review.

DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.010 УДК 623.072.3.004.121

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ СО СТАЛЬНОЙ ФИБРОЙ

В. С. Сафронов, Д. А. Киселев

Воронежский государственный технический университет

Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, профессор кафедры строительной механики, тел.: +7(910)341 14 22, e-mail: vss22@mail.ru <sup>2</sup>Магистрант кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: xdl908@yahoo.com

Описывается и апробируется методика нелинейного деформационного расчета прочности нормального сечения изгибаемой железобетонной балки со стальной фиброй с использованием кусочно-линейной диаграммы деформирования сталефибробетона и стержневой арматуры. Исследуется влияние на несущую способность процентного содержания фибры в балке прямоугольного поперечного сечения. Предложенный алгоритм применяется для вероятностной оценки надежности усиленной стальными волокнами железобетонной балки с учетом разброса прочностных характеристик сталефибробетона и стержневой арматуры. Приводятся графики изменения логарифмического показателя надежности нормального сечения в зависимости от процентного содержания фибры и коэффициента вариации прочности сталефибробетона.

**Ключевые слова**: железобетонная балка, прямоугольное поперечное сечение, стальные фибры, нелинейный деформационный расчет, несущая способность, процент фибрового армирования, вероятностная оценка, логарифмический показатель надежности.

#### Введение

Основным недостатком железобетонных конструкций является низкая прочность обычного бетона на растяжение, поэтому с целью увеличения несущей способности используется технология армирования равномерно распределенными в его объеме стальными волокнами (сталефибробетон). Получение достоверных данных о напряженнодеформированном состоянии таких конструкций необходимо осуществлять с учетом действительных диаграмм деформирования [1-5]. Действующий в настоящее время нормативный документ СП 360.1325800.2017 [6] рекомендует применение для нелинейных расчетов кусочно-линейные диаграммы деформирования сталефибробетона. При этом в основе нелинейных расчётов используется детерминированный расчёт несущей способности конструкции, в котором разброс прочностных характеристик материала учитывается опосредованно с помощью коэффициентов надежности по материалу.

Эффективным способом определения действительной прочности усиленной стальными фибрами железобетонной балки является вероятностный подход, позволяющий учесть фактический разброс прочностных характеристик материалов. Однако такие алгоритмы для сталефибробетонных конструкций недостаточно развиты.

В настоящей статье для оценки надежности нормальных сечений сталефибробетонных балок прямоугольного поперечного сечения предлагается и апробируется методика, использующая положения теории надежности.

<sup>©</sup> Сафронов В. С., Киселев Д. А., 2023

## 1. Описание алгоритма расчета несущей способности нормальных сечений железобетонной балки со стальной фиброй

При оценке прочности нормальных сечений сталефибробетонных балок с одиночным стержневым армированием (рис. 1) в качестве определяющего параметра принят предельный изгибающий момент  $M_{\text{пред}}$ , который характеризует несущую способность балки. Для его вычисления в заданном сечении выбранных геометрических размеров b и h балки, модулей деформации  $E_{\text{fb}}$ ,  $E_{\text{s}}$ , параметров стержневого армирования  $A_{\text{s}}$ ,  $a_{\text{s}}$ ,  $h_{\text{o}}$  и принятых произвольных законов деформирования сталефибробетона  $\sigma_{\text{fb}}(\epsilon_{\text{fb}})$ ,  $\sigma_{\text{fbt}}(\epsilon_{\text{fbt}})$  (рис. 2) и стержневой арматуры  $\sigma_{\text{s}}(\epsilon_{\text{s}})$  (рис. 1) используем следующий итерационный алгоритм нелинейного деформационного расчета, основанный на гипотезе плоских сечений и положениях СП 360.1325800.2017 [6].



Рис. 1. Поперечное сечение железобетонной балочной плиты с одиночной арматурой

В отличие от обычных железобетонных балок с ненапрягаемой арматурой по всему объему бетонной части балочной плиты равномерно распределяются изготавливаемые на заводах строительного комплекса в соответствии с ТУ 1211-4685490-2005 фибры одного из следующих типов: хендикс, миксарм, фибекс - 1/ 50, твинфлет, фибекс – 1,3/50. Эти изделия представляют собой короткие отрезки высокопрочной проволоки, которые отличаются концевыми участками для лучшего закрепления в окружающем бетоне.

В прочностных расчетах испытывающих разнообразные виды напряженного состояния конструкций нормативными документами по сталефибробетону [5-6] рекомендуется использовать приведенную на рис. 2 типовую кусочно-линейную диаграмму деформирования. Параметры диаграммы назначаются в зависимости от процентного содержания фибры в бетоне.

В связи с неопределенностью в конкретном расположении и направленности отдельных волокон в объеме бетонной части несущей конструкции моделирование напряженно-деформированного состояния фибробетона выполним как для однородного упругопластического материала с нелинейной диаграммой деформирования.

При сжатии фибробетона диаграмма состоит, как и для неармированного материала, из трех линейных участков, последний из которых моделирует пластическое деформирование, а два первых – упругопластическое поведение с помощью различных модулей упругости. Нормативное значение максимального напряжения при сжатии принимается в зависимости от процентного содержания стальных волокон в объеме бетона.

Растяжение фибробетона представляется также тремя линейными участками в виде возрастающей и ниспадающей ветвей. В действующем нормативном документе СП 360.1325800.2017 предлагается два варианта диаграмм, отличающихся расположением ниспадающих участков. Выбор вида диаграммы растяжения фибробетона для прочностных расчетов также определяется от степени наполненности бетона стальными волокнами.



Рис. 2. Типовая диаграмма деформирования сталефибробетона

Особенностью приведенной диаграммы деформирования сталефибробетона является повышенное сопротивление материала от действии растягивающих напряжений. При проектировании сталефибробетонных изгибаемых стержневых конструкций в растянутых зонах применяют для уменьшения вероятности трещинообразования ненапрягаемую стержневую арматуру, описываемую двухлинейной упругопластической диаграммой (рис. 3).



Рис. 3. Диаграмма деформирования стержневой арматуры при растяжении

## 2. Алгоритм нелинейного деформационного расчета железобетонной балки со стальной фиброй при изгибе

1. Предварительное задание деформации крайнего растянутого волокна сталефибробетона є<sub>вы</sub> равным предельно допустимому значению:

$$\varepsilon_{\text{fbt3}} = 0.02 - 0.0125 * (\frac{R_{\text{fbt3}}}{R_{\text{fbt2}}} - 0.5).$$
 (1)

2. С использованием гипотезы плоских сечений по первоначальной заданной деформации наиболее растянутого волокна сталефибробетона  $\varepsilon_{fbt}$  вычисляется деформация наиболее сжатого волокна сталефибробетона  $\varepsilon_{fb}$  как функция высоты сжатой зоны сталефибробетона «х»:

$$\varepsilon_{\text{fb}}(x) = \frac{\varepsilon_{\text{fbt}}^* x}{(x-h)}.$$
(2)

3. С использованием гипотезы плоских сечений по найденной деформации наиболее сжатого волокна сталефибробетона  $\varepsilon_{fb}$  вычисляется деформация стержневой арматуры  $\varepsilon_s$  как функция высоты сжатой зоны сталефибробетона «х»:

$$\varepsilon_{\rm S}(x) = \frac{\varepsilon_{\rm fb}(x-h_0)}{x}.$$
(3)

Деформация сжатого сталефибробетонного волокна  $\varepsilon_{fb,z}$ , соответствующего вертикальной ординате z, отсчитываемой вверх от нейтральной оси сечения (рис. 4), имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{fb},z}(x) = \frac{\varepsilon_{\text{fb}}^{*z}}{x}.$$
(4)

Деформация растянутого сталефибробетонного волокна  $\varepsilon_{fbt,z}$ , соответствующего вертикальной ординате  $z_t$ , отсчитываемой вниз от нейтральной оси сечения (рис. 4), имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{fbt,}zt}(x) = \frac{\varepsilon_{\text{fbt}}^{*z_t}}{(h-x)}.$$
(5)

Используя принятые зависимости между напряжениями и деформациями сталефибробетона и стержневой арматуры, записываем напряжения сталефибробетона и стержневой арматуры через неизвестную высоту сжатой зоны сталефибробетона «х» в виде:

$$\sigma_{\text{fb},z}(x) = \sigma_{\text{fb},z}(\varepsilon_{\text{fb},z}(x)), \ \sigma_{\text{fbt},zt}(x) = \sigma_{\text{fbt},zt}(\varepsilon_{\text{fbt},zt}(x)), \ \sigma_{\text{s}}(x) = \sigma_{\text{s}}(\varepsilon_{\text{s}}(x)) \ . \tag{6}$$



Рис. 4. Распределение деформаций по высоте сечения балочной плиты



Рис. 5. Эпюра нормальных напряжений по высоте сечения балочной плиты

Выражения для определения действующих продольных сил сталефибробетона и стержневой арматуры описываются следующим образом:

$$F_{fb}(x) = b \int_{0}^{x} \sigma_{fb,z}(x) dz; \quad F_{fbt}(x) = b \int_{0}^{(n-x)} \sigma_{fbt,zt}(x) dz; \quad F_{S}(x) = \sigma_{S}(x) A_{S}.$$
(7)

Высота сжатой зоны сталефибробетона х определяется условием равенства нулю суммы продольных сил в нормальном сечении балки:

$$\sum F(x) = F_{fb}(x) + F_{fbt}(x) + F_{S}(x) = 0$$
(8)

Зная величину высоты сжатой зоны сталефибробетона x, по уравнению в формуле (3) получаем значение деформации стержневой арматуры ε<sub>s</sub>.

4. Проверка условия превышения максимальной деформации наиболее растянутого и наиболее сжатого волокна предельных значений:

$$0 \le \varepsilon_{\text{fbt}} < \varepsilon_{\text{fbt3}} = 0,02 - 0,0125 * (\frac{\kappa_{\text{fbt3}}}{R_{\text{fbt2}}} - 0,5); \ 0 \le \varepsilon_{\text{fb}} < \varepsilon_{\text{fb2}} = 0,0035$$
(9)

При невыполнении условия (9) задается деформация крайнего сжатого волокна сталефибробетона  $\varepsilon_{\rm fb} = \varepsilon_{\rm fb2} = 0,0035.$ 

Повторяется пункт 2 для корректировки высоты сжатой зоны сталефибробетона «х» с учетом того, что деформация крайнего сжатого волокна  $\varepsilon_{fb}$  не зависит от «х», а деформация крайнего растянутого волокна  $\varepsilon_{fbt}$  вычисляется как функция от высоты сжатой зоны сталефибробетона «х» по формуле:

$$\varepsilon_{\text{fbt}}(x) = \frac{\varepsilon_{\text{fb}}^*(x-h)}{x} \tag{10}$$

5. На основе полученного в пункте 3 значения деформации наиболее сжатого волокна бетона находится предельный изгибающий момент как момент равнодействующих внутренних усилий относительно нейтральной оси сечения:

$$M_{\Pi p e d} = \sum M(x) = M_{fb}(x) + M_{fbt}(x) + M_{s}(x) , \qquad (11)$$
  
rde  $M_{fb}(x) = b \int_{0}^{x} \sigma_{fb,z} z dz; M_{fbt}(x) = b \int_{0}^{h-x} \sigma_{fbt,zt} z dz; M_{s}(x) = A_{s} \sigma_{s}(h_{0} - x)$ 

## 3. Численные исследования влияния содержания стальных волокон на несущую способность железобетонных балок прямоугольного поперечного сечения

В соответствии с описанным выше алгоритмом разработана вычислительная программа на языке математического комплекса Mathcad для определения несущей способности железобетонных балок с различными коэффициентами содержания стальной фибры.

По этой программе выполнены численные исследования влияния процентного содержания стальной фибры на несущую способность балочной железобетонной плиты сечением 100х24 см, армированной в нижней зоне 9 стержнями диаметром 10 мм. Фибробетонная часть поперечного сечения выполнена из бетона класса B20, для ее армирования использованы распространенные в строительной отрасли РФ стальные волокна из высокопрочного каната с временным сопротивлением R =1000 МПа.

В расчетах использованы параметры изображенной на рис. 2 диаграммы деформирования сталефибробетона со следующими коэффициентами содержания стальной фибры:  $\mu_{fv} = 0,005, 0,01, 0,015$  и 0,02. Приведенные в таблице численные значения напряжений и деформаций для характерных точек диаграммы деформирования сталефибробетона принимались в соответствии с рекомендациями СП 360.1325800.2017 /6/.

Для сопоставления в этой же таблице приведены параметры деформирования бетона без усиления стальными волокнами, в таких конструкциях бетон в растянутой зоне не учитывается из-за малости сопротивления неармированного бетона при растяжении.

Характеристики несущей	Коэффициенты содержания стальной фибры (µ <sub>fv</sub> )							
способности балки	0	0,005	0,01	0,015	0,02			
σ <sub>fb1</sub> , МПа	6,9	9,18	10,5	11,38	12,033			
R <sub>fb</sub> , МПа	11,5	15,311	17,502	18,971	20,055			
R <sub>fbt</sub> , МПа	0	0,9	0,9	0,9	0,9			
R <sub>fbt2</sub> , МПа	0	0,811	0,903	0,988	1,026			
R <sub>fbt3</sub> , МПа	0	1,054	1,175	1,287	1,337			
Е <sub>fb</sub> , МПа	27500	28312,5	29125	29937,5	30750			
$\epsilon_{fb1}$	0,000251	0,000324	0,000361	0,00038	0,000391			
$\epsilon_{fb0}$	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002			
$\epsilon_{fb2}$	0,0035	0,0035	0,0035	0,0035	0,0035			
€ <sub>fbt0</sub>	-	0,0000318	0,0000309	0,0000301	0,0000293			
€ <sub>fbt1</sub>	-	0,0001318	0,0001309	0,0001301	0,0001293			
€ <sub>fbt2</sub>	-	0,004	0,004	0,004	0,004			
€ <sub>fbt3</sub>	-	0,01	0,01	0,01	0,01			
Rs, МПа	435	435	435	435	435			
Es, МПа	200000	200000	200000	200000	200000			
ε <sub>s0</sub>	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002			
E <sub>s2</sub>	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025			

Характеристики прочности и деформативности сталефибробетона

Полученная по результатам численных расчетов зависимость предельного изгибающего момента от коэффициента содержания стальной фибры в рассматриваемой балочной плите представлена на рис. 6. Распределение напряжений по высоте поперечного

сечения балочной плиты для трех вариантов содержания фибры  $\mu_{fv} = 0$ ,  $\mu fv = 0,005$  и  $\mu_{fv} = 0,02$  показано, соответственно, на рис. 7, 8 и 9.



Рис. 6. Зависимости предельного изгибающего момента Mult,кН\*м от коэффициента содержания фибрового армирования

Анализ полученных численных результатов приводит к следующим выводам:

1. Несущая способность усиленных стальной фиброй железобетонных балочных плит увеличивается по сравнению с железобетонными элементами без фибрового армирования до 30%.

2. Увеличение процентного содержания стальных волокон в бетоне приводит к незначительному росту несущей способности.



Рис. 7. Распределение напряжений в балочной железобетонной плите без фибрового армирования

3. Напряжения в растянутой зоне сталефибробетонной балочной плиты практически не зависят от положения волокна в зоне растяжения. Они существенно ниже напряжений в растянутой зоне и практически не изменяются по высоте растянутой зоны

4. Сопоставляя эпюры распределения напряжений в неармированных и армированном стальной фиброй балках отмечается существенная разница в высотах сжатой зоны поперечного сечения, что является благоприятным фактором.



**Рис. 8**. Распределение напряжений в балочной сталефибробетонной плите с минимальным процентным содержанием стальной фибры



**Рис. 9**. Распределение напряжений в балочной сталефибробетонной плите с максимальным процентным содержанием стальной фибры

## 4. Описание методики вычисления параметров надежности нормальных сечений железобетонных балок со стальной фиброй

Исследование надежности для конкретных неслучайных размеров конструкции и армирования железобетонной балки со стальной фиброй выполним с использованием предположений о нормальном распределении действующих нагрузок и прочностных характеристик сталефибробетона и стержневой арматуры.

Для описания изменчивости прочностных характеристик материалов, а также изменчивости действующих нагрузок примем нормальные законы распределения с параметрами, соответствующими нормативной обеспеченности P=0,95, приведенными в действующих документах нормативных сопротивлений сталефибробетона, стержневой арматуры. При этом с целью изучения влияния разброса прочностных характеристик материалов железобетонных балок со стальной фиброй и рабочей стержневой арматурой варьируются коэффициенты вариации сталефибробетона v<sub>R</sub> и стержневой арматуры v<sub>S.</sub> Средние значения нагрузок m<sub>F</sub> примем через значения нормативных нагрузок F<sub>n</sub>.

Выражения для выбора статистических характеристик приведены ниже:

- для математических ожиданий случайных параметров прочности и действующих нагрузок:

$$m_{\rm F} = F_{\rm n}; \ m_{\rm Rfb} = \frac{R_{\rm fbn}}{1 - 1.64 * v_{\rm R}}; \ m_{\rm Rfbt} = \frac{R_{\rm fbtn}}{1 - 1.64 * v_{\rm R}}; \ m_{\rm Rfbt2} = \frac{R_{\rm fbt2n}}{1 - 1.64 * v_{\rm R}};$$
(12)  
$$m_{\rm Rfbt3} = \frac{R_{\rm fbt3n}}{1 - 1.64 * v_{\rm R}}; \ m_{\rm s} = \frac{R_{\rm sn}}{1 - 1.64 * v_{\rm S}}$$

- для среднеквадратических отклонений:

$$\sigma_{\rm F} = \frac{F_{\rm n} * (\gamma_{\rm f} - 1)}{1.64}; \quad \sigma_{\rm Rfb} = \nu_{\rm R} * m_{\rm Rfb}; \quad \sigma_{\rm Rfbt} = \nu_{\rm R} * m_{\rm Rfbt}; \quad \sigma_{\rm Rfbt2} = \nu_{\rm R} * m_{\rm Rfbt2}; \quad (13)$$
$$\sigma_{\rm Rfbt3} = \nu_{\rm R} * m_{\rm Rfbt3}; \quad \sigma_{\rm S} = \nu_{\rm S} * m_{\rm Rs}.$$

Распределение наибольшего значения нагрузочного эффекта  $F_{max}$  от постоянных и временных нагрузок по закону Гаусса принимаем в соответствии с заданным средним значением  $m_{Fmax}$  и стандартом  $\sigma_{Fmax}$ . В рассматриваемых условиях вероятность отказа определяется с использованием функции Лапласа.

В соответствии с теорией надежности [7,9] вероятность отказа определяется из выражения:

$$Q = \frac{1}{2} - \Phi(\beta) , \qquad (14)$$

где  $\beta$  - характеристика безопасности.

$$\beta = \frac{m_{\text{Rnped}} - m_{\text{Fmax}}}{\sqrt{\sigma_{\text{Rnped}}^2 + \sigma_{\text{Fmax}}^2}} \quad . \tag{15}$$

Для удобства представления численных результатов нами использован десятичный логарифмический показатель надежности, который вычисляется из выражения:

$$\rho = -\lg(Q) \tag{16}$$

### 5. Надежность железобетонных балок с фибровым армированием

Описанный выше алгоритм использовался для количественной оценки надежности нормальных сечений железобетонных балок с армированием стальной фиброй и стержневой арматурой для бетона класса B20, стержневой арматуры класса A500C, фибры Хендикс 1/50 по ТУ 1211-205-46854090-2005 при изменении коэффициентов вариации бетона от 0,08 до 0,23 и коэффициентов содержания стальной фибры от 0 до 0,02.

На рис. 10 приведены полученные по результатам численных расчетов зависимости логарифмического показателя надежности от коэффициента вариации бетона со стальной фиброй для балок с различным процентным содержания фибрового армирования. В расчетах коэффициент вариации стержневой арматуры принят постоянным и равным величине v<sub>s</sub>=0, 08.



Рис. 10 Зависимости логарифмического показателя надежности ρ от коэффициента вариации бетона со стальной фиброй ν<sub>R</sub>

Анализируя приведенные на рис. 10 графики, отметим их следующие особенности.

• В отличие от железобетонных балочных плит без фибрового армирования, у которых флуктуации прочности бетона не влияют на логарифмический показатель надежности, в несущих элементах из сталефибробетона с увеличением коэффициента вариации логарифмический показатель надежности уменьшается. Эффект снижения логарифмического показателя надежности увеличивается с ростом содержания стальных волокон в фибробетоне.

• Логарифмические показатели надежности сталефибробетонных балочных плит существенно выше таких же показателей железобетонных элементов без фибрового армирования. При этом величина процентного содержания стальных волокон в бетоне элемента не является решающим фактором. Поэтому при проектировании таких конструкций следует исходить из экономических соображений.

Влияние разброса прочностных характеристик рабочей стержневой арматуры, сопротивляющейся внешним нагрузкам совместно с наполненным стальной фиброй бетоном представлено на рис. 11. Графики изменения логарифмического показателя надежности построены для четырех вариантов процентного содержания фибры и для балочной плиты без фибры. В численных расчетах с различными параметрами разброса прочности стержневой арматуры коэффициент вариации фибробетона принят постоянным и равным  $v_R=0, 08.$ 

На графиках видно, что как для не наполненной стальными волокнами железобетонной балочной плиты, так для фибробетонной конструкции флуктуации прочности стержневой арматуры существенно влияют на параметры надежности.



Рис. 11. Зависимости логарифмического показателя надежности ρ от коэффициента вариации стержневой арматуры ν<sub>s</sub>

### Выводы

Новизна выполненных исследований заключается в рассмотрении с позиции теории надежности несущей способности железобетонной балки со стальной фиброй и стержневой арматурой с учетом изменчивости прочностных характеристик сталефибробетона и процента содержания стальной фибры. Это позволяет выявить наиболее значимые факторы, влияющие на надежность железобетонной балки со стальной фиброй и стержневой арматурой и может служить основой для оптимизации параметров балки при проектировании, а также обеспечения безотказной эксплуатации конструкции с дефектами и повреждениями.

#### Библиографический список

- 1. Рекомендации по проектированию и изготовлению сталефибробетонных конструкции. М.: НИИЖБ Госстроя СССР. 1987. 148 с.
- Ермилов Ю.И. Тонкостенные сталефибробетонные конструкции в гражданском строительстве: обзор. информ.; ЦНТИ по гражд. строительству и архитектуре. – М., 1987. – 55 с. (Конструкции жилых и общественных зданий. Технология индустриального домостроения; вып. 10).
- Талантова К.В. Регулирование свойств композита сталефибробетона с целью обеспечения эксплуатационных характеристик конструкций на его основе // Проблемы оптимального проектирования сооружений: докл. 2-й Всерос. конф. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011. С. 347 -354.
- Лысенко Е.Ф., Гетун Г.В. Проектирование сталефиброжелезобетонных конструкций. – Киев: УМК ВО, 1989 – 184 с.
- 5. СП 52-104-2006\*. Свод правил по проектированию и строительству: сталефибробетонные конструкции (к СНиП 52-01-2003). М.: ФГУП «НИЦ «Строительство», 2010. 63 с.

- 6. СП 360.1325800.2017. Свод правил по проектированию и строительству: сталефибробетонные конструкции (к СНиП 52-01-2003). М.: ФГУП «Стандартинформ», 2018. 70 с.
- 7. Сафронов В.С., Нгуен Динь Хоа. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Сер. Строительство и архитектура. 2010. № 1 (10). С. 157-166.
- Шапиро Д.М., Агарков А.В. Деформационный нелинейный расчёт железобетонных балок таврового сечения // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Сер. Строительство и архитектура. – 2008. – №1 (9). – С. 27-33.
- Сафронов В.С., Доманов Д.И. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразования при стесненном кручении железобетонных мостовых балок //В сборнике: Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов. Сборник статей по материалам 7-й международной научной конференции: в 2 т., 2013. – С. 31-38.

## References

- 1. Recommendations for the design and manufacture of steel fiber concrete structures. M.: NIIZhB Gosstroy of the USSR. 1987. 148 p.
- 2. Ermilov Yu.I. Thin-walled steel-fiber-reinforced concrete structures in civil engineering: review. CNTI for Citizenship construction and architecture. Designs of Residential and Public Buildings. Technology of Industrial Construction. Issue 10. 1987. 55 p.
- 3. Talantova K.V. Regulation of the properties of a composite-steel fiber concrete in order to ensure the performance of structures based on it. Problems of Optimal Design of Structures. II Russian Conf. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2011. Pp. 347-354.
- 4. Lysenko E.F., Getun G.V. Design of steel fiber reinforced concrete structures. Kyiv: UMK VO, 1989. 184 p.
- 5. SP 52-104-2006\*. Code of rules for design and construction: steel fiber concrete structures (to SNiP 52-01-2003). M.: FSUE "NIC "Construction", 2010. 63 p.
- 6. SP 360.1325800.2017. Code of rules for design and construction: steel fiber concrete structures (to SNiP 52-01-2003). M.: FSUE "Standartinform", 2018. 70 p.
- Safronov V.S. and Nguyen Dinh Hoa. Probabilistic risk assessment of the occurrence of limit states in the cross sections of bent reinforced concrete beams. Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Ser. Construction and Architecture. No. 1(10). 2010. Pp. 157-166.
- 8. Shapiro D.M., Agarkov A.V. Deformation nonlinear calculation of reinforced concrete tee beams. Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Ser. Construction and Architecture. No. 1(9). 2008. Pp. 27-33.
- Safronov V.S., Domanov D.I. Application of risk theory to assess the probability of cracking under constrained torsion of reinforced concrete bridge beams. In the collection: Fracture Mechanics of Concrete, Reinforced Concrete and Other Building Materials. Collection of articles based on the materials of the 7th international scientific conference: in 2 volumes, 2013. Pp. 31-38.

## PROBABILISTIC RELIABILITY ASSESSMENT OF NORMAL SECTION OF A BENDED REINFORCED CONCRETE BEAM WITH STEEL FIBER

V. S. Safronov<sup>1</sup>, D. A. Kiselev<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University Voronezh, Russia

<sup>1</sup>Dr. of Tech. Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)341 14 22, e-mail: vss22@mail.ru <sup>2</sup>MA Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: xdl908@yahoo.com

The methodology of non-linear deformation calculation of the normal section of the bending reinforced concrete beam with steel fiber using a piece of line-linearity of steelfibrite reinforcement and core reinforcement is described and tested. The impact on the bearing capacity of the percentage of the fiber in the beam of a rectangular cross section. The proposed algorithm is used for probabilistic assessment of reliability reinforced by steel fibers of the reinforcement. Graphs of changes in the logarithmic indicator of the reliability of the normal section depending on the percentage of the fiber and the coefficient of variation of the strength of steelfibrite concrete.

**Keywords:** reinforced concrete beam, rectangular cross section, steel fibers, nonlinear deformation calculation, bearing capacity, percentage of fiber reinforcement, probabilistic estimate, logarithmic reliability.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ax): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

### ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ, СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф., зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф., ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211. Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.