

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

Научный журнал

Выпуск № 4 (23), 2019

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения — Российская Федерация.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В.С., д-р техн. наук, проф.,

Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора: Ефреушин С.В., канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г.Е., канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

Буренин А.А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

Гриднев С.Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Зверев В.В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

Кирсанов М.Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Козлов В.А., д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Колчунов В.И., д-р техн. наук, проф., Юго-Западный государственный университет

Леденев В.В., д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам

Нугужинов Ж.С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан

Овчинников И.Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

Пшеничкина В.А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

Трещев А.А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет

Турищев Л.С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь

Шапиро Д.М., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Шимановский А.О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

Шитикова М.В., д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Редактор: Аграновская Н.Н.

Подписной индекс в каталоге агентства «Роспечать» - 66004

Дата выхода в свет 15.12. 2019. Усл. печ. л. 12,5. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ № 247.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 - 72895

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

(строительный факультет, кафедра строительной механики)

тел.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2019

**STRUCTURAL MECHANICS
AND STRUCTURES**

**Scientific Journal
ISSUE № 4 (23), 2019**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic affect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.
Territory of distribution — Russian Federation.

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Efrushin S.V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G.E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Burenin A.A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur

Gridnev S.Yu., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Zverev V.V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

Kirsanov M.N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

Kozlov V.A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Kolchunov V.I., Dr. of Tech. Sc., Prof., South-West State University

Ledenyov V.V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

Nguyen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

Nuguxhinov Zh.S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

Ovchinnikov I.G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

Pshenichkina V.A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

Trechshev A.A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University

Turichshev L.S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

Shapiro D.M., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Shimanovsky A.O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

Shitikova M.V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Editor: Agranovskaja N. N.

Subscription index in agency catalogue «Rospechat» - 66004

Publication date 15. 12. 2019. Conventional printed sheets 14,7. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order № 247

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate III № ФС 77 - 72895

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2019

СОДЕРЖАНИЕ
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Кирсанов М. Н., Бука-Ваиваде К. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей	7
Бойко А. Ю., Ткачук Г. Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе символьной математики MAPLE	15
Тимофеева Т. А. Формулы для расчет прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей	26
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	
Козлов В. А. Векторная форма метода конечных разностей в задачах теории тонких оболочек	34
Несмеев Ю. А. Способ вычисления корней уравнений, связанных с цепной линией или с перевернутой цепной линией	44
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ	
Сафронов В.С., Осипов С.А., Мельхиор Н. Сопоставление надежности типового железобетонного пролетного строения автодорожного моста для российских и европейских нормативных временных нагрузок.....	51
Аверин А.Н., Рыдченко Д. Г., Провоторова М. В. Расчет неразрезной сталежелезобетонной балки на подвижную нагрузку с учетом раскрытия трещин.....	63
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ	
Кузнецов Д. Н. Устойчивость состояния равновесия несущих конструкций в составе конечно-элементных систем	75
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	
Ефрюшин С.В., Юрьев В. В. Численное моделирование огнестойкости железобетонной плиты с помощью программного комплекса ANSYS	86
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ	
Аль-Бухейти А. Я., Даниш А. Б., Леденев В. В., Савинов Я. В. Экспериментально-теоретические исследования перемещений близко расположенных фундаментов при действии плоской системы сил	93
Правила оформления статей	108

CONTENT

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

M.N. Kirsanov, K. Buka-Vaivade

Analytical expressions of frequencies of small oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels 7

A.Yu.Boyko, G.N. Tkachuk

Derivation of the formulas for the deflection of a flat hinged-rod frame in the of symbol mathematics MAPLE system..... 15

T.A. Timofeeva

Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels 26

APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS OF SOLID BODY UNDER DEFORMATION

V.A. Kozlov

Vector form of finite difference method in the problems of thin shell theory..... 34

Yu.A. Nesmeev

Way of calculation of roots the equations connected with the chain line or with the turned chain line 44

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES

V. S. Safronov, S. A. Osipov, N. Mel'khior

Comparison of reliability of typical reinforced concrete span structure of the road bridge for Russian and European normative temporary loads..... 51

A. N. Averin, D.G. Rydchenko, M.V. Provotorova

Calculation of a continuous reinforced concrete beam for moving load taking into account crack opening displacement 63

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

D. N. Kuznetsov

Stability of the equilibrium state of bearing structures in composition of finite element systems..... 75

CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

S.V. Efryushin, V.V. Yuriev

Numerical modeling of fire resistance of reinforced concrete plate using ANSYS software complex..... 86

CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES

A.Y. Al-Bukhaiti, A.B. Danish, V.V. Ledenev, Y.V. Savinov

Experimental and theoretical investigations of close-located foundations movements under the actions of plane force systems..... 93

Requirements for articles to be published..... 108

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04:531.391.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЧАСТОТ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов¹, К. Бука-Ваиваде²

Национальный исследовательский университет “МЭИ”
Россия, г. Москва²
Рижский технический университет
Латвия, г. Рига

¹Д-р физ.-мат. наук, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

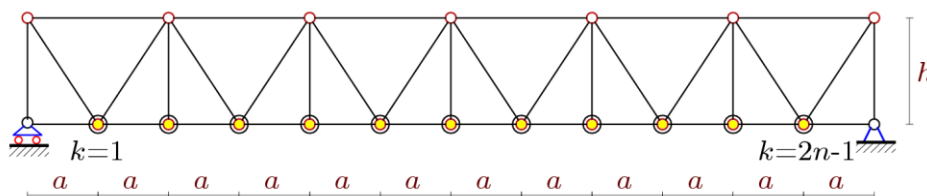
² Аспирант, тел.: +37128877852; e-mail: karina.buka-vaivade@rtu.lv

Для вывода аналитической оценки нижней частоты собственных колебаний плоской статически определимой фермы рассмотрена инерционная модель фермы с массами, сосредоточенными в узлах ее нижнего пояса. Смещения грузов предполагаются вертикальными. Прогибы фермы под действием сосредоточенных сил, приложенных к узлам с массами и рассчитанные по формуле Максвелла – Мора, дают значения коэффициентов матрицы податливости фермы. Для оценки по методу Донкерлея требуются только диагональные элементы матрицы. Искомая оценочная формула получена методом индукции расчетом нижней границы первой частоты для отдельных ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Это дает найти зависимость частоты колебаний фермы не только от ее размеров, но и от числа панелей. Коэффициенты формулы определяются из решения рекуррентных уравнений для элементов последовательностей, полученных из частных решений. В расчетах и анализе использована система компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, первая частота колебаний, оценка Донкерлея, индукция, аналитическое решение, Maple.

The natural oscillation frequencies of the trusses required to assess the dynamics of the structure are calculated, as a rule, numerically [1-6]. In most cases, these solutions are used in optimization problems [7-9]. At the same time, a common and quite acceptable approximation is the truss model with concentrated masses at the nodes [10,11]. However, as practice shows [11-16], in such a formulation it is possible to obtain an analytical solution. The most demanded in practical calculations is the first, the lowest frequency of oscillations. The Donkerley method [17] makes it possible to derive a fairly simple formula for the lower bound of this value.

Consider a truss with a triangular lattice consisting of n identical panels (Fig. 1). Each panel includes two bars of lower chord of length a , two multidirectional struts of length $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ and struts of height h . In the truss the $m = 3n + 5$ bars, including three bars corresponding to the supports.



Rice. 1. Trussat $n=6$. In the nodes of the lower chord are the masses m_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$

The mass of the truss is evenly distributed over the nodes of the lower chord of the truss: $m_k = m, k = 1, \dots, 2n-1$. The estimation formula of Dunkerley gives a lower bound of the first natural frequency $\tilde{\omega}$ of the mass in the node

$$\tilde{\omega}^2 = 1 / \sum_{k=1}^{2n-1} 1 / \omega_k^2 . \quad (1)$$

Here is a notation ω_k for the oscillation frequency of a single mass m_k , at the node $k + 1$ of the lower chord, in the absence of all other masses. Numbering of knots is conducted from the left support. The differential equation of mass $m_k = m$ oscillations of the second order has the form

$$m\ddot{y}_k + d_{k,n}y_k = 0,$$

where y_k — vertical mass displacement, \ddot{y}_k — acceleration, $d_{k,n}$ — stiffness coefficient of mass with number k , n — number of panels in the truss. It follows that the frequency of oscillations of the load $\omega_k = \sqrt{d_{k,n} / m}$. The stiffness coefficient can be calculated through the flexibility coefficient by the Maxwell-Mohr formula:

$$\delta_{k,n} = 1 / d_{k,n} = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,k}^2 l_i}{EF_i} .$$

Here it is indicated $S_{i,k}$ — the forces in the bar numbered $i = 1, \dots, m-3$ from the action of a single vertical force applied to the node in which the load is located with the number k , l_i — the length of the bar. It is accepted that the stiffness of all bars is the same: $EF_i = EF$. Three rigid support bars are not included.

The forces in the bars of the truss are determined by the program [11] in symbolic form. In the program by analogy with [11-17] coordinates of nodes and the scheme of connection of bars in nodes are entered. The origin is located in the left support:

$$\begin{aligned} x_i &= a(i-1), \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \\ x_{i+2n+1} &= 2a(i-1), \quad y_{i+2n+1} = h, \quad i = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

The lattice of the truss and its chord is formed by vectors $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$ containing the numbers of the ends of the bars. The upper and lower chords are defined as follows:

$$\begin{aligned} \bar{N}_i &= [i, i+1], \quad i = 1, \dots, 2n, \\ \bar{N}_{i+2n} &= [i+2n+1, i+2n+2], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

The grid (struts and braces) correspond to the vectors

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i+3n+1} &= [2i-1, i+2n+1], \quad i = 1, \dots, n+1, \\ \bar{N}_{i+4n+1} &= [2i, i+2n+1], \quad \bar{N}_{i+5n+1} = [2i, i+2n+2], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

The system of equilibrium equations of nodes in projections on the axis is entered into the program written in matrix form. The matrix of the system consists of the guiding cosines of the forces. Odd rows of the matrix consist of projections of unit vectors of forces on the horizontal axis, even — on the vertical. Depending on the considered node with mass, to which a single force is applied, the distribution of forces on the bars is markedly different depending on the parity of the load number (Fig. 2,3). Compression bars are highlighted in black, tension — in red. The thickness of the lines is proportional to the force.

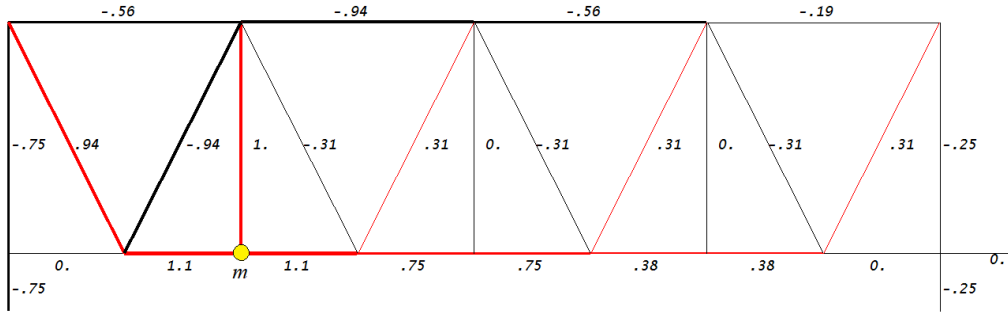


Fig. 2. The distribution of forces in the bars in fractions of 1 when considering the mass with an even number $n=4$, $k=2$, $a=3m$, $h=4m$

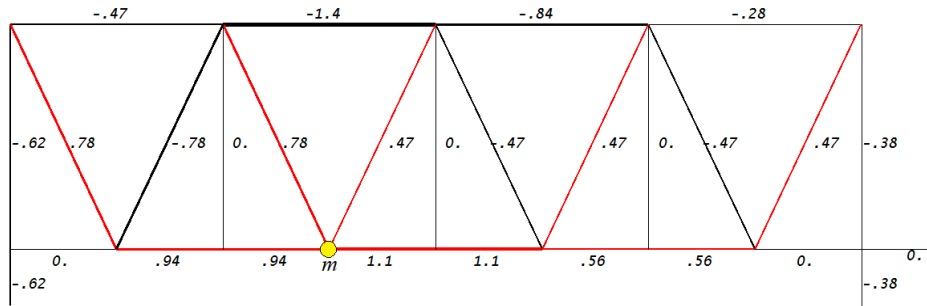


Fig.3. The distribution of stresses in the bars when considering odd weight $n=4$, $k=3$, $a=3m$, $h=4m$

Solving individual problems for trusses with a consistently increasing number of panels $n=1, 2, 3, \dots$, gives an expression of the flexibility coefficient from the action of a unit force in a node with mass k of the form

$$\delta_{k,n} = \frac{C_{1,k,n}a^3 + C_{2,k,n}c^3 + C_{3,k,n}h^3}{n^2 h^2 EF},$$

To obtain the dependence of the coefficients in this expression on the number of panels n and the number of nodes with masses k , the induction method is used. First, with a fixed number of nodes with masses coefficients are obtained for a different number of panels:

$$\delta_{1,1} = \frac{a^3 + c^3 + h^3}{2h^2 EF}, \quad \delta_{1,2} = \frac{14a^3 + 6c^3 + 5h^3}{8h^2 EF}, \quad \delta_{1,3} = \frac{55a^3 + 15c^3 + 13h^3}{18h^2 EF},$$

$$\delta_{1,4} = \frac{140a^3 + 28c^3 + 25h^3}{32h^2 EF}, \dots$$

For the coefficient $C_{1,1,n}$ using the operator **rgf_findrecur** of the Maple system we obtain a recurrent equation for the common term

$$C_{1,1,n} = 4C_{1,1,n-1} - 6C_{1,1,n-2} + 4C_{1,1,n-3} - C_{1,1,n-4}.$$

The solution of this equation can be obtained using the **rsolve** operator:

$$C_{1,1,n} = 4n^3 / 3 - n^2 + n / 6.$$

Similarly, for $k=1$, we find the coefficients

$$C_{2,1,n} = n^2 - n / 2,$$

$$C_{3,1,n} = n^2 - n + 1 / 2.$$

When $k=2$ we have

$$C_{2,1,n} = 16n^3 / 3 - 10n^2 + 14n / 3,$$

$$C_{2,1,n} = 2n^2 - 2n,$$

$$C_{3,1,n} = 2n^2 - 2n + 2.$$

To obtain a generalization of the number of masses k will be required to carry out the calculations for $k=1,2,\dots,8$. Generalizing these solutions using the same operators **rgf_findrecur** and **rsolve**, we obtain the final formula for the coefficients

$$C_{2,k,n} = nk(2k^2 - 4nk - 1)(k - 2n) / 6,$$

$$C_{2,k,n} = kn(2n - k) / 2,$$

$$C_{3,k,n} = (((-1)^k + 3)n^2 - 2nk + k^2) / 2.$$

Thus, the dependence of the flexibility coefficient on the number of panels and number of nodes with mass is obtained. For even $n = 2j$, the expression has the form

$$\delta_{k,n} = (z_1 a^3 + z_2 c^3 + z_3 h^3) / (6n^2 h^2 EF),$$

where

$$z_1 = 2jk(4j - k)(1 + 8jk - 2k^2),$$

$$z_2 = 6jk(4j - k),$$

$$z_3 = 3(k^2 - 4jk + 4j^2(-1)^k + 12j^2).$$

Summing, according to $\omega_k^2 = 1 / (m\delta_{k,n})$ (1), we obtain the desired lower estimate of the first frequency of natural oscillations.

$$\tilde{\omega}_n = 6h\sqrt{5jEF / (m(2j(512j^4 + 80j^2 - 7)a^3 + 30(16j^2 - 1)jc^3 + 15(1 - 24j + 56j^2)h^3))}.$$

A similar but more cumbersome expression holds for odd n 's.

Graphs of the dependence of the oscillation frequency on the span length show that at a fixed span length, an increase in the number of panels leads to a decrease in frequency (Fig. 4, 5).

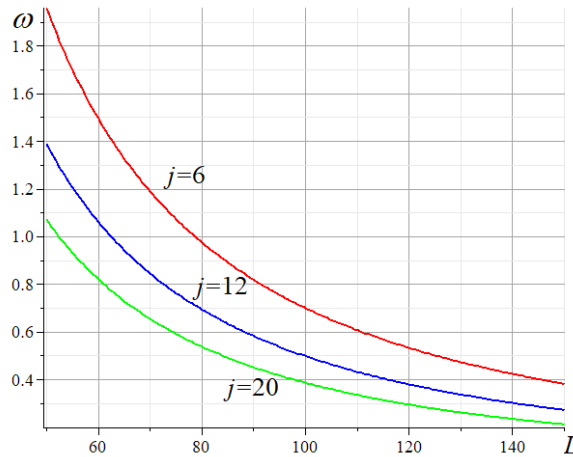


Fig. 4. Oscillation frequency depending on span length and number of panels at $h=4m$, $a = L/n = L/(2j)$, $EF = 2 \cdot 10^4 kN$, $m = 150kg$

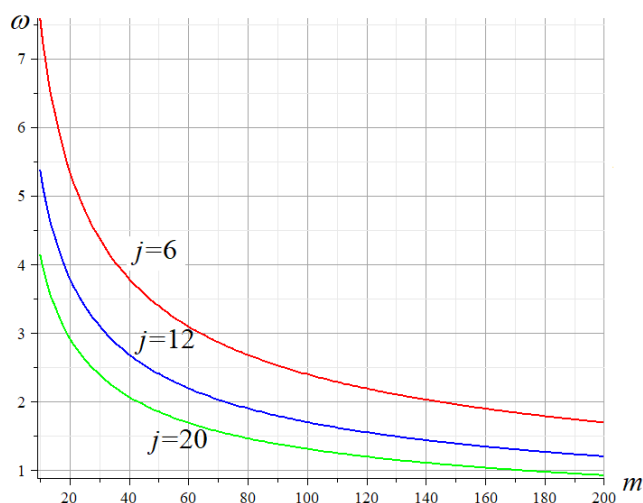


Fig. 5. Oscillation frequency depending on span length and number of panels at $h=4m$,
 $a = L/n = L/(2j)$, $L = 50m$, $EF = 2 \cdot 10^4 kN$

In conclusion, it is stated that in comparison with solutions with one natural parameter specifying the order of the regular structure, to which we apply the induction method when deriving the general solution [18], in problems of vibration of a system with a discretely distributed mass (here - at the nodes of the lower chord) at least two natural parameters arise - the number of panels and the node number with mass. This greatly complicates the task. For example, if 10 separate solutions are required to obtain a sequence of numbers long enough to reveal its common term, then in a two-parameter problem this number increases to about 100. It should be borne in mind that symbolic transformations in computer mathematics systems require an order of magnitude more time than numerical transformations. Therefore, it is not always possible to construct an analytical dependence of dynamic characteristics on the order of a regular system.

Библиографический список

1. Bachmann H. *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. 234 p.
2. Алдушкин Р. В., Савин С. Ю. Исследование работы треугольных ферм при статических и динамических воздействиях // *Строительство и реконструкция*. 2010. №. 3-29. С. 3-6.
3. Рыбаков Л. С., Мишустин И. В. Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. №. 2. С. 3-16.
4. Рыбаков Л. С., Мишустин И. В. Применение метода сосредоточенных масс к анализу собственных упругих колебаний одной регулярной ферменной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. №. 4. С. 51-64.
5. Мишустин И. В., Рыбаков Л. С. Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2003. №. 2. С. 168-184.
6. Коробко В. И., Алдушкин Р. В., Бояркина О. В. Экспериментальные исследования стальных ферм с параллельными поясами на статические и динамические воздействия // *Известия ОрелГТУ. Серия «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии»*. Орел: Орел ГТУ. 2009. №. 2/274. С. 9-12.

7. Vaez S. R. H., Mehanpur H., Fathali M. A. Reliability assessment of truss structures with natural frequency constraints using metaheuristic algorithms // *Journal of Building Engineering*. – 2019. – С. 101065.
8. Lieu Q. X., Do D. T. T., Lee J. An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints // *Computers & Structures*. – 2018. – Т. 195. – С. 99-112.
9. Pham H. A. Truss optimization with frequency constraints using enhanced differential evolution based on adaptive directional mutation and nearest neighbor comparison // *Advances in Engineering Software*. – 2016. – Т. 102. – С. 142-154.
10. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 31 октября 2014. С. 17-18.*
11. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. [С. 31-34.](#)
12. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14. № 3 (126). С. 284-292.
13. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14. № 7. С. 844-851.
14. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. №1(20). С. 14-20.
15. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: автореф. ... канд. техн. наук. – М. – 20 с.
16. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // *Строительство: наука и образование*. 2018. - Т. 8. - №. 4. - Ст. 3.
17. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 3. С. 45-49.
18. Pyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Structural mechanics and strength of materials*. 2019. Vol. 3. No. 22. pp. 29-38

Reference

1. Bachmann H. *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. 234pp.
2. Aldushkin R.V., Savin S.Yu. Study of the work of triangular trusses under static and dynamic effects. *Construction and Reconstruction*. 2010. No. 3-29. Pp. 3-6.
3. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Own oscillations of plane regular elastic trusses of orthogonal structure. *Mechanics of composite materials and structures*. 1999. Vol. 5. No. 2. p. 3-16.
4. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Application of the method of concentrated masses to the analysis of natural elastic oscillations of one regular truss structure. *Mechanics of Composite Materials and Designs*. 1999. Vol. 5. No. 4. Pp. 51-64.
5. Mishustin I.V., Rybakov L. S. Oscillations of flat elastic trusses of orthogonal structure. *News of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics*. 2003. No. 2. Pp. 168-184.

6. Korobko V.I., Aldushkin R.V., Boyarkina OV. Experimental studies of steel trusses with parallel belts on static and dynamic effects. *Izvestia Orel GTU. Series "Fundamental and applied problems of engineering and technology."* Orel: Orel GTU. 2009. No. 2/274. Pp. 9-12.
7. Vaez S. R. H., Mehanpur H., Fathali M. A. Reliability assessment of truss structures with natural frequency constraints using metaheuristic algorithms. *Journal of Building Engineering.* 2019. Pp. 101065.
8. Lieu Q. X., Do D. T. T., Lee J. An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints. *Computers & Structures.* 2018. 195. Pp. 99-112.
9. Pham H. A. Truss optimization with frequency constraints using enhanced differential evolution based on adaptive directional mutation and nearest neighbor comparison. *Advances in Engineering Software.* 2016. 102. Pp. 142-154.
10. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. Own vibration frequencies of a flat beam truss of a regular structure/ *Science and education in the 21st century: a collection of scientific papers based on the materials of the International Scientific and Practical Conference on October 31, 2014 in 17 parts. Part 11.* Tambov: Consulting Company Ucom LLC, October 31, 2014. Pp. 17-18.
11. Kanatova M.I. Frequency equation and vibration analysis of a flat beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics.* M: Infra-M. 2015. V. 1. S. 31-34.
12. Kirsanov M.N. Formula zavisimosti nizenshey chastoty kolebaniya balochnoy fermy ot chisla paneley // *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy.* 2019. № 3. Pp. 45-49.
13. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU.* 2019. V.14.№3. Pp.179-187.
14. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU.* 2019. T. 14. № 7. C. 844-851.
15. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of the frequencies of small oscillations of a girder with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and structures.* 2019. №1(20). Pp. 14-20.
16. Tinkov D.V. Analytical solutions for the problem of natural frequencies in regular truss systems: synopsis ... candidate of engineering sciences. – M. – 20 p.
17. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the frequency of the load oscillation at an arbitrary girder node in the system Maple. *Construction: Science and Education.* 2018. – V. 8. - № 4. – Pp. 3. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3
18. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame// *Structural mechanics and strength of materials.* 2019. Vol. 3. No. 22. pp. 29-38.

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF FREQUENCIES OF SMALL OSCILLATIONS OF A BEAM TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹, K. Buka-Vaivade²

National Research University «MPEI»¹,
Russia. Moscow

Riga Technical University²,
Latvia. Riga

¹Dr. Sci., Professor tel.: +7(916)592-49-52; e-mail:c216@ya.ru

² Doctoral student tel.: +37128877852;e-mail:karina.buka-vaivade@rtu.lv

To derive an analytical estimate of the lower eigenfrequency of a plane statically determinate truss, an inertial model of a truss with masses concentrated in the nodes of its lower chordis considered. Displacements of the nodes with masses are assumed to be vertical. The deflections of the truss under the action of concentrated forces applied to the nodes with masses and calculated by the Maxwell-Mohr formula give the values of the coefficients of the truss flexibility matrix. For the evaluation according to the method of Dunkerley only requires the diagonal elements of the matrix. The required estimate formula is obtained by induction calculation of the lower bound of the first frequency for individual trusses with a consistently increasing number of panels. This makes it possible to find the dependence of the frequency of oscillations of the truss not only on its size, but also on the number of panels. The coefficients of the formula are determined from the solution of recurrent equations for elements of sequences obtained from partial solutions. Maple computer mathematics system is used in calculations and analysis.

Keywords: truss, the first frequency of oscillation, assessment of Dunkerley, induction, analytical solution, Maple

ВЫВОД ФОРМУЛ ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

А. Ю. Бойко¹, Г. Н. Ткачук²

Национальный исследовательский университет "МЭИ"¹

Московский Физико-Технический Институт²

Россия, г. Москва

¹Студент; e-mail: boykoanyu@mail.ru

²Студент; e-mail: geoyukos@yandex.ru

Симметричная внешне статически неопределимая ферма решетчатого типа с прямолинейным верхним поясом и опущенным в середине пролета нижним поясом загружается вертикальной силой в центре или равномерно по узлам верхнего пояса. С помощью метода индукции выводятся аналитические зависимости прогиба середины пролета от числа панелей по длине пролета и по высоте. Используется формула Максвелла - Мора и аппарат составления и решения рекуррентных уравнений для получения общего решения. Уравнения равновесия узлов для определения усилий в стержнях решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Выявлена квадратичная по числу панелей асимптотика решения.

Ключевые слова: Ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple

Введение

Расчет строительных конструкций в настоящее время производится в основном численно [1-4] с использованием различных программ, основанных, как правило, на методе конечных элементов. С развитием простых и доступных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Derive, Reduce и др.) появилась возможность получения аналитических решений для строительных конструкций. Особенно эффективны такие решения для регулярных статически определимых систем. В 2005г. Хатчинсон и Флек объявили "охоту" на схемы статически определимых регулярных ферм [5,6]. Такие фермы допускают аналитические решения задачи о деформации под действием различных (также регулярных) нагрузок, в которые помимо размеров и величин нагрузок как целочисленные параметры входят числа, определяющие порядок регулярности схем. Наибольшее число решений таких задач получено методом индукции с применением систем компьютерной математики. В [7-13] методом индукции в системе Maple получены решения для различных пространственных ферм. Аналитические расчеты различных ферм арочного типа даны в [14-21]. Метод индукции, примененный в этих решениях в сочетании с мощностью операторов системы Maple позволяет также рассчитывать такие конструкции как торсионные подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа [22], вантовые системы [23] и свайные фундаменты [24]. Метод индукции для обобщения частных решений на произвольное число панелей описан, в частности, в [25, 26]. В [27] дано решение для фермы, допускающей при определенном числе панелей кинематическую изменяемость. Расчет жесткости стержневой решетки произведен в [28]. Сравнительный анализ формул для жесткости различных решетчатых ферм выполнен в [29]. Фермы с усиленной решеткой аналитически рассчитаны в [30-34]. Внешне статически неопределимая ферма рассчитана методом индукции в [35], многорешетчатая — в [36].

Для различных плоских ферм под действием как сосредоточенных, так и распределенных нагрузок, формулы для прогиба получены в [37-40]. Метод двойной индукции (по числу панелей и по месту положения груза) применен в [41-46] для оценки собственных частот плоских ферм.

Среди всех этих задач наибольшую трудность вызывают задачи с двумя независимыми целочисленными параметрами. Если трудность задачи с одним параметром можно оценить числом N отдельных решений с конкретными последовательно увеличивающимися числами, задающими порядок регулярности (например, числами панелей в ферме балочного типа), то для двойной индукции это число равно N^2 . При этом в некоторых задачах, особенно с внешней статической неопределенностью [35], в которых реакции опор определяются не из равновесия конструкции в целом, а из совместного решения уравнений равновесия всех узлов фермы, минимальная длина идентифицируемой последовательности решений может достигать 20 и в некоторых случаях и более того. Учитывая, что аналитические преобразования или преобразования с целыми числами в системах компьютерной математики производятся значительно дольше, получение точных формульных зависимостей прогиба или усилий в стержнях от порядка системы вызывает большие трудности, связанные с затратами времени. Безусловно, в отличие от численных решений, которые необходимо проводить всякий раз, когда меняются какие-то параметры задачи, а в процессе проектирования такое бывает многократно, аналитические решения находятся один раз, а могут быть легко и без погрешностей использованы многократно. Именно к таким задачам относится рассматриваемая задача о деформации фермы, пропорции которой управляются двумя независимыми параметрами - числом условных панелей по длине пролета и по высоте фермы (рис. 1). Две особенности фермы: утолщение ригеля в середине и четыре неподвижные опоры, определяющие ее внешнюю статическую неопределенность. Утолщение ригеля может быть использовано для крепления неподвижного кранового оборудования или освещения.

Такой параметр, как число ячеек периодичности, или число панелей значительно увеличивает область использования расчетных формул для регулярных ферм, обладающих некоторой периодичностью структуры.

Расчет

Рассмотрим ферму высотой $h(m+2)$ и длиной пролета $2(n+3)a$ (рис. 1). Ферма с $2n+6$ панелями (считаются по верхнему поясу ригеля) и $m+2$ в боковых опорных частях, содержит $8(m+n)+32$ стержней, не включая опорные. К ферме приложена сосредоточенную нагрузку P в центральной части пролета.

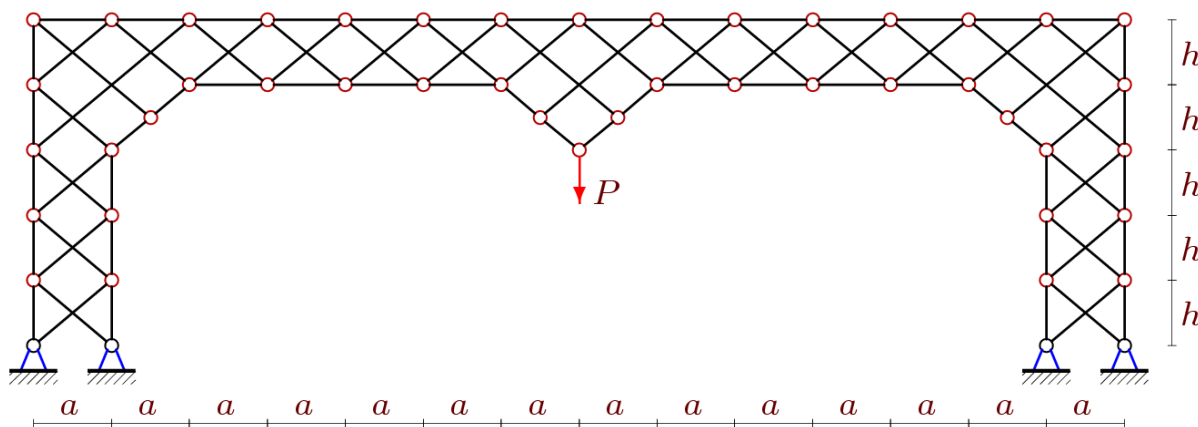


Рис. 1. Ферма при $n=4$, $m=3$

Вывод аналитической зависимости прогиба от числа панелей, иначе говоря, решение задачи, начинается с определения усилий в стержнях. В работе [47] разработана Maple-программа, основанная на методе вырезания узлов и составления матрицы уравнений равновесия всех узлов, позволяющая решить задачу об усилиях в символьной форме. В программу вводятся порядок соединения стержней и узлов и их координаты (рис. 2).

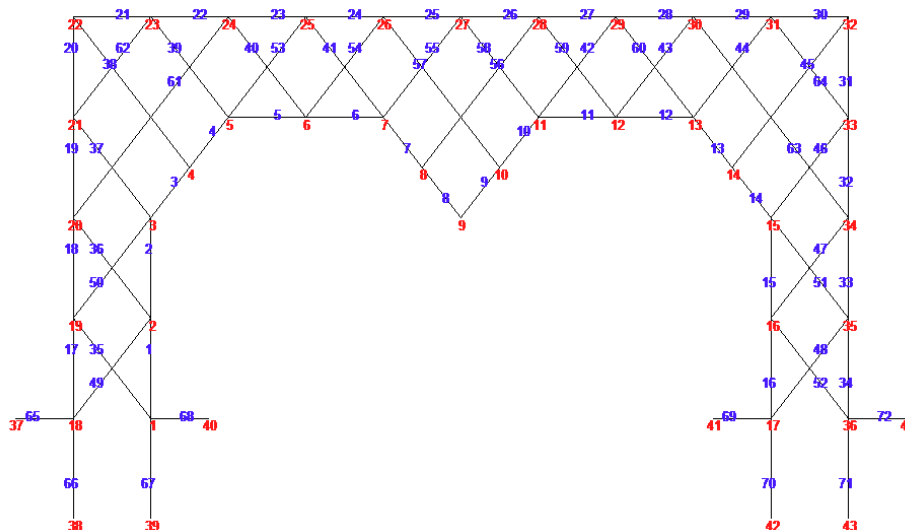


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n=m=2$

Смещение вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{8m+8n+32} S_i s_i l_i / (EF),$$

где s_i — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу с номером $m+n+5$ в нижней точке утолщения, S_i — усилия от внешней нагрузки, распределенной по узлам верхнего пояса (рис. 3), l_i — длины стержней, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для всех стержней конструкции.

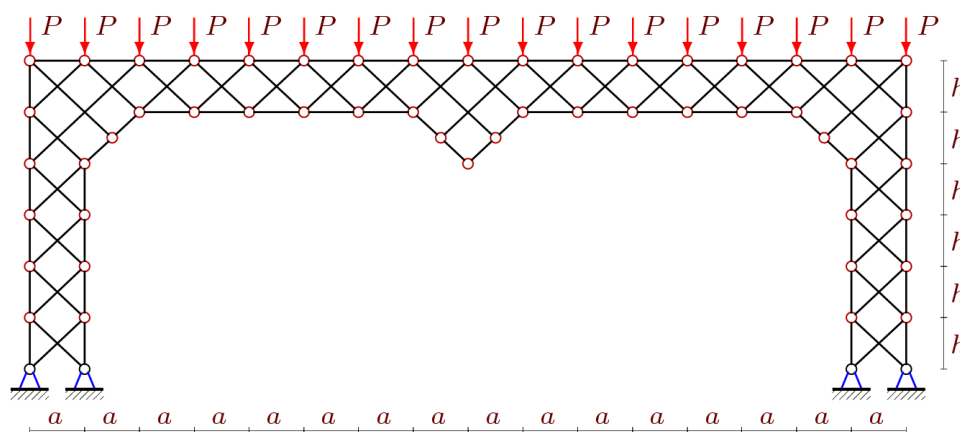


Рис. 3. Ферма при $n=5, m=4$. Нагружен верхний пояс

На основе анализа решения задачи о прогибе ферм с различным числом панелей получено следующее выражение для прогиба

$$EF\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / h^2, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$.

Рассчитаем коэффициенты в (1) от нагрузки для одиночной нагрузки (рис.1). Методом двойной индукции (сначала по n , а затем по m) обобщением 14 решений были получены коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2n^3 - 6n^2 - n(3(-1)^n - 7) + 3(-1)^n + 21) / 6, \\ C_2 &= (2n^2 - n(3 + (-1)^n) + 8 + 2m) / 4, \end{aligned} \quad (2)$$

$$C_3 = (4m^3 + 18m^2 + 32m + 6n^2 - 18n + 12n^2m - 12nm^2 - 36nm + 15 + 6(1-n)(-1)^n + 3(-1)^{(m+n)}) / 12.$$

Для этого с помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple были найдены и решены однородные линейные рекуррентные уравнения вида

$$C_{1(n)} = 2C_{1(n-1)} + C_{1(n-2)} - 4C_{1(n-3)} + C_{1(n-4)} + 2C_{1(n-5)} - C_{1(n-6)}. \quad (3)$$

$$C_{2(n)} = C_{2(n-1)} + 2C_{2(n-2)} - 2C_{2(n-3)} - C_{2(n-4)} + C_{2(n-5)}. \quad (4)$$

$$C_{3(n)} = C_{3(n-1)} + 2C_{3(n-2)} - 2C_{3(n-3)} - C_{3(n-4)} + C_{3(n-5)}. \quad (5)$$

Решения (2) этих уравнений получены при помощи оператора **rsolve** с соответствующими начальными данными. Приведем соответствующие фрагменты программы на языке Maple

```
>n:='n':
>S:=seq(C2[i],i=1..Nmax); # последовательность коэффициентов
>Z:=rgf_findrecur(Nmax/2,[S],t,n);# поиск уравнения
>w:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..Nmax/2)},t));
>sort(w);factor(w);
>
S := 4, 4, 7, 8, 14, 16, 25, 28, 40, 44
Z := t(n) = t(n - 1) + 2 t(n - 2) - 2 t(n - 3) - t(n - 4) + t(n - 5)
>m:='m':
>S:=seq(C_2[i],i=1..10);
>Z:=rgf_findrecur(5,[S],t,m);
>c3[m]:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..5)},t));
>print(m,c3[m]);
S :=  $\frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{5}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 3, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{7}{2},$ 
 $4 - \frac{3n}{4} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} + \frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{9}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 5,$ 
 $\frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{11}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 6,$ 
 $\frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + \frac{13}{2}, \frac{n^2}{2} + \frac{n(-1)^{(n+1)}}{4} - \frac{3n}{4} + 7$ 
Z := t(m) = 2 t(m - 1) - t(m - 2)
```

Под временной переменной $t(n)$ или $t(m)$ подразумеваются искомые коэффициенты.

Коэффициенты в решении (1) в случае нагрузки по *верхнему* поясу (рис.3), приложенной в узлах фермы с порядковыми номерами от $3m + 2n + 12$ до $3m + 4n + 18$ имеют вид:

$$C_1 = (3n^4 + 2n^3 - 3n^2((-1)^n + 2) + 2n(3(-1)^n - 20) + 72) / 12,$$

$$C_2 = (4n^3 + n^2(3 - (-1)^n) - 4n(1 + (-1)^n) + 4nm - 2(-1)^n + 18 + 2m(5 + (-1)^n)) / 8,$$

$$C_3 = (8(5 + 2n)m^3 + 36(4 - n^2 - n)m^2 + (24n^3 - 136n - 12n^2 + 6(-1)^n + 194)m + 12n^3 + (6(-1)^{m+n} - 90 - 12(-1)^n)n - 6((-1)^n + 1)n^2 + 3(-1)^m + 21(-1)^{m+n} + 105 + 15(-1)^n) / 24$$

Отметим, что в данном случае общая формула (1) расчета прогиба не изменилась. Также остались неизменными и уравнения по переменной m . Графики решения построим для относительной безразмерной величины прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P'L)$, где $P' = P(2n + 7)$ — суммарная нагрузка на ферму. Принят пролет длиной $L = 2(n + 3)a$.

На рис. 4 с ростом высоты h прогиб закономерно уменьшается. На рис. же 5 эта закономерность наблюдается только при малых m . После некоторого значения m кривые пересекаются и зависимость от высоты получается обратной.

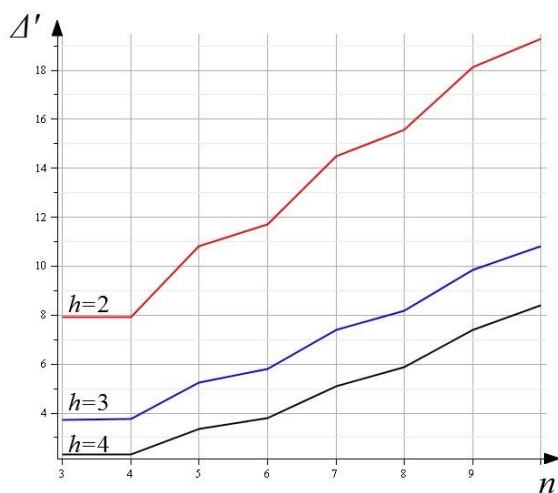


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей n

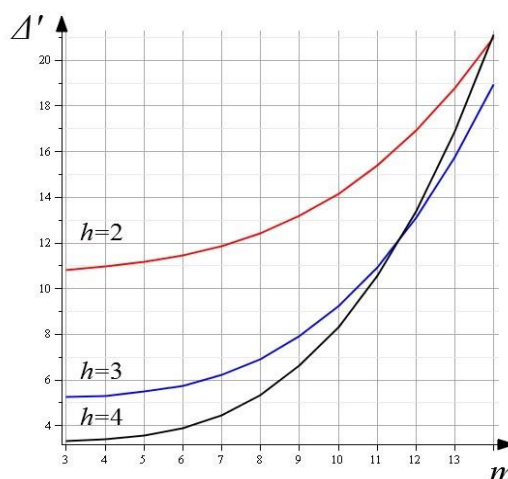


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей m

Аналитическая форма решения позволяет оценить его асимптотику. В случае нагружения распределенными силами по узлам верхнего пояса выясняем, что полученная зависимость на рисунке 4, независимо от некоторой неравномерности роста прогиба в начале графика, в пределе квадратичная:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = h(1 + m) / (2L)$$

Для случая сосредоточенной нагрузки этот предел в два раза больше, изломы на кривых рисунка 4 сильнее, а кривые на рисунке типа 5 пересекаются при значительно больших m .

Выводы

В настоящей работе получены формулы, позволяющие оценивать деформативность предложенной схемы фермы. Сам алгоритм может быть применен и перенастроен на другие нагрузки. В силу линейности задачи по нагрузкам комбинацией отдельных решений можно

получить аналитические решения для достаточно широкого класса задач. Особенно эффективно построенное решение при большом числе панелей в ферме, т. е. в тех случаях, когда при численном решении системы уравнений большой размерности возникают трудности преодоления «проклятия размерности», связанного с неизбежным накоплением ошибок округления счета.

Авторы благодарят профессора Кирсанова М. Н. за схему фермы и алгоритм решения.

Библиографический список

1. Алешкин А. В. Разработка графического интерфейса для расчета плоской фермы методом конечных элементов //Всероссийская ежегодная научно-техническая конференция "Общество, наука, инновации"(НТК-2012). – 2012. – С. 1607-1612.
2. Безмельницин В. Т., Щербаков А. М. Примеры расчета строительных конструкций с использованием программы FEMAP //Достижения вузовской науки: Сб. матер. IX Межд. научн.-практ. конф./под общ. ред. С.С. Чернова.—Новосибирск: Издательство ЦРНС. – 2014. – С. 104-108.
3. Дмитриева Т. Л. Программный комплекс расчета и оптимизации строительных конструкций «РОСК» //Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2011. – №. 1 (1).
4. Соколов А. А., Логачев К. И., Зинькова В. А. Численные исследования напряженно-деформированного состояния узловых бесфасоночных соединений трубчатых элементов ферм //Промышленное и гражданское строительство. – 2007. – №. 8. – С. 40-41.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. p. 607 – 617.
6. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 54, Issue 4, April 2006, Pages 756-782.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
9. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
11. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
12. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 58-66.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
14. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.

15. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
16. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
17. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
18. Бирбасов А. А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
19. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
20. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
21. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
22. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18-22.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. Т. 79. № 1. С. 29-33.
24. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 3 (55). С. 3-9.
25. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
26. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
27. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
28. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
29. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). С. 84-105.
30. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "star" в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
31. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
32. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
33. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.

34. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 2. С. 122-125.
35. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
36. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
37. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
38. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
39. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
40. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
41. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.
42. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитический расчет частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. № 12. С. 21-23.
43. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
44. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 31 октября 2014. С. 17-18.
45. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (126). С. 284-292.
46. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 7. С. 844-851.
47. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

References

1. Aleshkin A. V. Razrabotka graficheskogo interfeysa dlya rascheta ploskoy fermy metodom konechnykh elementov. Vserossiyskaya yezhegodnaya nauchno-tehnicheskaya konferentsiya "Obshchestvo, nauka, innovatsii"(NTK-2012). 2012. Pp. 1607-1612.
2. Bezmel'nitsin V. T., Shcherbakov A. M. Primery rascheta stroitel'nykh konstruksiy s ispol'zovaniyem programmy FEMAP. Dostizheniya vuzovskoy nauki: Sb. mater. IX Mezhd. nauchn.-prakt. konf./pod obshch. red. SS Chernova. Novosibirsk: Izdatel'stvo TSRNS. 2014. Pp. 104-108.
3. Dmitriyeva T. L. Programmnyy kompleks rascheta i optimizatsii stroitel'nykh konstruksiy «ROSK». Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost'. 2011. №. 1 (1).

4. Sokolov A. A., Logachev K. I., Zin'kova V. A. Chislennyye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uzlovykh besfasonochnykh soyedineniy trubchatykh elementov ferm. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. 2007. № 8. Pp. 40-41.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. 85, No. 9. Pp. 607 – 617.
6. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 54, Issue 4, April 2006, Pp. 756-782.
7. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye zhestkosti prostranstvennoy staticheski opredelimoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2017. T. 12. № 2 (101). Pp. 165-171.
8. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy regul'yarnoy struktury s ploskoy gran'yu. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2015. № 2 (259). Pp. 2-6.
9. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konstruksii v sisteme Maple. V sbornike: *Informatizatsiya inzhenerenogo obrazovaniya INFORINO-2014 Trudy mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii*. 2014. Pp. 239-242.
10. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i optimizatsiya prostranstvennoy balochnoy fermy. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta. Vestnik MEI*. 2012. № 5. Pp. 5-8.
11. Kirsanov M.N. Otsenka progiba i ustoychivosti prostranstvennoy balochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2016. № 5 (268). Pp. 19-22.
12. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2017. № 8 (76). Pp. 58-66.
13. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 2012. № 1. Pp. 49-53.
14. Kirsanov M.N. Sravnitel'nyy analiz zhestkosti dvukh skhem arochnoy fermy. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55.
15. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. O zavisimosti deformatsiy ploskoy arochnoy fermy ot chisla paneley. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2017. № 5 (274). Pp. 9-14.
16. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta deformatsiy arochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 2018. № 4 (67). Pp. 86-94.
17. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye deformatsiy ploskoy fermy arochnogo tipa. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48.
18. Birbasov A. A. Analiticheskiy raschet progiba ploskoy arochnoy fermy, nagruzhennoy po verkhnemu poyasu. *Nauchnyy al'manakh*. 2016. №6-2 (19). Pp. 198-201.
19. Savinykh A. C. Analiz progiba arochnoy raskosoy fermy, nagruzhennoy po verkhnemu poyasu.. *Stroitel'stvo i arkhitektura*. 2017. Tom 5. Vypusk 3 (6). Pp. 12-17.
20. Tin'kov D.V. Raschet progiba ploskoy arochnoy fermy s krestoobraznoy reshetkoy. *Postulat*. 2017. № 12 (26). S. 74.
21. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2018. T. 1. № 16. S. 12–33.
22. Kirsanov M.N. Zhestkost' torsionnoy podveski mikromekhanicheskogo volnovogo tverdotel'nogo giroskopa. *Pribory i sistemy. Upravleniye, kontrol', diagnostika*. 2015. № 3. Pp. 18-22.
23. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet deformatsiy i usilij v ploskoy vantovoy ferme. *Mekhanizatsiya stroitel'stva*. 2018. T. 79. № 1. Pp. 29-33.

24. Kirsanov M.N. Diskretnaya model' svaynogo fundamenta. Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. 2015. № 3 (55). Pp. 3-9.
25. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. T. 1. № 3. PP. 14-17.
26. Kirsanov M.N. Induktivnyy vyvod formul dlya deformatsiy ploskoy reshetchatoy fermy. Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2017. № 2 (70). PP. 17-22.
27. Kirsanov M.N. Formula dlya progiba i analiz kinematischeskoy izmenyayemosti reshetchatoy fermy. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2017. T. 2. № 15. PP. 5-10.
28. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti sterzhnevoy reshetki. Vestnik mashinostroyeniya. 2015. № 8. PP. 48-51.
29. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). PP. 84-105.
30. Kirsanov M.N., Gorbunova A.Pp. , Lepetyukha V.A. Raschet progiba simmetrichnoy fermy s reshetkoy "star" v analiticheskoy forme. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2017. T. 1. № 14. Pp. 36-41.
31. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet balochnoy fermy so slozhnoy reshetkoy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2015. № 3 (260). Pp. 7-12.
32. Kirsanov M.N. Sticheskiy raschet ploskoy fermy s dvoynoy treugol'noy reshetkoy. Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal s prilozheniyem. 2017. № 11 (248). Pp. 32-36.
33. Kirsanov M.N., Moskvina V.G. Deformatsii ploskoy fermy s usilennoy reshetkoy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2018. № 4 (279). Pp. 10-14.
34. Belyankin N.A., Boyko A.YU., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba balochnoy fermy s usilennoy treugol'noy reshetkoy. Stroitel'stvo i arkhitektura. 2017. T. 5. № 2. Pp. 122-125.
35. Kirsanov M.N. Raschet progiba ploskoy reshetchatoy fermy s chetyr'mya oporami. Transportnoye stroitel'stvo. 2017. № 7. Pp. 15-18.
36. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet mnogoreshetchatoy fermy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2014. № 6 (257). Pp. 2-6.
37. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). Pp. 92-99.
38. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoy fermy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. 2017. № 3. Pp. 23-27.
39. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usiliy v reshetchatoy ferme. Mekhanizatsiya stroitel'stva. 2017. T. 78. № 4. Pp. 20-23.
40. Kirsanov M.N. Zavisimost' progiba ploskoy reshetchatoy fermy ot chisla paneley. Mekhanizatsiya stroitel'stva. 2017. T. 78. № 10. Pp. 24-27.
41. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. Analiticheskiye vyrazheniya chastot malykh kolebaniy balochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2019. T. 1. № 20. Pp. 14-20.
42. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. Analiticheskiy raschet chastoty kolebaniya gruzha v proizvol'nom uzle balochnoy fermy. Transportnoye stroitel'stvo. 2018. № 12. Pp. 21-23.
43. Kanatova M.I. Chastotnoye uravneniye i analiz kolebaniy ploskoy balochnoy fermy. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015.T. 1. Pp. 31-34.

44. Akhmedova Ye.R., Kanatova M.I. Sobstvennyye chastoty kolebaniy ploskoy balochnoy fermy regul'yarnoy struktury. Nauka i obrazovaniye v XXI veke: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 oktyabrya 2014 g. v 17 chastyakh. Chast' 11. Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», 31 oktyabrya 2014. Pp. 17-18.
45. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019. T. 14. № 3 (126). Pp. 284-292.
46. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019. T. 14. № 7. Pp. 844-851.
47. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 pp.

DERIVATION OF THE FORMULAS FOR THE DEFLECTION OF A FLAT HINGED-ROD FRAME IN THE OF SYMBOL MATHEMATICS MAPLE SYSTEM

A.Y.Boyko¹, G.N. Tkachuk²

*National Research University "MPEI"¹, MIPT²
Russia. Moscow*

¹Student; e-mail: belankin2@gmail.com²Student; e-mail: boykoanyu@mail.ru

A symmetrically externally statically indeterminable lattice-type truss with a rectilinear upper crossbar belt and a lower belt lowered in the middle of the span is loaded with vertical force in the center or evenly along the nodes of the upper belt. Using the induction method, the analytical dependences of the deflection of the middle span on the number of panels along the span and height are derived. The Maxwell-Mohr's formula and the apparatus for compiling and solving recurrence equations are used to obtain a general solution. The equilibrium equations of nodes for determining the forces in the rods are solved in symbolic form in the Maple computer mathematics system. The asymptotics of the solution quadratic in the number of panels is revealed.

Keywords: Truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, Maple

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ПЛОСКОЙ РЕШЕТЧАТОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Т. А. Тимофеева¹

Национальный Исследовательский Университет "МЭИ"¹
Россия, г. Москва

¹ Студентка, тел.: +7(977)973-78-99; e-mail: timofeevat_a@mail.ru

Предлагается схема статически определимой многорешетчатой фермы рамного типа и дается вывод формул для прогиба середины пролета в зависимости от числа панелей. Рассмотрены два вида нагрузки: сосредоточенная нагрузка в середине пролета, и равномерно распределенная по узлам верхнего пояса. Показаны случаи кинематической изменяемости конструкции. Все расчеты проводятся с помощью системы символьной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, рама, индукция, Maple.

В век быстрого развития программного обеспечения все более значимое место занимают методы компьютерной (символьной) математики для проектирования и расчета строительных конструкций [1-4]. Этими методами, как показывает практика [5-9], можно получать аналитические решения для регулярных конструкций в зависимости от их порядка. Порядком простой балочной фермы, например, является число панелей, если панели одинаковые. Число схем регулярных статически определимых ферм ограничено. Впервые об этом заявили Hutchinson R. G., Fleck N. A. [10,11], объявив охоту на такие схемы (*"hunt for statically determinate periodic trusses"*). Одной из самых распространенных в практике аналитической формулой была в свое время приближенная полуэмпирическая формула Качурина [12,13], применяемая, в частности, в задачах оптимизации как плоских, так и пространственных ферм [14-16]. В число параметров универсальной формулы Качурина входит также число панелей (правда, без уточнения схемы решетки). Методы символьной математики использованы Рыбаковым Л.С. в [17,18] в алгоритмах получения точных решений как статически определимых, так и статически неопределимых плоских и пространственных ферм. Простые расчетные формулы для расчета конкретных конструкций этим методом не были получены. В [19-25] методом индукции в системе Maple [26-28] получены решения для прогиба пространственных ферм с произвольным числом панелей. Аналитические решения для плоских ферм с различными решетками даны в [29-33]. Влияние погрешности монтажа на прогиб фермы изучено в [34] с применением системы Maple. Монтажная схема фермы и формула для прогиба фермы найдены в [35]. В решении использованы методы дискретной математики (в частности, задача о реберной раскраске графа). Формулы для прогиба арочных ферм различного типа выведены методом индукции в [36-43].

Рассмотрим ферму высотой $(2m+4)h$ (рис. 1) с пролетом, состоящим из $2n$ панелей длиной a в ригеле, нагруженную вертикальной силой P в середине пролета. Ферма статически определимая, однако классические "ручные" методы последовательного вырезания узлов и метод сечений Риттера для расчета усилий в такой ферме не годятся. Нет узла с двумя стержнями с неизвестными усилиями, с которого обычно начинают расчет, а все возможные сечения, делящие ферму на две части, пересекают более пяти стержней.

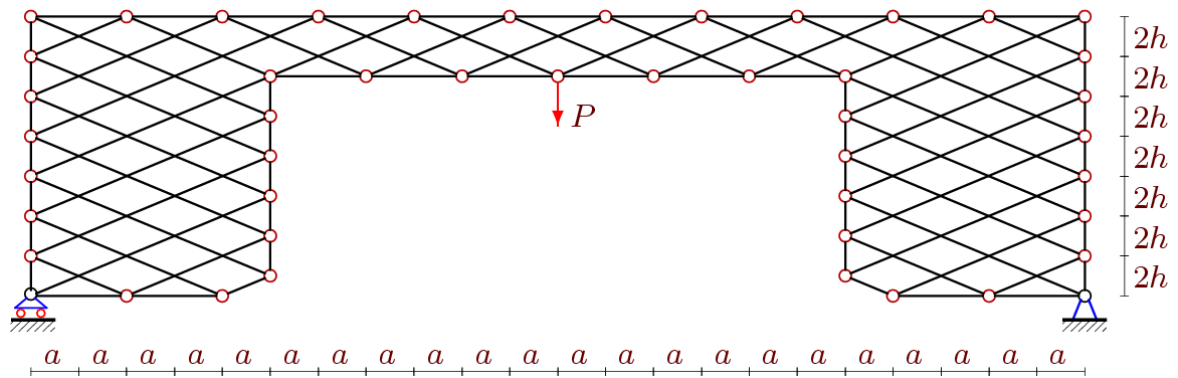


Рис. 1. Ферма при $m=5, n=3$

Для определения прогиба фермы по формуле Максвелла-Мора в аналитической форме необходимо также в аналитической форме получить значения усилий в стержнях. Для этого используем программу [27], написанную на языке Maple. Ввод начинается с задания координат узлов. Узлы фермы нумеруются (рис. 2). Начало координат помещается в левую (подвижную) опору.

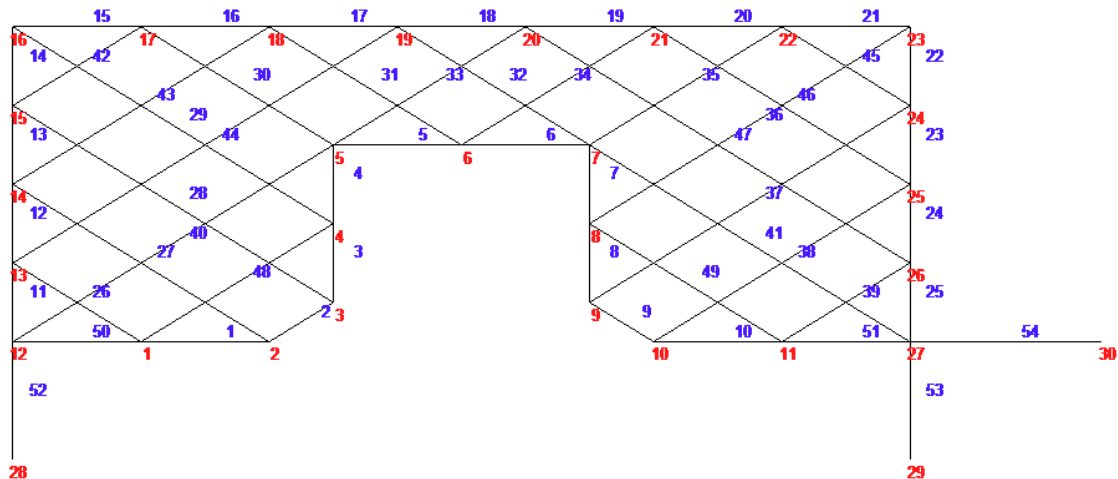


Рис. 2. Номера узлов и стержней при $m=2, n=1$

Представим фрагмент кода для задания координат узлов:

```

> H:=h*(4+2*m): # высота конструкции
  m1:=m+n:
> x[1]:=2*a: x[2]:=4*a: y[1]:=0:y[2]:=0:
> for i to m do
  x[i+2]:=5*a;
  y[i+2]:=2*h*i-h;
> x[i+m1+n+3]:=a*4*n+5*a;
  y[i+m1+n+3]:=H-2*h*i-3*h;
end:
> for i to m+3 do
  x[i+2*m1+5]:=0;
  y[i+2*m1+5]:=2*h*i-2*h;
> x[i+3*m1+n+12]:=10*a+4*n*a;
  y[i+3*m1+n+12]:=H-2*h*i+2*h;
> end:

```

Структура соединения стержней и узлов определяется с помощью условных векторов, содержащих номера концов соответствующего стержня по аналогии с заданием графа в дискретной математике.

Первые же расчеты по программе [27] показали, что при некоторых значениях числа панелей определитель системы уравнений равновесия обращается в нуль. Это соответствует кинематической изменяемости конструкции. Ограничиваясь случаем $m=5$, запишем ряд допустимых значений n : 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12.... Общий член этой последовательности

$$n = (6k + 1 - (-1)^k) / 4, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

определяется операторами **rgf_findrecur** и **rsolve** (пакет **genfunc** системы Maple). Заметим, что для других значений m формула для допустимых величин n будет другая. Этот факт затрудняет получить методом индукции решение, справедливое при всех n и m .

Расчеты ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дают формулу для прогиба вида:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (2h^2 EF), \quad (2)$$

где: EF – жесткость стержней, h – высота пролета, P – нагрузка на ферму, C_i - искомые коэффициенты, $c = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Из анализа числовых последовательностей коэффициентов в (2) для отдельных решений, используя оператор **rgf_findrecur** (пакет **genfunc** системы Maple), получаем рекуррентные уравнения для коэффициентов C_i :

$$C_{1(n)} = C_{1(n-1)} + 3C_{1(n-2)} - 3C_{1(n-3)} - 3C_{1(n-4)} + 3C_{1(n-5)} + C_{1(n-6)} - C_{1(n-7)};$$

$$C_{2(n)} = 2C_{2(n-1)} - C_{2(n-2)} - 3C_{2(n-3)};$$

$$C_{3(n)} = C_{3(n-2)}.$$

Используя оператор **rsolve**, найдем решения рекуррентных уравнений C_i :

$$C_1 = (4k^3 + 2(11 - (-1)^k)k^2 + 2(32 + 7(-1)^k)k + 19(-1)^k + 55) / 2,$$

$$C_2 = (2(15 + 12(-1)^k)k + 149(-1)^k + 261) / 2,$$

$$C_3 = 2(12(-1)^k + 35).$$

Применим этот же алгоритм для получения формулы зависимости прогиба от числа панелей в случае действия нагрузки, распределенной по верхнему поясу (рис. 3).

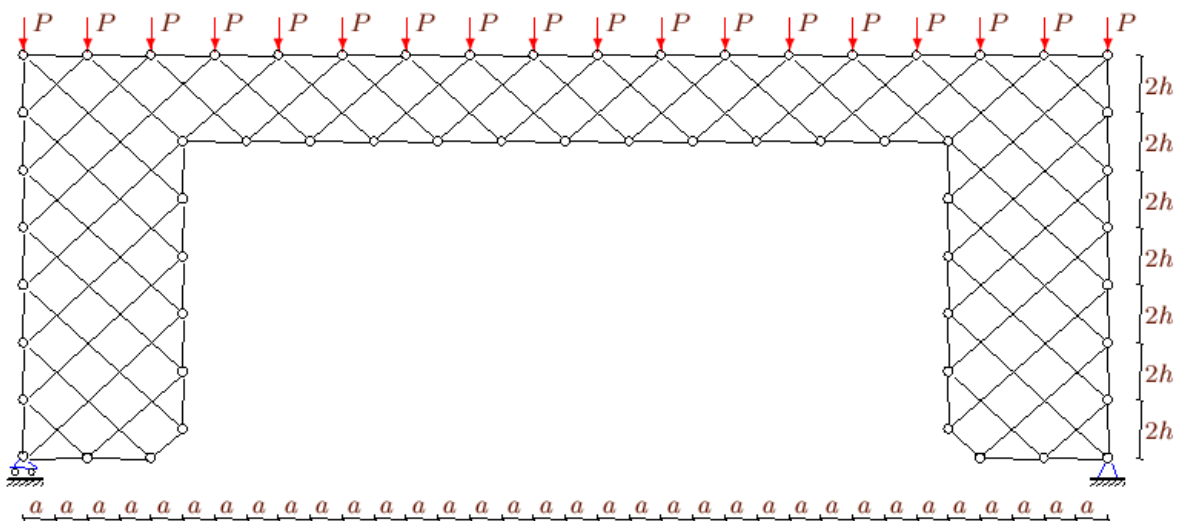


Рис. 3. Ферма под действием распределенной нагрузки, $n=6, m=5$

Полученные рекуррентные уравнения имеют большой порядок:

$$C_1 = C_{1(n-1)} + 4C_{1(n-2)} - 4C_{1(n-3)} - 6C_{1(n-4)} + 6C_{1(n-5)} + 4C_{1(n-6)} - 4C_{1(n-7)} - C_{1(n-8)} + C_{1(n-9)};$$

$$C_2 = 3C_{2(n-1)} - 3C_{2(n-2)} + 3C_{2(n-3)};$$

$$C_3 = C_{3(n-2)} - C_{3(n-4)}.$$

Решения для искомым коэффициентов имеют вид:

$$C_1 = \frac{30k^4 + 20(11 - (-1)^k)k^3 + 6(121 + 3(-1)^k)k^2 + 8(139 + 25(-1)^k)k + 177(-1)^k + 591}{8};$$

$$C_2 = \frac{18(7 - 4(-1)^k)k - 57(-1)^k + 487}{2};$$

$$C_3 = 2(81 + 16(-1)^k)k + 41(-1)^k + 275.$$

На рис. 4 показаны кривые зависимости относительного прогиба в случае нагружения распределенными силами по узлам верхнего пояса $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (\tilde{P}L)$, где $\tilde{P} = P(2n + 6)$ — суммарная нагрузка на ферму от числа k , связанного формулой (1) с числом панелей в ригеле. Принята длина пролета $L = 2na = 100\text{м}$.

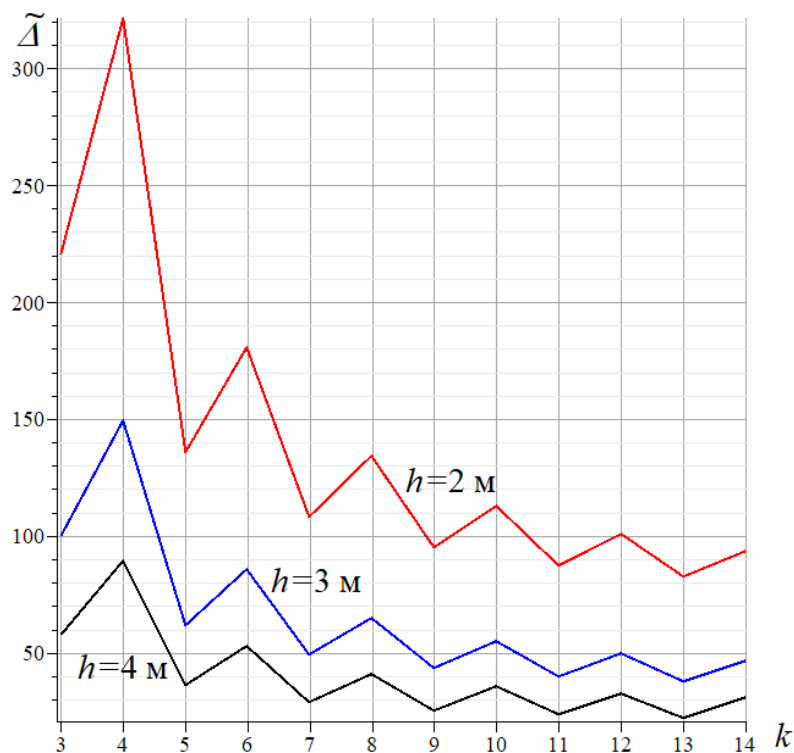


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей

График полученной зависимости отличаются весьма заметные скачки величины прогиба (более чем в два раза при $k=4$, $k=5$), характерные для многорешетчатых ферм [5, 31, 32]. С ростом числа панелей в ригеле при постоянном пролете кривые постепенно сглаживаются. Заметен также явно нелинейный рост прогиба при уменьшении высоты h .

Полученное решение может быть использовано при расчете подобных конструкций, а найденные случаи кинематического вырождения системы должны предупреждать расчетчика и проектировщика о коварных свойствах сложных решетчатых ферм.

Библиографический список

1. Агапов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – №. 11. – С. 4-7.
2. Агапов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет железобетонных ферм методом конечных элементов с учетом физической нелинейности. Часть 1 // Научное обозрение. – 2016. – №. 2. – С. 31-33.
3. Семенов А. А. и др. Напряженно-деформированное состояние высокопрочных болтов фланцевых соединений в укрупнительных стыках стропильных ферм // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – №. 5. – С. 54-62.
4. Галишникова В. В. Постановка задачи геометрически нелинейного деформирования пространственных ферм на основе метода конечных элементов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2009. – №. 14. – С. 50-58.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
6. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
7. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). С. 84-105.
8. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
10. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. p. 607 – 617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
11. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 54, Issue 4, April 2006, Pages 756-782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008
12. Металлические конструкции. Специальный курс/Н. С. Стрелецкий, Е.И. Беленя, Г.С. Ведеников, Е.Н. Лессиг, К. К. Муханов. М.: Издательство литературы по строительству. 1965. 368 с.
13. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. Сб. №17. Отделение инженерных исследований НТК НКПС, 1928.
14. Марутян А.С. Облегченные пространственно-стержневые конструкции покрытий // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 1 (240). С. 66-72.
15. Марутян А.С. Оптимизация ферменных конструкций со стойками и полураскосами в треугольных решетках // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 60-68.
16. Марутян А.С., Абовян А.Г. Расчет оптимальных параметров плоскоовальных труб для ферменных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4 (273). С. 17-22.
17. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. 1999. №4. С. 174-189.
18. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоского призматического каркаса // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. 2001. № 4. С. 106-118.

19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
20. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
21. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 58-66.
22. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
25. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
26. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
27. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
28. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
29. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы "Молодечно" с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 1 (61). С. 33-41.
30. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
31. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
32. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменчивости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
33. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
34. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
35. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
36. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
37. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 3. С. 26-29.
38. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.
39. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.

40. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70
41. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 5. С. 50-55.
42. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // *Транспортное строительство*. 2017. № 9. С. 8-10.
43. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.

References

1. Agapov V. P., Aydemirov K. R. Raschet ferm metodom konechnykh elementov s uchetoм geometricheskoy nelineynosti. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. 2016. No. 11. Pp. 4-7.
2. Agapov V. P., Aydemirov K. R. Raschet zhelezobetonnykh ferm metodom konechnykh elementov s uchetoм fizicheskoy nelineynosti. Chast' 1. *Nauchnoye obozreniye*. 2016. No.2. Pp. 31-33.
3. Semenov A. A. i dr. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye vysokoprochnykh boltov flantsevykh soyedineniy v ukрупnitel'nykh stykakh stropil'nykh ferm. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2014. No. 5. Pp. 54-62.
4. Galishnikova V. V. Postanovka zadachi geometricheski nelineynogo deformirovaniya prostanstvennykh ferm na osnove metoda konechnykh elementov. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2009. No. 14. Pp. 50-58.
5. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet mnogoreshchatoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2014. No. 6 (257). Pp. 2-6.
6. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016. Vol. 1. No. 3. Pp. 14-17.
7. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016. No. 1 (29). Pp. 84-105.
8. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti sterzhnevoy reshetki. *Vestnik mashinostroyeniya*. 2015. No. 8. Pp. 48-51.
9. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet balochnoy fermy so slozhnoy reshetkoy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2015. No. 3 (260). Pp. 7-12.
10. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005. 85, No. 9. p. 607 – 617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
11. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 54, Issue 4, April 2006, Pages 756-782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008
12. Metallicheskiye konstruksii. Spetsial'nyy kurs/N. S. Streletskiy, Ye.I. Belenya, G.S. Vedenikov, Ye.N. Lessig, K. K. Mukhanov. M.: Izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu. 1965. 368 p.
13. Kachurin V.K. O progibe mostovykh ferm. Sb. No.17. Otdeleniye inzhenernykh issledovaniy NTK NKPS, 1928.
14. Marutyan A.S. Oblegchennyye prostranstvenno-sterzhnevyye konstruksii pokrytiy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2012. No.1 (240). Pp. 66-72.
15. Marutyan A.S. Optimizatsiya fermennykh konstruksiy so stoykami i poluraskosami v treugol'nykh reshetkakh. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2016. No. 4 (267). Pp. 60-68.

16. Marutyanyan A.S., Abovyan A.G. Raschet optimal'nykh parametrov ploskooval'nykh trub dlya fermennykh konstruksiy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2017. No. 4 (273). Pp. 17-22.
17. Rybakov L. S. Lineynaya teoriya ploskoy ortogonal'noy reshetki. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Ser. Mekhanika tverdogo tela*. 1999. No.4. Pp. 174-189.
18. Rybakov L. S. Lineynaya teoriya ploskogo prizmaticheskogo karkasa. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Ser. Mekhanika tverdogo tela*. 2001. No. 4. Pp. 106-118.
19. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy regul'yarnoy struktury s ploskoy gran'yu. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2015. No. 2 (259). Pp. 2-6.
20. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konstruksii v sisteme Maple. V sbornike: *Informatizatsiya inzhenerenogo obrazovaniya IN-FORINO-2014 Trudy mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii*. 2014. Pp. 239-242.
21. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2017. No. 8 (76). Pp. 58-66.
22. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye zhestkosti prostranstvennoy staticheskoy opredelimoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2017. Vol. 12. No. 2 (101). Pp. 165-171.
23. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 2012. No. 1. Pp. 49-53.
24. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i optimizatsiya prostranstvennoy balochnoy fermy. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta. Vestnik MEI*. 2012. No. 5. Pp. 5-8.
25. Kirsanov M.N. Otsenka progiba i ustoychivosti prostranstvennoy balochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
26. Goloskokov D. P. *Prakticheskiy kurs matematicheskoy fiziki v sisteme Maple*. SPb.: Izd-vo ParkKom, 2010. 644 p.
27. Kirsanov M. N. *Maple i Maple. Resheniya zadach mekhaniki*. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 p.
28. Matrosov A. V. *Maple 6. Resheniya zadach vyshey matematiki i mekhaniki*. SPb: BKHV-Peterburg, 2001. 528 p.
29. Kirsanov M.N. Tochnyye formuly dlya rascheta progiba i usiliy v sterzhnyakh tipovoy fermy "Molodechno" s proizvol'nym chislom paneley. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2016. No. 1 (61). Pp. 33-41.
30. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2018. No. 1 (37). Pp. 92-99.
31. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usiliy v reshetchatoy ferme. *Mekhanizatsiya stroitel'stva*. 2017. Vol. 78. No. 4. Pp. 20-23.
32. Kirsanov M.N. Vyvod formuly dlya progiba reshetchatoy fermy, imeyushchey sluchai kinematicheskoy izmenyayemosti. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2017. Vol. 1. No. 14. Pp. 27-30.
33. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 2017. No. 3. Pp. 23-27.
34. Kirsanov M.N. Induktivnyy analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost' i prochnost' ploskoy fermy. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2012. No. 5 (31). Pp. 38-42.
35. Kirsanov M.N. Staticheskoye analiz i montazhnaya skhema ploskoy fermy. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2016. No. 5 (39). Pp. 61-68.
36. Kirsanov M.N. Sravnitel'nyy analiz zhestkosti dvukh skhem arochnoy fermy. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 2015. No. 9 (36). Pp. 44-55.

37. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba raspornoj fermy s proizvol'nym chislom panely. *Mekhanizatsiya stroitel'stva*. 2017. Vol. 78. No. 3. Pp. 26-29.
38. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2018. No. 1. Pp. 12-33.
39. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye deformatsiy ploskoy fermy arochnogo tipa. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2015. No. 3 (31). Pp. 42-48.
40. Kirsanov M.N. Induktivnyy analiz deformatsii arochnoy fermy. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Vol. 14. No. 1. Pp. 64-70
41. Kirsanov M.N. Analiz progiba arochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 2017. No. 5. Pp. 50-55.
42. Kirsanov M.N. Analiticheskaya otsenka progiba i usilij v kriticheskikh sterzhnyakh arochnoy fermy. *Transportnoye stroitel'stvo*. 2017. No. 9. Pp. 8-10.
43. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba arochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2018. Vol. 1. No. 16. Pp. 7-11.

FORMULAS FOR CALCULATING THE DEFLECTION OF A FLAT LATTICE FRAME WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

T.A. Timofeeva¹

National Research University «MPEI»¹

Russia.Moscow

¹ Student of Institute of Power Engineering, ph.: +7(977)973-78-99
e-mail: timofeevat_a@mail.ru

The article gives the conclusion of the formula for deflection of a flat frame truss with an arbitrary number of panels in the crossbar. A symmetrical truss consisting of a crossbar, vertical and inclined parts is loaded twice: with a point load concentrated in the middle of the span and distributed over the upper belt. All calculations are carried out using the Maple symbolic mathematics system.

Keywords: truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, frame, induction, Maple

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 519.63:539.3

ВЕКТОРНАЯ ФОРМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

В. А. Козлов¹

Воронежский государственный технический университет
Россия, г. Воронеж

¹Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики
тел.: +7(473)2764006 e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

В предлагаемой работе метод конечных разностей, применяемый в практике численных расчетов в скалярной форме, представлен в виде обобщающих векторных соотношений. Это позволяет в промежуточных выкладках работать с векторными уравнениями и лишь окончательные выражения записать в скалярном виде. В теории оболочек, например, можно работать с двумя векторными уравнениями равновесия сил и моментов вместо аналогичных шести скалярных. Доказана идентичность схем дискретизации векторных дифференциальных соотношений теории тонких упругих оболочек в системе криволинейных координат по методу криволинейных сеток и методу конечных разностей. Дано обобщение метода криволинейных сеток.

Ключевые слова: векторная форма метода конечных разностей, метод криволинейных сеток.

Авторы [1] отмечают эффективность применения методов конечных элементов и конечных разностей (МКР) при расчёте оболочек сложной формы, указывая, однако, на часто имеющую место неудовлетворительную сходимость решений. Одной из причин этого при применении МКР является существенное влияние жёстких смещений элементов оболочки на погрешность конечно-разностной аппроксимации ковариантных производных от компонент разрешающих вектор-функций. Как известно, вектор перемещения \vec{u} можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует упругому смещению точек оболочки, а второе отвечает смещению как твёрдого тела: $\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}_*$.

Значение ковариантной производной

$$\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \alpha^i} - \Gamma_{ij}^l u_l \quad (i = 1,2; j, l = 1,2,3) \quad (1)$$

от компонент второго слагаемого равно нулю. Обозначения здесь общепринятые для теории оболочек: Γ_{ij}^l – символы Кристоффеля, α^i – криволинейные координаты срединной поверхности оболочки, u_j – компоненты вектора \vec{u} : $\vec{u} = u_j \vec{r}^j = u^j \vec{r}_j$, \vec{r}_j, \vec{r}^j – векторы основного и вспомогательного локального базиса криволинейной системы координат α^1, α^2 . Выражение производной (1) можно заменить в точке k конечно-разностным аналогом, выбрав шаг $\Delta \alpha^i$ численного интегрирования:

$$(\nabla_i u_j)_{(k)} \approx \frac{u_{j(k+1)} - u_{j(k-1)}}{2\Delta \alpha^i} - \Gamma_{ij(k)}^l u_{l(k)}. \quad (2)$$

При такой дискретизации в случае незначительного деформирования оболочки в окрестности точки k и относительно больших смещениях её как твёрдого тела компоненты, отвечающие смещениям оболочки как жёсткого целого, могут дать погрешность, соизмеримую со значением самой вычисляемой производной $\nabla_i u_j$. Во многих задачах численного исследования оболочек именно это обстоятельство и вызывает неудовлетворительную сходимость решений.

В работе [1] при конечно-разностной аппроксимации векторное выражение ковариантной производной

$$\nabla_i u_j = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha^i} \vec{r}_j \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3; \vec{r}_3 = \vec{n}) \quad (3)$$

в точке k заменяется разностным аналогом в виде

$$(\nabla_i u_j)_{(k)} \approx \frac{\vec{u}_{(k+1)} - \vec{u}_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} \cdot \vec{r}_{j(k)}. \quad (4)$$

То есть частная производная в направлении координаты α^i от вектора перемещения \vec{u} заменяется конечным выражением

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha^i} \right)_{(k)} \approx \frac{\vec{u}_{(k+1)} - \vec{u}_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i}. \quad (5)$$

Авторы [1] утверждают, что значение конечно-разностной производной (4) от вектор-функции, отвечающей жёстким смещениям элементов оболочки, равно нулю. Это позволяет говорить о «новой» схеме дискретизации – методе криволинейных сеток (МКС), обобщающей и улучшающей МКР в задачах теории оболочек. Но конечно-разностная аппроксимация (4) полностью идентична (2). Покажем это.

Векторы перемещений $\vec{u}_{(k+1)}, \vec{u}_{(k-1)}$ в точках $k+1$ и $k-1$ можно представить в виде

$$\vec{u}_{(k+1)} = u_{l(k+1)} \vec{r}_{(k+1)}^l, \quad \vec{u}_{(k-1)} = u_{l(k-1)} \vec{r}_{(k-1)}^l, \quad (6)$$

где

$$\vec{r}_{(k+1)}^l = \vec{r}_{(k)}^l + \Delta\vec{r}^l, \quad \vec{r}_{(k-1)}^l = \vec{r}_{(k)}^l - \Delta\vec{r}^l. \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в (4), получим

$$(\nabla_i u_j)_{(k)} = \frac{u_{l(k+1)} - u_{l(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} \vec{r}_{(k)}^l \cdot \vec{r}_{j(k)} + \frac{u_{l(k+1)} + u_{l(k-1)}}{2} \cdot \frac{\Delta\vec{r}^l}{\Delta\alpha^i} \vec{r}_{j(k)}. \quad (8)$$

Здесь $\vec{r}_{(k)}^l \cdot \vec{r}_{j(k)} = \delta_j^l$ - символ Кронекера, $\frac{u_{l(k+1)} + u_{l(k-1)}}{2} = u_{l(k)}$.

Из дифференциальной геометрии

$$\lim_{\Delta\alpha^i \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}^l}{\Delta\alpha^i} = \frac{\partial\vec{r}^l}{\partial\alpha^i} = -\Gamma_{im}^l \vec{r}^m.$$

Следовательно, в окрестности точки k

$$\frac{\Delta\vec{r}^l}{\Delta\alpha^i} \approx -\Gamma_{im(k)}^l \vec{r}_{(k)}^m \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\vec{r}^l}{\Delta\alpha^i} \vec{r}_{j(k)} = -\Gamma_{im(k)}^l \vec{r}_{(k)}^m \cdot \vec{r}_{j(k)} = -\Gamma_{im(k)}^l \delta_j^m = -\Gamma_{ij(k)}^l. \quad (9)$$

С учётом (9) равенство (8) принимает вид

$$(\nabla_i u_j)_{(k)} = \frac{u_{j(k+1)} - u_{j(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} - \Gamma_{ij(k)}^l u_{l(k)}, \quad (10)$$

что полностью совпадает с (2).

Аппроксимируем методом криволинейных сеток векторные уравнения равновесия теории оболочек:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}\bar{N}^i)_{,i} + \sqrt{a}\bar{q} &= 0; \\ (\sqrt{a}\bar{M}^i)_{,i} + \bar{r}_i \times (\sqrt{a}\bar{N}^i) + \sqrt{a}\bar{m} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $_{,i} = \partial/\partial\alpha^i$, а векторы неизвестных сил \bar{N}^i и моментов \bar{M}^i в срединной поверхности оболочки, а также векторы сил \bar{q} и моментов \bar{m} внешней поверхностной нагрузки представлены в виде

$$\bar{N}^i = N^{ij}\bar{r}_j + Q^i\bar{n}; \quad \bar{q} = q^j\bar{r}_j + q_n\bar{n}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^i &= M^{ij}\bar{n} \times \bar{r}_j + P^i\bar{n}; \\ \bar{m} &= m^j\bar{n} \times \bar{r}_j + m_n\bar{n}. \end{aligned} \quad (13)$$

При применении МКС первое уравнение (11) равновесия сил следует последовательно умножить на $\bar{r}_{(k)}^1, \bar{r}_{(k)}^2, \bar{n}_{(k)}$, а второе – на $(\bar{n} \times \bar{r}^1)_{(k)}, (\bar{n} \times \bar{r}^2)_{(k)}, \bar{n}_{(k)}$, чтобы в окончательных скалярных уравнениях получить составляющие N^{ij}, Q^i, M^{ij}, P^i . То есть ($l=1,2$):

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(\sqrt{a}\bar{N}^i)_{(k+1)} - (\sqrt{a}\bar{N}^i)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{a}\bar{q})_{(k)} \right] \cdot \bar{r}_{(k)}^l = 0, \\ &\left[\frac{(\sqrt{a}\bar{N}^i)_{(k+1)} - (\sqrt{a}\bar{N}^i)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{a}\bar{q})_{(k)} \right] \cdot \bar{n}_{(k)} = 0; \\ &\left[\frac{(\sqrt{a}\bar{M}^i)_{(k+1)} - (\sqrt{a}\bar{M}^i)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + (\bar{r}_i \times \sqrt{a}\bar{N}^i)_{(k)} + (\sqrt{a}\bar{m})_{(k)} \right] \cdot (\bar{n} \times \bar{r}^l)_{(k)} = 0, \\ &\left[\frac{(\sqrt{a}\bar{M}^i)_{(k+1)} - (\sqrt{a}\bar{M}^i)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + (\bar{r}_i \times \sqrt{a}\bar{N}^i)_{(k)} + (\sqrt{a}\bar{m})_{(k)} \right] \cdot \bar{n}_{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Или в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a}N^{ij})_{(k+1)} \frac{\bar{r}_{j(k+1)} \cdot \bar{r}_{(k)}^l}{2\Delta\alpha^i} - (\sqrt{a}N^{ij})_{(k-1)} \frac{\bar{r}_{j(k-1)} \cdot \bar{r}_{(k)}^l}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{a}Q^i)_{(k+1)} \frac{\bar{n}_{(k+1)} \cdot \bar{r}_{(k)}^l}{2\Delta\alpha^i} - \\ &- (\sqrt{a}Q^i)_{(k-1)} \frac{\bar{n}_{(k-1)} \cdot \bar{r}_{(k)}^l}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{a}q^l)_{(k)} = 0, \quad l=1,2; \\ &(\sqrt{a}N^{ij})_{(k+1)} \frac{\bar{r}_{j(k+1)} \cdot \bar{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - (\sqrt{a}N^{ij})_{(k-1)} \frac{\bar{r}_{j(k-1)} \cdot \bar{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{a}Q^i)_{(k+1)} \frac{\bar{n}_{(k+1)} \cdot \bar{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - \\ &- (\sqrt{a}Q^i)_{(k-1)} \frac{\bar{n}_{(k-1)} \cdot \bar{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{a}q_n)_{(k)} = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{a} M^{ij} \right)_{(k+1)} \frac{\left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k+1)} \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - \left(\sqrt{a} M^{ij} \right)_{(k-1)} \frac{\left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k-1)} \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} + \\
& + \left(\sqrt{a} P^i \right)_{(k+1)} \frac{\vec{n}_{(k+1)} \cdot \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - \left(\sqrt{a} P^i \right)_{(k-1)} \frac{\vec{n}_{(k-1)} \cdot \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - \\
& - \left(\sqrt{a} Q^l \right)_{(k)} + \left(\sqrt{a} m^l \right)_{(k)} = 0, \quad l = 1, 2;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{a} M^{ij} \right)_{(k+1)} \frac{\left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k+1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - \left(\sqrt{a} M^{ij} \right)_{(k-1)} \frac{\left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k-1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} + \\
& + \left(\sqrt{a} P^i \right)_{(k+1)} \frac{\vec{n}_{(k+1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} - \left(\sqrt{a} P^i \right)_{(k-1)} \frac{\vec{n}_{(k-1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} + \left(\sqrt{a} c_{ij} N^{ij} \right)_{(k)} + \left(\sqrt{a} m_n \right)_{(k)} = 0.
\end{aligned}$$

Раскрывая в полученных уравнениях скалярные произведения

$$\begin{aligned}
& \vec{r}_{j(k\pm 1)} \cdot \vec{r}_{(k)}^l, \vec{n}_{(k\pm 1)} \cdot \vec{r}_{(k)}^l, \vec{r}_{j(k\pm 1)} \cdot \vec{n}_{(k)}, \vec{n}_{(k\pm 1)} \cdot \vec{n}_{(k)}; \\
& \left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k\pm 1)} \cdot \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}, \vec{n}_{(k\pm 1)} \cdot \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}, \left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k\pm 1)} \cdot \vec{n}_{(k)},
\end{aligned}$$

каждое из которых делится на $2\Delta\alpha^i$, представим векторы $\vec{r}_{j(k\pm 1)}$ в виде суммы $\vec{r}_{j(k\pm 1)} = \vec{r}_{j(k)} \pm \Delta\vec{r}_j$. В результате с учётом равенств, аналогичных применяемым при выводе (9), получим

$$\frac{\vec{r}_{j(k\pm 1)} \cdot \vec{r}_{(k)}^l}{2\Delta\alpha^i} = \frac{1}{2} \left[\delta_j^l \frac{1}{\Delta\alpha^i} \pm \Gamma_{ji(k)}^l \right]; \quad \frac{\vec{r}_{j(k\pm 1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} = \pm \frac{1}{2} b_{ji(k)}; \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{n}_{(k\pm 1)} \cdot \vec{r}_{(k)}^l}{2\Delta\alpha^i} = \mp \frac{1}{2} b_{i(k)}^l; \quad \frac{\vec{n}_{(k\pm 1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} = \frac{1}{2\Delta\alpha^i}. \\
& \frac{\left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k\pm 1)} \cdot \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} = \frac{1}{2} \left[\delta_q^p \frac{1}{\Delta\alpha^i} \mp c_{jp} c^{lq} \Gamma_{qi}^p \right]_{(k)}; \\
& \frac{\vec{n}_{(k\pm 1)} \cdot \left(c^{lq} \vec{r}_q \right)_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} = \mp \frac{1}{2} \left(c^{lq} b_{iq} \right)_{(k)}; \quad \frac{\left(c_{jp} \vec{r}^p \right)_{(k\pm 1)} \cdot \vec{n}_{(k)}}{2\Delta\alpha^i} = \pm \frac{1}{2} \left(c_{jp} b_i^p \right)_{(k)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Подставим соотношения (16) в уравнения (14) равновесия сил:

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\sqrt{a} N^{il} \right)_{(k+1)} - \left(\sqrt{a} N^{il} \right)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + \left(\sqrt{a} \Gamma_{ij}^l N^{ij} \right)_{(k)} - \left(\sqrt{a} b_j^l Q^j \right)_{(k)} + \left(\sqrt{a} a^l \right)_{(k)} = 0, \quad l = 1, 2; \\
& \frac{\left(\sqrt{a} Q^i \right)_{(k+1)} - \left(\sqrt{a} Q^i \right)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + \left(\sqrt{a} b_{ij} N^{ij} \right)_{(k)} + \left(\sqrt{a} a_n \right)_{(k)} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Полученные в результате конечно-разностные уравнения в точке с номером k по виду полностью совпадают со скалярным видом известных уравнений равновесия сил теории обо-

лочек в тензорном виде, где ковариантная производная заменена конечно-разностными соотношениями обычного метода конечных разностей.

Подставляя соотношения (17) в уравнения моментов (15), придём к конечно-разностным уравнениям вида

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{a}M^{il})_{(k+1)} - (\sqrt{a}M^{il})_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} - (\sqrt{ac}_{jq}c^{pl}\Gamma_{ip}^j M^{iq})_{(k)} + (\sqrt{ac}^{jl}b_{ij}P^i)_{(k)} - \\ & - (\sqrt{a}Q^l)_{(k)} + (\sqrt{a}m^l)_{(k)} = 0, \quad l = 1, 2; \\ & \frac{(\sqrt{a}P^i)_{(k+1)} - (\sqrt{a}P^i)_{(k-1)}}{2\Delta\alpha^i} + (\sqrt{ac}_{ij}b_i^j M^{il})_{(k)} + (\sqrt{ac}_{ij}N^{ij})_{(k)} + (\sqrt{a}m_n)_{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти уравнения имеют некоторые отличия от традиционно применяемых в теории оболочек тензорных моментных уравнений равновесия, в которых ковариантные производные заменены соотношениями по МКР. Объясняется это применяемым в данной работе разложением векторов моментов в виде (13), в которых учитываются моментные составляющие P^i, m_n , перпендикулярные к срединной поверхности оболочки. Эти величины являются второго порядка малости и, естественно, в подавляющих вариантах прочностного расчёта не учитываются. Но при теоретических исследованиях учёт этих компонентов делает теорию оболочек симметричной и позволяет получить полную статико-геометрическую аналогию [2, 3].

Из векторного уравнения равновесия моментов (11) можно получить три скалярных. Раскрывая их с учётом разложений (12), (13) и заменив ковариантные производные конечно-разностными соотношениями обыкновенного МКР, получим полностью совпадающие с (19) уравнения. Следовательно, и в этом случае схемы аппроксимации по МКС и МКР дают один и тот же конечный результат.

Итак, схемы дискретизации векторных дифференциальных соотношений по методу криволинейных сеток и скалярных уравнений теории оболочек по методу конечных разностей идентичны между собой. Так же, как и МКР, МКС не исключает погрешность аппроксимации ковариантной производной от функции жёстких смещений и не упрощает вычисление геометрических характеристик и переопределение их в процессе деформирования оболочки, на что указывают авторы [1] ввиду явного отсутствия символов Кристоффеля в формуле (4). При разворачивании разностной аппроксимации (4) они появляются в явном виде (формула (10) или (16),(17) при рассмотрении уравнений равновесия), а в излагаемом авторами [1] варианте эти переменные величины присутствуют в коэффициентах $a_{\alpha_{i\pm 0.5}; j \pm 0.5}^{\beta_{i;j}}$ [1, с. 28] преобразования векторных компонент при переходе из локального базиса промежуточных точек между узлами в локальный базис самого узла.

Несмотря на идентичность конечных схем дискретизации по методам конечных разностей и криволинейных сеток, последний действительно является некоторым обобщением МКР, так как применяется к векторным дифференциальным соотношениям в системе криволинейных координат. В ряде случаев это позволяет в промежуточных выкладках работать с векторными уравнениями и лишь окончательные выражения записать в скалярном виде. В теории оболочек, например, можно работать с двумя векторными уравнениями равновесия сил и моментов вместо аналогичных шести скалярных.

При дискретизации континуальной задачи по изложенной схеме авторы [1] используют промежуточные точки между узлами разностной сетки, а в целях улучшения сходимости выполняют усреднение геометрических характеристик и нагрузки конечно-разностных ячеек, примыкающих к узлу и линиям разностной сетки. Это влечёт за собой сложный характер принятых обозначений и многочисленные опечатки в конечных формулах, что затрудняет применение МКС на практике.

Можно отказаться от введения промежуточных точек с одновременным упрощением конечного вида уравнений и улучшением сходимости, применив, как и в МКР, МКС повышенной точности. Предлагается вместо конечного выражения (5) применять уточнённые конечно-разностные соотношения более высокого порядка

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha^i}\right)_{(k)} \approx \frac{1}{12\Delta\alpha^i} \left(-\bar{u}_{(k+2)} + 8\bar{u}_{(k+1)} - 8\bar{u}_{(k-1)} + \bar{u}_{(k-2)}\right) \quad (20)$$

Это выражение легко получается с помощью формулы Тейлора. Положим

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha^i}\right)_{(k)} \approx \sum_{j=-2}^2 d_j \bar{u}_{(k+j)}, \quad (21)$$

где d_j – коэффициенты, подлежащие определению. Каждый член суммы (21) разложим в ряд Тейлора

$$\bar{u}_{(k+j)} = \bar{u}_{(k)} + j\Delta\alpha^i \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha^i}\right]_{(k)} + \frac{(j\Delta\alpha^i)^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{(\partial \alpha^i)^2}\right]_{(k)} + \dots$$

и подставим в (21). Получим

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha^i}\right)_{(k)} = \bar{u}_{(k)} \sum_{j=-2}^2 d_j + \Delta\alpha^i \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha^i}\right]_{(k)} \sum_{j=-2}^2 j d_j + \frac{(\Delta\alpha^i)^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{(\partial \alpha^i)^2}\right]_{(k)} \sum_{j=-2}^2 j^2 d_j + \dots \quad (22)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (22), с точностью до величин порядка $(\Delta\alpha^i)^5$ совпадает с $\left(\partial \bar{u} / \partial \alpha^i\right)_{(k)}$ при выполнении системы пяти линейных уравнений для пяти неизвестных d_j :

$$\sum_{j=-2}^2 d_j = \sum_{j=-2}^2 j^2 d_j = \sum_{j=-2}^2 j^3 d_j = \sum_{j=-2}^2 j^4 d_j = 0; \quad \sum_{j=-2}^2 j d_j = \frac{1}{\Delta\alpha^i}.$$

Решение этой системы:

$$d_{-2} = \frac{1}{12\Delta\alpha^i}; d_{-1} = -\frac{8}{12\Delta\alpha^i}; d_0 = 0; d_1 = \frac{8}{12\Delta\alpha^i}; d_2 = -\frac{1}{12\Delta\alpha^i}. \quad (23)$$

Коэффициенты (23) и определяют вид выражения (20).

При применении (20) для граничных точек можно привлечь аппроксимации более низкого порядка либо сделать их односторонними, исключив узлы, выходящие за пределы континуума собственно оболочки. Аналогично (20) можно получить конечно-разностные аналоги производной и более высоких порядков.

Дадим обобщение МКС. Пусть вектор-функция \vec{u} зависит от криволинейной координаты s : $\vec{u} = \vec{u}(s)$, и относительно неё задан однородный линейный дифференциальный оператор с непрерывными функциями $a_n(s)$:

$$D[\vec{u}] = \sum_{n=0}^N a_n(s) \frac{\partial^n \vec{u}}{\partial s^n}. \quad (24)$$

Определение. Конечным выражением r -го приближения в точке s_i для дифференциального оператора $D[\vec{u}]$ называется линейная комбинация

$$L[\vec{u}] = \sum_{k=-l}^m b_k \vec{u}(s_i + kh), \quad (25)$$

где b_k - константы, l, m - целые числа, если разложение L в ряд Тейлора в точке s_i содержит производные $\left(\frac{\partial^n \vec{u}}{\partial s^n}\right)_i$ с соответствующими множителями $a_n(s_i)$ при $n \leq N$ и не содержит производных при $N+1 \leq n \leq N+r$.

Если при этом вектор-функция $\vec{u}(s)$ имеет $(N+r+1)$ непрерывных производных, то для неё имеет место разложение

$$L[\vec{u}] = \sum_{n=0}^N a_n(s_i) \left(\frac{\partial^n \vec{u}}{\partial s^n}\right)_i + c\theta \left| \frac{\partial^{(N+r+1)} \vec{u}}{\partial s^{(N+r+1)}} \right|_{\max}.$$

Здесь c - константа, $|\theta| \leq 1$, $\left| \frac{\partial^{(N+r+1)} \vec{u}}{\partial s^{(N+r+1)}} \right|_{\max}$ - абсолютное значение максимальной производной в интервале, содержащем все точки $s_i + kh$.

Теорема. Для любого заданного линейного дифференциального оператора (24) при любом неотрицательном целом числе r в каждой точке s_i существует конечное выражение r -го порядка точности.

Доказательство. Разложим выражение (25) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} L = \vec{u}(s_i) [b_{-l} + \dots + b_{-1} + b_0 + b_1 + \dots + b_m] + h \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial s}\right)_i [-lb_{-l} + \dots - b_{-1} + b_1 + \dots + mb_m] + \\ + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial s^2}\right)_i [l^2 b_{-l} + \dots + b_{-1} + b_1 + \dots + m^2 b_m] + \\ \dots \dots \dots \\ + \frac{h^{N+r}}{(N+r)!} \left(\frac{\partial^{(N+r)} \vec{u}}{\partial s^{(N+r)}}\right)_i [(-l)^{N+r} b_{-l} + \dots + m^{N+r} b_m] + R. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь остаточный член R можно представить в виде

$$R = \frac{h^{N+r+1}}{(N+r+1)!} \theta \left| \frac{\partial^{(N+r+1)} \bar{u}}{\partial s^{(N+r+1)}} \right|_{\max k=-l} \sum_{k=-l}^m |k^{N+r+1} b_k|.$$

При согласовании разложений (24) и (26) получим систему $N+r+1$ уравнений:

$$\sum_{k=-l}^m k^j b_k = \begin{cases} \frac{j!}{h^j} a_j(s), & 0 \leq j \leq N \\ 0, & N+1 \leq j \leq N+r. \end{cases} \quad (27)$$

Определитель полученной системы (27) есть определитель Вандермонда, и как произведение разностей различных чисел всегда отличен от нуля. Следовательно, при достаточном количестве неизвестных, то есть при $l+m \geq N+r$, система (27) всегда разрешима. Если количество $(l+m+1)$ неизвестных b_k больше, чем число уравнений $(N+r+1)$, то $(l+m-N-r)$ неизвестных можно положить равными нулю, а остальные вычислить из системы (27).

Теорема доказана.

Разностный аналог (4) является конечным выражением 1-го приближения для ковариантной производной $\nabla_i u_j$. В общем случае для нечётного $r = 2s+1$ ($s = 0, 1, \dots$) дифференциальное выражение в точке s_i заменяется разностным аналогом r -го приближения, в котором используются точки, симметрично расположенные относительно s_i от s_{i-p-s} до s_{i+p+s} (p - порядок дифференциального оператора). В результате для каждой из $(n+1)$ точек s_0, s_1, \dots, s_n можно записать разностное уравнение, соответствующее дифференциальному. Получим $(n+1)$ уравнений для $n+2p+2s+1$ неизвестных \bar{u}_i от \bar{u}_{-p-s} до \bar{u}_{n+p+s} . Краевые условия дают ещё $2p$ уравнений. Недостающие $2s$ уравнений можно добавить, записав разностные выражения 1, 3, ..., $(2s-1)$ -го приближения для каждой из граничных точек s_0 и s_n . Если в краевых условиях не встречаются $(2p-1)$ производные, то разностные аналоги r -го приближения для граничных точек можно опустить, тогда будут иметь место только значения от \bar{u}_{-p-s+1} до $\bar{u}_{n+p+s-1}$.

В заключение следует отметить, что так как метод криволинейных сеток является обобщением метода конечных разностей, то, на наш взгляд, более предпочтительным для него является название «метод векторных разностей».

Библиографический список

1. Расчёт оболочек сложной формы / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк, В. В. Гайдайчук. – Киев: Будивэльнык, 1990. – С. 22-33.
2. Ковалёв, В.А. Полная статико-геометрическая аналогия теории тонких оболочек/ В.А. Ковалев, В.А. Козлов // Вестник Самарского государственного университета. – 2007, № 9/1 (59). – С. 188-194.
3. Козлов, В.А. Теория тонких гладких оболочек как двумерного континуума в пространстве // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – С. 183-187.

References

1. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Gotsulyak E.A., Gaydaychuk V.V. Calculation of shells of complex shape. Kiev: Budivelnyk, 1990. Pp. 22-33.
2. Kovalev V.A., Kozlov V.A. Full static-geometric analogy of the theory of thin shells. Bulletin of the Samara State University. No. 9/1 (59). 2007. Pp. 188-194.
3. Kozlov V.A. The theory of thin smooth shells as a two-dimensional continuum in space. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics: collection of books. Proceedings of the International Conference. Voronezh: Publishing and printing center of Voronezh State University, 2010. Pp. 183-187.

VECTOR FORM OF FINITE DIFFERENCE METHOD IN THE PROBLEMS OF THIN SHELL THEORY

V. A. Kozlov

Voronezh State Technical University
Russia, Voronezh

Dr of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics

Tel.: +7(473)2764006, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

In the present paper, finite difference method, which is used in the practice of numerical calculations in the scalar form, is presented in the form of generalizing vector relationships. This allows one to work with vector equations in intermediate calculations and write only the final expressions in scalar form. In shell theory, for example, one can work with two vector equations of equilibrium of forces and moments instead of six similar scalar ones. The identity of the discretization schemes of vector differential relations of the theory of thin elastic shells in a system of curvilinear coordinates by the method of curvilinear grids and the method of finite differences is proved. A generalization of the method of curved grids is given.

Keywords: vector form of finite difference method, curvilinear grid method.

СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЦЕПНОЙ ЛИНИЕЙ ИЛИ С ПЕРЕВЕРНУТОЙ ЦЕПНОЙ ЛИНИЕЙ

Ю. А. Несмеев¹

Магнитогорский государственный технический университет
Россия, г. Магнитогорск

¹Научный сотрудник, тел.: +7(473)276-50-74 e-mail: nev_ya@list.ru

Изложен способ решения уравнений, возникающих в инженерных расчётах, связанных с цепной линией или с перевёрнутой цепной линией. Даны примеры применения способа. Один из них посвящён уравнению арки “Ворота Запада” в Сент-Луисе. Изложено преобразование уравнения цепной линии в уравнение $y = -a \cdot ch(x/a) + b$ перевёрнутой цепной линии. При этом изложенный способ применён к нахождению значений параметров a и b по известному расстоянию от вершины перевёрнутой цепной линии до оси абсцисс и по известному расстоянию между концами дуги перевёрнутой цепной линии, расположенными на оси абсцисс.

Ключевые слова: расчёт цепной линии, расчет перевёрнутой цепной линии.

Введение

Провода, тросы и арки являются атрибутами современного города. При проектировании провисания проводов и тросов требуется проведение расчётов. С точки зрения устойчивости, арки в форме перевёрнутой цепной линии являются наиболее перспективными. В расчётах, связанных с провисанием проводов и тросов, используется математическое определение цепной линии. Перевёрнутая цепная линия применяется в строительстве и архитектуре. Арки, имеющие форму перевёрнутой цепной линии, обладают высокой устойчивостью. В литературе сведения о расчётах геометрических параметров таких арок практически отсутствуют. Известно (из интернета) лишь уравнение одной такой арки (арка “Ворота Запада” в Сент-Луисе.) При этом не сообщается способ получения чисел, входящих в него. Уравнение произвольной арки в форме перевёрнутой цепной линии не опубликовано. Не предложены простые численные способы решения уравнений, связанных с перевёрнутой цепной линией. В широко известной математической литературе определение перевёрнутой цепной линии отсутствует. Очевидным является то, что такое определение должно опираться на определение “обычной” цепной линии. Ввиду использования таких арок на практике актуальными являются:

- 1) вывод уравнения арки в форме перевёрнутой цепной линии;
- 2) разработка такого простого численного способа нахождения корней уравнений, связанных с арками, который применим и в расчётах по провисанию проводов и тросов.

Решению этих проблем посвящена данная статья. При решении используется известное определение цепной линии; даётся математическое определение перевёрнутой цепной линии (позволившее вывести уравнение перевёрнутой цепной линии).

Определение перевёрнутой цепной линии

В статье используется определение, приведённое в [1, с. 624]. Из него следует, что цепная линия является такой дугой на плоскости, концы которой зафиксированы в двух точках. В [1] принята такая декартова система координат xOy , в которой при взгляде пользователя на плоскость ось абсцисс направлена вправо, а ось ординат направлена вверх.

В ней уравнением цепной линии является зависимость

$$y = a \cdot ch(x/a). \quad (1)$$

В этой системе координат: концы дуги лежат в верхней полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс; концы дуги расположены симметрично относительно оси ординат; дуга вогнута в сторону оси абсцисс. Параметр a равен расстоянию от нижней точки дуги до оси абсцисс. В статье расстояние от прямой, проходящей через концы дуги, до нижней точки дуги имеет обозначение h_1 . Поэтому расстояние от прямой, проходящей через концы дуги, до оси абсцисс равно величине $h_1 + a$. В статье расстояние между концами дуги имеет обозначение h_2 . Также принято следующее определение перевёрнутой цепной линии.

Определение. Перевёрнутой цепной линией называется такая дуга на плоскости, которая обладает следующими свойствами:

1. Она может быть получена из цепной линии преобразованиями, а именно поворотом [2, с. 737] и параллельными переносами [2, с. 32].
2. После преобразований прообразом вершины её дуги является самая нижняя точка цепной линии.
3. В результате преобразований вершина её дуги расположена в верхней полуплоскости.
4. После преобразований образы концов дуги цепной линии расположены на оси абсцисс симметрично относительно оси ординат.

Согласно этому определению, величины h_1 и h_2 являются соответственно расстоянием от вершины перевёрнутой цепной линии до оси абсцисс и расстоянием между концами её дуги. Концы расположены на оси абсцисс. Определение используется для вывода уравнения арки, имеющей форму перевёрнутой цепной линии. Притом h_1 – высота арки, а h_2 – расстояние между самыми нижними точками арки (между пятами арки).

Вывод уравнения арки в форме перевёрнутой цепной линии

Отнесём плоскость к принятой в [1] системе координат xOy . Будем, используя уравнение (1), искать уравнение перевёрнутой цепной линии в виде соотношения

$$y = -a \cdot ch(x/a) + b, \quad (2)$$

заметив, что принятое выше определение позволяет это сделать. В рамках поиска выполним на плоскости построения. Через точки $M_1(-h_2/2, h_1 + a)$, $M_2(h_2/2, h_1 + a)$ и $M_3(0, a)$ проведём цепную линию. Притом будем предполагать, что $a > 0$. Тогда уравнением построенной цепной линии будет зависимость (1). Выполним зеркальное (относительно оси абсцисс) отображение цепной линии:

$$y = -a \cdot ch(x/a).$$

Эта кривая имеет в нижней полуплоскости вершину с координатами $M_3'(0, -a)$. Точки M_1 и M_2 перейдут в точки $M_1'(-h_2/2, -h_1 - a)$ и $M_2'(h_2/2, -h_1 - a)$.

Сложив график полученной кривой линии с графиком функции

$$y = h_1 + a,$$

найдем график перевёрнутой цепной линии с вершиной $M_3''(0, h_1)$. В результате сложения графиков точки M_1' и M_2' перейдут в точки $M_1''(-h_2/2, 0)$ и $M_2''(h_2/2, 0)$. Уравнение графика, полученного сложением, имеет вид

$$y = -a \cdot ch(x/a) + h_1 + a, \quad (3)$$

Равенство (3) – уравнение перевёрнутой цепной линии. Сравнивая (2) и (3), получим

$$b = h_1 + a. \quad (4)$$

Задание числовых значений величин h_1 и h_2 позволяют найти соответствующее значение параметра a с помощью уравнения

$$0 = -a \cdot ch(h_2/2a) + h_1 + a. \quad (5)$$

В уравнении (5) неизвестной величиной служит a . Для определения её значения может быть применён представленный ниже численный способ.

Способ решения уравнения $f(x, k) = 0$ (x – неизвестное, k – константа)

1. Формируется функция $w(t) = f(t, k)$ или функция $w(t) = -f(t, k)$, зависящая от вспомогательной переменной t (вводится для упрощения вычисления значений функции w с помощью подпрограммы).
2. Подбирается малое положительное число α_0 , начиная с близкого к нулю числа, не выходящее при программировании значения функции $w(t)$ из множества допустимых значений, соответствующих используемому типу переменной величины.
3. Подбирается малое положительное число λ , начиная с близкого к нулю числа, по критерию из второго пункта.
4. Ищутся элементы последовательности $\{\alpha_i\}$ по формуле

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \lambda, i = 0, 1, 2, \dots$$

При этом находятся значения функции w в очередных точках, являющихся элементами последовательности $\{\alpha_i\}$. Вычисления в этих точках останавливаются, если в некоторой такой точке функция w принимает значение 0 или если на концах некоторого промежутка из набора промежутков $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ функция w принимает значения разных знаков. В первом случае число α_i принимается за первый найденный нуль функции w , а следовательно, и за первое найденное значение величины x . Во втором случае к последнему промежутку применяется метод деления отрезка пополам для нахождения первого нуля функции w и первого значения величины x . После нахождения первого нуля функции w описанная выше процедура продолжается в целях нахождения других значений величины x (вычисление элементов последовательности).

Замечание 1. При решении этим способом уравнения (5) относительно a функцией $w(t)$ должна быть одна из следующих зависимостей:

$$w(t) = -t \cdot ch(h_2 / 2t) + h_1 + t, \quad (6)$$

$$w(t) = -[-t \cdot ch(h_2 / 2t) + h_1 + t]. \quad (7)$$

Примеры применения способа решения уравнения $f(x, k) = 0$

Пример 1. Требуется найти уравнение арки в форме перевёрнутой цепной линии, если её высота 70 м, а расстояние между её самыми нижними точками 380 м. (Взяты размеры арочного пролёта Бугринского моста через реку Обь в Новосибирске. Арка этого пролёта по форме близка к перевёрнутой цепной линии).

Решение. $h_1 = 70$ м, $h_2 = 380$ м. Решаемое уравнение:

$$0 = -a \cdot ch(190/a) + 70 + a.$$

Функция w имеет вид

$$w(t) = -t \cdot ch(190/t) + 70 + t.$$

Число α_0 принимаем равным 0,05, а число $\lambda = 0,01$. Вычисление элементов последовательности $\{\alpha_i\}$ прекращается при $i = 26873$. Нужное значение величины a лежит между числами 268,77 и 268,78. Применение метода деления отрезка пополам приводит к равенству $a = 268,776$. Способ не выявил других корней решаемого уравнения. $b = 338,776$. Уравнением арки служит соотношение

$$y = -268,776 \cdot ch(x/268,776) + 338,776.$$

Пример 2. Требуется найти уравнение арки в форме перевёрнутой цепной линии, если её высота 192 м, а расстояние между её самыми нижними точками также 192 м. (Арка “Ворота Запада” в Сент-Луисе).

Решение. $h_1 = 192$ м, $h_2 = 192$ м. Решаемое уравнение:

$$0 = -a \cdot ch(96/a) + 192 + a.$$

Функция w :

$$w(t) = -t \cdot \operatorname{ch}(96/t) + 192 + t.$$

Значение величин: $\alpha_0 = 0,05$, $\lambda = 0,01$. Выявленный корень решаемого уравнения: $a = 38,922$. Значение величины $b = 230,992$. Уравнением арки служит соотношение
$$y = -38,922 \cdot \operatorname{ch}(x/38,922) + 230,922.$$

Замечание 2. Приводимое в интернете уравнение арки из Сент-Луиса имеет вид
$$y = -38,92 \cdot \operatorname{ch}(x/38,92) + 230,95.$$

Пример 3. Найти уравнения цепных линий вида
$$y = a \cdot \operatorname{ch}(x/a),$$

проходящих через точку $M_0(1, 3)$.

Решение. Относительно a решается уравнение
$$3 = a \cdot \operatorname{ch}(1/a).$$

Для этого ищутся нули функции

$$w(t) = t \cdot \operatorname{ch}(1/t) - 3.$$

Выбираются константы $\alpha_0 = 0,05$, $\lambda = 0,01$. Перебираются промежутки $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Предложенный способ на промежутках $[\alpha_{253}, \alpha_{254}]$ и $[\alpha_{2720}, \alpha_{2721}]$ устанавливает следующие нули функции w : 0,35364; 2,82089. Следовательно, через точку $M_0(1, 3)$ проходят цепные линии с этими же значениями параметра a . Их уравнения:

$$y = 0,35364 \cdot \operatorname{ch}(x/0,35364); \quad (8)$$

$$y = 2,82089 \cdot \operatorname{ch}(x/2,82089). \quad (9)$$

Замечание 3. Постановка вопроса, изложенного в примере 3, является новой. Результат решения говорит о том, что вращение каждой из найденных цепных линий вокруг оси абсцисс даёт свой катеноид [1, с. 624]. Площади катеноидов, полученных вращением кривых (8) и (9) в квадратных единицах измерения, равны соответственно 58,97 и 36,97. Оба катеноида содержат те окружности, которые получаются вращением точки M_0 и точки, симметричной ей (относительно оси ординат), вокруг оси абсцисс. Площадь цилиндра, полученного вращением того отрезка прямой, который соединяет точку M_0 с точкой, симметричной ей, равна числу 37,70. Это число меньше числа 58,97. Поэтому при вращении цепная линия (8) не даёт поверхность с минимальной площадью. Этот факт противоречит утверждению [3, с. 118] о том, поверхность катеноида всегда является поверхностью с минимальной площадью.

Пример 4. (Взята отредактированная постановка задачи из [3, с. 121-124]). Найти уравнение линии провисания провода по следующим условиям:

- 1) расстояние между точками закрепления 50 м;
- 2) длина провода 50,036 м;
- 3) провод является тяжёлым, гибким, однородным, нерастяжимым;
- 4) точки закрепления находятся на одной высоте.

Также установить, на какое расстояние d провисает середина провода при условиях 1) – 4).

Решение. Условия 3) и 4) позволяют искать линию провисания в виде зависимости
$$y = a \cdot \operatorname{ch}(x/a),$$

считая, что точки закрепления симметричны относительно оси ординат, а величина a – расстояние от оси абсцисс до самой нижней точки провода (следовательно, величина a имеет одно значение). Используя эту зависимость, будем искать значение величины a . Для поиска будем применять способ решения, приведённый выше. Перед поиском заметим, что из условий 1) и 2) следует равенство

$$25,018 = a \cdot \operatorname{ch}(25/a), \quad (10)$$

которое вытекает из результата применения формулы вычисления длины дуги как части цепной линии, в которой параметром дуги служит координата x (изменяющаяся в промежут-

ке $[-25; 25]$), и в результате применения свойств гиперболических функций. Сформируем функцию

$$w(t) = t \cdot ch(25/t) - 25,018.$$

При $\alpha_0 = 0,05$, $\lambda = 0,01$ решение уравнения (10) изложенным выше способом приводит к следующим результатам: нуль функции w является внутренней точкой промежутка $[\alpha_{38035}, \alpha_{38036}]$; нулём функции w является число 380,404. Значит, параметр a имеет значение 380,404. Поэтому уравнением линии провисания провода является равенство

$$y = 380,404 \cdot ch(x/380,404).$$

Так как $d = y(25) - y(0)$, то $d = 0,822$ м.

Замечание 4. В [3] число $d = 0,822$ получается в результате действий над вспомогательными степенными рядами.

С помощью изложенного выше способа были получены следующие таблицы. В них все величины приведены в метрах.

Таблица 1

Значение параметров a и b в уравнении $y = -a \cdot ch(x/a) + b$ перевернутой цепной линии ($h_1 = h_2$, $h_1 = 191 \div 209$)

h_1	a	b
191,00	- 38,72	229,72
192,00	- 38,92	230,92
193,00	- 39,12	232,12
194,00	- 39,33	233,33
195,00	- 39,53	234,53
196,00	- 39,73	235,73
197,00	- 39,94	236,94
198,00	- 40,14	238,14
199,00	- 40,34	239,34
200,00	- 40,54	240,54
201,00	- 40,75	241,75
202,00	- 40,95	242,95
203,00	- 41,15	244,15
204,00	- 41,35	245,35
205,00	- 41,56	246,56
206,00	- 41,76	247,76
207,00	- 41,96	248,96
208,00	- 42,17	250,17
209,00	- 42,37	251,37

Таблица 2

Значение параметров a и b в уравнении $y = -a \cdot ch(x/a) + b$ перевернутой цепной линии ($h_1 = h_2$, $h_1 = 1 \div 10$)

h_1	a	b
1,00	- 0,20	1,20
2,00	- 0,41	2,41
3,00	- 0,61	3,61
4,00	- 0,81	4,81
5,00	- 1,01	6,01
6,00	- 1,22	7,22
7,00	- 1,42	8,42
8,00	- 1,62	9,62
9,00	- 1,82	10,82
10,00	- 2,03	12,03

Таблица 3

Значение параметров a и b в уравнении $y = -a \cdot ch(x/a) + b$ перевёрнутой цепной линии
($h_2 = 190, h_1 = 10 \div 190$)

h_1	a	b
10,00	- 462,46	472,46
20,00	- 233,66	253,66
30,00	- 158,36	188,36
40,00	- 121,34	161,34
50,00	- 99,53	149,53
60,00	- 85,26	145,26
70,00	- 75,25	145,25
80,00	- 67,87	147,87
90,00	- 62,20	152,20
100,00	- 57,73	157,73
110,00	- 54,10	164,10
120,00	- 51,11	171,11
130,00	- 48,59	178,59
140,00	- 46,44	186,44
150,00	- 44,58	194,58
160,00	- 42,96	202,96
170,00	- 41,54	211,54
180,00	- 40,27	220,27
190,00	- 39,13	229,13

Таблица 4

Значение параметра a в уравнении провода, закреплённого в двух точках,
и величина d провисания его середины в зависимости от длины s провода.

Расстояние между точками закрепления 50 м

s	a	d
50,036	380,40	0,822
50,037	375,23	0,833
50,038	370,26	0,844
50,039	365,48	0,855
50,040	360,89	0,866
50,041	356,46	0,877
50,042	352,19	0,888
50,043	348,07	0,898
50,044	344,10	0,909
50,045	340,25	0,919
50,046	336,54	0,929
50,047	332,94	0,939
50,048	329,45	0,949
50,049	326,07	0,959
50,050	322,80	0,969
50,051	319,62	0,978
50,052	316,53	0,988
50,053	313,53	0,997
50,054	310,62	1,007
50,055	307,78	1,016

Замечание 5. При составлении таблиц были приняты следующие значения величин:
 $\alpha_0 = 0,05, \lambda = 0,01$.

Библиографический список

1. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
2. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии/ П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
3. Янпольский, А. Р. Гиперболические функции/ А. Р. Янпольский. – М.: Физматгиз, 1960. – 196 с.

References

1. Mathematical encyclopedic dictionary. Moscow, 1988. 847 p.
2. Alexandrov P.S. Lectures on analytical geometry . M.: Nauka , 1968. 912 p.
3. Yanpolsky A.R. Hyperbolic functions . M.: Fizmatgiz, 1960. 196 p.

WAY OF CALCULATION OF ROOTS THE EQUATIONS CONNECTED WITH THE CHAIN LINE OR WITH THE TURNED CHAIN LINE

Yu. A. Nesmeev

Magnitogorsk State Technical University
Russia, Magnitogorsk

¹Scientist , tel.: +7(473)276-50-74 e-mail: nev_ya@list.ru

The way of the solution of the equations arising in the engineering calculations connected with the chain line or with the turned chain line is stated. Examples of application of a way are given. One of them is devoted to the arch equation of "the West Collar" in St. Louis. Transformation of the equation of the chain line into equation $y = -a \cdot ch(x/a) + b$ is stated of the turned chain line. Besides the stated way is applied to finding of values of parameters a and b on the known distance from top of the turned chain line to abscissa axis and on the known distance between the ends of an arch of the turned chain line located on abscissa axis.

Keywords: calculation the chain line, the turned chain line.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.26

СОПОСТАВЛЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ТИПОВОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ПРОЛЕТНОГО СТРОЕНИЯ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА ДЛЯ РОССИЙСКИХ И ЕВРОПЕЙСКИХ НОРМАТИВНЫХ ВРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

В. С. Сафронов¹, С. А. Осипов², Н. Мельхиор³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}

Россия, г. Воронеж

¹ Д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики., тел.: +7 (473) 2715230
e-mail: vss22@mail.ru

² Старший преподаватель кафедры строительной механики

³ Магистрант кафедры строительной механики

Приводятся результаты численных исследований параметров надёжности широко распространённого в России типового железобетонного разрезного пролетного строения под две полосы временной нагрузки А11 габаритом Г10+0,75+1,00 в сравнении с аналогичными характеристиками этого же транспортного сооружения при пропуске временных нагрузок, регламентируемых европейскими мостовыми нормативами. В расчетах усилий от постоянных и временных нагрузок используется пространственная конечно-элементная модель плитно-балочной конструкции пролетного строения. Для определения предельных изгибающих моментов применяется деформационный алгоритм на основе трехлинейной диаграммы деформирования для бетона и двухлинейной - для арматуры.

Вероятностные расчеты выполняются на основе предположений о разбросе прочностных характеристик бетона и рабочей арматуры, также параметров постоянных и временных нагрузок в соответствии с нормальным законом распределения.

Анализируются различия в нагруженности несущих балок без диафрагменного пролетного строения при эксплуатации в соответствии с российскими и европейскими нормативными документами

Ключевые слова: автомобильный мост, железобетонное балочное пролетное строение, логарифмический показатель надёжности, российские и европейские временные нагрузки, нормативные условия загрузки, разброс прочности материалов и нагрузок

Введение

В связи с развитием в последние годы международных транспортных коммуникаций между разными странами Европы и Азии остро появилась необходимость массового строительства федеральных автомобильных дорог, на которых можно обеспечить безопасный проезд автотранспорта и поездов без перегрузки на границах. Такие задачи в настоящее время рассматриваются, например, при проектировании Шелкового пути по территории Российской Федерации из Китая в Европу. Они могут успешно решаться на основе новых нормативных документов, представляющих собой согласованные на основе национальных стандартов правила и положения. Для разработки новых международных нормативов необходимы специальные исследования, в которых с единых методических позиций могут быть сопоставлены действующие в настоящее время в различных странах расчетные правила и положения по оценке потребительских качеств несущих конструкций инженерных объектов транспортной инфраструктуры, включая мостовые сооружения.

© Сафронов В. С., Осипов С. А., Мельхиор Н., 2019

При оценке потребительских качеств транспортных сооружений наиболее важной характеристикой является грузоподъемность, которая представляет собой величину максимальной временной подвижной нагрузки определенного вида, которая может быть безопасно для прочности транспортных сооружений по нему пропущена, не превышая максимально разрешенные автомобили на данном участке автодороги. В настоящее время для расчета грузоподъемности может использоваться методика на основе применяемых в разных странах детерминированных подходов, в соответствии с которыми сравниваются предельные усилия в наиболее нагруженных элементах несущих конструкций с максимальными величинами от совместного действия постоянных и временных нагрузок. При этом возможные отклонения действительных предельных и максимальных усилий от нормативных значений учитываются коэффициентами надежности по материалам и нагрузкам. При корректировках время от времени нормативных документов изменяются рекомендуемые значения этих коэффициентов. Поэтому сопоставление грузоподъемностей конкретных транспортных сооружений необходимо выполнять по изданным в один и тот же период документам. В настоящем исследовании приняты временные нагрузки, регламентируемые в применяемом в России с 1984 года нормативном документе СНиП 2.05.03-84 «Мосты и трубы» [1], и в европейском стандарте EN 1991-2 [2], рекомендуемом для использования в странах Евросоюза .

Более обоснованные сопоставительные данные получаются при использовании методик, основанных на положениях теории надежности [3] или теории риска [4], которые непосредственно учитывают статистические данные о флуктуациях прочностных характеристик материалов и действующих постоянных и временных нагрузок. В этих методиках используются вероятностные оценки возникновения предельных состояний при совместном действии постоянных и временных проектных нагрузок. При сопоставлении вероятностей отказа с допускаемыми для моста данного типа судят о грузоподъемности транспортного сооружения. Так как действующими в России нормативными документами вероятности отказов не регламентированы, здесь будем использовать их значения, рекомендуемые Еврокодом по надежности. Такие подходы применяются для несущих конструкций зданий производственного назначения [5], оценки прочности висячих водоводов [6] и мостовых сооружений из железобетона [7-8]. В последнем случае необходимо применять деформационные алгоритмы расчета железобетонных конструкций с учетом нелинейных диаграмм деформирования бетона и железобетона. Примером применения такого алгоритма является методика, описанная и апробированная в статье [9] для оценки надежности составных железобетонных стержневых элементов. В основу таких алгоритмов положены предположения о распределении прочностных характеристик материалов по нормальному закону с заданными средними значениями и среднеквадратическими отклонениями.

В настоящей публикации на примере разрезного железобетонного автодорожного моста с двух полосной проезжей частью шириной 10,0 м с балочным пролетным строением по типовому проекту серии 3.503.14 , вып. 710/5 проектировки Союздорпроекта [12], состоящего из без диафрагменных тавровых балок расчетным пролетом $l=17,4$ м, сопоставляются логарифмические показатели надежности средних сечений главных балок по ширине при пропуске регламентируемых СНиП 2.05.03-84[1] временных подвижных нагрузок А11 и НК-80 с аналогичными показателями для рекомендуемых стандартом EN 1991-2[2] временных распределенных **A(L)** и сосредоточенных **Me80** нагрузок.

Целью выполненных исследований является сопоставление параметров надежности главных балок пролетного строения при проезде автомобилей, описываемых в виде распределенных и сосредоточенных временных нагрузок.

1. Краткое описание объекта исследования и используемой конечно-элементной расчетной схемы пролетного строения моста

Объектом изучения является балочный разрезной мост для двух полос автомобильной нагрузки А11 и одиночной колесной нагрузки НК-80 с пролетными строениями из семи тавровых балок из бетона класса В40 ($R_b=20$ МПа) со стержневой ненапрягаемой продольной рабочей арматурой класса АIII с расчетным сопротивлением $R_s=265$ МПа ($R_s=295$ МПа). Габарит моста - Г10,0 + 0,75+1,00 м. Шаг главных балок в поперечном направлении является одинаковым и равным 1,70 м. Поперечное сечение, продольный фасад и армирование главной балки изучаемого пролетного строения моста приведено на рис. 1.

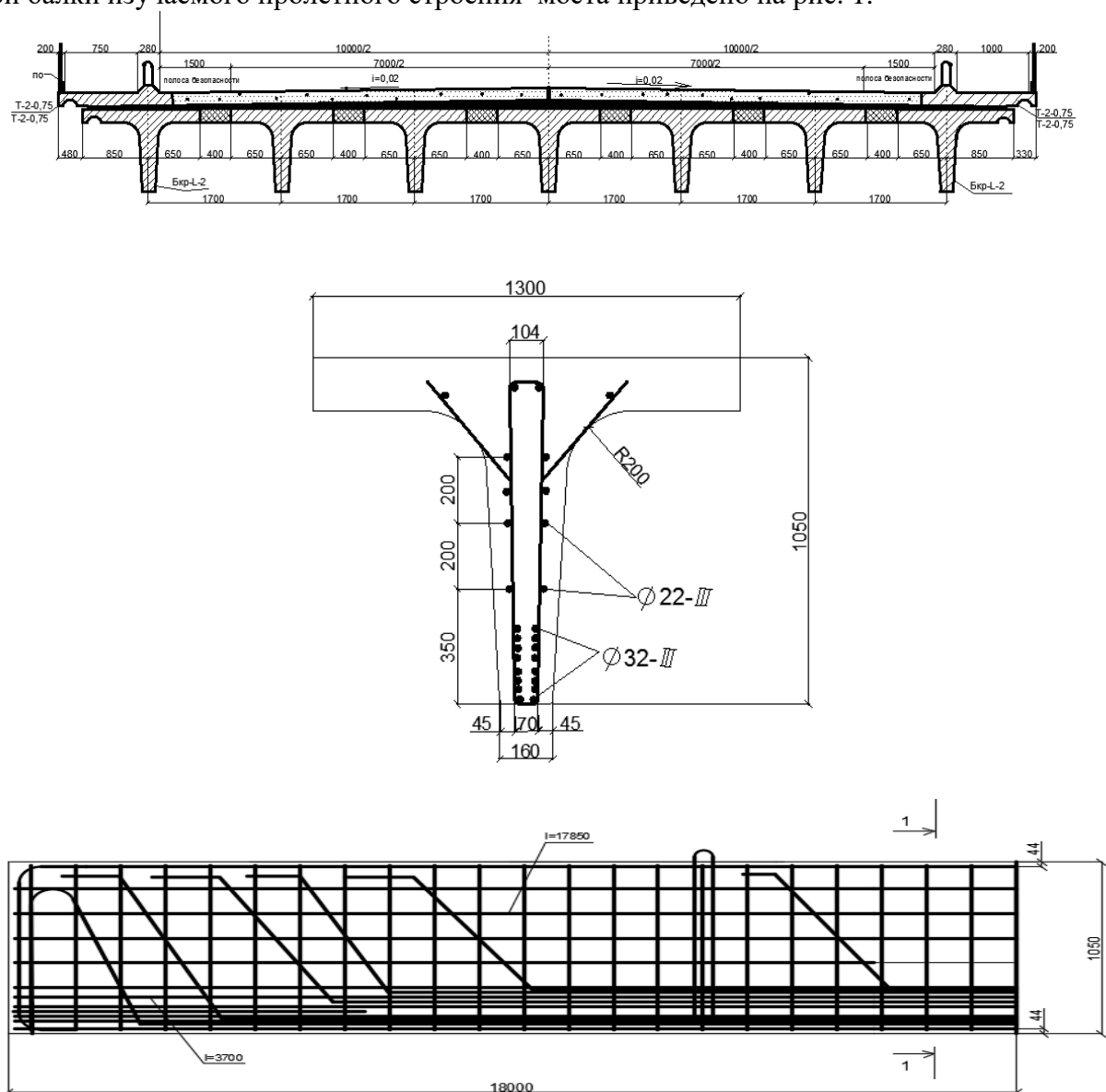


Рис. 1. Поперечное сечение, продольный фасад и армирование главной балки изучаемого пролетного строения моста

Расчеты выполнялись с использованием сертифицированного программного комплекса «ЛИРА-САПР 2012 PRO» со специализированной расчетно-графической системой ПК «ЛИРА-САПР 2012 Мост» [15]. При проведении статических расчетов пролетное строение

рассматривается как пластинчато-стержневая система, в которой продольные стержни моделируют балки пролетного строения, а пластинчатые элементы – плиту проезжей части между балками (рис. 2). При моделировании несущих элементов рассчитываемого пролетного строения использовались следующие типы конечных элементов (КЭ):

- универсальный стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций (КЭ 10);
- универсальный четырехугольный плоский оболочечный КЭ (КЭ 44).

Универсальный стержневой КЭ представляет собой прямолинейный двух узловый конечный элемент с двенадцатью степенями свободы (СС), моделирующий растяжение-сжатие, кручение, поперечный сдвиг и изгиб.

Плоский четырехугольный оболочечный КЭ с двадцатью четырьмя СС является комбинацией конечных элементов плоского (мембранного) и изгибного напряженных состояний. Этот элемент воспринимает мембранные, сдвиговые, поперечные и изгибные нагрузки.

Поскольку в узлах стержневого и плоского оболочечного КЭ одинаковый набор СС, то возможно их совместное использование в одной КЭ-модели.

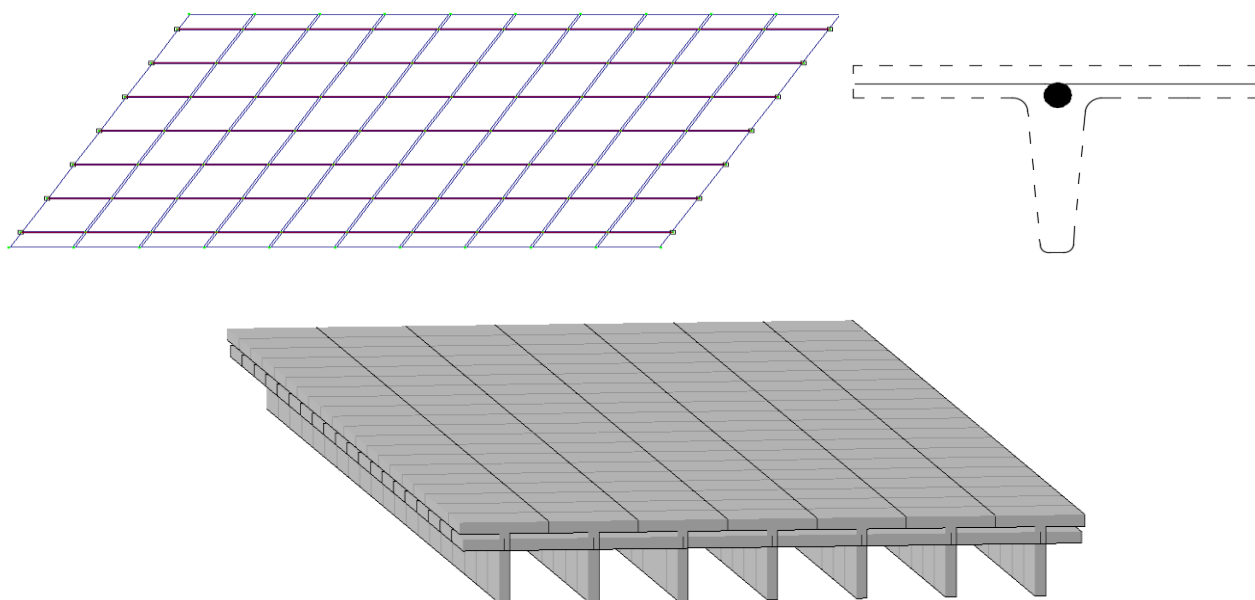


Рис. 2. Конечно-элементная расчетная схема плитно-балочного пролетного строения

В пластинчато-стержневой расчетной схеме для исключения работы плоских оболочечных КЭ плиты проезжей части на изгиб в продольном направлении жесткостные характеристики плиты задаются как для ортотропного материала с малой по величине жесткостью в продольном направлении.

Расчет жесткостных характеристик балок выполнялся с использованием расчетно-графической системы «Конструктор сечений» комплекса «ЛИРА». Эта программа предоставляет возможность компоновать в графической среде сечение сложной формы. Геометрические характеристики вычисляются численным интегрированием после выполнения процедуры триангуляции.

Геометрические размеры балок и их армирование, а также постоянные нагрузки от элементов мостового полотна и дорожного покрытия принимались в соответствии с проектом [12].

2. Описание временных подвижных нагрузок

При проведении сопоставительных расчетов параметров надежности мостового сооружения использованы регламентируемые российскими СНиП 2.05.03-84 [1] и европейскими EN 1991-2[2] нормативными документами типы распределенных и локальных временных нагрузок, используемых при проектировании мостовых сооружений. Ниже даются их графические представления и рекомендуемые значения коэффициентов надежности по нагрузкам и коэффициенты динамичности.

2.1. Временные нагрузки по российским нормативам[1]

1. Для автомобильной нагрузки **A11** в виде двух полос (рис. 3) равномерно распределенной составляющей интенсивностью (на обе колеи) по длине моста $v=10,78\text{КН/м}$ и двухосной тележки с осевой нагрузкой $P=107,9\text{ КН}$ (11тс). Первая полоса принимается с коэффициентом сочетаний $S_1=1,0$ вторая - с уменьшенным коэффициентом $S_2=0,6$. Коэффициенты надежности по нагрузке составляют $\gamma_f=1,5$ – для тележки и $\gamma_f=1,2$ – для распределенной части. Динамический коэффициент для моста пролетом $\lambda=1=17,4\text{м}$ равен:

$$1+\mu=1+\frac{45-\lambda}{135}=1,20. \quad (1)$$

2. Для тяжелых колесных нагрузок **НК-80** в виде одной четырехосной машины (рис. 3, б) общим весом 785 КН (80 тс), которая не может быть установлена на полосы безопасности. Коэффициент надежности по нагрузке принимается равным $\gamma_f=1,0$. Динамический коэффициент независимо от длины пролета моста равен $1+\mu=1,1$.

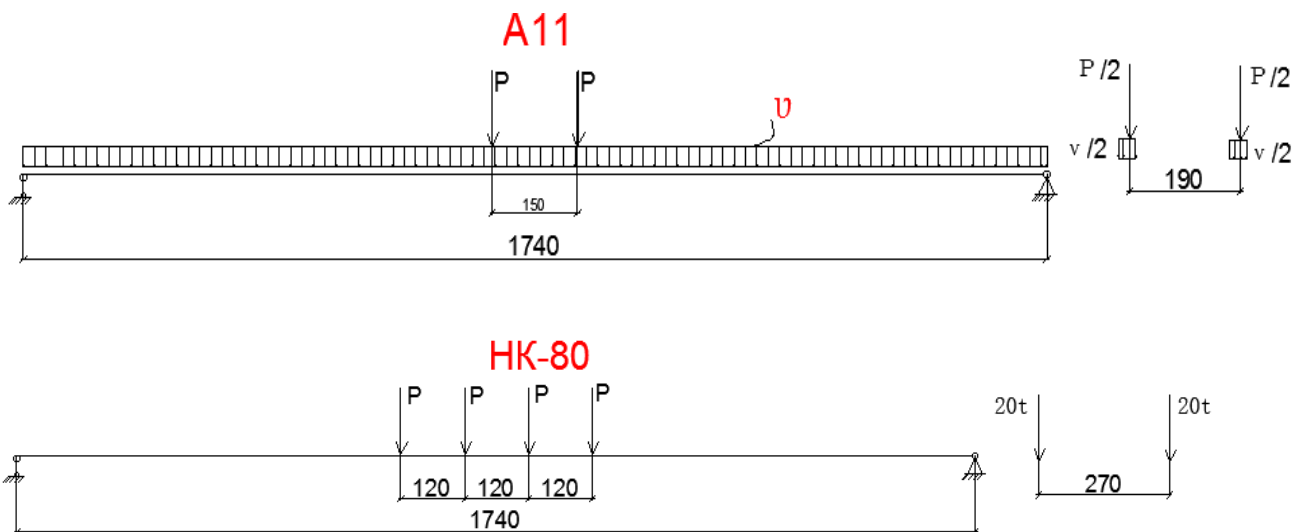


Рис. 3. Схемы временных нагрузок по Российским нормативам

2.2. Временные нагрузки по европейским нормативам [2]:

Аналогично российским нормам [1] используются два типа подвижных нагрузок: распределенные - для колонн типовых автомобилей и сосредоточенные - для тяжелых транспортных средств, однако вместо распределения по длине загружаемых полос проезда они могут проезжать по любым колеям в пределах всей ширины проезжей части, за исключением полосы безопасности, составляющей 0,50 м (рис. 4).

Приведем численные значения нагрузок и коэффициентов надежности и динамичности для рассматриваемого железобетонного плитно-балочного моста расчетным пролетом $l = 17,4$ м и габаритом 10,0 м.

Интенсивность в кгс/м^2 распределенной (рис. 4) по всей длине и ширине проезжей части, за исключением узких полос безопасности шириной 0,50 м, временной нагрузки $A(L)$ определяется по формуле

$$Q = 230 + 3600/(l + 12), \quad (2)$$

где l - расчетный пролет моста. По ширине проезжей части вычисленная по формуле (2) интенсивность распределенной нагрузки корректируется с помощью коэффициентов $a_1=1,0$ и $a_2=0,90$, которые зависят от расположения и важности полос проезда колонн временной нагрузки. Коэффициент надежности для распределенной нагрузки $A(L)$ равен $\gamma_f=1,05$. Динамический коэффициент по европейским нормативам [2] зависит от расчетного пролета l моста и соотношения между действующими на мост постоянными и временными нагрузкам G/s :

$$\delta = 1 + 0,6/(1 + 4G/s). \quad (3)$$

Для распределенной части временной нагрузки рассматриваемого железобетонного моста динамический коэффициент близок к принятому в Российских нормах [1] и составляет: $1+\mu=1,18$.

Нагрузки от тяжелого одиночного транспортного средства **Me80** общим весом 80 тс представляется двумя линейно распределенными по ширине проезжей части частями длиной 3,5 м на расстоянии 1,50 м друг от друга (рис. 4). Расположение одиночного транспортного средства на проезжей части автодорожного моста может быть произвольным, исключая находящиеся вблизи боковых ограждений проезжей части моста полос безопасности шириной 0,50 м. Коэффициент надежности для нагрузки **Me80** принимается равным $\gamma_f=1,0$. Динамический коэффициент для этой одиночной временной нагрузки отличается от принятого в РФ для колесной нагрузки **НК-80** независимо от пролета. Здесь его величина также вычисляется по формуле (3) в зависимости от расчетного пролета l моста и соотношения между действующими на мост постоянными и временными нагрузками G/s . Для рассматриваемого моста динамический коэффициент составляет $\delta=1,17$.

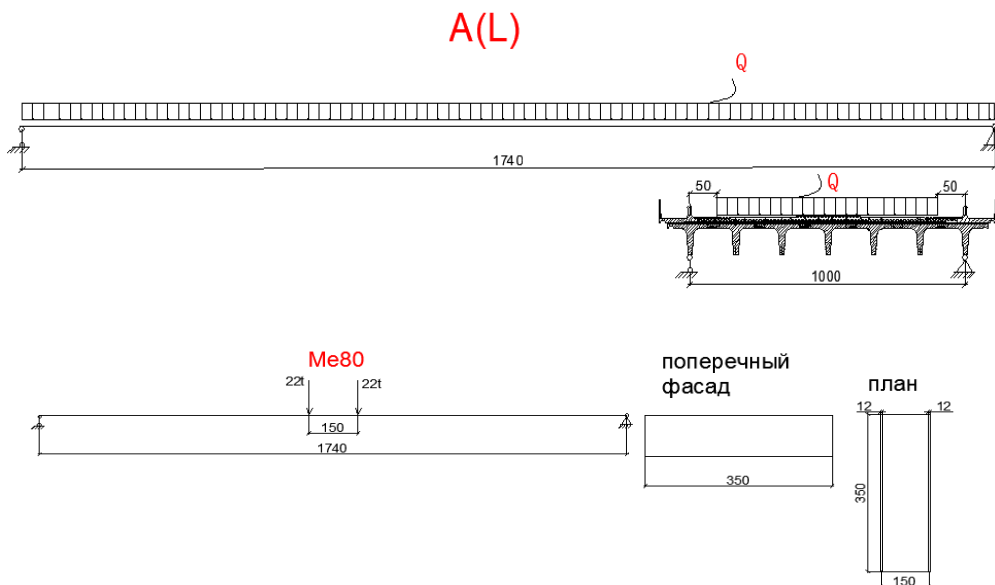


Рис. 4. Схемы временных нагрузок по европейским нормативам

3. Основные положения методики вероятностного расчета

Для определения количественных параметров надежности железобетонных балок рассматриваемого плитно-балочного пролетного строения с использованием положений теории надежности введем допущения о том, что прочностные характеристики бетона и арматуры, а также действующие постоянные и временные нагрузки являются случайными величинами, которые подчиняются нормальному закону распределения. В качестве критерия оценки надежности для рассматриваемого разрезного плитно-балочного пролетного строения примем изгибающие моменты в средних сечениях главных балок. При определении математических ожиданий прочностных характеристик материалов используем известные положения об 95–процентной обеспеченности нормативных сопротивлений бетона R_{bn} или арматуры R_{sn} :

$$m_R = \frac{R_{bn}(R_{sn})}{1-1.64 \cdot v_R}, \quad (4)$$

а стандарты прочности материалов вычислим через коэффициенты вариации прочности v_R по формуле

$$\sigma_R = m_R \cdot v_R. \quad (5)$$

Статистические параметры максимальных изгибающих моментов от действующих постоянных и временных нагрузок для использования в вероятностных расчетах определим через расчетные значения изгибающих моментов M_{pi} , коэффициенты надежности по нагрузкам γ_{fi} и коэффициентам вариации v_M из следующих выражений:

-математические ожидания изгибающих моментов от нагрузок i -го типа:

$$m_{Mi} = M_{pi} / \gamma_{fi}, \quad (6)$$

- стандарты изгибающих моментов от нагрузок i -го типа:

$$\sigma_{Mi} = m_{Mi} \cdot \frac{\gamma_{fi} - 1}{1.64}, \quad (7)$$

-суммарные математические ожидания нагрузок:

$$m_{Ms} = m_{M1} + m_{M2} + \dots + m_{Mn}, \quad (8)$$

- стандарты суммарных нагрузок:

$$\sigma_{sM} = \sqrt{\sigma_{M1}^2 + \sigma_{M2}^2 + \dots + \sigma_{Mn}^2} \quad (9)$$

Полученные статистические характеристики предельных и максимальных изгибающих моментов в средних сечениях балок пролетного строения используются для вычисления параметров, оценивающих вероятность предельного состояния в каждой из балок при пропуске расчетных временных нагрузок, регламентируемых российскими и европейским нормативными документами:

1. Характеристика безопасности:

$$\beta = (m_{M_{пред}} - m_{M_{max}}) / \sigma_{M_{пред}}^2 + \sigma_{M_{max}}^2; \quad (10)$$

2. Вероятность отказа:

$$Q = 0,5 - \Phi(\beta), \quad (11)$$

где $\Phi(\beta)$ –функция Лапласа.

3. Логарифмический показатель надежности для средних сечений балок

$$\rho = -\lg(1 / Q). \quad (12)$$

4. Сопоставительные данные надежности типового железобетонного моста для российских и европейских временных нагрузок

Описанная выше вероятностная методика определения надежности средних сечений железобетонных балок использовалась для сопоставления параметров надежности автодорожного моста с типовыми плитно-балочными пролетными строениями расчетным пролетом $l=17,4\text{м}$ при их загрузении установленными СНиП 2.05.03-84 [1] временными нагрузками А11 и НК-80 с аналогичными показателями для рекомендуемых европейским стандартом EN 1991-2[2] временными нагрузками **A(L)** и **Me80**.

Математические ожидания и среднеквадратические отклонения предельных изгибающих моментов для всех балок рассматриваемого пролетного строения, вычисленные методом статистических испытаний по проектным данным с помощью деформационного расчетного алгоритма с использованием трехлинейных диаграмм деформирования для бетона и двух линейной диаграммы деформирования для стержневой рабочей арматуры равны: $m_{M_{пред}} = 1893\text{кНм}$, $\sigma_{M_{пред}} = 187\text{кНм}$. Коэффициенты вариации в расчетах приняты равными: для бетона железобетонных балок $v_b=0,135$ и для стержневой рабочей арматуры $v_s=0,08$.

Статистические характеристики суммарных максимальных изгибающих моментов в средних сечениях всех балок пролетного строения от совместного действия постоянных нагрузок, пешеходов на тротуарах и двух типов временных российских нагрузок **A11** и **НК-80**, а также двух типов временных европейских нагрузок **A(L)** и **Me80** приведены в таблице.

Таблица

Сравнительные данные параметров надежности главных железобетонных балок автодорожного моста при загрузении российскими и европейским временными нагрузками

Тип временной нагрузки	Номер балки	Статистические параметры максимальных изгибающих моментов, кНм		Характеристика безопасности β	Вероятность отказа Q	Логарифмический показатель надежности ρ
		$m_{M_{max}}$	$\sigma_{M_{max}}$			
Нагрузка A11 от колонн автомобилей	Б1	1148,1	111,8	3,842	$6,11 \cdot 10^{-5}$	4,214
	Б2	1181,4	116,2	3,767	$8,27 \cdot 10^{-5}$	4,082
	Б3	1134,42	112,5	3,89	$5,01 \cdot 10^{-5}$	4,301
	Б4	1028,3	101,2	4,362	$6,38 \cdot 10^{-6}$	5,195
Одиночная колесная нагрузка НК-80	Б1	1465,1	143,3	3,371	$1,779 \cdot 10^{-4}$	3,271
	Б2	1635,4	161,2	3,013	$1,2992 \cdot 10^{-3}$	3,008
	Б3	1634,4	160,7	3,019	$1,2662 \cdot 10^{-3}$	3,012
	Б4	1486,3	146,2	3,364	$1,769 \cdot 10^{-4}$	3,261
Нагрузка A(L) от колонн автомобилей	Б1	1140,1	112,9	3,604	$1,567 \cdot 10^{-4}$	4,316
	Б2	1264,4	124,3	3,273	$5,328 \cdot 10^{-4}$	3,773
	Б3	1285,4	126,4	3,567	$1,807 \cdot 10^{-4}$	3,743
	Б4	1290,3	127,2	3,115	$9,205 \cdot 10^{-4}$	3,712

Тип временной нагрузки	Номер балки	Статистические параметры максимальных изгибающих моментов, кНм		Характеристика безопасности β	Вероятность отказа Q	Логарифмический показатель надежности ρ
		$m_{M_{max}}$	$\sigma_{M_{max}}$			
Одиночная нагрузка Me-80	Б1	1465,1	144,2	3,693	$1,108 \cdot 10^{-4}$	4,955
	Б2	1635,4	161,0	3,294	$4,931 \cdot 10^{-4}$	3,797
	Б3	1634,4	163,6	3,200	$6,883 \cdot 10^{-4}$	3,196
	Б4	1486,3	147,2	3,101	$9,964 \cdot 10^{-4}$	2,292

В таблице представлены также показатели надежности расположенных на одной половине проезжей части четырех балок пролетного строения, включающие характеристики безопасности β , вероятности появления первого предельного состояния (отказа по прочности Q) и логарифмического показателя надежности ρ . Учитывая симметрию пролетного строения относительно балки Б4, расположенной на продольной оси проезжей части, показатели надежности остальных балок пролетного строения будут одинаковыми с симметрично расположенными балками.

Графическое представление изменения логарифмических показателей надежности по всей ширине пролетного строения показано на рис. 5.

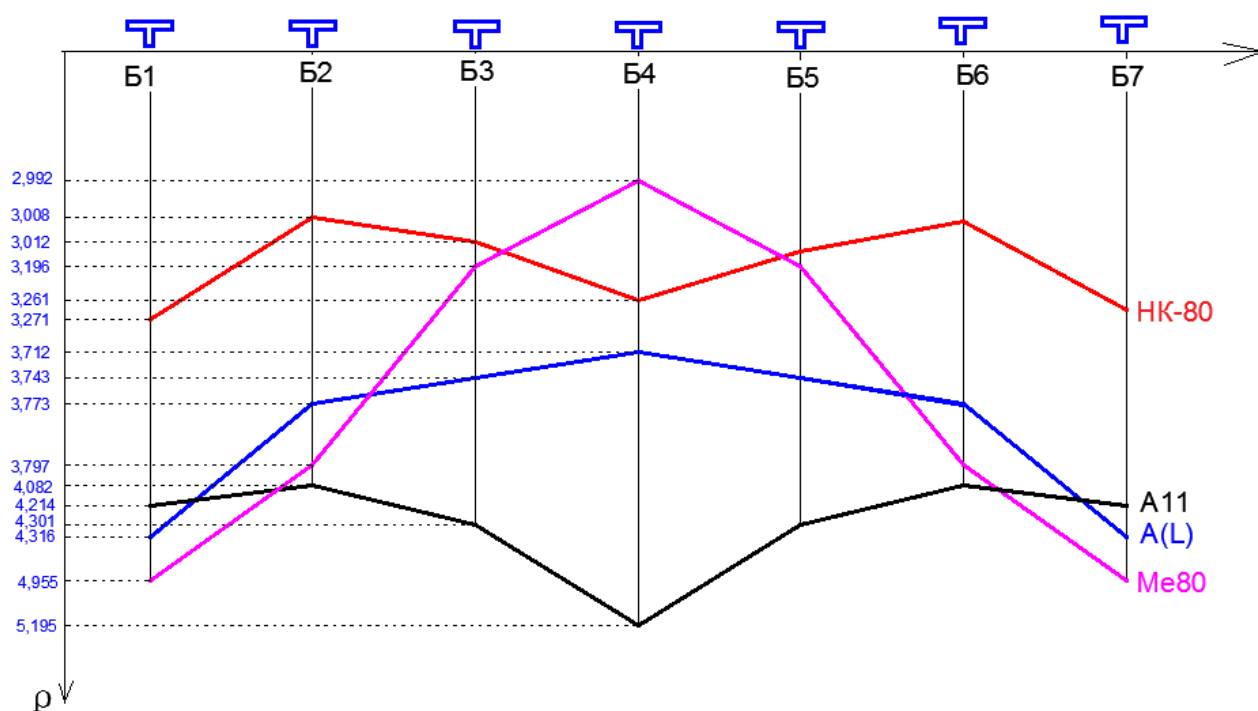


Рис. 5. График изменения логарифмического показателя надежности железобетонных балок пролетного строения автодорожного моста при проезде различных временных нагрузок

Анализ приведенных в таблице показателей надежности по прочности нормальных сечений в середине пролета железобетонных балок пролетных строений типового автодорож-

ного моста и графиков на рис. 5 изменения по ширине логарифмических показателей надежности различных балок приводит к следующим предварительным выводам:

1. Характер зависимостей по ширине моста параметров надежности главных балок для российских временных нагрузок **A11** и **НК-80** является одинаковым. При близком к одинаковым значениям параметров надежности для всех балок отмечается некоторое снижение логарифмического показателя для балок Б2 и Б5 под крайними полосами проезда и значительное увеличение надежности под средней балкой Б4 и рядом расположенных балках Б3 и Б5. Это явление подтверждается наблюдаемым в действительности существенным износом крайних балок железобетонных мостов с двух полосным движением.

2. Совершенно иной характер зависимостей по ширине моста параметров надежности главных балок в статистических расчетах получен на том же мосту для европейских временных нагрузок **A(L)** и **Me80**. Наименее надежными при эксплуатации этими нагрузками являются балки, расположенные вблизи продольной оси проезжей части. Это объясняется расположением в этих местах наиболее ответственных полос для проезда транспортных средств.

3. Окончательные выводы для поставленной в настоящем исследовании проблемы сопоставления надежности транспортных сооружений при их эксплуатации на международных маршрутах можно сделать с учетом прочности приопорных наклонных сечений. Такие исследования планируется выполнить нами в ближайшее время.

Выводы

- Выполненные с помощью основанной на положениях теории надежности и теории риска сопоставления параметров надежности типовых железобетонных без диафрагменных пролетных строений автодорожного моста выявили существенное различие по критерию прочности нормальных сечений в середине пролета при загрузении российскими и европейскими временными нагрузками.

- Аналогичные исследования по предложенной здесь методике следует рекомендовать для рассматриваемого железобетонного моста по критерию прочности наклонных сечений на приопорных участках.

- Для принятия обоснованных управленческих решений при выборе режимов эксплуатации мостовых сооружений на международных маршрутах следует учитывать полученные здесь итоговые результаты.

Библиографический список

1. СНиП 2.05.03-84. Мосты и трубы/ Госстрой СССР.- М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985.- 200 с.
2. Европейский стандарт EN 1991-2. ЕВРОКОД 1. Воздействия на сооружения. Часть 2. Транспортные нагрузки на мосты. 2003. -163с.
3. Райзер, В. Д. Теория надежности сооружений/ В. Д. Райзер. – М.: АСВ, 2010. -252 с.
4. Сеницын, А. П. Расчет конструкций на основе теории риска/А. П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1985. – 304 с.
5. Сафронов, В. С Надежность длительно эксплуатируемого металлического покрытия здания с кровельными сэндвич-панелями/ В. С. Сафронов, Н. Мельхиор // Строительная механика и конструкции. - 2018. - Т. 4. -№ 19. - С. 72-82.
6. Сафронов, В. С. Прочностной анализ несущих конструкций висячего трубопровода через реку Ока в г. Орле/ В. С. Сафронов, Ю. А Суханова// Строительная механика и конструкции. -2010. -Т. 1. -№ 1. -С. 61-66.

7. Сафронов, В. С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы / В. С. Сафронов, Д. И. Доманов// Строительная механика и конструкции. – 2011. –№1(2). – С. 46-51.
8. Сафронов, В.С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой/ В. С. Сафронов, С. Д. Степанов, А. А. Петранин, Е. Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. -1998. -№ 11-12.- С. 31-35.
9. Сафронов, В. С. Деформационный расчет составных изгибаемых железобетонных стержневых элементов /В. С. Сафронов, А. В. Черников// Строительная механика и конструкции. - 2018.- Т.3/ - № 18.- С. 81-92.
10. Сафронов. В. С. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразования при стесненном кручении железобетонных мостовых балок/ В.С. Сафронов, Д.И. Доманов// Механика разрушения бетонов, железобетонов и других строительных материалов: сб. ст. по материалам 7-й Международн. науч. конф.: в двух томах. – 2013. - С. 31-38.
11. Сафронов, В. С. Современные конечно-элементные модели балочных без диафрагменных пролетных строений автодорожных мостов/ В. С. Сафронов, А. В. Антипов//Строительная механика и конструкции. -2013. -№ 1. -С. 92-101.
12. Сборные железобетонные пролетные строения для автодорожных мостов. Пролетные строения без диафрагм длиной 18м, армированные арматурой класса АII и АIII. Типовой проект серия 3.503-14, Вып. 710/5, -М.: ГПИ «Союздорпроект», 1974. -50 с.
13. Городецкий, А. С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А. С. Городецкий, В. И. Заворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
14. Программный комплекс «ЛИРА-САПР 2013 PRO» и специализированная расчетно-графическая система «ЛИРА-САПР 2013 Мост». Сертификат соответствия №РОСС RU.СП15.Н00615.

References

1. SNiP 2.05.03-84. * Bridges and pipes. М.: TsITP Gosstroy of the USSR, 1985. 200 p.
2. European standard EN 1991-2. EUROCOD 1. Impacts on structures. Part 2. Transport loads on bridges. 2003. 163 p.
3. Raiser V.D. The theory of reliability of structures. М.: DIA, 2010. 252 p.
4. Sinitsyn A.P. Design analysis based on risk theory. М.: Stroyizdat, 1885. 304 p.
5. Safronov V.S., Mel'khior N. Reliability of a long-running metal coating of a building with roof sandwich panels. Building mechanics and structures. Vol. 4. No. 19. 2018. Pp. 72-82.
6. Safronov V.S., Sukhanova Yu.A. Strength Analysis of Supporting Structures of the Hanging Pipeline across the Oka River in the town of Orel. Building mechanics and structures. Vol. 1. No. 1. 2010. Pp. 61-66.
7. Safronov V.S., Domanov D.I. Risk assessment of the destruction of normal sections of reinforced concrete beams of arbitrary shape. Structural mechanics and construction. No. 1(2). 2011. Pp. 46-51.
8. Safronov V.S., Stepanov S.D., Petranin A.A., Petrenya E.N. Algorithm for calculating reconstructed slab-beam structures reinforced with a slab. Proceedings of higher educational institutions. Building. No. 11-12. 1998. Pp. 31-35.
9. Safronov V.S., Chernikov A.V. Deformation calculation of composite bending reinforced concrete core elements. Construction mechanics and constructions. Vol. 3. No. 18. 2018. Pp. 81-92.
10. Safronov V.S., Domanov D.I. Assessment of the risk of destruction of normal sections of reinforced concrete beams of arbitrary shape. Mechanics of destruction of concrete, reinforced concrete and other building materials: Sat. Art. Based on materials of the 7th international scientific Conf.: in two volumes. 2013. Pp. 31-38.
11. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern finite element models of beam bridges without road diaphragm structures of road bridges. Building mechanics and structures. No. 1. 2013. Pp. 92-101.
12. Prefabricated reinforced concrete spans for road bridges. Span structures without diaphragms 18 m long, reinforced with reinforcement of class AII and AIII. Typical project series 3.503-14, Vol. 710/5. М.: GPI Soyuzdorproekt, 1974. 50 p.

13. Gorodetsky A.S., Zavoritsky V.I., Lantukh-Lyashchenko A.I., Rasskazov A.O. The finite element method in the design of transport structures. M.: Transport, 1981. 143 p.
14. The software package “LIRA-SAPR 2013 PRO” and the specialized calculation and graphic system “LIRA-SAPR 2013 Bridge”. Certificate of conformity No. ROSS RU. SP15.N00615.

COMPARISON OF RELIABILITY OF TYPICAL REINFORCED CONCRETE SPAN STRUCTURE OF THE ROAD BRIDGE FOR RUSSIAN AND EUROPEAN NORMATIVE TEMPORARY LOADS

V. S. Safronov¹, S. A. Osipov², N. Mel'khior³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹ Dr of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230,
e-mail: yss22@mail.ru

² Assistant Professor of the Department of Structural Mechanics

³ MA Student of the Department of Structural Mechanics

The results of numerical studies of the reliability parameters of a typical reinforced concrete split span structure widespread in Russia under two A11 temporary load bands with a size of G11.5 + 2x0.75 are given. In comparison with similar characteristics of the same transport structure when temporary loads are missed, regulated by European bridge standards. In the calculations of efforts from constant and temporary loads, a spatial finite element model of the slab-beam structure of the span is used. To determine the ultimate bending moments, a deformation algorithm is used based on a three-linear deformation diagram for concrete and two linear - for reinforcement.

Probabilistic calculations are performed on the basis of assumptions about the spread of the strength characteristics of concrete and working reinforcement, as well as the parameters of constant and temporary loads in accordance with the normal distribution law.

The differences in the load-bearing beams without a diaphragm span during operation are analyzed in accordance with Russian and European regulatory documents.

Keywords: road bridge, reinforced concrete beam span, logarithmic reliability indicator, Russian and European temporary loads, standard loading conditions, variation in the strength of materials and loads.

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ С УЧЕТОМ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИН

А. Н. Аверин¹, Д. Г. Рыдченко², М. В. Провоторова³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц., доцент кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230
e-mail: AN_Averin@mail.ru

² Ст. преподаватель кафедры строительной механики

³ Магистр кафедры строительной механики

Описывается методика и её апробация для расчета неразрезных сталежелезобетонных балок на подвижную нагрузку с учетом раскрытия трещин. На основе метода конечных разностей построена дискретная модель неразрезной балки переменного сечения. В системе компьютерной математики Maple для неразрезной балки постоянного сечения получены аналитические выражения для линий влияния прогибов и изгибающих моментов. По результатам сравнения конечно-разностного и точного решений назначен шаг дискретизации для дискретной модели балки. Численные исследования выполнены для сталежелезобетонного пролетного строения неразрезного моста при конкретных значениях предельных моментов и коэффициента снижения изгибной жесткости. Приведены графики изменения прогибов и изгибающих моментов от постоянной и временной нагрузок с учетом раскрытия трещин (смешанные линии влияния). Дана количественная оценка по прогибам и изгибающим моментам фактора учета раскрытия трещин в плите проезжей части пролетного строения.

Определены частоты и формы свободных колебаний балки постоянного сечения и балки с измененной изгибной жесткостью в результате раскрытия трещин. Дана количественная оценка изменения собственных частот и форм свободных колебаний.

Ключевые слова: сталежелезобетонная неразрезная балка, метод конечных разностей, подвижная нагрузка, раскрытие трещин в бетоне, смешанные линии влияния, частоты и формы свободных колебаний, конструктивно-нелинейная система.

Введение

Неразрезные пролетные строения имеют ряд особенностей, благодаря которым они находят широкое применение в современной практике. Для автодорожных и городских металлических мостов сталежелезобетонные строения являются сейчас самым распространенным видом конструкций. Значительно применение их и в железнодорожных мостах с ездой поверху. Для сталежелезобетонных пролетных строений характерны экономия стали, увеличение вертикальной и горизонтальной жесткостей и ряд иных обеспечиваемых совместной работой железобетонной проезжей части и стальных балок преимуществ по сравнению с другими видами металлических пролетных строений.

Однако существенной особенностью работы неразрезных сталежелезобетонных пролетных строений является попеременное включение и выключение железобетонной плиты проезжей части (в окрестности промежуточных опор в зависимости от знака и величины изгибающего момента) из совместной работы с металлическими балками [1]. Это обстоятельство вызывает необходимость рассматривать пролетные строения как конструктивно-нелинейную систему с изменяющейся по длине изгибной жесткостью [2].

1. Описание объекта исследования

Современные конструкции сталежелезобетонных пролетных строений мостов сооружают путем монтажа стальных балок и последующего бетонирования (монтажа) железобетонной

плиты проезжей части. В процессе своего возведения сталежелезобетонное строение проходит несколько стадий. Основных стадий две: начальная (стадия I), когда балка воспринимает нагрузки стальным сечением, и конечная (стадия II), на которой балка работает приведенным (сталежелезобетонным) сечением.

В дальнейшем численные исследования выполним для сталежелезобетонного пролетного строения неразрезного моста со схемой пролетов 63,0 м + 63,0 м + 63,0 м. Пролетное строение состоит из двух стальных балок, объединенных сверху железобетонной плитой, а снизу - горизонтальными связями (рис. 1). Геометрические характеристики поперечного сечения: площадь $A = 7,4 \cdot 10^2 \text{ см}^2$; момент инерции $J_x = 44,8 \cdot 10^6 \text{ см}^4$. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

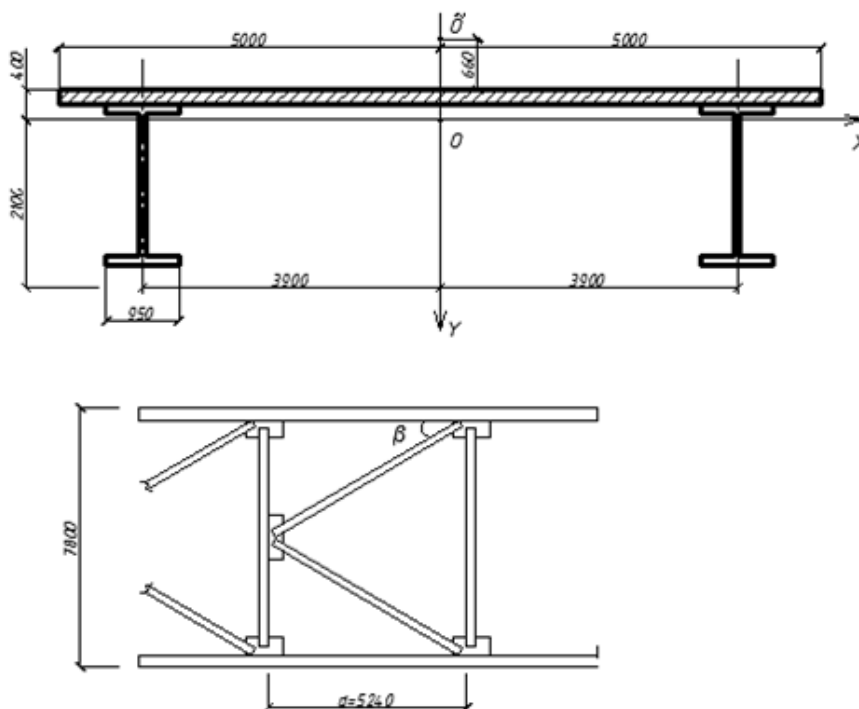


Рис. 1. Поперечное сечение

На рис. 2 показана расчетная схема моста: q - интенсивность постоянной нагрузки, F - сосредоточенная сила, положение которой фиксируется координатой ξ .

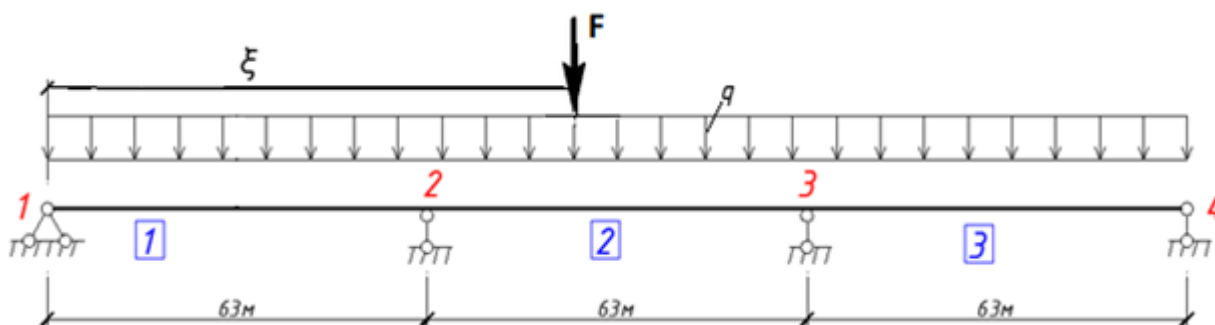


Рис. 2. Расчетная схема балки

Численные исследования напряженно-деформированного состояния неразрезной сталежелезобетонной балки ($q = 5,77 \text{ кН/м}$; $F = 400,0 \text{ кН}$) выполним в системе компьютерной математики Maple [3].

На рис. 3 показаны эпюры изгибающих моментов и прогибов для сталежелезобетонной балки при действии распределенной нагрузки q и сосредоточенной силы F , приложенной в середине второго пролета ($x = 94,5$ м).

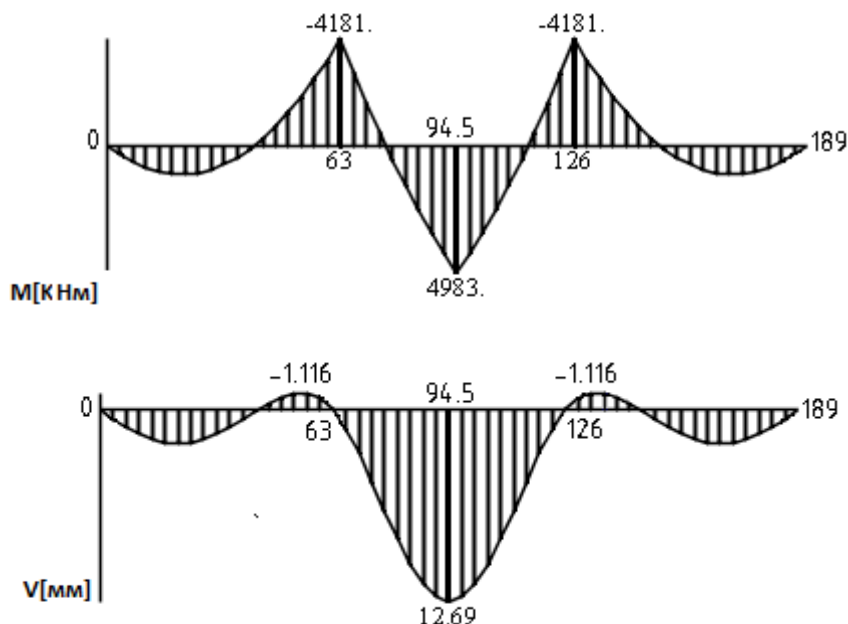


Рис. 3. Эпюры изгибающих моментов и прогибов

Изгибающие моменты в опорных сечениях отрицательные, следовательно, в верхних волокнах поперечных сечений возникают растягивающие напряжения.

На рис. 4 представлены графики изменения изгибающих моментов в 1-м и 2-м опорных сечениях в зависимости от положения сосредоточенной силы.

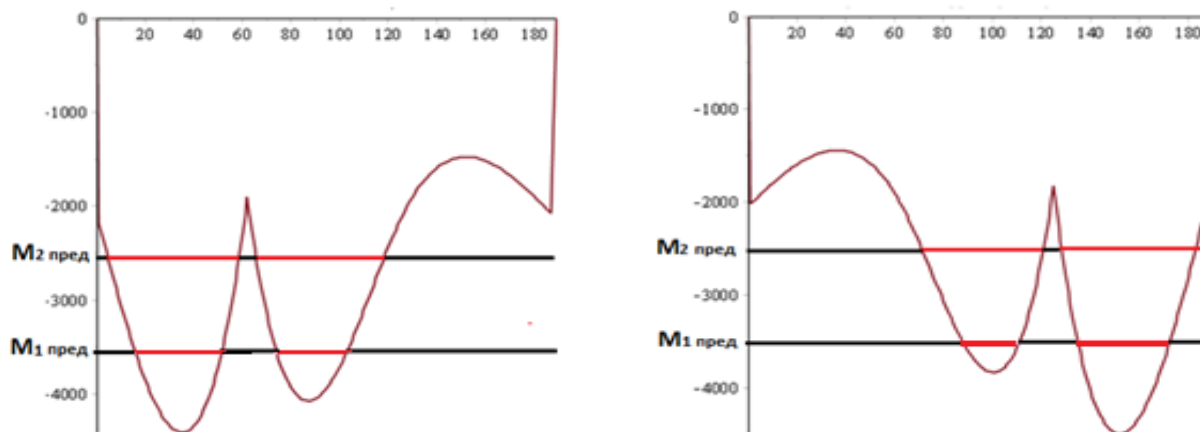


Рис. 4. Графики изменения изгибающего момента в 1-м и 2-м опорных сечениях

Отрицательный изгибающий момент вызывает растягивающие напряжения в верхних волокнах опорных поперечных сечений балки, которые могут достигать предела прочности бетона на растяжение. В качестве предельных значений изгибающих моментов примем следующие: $M_{пред.1} = -3500$ кН·м; $M_{пред.2} = -2500$ кН·м. Этим значениям изгибающих моментов отвечают значения растягивающих нормальных напряжений: $\sigma^+_{пред.1} = 3,125$ МПа, $\sigma^+_{пред.2} = 2,232$ МПа. Значения предельных изгибающих моментов отмечены на рис. 4

горизонтальными линиями. Красным цветом на них выделены участки балки, при расположении на которых силы F , в опорных поперечных сечениях могут возникать предельные растягивающие напряжения.

В последующих расчетах мы будем использовать понятие коэффициента снижения изгибной жесткости в окрестности точки поперечного сечения ($0 < \varphi < 1$). Коэффициент φ учитывает частичное вовлечение бетона в работу на растяжение [1]. Суть коэффициента φ в следующем. Если при определенном положении силы F на балке в верхних волокнах поперечного сечения с координатой x_i напряжение превышает предельное значение, то ослабляем соответствующее сечение, меняя его изгибную жесткость в окрестности точки $EJ(x_i) = \varphi \cdot EJ(x_i)$ (скорректированная на участке изгибная жесткость при новом положении силы остается неизменной). В расчетах значение коэффициента принималось равным $\varphi = 0,7$.

2. Расчет неразрезной балки переменного сечения методом конечных разностей

Дифференциальные уравнения равновесия балки переменного сечения имеют вид

$$\frac{d^2}{dx^2} M(x) = -q - F \text{Dirac}(x - x_i), \quad (1)$$

$$M(x) = -EJ(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} V(x) \right), \quad (2)$$

где $V(x)$, $M(x)$ - искомые функции прогиба и изгибающего момента, $EJ(x)$ - изгибная жесткость, q - интенсивность распределенной нагрузки, $\text{Dirac}(x - x_i)$ - дельта функция Дирака, фиксирующая положение сосредоточенной силы F в точке x_i .

Для шарнирно опертой по концам балки прогибы и изгибающие моменты в конечных точках равны нулю:

$$V(0) = 0, M(0) = 0, V(L) = 0, M(L) = 0, \quad (3)$$

где L - длина балки.

Решение дифференциальной задачи (1)-(3) выполняется методом конечных разностей. Отрезок интегрирования $[0, L]$ разбивается на n участков длиной $h = L/n$. Координаты узловых точек полученной сетки связаны формулой

$$x_j = x_{j-1} + h, (j = 1 \dots n); x_0 = 0, x_n = L. \quad (4)$$

Значение вторых производных в точке x_j заменяем приближенно с помощью формул численного дифференцирования:

$$\frac{d^2}{dx_i^2} M(x_i) = \frac{M(x_{i-1}) - 2M(x_i) + M(x_{i+1}))}{h^2} + o(h^2), \quad (5)$$

$$M(x_i) = - \frac{EJ(x_i) (V(x_{i-1}) - 2V(x_i) + V(x_{i+1})))}{h^2} + o(h^2), (i = 1, \dots, n-1). \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) справедливы с точностью до величин порядка h^2 . При увеличении числа дискретных элементов (участков разбиения) погрешность стремится к нулю ($n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$).

Краевые условия (3) принимают вид

$$V(x_0) = 0, M(x_0) = 0, V(x_n) = 0, M(x_n) = 0. \quad (7)$$

После подстановки выражений (6) в (5), а затем в (1) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных прогибов $V(x_i)$ в узлах сетки:

$$KV = P \quad (8)$$

На рис. 5 представлена структура матрицы жесткости балки переменного сечения при разбиении балки на $n=9$ элементов. Матрица симметричная, пятидиагональная, положительно определенная. На рис. 5 показан также фрагмент программного кода ее создания в системе символьной математики Maple.

Выполняется генерация трех списков: $d1$ - элементы главной диагонали; $d2$ - элементы 2-й диагонали (расположенной под главной); $d3$ - элементы 3-й диагонали. Сформированная таким образом матрица зависит от списка изгибных жесткостей балки $EJ[k]$ в узлах сетки. При изменении значений изгибных жесткостей $EJ[k]$ (на предмет появления трещин в бетоне) автоматически корректируется матрица $A0$.

```

> d1 := [4·EJ[1] + EJ[2], seq( EJ[k-1] + 4· EJ[k] + EJ[k+1], k=2..n-1), 4·EJ[n] + EJ[n-1]]:
> d2 := [seq( -2·(EJ[k-1] + EJ[k]), k=2..n)]:
> d3 := [seq( EJ[k], k=2..n-1)]:
> A0 := BandMatrix([d3, d2, d1], 2, n, shape = symmetric);

```

$$A0 := \begin{bmatrix} 4EJ_1 + EJ_2 & -2EJ_1 - 2EJ_2 & EJ_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2EJ_1 - 2EJ_2 & EJ_1 + 4EJ_2 + EJ_3 & -2EJ_2 - 2EJ_3 & EJ_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EJ_2 & -2EJ_2 - 2EJ_3 & EJ_2 + 4EJ_3 + EJ_4 & -2EJ_3 - 2EJ_4 & EJ_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_3 & -2EJ_3 - 2EJ_4 & EJ_3 + 4EJ_4 + EJ_5 & -2EJ_4 - 2EJ_5 & EJ_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_4 & -2EJ_4 - 2EJ_5 & EJ_4 + 4EJ_5 + EJ_6 & -2EJ_5 - 2EJ_6 & EJ_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EJ_5 & -2EJ_5 - 2EJ_6 & EJ_5 + 4EJ_6 + EJ_7 & -2EJ_6 - 2EJ_7 & EJ_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_6 & -2EJ_6 - 2EJ_7 & EJ_6 + 4EJ_7 + EJ_8 & -2EJ_7 - 2EJ_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_7 & -2EJ_7 - 2EJ_8 & 4EJ_8 + EJ_7 \end{bmatrix}$$

Рис. 5. Структура матрицы жесткости

Вектор узловых сил корректируется при каждом новом положении силы F . Сила F приводится в узлы дискретного элемента, на котором она находится по правилу рычага. Собственный вес моделируем распределенной нагрузкой q .

Матрица жесткости неразрезной балки получается из матрицы жесткости однопролетной балки ($L = 189$ м). Сетка вдоль балки наводится так, чтобы координаты промежуточных опор совпадали с узлами сетки. Далее обнуляются строки и столбы матрицы $A0$ с номерами узлов, отвечающих промежуточным опорам. Элементом главной диагонали матрицы с этими номерами присваиваем значения, равные единице, а соответствующие компоненты вектора правой части делаем равными нулю.

В последующих расчетах шаг дискретизации назначался по результатам сравнения конечно-разностного и точного (построенного в Maple) решений. При шаге $h = L/n = 189/189 = 1$ м погрешность ε_M в определении изгибающих моментов не превышала 0,01 %.

Систему линейных алгебраических уравнений решаем методом Холецкого. Определяем прогибы, после чего по значениям функции прогибов в узлах сетки вычисляем значения изгибающих моментов по формулам (6).

3. Алгоритм расчета неразрезной сталежелезобетонной балки на подвижную нагрузку с учетом раскрытия трещин

Расчет неразрезной сталежелезобетонной балки на подвижную нагрузку с учетом раскрытия трещин выполнялся по следующему алгоритму:

1. Задаем интенсивность постоянной нагрузки $q=5.772 \text{ кН/м}$ и величину перемещаемой силы $F=400 \text{ кН}$; предельные изгибающие моменты $M_{\text{пред},1} = -3500 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_{\text{пред},2} = -2500 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и коэффициент снижения изгибной жесткости $\varphi = 0,7$; шаг дискретизации балки $h = 1 \text{ м}$;
2. Перемещаем нагрузку F по балке с шагом h и вычисляем перемещения и изгибающие моменты в узлах сетки;
3. При каждом положении нагрузки сравниваем вычисленные изгибающие моменты с предельным значением изгибающего момента. Если изгибающий момент превышает предельное значение, то ослабляем соответствующее сечение, меняя его изгибную жесткость ($EJ_k = \varphi \cdot EJ_k$) (скорректированная на участке изгибная жесткость при новом положении силы остается неизменной);
4. Определяем координаты положений сил, при которых происходит выключение бетона из работы, и координаты ослабленных сечений, отвечающих данному положению сил, строим графики.

На рис. 6 представлена схема раскрытия трещин при перемещении силы F по балке ($M_{\text{пред},1} = -3500 \text{ кНм}$). Первый отрезок на рисунке отмечен сноской 12 – 64. Первое число указывает на координату $x = 12 \text{ м}$ приложения силы F , а второе на координату $x = 64 \text{ м}$ ослабленного сечения.

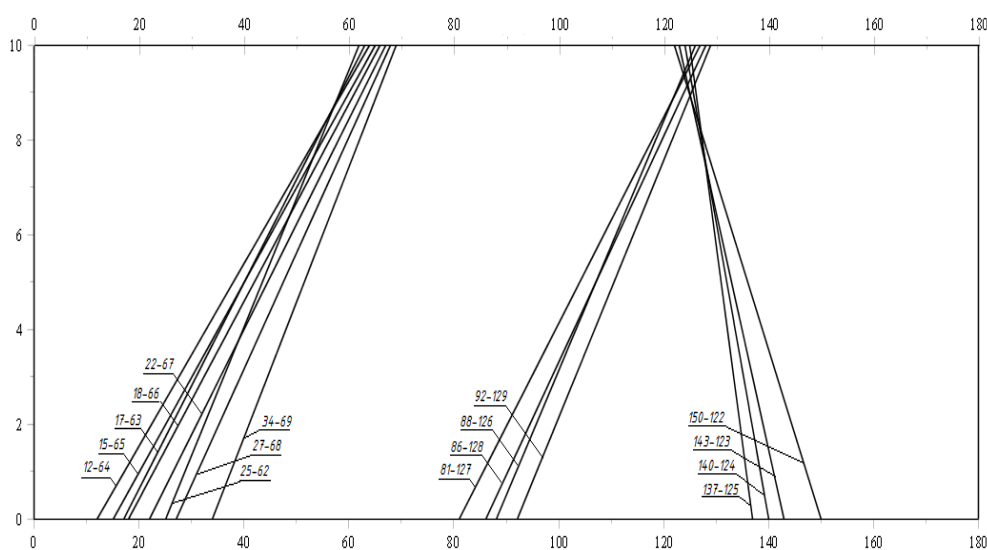


Рис. 6. Схема раскрытия трещин по длине балки при $M_{\text{пред},1} = -3500 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Ниже приведен список координат приложения силы и соответствующие координаты ослабленных сечений:

[[12, 64], [15, 65], [17, 63], [18, 66], [22, 67], [25, 2],[27, 68], 34, 69], [81,127], [86, 128], [88, 126], [92,129], [137, 125], [140, 124], [143, 123], [150, 122]].

На рис. 7 показан график изменения изгибной жесткости при перемещении нагрузки F по балке.

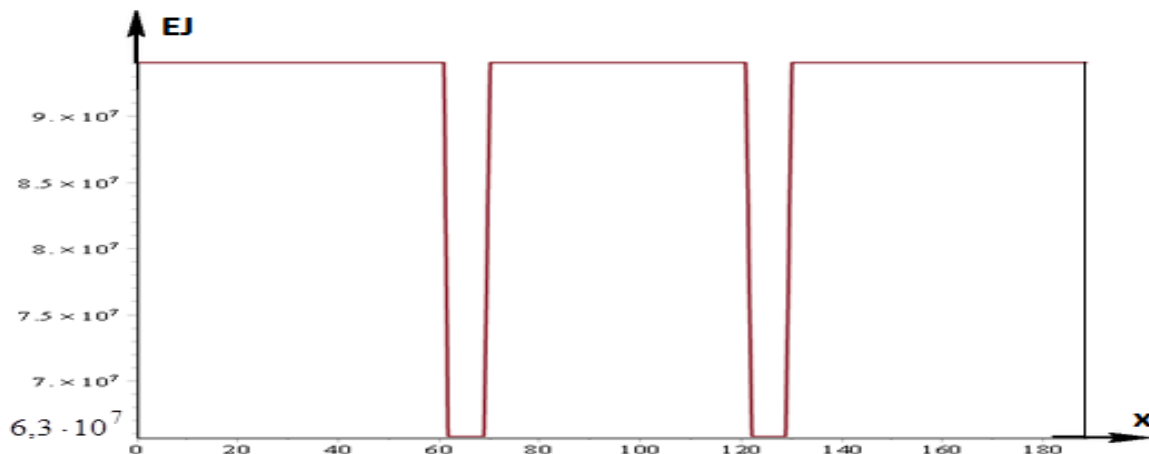


Рис. 7. График изменения изгибной жесткости при $M_{пред.2} = -3500 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Раскрытие трещин в окрестности первой промежуточной опоры происходило на участках балки с координатами [64, 65, 63, 66, 67, 62, 68, 69] (координата опорного сечения $x = 63 \text{ м}$). Длина зоны раскрытия трещин составила 7 м. Последовательность координат сечений появления трещин не является возрастающей. Раскрытие трещин происходит при расположении силы в первом пролете слева от опорного сечения.

Раскрытие трещин в окрестности второй промежуточной опоры (координата опорного сечения $x = 126 \text{ м}$) происходило на двух участках балки с координатами: [127, 128, 126, 129] (сила во втором пролете); [125, 124, 123, 122] (сила в третьем пролете). Длина зоны раскрытия трещин составила 7 м. Последовательность координат сечений появления трещин не является возрастающей. Раскрытие трещин происходит при расположении силы слева и справа от опорного сечения.

Аналогичный расчет выполняем для предельного момента $M_{пред.2} = -2500 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Схема раскрытия трещин представлена на рис. 8.

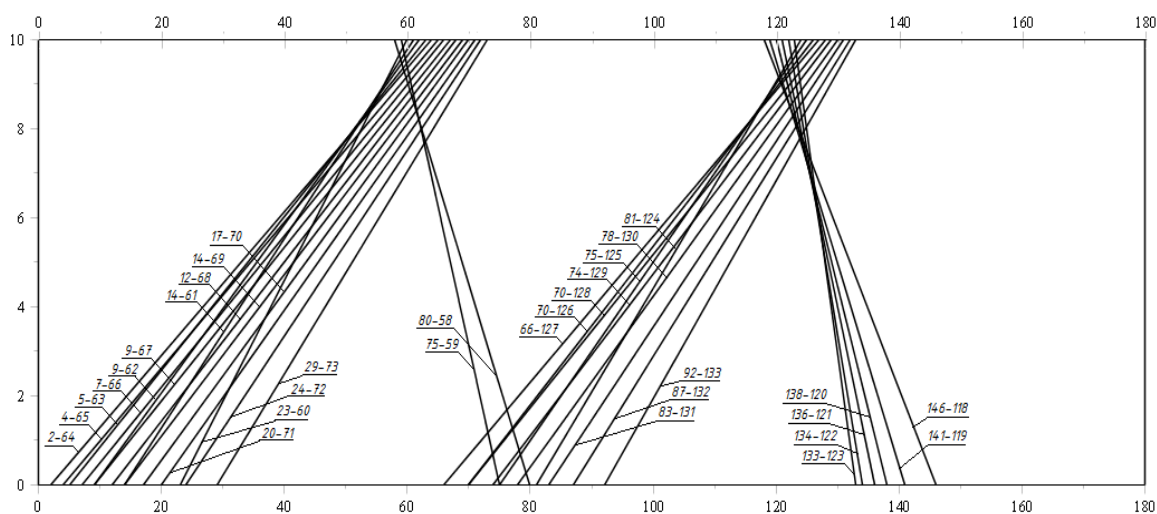


Рис. 8. Схема раскрытия трещин по длине балки при $M_{пред.2} = -2500 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Из рис. 8 видно, что ослабление сечений первой и второй приопорных зон происходит при расположении силы в разных пролетах балки. Так, трещинообразование первой приопорной зоны происходит при положениях груза преимущественно в первом пролете, в то время как трещинообразование второй приопорной зоны происходит при положениях груза как во втором, так и в третьем пролетах.

На рис. 9 представлен график изменения изгибной жесткости балки при перемещении силы по балке.

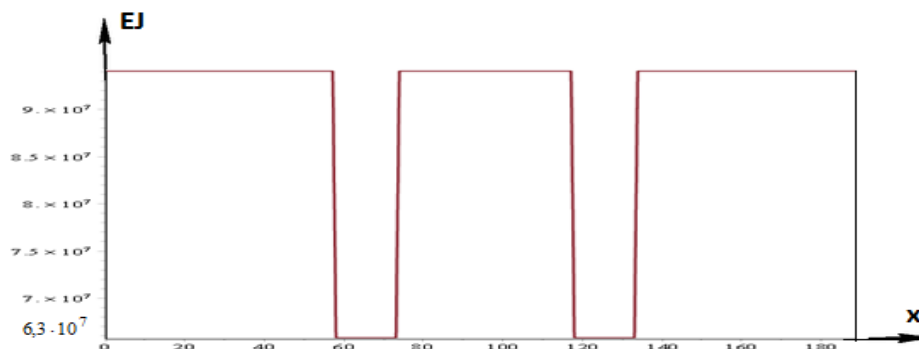


Рис. 9. График изменения изгибной жесткости при $M_{пред.2} = -2500 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Длина зоны раскрытия трещин в окрестности первой промежуточной опоры составила 15 м ([58, 73]), в окрестности второй - 15 м ([118, 133]).

По результатам вычислений ($M_{пред.2} = -2500 \text{ кН} \cdot \text{м}$) построены графики изменения прогибов и изгибающих моментов в характерных сечениях неразрезной балки от постоянной и временной нагрузок. Зеленым цветом на рисунках отмечены смешанные линии влияния прогибов и изгибающих моментов[4], построенные с учетом раскрытия трещин. Коричневым цветом отмечены графики изменения прогибов и изгибающих моментов от постоянной и временной нагрузок (без учета раскрытия трещин).

На рис. 10, 11 представлены графики прогибов и изгибающих моментов для середины первого пролета.

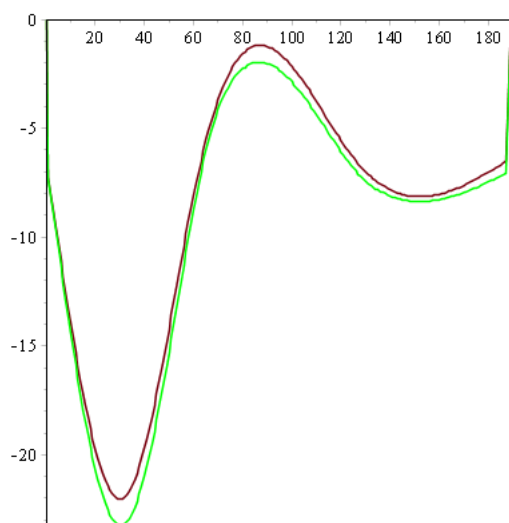


Рис. 10. Прогиб в середине 1-го пролета

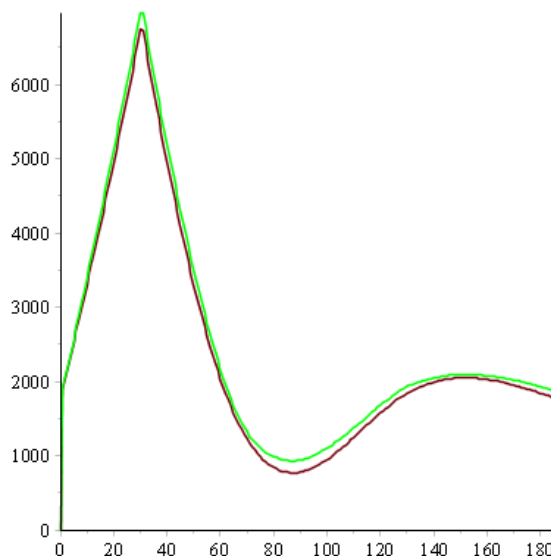


Рис. 11. Изгибающий момент в середине 1-го пролета

На рис. 12, 13 представлены графики прогибов и изгибающих моментов для середины второго пролета.

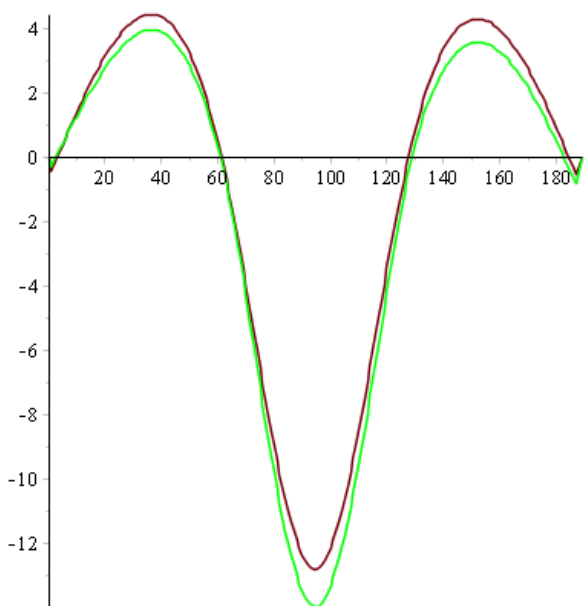


Рис. 12. Прогиб в середине 2-го пролета

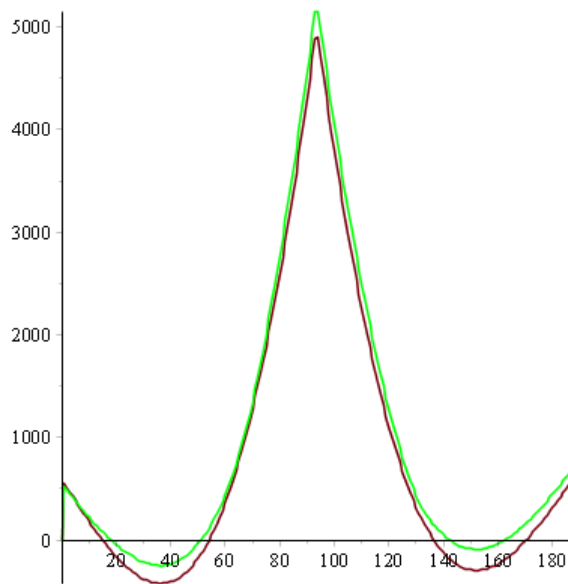


Рис. 13. Изгибающий момент в середине 2-го пролета

На рис. 14, 15 представлены графики изгибающих моментов для первого и второго опорных сечений.

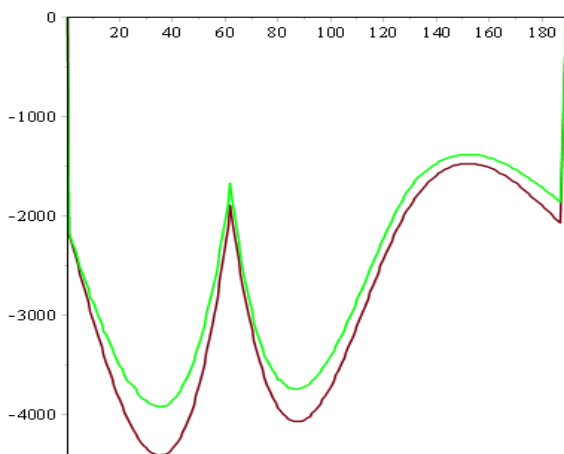


Рис. 14. Изгибающий момент в первом опорном сечении

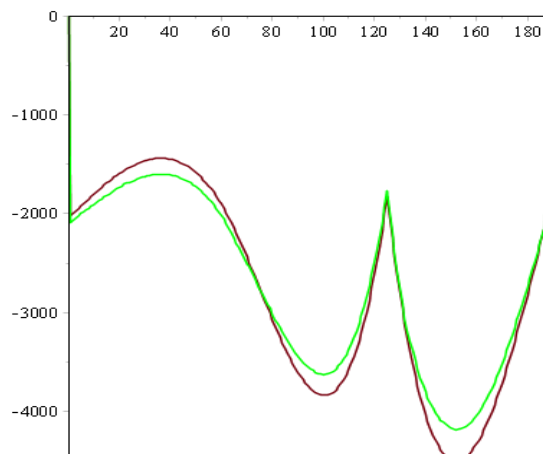


Рис. 15. Изгибающий момент во втором опорном сечении

Выполнен сравнительный анализ НДС неразрезной балочной системы с учетом и без учета раскрытия трещин в железобетонной плите проезжей части при различных значениях предельного изгибающего момента: $M_{пред.1} = -3500 \text{ кНм}$; $M_{пред.2} = -2500 \text{ кНм}$ и коэффици-

енте ослабления изгибной жесткости ($\varphi = 0,7$). В результате получена количественная оценка по прогибам и изгибающим моментам.

Учет конструктивной нелинейности приводит к перераспределению максимальных значений изгибающих моментов по длине балки (уменьшение в опорных сечениях - 7-10 %, увеличение в серединах пролетов - 3-5 %) и к увеличению прогибов в серединах пролетов балки (в середине первого пролета – 5,5 %, в середине второго пролета – 8,5 %).

Также был выполнен расчет частот и форм свободных колебаний балок с постоянной по длине изгибной жесткостью и с измененной жесткостью в результате раскрытия трещин. Спектр частот изгибных колебаний неразрезной балки имеет зоны сгущения с числом частот в каждой зоне равным числу пролетов [5, 6]. В таблице представлено процентное понижение шести собственных частот (две первые зоны сгущения) для балки с измененной изгибной жесткостью.

Таблица

Номер частоты	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon_{\Omega} = \frac{\Omega - \Omega_{изм.}}{\Omega} \cdot 100 \%$	0,416	3,62	6,56	1,45	2,61	4,45

На рис. 16 показаны первые три формы свободных колебаний, отвечающие первой зоне сгущения (для балки постоянного сечения использован красный цвет, а для балки с измененной жесткостью - зеленый).

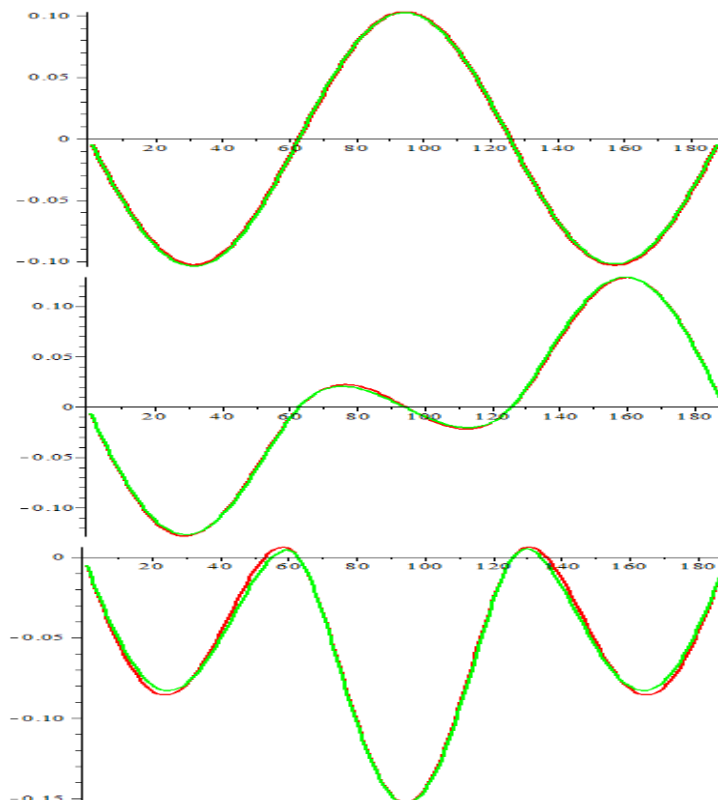


Рис. 16. Формы свободных колебаний

Из полученных результатов следует, что изменение изгибной жесткости балки в результате раскрытия трещин в железобетонной плите проезжей части оказывает существенное влияние лишь на высокочастотную часть спектра частот свободных колебаний.

Библиографический список

1. Стрелецкий, Н. Н., Сталежелезобетонные пролетные строения мостов/ Н. Н. Стрелецкий. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1981 – 360 с.;
2. Биджиев, Р. Х. Динамический расчет неразрезных сталежелезобетонных балок с учетом конструктивной нелинейности/ Р. Х. Биджиев// Исследования по строительной механике конструкций: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1984. - С. 70-77.
3. Аверин, А. Н. Решение задач сопротивления материалов в среде компьютерной математики Maple / А. Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. 2017. - Т. 1. - № 14. - С. 5-26.
4. Рабинович, И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями / И. М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1975. – 144 с. (Библиотека строительной механики).
5. Аверин, А. Н. Расчет свободных изгибных колебаний стержня переменного сечения с сосредоточенными включениями/ А. Н. Аверин// Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1983. – С. 3-11.
6. Аверин, А. Н. Применение разностной схемы для расчета свободных изгибно-крутильных колебаний неразрезного тонкостенного стержня открытого профиля / Аверин А. Н. //Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. - 1982. - № 8. -С. 51-55.

References

1. Streletsky N.N. Steel-reinforced concrete spans of bridges. 2nd Ed. Revised. M.: Transport, 1981. 360 p.
2. Bidzhiev R.Kh. Dynamic calculation of continuous steel-reinforced concrete beams taking into account structural nonlinearity. Studies in the structural mechanics of structures. Voronezh, 1984. Pp. 70-77.
3. Averin A.N. The solution to the problems of material resistance in the environment of Maple computer mathematics. Structural Mechanics and Structures. Vol. 1. No. 14. 2017. Pp. 5-26.
4. Rabinovich I.M. Questions of the theory of static calculation of structures with one-sided connections. M.: Stroyizdat, 1975. 144 p. (Library of structural mechanics).
5. Averin A.N. Calculation of free bending vibrations of a rod of the variable cross-section with concentrated inclusions. Studies in the statics and dynamics of rod and thin-walled systems. Voronezh, 1983. Pp. 3-11.
6. Averin A.N. The use of a difference scheme for calculating the free bending-torsional vibrations of a continuous thin-walled open-profile rod. Proceedings of higher educational institutions. Construction and architecture. No. 8. 1982. Pp. 51-55.

CALCULATION OF A CONTINUOUS REINFORCED CONCRETE BEAM FOR MOVING LOAD TAKING INTO ACCOUNT CRACK OPENING DISPLACEMENT

A.N. Averin¹, D.G. Rydchenko², M.V. Provotorova³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹ PhD of Technical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230,
e-mail: AN_Averin@mail.ru

² Assistant Prof. of the Department of Structural Mechanics

³ MA Student of the Department of Structural Mechanics

The technique and its testing for the calculation of continuous reinforced concrete beams for a moving load are described taking into account the opening of cracks. Based on the finite difference method, a discrete model of a continuous beam of the variable section is constructed. Analytical expressions for the influence lines of deflections and bending moments are obtained in the Maple computer mathematics system for a continuous beam of a constant cross-section. Based on the results of the comparison of finite-difference and exact solutions, a sampling step is assigned for a discrete model of a beam.

Numerical studies were performed for the reinforced concrete span of a continuous bridge at specific values of ultimate moments and a coefficient of decrease in bending stiffness. Graphs of changes in deflections and bending moments from constant and temporary loads are given taking into account the opening of cracks (mixed lines of influence). A quantitative assessment is given of the deflections and bending moments of the factor accounting for the opening of cracks in the slab of the carriageway of the superstructure.

The frequencies and forms of free vibrations of a beam of constant cross-section and a beam with a modified bending stiffness as a result of crack opening were determined. A quantitative assessment of changes in natural frequencies and forms of free vibrations is given.

Keywords: continuous reinforced concrete beam, finite difference method, moving load, crack opening in concrete, mixed lines of influence, frequencies and forms of free vibrations, structurally non-linear system.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.014.02 : 624.046.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ В СОСТАВЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ

Д. Н. Кузнецов¹

Воронежский государственный технический университет¹
Россия, г. Воронеж

¹ Ст. преподаватель кафедры металлических и деревянных конструкций

Тел.: +7(910)3468912, e-mail: kuznecov82@bk.ru

Приводится обоснование необходимости ввода дополнительных значений коэффициентов надежности по устойчивости для механических систем, рассчитываемых в современных вычислительных комплексах. Предлагается дифференцировать и взаимно подчинять значения коэффициентов надежности по устойчивости в зависимости от типа формы потери устойчивости равновесия и назначения элемента строительной конструкции. Вводится понятие ряда коэффициентов надежности по устойчивости равновесия. В вычислительном комплексе SCAD Office выполнены расчеты по устойчивости состояния равновесия на действие симметричной нагрузки трех тестовых моделей рамных систем. Рассчитаны три рамные системы одинаковой геометрии из стальных двутавров: две системы стержневые (плоская и пространственная) и одна система пластинчатая (плоская). Приводится анализ учета влияния на устойчивость равновесия стальной рамы, геометрии поперечных сечений, смоделированных в виде конечных элементов оболочки с нулевой гауссовой кривизной. По результатам численных расчетов сформулированы выводы.

Ключевые слова: стальной двутавр, местная устойчивость, общая устойчивость, стальная рама, стальной каркас, компьютерная модель рамы, плоская рама, стержневая расчетная схема, пластинчатая модель, коэффициент запаса по устойчивости, коэффициент надежности по устойчивости.

Введение

Последнее десятилетие активно ведутся работы по развитию конструкционных материалов. Для нужд строительной отрасли нормированы новые низколегированные стали с повышенным (С355) и высоким уровнем прочности (С550, С690). Прочностные характеристики указанных сталей для изготовления современных строительных металлических конструкций [1] приводятся в СП 16.13330.2017 «СНиП II-23-81* Стальные конструкции». Увеличение прочностных характеристик в бетонах происходит не менее быстрыми темпами [2], в СП 311.1325800.2017 «Бетонные и железобетонные конструкции из высокопрочных бетонов. Правила проектирования» нормированы классы прочности бетона на сжатие В60 и выше. Значительное увеличение прочности двух основных конструкционных материалов потребует решения ряда вопросов, связанных с особенностями силовой работы элементов строительных конструкций, изготовленных из стали и бетона высокой прочности. Использование стали высокой прочности потребует увеличения прочностных характеристик узлов крепления, что можно обеспечить применением болтов с высоким классом прочности, увеличением прочности сварных швов, новыми конструктивными решениями узлов. Для железобетонных конструкций применение высокопрочных бетонов потребует новых конструктивных решений узлов и анкеровки арматуры. Но самым важным следствием увеличения прочностных характеристик строительных материалов является уменьшение толщин элементов строительных конструкций. Неизбежное увеличение «тонкостенности» элементов строительных конструкций делает актуальными исследования в области устойчивости [3] состояния равновесия (УСР)

© Кузнецов Д.Н., 2019

Вопросам изучения УСР посветили работы многие выдающиеся ученые, такие как: Л. Эйлер, Ф. С. Ясинский, Ф. Энгессер, Т. Карман, С. П. Тимошенко, Б. Г. Галеркин, Ф. Блейх [4], Г. Блейх, И. Г. Бубнов, А. Н. Динник, А. А. Ильющин, П. Ф. Папкович, А. Ф. Смирнов, И. И. Гольденблат, И. М. Рабинович, Н. С. Стрелецкий, С. А. Бернштейн, В. З. Власов [5], Ю. Н. Работнов, Н. В. Корноухов, Б. М. Броуде [6], В. В. Болотин, А. Р. Ржаницын, А. С. Вольмир, А. А. Уманский, А. Н. Гениев, Н. А. Алфутов [7], Г. И. Белый [8] и другие. Развитие численных методов расчета и увеличение компьютерных мощностей предоставляет не только новые возможности для решения сложных задач [8] по УСР, но и ставит новые вопросы. Результатом расчета УСР конечно-элементной (КЭ) модели являются качественные и количественные критерии. К качественным можно отнести геометрическую форму потери УСР и картину распределения потенциальной энергии, аккумулируемой системой в процессе деформирования. Вид геометрической формы позволяет оценить характер последствий потери УСР. Форма может быть выражена в виде общей потери УСР отдельного несущего элемента рамы или всей системы рам [9]. Возможен характер деформирования в виде местного выпучивания [10], например, участка стенки, оконтуренного ребрами жесткости внутри отсека стальной балки. Если форма потери устойчивости местная, тогда стенка еще способна воспринимать нагрузку после выпучивания [11], так как контур отсека стенки не может свободно деформироваться в своей плоскости, и контурная нагрузка может возрастать. Количественными критериями являются коэффициенты свободной длины, определяемые в зависимости от формы потери устойчивости. Другим важным количественным критерием является коэффициент запаса устойчивости (КЗУ), величина которого характеризует, во сколько раз необходимо увеличить расчетную нагрузку по отношению к критической, чтобы произошла потеря устойчивости. Заметим, что необходимо увеличить интенсивность, не меняя вида нагружения. Величины перемещений отдельных узлов системы при потери УСР, также можно отнести к количественной характеристике, например величину амплитуды полуволны синусоиды потери устойчивости. Полученные результаты расчетов должны отвечать условиям устойчивости КЭ-моделей, прописанным в нормативных источниках. В работе приводится анализ существующих нормативных требований по обеспечению УСР строительных конструкций, рассчитанных как КЭ-моделей в современных вычислительных комплексах. Приводятся предложения по развитию и синхронизации нормативной базы [12] для проверки УСР численными методами.

1. Постановка задачи и предложения

Для расчета несущих элементов конструкций на устойчивость величина КЗУ заданного в нормах и полученного по результатам расчета КЭ-модели не должна превышать предельного значения отношения критической нагрузки к расчетной. Значение коэффициента указано в нормах в виде коэффициента надежности по устойчивости (КНУ). Перечислим нормированные значения КНУ. В СП 16.133330.2017 для расчета стержневых металлических конструкций как идеализированных пространственных систем $\gamma_s = 1,3$. В СП 266.1325800.2016 «Конструкции сталежелезобетонные. Правила проектирования» указано два значения для расчета упругих пространственных стержневых конструкций: $\gamma_{stab} = 2$ при расчете по недеформированной схеме, $\gamma_{stab} = 1,2$ при расчете по деформированной схеме с проверкой условия упругой работы стали и учета длительных деформаций бетона. В СП 267.1325800.2016 «Здания и комплексы высотные. Правила проектирования» заданы две величины, которые не должны превышать КНУ формы, а именно: 2 – для зданий из монолитного железобетона и 1,3 для высотных зданий со стальным каркасом. Можно сделать вывод, что для сталежелезобетонных конструкций КНУ назначен как для монолитных железобетонных конструкций. Если перекрытие будет сталежелезобетонным, а каркас стальным, железобетон-

бетонная плита раскрепит элементы стального каркаса из плоскости. За счет совместности работы значительно уменьшатся деформации. Указанные особенности работы сталежелезобетонного каркаса такого типа должны сделать каркас более устойчивым по отношению к каркасу без учета совместной работы разномодульных материалов, хотя нормами предусмотрены значения КНУ большие, чем для стального каркаса. Заметим, что индексация коэффициентов также не одинакова, даже если «S» - это сокращение от «stab». КНУ в нормах указаны только для пространственных стержневых систем, при этом случаи потери устойчивости одного элемента или вовлечения всей системы по нормам тождественны. Необходимо различать такие случаи, выполняя расчет на прогрессирующее обрушение [13] как доказательство того, что аварийное состояние одного элемента не приводит к дальнейшим разрушениям и, как следствие, возможно применять меньшее значение КЗУ. Для КЭ-моделей, состоящих из пластинчатых или объемных КЭ, коэффициенты надежности по устойчивости в действующих нормах не указаны. Для случая местной формы потери устойчивости КЭ-модели КНУ в нормах также не предусмотрены. Местную форму потери устойчивости одним коэффициентом нормировать сложно, так, например, выпучивание стенки несущей балки не приведет к аварийной ситуации [14], но в подкрановой балке такого выпучивания допускать нельзя. Необходимо учитывать назначение элемента конструкции. Случай потери местной устойчивости полки элемента двутаврового поперечного сечения является более опасным по отношению к местному выпучиванию стенки. Величины значений КНУ возможно отобразить в последовательности взаимного подчинения на числовой прямой в виде заданного ряда значений (рис. 1). Причем данный ряд не должен принадлежать конкретной организации - разработчику норм, тогда значения из этого ряда будут иметь согласованный и общепринятый характер для любых нормативных документов и любых конструктивных материалов. Так, например, электрохимический ряд активности металлов не отражен в ГОСТах, учебниках или в нормативных документах организаций.

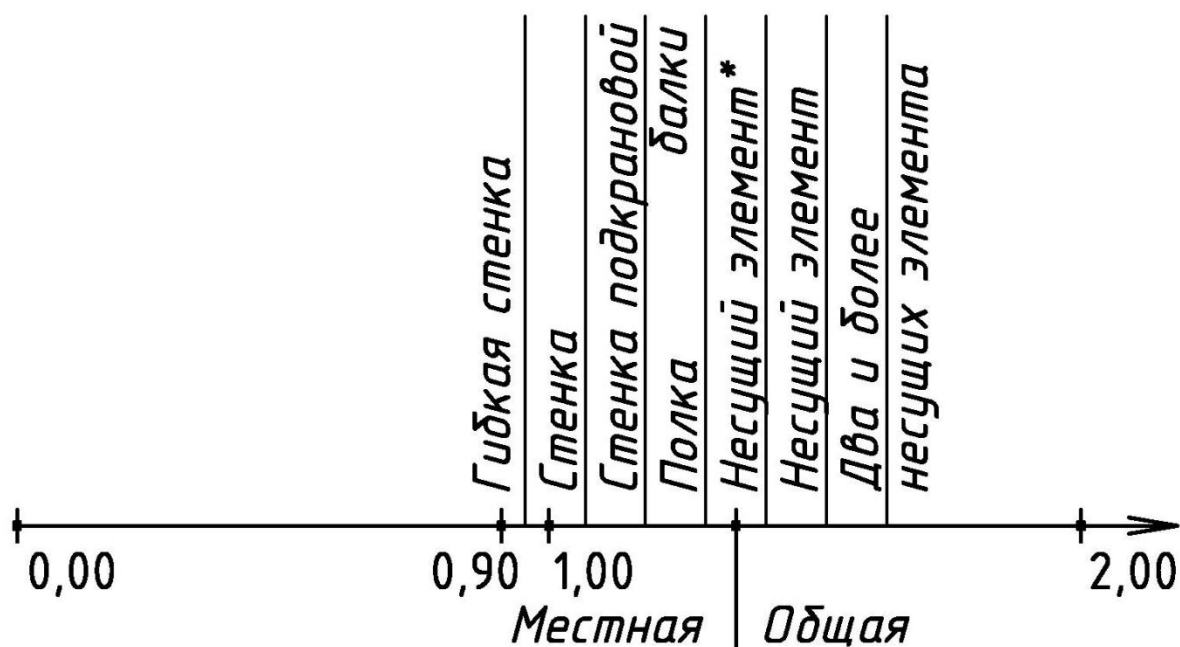


Рис. 1. Ряд коэффициентов надежности по устойчивости:
* - с проверкой на прогрессирующее обрушение

В предлагаемом ряду коэффициенты приводятся в порядке возрастания последствий, в зависимости от формы потери устойчивости, соответствующие точные значения автор не указывает. Назначение величин КНУ в зависимости от форм связано с теорией надежности, экономическими оценками и верификацией результатов расчетов численных КЭ-моделей. Ниже приводится исследование по верификации результатов расчетов на устойчивость, на примере стального рамного каркаса.

2. Исследование устойчивости рамных систем

Для тестовых расчетов приняты КЭ-модели ранее запроектированных рамных конструкций здания склада. Стальные рамы перекрывают три пролета по 10 м (рис. 2) и имеют шаг в продольном направлении здания 4,5 м. В крайних осях ригели рамных систем шарнирно оперты на столбчатый фундамент, так как рамы перекрывают цокольный этаж здания и имеют фактические пролеты по 9,68 м. В средних осях ригели имеют жесткий узел примыкания к колоннам. Сечения несущих элементов рамных систем изготовлены из стали С245, двутаврового типа по СТО АСЧМ 20 - 93: главные балки - 40Ш2, вспомогательные балки - 25Б1, колонны – 30К1. Отметка от уровня чистого пола до низа главных балок 3 м, уровень низа плиты базы колонны на 0,2 м ниже отметки уровня чистого пола. Нагрузка для всех тестовых моделей одинакова: собственный вес несущих элементов рамы (с коэффициентом 1,05) и произвольно заданная распределенная нагрузка 1 тс/м^2 или для рам с шагом 4,5 м распределенная равномерно вдоль ригеля с интенсивностью 4,5 тс/м. Для каждой из трех тестовых моделей выполнен расчет на устойчивость в вычислительном комплексе SCAD Office: определены первые три формы потери устойчивости, получены значения КЗУ для каждой формы.

В первой тестовой модели рассмотрена плоская рама, состоящая из стержневых КЭ тип – 5, с шестью степенями свободы в узлах (три линейных, три угловых). Плоская стержневая рамная конструкция имеет следующие граничные условия: ограничения вертикальных линейных перемещений в крайних опорных узлах, ограничение линейных перемещений (в трех направлениях) и угла поворота в плоскости для нижних опорных узлов колонн, ограничения линейных перемещений из плоскости в верхних крайних узлах и узлах примыкания ригелей к колоннам (тип каркаса рамно-связевой).

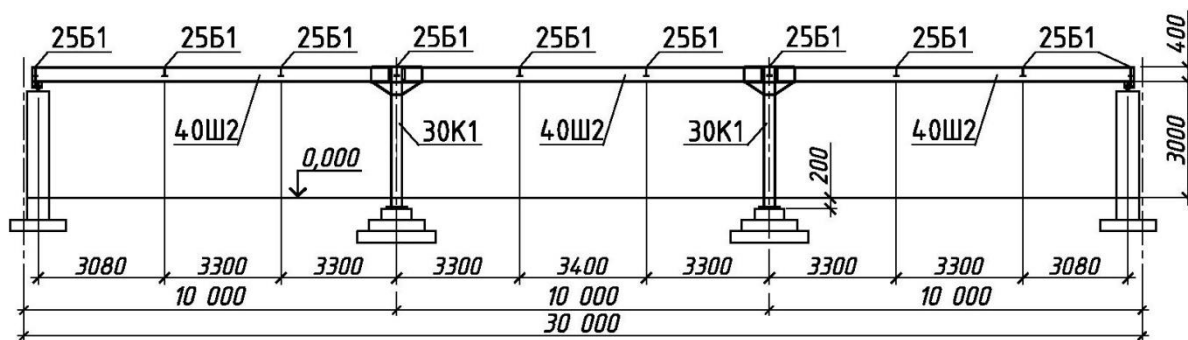


Рис. 2. Поперечный разрез каркаса тестовых КЭ-моделей

По результатам расчета УСР плоской рамы показана первая форма потери устойчивости (рис. 3) плоской стержневой КЭ-схемы по одной полуволне. КЗУ для данной рамной конструкции получены довольно высокими - уже для первой формы значение составило 22,09.

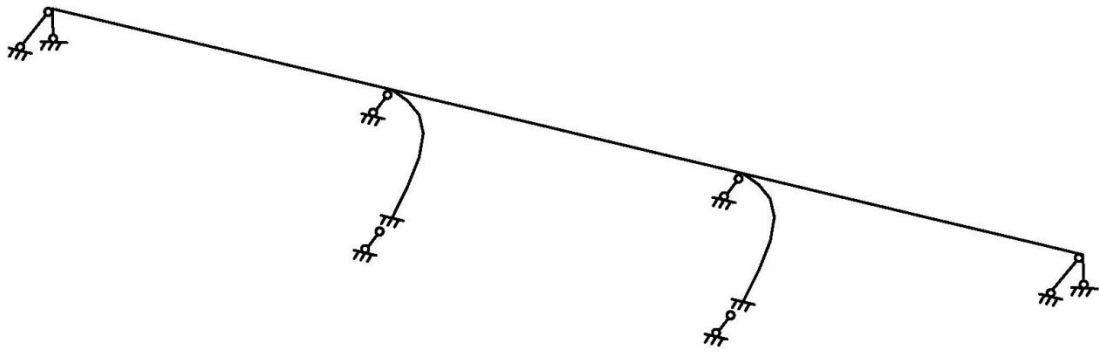


Рис. 3. Первая форма потери УСР плоской стержневой схемы

Во второй тестовой модели рассмотрены три плоские рамы с шагом 4,5 м, объединенные в пространственный каркас вспомогательными балками. Расчетная схема состоит из стержневых КЭ тип – 5, с шестью степенями свободы в узлах (три линейных, три угловых). Пространственная стержневая конструкция имеет следующие граничные условия: ограничение вертикальных линейных перемещений в крайних опорных узлах, ограничение линейных перемещений (в трех направлениях) и угла поворота в плоскости для нижних опорных узлов колонн. Ограничения линейных перемещений из плоскости в верхних крайних узлах и узлах примыкания ригелей к колоннам - только для одной крайней рамы. Ниже показана первая форма потери УСР объединенного блока из трех рам (рис. 4). По результатам расчета можно отметить, что первая форма потери устойчивости для плоской рамы и для системы рам имеют близкую, почти совпадающую геометрию и проявляются в виде выпучивания колонн из плоскости рамы. Деформация происходит из плоскости наибольшей жесткости сечения колонн, что вполне объяснимо. КЗУ для пространственной системы из трех рам получены высокими и совпадают по значениям с расчетом плоской рамы: для первой формы - 22,09.

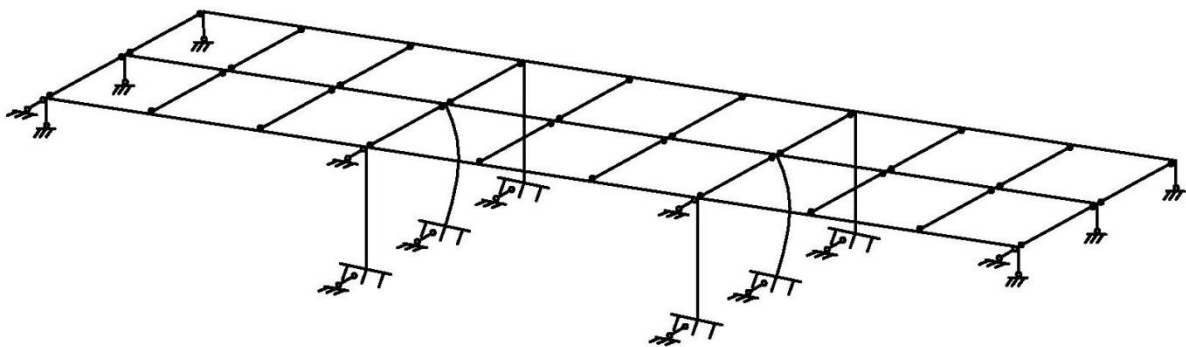


Рис. 4. Первая форма потери УСР пространственной стержневой схемы

Далее был выполнен расчет КЭ-модели одиночной плоской рамы, состоящей из КЭ оболочки нулевой гауссовой кривизны. КЭ-модель имеет следующую вычислительную размерность: 15 062 узлов, 15 131 элементов, 90 284 степеней свободы. Для моделирования стального каркаса применялись прямоугольные и треугольные КЭ: тип 44 - четырехугольный КЭ оболочки (средний размер КЭ - 0, 05 м), тип 42 – треугольный КЭ оболочки. Нагрузка совпадает с расчетным значением комбинации, указанной для ранее рассмотренных стержневых расчетных схем. Равномерно распределенная нагрузка прикладывалась по оси рамы без смещения из плоскости. В опорных узлах КЭ-модели рамы выполнен учет конструктивной нелинейности. Данный тип нелинейности достаточно полно описал П. А. Лукаш [15]. Для учета конструктивной нелинейности в каждой из опорных пластин установлены односторонние связи [16, 17], которые работают в вертикальном направлении только на сжатие, моделируя бетонную подливку. При растяжении односторонние связи опорных пластин

размыкаются и дальнейшая деформация системы ограничивается включением в работу анкерных болтов. Анкерные болты смоделированы в виде стержней длиной, равной высоте бетонной подливки (100 мм) и установлены в узлы в соответствии с реальным конструктивным решением. При этом односторонние связи установлены и в узлы устройства анкерных болтов. Так как односторонние связи имеют заданную продольную жесткость, малые отрицательные вертикальные перемещения в узлах установки связей возможны, и тогда анкерный болт может испытать сжатие, но такое сжатие в расчетах не учитывается. При отключении односторонних связей анкерный болт будет испытывать растяжение, поперечное сечение болта должно быть достаточным для его восприятия. Анкерный болт как стержень и подливка, как односторонняя связь - это антагонистические конструктивные элементы и связи соответственно. При учете конструктивной нелинейности деформирование превращается в физический процесс, приближая цифровую КЭ-модель к работе реальной конструкции. Ниже показаны три геометрические формы потери устойчивости рассчитанной оболочечной КЭ-модели (рис. 5). Получены КЗУ для трех форм: 1,80, 1,86, 3,69. Формы имеют выраженный крутильный характер деформирования стальной балки [18] и существенно отличаются от ранее полученных для стержневых систем. В стержневых КЭ-схемах расчетные комплексы не могут определять местную форму потери устойчивости, крутильную или смешанные формы. Указанные формы недоступны для поиска в стержневых расчетных схемах, так как принятая приводит к нахождению последующих форм с более высокими значениями КЗУ, что может привести к переоценке величины критической силы.

а)



б)



Рис. 5 (начало). Общий вид формы потери УСР оболочечной КЭ-модели:
а- первая, б - вторая, в - третья



Рис. 5 (окончание). Общий вид формы потери УСР оболочечной КЭ-модели:
а- первая, б - вторая, в - третья

В таблице представлены КЗУ для трех рассмотренных КЭ-моделей/схем. Точное совпадение значений для первых двух форм стержневых схем связано с потерей УСР колонны из плоскости рамы. Если реализуется потеря УСР балки, как для случая по третьей форме или колонны в плоскости, тогда КЗУ для пространственной системы больше чем для стержневой. УСР теряет одна рама, а соседние «помогающие» рамы дают отпор, учет такого отпора возможен для плоской рамы постановкой упругой опоры в верхнем узле [19]. Полученные значения КЗУ могут быть не минимальными, так как в расчетах несимметричная нагрузка не рассматривалась.

Таблица

Таблица значений КЗУ для трех КЭ-моделей/схем

КЭ-модель/схема	I форма	II форма	III форма
Плоская стержневая	22,09	22,11	50,84
Пространственная стержневая	22,09	22,11	54,77
Плоская оболочечная	1,80	1,86	3,69

3. Обсуждение результатов

Из анализа результатов решения тестовых моделей (схем) можно отметить, что для точного определения критической нагрузки важно учитывать геометрические особенности поперечных сечений элементов системы. Работа стержневых КЭ-схем не учитывает характер местного деформирования отдельных тонкостенных частей несущих элементов. Стержневые схемы показывают завышенные значения по устойчивости системы и, как следствие, повышаются риски возникновения аварийных случаев [20]. Это особенно актуально для открытых тонкостенных стальных профилей [21]. Высокие значения КЗУ иногда объясняют совместной пространственной работой элементов, что не является верным. Любая пространственная система состоит из подсистем – элементов, подсистемы содержат в себе отдельные части – стенка, полка, а отдельные части состоят из малых участков, смоделированных в виде КЭ. Когда в КЭ-модели отдельные КЭ теряют устойчивость, это может приводить к потере

устойчивости частей подсистем, вследствие чего могут терять устойчивость целые элементы и побуждать к потере УСР всю систему. В этой связи все формы должны нормироваться. КЗУ не должны превышать допустимых значений, заданных в виде КНУ. Нормирование форм по допустимым значениям КЗУ логично выполнять с учетом возможных последствий, которые могут носить местный или глобальный характер для УСР механической системы. Существующее на сегодня в СП 16.13330.2017 значение КНУ=1,3 для стержневых систем может давать завышенную величину критической силы по причине схематизации стержневой постановки задачи.

Решение задач по устойчивости формы равновесия системы имеет ограничения, связанные с получением экспериментальных результатов [22] для верификации с численными расчетами [23]. В реальных конструкциях существует единый непрерывно нарастающий процесс деформирования системы по мере роста нагрузки. Для описания действительной работы конструкций более применим термин устойчивости деформирования системы, а не равновесия. При незначительном превышении критической силы перемещения системы стремительно растут и применение измерительных приборов становится затруднительным. Причем любые отклонения системы оказывают влияние на характер деформирования, а в КЭ-моделях используют идеализированные системы.

Выводы

1. Проверка устойчивости состояния равновесия систем численными методами с использованием стержневой схематизации несущих элементов конструкций не учитывает местные, крутильные и переходные геометрические формы потери устойчивого состояния равновесия, что значительно завышает величину критической силы и приводит к переоценке несущей способности системы.

2. Существует необходимость расширить линейку значений коэффициентов надежности по устойчивости в действующих нормах с учетом всех форм потери устойчивости. Также важно, определить значения коэффициентов и упорядочить величины в зависимости от последствий потери устойчивости.

Библиографический список

1. Ведяков, И. И. Сталь для современных строительных металлических конструкций / И. И. Ведяков, П. Д. Одесский // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – № 12. – С. 8-12.
2. Коротких, Д. Н. Критериальная оценка конструкционного потенциала и технико-экономической эффективности современных цементных бетонов // Д. Н. Коротких, Е. М. Чернышов / Технологии бетонов. -2016. - № 1-2. - С. 49-52
3. Свентиков, А. А. Анализ влияния ребер жесткости на местную устойчивость стенки и устойчивость стальной рамы двутаврового переменного по высоте сечения / А. А. Свентиков, Д. Н. Кузнецов // Строительная механика и конструкции. - 2018. - № 1 (16). - С. 75-85.
4. Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. - 544 с.
5. Стельмах, С. И. В. З. Власов и его вклад в создание современной строительной механики тонкостенных конструкций / С. И. Стельмах, В. В. Власов. - М.: Стройиздат, 1982. 75 с.
6. Броуде, Б. М. Устойчивость пластинок в элементах стальных конструкций / Б. М. Броуде. – Л.: Машстройиздат, 1949. - 240 с.

7. Алфутов, Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. - М.: Машиностроение, 1978. 311 с.
8. Белый, Г. И. Новые положения в инженерной методике расчета на устойчивость стальных стержневых элементов конструкций из холодногнутых профилей / Г. И. Белый // Вестник гражданских инженеров. -2017. -№ 2 (61). - С. 75-80.
9. Белостоцкий, А. М. Расчетное исследование параметров механической безопасности высотного (404 метра) жилого комплекса «One Tower» в деловом центре «Москва-Сити» / А. М. Белостоцкий [и др.] // Academia. Архитектура и строительство. 2019. № 3. С. 122-129.
10. Sventikov, A Evaluation of the Influence of the Stiffeners on the Overall Stability of the Variable-Rigidity Steel Frame Using FEM / Sventikov A and Kuznetsov D // International science conference Far East Con 2018: Materials Science and construction. 2018. Part 2. P. 1-6 463 022091 doi: 10.1088/1757-899X/463/2/022091.
11. Нисневич, М. Л. Расчет тонкостенных балок, работающих в условиях потери стеной устойчивости от сдвига / М. Л. Нисневич // Вестник военно-инженерной Краснознаменной акад. им. В. В. Куйбышева. Расчет переправочно-мостовых конструкций. 1956. -№ 92. - С. 130-150.
12. Свентиков, А. А. Адаптация результатов численного метода расчета к нормативной методике проверки местной устойчивости стенки стальной балки двутаврового сечения / А. А. Свентиков, Д. Н. Кузнецов // Строительная механика и конструкции. - 2019. - № 1 (20) - С. 60-70.
13. Ключева, Н. В. Некоторые предложения для конструктивной защиты зданий и сооружений от прогрессирующего разрушения / Н. В. Ключева, Н. Б. Андросова // Строительство и реконструкция. - 2015. - № 4 (60). - С. 72-78.
14. Симаков, Ю. Н. К оценке несущей способности балок с гибкими неподкрепленными стенками / Ю. Н. Симаков // Промышленное и гражданское строительство. - 2014. - № 1. - С. 25-28.
15. Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш - М.: «Стройиздат», 1978. - 204 с.
16. Рабинович, И. М. Курс строительной механики стержневых систем. Ч. 1. / И. М. Рабинович. - М.: Гос. изд-во строит. лит-ры, 1950. - 387 с.
17. Игнатъев, А. В. Анализ изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев, Е. А. Гамзатова // Изв. Вузов. Строительство. - 2018. - № 8 (716). -С. 5-14.
18. Бычков, Д. В. Кручение металлических балок / Д. В. Бычков, А. К. Мрошинский. - М.: Гос. изд-во стр. лит-ры, 1944. - 258 с.
19. Чувикин, Г. М. Устойчивость рам и стержней / Г. М. Чувикин - М.: «Стройиздат», 1951. - 94 с.
20. Еремеев, П. Г. Обеспечение безопасности большепролетных сооружений от лавинообразного (прогрессирующего) обрушения при аварийных воздействиях / П. Г. Еремеев // Современное промышленное и гражданское строительство. - 2008. - Т. 4. - № 3. - С. 129-134.
21. Туснина, О. А. Особенности работы тонкостенного холодногнутого прогона С-образного сечения / О. А. Туснина // Вестник МГСУ. - 2014. - № 10. - С. 64-74.
22. Золотухин, Ю. Д. Испытание строительных конструкций / Ю. Д. Золотухин - Мн.: Изд-во «Вышэйшая школа», 1983. - 205 с.
23. Белостоцкий, А. М. Численное моделирование процессов деформирования конструкций, подверженных аварийным воздействиям / А. М. Белостоцкий, А. С. Павлов // Строительство и реконструкция. - 2015. - № 2 (58). - С. 51-56.

References

1. Vedyakov I.I., Odesskiy P.D. Steel for modern building metal structures. *Industrial and Civil Engineering*. No. 12. 2016. Pp. 8-12.
2. Korotkikh D.N., Chernyshov E.M. Criteria evaluation of structural potential and technical and economic efficiency of modern cement concrete. *Technologies of concrete*. No. 1-2. 2016. Pp. 49-52.
3. Sventikov A.A., Kuznetsov D.N. Analysis of stiffening bar influence on rib local stability and atability of steel frame of doubletee variable by height cross-section. *Structural mechanics and structures*. No. 1(16). Pp. 75-85.
4. Bleich F. *Buckling strength of metal structures*. M.: gos. izd-vo. fiz.-mat. lit-ry, 1959. 544 p.
5. Stel'makh S.I., Vlasov V.V. V.Z. Vlasov and his contribution to the creation of modern structural mechanics of thin-walled structures. M.: Stroyizdat, 1982. 75 p.
6. Broude B.M. *Stability of plates in steel structures*. Leningrad: Mashstroyizdat, 1949. 240 p.
7. Alfutov N.A. *Bases of calculation on stability of elastic systems*. M.: Mashinostroyeniye, 1978. 311 p.
8. Belyy G.I. New provisions in the engineering calculation procedure on the stability of steel bar elements of structures made of cold-formed profiles. *News of the civil engineers*. No. 2(61). 2017. Pp. 75-80.
9. Belostotsky A.M., Akimov P.A., Dmitriev D.S., Nagibovich A.I., Petryashev N.O., Petryashev S.O. Analysis of Parameters of Mechanical Safety of High-Rise (404-meters) Residential Building «One Tower» in the Moscow International Business Center. *Academy. Architecture and construction*. No. 3. 2019. Pp. 122-129.
10. Sventikov A. and Kuznetsov D. 2018 Evaluation of the Influence of the Stiffeners on the Overall Stability of the Variable-Rigidity Steel Frame Using FEM. *International science conference Far East Con 2018: Materials Science and construction*. Part 2. 2018. Pp. 1-6. 463 022091 doi: 10.1088/1757-899X/463/2/022091.
11. Nisnevich M.L. The calculation of thin-walled beams operating in the context of the loss of wall stability against shear. *Bulletin of the Military Engineering Red Academy named after V. V. Kuibev. Calculation of bridge structures*. No. 92. 1956. Pp. 130-150.
12. Sventikov A.A., Kuznetsov D.N. Adaptation of the results of the numerical calculation method to the normative method for checking the local stability of the wall of a steel I-beam. *Structural mechanics and structures*. No. 1(20). 2019. Pp. 60-70.
13. Klueva N.V., Androsova N.B. Some proposals structural protection of buildings and structures from progressive failure. *Building and reconstruction*. No. 4(60). 2015. Pp. 72-78.
14. Simakov Yu. N. To the assessment of the bearing capacity of beams with flexible non-reinforced walls. *Industrial and Civil Engineering*. No. 1. 2014. Pp. 25-28.
15. Lukash P.A. *Foundations of nonlinear construction mechanics*. M.: Strojizdat, 1978. 204 p.
16. Rabinovich I.M. *Course of construction mechanics of rod systems*. Part 1. M.: Gos. Izd-vo str. lit-ry, 1950. 387 p.
17. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Gamzatova E.A. Analysis of bending plates with unilateral constraints through the finite element method in the form the of classical mixed method. *News of Higher Educational Institutions: Construction*. No.8(716). 2018. Pp. 5-14.
18. Bychkov D.V., Mroschinsky A.K. *Torsion of metal beams*. M.: Gos. Izd-vo str. lit-ry, 1944. 258 p.
19. Chuvikin G.M. *Stability of frames and rods*. M.: Strojizdat, 1951. 94 p.
20. Eremeyev P.G. Large-span structures protection from progressive collapse while accidental actions. *Modern industrial and civil construction*. V. 4. No. 3. 2008. Pp. 129-134.
21. Tushina O.A. Features of the work of a thin-walled cold-rolled run of a C-shaped section. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. No. 10. 2014. Pp. 64-74.

22. Zolotukhin Yu.D. Test of building constructions. Mn.: Vyshehshaya shkola, 1983. 205 p.
23. Belostotsky A.M., Pavlov A.S. Numerical simulation for deformation of structures under actions beyond design bases. Building and reconstruction. No. 2(58). 2015. Pp. 51-56.

STABILITY OF THE EQUILIBRIUM STATE OF BEARING STRUCTURES IN COMPOSITION OF FINITE ELEMENT SYSTEMS

D. N. Kuznetsov¹

Voronezh State Technical University
Russia, Voronezh

¹Assistant Prof. of the Department of Metal and Wooden Structures

Tel.: +7(910)3468912, e-mail: kuznecov82@bk.ru

The explanation of the reasonability of introducing additional reliability coefficients values of stability for mechanical systems, which are calculated in modern computer systems, is given. It is proposed to differentiate and mutually subordinate the values of the reliability coefficients for stability depending on the type of the form of loss of stability of the equilibrium and the purpose of the building structure element. The concept of a number of reliability factors for equilibrium stability is introduced. In the SCAD Office computing complex, calculations were performed on the stability of the equilibrium state on the action of the symmetric load of three test models of frame systems. Three frame systems of the same geometry from steel I-beams were designed: two rod systems (flat and spatial) and one plate system (flat). The analysis of the geometry of the cross-sections modeled in the form of finite shell elements with zero Gaussian curvature, taking into account the influence on the stability of the equilibrium of the steel frame, is given. Based on the results of numerical calculations, conclusions are drawn.

Keywords: steel I-beam, local stability, general stability, steel frame, steel framework, computer model of the frame, flat frame, bar design, plate model, reserve coefficient for stability, reliability coefficient for stability.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.012.35:699.814.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОГНЕСТОЙКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ANSYS

С. В. Ефрюшин¹, В. В. Юрьев²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики

²Магистрант кафедры строительной механики, e-mail: vvuriev@gmail.com

Приводятся результаты моделирования температурного воздействия на железобетонную плиту с использованием программного комплекса ANSYS. Целью исследования является построение и апробация конечно-элементной модели для оценки огнестойкости железобетонных конструкций. В модельной задаче расчёта железобетонной шарнирно-опёртой по двум сторонам плиты определяются критическая температура нагрева конструкции, время до потери несущей способности и прогиб. Производится сравнение экспериментальных результатов огневых испытаний с теоретическими расчетами по существующим методикам, а также по конечно-элементному расчету в программе ANSYS. По результатам сделан вывод о возможности применения программного комплекса ANSYS для решения задач подобного класса.

Ключевые слова: железобетонные конструкции, воздействие повышенных температур, огнестойкость, программный комплекс ANSYS.

Железобетонные конструкции должны отвечать требованиям прочности, жесткости и трещиностойкости, а также требованиям пожарной безопасности. Оценить огнестойкость железобетонных конструкций без установления фактических пределов огнестойкости невозможно. Вычислить предел огнестойкости возможно путем испытания конструкции по соответствующей нормативной методике [1]. Однако проведение подобных испытаний требует значительных материальных затрат, поэтому возникает необходимость в теоретической оценке огнестойкости железобетонных конструкций с применением математического моделирования.

Нормативная методика расчета огнестойкости. Предел огнестойкости устанавливается по времени достижения конструкцией предельного состояния. В качестве предельного состояния в данном расчете выступает момент образования пластического шарнира в пролете.

Согласно [2, 3, 4], стандартный температурный режим во времени описывается уравнением

$$t - t_0 = 345 \lg(480\tau + 1), \quad (1)$$

где t – температура среды в камере печи в момент τ ; t_0 – начальная температура среды, τ – время, ч, от начала испытания.

При определении НДС конструкций, подвергающихся тепловому воздействию, необходимо знать распределение температур по сечениям конструкций. Указанная методика расчета распределения температур по сечениям железобетонных конструкций приведена в [2]. Результаты теоретических расчетов по данной методике совпадают с данными огневых испытаний с достаточной для инженерных задач точностью.

© Ефрюшин С. В., Юрьев В. В., 2019

Описание физического процесса. В процессе повышения температуры бетон меняет свои упруго-прочностные показатели (рис. 1). Значения коэффициентов приняты по результатам опытов, проведенных в НИИЖБ. Понижение призмочной прочности бетона при температуре меньше 100 °С объясняется адсорбционными свойствами бетона. При температурах 200 – 400 °С происходит повышение призмочной прочности вследствие уплотнения структуры бетона из-за испарения воды. При достижении температурой значения 400 °С и более происходит снижение прочности бетона. В качестве основной причины выделяют появление дополнительных напряжений, вызывающих разрыв связей между цементным камнем и заполнителем, т.к. при данной температуре цементный камень обезвоживается (дает усадку), а заполнитель расширяется. Расчетное значение прочности бетона на сжатие (растяжение) при нагреве можно определить в любой момент времени по формуле

$$R_{bt} = R_{bn} \cdot \gamma_{bt} \quad (2)$$

где R_{bn} – прочность бетона при 20 °С, γ_{bt} – коэффициент изменения прочности бетона. Уменьшение модуля упругости при нагреве обуславливается увеличением деформативности бетона и его упругих деформаций. Расчетное значение модуля упругости бетона в любой момент времени при нагреве можно определить по формуле

$$E_{bt} = E_b \cdot \beta_b \quad (3)$$

где E_b – начальный модуль упругости при температуре 20 °С; β_b – коэффициент изменения модуля упругости бетона.

Коэффициент температурного расширения бетона понижается в процессе нагрева. При температуре 60 °С он составляет $(12,6 - 14) \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$, при 200 °С равен $(10,0 - 10,4) \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$. Однако при расчете температурных деформаций допустимо применение среднего значения коэффициента α_{bt} на всем интервале температур $(t + \Delta t)$, вычисляемого по формуле

$$\alpha_{bt} = \varepsilon_{bt}(t + \Delta t) - \varepsilon_{bt}t/\Delta t \quad (4)$$

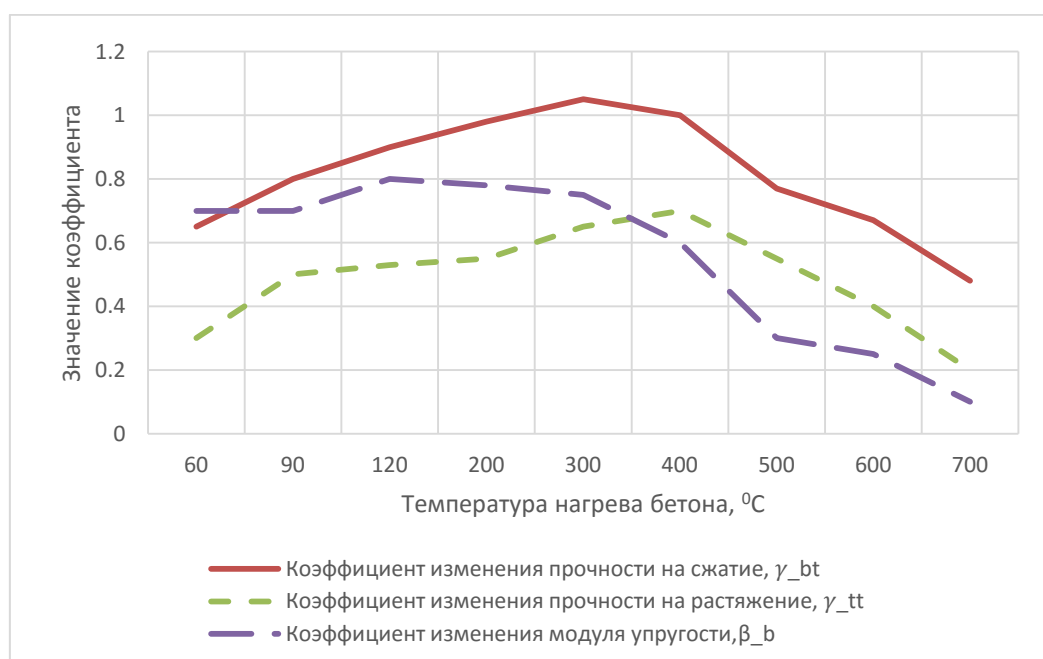


Рис. 1. График зависимости коэффициентов условия работы для упруго-прочностных характеристик бетона от температуры нагрева

Изменение упруго-прочностных показателей арматуры представлено на рис. 2. Сопротивление арматуры растяжению R_{st} при нагреве вычисляется по формуле

$$R_{st} = \gamma_{st} \cdot R_{sn}, \quad (5)$$

где γ_{st} – коэффициент, учитывающий изменение прочности арматуры; R_{sn} – прочность арматуры при 20°C .

Аналогично вычисляется значение модуля упругости E_{st} при нагреве по формуле

$$E_{st} = \beta_s \cdot E_s, \quad (6)$$

где β_s – коэффициент, учитывающий изменение модуля упругости арматуры, E_s – прочность арматуры при 20°C .

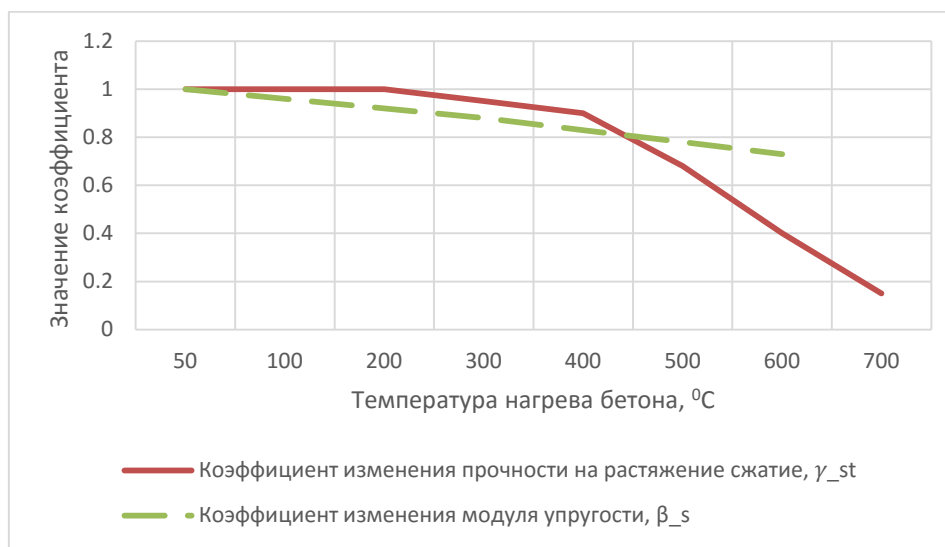


Рис. 2. График зависимости коэффициентов условия работы для упруго-прочностных характеристик арматуры от температуры нагрева

С повышением температуры арматурная сталь расширяется. При нагреве арматуры до 500°C коэффициент температурного расширения изменяется с $(11 - 12) \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ при 100°C до $(13,5 - 14,5) \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$. Возникает ситуация, при которой величина коэффициента температурного расширения стали становится больше, чем для бетона, что негативно сказывается на сцеплении арматуры и бетона.

По результатам испытаний сцепления арматуры с бетоном при нагреве [2] для горячекатаной арматуры периодического профиля при температурах до 200°C не происходит снижения величины сцепления. С повышением температуры сцепление уменьшается, и при достижении отметки 450°C составляет $\sim 75\%$ от величины сцепления при 20°C [2].

Описание расчетной модели. Исходными данными для численного анализа огнестойкости железобетонной плиты приняты результаты испытаний, проведенных в НИИЖБ [2]. Рассматривалась шарнирно-опёртая по двум сторонам железобетонная плита размерами $3000 \times 1200 \times 120$ мм. Процент армирования $\mu = 0,44\%$ ($8\emptyset 10$ арматура класса А – III), предварительное напряжение отсутствует. Защитный слой рабочей арматуры 15 мм, конструктивная арматура в модели не учитывается. Загружение испытываемой конструкции производилось ступенями, до нормативной нагрузки, равной 49 % от разрушающей. Образец подвергается нагреву по нижней поверхности равномерно на всей длине пролета.

Для проведения численного моделирования использовался метод конечных элементов (МКЭ), реализованный в программе ANSYS [6, 7]. Для моделирования бетона применялся конечный элемент SOLID65 – специальный объемный шестигранный восьмиузловой эле-

мент с тремя степенями свободы в узле и дополнительными функциями формы внутриэлементных перемещений для повышения точности (рис. 3).

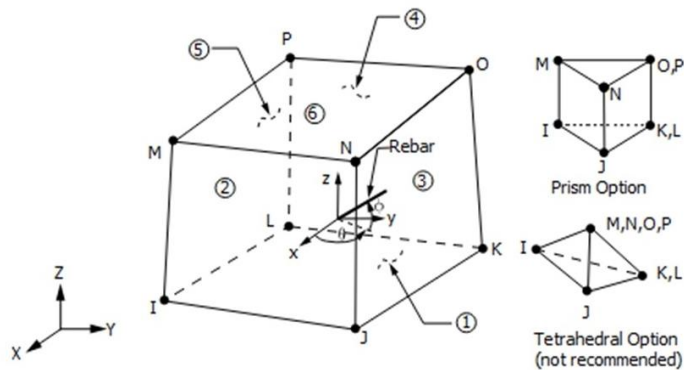


Рис. 3. Геометрия SOLID65

Арматурные стержни моделировались конечным элементом BEAM188 [6, 7] – пространственный линейный элемент балки, имеющий 3 узла: 2 «содержательных» узла располагаются на оси элемента (по краям), третий является узлом ориентации и может быть общим для нескольких элементов (рис. 4).

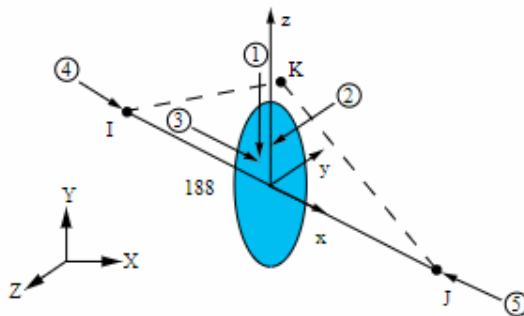


Рис. 4. Геометрия BEAM188

Расчетная схема разбита на конечные элементы размерами 20x20x20 мм. На модель одновременно действуют загрузки: собственный вес, температурное воздействие, нормативная нагрузка. Общий вид расчетной схемы представлен на рис. 5. Прочностные и деформационные характеристики конструкции были приняты согласно фактическим значениям, полученным в ходе натурных испытаний [2]. Расчет проводился в физически нелинейной постановке.

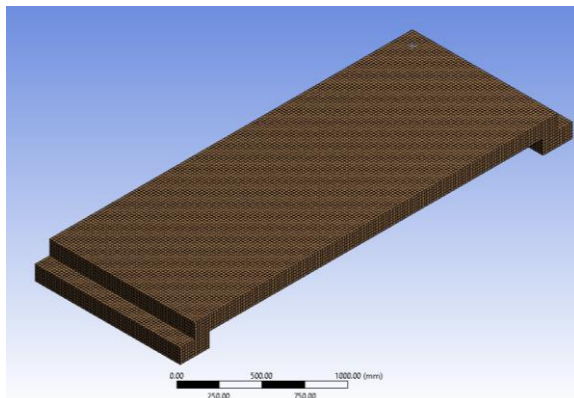


Рис. 5. Общий вид расчетной схемы в программе ANSYS

Анализ результатов. Выполнен сравнительный анализ результатов, полученных при проведении эксперимента, расчета по методике [2] и численном моделировании в программном комплексе ANSYS (таблица). Деформированная расчетная схема приведена на рис. 5.

Таблица

Сравнение результатов

Критерий	Эксперимент	Нормативная методика расчета	Численное решение в программе ANSYS	Δ , % между экспериментом и нормативной методикой	Δ , % между экспериментом и решением в программе ANSYS
Время достижения критической температуры, τ , с	6120	6180	6136	10	3
Критическая температура, t , $^{\circ}\text{C}$	510	563	520	5	2
Прогиб от эксплуатационной нагрузки и перепада температур v , мм	200	166	127	17	37

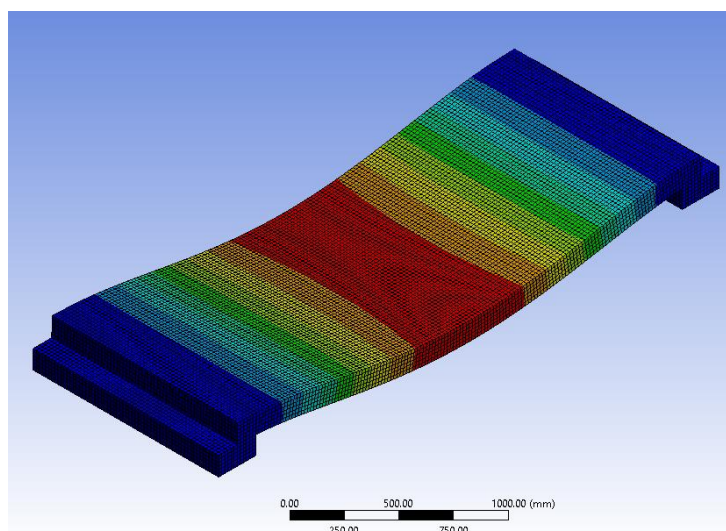


Рис. 5. Деформированный вид расчетной схемы

Выводы

По результатам исследования были получены численные решения для прогибов, определена критическая температура и время ее достижения для железобетонной плиты при совместном воздействии повышенных температур и приложенных нагрузок. Осуществлено сравнение экспериментальных данных с результатами численных решений. Наблюдается хорошее совпадение результатов по критической температуре (2-5 %) и по времени достижения критической температуры (3-10 %), и удовлетворительное совпадение по прогибу от совместного действия температурных и силовых факторов (17-37 %). Программный комплекс ANSYS с достаточной точностью справился с поставленной задачей, что делает его пригодным для использования при изучении вопросов огнестойкости железобетонных конструкций. Дальнейшие исследования будут связаны с моделированием каркасного сооруже-

ния, с целью исследования перераспределения усилий в железобетонных конструкциях и определения остаточного ресурса после огневого воздействия.

Библиографический список

1. ГОСТ 30247.0-94. Конструкции строительные. Методы испытания на огнестойкость. Общие требования. - М.: ИПК «Изд-во стандартов», 1996.
2. Милованов, А.Ф. Стойкость железобетонных конструкций при пожаре/ А. Ф. Милованов. - М.: Стройиздат, 1998. - 304 с.
3. СТО 36554501-006 – 2006. Правила по обеспечению огнестойкости и огнесохранности железобетонных конструкций. - М.: ФГУП «Строительство», 2006.
4. Рекомендации по расчету пределов огнестойкости бетонных и железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат, 1986.
5. Ефрюшин, С. В. Расчетный анализ огнестойкости конструкций с учетом перераспределения усилий при локальных температурных воздействиях / С. В. Ефрюшин, В. В. Юрьев // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №4(19). – С. 97-107.
6. Каплун А. Б.. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство/ А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. - М.: «Либроком», 2015. – 272 с.
7. Федорова, Н. Н. Основы работы в ANSYS 17/ Н. Н. Федорова, С. А. Вальгер, М. Н. Данилов, Ю. В. Захарова. - М.: ДМК Пресс, 2017. – 210 с.

References

1. Federal Standart 30247.0-94. Building constructions. Fire test methods. General requirements. M.: IPK "Publishing house of standards," 1996.
2. Milovanov A.F. Resistance of reinforced concrete structures in case of fire. M.: Stroyizdat, 1998. 304 p.
3. STO 36554501-006 - 2006. Rules for ensuring fire resistance and fire safety of reinforced concrete structures. M.: FSUE "Construction," 2006.
4. Recommendations for calculating the fire resistance of concrete and reinforced concrete structures. M.: Stroyizdat, 1986.
5. Efyryushin S.V., Yuriev V.V. Calculation analysis of fire resistance of structures taking into account the redistribution of forces under local temperature effects. Structural mechanics and structures. No. 4(19). 2018. Pp. 97-107.
6. Kaplun A.B., Morozov E.M., Olfer'eva M.A. ANSYS in the hands of an engineer: A practical guide. M.: Librocom, 2015. 272 p.
7. Fedorova N.N., Valger S.A., Danilov M.N., Zakharova Yu.V. Fundamentals of work in ANSYS 17. M.: DMK Press, 2017. 210 p.

NUMERICAL MODELING OF FIRE RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE PLATE USING ANSYS SOFTWARE COMPLEX

S.V. Efryushin¹, V.V. Yuriev²
Voronezh State Technical University^{1,2}
Russia, Voronezh

¹PhD of Technical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Structural Mechanics

²MA Student of the Department of Structural Mechanics, e-mail: vvuriev@gmail.com

This paper presents the results of modeling the temperature effect on a reinforced concrete slab using the ANSYS software package. The aim of the study is to build and test a finite element model for assessing the fire resistance of reinforced concrete structures. In the model task of calculating a reinforced concrete articulated support on two sides of the slab, the critical temperature of the heating of the structure, the time until the loss of bearing capacity and deflection are determined. The experimental results of fire tests are compared with theoretical calculations by existing methods, as well as by finite element calculation in the ANSYS program. Based on the results, it was concluded that the ANSYS software package can be used to solve the problems of this class.

Keywords: reinforced concrete structures, exposure to elevated temperatures, fire resistance, ANSYS software package.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.15

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ФУНДАМЕНТОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

А. Я. Аль-Бухейти¹, А. Б. Даниш², В. В. Леденев³, Я. В. Савинов⁴

Тамбовский государственный технический университет^{1,2,3}
ООО «Стронг Билдингс»⁴
Россия, г. Тамбов

^{1,2} Аспирант кафедры «Конструкции зданий и сооружений», тел.: +79004938460,
e-mail: al_bukhaiti@mail.ru

³ Д-р техн. наук, проф. кафедры «Конструкции зданий и сооружений»

⁴ Канд. техн. наук, эксперт инновационных проектов

Приводятся результаты опытов по исследованию взаимного влияния двух близко расположенных моделей фундаментов, на одну из которых передается нагрузка. Получены функциональные зависимости между влияющими параметрами. Рассматриваются результаты численных исследований с использованием программного комплекса Plaxis 2D.

Ключевые слова: фундаменты, грунтовое основание, перемещения, нагрузка, взаимное влияние фундаментов, напряжения, эксперименты, численные расчеты.

Введение

В основании зданий и сооружений формируется напряженная зона [1, 3...15, 17]. Остаточные деформации наблюдаются до глубины, приблизительно равной (1,5...2) ширины фундамента. Области упругих деформаций значительно больше [8]. В [9, 10] описаны примеры повреждения от позже пристроенных зданий. Разработаны рекомендации по оценке взаимного влияния фундаментов и зданий [12, 13, 14].

Дополнительная осадка зависит от деформируемости грунтов, величины сжимаемой толщи, времени приложения нагрузки и других факторов [10]. Односторонняя нагрузка основания может вызвать неблагоприятные последствия: наклон, неравномерную осадку, искривление и перекося конструкций зданий и т. д. [4, 10].

Известные теоретические решения основаны на условных моделях, например модели линейно-деформируемой среды [5, 6]. Фактические зависимости значительно отличаются от теоретических [7]. Экспериментальных исследований по этому вопросу мало.

Целью наших экспериментов явилось установление функциональных зависимостей перемещений ненагруженного незаглубленного фундамента от ряда влияющих параметров, в т. ч. от расстояния между осями фундаментов.

Методика проведения экспериментов. Эксперименты проводили на двух лабораторных установках в стальных пространственных лотках Л1 и Л2 размером, а x b x h (h - высота): 200×200×110 (h) см и 180×100×85 (h) см соответственно.

В первой установке сосредоточенную силу F передавали гидравлическим домкратом ДГ-12, во второй - с помощью рычага с 10-кратным увеличением. Усилие от домкрата дополнительно контролировали протарированным динамометром сжатия. Перемещения моделей фундаментов измеряли индикаторами часового типа ИЧ-10, прикрепленными к не зависящей от лотка стальной раме (рис. 1-3).

© Аль-Бухейти А. Я., Данш А. Б., Леденев В. В., Савинов Я. В., 2019

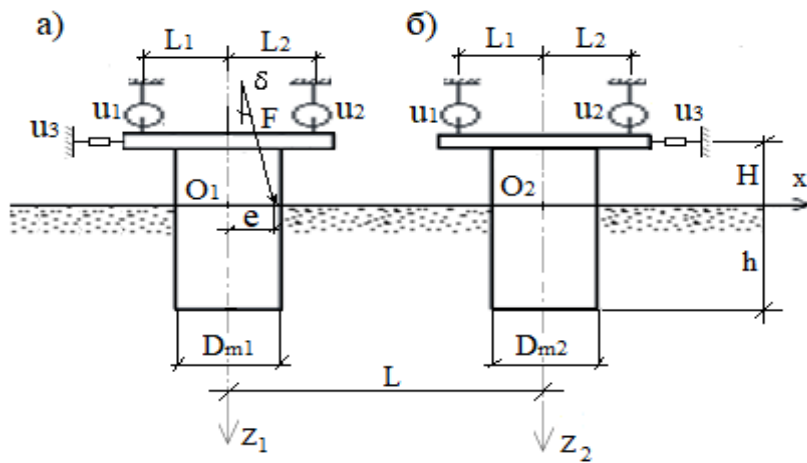


Рис. 1. Принятые обозначения и схема расположения индикаторов для нагруженной (а) и ненагруженной (б) моделей фундамента при статическом нагружении, опыты (1-32)

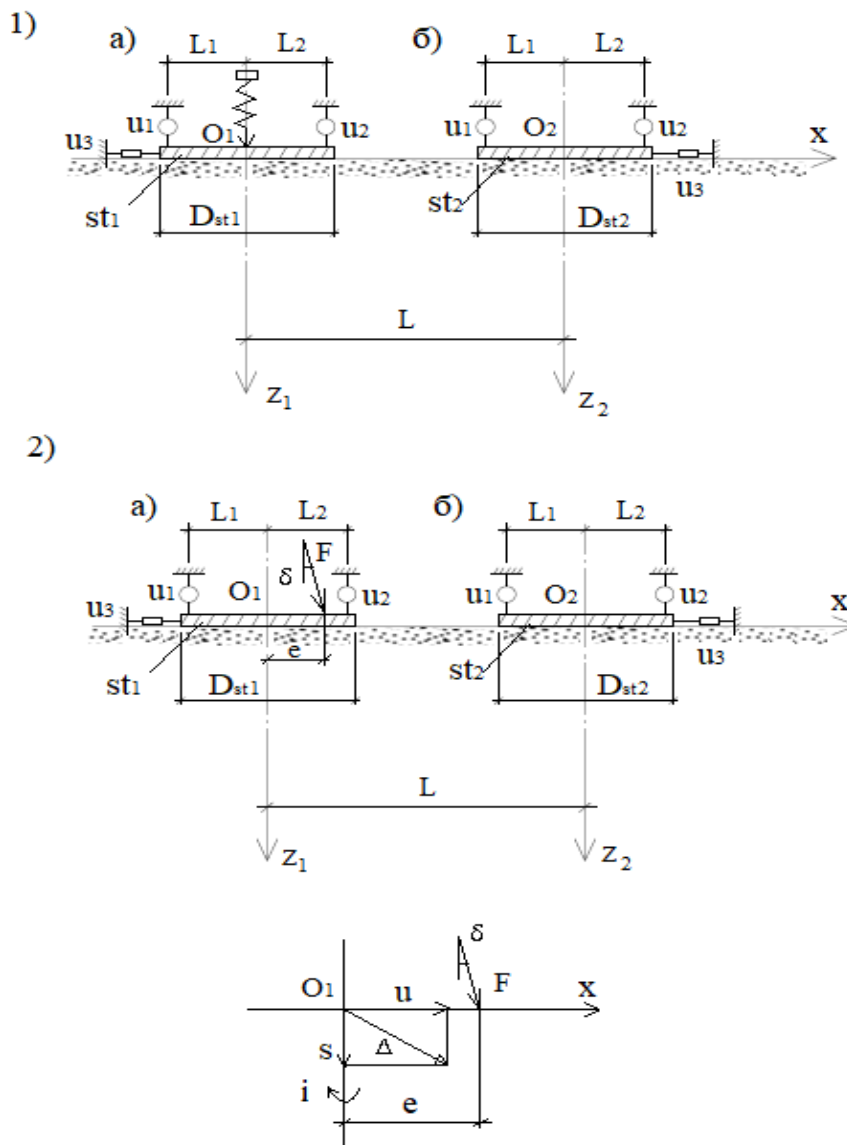


Рис. 2. Принятые обозначения и схема расположения индикаторов для нагруженного (а) и ненагруженного (б) штампов при статическом (2) и динамическом (1) нагружении, опыты (33-72)

Все контрольно-измерительные приборы прошли проверку.

В опытах были использованы жесткие стальные модели фундаментов двух видов:

- цилиндрические диаметром D_m 60,80 и 100 мм, и длиной $L = KD + 50$ мм ($K = 1 \dots 5$).
- штампы диаметром D_{st} , равным 200 мм.

Контактные поверхности моделей были обклеены песком. По верху моделей приварили жесткие стальные пластинки с пазами для фиксации положения цилиндрических шарниров. Нагрузку на модели передавали ступенями, составляющими примерно 1/10...1/15 от предполагаемой максимальной или предварительно установленной разрушающей нагрузки. Каждую ступень нагружения выдерживали до условной стабилизации деформации, равной 0,1 мм за 1 час наблюдения. В отдельных опытах нагрузку увеличивали через 1 час наблюдений. За разрушающую нагрузку принимали ту, при превышении которой происходило резкое увеличение перемещений и их скоростей. Повторность опытов составляла 2-3. По результатам опытов определяли:

- осадку центра поперечного сечения модели в уровне поверхности – s ,
- крен модели – i ,
- горизонтальное перемещение центра тяжести поперечного сечения в уровне поверхности основания – u ,
- разрушающую нагрузку – F_u ,
- перемещения, соответствующие текущей и предельной нагрузке s_u, u_u, i_u ,
- относительные координаты мгновенных осей вращения \bar{x}_c, \bar{z}_c .

Расчетные формулы:

$$s = \frac{(s_1 + s_2)}{2}; i = \frac{|s_2 \pm s_1|}{L_u}; u = u_1 - iH; \bar{x}_c, \bar{z}_c,$$

где s_1, s_2 – показания вертикальных индикаторов; u_1 – то же горизонтального; L_u – расстояния между осями вертикальных индикаторов, фиксирующими вертикальные перемещения; H – расстояние от поверхности основания до оси индикатора, измеряющего горизонтальное перемещение; R – радиус модели; h – величина заглубления цилиндрической модели; \bar{x}_c, \bar{z}_c – координаты мгновенных осей вращения модели.

При анализе результатов использовали следующие относительные параметры:

- уровень нагрузки – $\bar{F} = F/F_u$,
- относительный эксцентриситет – $e_o = e/R$,
- относительное заглубление модели – $\lambda = h/D_m$,
- относительные координаты мгновенных осей вращения; $\bar{x}_c = \frac{s}{iR}$; $\bar{z}_c = \frac{u}{ih}$,
- относительное расстояние между вертикальными осями моделей $\bar{L} = L/D$,

где F – текущая величина нагрузки; F_u – разрушающая нагрузка; e, L – абсолютные величины эксцентриситета и расстояния, R – радиус модели, h – глубина погружения модели, D_m – диаметр модели. В экспериментах принимали:

- $e_o = 0; \pm 0,25; \pm 0,5$;
- $\lambda = 0; 1,5; 2,5$;
- $L = 100, 200, 300, 400; 250, 300, 350, 400$ мм;
- $\rho = 1,5; 1,55$ г/см³
- $\delta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$

Здесь δ – угол наклона силы к вертикальной оси z .



Рис. 3. Вид установки для проведения экспериментов

В экспериментах исследовали характер деформирования и разрушения песчаного основания.

Динамическая нагрузка передавалась путём сброса гирь массой 6 кг с высоты $h=(100.n)$ мм, где n - пошаговое и поэтапное нагружение.

Результаты экспериментов. Полученные данные приведены на рис. 4-8 и в табл. 1-2. Во всех опытах диаметры нагруженной и ненагруженной моделей были одинаковыми и равными 200 мм, плотность песка основания при $\omega=0,05$ составляла $\rho=1,5$ г/см³, относительный эксцентриситет $e_0=0$.

Таблица 1

Сравнение максимальных перемещений нагруженной и ненагруженной моделей

Перемещения моделей							
F_u , кН	L, мм	нагруженной			ненагруженной		
		S_{max} , мм	u_{max} , мм	$i_{max} \cdot 10^{-2}$	S_{max} , мм	u_{max} , мм	$i_{max} \cdot 10^{-2}$
статическое нагружение							
вертикальная сила ($\delta= 0^\circ$)							
12,0	250	3,40	1,1625	3,7	0,61	-0,24	-0,63
	300	3,6	1,2	3,8	0,45	-0,15	-0,46
	350	3,3	1,1	3,5	0,32	-0,13	-0,33
	400	3,5	1,2	3,6	-0,19	0,08	0,2
наклонная сила ($\delta= 15^\circ$)							
10,2	250	3,31	1,18	3,34	0,62	0,2	0,64
наклонная сила ($\delta= 30^\circ$)							
7,2	250	3,125	1,19	3,13	0,58	0,18	0,59
наклонная сила ($\delta= 45^\circ$)							
4,2	250	1,83	1,205	1,9	0,42	0,23	0,43
	300	1,41	1,32	1,53	0,15	0,12	0,16
	350	1,3	1,2	1,4	0,12	0,07	0,13
	400	1,44	1,3	1,48	0,13	0,05	0,14
динамическое нагружение							
вертикальная сила ($\delta= 0^\circ$)							
10,8	250	3,56	1,32	3,6	0,65	-0,25	-0,66
	300	3,6	1,4	3,7	0,44	-0,16	-0,45
	350	3,5	1,3	3,55	0,36	-0,16	-0,37
	400	3,9	1,5	4,1	-0,23	0,12	0,24
наклонная сила ($\delta= 15^\circ$)							
9,6	250	3,48	0,932	3,51	0,65	0,19	0,66

Перемещения моделей							
F_u , кН	L, мм	нагруженной			ненагруженной		
		s_{max} , мм	u_{max} , мм	$i_{max} \cdot 10^{-2}$	s_{max} , мм	u_{max} , мм	$i_{max} \cdot 10^{-2}$
наклонная сила ($\delta= 30^\circ$)							
6,6	250	2,61	0,849	2,62	0,51	0,18	0,52
наклонная сила ($\delta= 45^\circ$)							
3,0	250	1,085	1,164	1,11	0,20	0,21	0,21
	300	1,12	1,2	1,13	0,15	0,14	0,16
	350	1,10	1,16	1,12	0,12	0,11	0,12
	400	1,10	1,18	1,11	0,09	0,08	0,10

Приведём эмпирические зависимости перемещений ненагруженной модели фундамента от влияния нагруженной при действии:

- статической центральной вертикальной силы ($e_0=0$; $\delta= 0^\circ$):

$$s_{2.s.0} = -4 \cdot 10^{-5} L^2 + 0,0177L - 1,64; \quad (1)$$

$$u_{2.s.0} = 1 \cdot 10^{-5} L^2 - 0,0058L + 0,48; \quad (2)$$

$$i_{2.s.0} = 4 \cdot 10^{-5} L^2 - 0,0182L + 1,68. \quad (3)$$

- статической центральной наклонной силы ($e_0=0$; $\delta= 45^\circ$):

$$s_{2.s.45} = 3 \cdot 10^{-5} L^2 - 0,0056L + 1,20; \quad (4)$$

$$u_{2.s.45} = 9 \cdot 10^{-6} L^2 - 0,007L + 1,42; \quad (5)$$

$$i_{2.s.45} = 3 \cdot 10^{-5} L^2 - 0,002L + 3,67. \quad (6)$$

- динамической центральной вертикальной силы ($e_0=0$; $\delta= 0^\circ$):

$$s_{2.d.0} = -3 \cdot 10^{-5} L^2 + 0,0193L - 1,82; \quad (7)$$

$$u_{2.d.0} = 2 \cdot 10^{-5} L^2 - 0,0101L + 1,11; \quad (8)$$

$$i_{2.d.0} = 4 \cdot 10^{-5} L^2 - 0,0204L + 1,98; \quad (9)$$

- динамической центральной наклонной силы ($e_0=0$; $\delta= 45^\circ$):

$$s_{2.d.45} = -4 \cdot 10^{-6} L^2 + 0,0023L + 0,72; \quad (10)$$

$$u_{2.d.45} = -2 \cdot 10^{-6} L^2 + 0,0011L + 1; \quad (11)$$

$$i_{2.d.45} = -3 \cdot 10^{-6} L^2 + 0,0019L + 0,81. \quad (12)$$

Сравнение результатов опытов при $D=200$ мм; $\rho=1,5$ г/см³; $e_0=0$ и $L=250$ мм

Перемещения моделей							
F_u , кН	δ , град	нагруженной			ненагруженной		
		s_{max} , мм	u_{max} , мм	$i_{max} \cdot 10^{-2}$	s_{max} , мм	u_{max} , мм	$i_{max} \cdot 10^{-2}$
статическое нагружение							
12,0	0	3,40	1,1625	3,7	0,61	-0,24	-0,63
10,2	15	3,31	1,18	3,34	0,62	0,2	0,64
7,2	30	3,125	1,19	3,13	0,58	0,18	0,59
4,2	45	1,83	1,205	1,9	0,42	0,23	0,43
динамическое нагружение							
10,8	0	3,56	1,32	3,6	0,65	-0,25	-0,66
9,6	15	3,48	0,932	3,51	0,65	0,19	0,66
6,6	30	2,61	0,849	2,62	0,51	0,18	0,52
3	45	1,085	1,164	1,11	0,2	0,21	0,21

Приведём эмпирические зависимости перемещений ненагруженной модели фундамента от влияния нагруженной при действии:

- статической центральной наклонной силы ($L=250$ мм; $e_0=0$; $\delta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$):

$$s_{2.d} = -0,0002\delta^2 + 0,004\delta + 0,60; \quad (13)$$

$$u_{2.d} = -0,0004\delta^2 + 0,028\delta - 0,21; \quad (14)$$

$$i_{2.d} = -0,0016\delta^2 + 0,092\delta - 0,56; \quad (15)$$

- динамической центральной наклонной силы ($L=250$ мм; $e_0=0$; $\delta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$):

$$s_{2.d} = -0,0003\delta^2 + 0,005\delta + 0,64; \quad (16)$$

$$u_{2.d} = -0,0005\delta^2 + 0,029\delta - 0,22; \quad (17)$$

$$i_{2.d} = -0,0018\delta^2 + 0,098\delta - 0,59. \quad (18)$$

Влияние угла наклона силы на величину разрушающей нагрузки приведено на рис. 4.

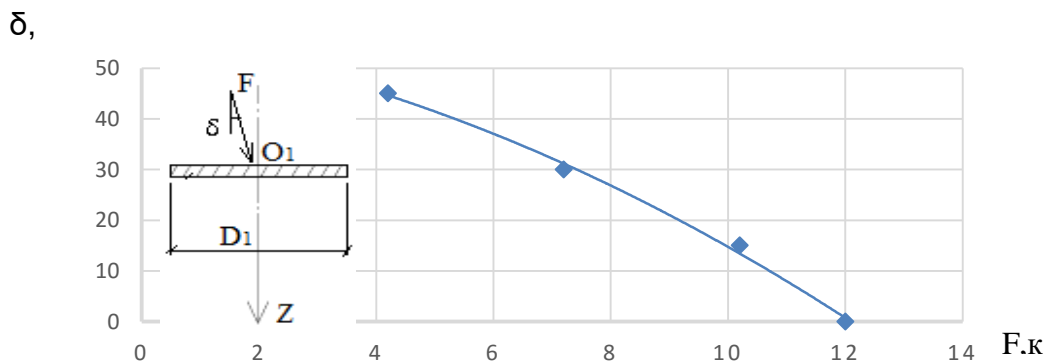
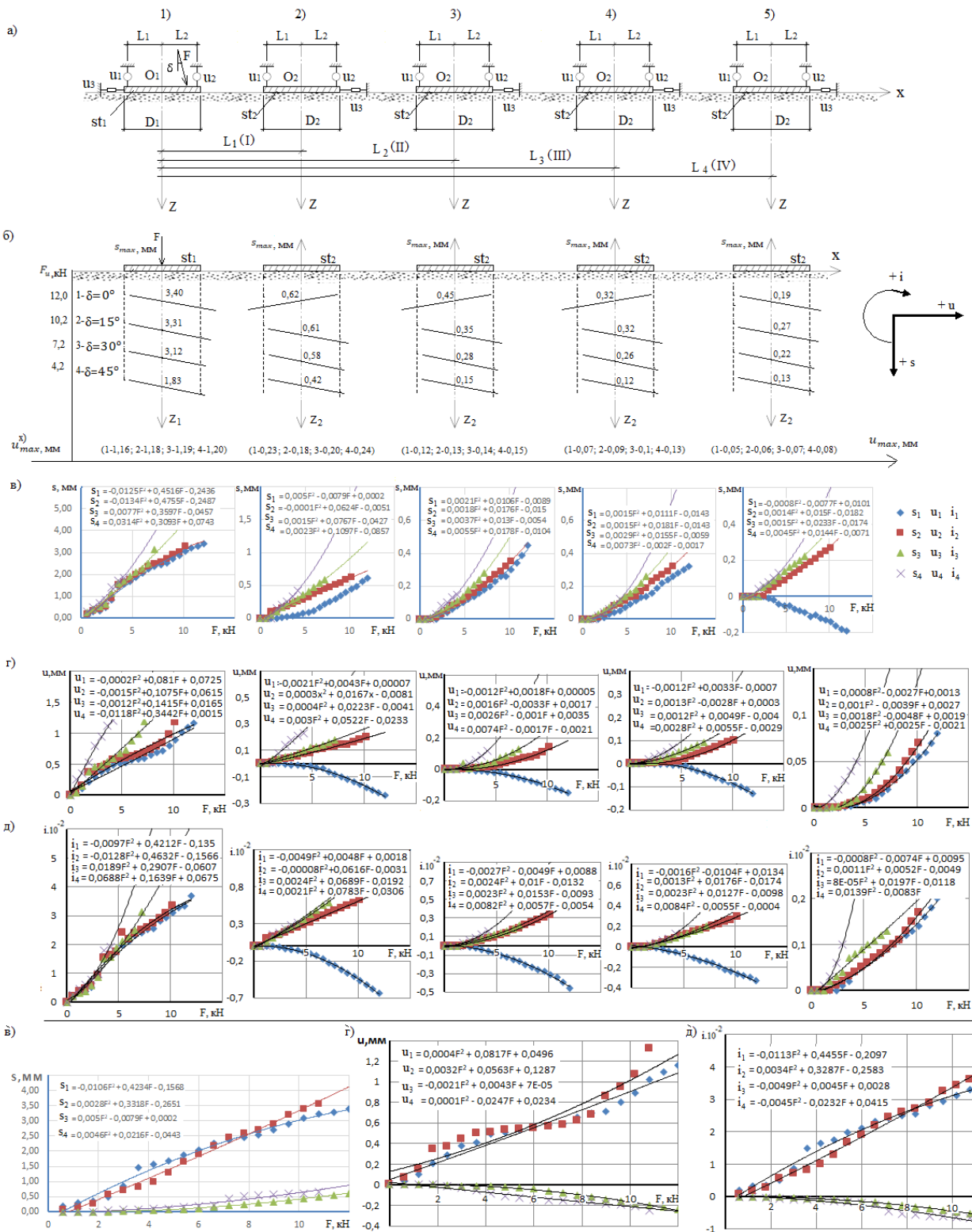


Рис. 4. График зависимости величины разрушающей нагрузки от угла наклона силы



Примечание:

I, II, III, IV - комбинации серий опытов соответственно: 1)+2), 1)+3), 1)+4), 1)+5) с нагруженным штампом 1) и ненагруженным 2), 3), 4), 5); $u_{max}^x, \text{мм}$ - горизонтальные перемещения центров тяжести подошвы штампов для нагрузок $F, (\text{kH}): 4,2; 7,2; 10,2; 12$ при углах наклона силы $\delta(\text{град}): 1-0, 2-15, 3-30, 4-45$; опыты (в, г, д) проводили при $L=250 \text{ мм}$

Рис. 5. Графики зависимости направлений перемещений штампов (б); осадок (в, в),

горизонтальных перемещений (г, г), кренов (д, д) от величины статической (б, в, г, д) и динамической (в, г, д) силы, углов её наклона к вертикальной оси $\delta(\text{град}): 1-0, 2-15, 3-30, 4-45$; расстояний между осями штампов L :

I – 250, II – 300, III – 350, IV – 400 мм

Численное моделирование определения взаимного влияния двух заглубленных и незаглубленных фундаментов. Предложенное нами решение основано на использовании метода конечных элементов и программного комплекса Plaxis 2D. Установлено по две заглубленных и незаглубленных моделей фундаментов при нагружении на одного из них $F=0,39-4,8$ кН. Рассмотрен ряд вариантов (табл. 3). Приведем пример при следующих параметрах: $\rho=1,5$ г/см³, $\delta=0^\circ; 45^\circ$, $D=100, 200$ мм, $e_0=0$, $\bar{L}=150; 250$ мм (табл. 4).

Таблица 3

План расчета

№ n/n	D, мм	$\bar{L}=L / D$	$e_0=e / R$	ρ , г/см ³	δ , град
1	100,200	1,5;2,5; 3;3,5;4	0	1,5	0; 45

Ниже представлены следующие схемы:

- а) сетка из конечных элементов,
- б) полные перемещения,
- в) эффективные напряжения.

Расчет проводили для двух видов нагружений:

- 1 - центральный вертикальной, 2 - центральный наклонной.

Таблица 4

Физико-механические характеристики грунтов основания

The image displays two screenshots of the Plaxis 2D software interface for defining soil parameters for a 'Mohr-Coulomb - мелкий пылеватый песок' (fine silty sand) material. The interface is divided into several sections:

- General Properties:**
 - Material set: мелкий пылеватый песок
 - Material model: Mohr-Coulomb
 - Material type: Drained
 - General properties:
 - γ_{unsat} : 15,500 kN/m³
 - γ_{sat} : 16,600 kN/m³
 - Permeability:
 - k_x : 1,000 m/day
 - k_y : 1,000 m/day
- Stiffness:**
 - E_{ref} : 2,400E+04 kN/m²
 - ν (nu): 0,400
- Strength:**
 - c_{ref} : 2,500 kN/m²
 - ϕ (phi): 31,000 °
 - ψ (psi): 0,600 °
- Alternatives:**
 - G_{ref} : 8571,429 kN/m²
 - E_{oed} : 5,143E+04 kN/m²
- Velocities:**
 - V_s : 68,310 m/s
 - V_p : 167,300 m/s

Both screenshots include a 'SoilTest' icon and 'Next', 'OK', and 'Cancel' buttons at the bottom.

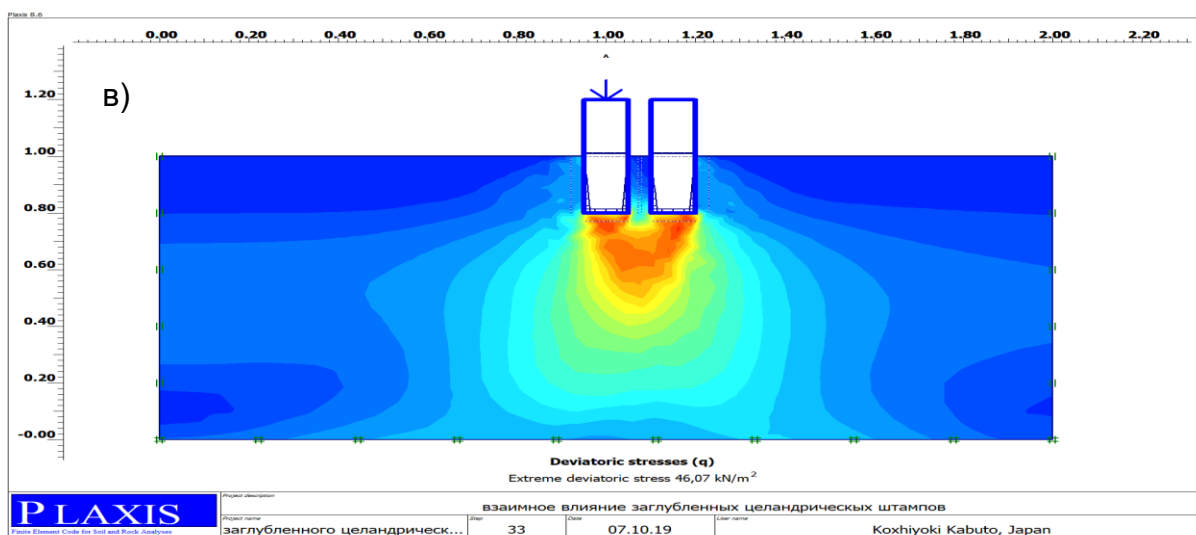
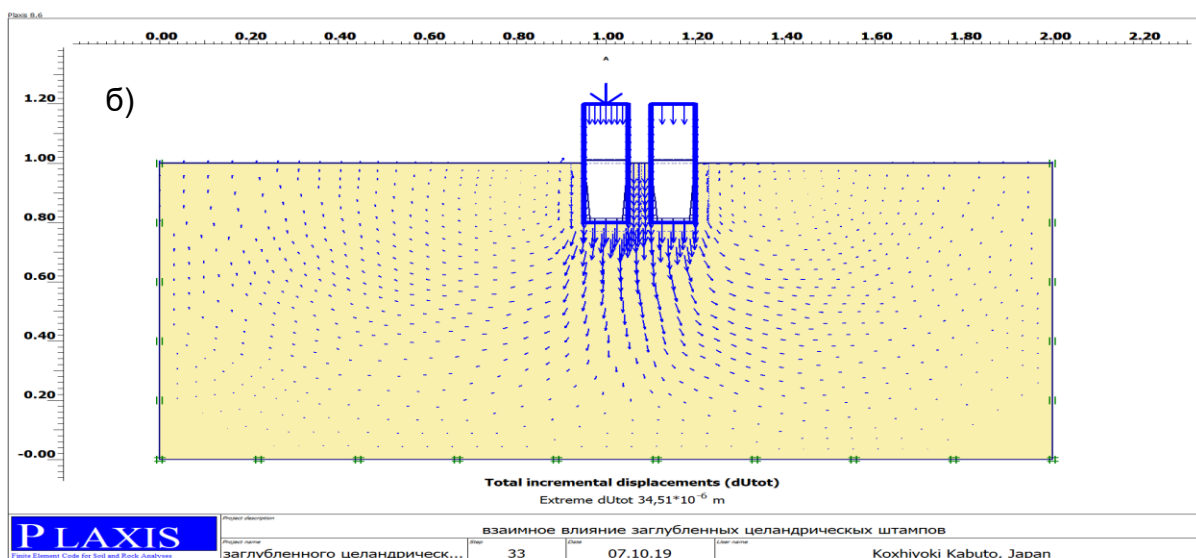
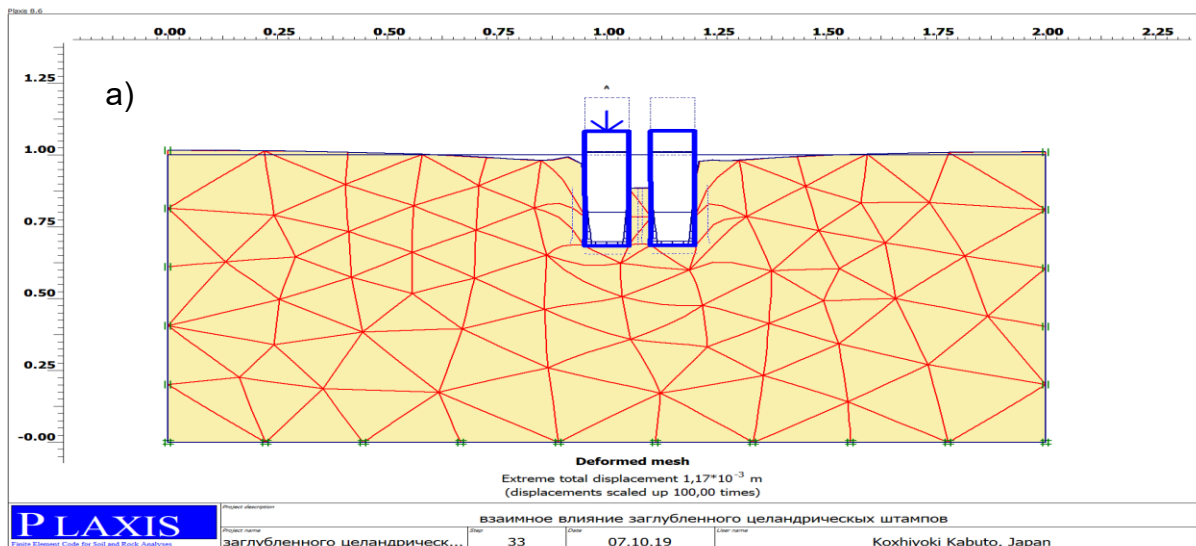


Рис. 6. Напряженно-деформированное состояние основания при взаимном влиянии рядом расположенных фундаментов: сетка из конечных элементов (а), полные перемещения (б), эффективные напряжения (в) при $\rho=1,5 \text{ г/см}^3$, $\delta=0^\circ$, $D=100 \text{ мм}$, $e_0=0$, $L=150 \text{ мм}$, $F=0,39 \text{ кН}$

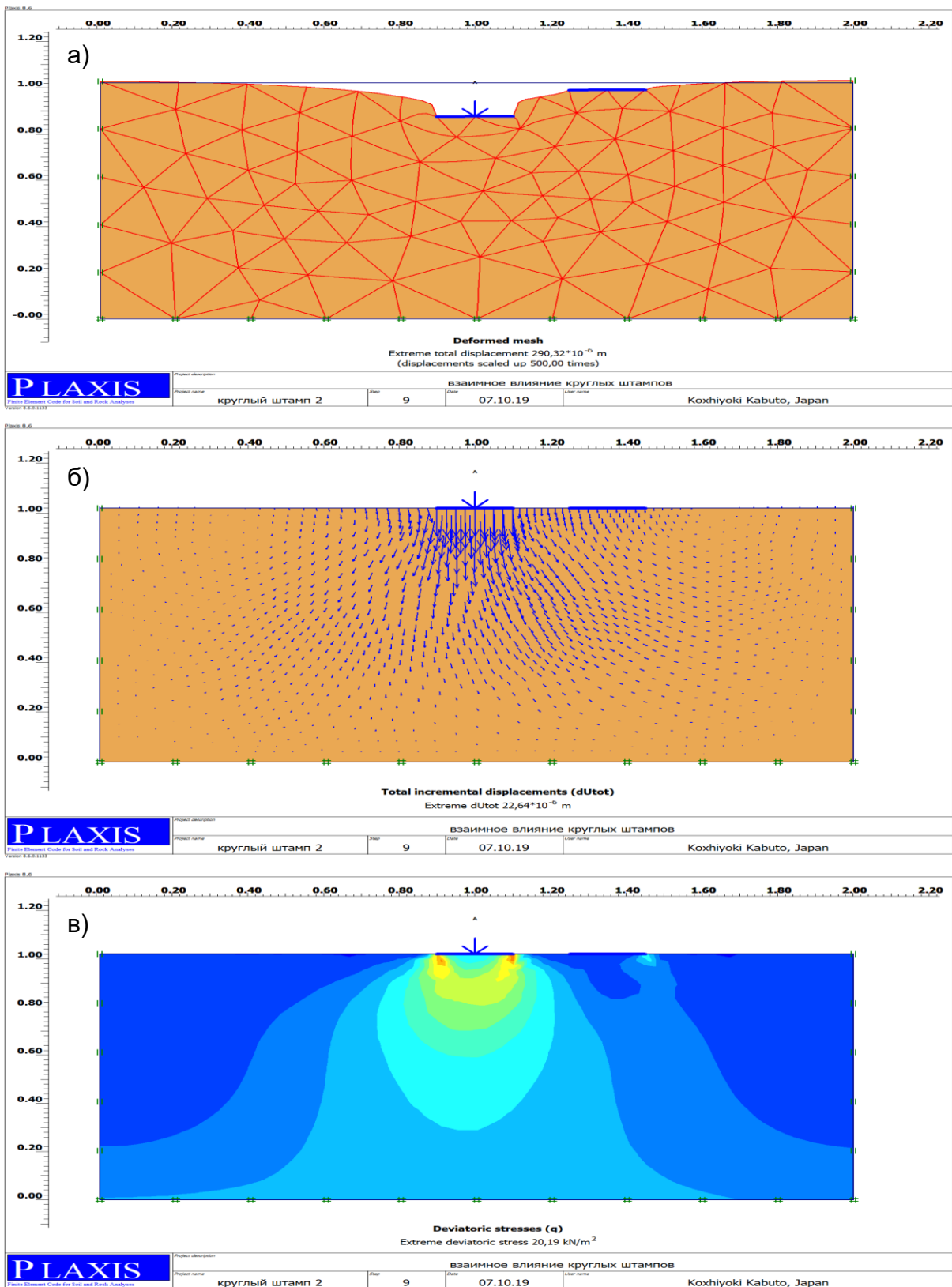


Рис. 7. Напряженно-деформированное состояние основания при взаимном влиянии рядом расположенных фундаментов: сетка из конечных элементов (а), полные перемещения (б), эффективные напряжения (в) при $\rho=1,5$ г/см³, $\delta=0^\circ$, $D=200$ мм, $e_0=0$, $L=250$ мм, $F=4,8$ кН

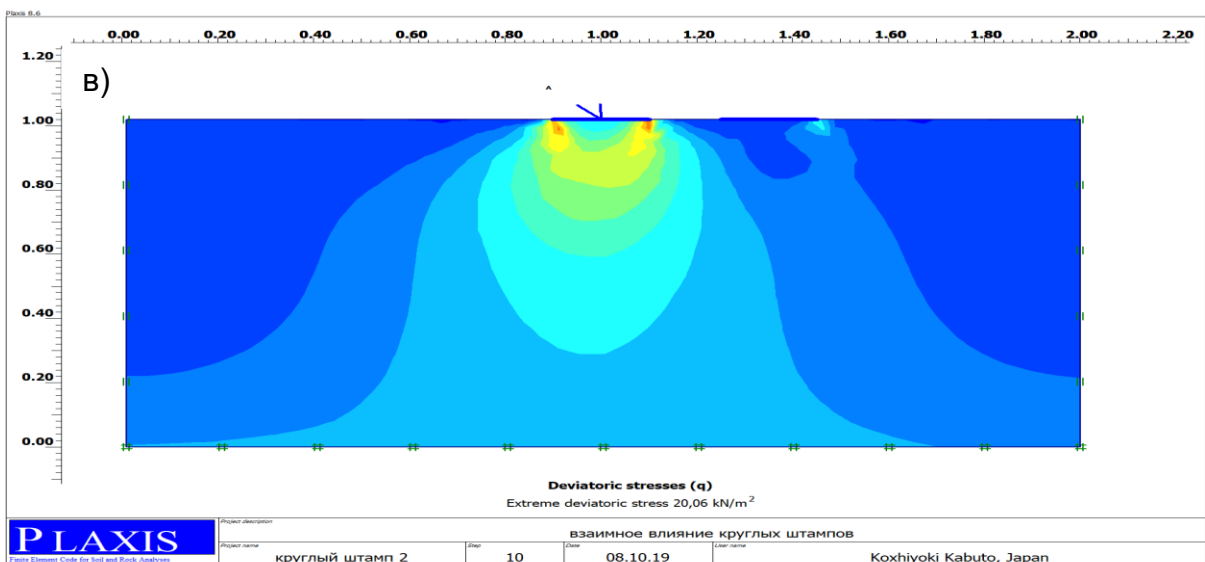
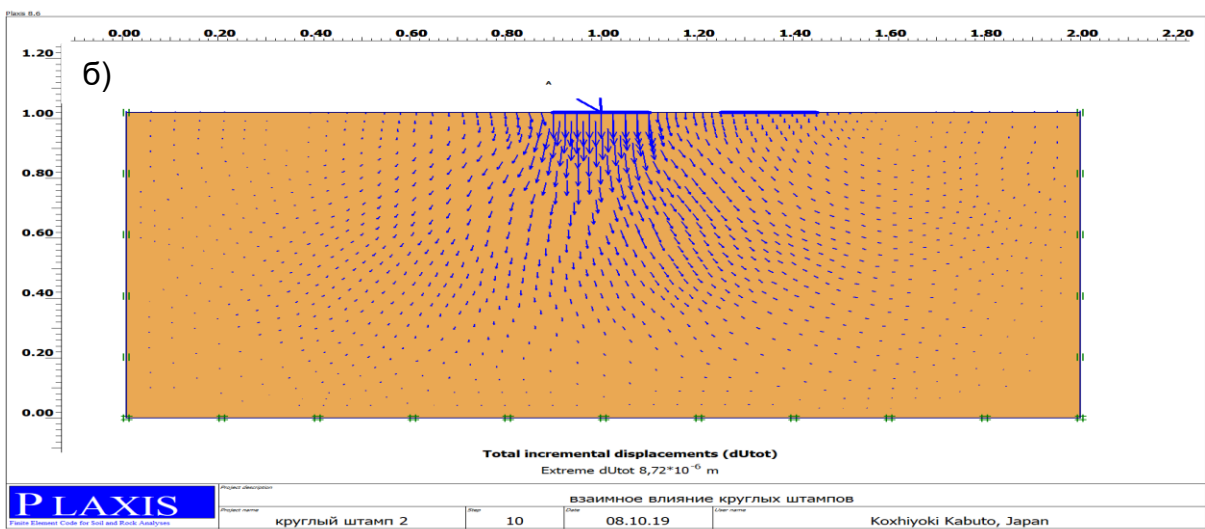
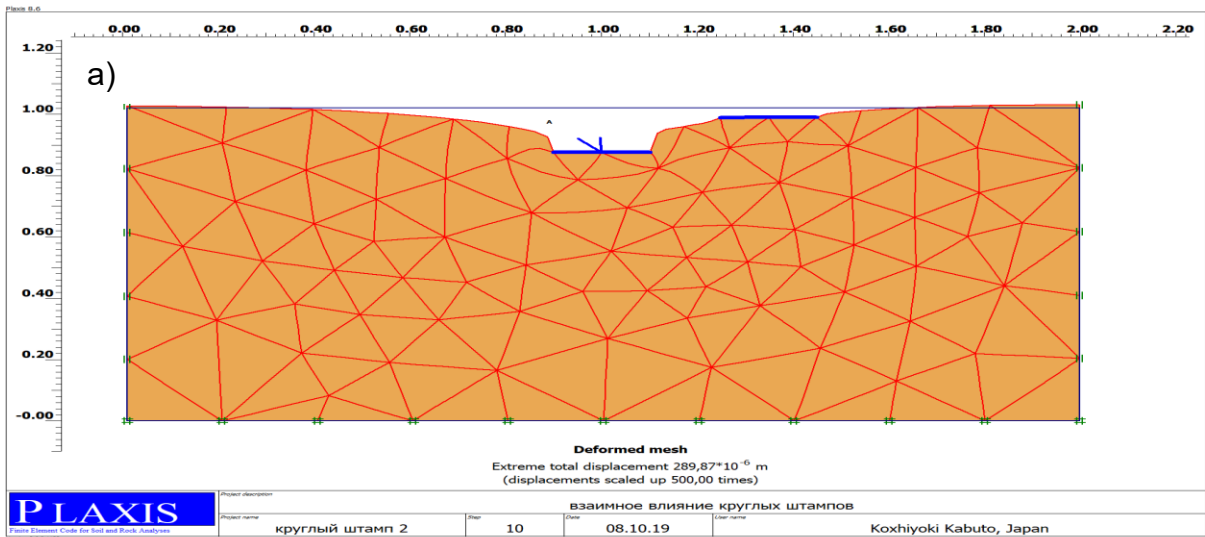


Рис. 8. Напряженно-деформированное состояние основания при взаимном влиянии рядом расположенных фундаментов: сетка из конечных элементов (а), полные перемещения (б), эффективные напряжения (в) при $\rho=1,5 \text{ г/см}^3$, $\delta=45^\circ$, $D=200 \text{ мм}$, $e_0=0$, $L=250 \text{ мм}$, $F=4,8 \text{ кН}$

Выводы

1. Силовые поля, возникающие в основании подземных конструкций, их наложение и взаимодействие вызывают дополнительные перемещения и усилия в элементах здания и узлах сопряжений. В зависимости от сочетания различных параметров (жесткости, реологических свойств материалов, дефектов и т. д.) перераспределение усилий и перемещений может продолжаться длительное время с разными скоростями. Возникают разного рода повреждения.
2. Экспериментально определены функции влияния различных параметров (расстояния между фундаментами, эксцентриситетов приложения силы, плотности грунтового основания).
3. Экспериментальные величины перемещений значительно меньше расчетных, определенных по модели линейно-деформируемой среды.
4. Взаимное влияние двух близлежащих фундаментов необходимо учитывать при проектировании.

Библиографический список

1. Далматов, Б. И. Расчет оснований зданий и сооружений по предельному состоянию: учебное пособие / Б. И. Далматов. - Л.: Стройиздат, 1968. -116 с.
2. Аль-Бухейти, А. Я. Перемещение ненагруженного фундамента от влияния нагруженного/ В. В. Леденёв, А.Я. Аль-Бухейти// Строительная механика и конструкция. – Вып. №1 (8). – С. 125-139.
3. Даниш, А. Б. Повреждения стен близко расположенных зданий вследствие взаимного влияния их фундаментов/ А.Б. Даниш, А. Я. Аль-Бухейти, В.В. Леденев, Я.В. Савинов// Строительная механика и конструкции.- Вып. №2 (21). – 2019. - С. 109-117.
4. Емельянов, В. В., Комаров И. А., В. В. Леденёв, Я. В. Савинов. Взаимное влияние рядом расположенных фундаментов, зданий и сооружений. Дефекта зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций. Материалы VIII научно-методической конференции ВИТУ (18 марта 2004 г). – СПб. ВИТУ, 2004. – С.27-31.
5. Караулов, А. М. Несущая способность оснований осесимметричных фундаментов зданий и сооружений: автореф. дис. ... д. т. н. / А. М. Караулов. – СПб., 2009. – 46 с.
6. Королев, К. В. Исследование несущей способности оснований близко расположенных ленточных фундаментов мелкого заложения: автореф. дис. ... канд. техн. наук/ К. В. Королев. – Новосибирск, СГУПС, 2003. – 18 с.
7. Леденёв, В. В. Прочность и трещиностойкость стен: монография / В.В. Леденёв. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 224 с.
8. Леденёв, В. В. Аварии, разрушения и повреждения. Причины, последствия и предупреждения: монография/ В. В. Леденев, В.И. Скрылёв. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2017. – 440с.
9. Мулюков, Э. И. Отказы оснований и фундаментов зданий и их устранение химическим и конструктивным методами. – автореф. дис. ... д. т. н. – М., 1993. – 50с.
10. Симагин В.Г. Проектирование и устройство фундаментов вблизи существующих сооружений в условиях плотной застройки: учебное пособие/ В.Г. Симагин. - М.: АСВ, 2010. - 128с.
11. Ghosh, P. Linear and nonlinear elastic analysis of closely spaced strip foundations using Pasternak model/ Priyanka Ghosh, S. Rajesh, J. Sai Chand// Front. Struct. Civ. Eng. - 2017. - P. 15.
12. Das, B.M. Ultimate Bearing Capacity of Closely Spaced Strip Foundations / M. Das Braja, Said Larbi-Cher If, // Department of Civil-- Engineering, Indian Institute of Science. - Bangalore. 560012: India. - 1986.

13. Daud, K. A. Interference of shallow multiple strip footings of sand/ A. Daud Khalida // The Iraqi Journal for Mechanical and Material Engineering. - Vol.12. No.3. 2012. P.12.
14. Kumar, A. "Interaction of Footings Resting on Reinforced Earth Slab". Ph.D. Thesis University of Roorkee. / A. Kumar. // Journal of materials in civil engineering. - 19 (3). : India. - 1997. P. 242-248.
15. Priyanka, Ghosh Interference Effect of Two Nearby Strip Footings on Reinforced Sand/ Priyanka Ghosh, Pawan Kumar// 2009. P. 87-94.
16. Nainegali, L. Interference of Two Nearby Footings Resting on Clay Medium/ Lohitkumar Nainegali, Anupkumar G. Ekbote// Indian Geotechnical Conference- IGC.-2016. - P.577-592.

References

1. Dalmatov B.I. Calculation of the foundations of buildings and structures in the limit state: a training manual. L.: Stroyizdat, 1968. 116 p.
2. Ledenev V.V., Al-Bukhaiti A.Y. Moving an unloaded foundation from the influence of a loaded one. Scientific and Technical Journal "Structural Mechanics and Construction." No. 1(8). Voronezh: Publishing House. 2014. Pp. 125-139.
3. Danish A.B., Al-Bukhaiti A.Y., Ledenev V.V., Savinov Y.V. Damage to the walls of closely located buildings due to the mutual influence of their foundations. Structural Mechanics and Structures. Scientific Journal. No. 2(21). 2019. Pp. 109-117.
4. Emelyanov V.V., Komarov I.A., Ledenev V.V., Savinov Y.V. The mutual influence of adjacent foundations, buildings and structures. Defect of buildings and structures. Strengthening building structures. Proceedings of the VIII scientific-methodical conference of VITU (March 18, 2004). SPb. VNTU. 2004. Pp. 27-31.
5. Karaulov A.M. Bearing capacity of the bases of axisymmetric foundations of buildings and structures. Abstract of PhD diss. SPb. 2009. 46 p.
6. Korolev K.V. Study of the bearing capacity of the bases of closely spaced strip foundations of shallow laying. Abstract of PhD diss. Novosibirsk. 2003. 18 p.
7. Ledenyov V.V. Strength and crack resistance of walls. monograph. Tambov: Publishing House of TSTU, 2015. 224 p.
8. Ledenyov V.V., Skrylyov V.I. Accidents, destruction and damage. Causes, consequences and warnings: monograph. Tambov: Publishing House of TSTU, 2017. 440 p.
9. Mulyukov E.I. Failures of the foundations and foundations of buildings and their elimination by chemical and constructive methods. Abstract of PhD diss. M., 1993. 50 p.
10. Simagin V.G. Design and installation of foundations near existing structures in the context of dense buildings: a training manual. M.: DIA, 2010. 128 p.
11. Ghosh P., Rajesh S., Sai Chand J. Linear and nonlinear elastic analysis of closely spaced strip foundations using Pasternak model. Front. Struct. Civ. Eng. 2017. P.15.
12. Das B.M., Said L.C. Ultimate Bearing Capacity of Closely Spaced Strip Foundations. Department of Civil Engineering, Indian Institute of Science. Bangalore. 560012: India. - 1986.
13. Daud K. A. Interference of shallow multiple strip footings of sand. The Iraqi Journal for Mechanical and Material Engineering. Vol. 12. No.3. 2012. P.12.
14. Kumar A. Interaction of Footings Resting on Reinforced Earth Slab. PhD. Thesis University of Roorkee. Journal of materials in civil engineering. 19 (3). India. 1997. Pp. 242-248.
15. Priyanka Ghosh, Pawan Kumar. Priyanka Ghosh Interference Effect of Two Nearby Strip Footings on Reinforced Sand. 2009. Pp. 87-94.
16. Nainegali L., Anupkumar G. Ekbote. Interference of Two Nearby Footings Resting on Clay Medium. Indian Geotechnical Conference. 2016. Pp. 577-592.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL INVESTIGATIONS OF CLOSE-LOCATED FOUNDATIONS MOVEMENTS UNDER THE ACTION OF PLANE FORCE SYSTEM

A. Y. Al-Bukhaiti¹, A. B. Danish², V. V. Ledenev³, Y. V. Savinov⁴

Tambov State Technical University^{1,2,3}
Strong Buildings LLC⁴
Russia, Tambov

^{1,2} PhD Student of the Department of Construction of Buildings and Structures, Tel.: +7(900)4938460,
e-mail: al_bukhaiti@mail.ru

³ Dr of Technical Sciences, Prof. of the Department of Construction of Buildings and Structures

⁴ Phd of Technical Sciences, expert of innovation projects

The results of experiments on the study of the mutual influence of two closely spaced models of foundations, one of which transfers the load, are presented. Functional dependencies between the influencing parameters are obtained.

The results of numerical studies using the Plaxis 2D software package are considered.

Keywords: foundations, ground base, displacements, load, mutual influence of foundations, stresses, experiments, numerical calculations.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
 2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
 3. Структура статьи:
 - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
 - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
 - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
 - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
 - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
 - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
 - 3.7. Текст статьи;
 - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
 - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
 - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
 4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
 5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
 6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).
Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографический список. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
 7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
 8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
 9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.
-

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Ефрюшин Сергей Владимирович, канд. техн. наук, доцент,
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.