УДК 624.01

А. Г. БАРЧЕНКОВ – ОСНОВАТЕЛЬ ВОРОНЕЖСКОЙ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ ПО ДИНАМИКЕ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

В.С. Сафронов[1], С.В. Ефрюшин[2], Н.А. Барченкова [3]
Воронежский государственный технический университет[1,2,3]
Россия, г. Воронеж

[1] Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики
[2] Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой строительной механики
[3] Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-02; e-mail: nova.vp@mail.ru

Статья посвящена 90-летию д.т.н. проф. А.Г. Барченкова – основателя Воронежской научной школы по динамике автодорожных мостов, заведующего кафедрой строительной механики ВИСИ в 1977-1987гг. Приводятся краткие биографические сведения, основные результаты научных исследований и перечень наиболее значимых учебных и научных публикаций.

Ключевые слова: д.т.н., проф. А.Г. Барченков, юбилей, научная школа, динамика автодорожных мостов.

A.G. BARCHENKOV- THE FOUNDER OF VORONEZH SCIENTIFIC SCHOOL FOR ROAD BRIDGE DYNAMICS

V.S. Safronov[1], S.V. Efryushin[2], N.A. Barchenkova [3]
Voronezh State Technical University
Voronezh Russia

[1] Dr of Tech. Sc, professor of Department of Structural Mechanics
[2]PhD of Tech.Sc. associate professor, head of Department of Structural Dynamics
[3]PhD of Tech.Sc., associate professor of Department of Structural Mechanics: +7(473)2715202 e-mail: nova.vp@mail.ru

The article devotes to the 90th anniversary of Doctor of Technical Science, professor A.G. Barchenkov who is the founder of Voronezh scientific school for road bridge dynamics. He had been the head of the Structural Dynamics department of VISI since 1977 till 1987. There is given his bibliographical data, main results of his scientific investigations and the list of the most significant scientific works and publications.

Keywords:: Dr of Tech. Sc., professor A.G. Barchenkov, anniversary, scientific school, road bridge dynamics.

6 апреля 2018 года исполнилось 90 лет со дня рождения доктора технических наук, профессора, заведующего кафедрой строительной механики с 1977 по 1987 год Александра Григорьевича Барченкова - яркого энергичного человека, неординарного педагога, целеустремленного ученого, основателя Воронежской научной школы по динамике автодорожных мостов.

Александр Григорьевич Барченков родился 6 апреля 1928 г. в с. Озерки Лев-Толстовского района Липецкой области в крестьянской семье. Закончив сельскую школу, в 1945 г. он поступил в Московский автодорожный институт (МАДИ), по окончании которого работал прорабом на строительстве и ремонте мостов г. Москвы.

С декабря 1951 г. по сентябрь 1954 г. обучался в аспирантуре МАДИ. Обследовав более 60 мостов, в 1954 г. под руководством известного и авторитетного как в СССР, так и за рубежом, д. т. н., профессора Е.Е. Гибшмана защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук на тему: «Исследование динамического действия подвижной нагрузки на деревянные мосты». Выполненные при этом опытные и теоретические изыскания стали основой перспективного научного направления в теории сооружений. Проработав в МАДИ до февраля 1957 г., был направлен в Воронежский инженерно-строительный институт (ВИСИ) для пополнения педагогических кадров.

Свою дальнейшую научную и педагогическую деятельность А.Г. Барченков связал с кафедрой строительной механики, работая сначала ассистентом, через год – доцентом, и после защиты докторской диссертации в 1975 г. – профессором, а затем, с 1977 г. до последних своих дней (28 января 1987 г.), – заведующим кафедрой [1]. Благодаря своей целеустремленности, большому трудолюбию, необычайной увлеченности и яркому организаторскому таланту за 30 лет работы в ВИСИ (1957 – 1987 гг.) Александр Григорьевич многого сумел достичь.

А.Г. Барченков был новатором во всех направлениях своей деятельности: педагогической, практической инженерно-исследовательской, научно-исследовательской.

Большое влияние на него как педагога оказал превосходный лектор – профессор В.С. Костромин, представитель классической ленинградской школы, заведующий кафедрой строительной механики с 1948 по 1977 гг. При этом А.Г. Барченков являлся сторонником индивидуального подхода и стремился пробудить интерес к науке у своих учеников. Его лекции отличались нестандартностью изложения материала, сопровождались обилием примеров из инженерной практики. Много внимания он уделял методическим вопросам преподавания. Для выполнения всех расчетных работ по курсам учебных дисциплин кафедры под руководством А.Г. Барченкова было начато систематическое издание многочисленных учебно-методических публикаций. Первое место среди них принадлежит емкому и оригинальному учебнику (в соавторстве с В.А. Барановым и А.И. Ананьиным [2]) по динамике сооружений [3], в котором строгое и вместе с тем доходчивое изложение теории поясняется большим количеством примеров. Министерство образования СССР рекомендовало его в качестве учебного пособия для студентов строительных специальностей всех вузов страны. В учебный процесс ВИСИ Александр Григорьевич ввел ряд новых актуальных учебных дисциплин: «Оптимизация и надежность конструкций», «САПР в строительстве», «Современные численные методы», «Численные методы решения задач в строительстве». Специальный курс по динамике сооружений для строительных специальностей им был существенно перестроен и обновлен. Во второй половине 70-х годов впервые в ВИСИ на кафедре строительной механики за счет договорных средств был приобретен большой комплект инновационных для своего времени программируемых микрокалькуляторов, которые использовались студентами для расчетов.

Выполняя обязанности заведующего кафедрой, Александр Григорьевич активно способствовал дальнейшему становлению и омоложению ее состава, который к 1987 году существенно обновился за счет его учеников. Для обеспечения передовых позиций в научной деятельности с использованием вычислительной техники А.Г. Барченков пригласил на работу перспективных выпускников не только ВИСИ, но и ВГУ. Для молодых преподавателей обязательным началом их деятельности было посещение полных лекционных курсов, практических и лабораторных занятий ведущих педагогов кафедры. Продолжая заложенные на кафедре традиции профессора В.С. Костромина, Александр Григорьевич регулярно посещал учебные занятия всех преподавателей. Последующее коллективное обсуждение было неотъемлемой составляющей частью методической работы, обогащением опыта, накопленного коллективом кафедры.

Признанием педагогических заслуг и широкой эрудиции профессора А.Г. Барченкова было включение его в состав Научно-методического Совета Минвуза и, по приглашению В.В. Болотина, в члены Научного Совета по строительной механике при АН СССР.

Понимая потребности современной строительной отрасли в передовой теоретической базе, в 1957 году Александр Григорьевич совместно с доц. В.М. Лисовым организовал и стал бессменным руководителем первой в ВИСИ группы по обследованию технического состояния и натурных испытаний мостовых и ряда уникальных сооружений. В дальнейшем эта работа под руководством Александра Григорьевича переросла в обширную практическую деятельность, к которой в последующие годы с интересом присоединились почти все сотрудники кафедры, а также коллеги со смежных кафедр. Большой объем выполненных на высоком уровне исследований позволил включить их в план важнейших работ Минавтодора РСФР.

Необходимость строгого обоснования выводов о техническом состоянии обследуемых автодорожных мостов стала основой тематики научных исследований молодого доцента А.Г. Барченкова. Большую роль в его становлении как ученого сыграли коллеги по кафедре. Они проявляли доброжелательность, внимание, искреннюю заинтересованность, давали ценные советы и замечания при обсуждении новых результатов. Особое место среди них принадлежало д.т.н. профессору Я.Б. Львину [4], неординарному ученому, одному из самых выдающихся учеников школы В.З. Власова и к.т.н. доц. А.И. Ананьину [2] – ученику Я.Б. Львина, глубокомысленному исследователю, близкому другу и соратнику Александра Григорьевича. Он многому учился у воронежских математиков - специалистов по функциональному анализу, теории вероятности, теории случайных функций и их практическому применению. Его профессиональному росту во многом способствовало активное участие с докладами на многочисленных научных конференциях, семинарах, профессиональных съездах, где он знакомился с достижениями передовых научных школ и вузов страны: МАДИ, МИИТ, ЛИИЖТ, МИСИ, ХАДИ, ДИИТ, МЭИ, ТАДИ и др., а также с ведущими учеными СССР: Болотиным В.В., Николаенко Н.А., Бондарем Н.Г., Ляховичем Л.С., Бондаровичем Б.А., Ротенбергом Р.В., Моргаевским А.Б. и др. В течение многих лет он поддерживал с ними тесные контакты и сотрудничество. Его хорошо знали в РосдорНИИ, СоюздорНИИ, ЦНИИСКе, НИИСКе, ГипродорНИИ, ПромтрансНИИпроекте, Союздорпроекте и других проектных и производственных организациях страны, куда его приглашали для проведения экспертиз и консультаций по конкретным вопросам строительства, испытаний, усиления и реконструкции мостовых сооружений.

Во второй половине 1960-х годов Александр Григорьевич организовал эффективно работавший межкафедральный семинар «Современные проблемы строительной механики», бессменным руководителем которого был. В 1970-е годы Александр Григорьевич в качестве главного редактора создал серию межвузовских сборников по теории сооружений. По результатам многочисленных исследований по динамике и надежности несущих конструкций мостов А.Г. Барченков подготовил докторскую диссертацию на тему: «Динамический расчет автодорожных мостов», которую успешно защитил в МАДИ в 1975 г. Основное содержание выполненных исследований было обобщено в одноименной монографии, где на основе новейших методов статистической динамики сооружений Александр Григорьевич создал стройную теорию оценки динамического воздействия автотранспортных средств на мосты различных систем: балочных, плитных, рамных и др. За эту работу, как за существенный вклад в теорию мостов, А.Г. Барченков был награжден медалью Н.С. Стрелецкого. Выполненные им исследования были ориентированы на создание принципиально новых алгоритмов и норм расчета искусственных сооружений.

Энергично и целеустремленно занимаясь экспериментальными и научными исследованиями в области теории автодорожных мостов, Александр Григорьевич сумел увлечь ею активных сотрудников кафедры и талантливых студентов. Наиболее успешные из них под его руководством защитили кандидатские диссертации, среди которых:

1. Сафронов В.С. – 1970 г. «Исследование колебаний конструктивно-ортотропных плит под действием движущихся по неровному пути механических систем, моделирующих автомобиль». Воронеж.
2. Котуков А.Н. – 1971 г. «Исследование колебаний балок под действием движущихся по неровному пути механических систем, моделирующих автомобиль». Воронеж.
3. Хмыров А.Ф. – 1980 г. «Исследования динамического воздействия нагрузки, движущейся по криволинейному пути, на тонкостенные системы». Воронеж.
4. Аверин А.Н. – 1983 г. «Колебания неразрезных балочных и тонкостенных систем под действием подвижной нагрузки». Днепропетровск.
5. Биджиев Р.Х. – 1984 г. «Динамический расчет неразрезных – конструктивно нелинейных сталежелезобетонных балок на подвижную нагрузку». Днепропетровск.
6. Чан Ким Тыонг – 1986 г. «Расчёт многоэтажных рам, сопротивляющихся совместно с упругим основанием». Ленинград.
7. Журавлев В.А. – 1986 г. «Расчет криволинейных тонкостенных стержней открытого профиля с учетом деформаций сдвига и инерции вращения на подвижную нагрузку». Днепропетровск.
8. Ефрюшин С.В. – 1987 г. «Развитие метода расчленения для расчета динамического воздействия подвижных нагрузок на комбинированные системы». Воронеж.
9. Петранин А.А. – 1989 г. «Расчет тонкостенных систем на импульсные воздействия». Воронеж.
10. Петреня Е.Н. – 1992 г. «Колебания комбинированных стержневых систем при кратковременных воздействиях». Воронеж.

Из их числа в дальнейшем двое стали докторами технических наук:

1. Сафронов В.С. – 1984 г. «Актуальные проблемы статики и динамики современных автодорожных мостов»
2. Биджиев Р.Х. – 1997 г. «Динамика балочных систем с переменными параметрами от специальных воздействий»

В результате появилась Воронежская научная школа по динамике автодорожных мостов. Благодаря большому объёму научных исследований, натурных испытаний, многочисленным публикациям и докладам созданная А.Г. Барченковым школа вскоре получила широкую известность не только в нашей стране, но и за рубежом. Приоритет Воронежской школы исследований динамики автодорожных мостов был подтвержден публикацией раздела в «Справочнике проектировщика» [6]. Кафедра строительной механики стала мощным центром по новейшим методикам диагностики состояния несущих конструкций. Научная, преподавательская и служебная деятельность А.Г. Барченкова как заведующего кафедрой, его личные качества, высокий научный авторитет в профессиональной среде, умение организовать работу и добиваться поставленных целей способствовали не только научному росту и авторитету кафедры строительной механики, но и ВИСИ в целом.

Перечислим основные и наиболее важные для фундаментальной науки и инженерной практики результаты научных исследований А.Г. Барченкова, изложенные в многочисленных публикациях:

− по данным натурных исследований на реальных объектах получены значения параметров, отражающих особенности движения автомобилей по мостовым сооружениям: интенсивность, состав, уровень загруженности, скорости движения, взаимное расположение автомобилей и др. По этим данным построена статистическая модель транспортного потока, используемая при оценках долговечности и остаточного ресурса транспортных сооружений;

− с использованием корреляционной теории случайных процессов и полученных на реальных мостах обширных данных о параметрах и взаимного расположения неровностей разработаны вероятностные стационарные скалярная и векторная модели микропрофиля колей движения по мосту автомобилей, которые нашли применение при построении статистической динамики автодорожных мостов;

− средствами динамики сооружений построены нелинейные динамические расчетные схемы разнообразных автотранспортных средств в виде механических систем с конечным числом степеней свободы. В них реализуются действительные нелинейные характеристики деформативности шин и подвески, а также изменяющийся в зависимости от микропрофиля автодороги характер контакта пневматического колеса с дорогой. Они использованы в дальнейшем для изучения статистических характеристик динамического давления колес и осей автомобилей на проезжую часть: авто- и взаимных корреляционных функций. По результатам исследований были строго описаны случайные динамические воздействия на мосты для различных типов автотранспортных средств в широком диапазоне скоростей движений;

− получила перспективное развитие созданная трудами А.Н. Крылова, Виллиса, Стокса, В.В. Болотина, О.Б. Моргаевского и других известных механиков классическая теория динамического воздействия подвижной инертной нагрузки на упругие системы. В предлагаемой постановке не только учитывалась инертность несущей конструкции и движущегося груза, но и моделировалось подрессоривание груза при контакте с поддерживающей конструкцией. Разработанная методика представлена в двух вариантах в зависимости от наличия или отсутствия обратной связи в рассматриваемой колебательной системе «мост - движущиеся автомобили». В первом случае разрешающие дифференциальные уравнения движения связанной системы интегрировались совместно, во втором – из уравнений, описывающих колебания автомобилей, находились функции, описывающие давление автомобилей на проезжую часть. Эти данные использовались в дальнейшем для описания силовых возмущений при расчетах колебаний мостовых сооружений. Последний подход нашел широкое применение также и при исследованиях сложных динамических систем в других областях техники;

− при выборе появившейся в 60-е годы вычислительной электронной аппаратуры для реализации численных алгоритмов расчета изучались возможности аналоговой и цифровой техники. При этом сделан был правильный вывод о перспективности цифровых ЭВМ, который позволил обеспечить приоритет российских исследований;

− талант и инженерная интуиция проявились при выборе только что появившегося в 70-е годы перспективного метода конечных элементов. Были созданы первые конечно-элементные динамические модели мостовых сооружений и автотранспортных средств, получившие развитие в работах учеников и последователей;

− на основе используемых в теории автоматического управления динамических систем с переменными параметрами алгоритмов разработана в вероятностной постановке с применением корреляционной теории стационарных случайных процессов методика расчета совместных колебаний мостового сооружения и движущихся по неровной проезжей части с постоянной скоростью одиночного экипажа или колонны автомобилей. Её реализация позволяет еще на стадии проектирования мостового сооружения прогнозировать динамический эффект от проезда с определенной скоростью конкретного автотранспортного средства, оценивать влияние на уровень колебаний состояния проезжей части, выбирать оптимальный режим эксплуатации мостового сооружения. Для этого предложено строить линии и поверхности влияния дисперсии изменения перемещений, усилий и напряжений в характерных сечениях несущих элементов;

− с целью учета геометрической, физической и конструктивной нелинейностей при изучении колебаний мостовых сооружений от проезда автомобилей по неровной поверхности проезжей части разработан метод статистических испытаний, заключающийся в многократном моделировании проезда одиночных автомобилей и их колонн. После построения и выравнивания получаемых статистических рядов для выходных случайных параметров: перемещений, усилий, напряжений подходящими аналитическими законами распределений - предложены достаточно достоверные оценки прочности и выносливости конструкций;

− наряду с построенными путем расчетов линиями и поверхностями влияния дисперсии колебаний строились экспериментальные аналоги по данным динамических испытаний эксплуатирующихся мостов, которые позволяли оценивать динамические качества транспортного сооружения;

− разработанные методики, алгоритмы и программы детерминированного и вероятностного расчета мостовых сооружений на подвижную нагрузку нашли применение в решении ряда важных практических задач мостостроения. По заказу ПромтрансНИИпроект (г. Москва) выполнены исследования динамического воздействия карьерных автомобилей на железобетонные балочные пролетные строения, результаты которых по рекомендуемым параметрам динамических коэффициентов включены в нормативный документ СНиП 2.05.03-84. По заказу РосдорНИИ (г. Москва) изучалось влияние образующихся при провисаниях от ползучести бетона переломов профиля проезжей части многопролетных разрезных железобетонных мостов на динамический эффект при движении автомобилей. Эти данные использованы для определения рекомендуемых СНиП 2.05.03-84 максимально допустимых углов перелома профиля над опорами;

− с применением новейших достижений теории выбросов стационарных случайных процессов предложена имеющая важное практическое значение вычислительная схема оценки прочности, выносливости и надежности несущих конструкций мостовых сооружений. Эта методика позволяет оценить остаточный ресурс транспортного сооружения при его моральном и физическом старении;

− опыт, полученный при обследованиях и испытаниях автодорожных мостов, привел к необходимости изучения многочисленных дефектов и повреждений с позиций системного анализа. Правильность выбранной классификации была доказана всем дальнейшем развитиям мостовой науки.

Ученики и последователи А.Г. Барченкова продолжают успешно развивать это научное направление под руководством его ученика и последователя заслуженного работника Высшей школы РФ, чл.-корр. АЕ, д-ра техн. наук, проф. Сафронова В.С. и зав. каф. строительной механики, к. т. н., доц. Ефрюшина С.В. В ВИСИ – ВГАСА - ВГТУ по настоящее время выполняют диагностику, обследование технического состояния мостов, статические и динамические испытания мостовых сооружений по всей территории России, разрабатывают новые методы и программы расчета различных инженерных сооружений. Мостоиспытательная лаборатория, созданная Александром Григорьевичем при кафедре строительной механики, со временем развилась в научно-испытательный центр «Дормост». К настоящему времени учениками А.Г. Барченкова и В.С. Сафронова защищено более 20 диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и 2 диссертации на соискание ученой степени доктора наук. На кафедре строительной механики издаётся научный журнал «Строительная механика и конструкции», эффективно работает аспирантура. Широкий диапазон дисциплин, большой коллектив высококвалифицированных и авторитетных педагогов, одних из лучших в отрасли, тесно связанных с практикой, позволили в 2004 г. открыть магистратуру по программе «Теория и проектирование зданий и сооружений» - современную площадку для новых научных исследований, основоположником которых был Александр Григорьевич Барченков.

Профессор А.Г. Барченков и сегодня является примером руководителя, сочетавшего эффективные формы, методики и традиции образования, постоянно находившегося в творческом поиске, сумевшего воплотить в жизнь смелые планы совершенствования российского образования и науки. Ниже приводятся основные научные публикации доктора технических наук, профессора Барченкова Александра Григорьевича;

1. Барченков А.Г. Динамика сооружений [Текст] : учеб. пособие / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков, В. А. Баранов. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. – 192 с.

2. Барченков А.Г. Введение в динамику сооружений [Текст] : учеб. пособие. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1978. – 90 с.
3. Барченков А.Г. Метод конечных элементов [Текст]. – Воронеж :[б. и.], 1975.
4. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов [Текст]. – М.: Транспорт, 1976. – 199 с.
5. Барченков А.Г. Динамика автодорожных мостов [Текст] / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков, В. С. Сафронов // Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций: справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1986. – С. 327-349.
6. Барченков А.Г. Динамическое действие подвижной нагрузки на деревянные автодорожные мосты [Текст]: науч. сообщение. – М.: Изд-во Мин-ва ком. хоз-ва, 1954. – 34 с.
7. Барченков А.Г. Исследование динамического действия подвижной нагрузки на автодорожные мосты [Текст]: дис. …канд. техн. наук. – М.: МАДИ, 1954. – 152 с.
8. Барченков А.Г. О динамическом действии автомобильной нагрузки на металлические мосты, объединенные с железобетонной плитой [Текст] // Автомобильные дороги. – 1958. – N 9.
9. Барченков А.Г. О применении упруго-присоединенного груза в качестве виброгасителя для многопролетных неразрезных балок [Текст] // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1958. – N 6. – С. 50-55.
10. Барченков А.Г. Сопоставления опытных и расчетных данных по учету стесненного кручения в мостах с открытым профилем поперечного сечения [Текст]/ А.Г. Барченков, М. И. Вестфрид, Е. А. Демков // Изв. вузов. Строительство. – 1961. – N 2. – С. 165-166.
11. Барченков А.Г. Теоретическое и экспериментальное исследование гашения колебаний двух пролетной неразрезной балки [Текст] // Труды ВИСИ. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1961. – Сб. 8: Строительная механика и конструкции. – С. 159-174.
12. Барченков А.Г. Частоты свободных колебаний неразрезных и консольно-балочных систем [Текст] // Труды ВИСИ. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1961. – Сб. 8: Строительная механика и конструкции. – С. 127-158.
13. Барченков А.Г. К определению частот свободных колебаний регулярных неразрезных балок на упругих инертных опорах [Текст] // Научные труды. – Воронеж : [б. и.], 1962. – Сб. N 9. – С. 349-361.
14. Барченков А.Г. К определению частот свободных колебаний регулярных шарнирных цепей на упругих инертных опорах [Текст] // Исследования по теории сооружений : сб. статей. – М.: Госстройиздат, 1962. – Вып. XI. – С. 83-89.
15. Барченков А.Г. Об одном признаке общей устойчивости рам [Текст] // Строительная механика и расчет сооружений. – 1962. – N 4. – С. 29-31.
16. Свободные колебания некоторых рамно-консольных систем [Текст] / А.Г. Барченков, Е.А. Демков, Р. И. Мальцев, Л. И. Туровский // Строительная механика и расчет сооружений. -1962. – N 6. – С. 44-49.
17. Барченков А.Г. Об одной особенности резонансных явлений в системе с произвольным числом степеней свободы при наличии сопротивления движению [Текст] // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1963. – N 1. – С. 12-17.
18. Барченков А.Г. Колебания плоских рам и балок под действием подвижных периодических сил [Текст] / А.Г. Барченков, Р. И. Мальцев // Теория сооружений и конструкций : сб. трудов. – Воронеж : [б. и.], 1964. – N 10, вып. 1.-С. 60-89.

19. Свободные колебания рамно-консольных систем с подвесными пролетами [Текст] / А.Г. Барченков Р. И., Мальцев и др. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1964. – N 3. – С. 34-37.
20. Некоторые результаты изучения колебаний балочного моста на АВМ [Текст] / А.Г. Барченков, Л. И. Косарева, Н. С. Дробова, А. Н. Котуков // Теория сооружений и конструкций : сб. трудов. – Воронеж : [б. и.], 1967. – N 13, вып. 1. – С. 83-92.
21. О моделировании основной задачи динамики балочных мостов на АВМ [Текст] / А.Г. Барченков Л. И., Косарева, Н. С. Дробова, А. Н. Котуков // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научн.-иссл. и народно-хоз. задач: сб. работ. – Воронеж : [б. и.], 1967. – Вып. 1. – С. 39-58.
22. Барченков А.Г. Дифференциальные уравнения колебаний пластинок совместно с грузами, движущимися по неровной поверхности [Текст] / В. С. Сафронов // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научн.-иссл. и народно-хоз. задач: сб. работ: сб. работ. – Воронеж: [б.и.], 1968. – Вып. III. – С. 111-112.
23. Барченков А.Г. К динамическому расчету на ЭВМ рам и балок при движении подрессоренных грузов [Текст] / А.Г Барченков, Р. И. Мальцев, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968.-N 5. – С. 34-36.
24. Барченков А.Г. К расчету колебаний упругих систем под действием подрессоренных грузов, движущихся по неровному пути [Текст]/ А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов, Р. И. Мальцев // Сборник трудов ВИСИ. – Воронеж: [б. и.], 1968. – N 15, вып. 4 : Теория и испытание сооружений. – С. 47-65.
25. Барченков А.Г. Описание и расчет на АВМ совместных колебаний балочных мостов и автомобилей [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, Л. И. Косарева // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научн.-иссл. и народно-хоз. задач: сб. работ: сб. работ. – Воронеж : [б. и.], 1968. – Вып. III. – С.52-71
26. Барченков А.Г. Преобразование дифференциальных уравнений колебаний некоторых стержневых систем совместно с подвижной нагрузкой для решения на АВМ [Текст] // Применение электронных вычислительных машин в строительной механике. – Киев: Наукова Думка, 1968. – С. 355-363.
27. Барченков А.Г. Моделирование на ЦВМ совместных колебаний упругих систем и подвижной нагрузки [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов, Л. Л. Орехова // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научн.-иссл. и народно-хоз. задач: сб. работ : сб. работ. – Воронеж : [б. и.], 1969. – Вып. IV. – С. 48-55.
28. Барченков А.Г. Некоторые результаты динамических испытаний автодорожных мостов [Текст] / А.Г. Барченков, Р. И. Мальцев, В. А. Баранов, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Экспериментальные исследования инженерных сооружений. Методы, приборы, оборудование : материалы ко 2-му симпозиуму. – Воронеж: [б. и.], 1969. – С. 69-76.
29. Барченков А.Г. Расчет колебаний автодорожных мостов на ЦВМ по корреляционной теории [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научн.-иссл. и народно-хоз. задач: сб. работ: сб. работ. – Воронеж : [б. и.], 1969. – Вып. IV. – С. 43-48.
30. Барченков А.Г. К расчету колебаний мостов с решетчатыми фермами по аналогии с тонкостенными стержнями незамкнутого профиля [Текст] / А.Г. Барченков, Р. И.

Мальцев // Теория и испытание сооружений: труды ВИСИ. – Воронеж: [б.и.], 1970. – Т. 16, вып. 3. – С. 80-91.
31. Барченков А.Г. Колебания упругих систем под действием подвижной нагрузки как случайный процесс [Текст] / Р. И. Мальцев, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Теория и испытание сооружений: труды ВИСИ. – Воронеж: [б. и.], 1970. – Т. 16, вып. 3. – С. 62-79.
32. Барченков А.Г. Применение корреляционной теории для динамического расчета мостов [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1970. – N 4. – С. 43-48.
33. Барченков А.Г. Вынужденные колебания автодорожных мостов как случайный процесс [Текст] / А.Г. Барченков, Р. И. Мальцев, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Прикладная механика. – 1971. –Т. 7, вып. 3. – С. 92-98.
34. Барченков А.Г. К построению методики вероятностного динамического расчета автодорожных мостов [Текст] / А.Г. Барченков, Р. И. Мальцев, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Теория и испытание сооружений: труды ВИСИ. – Воронеж : [б. и.], 1971. – Т. 17, вып. 4. – С. 47-65.
35. Барченков А.Г. К расчету свободных колебаний сложных составных систем [Текст] // Теория и испытание сооружений : труды ВИСИ. – Воронеж : [б. и.], 1971. – Т. 17, вып. 4. – С. 78-85.
36. Барченков А.Г. О свободных и вынужденных колебаниях комбинированных систем [Текст] / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков, В. С. Сафронов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – N 4. – С. 42-45.
37. Барченков А.Г. Статистический анализ неровной поверхности проезжей части автодорожных мостов [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Труды государственного дорожного проектно-изыскательского и научно-исследовательского ин-та. – М.: [б. и.], 1972. – Вып. 3. – С. 96-106.
38. Барченков А.Г. К расчету случайных изгибно-крутильных колебаний балочных мостов при движении трехосного автомобиля с седельным полуприцепом [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков, В. С. Сафронов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1973. – N 4. – С. 134-141.
39. Барченков А.Г. О влиянии остаточных деформаций разрезных железобетонных мостов на их эксплуатационную надежность [Текст] / А.Г. Барченков, В. С. Сафронов, А. Г. Ожерельев // Строительство и эксплуатация искусственных сооружений. – М. : Гипродорнии, 1973. – Вып. 6. – С. 25-36.
40. Барченков А.Г. Расчет колебаний ферм под действием подвижной подрессоренной нагрузки [Текст] / А.Г. Барченков, В. С. Сафронов, А. Т. Аникин // Строительство и эксплуатация искусственных сооружений. – М. : Гипродорнии, 1973. – Вып. 6. – С. 76-94.
41. Барченков А.Г. Вероятностная оценка квазистатического и динамического действия подвижной нагрузки на автодорожные мосты [Текст] / Pr. nauk. Inst. inz. lad. Pwr. – 1975. -N 17. – С. 49-59.
42. Барченков А.Г. Обоснование экспериментального метода построения статистических линий влияния [Текст] / А.Г. Барченков, А. Н. Котуков // Теория и испытание сооружений. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1975. – Т. 13, вып. 2.
43. Барченков А.Г. Расчет надежности автодорожных мостов на основе вероятностных представлений о нагрузке и прочности [Текст] // Теория и испытание сооружений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1975. – Т. 13, вып. 2.
44. Барченков А.Г. Статистические характеристики случайных колебаний автодорожных мостов [Текст] / А.Г. Барченков, А. Т. Аникин // Теория и испытание сооружений. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1975. – Т. 13, вып. 2.

45. Барченков А.Г. Оценка надежности автодорожных мостов [Текст]/ А.Г. Барченков // Квазиметрия в транспортном строительстве. – М. : Транспорт, 1976.
46. Барченков А.Г. Оценка показателей безопасности конструкций мостов [Текст]/ А.Г. Барченков // Труды Всесоюз. науч.-иссл. ин-та транспортного строительства. – М.: Транспорт, 1976. – Вып. 100. – С. 45-52.
47. Барченков А.Г. К расчету равновесия и свободного движения плоских цепей [Текст]/ А.Г. Барченков, Н. Ф. Мочалов, В. С. Сафронов // Расчетные методы в строительстве: сб. науч. статей под ред. Б. С. Васильева. – М. : Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного ин-та, 1978.
48. Барченков А.Г. Описание движения плоских цепей [Текст] / А.Г. Барченков, Н. Ф. Мочалов, В. С. Сафронов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – N 1.–С. 48-51.
49. Барченков А.Г. О нормировании одиночных неровностей на мостах [Текст] / А.Г. Барченков, А.Н. Котуков, В. С. Сафронов // Совершенствование конструкций и методов содержания искусственных сооружений : тр. Гипродорнии. – Воронеж: [б. и.], 1979. – Вып. 23. – С. 51-60.
50. Барченков А.Г. Расчет свободного нелинейного движения существенного непологой гибкой нити [Текст] / А.Г. Барченков, В. С. Сафронов // Исследования висячих комбинированных конструкций. – Воронеж : [б. и.], 1979. – С. 3-8.
51. Барченков А.Г. Динамический расчет разрезных пролетных строений мостов, расположенных на кривых в плане [Текст] / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков, А. Ф. Хмыров // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – N 7. – С. 128-133.
52. Барченков А.Г. О динамическом воздействии тяжелых автомобилей и автопоездов на многопролетные мосты [Текст] / А.Г. Барченков, В. С. Сафронов, Р. Х. Биджиев // Транспортное стр-во. – 1980. – N 8. – С. 46-47.
53. Барченков А.Г. Описание колебаний упругой инертной системы от движущегося груза по криволинейному пути [Текст] / А.Г. Барченков, М. И. Красова, А. Ф. Хмыров // Теория и испытание сооружений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. унта, 1980. – Вып. 3. – С. 35-48.
54. Барченков А.Г. Статистическая обработка диаграмм динамических испытаний автодорожных балочных мостов [Текст] // Расчет прочности, устойчивости и колебаний элементов инженерных сооружений. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1981. – С. 77-84.
55. Барченков А.Г. Анализ данных динамических испытаний автодорожных балочных мостов [Текст] / А.Г. Барченков, Р. Х. Биджиев, А. Н. Котуков // Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983. – С. 43-54.
56. Барченков А.Г. Случайные колебания упругих систем при кинетическом возмущении и наличии вязкого сопротивления движению [Текст] / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков // Инженерные задачи статики, динамики и устойчивости сооружений. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1985. – С. 3-21.
57. Аверин А.Н. Динамический расчет неразрезных сталежелезобетонных пролетных строений мостов на действие колонн тяжелых автомобилей [Текст] / А.Н. Аверин, А.Г. Барченков, Р. Х. Биджиев, И. М. Кравцов // Изв. вузов. Строительство. – 1986. – N 8. – С. 99-103.
58. Барченков А.Г. Динамический расчет упругих систем при наличии сосредоточенных постоянных сил отпора [Текст] // Прикладные задачи теории сооружений. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. – С. 106-111.
59. Барченков А.Г. Динамическое действие подвижной нагрузки на упругие системы с промежуточными податливыми …[Текст] / А.Г. Барченков, А. Ф. Хмыров // Межвуз.

респ. сб. научн. трудов. – М.: Проблемы машиностроения, 1987. статике и динамике стержневых и тонкостенных систем. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1983. – С. 43-54.

Библиографический список

1. Сафронов В.С. Исследования по механике строящихся, реконструируемых и эксплуатируемых мостовых сооружений/ В.С. Сафронов, С.В. Ефрюшин// Промышленное и гражданское строительство. 2010. №9. С. 13-14
2. Сафронов В.С. Научные достижения кандидата технических наук, доцента кафедры строительной механики ВГАСУ А.И. Ананьина. //В.С. Сафронов, Н.А. Барченкова. Научн. вестник ВГАСУ. Серия: Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений. 2004. № 1. С. 5-11.
3. Барченков А.Г. Динамика сооружений [Текст] : учеб. пособие / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков, В. А. Баранов. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. – 192 с.
4. Сафронов В.С. Я. Б. Львин: выдающийся ученый и талантливый педагог/ В.С. Сафронов, С.В. Ефрюшин, Г.Е. Габриелян // Строительная механика и конструкции. 2015. Т. 1. № 10. С. 3-14.
5. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов [Текст]. – М.: Транспорт, 1976. – 199 с.
6. Барченков А.Г. Динамика автодорожных мостов [Текст] / А. И. Ананьин, А.Г. Барченков, В. С. Сафронов // Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций: справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1986. – С. 327-349.

References

1. Safronov V.S., Efryushin S.V. Research on the mechanics of construction, reconstruction and operated bridges. Industrial and Civil construction. 2010. №9. P.13-14.
2. Safronov V.S., Barchenkova N.A. Scientific achievements of PhD, associate professor of Structural Mechanics department of VGASU A.I. Ananjin. Scientific bulletin of VGASU. Series: Modern methods of static and dynamic calculation of building design of buildings and structures. 2004. № 1. P. 5-11.
3. Ananjin A.I., Barchenkov A.G., Baranov V.A. Structural dynamics: student book. Voronezh: Pub. House of Voronezh state university, 1987. – 192p.
4. Safronov V.S., Efryushin S.V., Gabrielyan G.E. LjvinYa. B.: outstanding scientist and talented teacher. Structural mechanics and constructions. 2015. V. 1. № 10. p. 3-14.
5. Barchenkov A.G. Dynamic calculation of highway bridges.- Moscow: Transport.- 199 p.
6. Ananjin A.I., Barchenkov A.G., Safronov V.S., Dynamic calculation of special engineering structures and constructions: designer's directory.- Moscow: Stroiizdat, 1986. - P. 327-349.

УДК 539.3:624.074.5

ПОСТРОЕНИЕ ВЫСОКОТОЧНЫХ КОСОУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛАСТИНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РАСЧЕТАХ КОСЫХ ПЛИТНО-БАЛОЧНЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

Е.Н. Петреня[1], А.А. Петранин[2]

Воронежский государственный технический университет[1,2]

Россия, г. Воронеж

[1] *Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики*

[2] *Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)2715230, e-mail: petranin.san@yandex.ru*

Приведены исходные дифференциальные уравнения строительной механики в матричной форме и уравнения метода конечных элементов с использованием прямоугольной и косоугольной систем координат. Построены высокоточные косоугольные конечные элементы для плоского напряженного состояния теории упругости и изгибного состояния по теории плиты Кирхгофа. Для этих состояний получены в аналитическом виде матрицы жесткости косоугольных элементов. По программному комплексу SERIAL с использованием данных элементов проведены численные исследования косых плитно-балочных конструкций автодорожных мостов.

Ключевые слова: программный комплекс, метод конечных элементов, косоугольные конечные элементы пластины.

CONSTRUCTION OF HIGHLY ACCURATE OBLIQUE-ANGLED PLATE FINITE ELEMENTS AND THEIR APPLICATION WHILE DESIGNING OBLIQUE PLATE-BRACED ROAD BRIDGE SPAN

E.N. Petrenya[1], A.A. Petranin[2]

Voronezh State Technical University

Voronezh Russia

[1] *PhD of Tech. Sc., Associate professor .of Department of Structural Mechanics*

[2] *PhD of Tech., Sc. Associate professor .of Department of Structural Mechanics, tel.:+7(473)2715230, e-mail: petranin.san@yandex.ru*

There are presented deferential equations of structural mechanics in matrix form and equations of finite elements method with application of rectangular and oblique coordinate system. Highly accurate oblique finite elements for two-dimensional for stresses of elasticity theory and bending state according to Kirchhoff–Love theory of plates are constructed. For these states there was analytically received stiffness matrix of oblique elements. Numerical researches of oblique plate – braced structures of road bridges were conducted by bundled software SERIAL using the given elements.

Keywords: bundled software, method of finite elements, oblique finite plate.

Косые автодорожные мосты обычно используются на практике для преодоления протяженных в поперечном направлении преград, пересекающих ось моста под непрямым углом. В случае преодоления водных преград угол косины обычно невелик, поэтому наиболее часто косые пролетные строения применяются в путепроводах, поскольку при пересечении транспортных магистралей угол косины может достигать и даже превышать 45°. При этом за счет косого расположения опор существенно уменьшается величина пролета и полная длина путепровода, что бывает особенно важно в тесных городских условиях.

Расчеты автодорожных мостов обычно выполняются на ЭВМ по специализированным программным комплексам (ПК), разрабатываемым на основе метода конечных элементов (МКЭ). Поэтому задача построения для таких ПК специальных пластинчатых конечных элементов (КЭ) с учетом косины является актуальной, причем к данным КЭ могут предъявляться особые требования.

Первое требование следует из того, что расчетная схема плитно-балочного пролетного строения моста может составляться из пластинчатых КЭ с различной пространственной ориентацией для моделирования плиты, ребер балок и диафрагм. Сопряжение этих элементов в узлах расчетной схемы должно быть жестким, что осуществляется соединением не только линейных, но и угловых степеней свободы (СС), принадлежащих к разным КЭ. Поэтому первым требованием к элементу является наличие в нем угловых СС, которое обеспечивается использованием высокоточных функций формы (ФФ) для аппроксимации поля перемещений, например кубических полиномов Эрмита.

Второе требование не является обязательным и относится к выбору способа получения матрицы жесткости КЭ из двух возможных вариантов – численного или аналитического. Недостаток первого способа – использование трудоемких численных процедур интегрирования, приводящих к погрешностям вычисления компонент матрицы и, как следствие, результатов расчета. Недостаток второго способа – сложность получения аналитических выражений для компонент матрицы и их последующего программирования на ЭВМ. Для построения косоугольных пластинчатых КЭ авторы выбрали второй способ, снизив трудоемкость аналитических преобразований путем использования программы Maple.

1. Построение косоугольных конечных элементов для плоского напряженного состояния теории упругости и плиты Кирхгофа

1.1. Исходные дифференциальные уравнения строительной механики

Дифференциальные уравнения равновесия, физические и геометрические уравнения строительной механики в матричной форме и в прямоугольной системе координат (ПСК) с аргументами x, y имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{R}\tilde{s} = \tilde{q}\,; \\ \tilde{s} = \tilde{C}\tilde{e}\,; \\ \tilde{e} = \tilde{G}\tilde{u}\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{u}, \tilde{q}$ – векторы усилий, деформаций, перемещений и внешней нагрузки бесконечно малого элемента (БМЭ) в ПСК; $\tilde{R}, \tilde{G}$ – дифференциальные оператор равновесия и геометрический оператор в ПСК; $\tilde{C}$ – матрица жесткости.

1.2. Связь координат и дифференциальных операторов в прямоугольной и косоугольной системах координат

Представим уравнение преобразования координат в виде

$$\tilde{x} = \tilde{\tilde{P}}\,\tilde{\tilde{\xi}} \ , \tag{2}$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{\tilde{\xi}}$ – векторы координат в ПСК и косоугольной системе координат (КСК); $\tilde{\tilde{P}}$ – матрица преобразования. Здесь и далее одинарный надстрочный символ обозначает принадлежность вектора или соответствующей ему матрицы к ПСК, а двойной – к КСК. Из рис. 1 для произвольной точки ***M*** косоугольной пластины имеем

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\tilde{P}} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ & c \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где θ – угол косины, а для краткости записей обозначено:

$$s = \sin\theta \ ; \qquad c = \cos\theta \ ; \qquad t = \tan\theta \ . \tag{4}$$

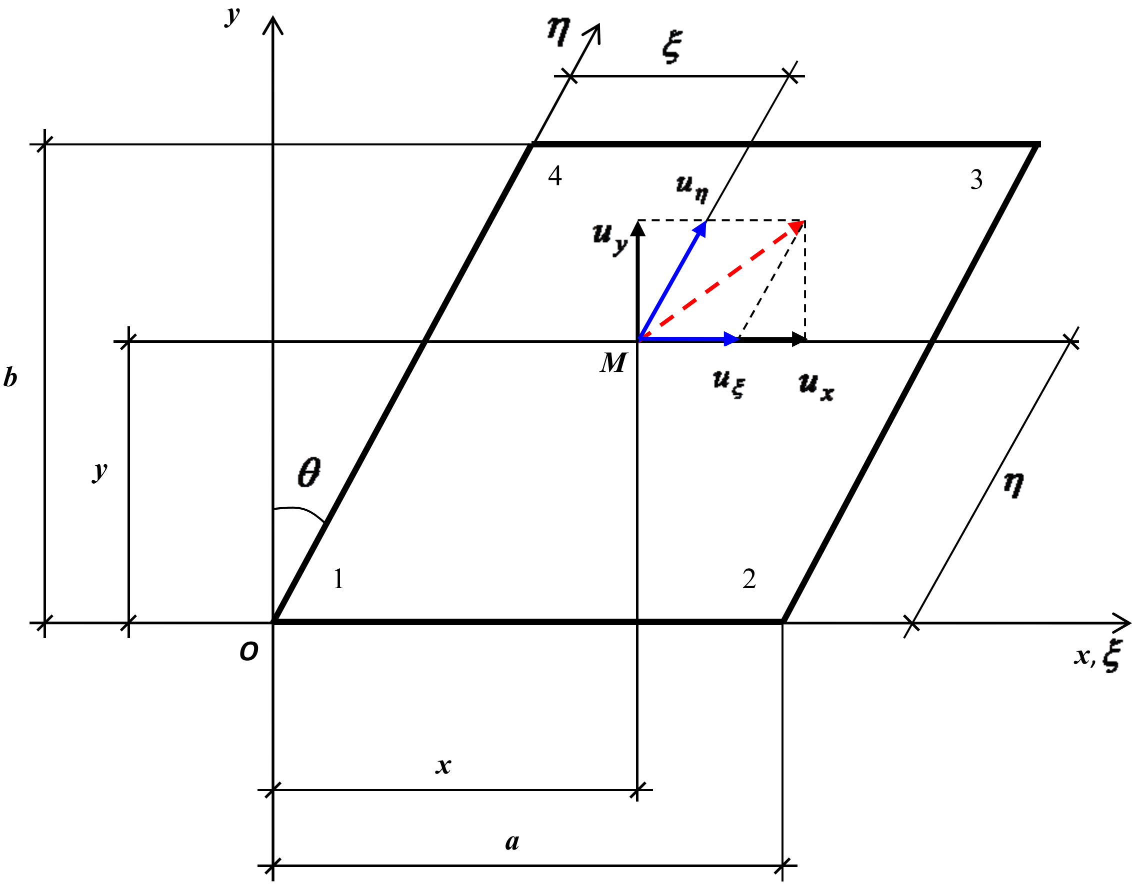


Рис. 1. Связь координат и перемещений в ПСК и КСК

Установим связь между производными произвольной функции φ с учетом (2), (3):

$$\begin{cases} \varphi^{\xi} = \varphi^{x} x^{\xi} + \varphi^{y} y^{\xi} = \varphi^{x} \ ; \\ \varphi^{\eta} = \varphi^{x} x^{\eta} + \varphi^{y} y^{\eta} = s\varphi^{x} + c\varphi^{y} \ , \end{cases} \tag{5}$$

или в матричной форме:

$$\tilde{\tilde{\partial}}\varphi = \tilde{J}\,\tilde{\partial}\varphi \ , \tag{6}$$

где векторы дифференцирования и матрица Якоби равны

$$\tilde{\tilde{\partial}} = \begin{bmatrix} \partial^{\xi} \\ \partial^{\eta} \end{bmatrix}; \qquad \tilde{J} = \begin{bmatrix} x^{\xi} & y^{\xi} \\ x^{\eta} & y^{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ s & c \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\partial} = \begin{bmatrix} \partial^{x} \\ \partial^{y} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Из (6) следует обратная зависимость:

$$\tilde{\partial}\varphi = \tilde{J}^{-1}\tilde{\tilde{\partial}}\varphi \ , \tag{8}$$

где обратная матрица Якоби согласно (7) равна

$$\tilde{J}^{-1} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} c & \\ -s & 1 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Представим зависимость (8) в развернутом виде для операторов дифференцирования:

$$\begin{cases} \partial^x = \partial^\xi \ ; \\ \partial^y = -t\,\partial^\xi + \dfrac{1}{c}\partial^\eta \ . \end{cases} \tag{10}$$

Для операторов двукратного дифференцирования из (10) получим

$$\begin{cases} \partial^{xx} = \partial^{\xi\xi} \ ; \\ \partial^{yy} = t^2\,\partial^{\xi\xi} - \dfrac{2t}{c}\partial^{\xi\eta} + \dfrac{1}{c^2}\partial^{\eta\eta} \ ; \\ \partial^{xy} = -t\,\partial^{\xi\xi} + \dfrac{1}{c}\partial^{\xi\eta} \ . \end{cases} \tag{11}$$

Зависимости (10), (11) позволяют перевести дифференциальные операторы $\tilde{R}, \tilde{G}$ для ПСК в операторы $\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{G}}$ для КСК:

$$\begin{cases} \tilde{R}(\partial^x, \partial^y) = \tilde{\tilde{R}}(\partial^\xi, \partial^\eta) \ ; \\ \tilde{G}(\partial^x, \partial^y) = \tilde{\tilde{G}}(\partial^\xi, \partial^\eta) \ . \end{cases} \tag{12}$$

1.3. Исходные уравнения метода конечных элементов

Аппроксимация поля перемещений конечного элемента в ПСК осуществляется в методе конечных элементов по формуле

$$\tilde{u} = \overline{\Phi}^T \overline{u} \ , \tag{13}$$

где $\overline{u}$ – вектор перемещений КЭ в ПСК по направлениям степеней свободы; $\overline{\Phi}$ – матрица функций формы КЭ в ПСК. Здесь и далее надстрочные символы «~» обозначают принадлежность вектора или матрицы к БМЭ, а «–» – к КЭ.

Применение к системе дифференциальных уравнений (1) метода Бубнова-Галеркина позволяет получить уравнение равновесия КЭ относительно перемещений в ПСК:

$$\overline{C}\,\overline{u} = \overline{g} + \overline{q} \ , \tag{14}$$

где $\overline{C}$ – матрица жесткости КЭ в ПСК, равная

$$\overline{C} = \iint_S (\overline{\Phi}\tilde{R}_s)\tilde{C}(\tilde{G}\,\overline{\Phi}^T)dS \ ; \tag{15}$$

$\overline{q}$ – соответствующий ей вектор нагрузки:

$$\overline{q} = \iint_S \overline{\Phi}\,\tilde{q}\,dS \ ; \tag{16}$$

$\overline{g}$ – вектор внешних усилий в ПСК, действующих на КЭ со стороны других элементов; $\tilde{R}_s$ – суммарный дифференциальный оператор равновесия в ПСК, связанный с $\tilde{G}$ соотношением статико-геометрической аналогии:

$$\tilde{R}_s = \tilde{G}^T \ . \tag{17}$$

В формулах (15), (16) интегрирование выполняется по площади поверхности пластинки S, причем в ПСК ее дифференциал равен $dS = dx\,dy$.

Отметим, что соотношение (17) согласно (15) обеспечивает симметрию матрицы жесткости $\overline{C}$ в ПСК независимо от принятых для КЭ функций формы. Однако непосредственное назначение ФФ в ПСК вызывает серьезные трудности, поскольку вдоль косых кромок КЭ одновременно изменяются обе координаты x и y, что не позволяет обеспечить совместность перемещений косоугольных элементов пластины по линиям их стыковки друг с другом.

Обойти данные трудности можно путем использования в качестве аргументов ФФ координат ξ и η в КСК, которые изменяются вдоль кромок КЭ только поодиночке. Это свойство позволяет представлять ФФ от двух аргументов в виде произведения двух независимых функций с раздельными аргументами ξ или η и тем самым гарантировать совместность перемещений по линиям стыковки КЭ при идентичном наборе СС в узлах стыкуемых элементов.

Представим связь между векторами перемещений, усилий и нагрузки в ПСК и КСК в виде

$$\begin{cases} \widetilde{u} = \widetilde{\widetilde{B}}\,\widetilde{\widetilde{u}}\,; \\ \widetilde{\widetilde{q}} = \widetilde{\widetilde{B}}^{-1}\widetilde{q}\,; \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \overline{\overline{u}} = \overline{K}\,\overline{u}\,; \\ \overline{g} = \overline{K}^{-1}\overline{\overline{g}}\,; \\ \overline{q} = \overline{K}^{-1}\overline{\overline{q}}\,, \end{cases} \tag{19}$$

где $\widetilde{\widetilde{B}}$, $\overline{K}$ – матрицы соответствующего преобразования векторов для БМЭ и КЭ; $\widetilde{\widetilde{u}}$, $\widetilde{\widetilde{q}}$ – векторы перемещений и нагрузки для БМЭ в КСК; $\overline{\overline{u}}$, $\overline{\overline{q}}$, $\overline{\overline{g}}$ – векторы перемещений, нагрузки и внешних усилий для КЭ в КСК.

Преобразуем уравнение равновесия КЭ (14) из ПСК в КСК, для чего умножим его слева на матрицу $\overline{K}$ и, после использования (19), получим

$$\overline{\overline{C}}_{*}\,\overline{\overline{u}} = \overline{\overline{g}} + \overline{\overline{q}}\ , \tag{20}$$

где матрица жесткости КЭ в КСК примет вид

$$\overline{\overline{C}}_{*} = \overline{K}\,\overline{C}\,\overline{K}^{-1}\ . \tag{21}$$

Последнее равенство показывает, что матрица жесткости КЭ при переходе к КСК утрачивает присущее ей в ПСК свойство симметрии, поскольку матрица $\overline{K}$ в общем случае не является ортогональной, то есть $\overline{K}^{-1} \neq \overline{K}^{T}$. Кроме этого, универсальные и специализированные программные комплексы на основе МКЭ обычно не используют КСК в качестве глобальной системы координат, поэтому уравнение равновесия КЭ целесообразнее представлять в ПСК согласно формуле (14).

Переведем аппроксимацию поля перемещений КЭ из ПСК в КСК, подставив в (13) выражения векторов перемещений в ПСК из (18), (19):

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \overline{\overline{\Phi}}^{T}\overline{\overline{u}}\ , \tag{22}$$

где $\overline{\overline{\Phi}}$ – матрица функций формы КЭ в КСК, равная

$$\overline{\overline{\Phi}}^{T} = \widetilde{\widetilde{B}}^{-1}\,\overline{\Phi}^{T}\,\overline{K}^{-1}\ , \tag{23}$$

откуда выразим соответствующую матрицу в ПСК

$$\overline{\Phi}^T = \tilde{\tilde{B}}\,\overline{\overline{\Phi}}^T\,\overline{K} \ . \qquad (24)$$

Последние формулы устанавливают связь между матрицами ФФ в ПСК и КСК. Подставляя (24) в (15) с учетом (17), получим новое выражение для матрицы жесткости в ПСК:

$$\overline{C} = \overline{K}^T\,\overline{\overline{C}}\,\overline{K} \ , \qquad (25)$$

где введена промежуточная матрица $\overline{\overline{C}}$, равная

$$\overline{\overline{C}} = \iint\limits_S (\overline{\overline{\Phi}}\,\tilde{\tilde{B}}^T\tilde{\tilde{G}}^T)\,\tilde{C}\,(\tilde{\tilde{G}}\,\tilde{\tilde{B}}\,\overline{\overline{\Phi}}^T)dS \ . \qquad (26)$$

Аналогичная подстановка в (16) обновляет выражение для вектора нагрузки:

$$\overline{q} = \overline{K}^T \iint\limits_S (\overline{\overline{\Phi}}\,\tilde{\tilde{B}}^T)\,\tilde{q}\,dS \ . \qquad (27)$$

Отметим, что промежуточная матрица $\overline{\overline{C}}$ симметрична и в соответствии с (21), (25) связана с матрицей жесткости $\overline{\overline{C}}_*$ в КСК соотношением:

$$\overline{\overline{C}}_* = \overline{K}\,\overline{K}^T\,\overline{\overline{C}} \ . \qquad (28)$$

Дифференциал по площади поверхности пластинки S в формулах (26), (27) выражается через дифференциалы координат в КСК по формуле [1]:

$$dS = \det(\tilde{J})\,d\xi\,d\eta \ , \qquad (29)$$

где определитель якобиана $\tilde{J}$ согласно с (7) равен:

$$\det(\tilde{J}) = c \ . \qquad (30)$$

Таким образом, построение косоугольного КЭ заключается в следующих операциях:

1. Перевод дифференциального геометрического оператора $\tilde{G}$ для ПСК в оператор $\tilde{\tilde{G}}$ для КСК по (10) – (12).
2. Получение матриц преобразования векторов $\tilde{\tilde{B}}$, $\overline{K}$ для БМЭ и КЭ согласно (18), (19).
3. Задание матрицы ФФ в КСК $\overline{\overline{\Phi}}$, представив ее компоненты в виде произведения двух независимых функций с раздельными аргументами ξ или η.
4. Формирование матрицы жесткости $\overline{C}$ и вектора правой части $\overline{q}$ в ПСК по (25) – (27).

1.4. Матрицы и операторы для плоского напряженного состояния

Векторы, матрицы и операторы, входящие в систему (1), для плоского напряженного состояния (ПНС) имеют вид

$$\tilde{s} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ S \end{bmatrix}; \qquad \tilde{C} = h\begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & \\ \nu E_1 & E_1 & \\ & & G \end{bmatrix}; \qquad \tilde{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} -\partial^x & & -\partial^y \\ & -\partial^y & -\partial^x \end{bmatrix}; \quad \tilde{G} = \tilde{R}_s^T = \begin{bmatrix} \partial^x & \\ & \partial^y \\ \partial^y & \partial^x \end{bmatrix}; \qquad (31)$$

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}; \qquad \tilde{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}; \qquad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где h – толщина пластинки.

Оператор $\tilde{\tilde{G}}$ (см. оператор $\tilde{G}$ в (31) и формулу (10)) и матрица $\tilde{\tilde{B}}$ (см. матрицу $\tilde{\tilde{P}}$ в (3) и рис.1), входящие в выражение (26), для ПНС равны

$$\tilde{\tilde{G}} = \left[\begin{array}{c:c} \partial^{\xi} & 0 \\ 0 & -t\partial^{\xi} + \frac{1}{c}\partial^{\eta} \\ -t\partial^{\xi} + \frac{1}{c}\partial^{\eta} & \partial^{\xi} \end{array}\right]; \quad \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{P}} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ & c \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Прямая и обратная связь между линейными перемещениями в ПСК и КСК (см. рис. 1) аналогична формулам преобразования координат (2), (3) и в развернутом виде равна

$$\begin{cases} u_x = u_\xi + s\,u_\eta\,; \\ u_y = \quad\; c\,u_\eta\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_\xi = u_x - t\,u_y\,; \\ u_\eta = (1/c)\,u_y\,. \end{cases} \tag{33}$$

В качестве степеней свободы в узлах КЭ дополнительно к линейным перемещениям используем и угловые перемещения, показанные на рис. 2. В графических изображениях этих перемещений использованы стрелки в виде плоских треугольников, поперечная сторона которых ориентирована параллельно поворачивающейся линии, мысленно нанесенной на КЭ. Такое графическое изображение позволяет разделить угловые перемещения, имеющие общую ось поворота, но относящиеся к разным кромкам элемента.

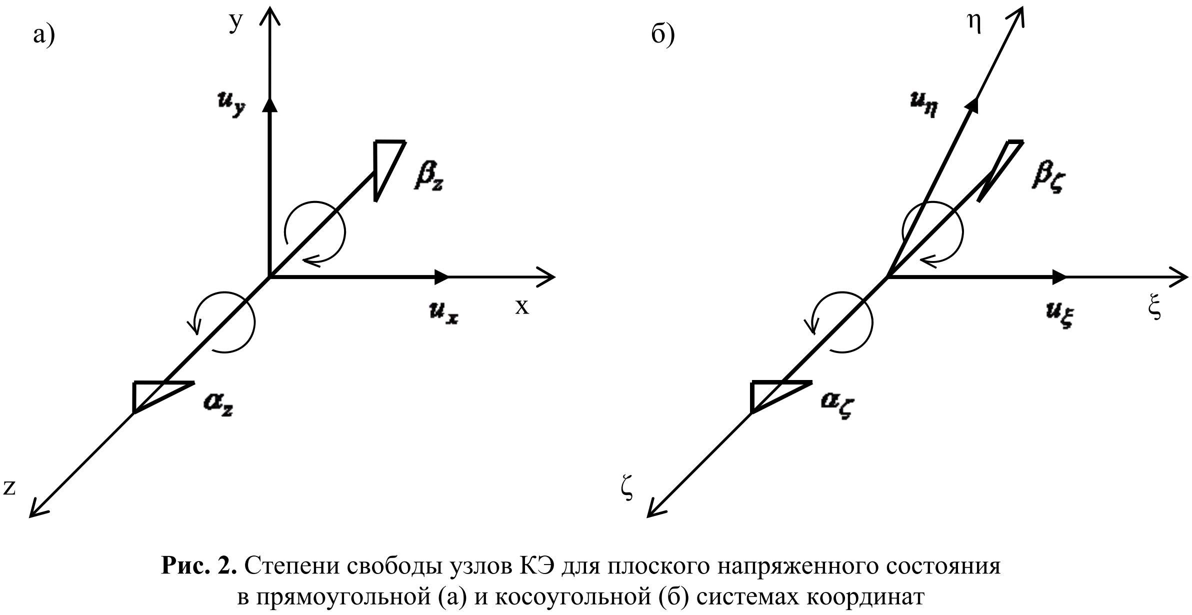


Рис. 2. Степени свободы узлов КЭ для плоского напряженного состояния в прямоугольной (а) и косоугольной (б) системах координат

Дифференциальные зависимости между угловыми и линейными перемещениями в ПСК и КСК имеют вид

$$\begin{cases} \beta_z = u_x^y ; \\ \alpha_z = u_y^x ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_\zeta = c\, u_\xi^\eta ; \\ \alpha_\zeta = c\, u_\eta^\xi . \end{cases} \tag{34}$$

Здесь множитель $c = \cos\theta$ согласно (4) учитывается в зависимостях для КСК вследствие того, что оси ξ и η не ортогональны.

Для формирования матрицы $\overline{K}$ преобразования векторов перемещений по (19) необходимо дополнительно к (33) установить связь между угловыми перемещениями в ПСК и КСК. Подставляя (33-2) в (34-2) с учетом (34-1), (7), получим

$$\begin{cases} \beta_\zeta = c\, u_\xi^\eta = c\,(u_x^\eta - t\, u_y^\eta) = [u_x^x x^\eta + u_x^y y^\eta - t\,(u_y^x x^\eta + u_y^y y^\eta)] = c^2[\beta_z + t\,(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - t^2 \alpha_z] ; \\ \alpha_\zeta = c\, u_\eta^\xi = u_y^\xi = u_y^x x^\xi + u_y^y y^\xi = \alpha_z . \end{cases} \tag{35}$$

Входящие в выражение (35-1) продольные деформации в ПСК не входят в планируемый набор СС узлов КЭ, поэтому их необходимо выразить через линейные и угловые перемещения, входящие в данный набор. Для этого сначала найдем выражения продольных деформаций в КСК с учетом (34-2), (33-2), (35):

$$\begin{cases} \varepsilon_\xi = \varepsilon_x ; \\ \varepsilon_\eta = s\, u_\xi^\eta + u_\eta^\eta = \dfrac{s}{c} \beta_\zeta + \dfrac{1}{c} u_y^\eta = s\,c\,[\beta_z + t\,(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - t^2 \alpha_z] + \varepsilon_y + t\, \alpha_z = \\ \quad = c^2 [t^2 \varepsilon_x + t\,(\beta_z + \alpha_z) + \varepsilon_y] . \end{cases} \tag{36}$$

Отметим, что подробный вывод формул для углового перемещения и деформации отрезка с произвольной ориентацией, аналогичных (35-1) и (36-2), приведен в [2].

Вычитая в (36) из первой строки вторую и выражая из полученного равенства разность деформаций в ПСК, будем иметь

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{1}{c^2} (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta) + t\,(\beta_z + \alpha_z) . \tag{37}$$

Подставляя (37) в (35), окончательно получим связь между угловыми перемещениями в ПСК и КСК:

$$\begin{cases} \beta_\zeta = \beta_z + t\,(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta) ; \\ \alpha_\zeta = \alpha_z . \end{cases} \tag{38}$$

Полагаем, что входящие в (38) продольные деформации вдоль каждой кромки КЭ постоянны. Занумеруем узлы элемента начиная с узла в начале координат и в направлении против часовой стрелки (см. рис. 1). Выразим продольные деформации в узлах КЭ через линейные степени свободы в ПСК:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi 1} = \varepsilon_{\xi 2} = \dfrac{1}{a} (-u_{x1} + u_{x2}) ; \\ \varepsilon_{\xi 3} = \varepsilon_{\xi 4} = \dfrac{1}{a} (\ u_{x3} - u_{x4}) ; \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{\eta 1} = \varepsilon_{\eta 4} = \dfrac{c}{b} [s\,(-u_{x1} + u_{x4}) + c\,(-u_{y1} + u_{y4})] ; \\ \varepsilon_{\eta 2} = \varepsilon_{\eta 3} = \dfrac{c}{b} [s\,(-u_{x2} + u_{x3}) + c\,(-u_{y2} + u_{y3})] . \end{cases} \tag{39}$$

Здесь и далее в нижних индексах деформаций и СС добавлены номера узлов КЭ.

Представим векторы перемещений КЭ в КСК и ПСК и матрицу преобразования векторов $\overline{K}$, связанные соотношением (19-1), в блочном виде:

$$\overline{\overline{u}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{u}}_{\xi} \\ \overline{\overline{u}}_{\eta} \end{bmatrix}; \qquad \overline{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{\xi x} & \overline{K}_{\xi y} \\ \overline{K}_{\eta x} & \overline{K}_{\eta y} \end{bmatrix}; \qquad \overline{u} = \begin{bmatrix} \overline{u}_{x} \\ \overline{u}_{y} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

где каждый блок вектора включает как линейные, так и угловые СС:

$$\overline{\overline{u}}_{\xi} = \left[\begin{array}{c} u_{\xi 1} \\ u_{\xi 2} \\ u_{\xi 3} \\ u_{\xi 4} \\ \hline \beta_{\zeta 1} \\ \beta_{\zeta 2} \\ \beta_{\zeta 3} \\ \beta_{\zeta 4} \end{array}\right]; \qquad \overline{\overline{u}}_{\eta} = \left[\begin{array}{c} u_{\eta 1} \\ u_{\eta 2} \\ u_{\eta 3} \\ u_{\eta 4} \\ \hline \alpha_{\zeta 1} \\ \alpha_{\zeta 2} \\ \alpha_{\zeta 3} \\ \alpha_{\zeta 4} \end{array}\right]; \qquad \overline{u}_{x} = \left[\begin{array}{c} u_{x 1} \\ u_{x 2} \\ u_{x 3} \\ u_{x 4} \\ \hline \beta_{z 1} \\ \beta_{z 2} \\ \beta_{z 3} \\ \beta_{z 4} \end{array}\right]; \qquad \overline{u}_{y} = \left[\begin{array}{c} u_{y 1} \\ u_{y 2} \\ u_{y 3} \\ u_{y 4} \\ \hline \alpha_{z 1} \\ \alpha_{z 2} \\ \alpha_{z 3} \\ \alpha_{z 4} \end{array}\right]. \tag{41}$$

Тогда блоки матрицы $\overline{K}$ в соответствии с соотношениями (33-2) и (38) с учетом (39) будут равны

$$\overline{K}_{\xi x} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline -t_a + t\,t_b & t_a & & -t\,t_b & 1 & & & \\ -t_a & t_a + t\,t_b & -t\,t_b & & & 1 & & \\ & t\,t_b & t_a - t\,t_b & -t_a & & & 1 & \\ t\,t_b & & t_a & -t_a - t\,t_b & & & & 1 \end{array}\right];$$

$$\overline{K}_{\xi y} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -t & & & & & & & \\ & -t & & & & & & \\ & & -t & & & & & \\ & & & -t & & & & \\ \hline t_b & & & -t_b & 0 & & & \\ & t_b & -t_b & & & 0 & & \\ & t_b & -t_b & & & & 0 & \\ t_b & & & -t_b & & & & 0 \end{array}\right]; \tag{42}$$

$$\overline{K}_{\eta x} = \overline{0};$$

$$
\overline{K}_{\eta y} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
c^{-1} & & & & & & & \\
& c^{-1} & & & & & & \\
& & c^{-1} & & & & & \\
& & & c^{-1} & & & & \\
\hline
& & & & 1 & & & \\
& & & & & 1 & & \\
& & & & & & 1 & \\
& & & & & & & 1
\end{array}\right],
$$

где обозначено:

$$
t_a = \frac{t}{a}\ ; \qquad t_b = \frac{t\,c^2}{b}\ . \tag{43}
$$

По аналогии с (40) запишем также в блочном виде вектор перемещений БМЭ в КСК и соответствующую ему матрицу функций формы из соотношения (22):

$$
\tilde{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{bmatrix}; \qquad \overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\varphi}}_\xi & \\ & \overline{\overline{\varphi}}_\eta \end{bmatrix}. \tag{44}
$$

Входящие в матрицу $\overline{\overline{\Phi}}$ векторы ФФ в КСК представляются покомпонентными произведениями векторов, каждый из которых состоит из функций одного аргумента:

$$
\overline{\overline{\varphi}}_\xi = \left[\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \\ \hline \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{array}\right]_{(\xi)} * \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \hline b_1\gamma_1 \\ b_1\gamma_1 \\ b_1\gamma_2 \\ b_1\gamma_2 \end{array}\right]_{(\eta)}; \qquad \overline{\overline{\varphi}}_\eta = \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \hline a_1\gamma_1 \\ a_1\gamma_2 \\ a_1\gamma_2 \\ a_1\gamma_1 \end{array}\right]_{(\xi)} * \left[\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \hline \psi_1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \end{array}\right]_{(\eta)}, \tag{45}
$$

где символами «*» обозначена операция покомпонентного умножения, а в нижнем индексе перемножаемых векторов указаны в скобках аргументы ξ. или η для функций формы, являющихся компонентами данных векторов. Для ФФ использованы линейные функции и функции Эрмита, которые в безразмерном виде равны

$$
\begin{cases} \psi_1 = 1 - \chi; \\ \psi_2 = \chi; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 - 3\chi^2 + 2\chi^3; \\ \lambda_2 = 3\chi^2 - 2\chi^3; \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \chi - 2\chi^2 + \chi^3; \\ \gamma_2 = -\chi^2 + \chi^3, \end{cases} \tag{46}
$$

где χ – относительный безразмерный аргумент, принимаемый равным

$$
\chi = \begin{cases} \textit{для аргумента}\ \xi: & \xi/a; \\ \textit{для аргумента}\ \eta: & \eta/(b/c); \end{cases} \quad 0 \le \chi \le 1.
$$

Коэффициенты a_1 и b_1 при ФФ γ_1, γ_2 в (45) определяются из условий выполнения дифференциальных зависимостей (34-2) в узлах КЭ. Эти коэффициенты, а также используемые в дальнейшем для сокращения записей производные от них коэффициенты, равны:

$$a_1 = \frac{a}{c}\ ; \qquad b_1 = \frac{b}{c^2}\ ; \qquad a_2 = a_1^2\ ; \qquad b_2 = b_1^2\ ; \qquad c_1 = a_1 b_1\ . \tag{47}$$

Введем вспомогательные матрицы и векторы, обозначенные надстрочными символами «^»:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & 1 \\ 1 & \end{bmatrix};\ \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \\ & 1 \\ & 1 \end{bmatrix};\ \hat{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix};\ \hat{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix};\ \hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix};\ \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix}; \tag{48}$$

$$\hat{J}_a = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{A} \end{bmatrix}; \qquad \hat{K}_a = \begin{bmatrix} \hat{A} & \\ & a_1\hat{A} \end{bmatrix}; \qquad \hat{J}_b = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{B} \end{bmatrix}; \qquad \hat{K}_b = \begin{bmatrix} \hat{B} & \\ & b_1\hat{B} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Тогда векторы ФФ из (45) определяются компактными выражениями:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varphi}}_\xi = (\hat{J}_a\hat{\psi}(\xi)) * (\hat{K}_b\hat{\varepsilon}(\eta))\,; \\ \overline{\overline{\varphi}}_\eta = (\hat{K}_a\hat{\varepsilon}(\xi)) * (\hat{J}_b\hat{\psi}(\eta))\,; \end{cases} \tag{50}$$

Введем также матрицы, составленные из интегралов от различных произведений функций формы и их производных:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_{ij} = \int\limits_0^1 \hat{\psi}^i \hat{\psi}^{jT} d\chi\,; \\ \hat{\Psi}^*_{ij} = \int\limits_0^1 \hat{\psi}^i \hat{\varepsilon}^{jT} d\chi\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{E}^*_{ij} = \int\limits_0^1 \hat{\varepsilon}^i \hat{\psi}^{jT} d\chi \equiv \hat{\Psi}^{*T}_{ji}\,; \\ \hat{E}_{ij} = \int\limits_0^1 \hat{\varepsilon}^i \hat{\varepsilon}^{jT} d\chi\,, \end{cases} \tag{51}$$

где переменные i, j =0, 1 обозначают порядок производных от ФФ по безразмерному аргументу χ.

Представим промежуточную матрицу $\overline{\overline{C}}$ из (25) в блочной форме:

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{C}}_{\xi\xi} & \overline{\overline{C}}_{\xi\eta} \\ \overline{\overline{C}}_{\eta\xi} & \overline{\overline{C}}_{\eta\eta} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Тогда, подставляя в (26) определенные выше операторы и матрицы с использованием введенных обозначений, получим выражения для подматриц (52) в аналитической форме:

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\xi} = \frac{hb}{a}(E_1 + Gt^2)\overline{\overline{C}}_{\xi\xi 1} + \frac{ha}{b}G\,\overline{\overline{C}}_{\xi\xi 2} - hGt\,\overline{\overline{C}}_{\xi\xi 3}\ , \tag{53}$$

где

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\xi 1} = (\hat{J}_a \hat{\Psi}_{11} \hat{J}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{00} \hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{420}\left[\begin{array}{cccc:cccc} 156 & -156 & -54 & 54 & 22b_1 & -22b_1 & 13b_1 & -13b_1 \\ -156 & 156 & 54 & -54 & -22b_1 & 22b_1 & -13b_1 & 13b_1 \\ -54 & 54 & 156 & -156 & -13b_1 & 13b_1 & -22b_1 & 22b_1 \\ 54 & -54 & -156 & 156 & 13b_1 & -13b_1 & 22b_1 & -22b_1 \\ \hdashline 22b_1 & -22b_1 & -13b_1 & 13b_1 & 4b_2 & -4b_2 & 3b_2 & -3b_2 \\ -22b_1 & 22b_1 & 13b_1 & -13b_1 & -4b_2 & 4b_2 & -3b_2 & 3b_2 \\ 13b_1 & -13b_1 & -22b_1 & 22b_1 & 3b_2 & -3b_2 & 4b_2 & -4b_2 \\ -13b_1 & 13b_1 & 22b_1 & -22b_1 & -3b_2 & 3b_2 & -4b_2 & 4b_2 \end{array}\right];$$

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\xi 2} = (\hat{J}_a \hat{\Psi}_{00} \hat{J}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{11} \hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{180}\left[\begin{array}{cccc:cccc} 72 & 36 & -36 & -72 & 6b_1 & 3b_1 & 3b_1 & 6b_1 \\ 36 & 72 & -72 & -36 & 3b_1 & 6b_1 & 6b_1 & 3b_1 \\ -36 & -72 & 72 & 36 & -3b_1 & -6b_1 & -6b_1 & -3b_1 \\ -72 & -36 & 36 & 72 & -6b_1 & -3b_1 & -3b_1 & -6b_1 \\ \hdashline 6b_1 & 3b_1 & -3b_1 & -6b_1 & 8b_2 & 4b_2 & -b_2 & -2b_2 \\ 3b_1 & 6b_1 & -6b_1 & -3b_1 & 4b_2 & 8b_2 & -2b_2 & -b_2 \\ 3b_1 & 6b_1 & -6b_1 & -3b_1 & -b_2 & -2b_2 & 8b_2 & 4b_2 \\ 6b_1 & 3b_1 & -3b_1 & -6b_1 & -2b_2 & -b_2 & 4b_2 & 8b_2 \end{array}\right]; \qquad (54)$$

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\xi 3} = (\hat{J}_a \hat{\Psi}_{01} \hat{J}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{10} \hat{K}_b^T) + (\hat{J}_a \hat{\Psi}_{10} \hat{J}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{01} \hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{60}\left[\begin{array}{cccc:cccc} 30 & 0 & -30 & 0 & 0 & -6b_1 & 6b_1 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 30 & 6b_1 & 0 & 0 & -6b_1 \\ -30 & 0 & 30 & 0 & -6b_1 & 0 & 0 & 6b_1 \\ 0 & 30 & 0 & -30 & 0 & 6b_1 & -6b_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 6b_1 & -6b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ -6b_1 & 0 & 0 & 6b_1 & 0 & 0 & 0 & -b_2 \\ 6b_1 & 0 & 0 & -6b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6b_1 & 6b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\eta} = \overline{\overline{C}}_{\eta\xi}^T = ch(\nu E_1 - Gt^2)\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 1} + ch(1-t^2)G\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 2} +$$
$$+\frac{cthb}{a}[(1-\nu)E_1 - (1-t^2)G]\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 3} + \frac{ctha}{b}G\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 4}, \qquad (55)$$

где

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 1} = (\hat{J}_a \hat{\Psi}^*_{10} \hat{K}^T_a) * (\hat{K}_b \hat{E}^*_{01} \hat{J}^T_b) =$$

$$= \frac{1}{144}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 36 & 36 & -36 & -36 & 6a_1 & -6a_1 & 6a_1 & -6a_1 \\ -36 & -36 & 36 & 36 & -6a_1 & 6a_1 & -6a_1 & 6a_1 \\ -36 & -36 & 36 & 36 & -6a_1 & 6a_1 & -6a_1 & 6a_1 \\ 36 & 36 & -36 & -36 & 6a_1 & -6a_1 & 6a_1 & -6a_1 \\ \hline 6b_1 & 6b_1 & -6b_1 & -6b_1 & c_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 \\ -6b_1 & -6b_1 & 6b_1 & 6b_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 & c_1 \\ 6b_1 & 6b_1 & -6b_1 & -6b_1 & c_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 \\ -6b_1 & -6b_1 & 6b_1 & 6b_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 & c_1 \end{array}\right];$$

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 2} = (\hat{J}_a \hat{\Psi}^*_{01} \hat{K}^T_a) * (\hat{K}_b \hat{E}^*_{10} \hat{J}^T_b) =$$

$$= \frac{1}{144}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 36 & -36 & -36 & 36 & -6a_1 & 6a_1 & 6a_1 & -6a_1 \\ 36 & -36 & -36 & 36 & 6a_1 & -6a_1 & -6a_1 & 6a_1 \\ -36 & 36 & 36 & -36 & -6a_1 & 6a_1 & 6a_1 & -6a_1 \\ -36 & 36 & 36 & -36 & 6a_1 & -6a_1 & -6a_1 & 6a_1 \\ \hline -6b_1 & 6b_1 & -6b_1 & 6b_1 & c_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 \\ -6b_1 & 6b_1 & -6b_1 & 6b_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 & c_1 \\ 6b_1 & -6b_1 & 6b_1 & -6b_1 & c_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 \\ 6b_1 & -6b_1 & 6b_1 & -6b_1 & -c_1 & c_1 & -c_1 & c_1 \end{array}\right]; \qquad (56)$$

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 3} = (\hat{J}_a \hat{\Psi}^*_{11} \hat{K}^T_a) * (\hat{K}_b \hat{E}^*_{00} \hat{J}^T_b) =$$

$$= \frac{1}{60}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 21 & -21 & -9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 21 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 21 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & -21 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3b_1 & -3b_1 & -2b_1 & 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3b_1 & 3b_1 & 2b_1 & -2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2b_1 & -2b_1 & -3b_1 & 3b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b_1 & 2b_1 & 3b_1 & -3b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

$$\overline{\overline{C}}_{\xi\eta 4}=(\hat{J}_a\hat{\Psi}^*_{00}\hat{K}^T_a)*(\hat{K}_b\hat{E}^*_{11}\hat{J}^T_b)=$$

$$=\frac{1}{60}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
21 & 9 & -9 & -21 & 3a_1 & -2a_1 & 2a_1 & -3a_1\\
9 & 21 & -21 & -9 & 2a_1 & -3a_1 & 3a_1 & -2a_1\\
-9 & -21 & 21 & 9 & -2a_1 & 3a_1 & -3a_1 & 2a_1\\
-21 & -9 & 9 & 21 & -3a_1 & 2a_1 & -2a_1 & 3a_1\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

$$\overline{\overline{C}}_{\eta\eta}=\frac{c^2ha}{b}(E_1+Gt^2)\overline{\overline{C}}_{\eta\eta 1}+\frac{c^2hb}{a}[2(1-\nu)E_1t^2+(1-t^2)^2G]\overline{\overline{C}}_{\eta\eta 2}+$$
$$+c^2th[-(1-\nu)E_1+(1-t^2)G]\overline{\overline{C}}_{\eta\eta 3}, \tag{57}$$

где

$$\overline{\overline{C}}_{\eta\eta 1}=(\hat{K}_a\hat{E}_{00}\hat{K}^T_a)*(\hat{J}_b\hat{\Psi}_{11}\hat{J}^T_b)=$$

$$=\frac{1}{420}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
156 & 54 & -54 & -156 & 22a_1 & -13a_1 & 13a_1 & -22a_1\\
54 & 156 & -156 & -54 & 13a_1 & -22a_1 & 22a_1 & -13a_1\\
-54 & -156 & 156 & 54 & -13a_1 & 22a_1 & -22a_1 & 13a_1\\
-156 & -54 & 54 & 156 & -22a_1 & 13a_1 & -13a_1 & 22a_1\\
\hline
22a_1 & 13a_1 & -13a_1 & -22a_1 & 4a_2 & -3a_2 & 3a_2 & -4a_2\\
-13a_1 & -22a_1 & 22a_1 & 13a_1 & -3a_2 & 4a_2 & -4a_2 & 3a_2\\
13a_1 & 22a_1 & -22a_1 & -13a_1 & 3a_2 & -4a_2 & 4a_2 & -3a_2\\
-22a_1 & -13a_1 & 13a_1 & 22a_1 & -4a_2 & 3a_2 & -3a_2 & 4a_2
\end{array}\right];$$

$$\overline{\overline{C}}_{\eta\eta 2}=(\hat{K}_a\hat{E}_{11}\hat{K}^T_a)*(\hat{J}_b\hat{\Psi}_{00}\hat{J}^T_b)=$$

$$=\frac{1}{180}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
72 & -72 & -36 & 36 & 6a_1 & 6a_1 & 3a_1 & 3a_1\\
-72 & 72 & 36 & -36 & -6a_1 & -6a_1 & -3a_1 & -3a_1\\
-36 & 36 & 72 & -72 & -3a_1 & -3a_1 & -6a_1 & -6a_1\\
36 & -36 & -72 & 72 & 3a_1 & 3a_1 & 6a_1 & 6a_1\\
\hline
6a_1 & -6a_1 & -3a_1 & 3a_1 & 8a_2 & -2a_2 & -a_2 & 4a_2\\
6a_1 & -6a_1 & -3a_1 & 3a_1 & -2a_2 & 8a_2 & 4a_2 & -a_2\\
3a_1 & -3a_1 & -6a_1 & 6a_1 & -a_2 & 4a_2 & 8a_2 & -2a_2\\
3a_1 & -3a_1 & -6a_1 & 6a_1 & 4a_2 & -a_2 & -2a_2 & 8a_2
\end{array}\right]; \tag{58}$$

$$\overline{\overline{C}}_{\eta\eta 3}=(\hat{K}_a\hat{E}_{01}\hat{K}_a^T)*(\hat{J}_b\hat{\Psi}_{10}\hat{J}_b^T)+(\hat{K}_a\hat{E}_{10}\hat{K}_a^T)*(\hat{J}_b\hat{\Psi}_{01}\hat{J}_b^T)=$$

$$=\frac{1}{60}\left[\begin{array}{cccc:cccc}
30 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 6a_1 & -6a_1 \\
0 & -30 & 0 & 30 & 0 & 0 & -6a_1 & 6a_1 \\
-30 & 0 & 30 & 0 & -6a_1 & 6a_1 & 0 & 0 \\
0 & 30 & 0 & -30 & 6a_1 & -6a_1 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & -6a_1 & 6a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\
0 & 0 & 6a_1 & -6a_1 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\
6a_1 & -6a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\
-6a_1 & 6a_1 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Подставляя полученные в матрицу преобразования $\overline{K}$ по (40), (42) и промежуточную матрицу $\overline{\overline{C}}$ по (52)-(58) в (25), можно получить матрицу жесткости в ПСК $\overline{C}$. Однако окончательный вид данной матрицы не приводится в статье из-за громоздкости выражений для ее компонент. Отметим, что программирование этих выражений при реализации КЭ в программном комплексе также нецелесообразно ввиду большой трудоемкости и вероятности ошибок, поэтому выгоднее сформировать входящие в (25) матрицы раздельно, а их перемножение осуществить программными средствами.

Полученную в результате сложных выкладок матрицу жесткости во избежание ошибок необходимо тщательно тестировать. Одним из основных тестов является проверка равновесия КЭ при действии внешних усилий $\overline{g}$, действующих на него со стороны других элементов, и отсутствии нагрузки $\overline{q}$. При этом уравнение равновесия КЭ имеет вид

$$\overline{R}\,\overline{g}=\overline{R}\,\overline{C}\,\overline{u}=\overline{o}\ , \qquad (59)$$

где $\overline{o}$ – нулевой вектор, размер которого соответствует количеству уравнений равновесия; $\overline{R}$ – матрица равновесия КЭ, для данного элемента равная

$$\overline{R}=\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & -1 & -1 & -1 & -1 & \frac{-a-bt}{2} & \frac{a-bt}{2} & \frac{a+bt}{2} & \frac{-a+bt}{2} & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]. \qquad (60)$$

Каждая строка матрицы $\overline{R}$ соответствует одному из уравнений равновесия – проекции всех сил на оси *x*, *y,* и сумма моментов относительно центра КЭ.

Поскольку равенство (59) должно выполняться при любых перемещениях $\overline{u}$ по направлениям СС, оно может быть заменено обобщенным равенством:

$$\overline{R}\,\overline{C}=\overline{O}\ , \qquad (61)$$

где $\overline{O}$ – нулевая матрица. Проверка (61) для данного КЭ выполнена по программе Maple.

1.5. Матрицы и операторы для плиты Кирхгофа

Векторы, матрицы и операторы, входящие в систему (1) для плиты Кирхгофа, имеют вид

$$\widetilde{s} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_k \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{C} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{e} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_k \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{R} = -\begin{bmatrix} \partial^{xx} & \partial^{yy} & 2\partial^{xy} \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{G} = \widetilde{R}_s^T = -\begin{bmatrix} \partial^{xx} \\ \partial^{yy} \\ 2\partial^{xy} \end{bmatrix}; \tag{62}$$

$$\widetilde{u} = [u_z]; \qquad \widetilde{q} = [q_z]; \qquad D = \frac{E_1 h^3}{12}.$$

Оператор $\widetilde{\widetilde{G}}$ (см. оператор $\widetilde{G}$ в (62) и формулу (11)) и матрица $\widetilde{\widetilde{B}}$, входящие в выражение (26), для плиты Кирхгофа равны

$$\widetilde{\widetilde{G}} = \begin{bmatrix} -\partial^{\xi\xi} \\ -t^2\partial^{\xi\xi} + \dfrac{2t}{c}\partial^{\xi\eta} - \dfrac{1}{c^2}\partial^{\eta\eta} \\ 2t\,\partial^{\xi\xi} - \dfrac{2}{c}\partial^{\xi\eta} \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{\widetilde{B}} = [1]. \tag{63}$$

Связь между линейными перемещениями в ПСК и КСК

$$u_z = u_\zeta. \tag{64}$$

В качестве дополнительных степеней свободы в узлах КЭ используются угловые перемещения, показанные на рис. 3 (см. пояснения к рис. 2).

Дифференциальные зависимости между угловыми и линейными перемещениями в ПСК и КСК имеют аналогичный с (34) вид

$$\begin{cases} \alpha_x = u_z^y; \\ \beta_y = u_z^x; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_\xi = c\,u_\zeta^\eta; \\ \beta_\eta = c\,u_\zeta^\xi. \end{cases} \tag{65}$$

Для формирования матрицы $\overline{K}$ преобразования векторов перемещений по (19) дополнительно к (64) установим связь между угловыми перемещениями в ПСК и КСК. Подставляя (64) в (65-2) с учетом (65-1), (7), получим

$$\begin{cases} \alpha_\xi = c\,u_z^\eta = c(u_z^x x^\eta + u_z^y y^\eta) = c^2(\alpha_x + t\,\beta_y); \\ \beta_\eta = c\,u_z^\xi = c(u_z^x x^\xi + u_z^y y^\xi) = c\,\beta_y. \end{cases} \tag{66}$$

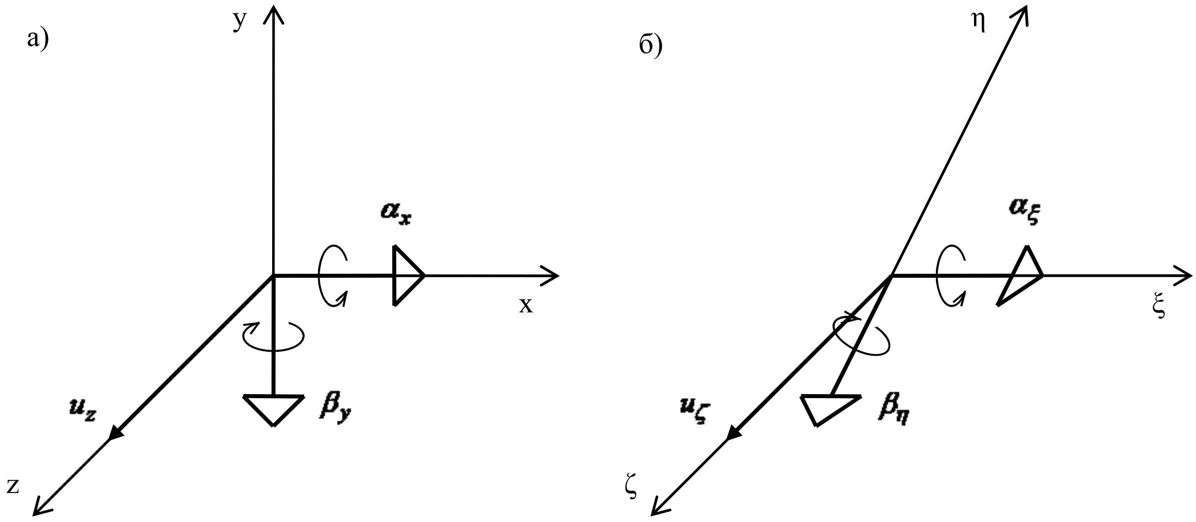


Рис. 3. Степени свободы узлов КЭ для изгибного напряженного состояния в прямоугольной (а) и косоугольной (б) системах координат.

Представим векторы перемещений КЭ в КСК и ПСК в виде

$$\overline{\overline{u}}_\zeta = \begin{bmatrix} u_{\zeta 1} \\ u_{\zeta 2} \\ u_{\zeta 3} \\ u_{\zeta 4} \\ \hdashline \alpha_{\xi 1} \\ \alpha_{\xi 2} \\ \alpha_{\xi 3} \\ \alpha_{\xi 4} \\ \hdashline \beta_{\eta 1} \\ \beta_{\eta 2} \\ \beta_{\eta 3} \\ \beta_{\eta 4} \end{bmatrix}; \qquad \overline{u}_z = \begin{bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \\ u_{z3} \\ u_{z4} \\ \hdashline \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} \\ \alpha_{x3} \\ \alpha_{x4} \\ \hdashline \beta_{y1} \\ \beta_{y2} \\ \beta_{y3} \\ \beta_{y4} \end{bmatrix}. \tag{67}$$

Тогда матрица $\overline{K}$ преобразования данных векторов по (19-1) в соответствии с соотношениями (64) и (66) будет равна

$$\overline{K}=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
1 &&&&&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&&&& \\
\hline
&&&& c^2 &&&& t\,c^2 &&& \\
&&&&& c^2 &&&& t\,c^2 && \\
&&&&&& c^2 &&&& t\,c^2 & \\
&&&&&&& c^2 &&&& t\,c^2 \\
\hline
&&&&&&&& c &&& \\
&&&&&&&&& c && \\
&&&&&&&&&& c & \\
&&&&&&&&&&& c
\end{array}\right]. \tag{68}$$

Вектор перемещений БМЭ в КСК и соответствующая ему матрица функций формы из соотношения (22) имеют вид

$$\tilde{\tilde{u}}=\left[u_\zeta\right]; \qquad \overline{\overline{\Phi}}=\left[\overline{\overline{\varphi}}_\zeta\right]. \tag{69}$$

Матрица $\overline{\overline{\Phi}}$ в данном случае содержит только один вектор ФФ в КСК, который представляется покомпонентным произведением двух векторов, состоящих только из функций Эрмита от одного аргумента согласно (46):

$$\overline{\overline{\varphi}}_\zeta=\left[\begin{array}{c}
\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_2\\ \lambda_1\\ \hline \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_2\\ \lambda_1\\ \hline a_1\gamma_1\\ a_1\gamma_2\\ a_1\gamma_2\\ a_1\gamma_1
\end{array}\right]_{(\xi)} * \left[\begin{array}{c}
\lambda_1\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_2\\ \hline b_1\gamma_1\\ b_1\gamma_1\\ b_1\gamma_2\\ b_1\gamma_2\\ \hline \lambda_1\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_2
\end{array}\right]_{(\eta)}. \tag{70}$$

Отметим, что в литературе по МКЭ при разработке аналогичных прямоугольных плитных конечных элементов с четырьмя узлами обычно использовали для каждой ФФ степенной полином от двух аргументов со слагаемыми вида $a_{mn}x^m y^n$, $m,n=0\div 3$. При этом количество неизвестных коэффициентов a_{mn}, равное 16, превышает равное 12 количество СС согласно (67), а значит, и соответствующее ему количество граничных условий на функцию формы, что делает задачу нахождения коэффициентов полинома неопределенной.

Выход из данной ситуации искали среди двух вариантов. В первом варианте избыточную часть коэффициентов полагали равной нулю, то есть использовали для ФФ усеченный полином. Однако при произвольном выборе нулевых коэффициентов полученные ФФ теряли обычную симметрию по отношению к друг другу, что приводило к нарушениям совместности перемещений на границах стыкуемых элементов.

Во втором варианте для ФФ использовали не усеченный, а полный полином, но при этом приходилось расширять набор СС в узлах КЭ, добавляя к традиционным линейным и угловым перемещениям u_z, u_z^y, u_z^x смешанные производные u_z^{xy}. Такие дополнительные СС создают специфичные проблемы при разработке программных комплексов на основе МКЭ, особенно в случае стыковки пластинчатых КЭ с различной пространственной ориентацией.

В работах [3]–[6] авторы применили третий вариант решения задачи, использовав для прямоугольных пластинчатых КЭ наборы СС и аппроксимацию ФФ, аналогичные с формулами (67) и (70), и фактически заменив обнуление избыточной части коэффициентов полиномов условиями равенства нулю смешанных производных u_z^{xy} в наборе СС. Благодаря этому данный вариант для плитных КЭ обеспечил совместность перемещений на границах стыкуемых элементов, а также прошел успешную апробацию в численных исследованиях.

Используем вспомогательные матрицы и векторы, введенные в (48), и скорректируем матрицы из (49):

$$\hat{K}_a = \begin{bmatrix} \hat{A} & \\ \hat{A} & \\ & a_1\hat{A} \end{bmatrix}; \qquad \hat{K}_b = \begin{bmatrix} \hat{B} & \\ & b_1\hat{B} \\ \hat{B} & \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Тогда вектор ФФ из (70) определится компактным выражением по аналогии с (50):

$$\overline{\overline{\varphi}}_\zeta = (\hat{K}_a\hat{\varepsilon}(\xi)) * (\hat{K}_b\hat{\varepsilon}(\eta)) \; . \tag{72}$$

Подставляя в (26) определенные выше операторы и матрицы с использованием матриц интегралов $\hat{E}_{ij}$ из (51), после преобразований получим промежуточную матрицу $\overline{\overline{C}}$ в аналитической форме

$$\overline{\overline{C}} = D\left[\frac{b}{a^3}(1+t^2)^2\,\overline{\overline{C}}_1 + \frac{a}{b^3}\overline{\overline{C}}_2 - \frac{t}{b^2}\overline{\overline{C}}_3 + \frac{1}{ab}(\overline{\overline{C}}_4 + t^2\overline{\overline{C}}_5) - \frac{t}{a^2}(1+t^2)\,\overline{\overline{C}}_6 + \frac{\nu}{ab}\overline{\overline{C}}_7\right], \tag{73}$$

где

$$\overline{\overline{C}}_1 = (\hat{K}_a\hat{E}_{22}\hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b\hat{E}_{00}\hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{70}\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
312 & -312 & -108 & 108 & 44b_1 & -44b_1 & 26b_1 & -26b_1 & 156a_1 & 156a_1 & 54a_1 & 54a_1 \\
-312 & 312 & 108 & -108 & -44b_1 & 44b_1 & -26b_1 & 26b_1 & -156a_1 & -156a_1 & -54a_1 & -54a_1 \\
-108 & 108 & 312 & -312 & -26b_1 & 26b_1 & -44b_1 & 44b_1 & -54a_1 & -54a_1 & -156a_1 & -156a_1 \\
108 & -108 & -312 & 312 & 26b_1 & -26b_1 & 44b_1 & -44b_1 & 54a_1 & 54a_1 & 156a_1 & 156a_1 \\
\hdashline
44b_1 & -44b_1 & -26b_1 & 26b_1 & 8b_2 & -8b_2 & 6b_2 & -6b_2 & 22c_1 & 22c_1 & 13c_1 & 13c_1 \\
-44b_1 & 44b_1 & 26b_1 & -26b_1 & -8b_2 & 8b_2 & -6b_2 & 6b_2 & -22c_1 & -22c_1 & -13c_1 & -13c_1 \\
26b_1 & -26b_1 & -44b_1 & 44b_1 & 6b_2 & -6b_2 & 8b_2 & -8b_2 & 13c_1 & 13c_1 & 22c_1 & 22c_1 \\
-26b_1 & 26b_1 & 44b_1 & -44b_1 & -6b_2 & 6b_2 & -8b_2 & 8b_2 & -13c_1 & -13c_1 & -22c_1 & -22c_1 \\
\hdashline
156a_1 & -156a_1 & -54a_1 & 54a_1 & 22c_1 & -22c_1 & 13c_1 & -13c_1 & 104a_2 & 52a_2 & 18a_2 & 36a_2 \\
156a_1 & -156a_1 & -54a_1 & 54a_1 & 22c_1 & -22c_1 & 13c_1 & -13c_1 & 52a_2 & 104a_2 & 36a_2 & 18a_2 \\
54a_1 & -54a_1 & -156a_1 & 156a_1 & 13c_1 & -13c_1 & 22c_1 & -22c_1 & 18a_2 & 36a_2 & 104a_2 & 52a_2 \\
54a_1 & -54a_1 & -156a_1 & 156a_1 & 13c_1 & -13c_1 & 22c_1 & -22c_1 & 36a_2 & 18a_2 & 52a_2 & 104a_2
\end{array}\right]$$

$$
\overline{\overline{C}}_2 = (\hat{K}_a \hat{E}_{00} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{22} \hat{K}_b^T) =
$$

$$
= \frac{1}{70}\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
312 & 108 & -108 & -312 & 156b_1 & 54b_1 & 54b_1 & 156b_1 & 44a_1 & -26a_1 & 26a_1 & -44a_1 \\
108 & 312 & -312 & -108 & 54b_1 & 156b_1 & 156b_1 & 54b_1 & 26a_1 & -44a_1 & 44a_1 & -26a_1 \\
-108 & -312 & 312 & 108 & -54b_1 & -156b_1 & -156b_1 & -54b_1 & -26a_1 & 44a_1 & -44a_1 & 26a_1 \\
-312 & -108 & 108 & 312 & -156b_1 & -54b_1 & -54b_1 & -156b_1 & -44a_1 & 26a_1 & -26a_1 & 44a_1 \\
\hline
156b_1 & 54b_1 & -54b_1 & -156b_1 & 104b_2 & 36b_2 & 18b_2 & 52b_2 & 22c_1 & -13c_1 & 13c_1 & -22c_1 \\
54b_1 & 156b_1 & -156b_1 & -54b_1 & 36b_2 & 104b_2 & 52b_2 & 18b_2 & 13c_1 & -22c_1 & 22c_1 & -13c_1 \\
54b_1 & 156b_1 & -156b_1 & -54b_1 & 18b_2 & 52b_2 & 104b_2 & 36b_2 & 13c_1 & -22c_1 & 22c_1 & -13c_1 \\
156b_1 & 54b_1 & -54b_1 & -156b_1 & 52b_2 & 18b_2 & 36b_2 & 104b_2 & 22c_1 & -13c_1 & 13c_1 & -22c_1 \\
\hline
44a_1 & 26a_1 & -26a_1 & -44a_1 & 22c_1 & 13c_1 & 13c_1 & 22c_1 & 8a_2 & -6a_2 & 6a_2 & -8a_2 \\
-26a_1 & -44a_1 & 44a_1 & 26a_1 & -13c_1 & -22c_1 & -22c_1 & -13c_1 & -6a_2 & 8a_2 & -8a_2 & 6a_2 \\
26a_1 & 44a_1 & -44a_1 & -26a_1 & 13c_1 & 22c_1 & 22c_1 & 13c_1 & 6a_2 & -8a_2 & 8a_2 & -6a_2 \\
-44a_1 & -26a_1 & 26a_1 & 44a_1 & -22c_1 & -13c_1 & -13c_1 & -22c_1 & -8a_2 & 6a_2 & -6a_2 & 8a_2
\end{array}\right]
$$

$$
\overline{\overline{C}}_3 = 2[(\hat{K}_a \hat{E}_{01} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{21} \hat{K}_b^T) + (\hat{K}_a \hat{E}_{10} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{12} \hat{K}_b^T)] =
$$

$$
= \frac{1}{5}\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 & & & & & -10b_1 & 10b_1 & & & & & \\
 & & & & 10b_1 & & & -10b_1 & & & & \\
 & & & & -10b_1 & & & 10b_1 & & & & \\
 & & & & & 10b_1 & -10b_1 & & & & & \\
\hline
 & 10b_1 & -10b_1 & & 5b_2 & & 5b_2 & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 \\
-10b_1 & & & 10b_1 & & -5b_2 & & -5b_2 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 \\
10b_1 & & & -10b_1 & 5b_2 & & 5b_2 & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 \\
 & -10b_1 & 10b_1 & & & -5b_2 & & -5b_2 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 \\
\hline
 & & & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & & & & \\
 & & & & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & & & & \\
 & & & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & & & & \\
 & & & & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & & & &
\end{array}\right] \quad (74)
$$

$$\overline{\overline{C}}_4 = 2(\hat{K}_a \hat{E}_{11} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{11} \hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{50}\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
144 & -144 & 144 & -144 & 12b_1 & -12b_1 & -12b_1 & 12b_1 & 12a_1 & 12a_1 & -12a_1 & -12a_1 \\
-144 & 144 & -144 & 144 & -12b_1 & 12b_1 & 12b_1 & -12b_1 & -12a_1 & -12a_1 & 12a_1 & 12a_1 \\
144 & -144 & 144 & -144 & 12b_1 & -12b_1 & -12b_1 & 12b_1 & 12a_1 & 12a_1 & -12a_1 & -12a_1 \\
-144 & 144 & -144 & 144 & -12b_1 & 12b_1 & 12b_1 & -12b_1 & -12a_1 & -12a_1 & 12a_1 & 12a_1 \\
\hline
12b_1 & -12b_1 & 12b_1 & -12b_1 & 16b_2 & -16b_2 & 4b_2 & -4b_2 & c_1 & c_1 & -c_1 & -c_1 \\
-12b_1 & 12b_1 & -12b_1 & 12b_1 & -16b_2 & 16b_2 & -4b_2 & 4b_2 & -c_1 & -c_1 & c_1 & c_1 \\
-12b_1 & 12b_1 & -12b_1 & 12b_1 & 4b_2 & -4b_2 & 16b_2 & -16b_2 & -c_1 & -c_1 & c_1 & c_1 \\
12b_1 & -12b_1 & 12b_1 & -12b_1 & -4b_2 & 4b_2 & -16b_2 & 16b_2 & c_1 & c_1 & -c_1 & -c_1 \\
\hline
12a_1 & -12a_1 & 12a_1 & -12a_1 & c_1 & -c_1 & -c_1 & c_1 & 16a_2 & -4a_2 & 4a_2 & -16a_2 \\
12a_1 & -12a_1 & 12a_1 & -12a_1 & c_1 & -c_1 & -c_1 & c_1 & -4a_2 & 16a_2 & -16a_2 & 4a_2 \\
-12a_1 & 12a_1 & -12a_1 & 12a_1 & -c_1 & c_1 & c_1 & -c_1 & 4a_2 & -16a_2 & 16a_2 & -4a_2 \\
-12a_1 & 12a_1 & -12a_1 & 12a_1 & -c_1 & c_1 & c_1 & -c_1 & -16a_2 & 4a_2 & -4a_2 & 16a_2
\end{array}\right]$$

$$\overline{\overline{C}}_5 = (\hat{K}_a \hat{E}_{02} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{20} \hat{K}_b^T) + (\hat{K}_a \hat{E}_{20} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{02} \hat{K}_b^T) + 4(\hat{K}_a \hat{E}_{11} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{11} \hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{50}\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
432 & -432 & 432 & -432 & 96b_1 & -96b_1 & -36b_1 & 36b_1 & 96a_1 & 36a_1 & -36a_1 & -96a_1 \\
-432 & 432 & -432 & 432 & -96b_1 & 96b_1 & 36b_1 & -36b_1 & -36a_1 & -96a_1 & 96a_1 & 36a_1 \\
432 & -432 & 432 & -432 & 36b_1 & -36b_1 & -96b_1 & 96b_1 & 36a_1 & 96a_1 & -96a_1 & -36a_1 \\
-432 & 432 & -432 & 432 & -36b_1 & 36b_1 & 96b_1 & -96b_1 & -96a_1 & -36a_1 & 36a_1 & 96a_1 \\
\hline
96b_1 & -96b_1 & 36b_1 & -36b_1 & 48b_2 & -48b_2 & 12b_2 & -12b_2 & 63c_1 & 8c_1 & -3c_1 & -8c_1 \\
-96b_1 & 96b_1 & -36b_1 & 36b_1 & -48b_2 & 48b_2 & -12b_2 & 12b_2 & -8c_1 & -63c_1 & 8c_1 & 3c_1 \\
-36b_1 & 36b_1 & -96b_1 & 96b_1 & 12b_2 & -12b_2 & 48b_2 & -48b_2 & -3c_1 & -8c_1 & 63c_1 & 8c_1 \\
36b_1 & -36b_1 & 96b_1 & -96b_1 & -12b_2 & 12b_2 & -48b_2 & 48b_2 & 8c_1 & 3c_1 & -8c_1 & -63c_1 \\
\hline
96a_1 & -36a_1 & 36a_1 & -96a_1 & 63c_1 & -8c_1 & -3c_1 & 8c_1 & 48a_2 & -12a_2 & 12a_2 & -48a_2 \\
36a_1 & -96a_1 & 96a_1 & -36a_1 & 8c_1 & -63c_1 & -8c_1 & 3c_1 & -12a_2 & 48a_2 & -48a_2 & 12a_2 \\
-36a_1 & 96a_1 & -96a_1 & 36a_1 & -3c_1 & 8c_1 & 63c_1 & -8c_1 & 12a_2 & -48a_2 & 48a_2 & -12a_2 \\
-96a_1 & 36a_1 & -36a_1 & 96a_1 & -8c_1 & 3c_1 & 8c_1 & -63c_1 & -48a_2 & 12a_2 & -12a_2 & 48a_2
\end{array}\right]$$

$$\overline{\overline{C}}_6 = 2[(\hat{K}_a \hat{E}_{12} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{10} \hat{K}_b^T) + (\hat{K}_a \hat{E}_{21} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{01} \hat{K}_b^T)] =$$

$$= \frac{1}{5} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 & & & & & & & & & & 10a_1 & -10a_1 \\
 & & & & & & & & & & -10a_1 & 10a_1 \\
 & & & & & & & & -10a_1 & 10a_1 & & \\
 & & & & & & & & 10a_1 & -10a_1 & & \\
\hline
 & & & & & & & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 \\
 & & & & & & & & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 \\
 & & & & & & & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 \\
 & & & & & & & & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 \\
\hline
 & & -10a_1 & 10a_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 5a_2 & & 5a_2 & \\
 & & 10a_1 & -10a_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & & -5a_2 & & -5a_2 \\
10a_1 & -10a_1 & & & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 5a_2 & & 5a_2 & \\
-10a_1 & 10a_1 & & & -2c_1 & 2c_1 & -2c_1 & 2c_1 & & -5a_2 & & -5a_2
\end{array} \right]$$

$$\overline{\overline{C}}_7 = (\hat{K}_a \hat{E}_{02} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{20} \hat{K}_b^T) + (\hat{K}_a \hat{E}_{20} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{02} \hat{K}_b^T) - 2(\hat{K}_a \hat{E}_{11} \hat{K}_a^T) * (\hat{K}_b \hat{E}_{11} \hat{K}_b^T) =$$

$$= \frac{1}{10} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 & & & & 12b_1 & -12b_1 & & & 12a_1 & & & -12a_1 \\
 & & & & -12b_1 & 12b_1 & & & & -12a_1 & 12a_1 & \\
 & & & & & & -12b_1 & 12b_1 & & 12a_1 & -12a_1 & \\
 & & & & & & 12b_1 & -12b_1 & -12a_1 & & & 12a_1 \\
\hline
12b_1 & -12b_1 & & & & & & & 12c_1 & c_1 & & -c_1 \\
-12b_1 & 12b_1 & & & & & & & -c_1 & -12c_1 & c_1 & \\
 & & -12b_1 & 12b_1 & & & & & & -c_1 & 12c_1 & c_1 \\
 & & 12b_1 & -12b_1 & & & & & c_1 & & -c_1 & -12c_1 \\
\hline
12a_1 & & & -12a_1 & 12c_1 & -c_1 & & c_1 & & & & \\
 & -12a_1 & 12a_1 & & c_1 & -12c_1 & -c_1 & & & & & \\
 & 12a_1 & -12a_1 & & & c_1 & 12c_1 & -c_1 & & & & \\
-12a_1 & & & 12a_1 & -c_1 & & c_1 & -12c_1 & & & &
\end{array} \right]$$

Подставляя полученные матрицу преобразования $\overline{K}$ по (68) и промежуточную матрицу $\overline{\overline{C}}$ по (73), (74) в (25), можно получить матрицу жесткости в ПСК $\overline{C}$.

Для данного КЭ, так же как и для элемента ПНС, была выполнена проверка его равновесия при действии внешних усилий согласно формуле (61), при этом матрица равновесия КЭ принята равной

$$\overline{R} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
-\frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
\frac{-a-bt}{2} & \frac{a-bt}{2} & \frac{a+bt}{2} & \frac{-a+bt}{2} & & & & & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array} \right]. \qquad (75)$$

Каждая строка матрицы $\overline{R}$ соответствует одному из уравнений равновесия – проекции всех сил на ось z и суммы моментов относительно осей x, y, перенесенных в центр КЭ.

2. Численные исследования косых плитно-балочных пролетных строений автодорожных мостов

Апробация построенных в предыдущем разделе косоугольных пластинчатых КЭ осуществлялась на примере расчетов косых плитно-балочных пролетных строений, выполненных по разработанному авторами специализированному ПК SERIAL.

Рассчитываемое пролетное строение составлялось из идеализированных неармированных балок таврового поперечного сечения, показанного на рис. 4. Принятые размеры балки: высота – 1,2 м, ширина полок – 2 м, толщина полок и стенки – 0,2 м, расчетный пролет – 20 м. Данным размерам соответствуют геометрические характеристики поперечного сечения: привязка центра тяжести сечения к верху балки (см. рис. 4) $\boldsymbol{z_c}$= 30 см, площадь $\boldsymbol{F}$=6000 см^2, момент инерции $\boldsymbol{J_y}$=6600000 см^4. Принятые характеристики материала балки: модуль упругости $\boldsymbol{E}$= 30000 МПа, коэффициент Пуассона $\boldsymbol{\nu}$= 0,2.

Поперечное сечение пролетного строения, составленное из 9-ти данных балок, приведено на рис. 5. Дискретизация плиты пролетного строения (полок балок) осуществлялась пластинчатыми КЭ с размерами $\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{b}$=1 м (см. рис. 1). Отметим, что эти элементы при изгибе балок испытывают как плоское напряженное состояние, обусловленное несовпадением по высоте центров тяжести плиты и балки, так и изгибное состояние вследствие деформаций всего пролетного строения.

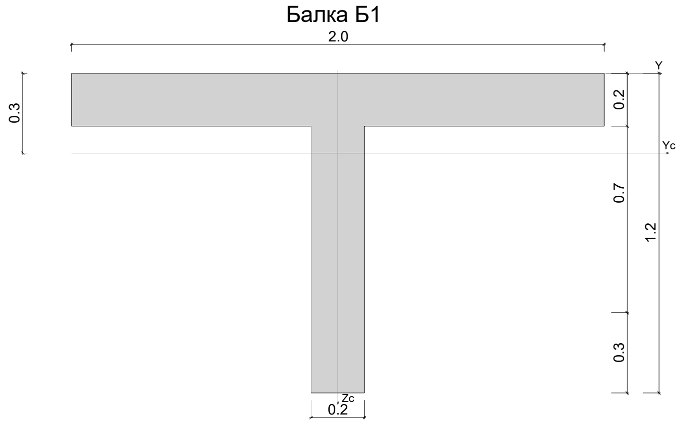


Рис. 4. Поперечное сечение балки

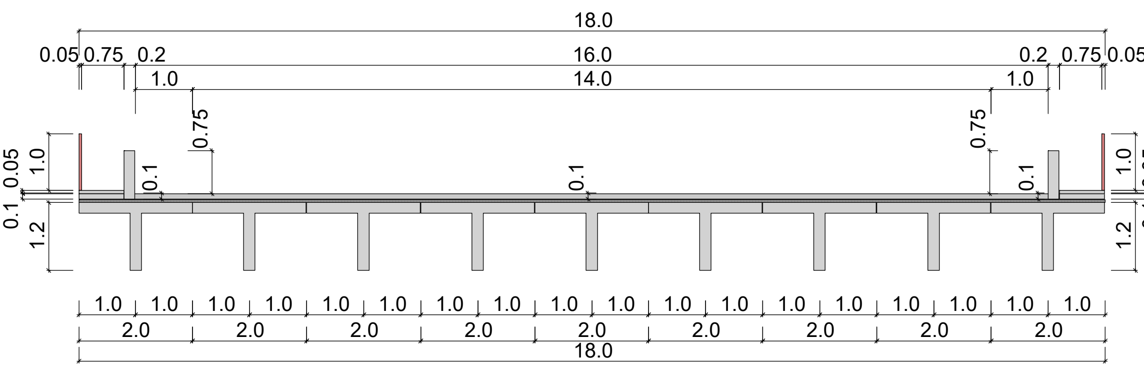


Рис. 5. Поперечное сечение пролетного строения

Угол косины пролетного строения был принят равным θ=45° (см. рис. 1). Для оценки результатов, полученных с использованием разработанных выше косоугольных пластинчатых элементов, все расчеты дублировались с применением в расчетной схеме аналогичных прямоугольных пластинчатых КЭ с теми же размерами a и b. При этом эффект косины пролетного строения достигался путем сдвижки опор каждой последующей балки на 2 м по сравнению с предыдущей балкой. Планы пролетного строения при использовании в расчетной схеме прямоугольных и косоугольных элементов приведены на рис. 6, 7.

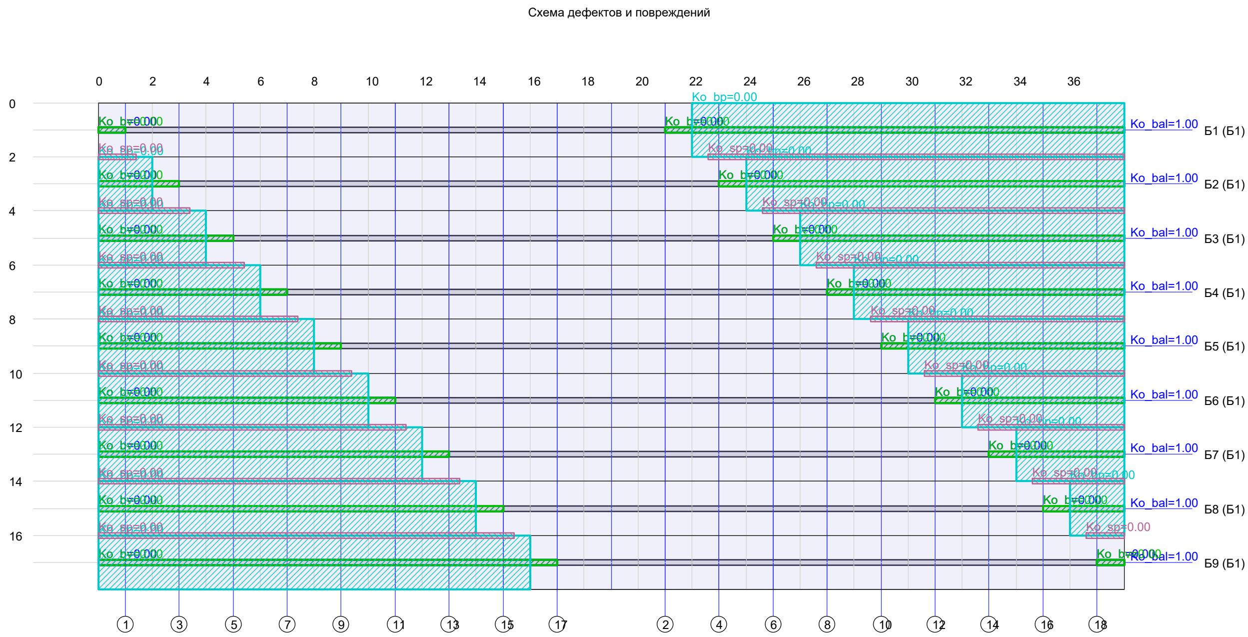


Рис. 6. План пролетного строения при использовании прямоугольных КЭ со сдвижкой опор балок и схема дефектов в консольных частях

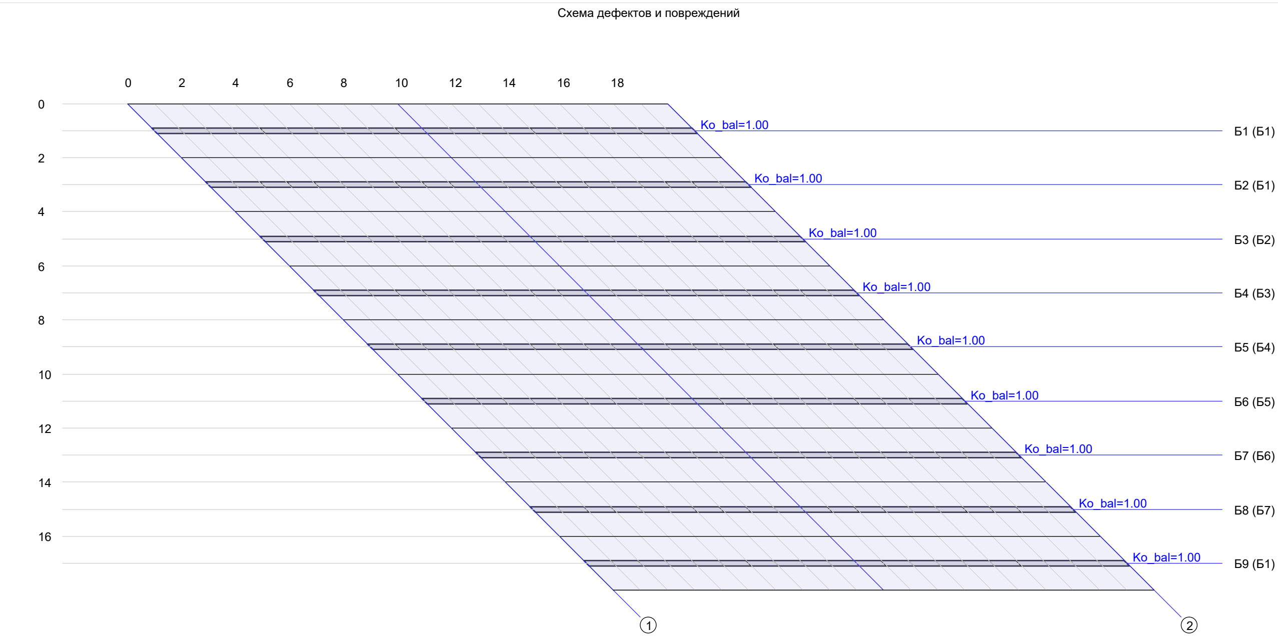


Рис. 7. План пролетного строения при использовании косоугольных КЭ

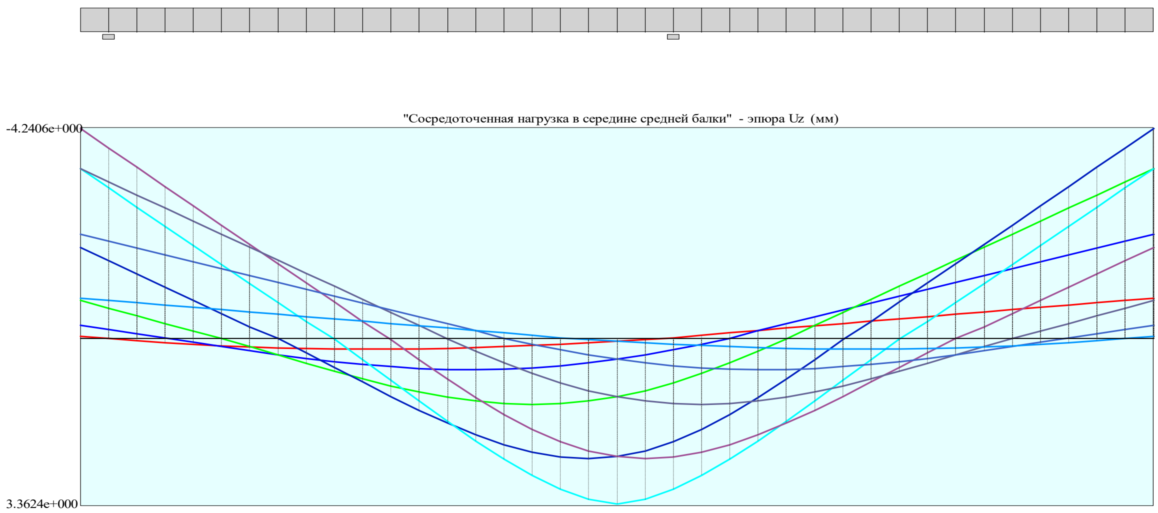
В специализированном ПК SERIAL опоры могут задаваться индивидуально для каждой балки, но нет возможности сдвигать балки по отношению к друг другу. Поэтому в варианте расчетной схемы с применением прямоугольных КЭ (см. рис. 6) наряду со сдвижками опор использовались балки с консолями, что позволило обойтись без сдвижек балок. Для того чтобы исключить влияние консолей на напряженно-деформированное состояние пролетных частей балок, были заданы дефекты, практически полностью ослабляющие консольные части балок и стыки полок между ними (см. рис. 6).

Расчеты пролетного строения выполнялись для 4-х схем вертикальной нагрузки с одинаковым общим весом, но разной степенью сосредоточения:

1) сосредоточенная нагрузка P=180 кН в середине средней балки;
2) распределенная нагрузка q=9 кН/м по длине средней балки;
3) сосредоточенная нагрузка P=20 кН в середине всех балок;
4) распределенная нагрузка q=1 кН/м по длине всех балок.

Продольные эпюры прогибов для обоих вариантов расчетной схемы при нагрузке по схеме 1 приведены на рис. 8. Здесь разными цветами показаны эпюры прогибов всех 9-ти балок, причем для первой расчетной схемы отрицательные ординаты эпюр соответствуют консольным участкам балок, а несовпадение нулевых точек эпюр свидетельствует о сдвижках опор балок. Аналогичные аксонометрические эпюры прогибов показаны на рис. 9.

а)



б)

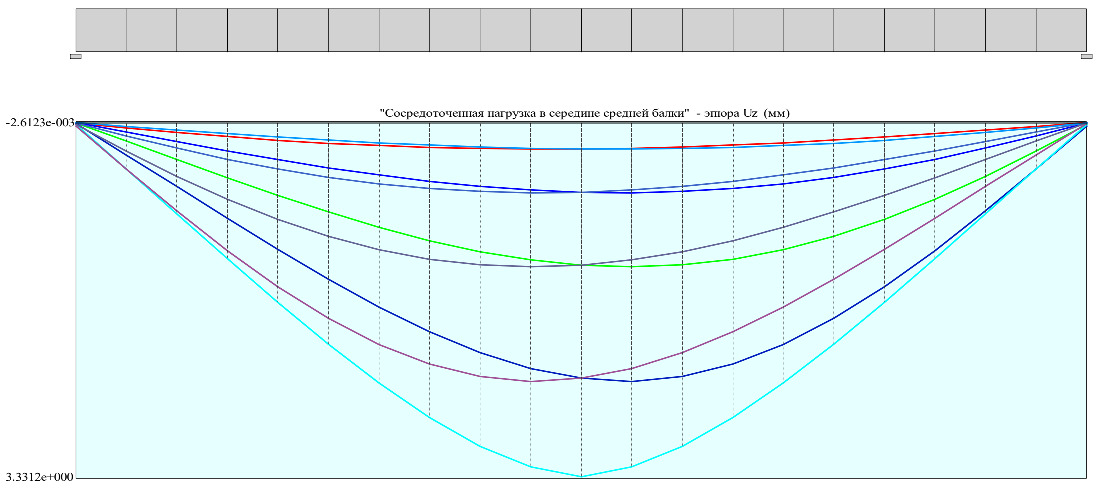
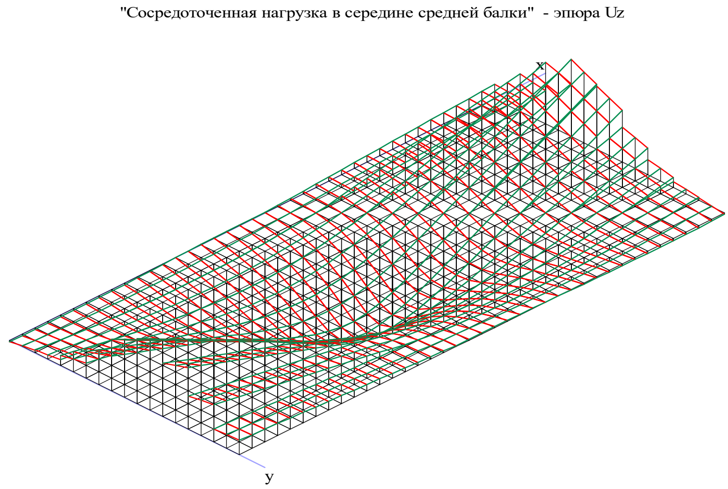


Рис. 8. Продольные эпюры прогибов при использовании прямоугольных (а) и косоугольных (б) КЭ при сосредоточенной нагрузке P=180 кН в середине средней балки (схема нагрузки 1)

а)



б)

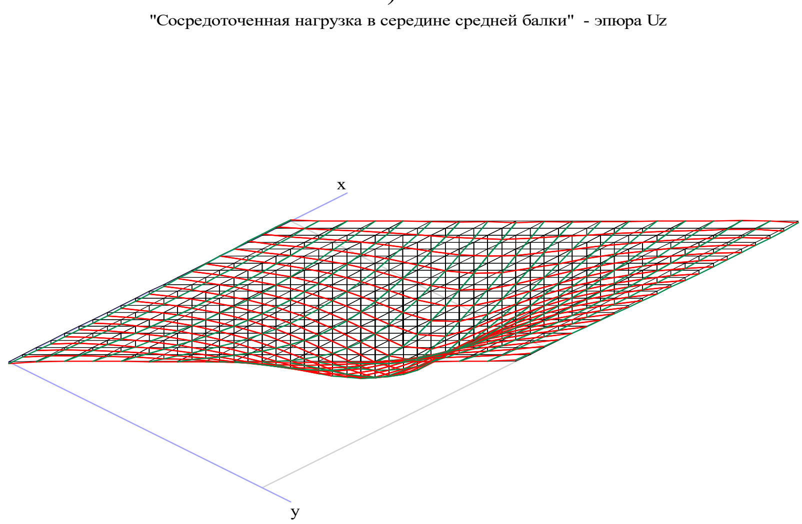


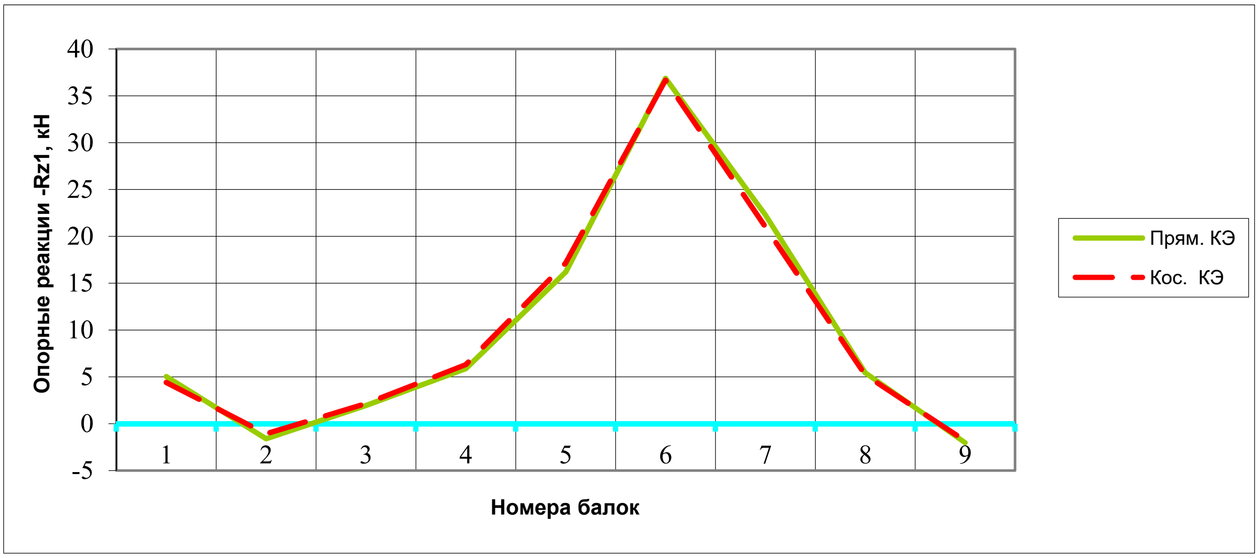
Рис. 9. Аксонометрические эпюры прогибов при использовании прямоугольных (а) и косоугольных (б) КЭ при сосредоточенной нагрузке P=180 кН в середине средней балки (схема нагрузки 1)

Сопоставление результатов расчетов с использованием в расчетных схемах прямоугольных и косоугольных пластинчатых КЭ осуществлялось путем сравнения опорных реакций в левых опорах, а также прогибов и изгибающих моментов в серединах пролетов балок. Соответствующие поперечные эпюры для всех перечисленных выше 4-х схем нагрузки приведены на рис. 10 – 13. На них зелеными линиями показаны эпюры, полученные с применением прямоугольных КЭ, красными штриховыми линиями – косоугольных КЭ.

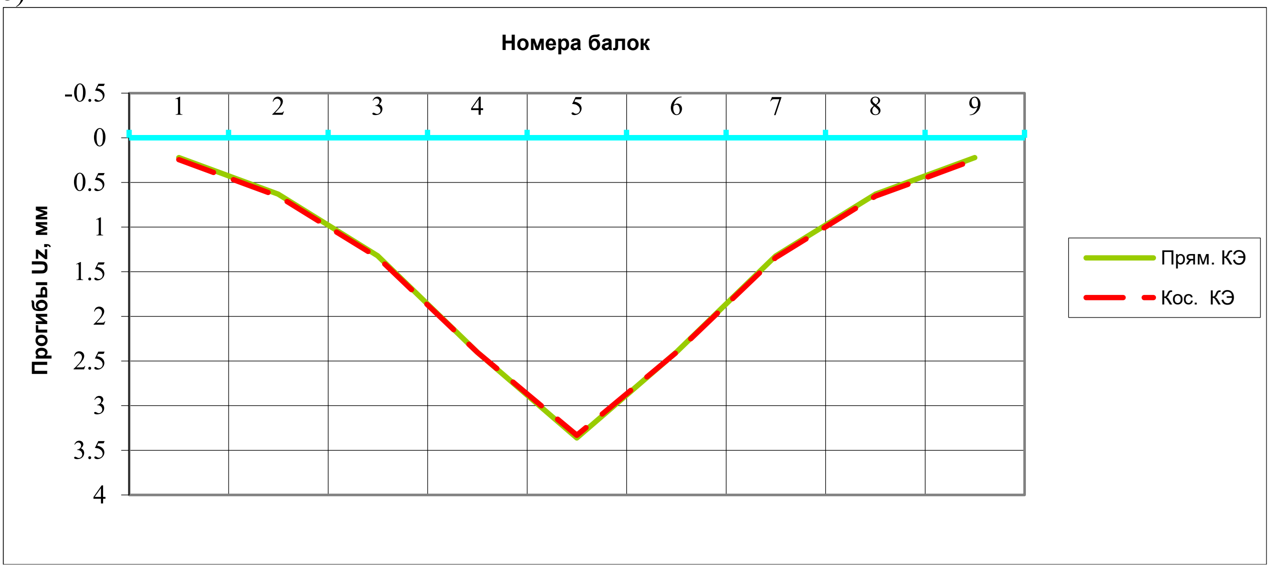
Отметим, что вследствие симметрии всех схем нагрузки в осях КСК, проведенных через центр пролетного строения, все эпюры прогибов и изгибающих моментов в серединах пролетов балок являются симметричными, а эпюры опорных реакций в левых опорах симметричны по отношению к правым опорам.

Численное сравнение результатов расчетов для максимальных и средних значений ординат приведенных эпюр с вычислением относительных погрешностей представлено в таблице.

а)



б)



в)

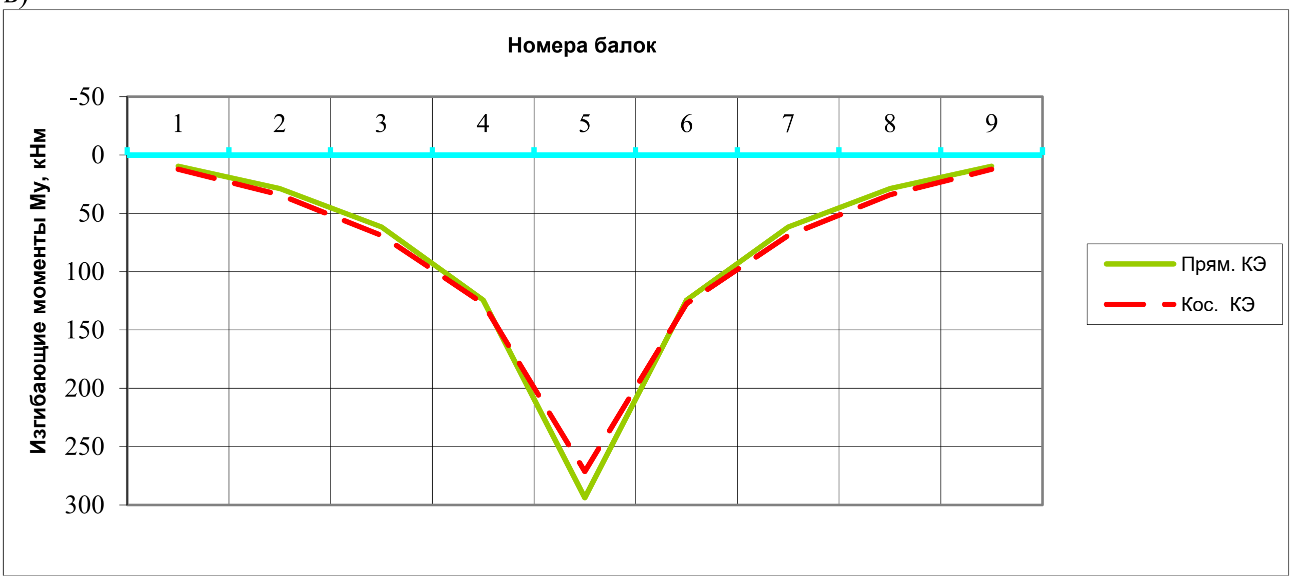
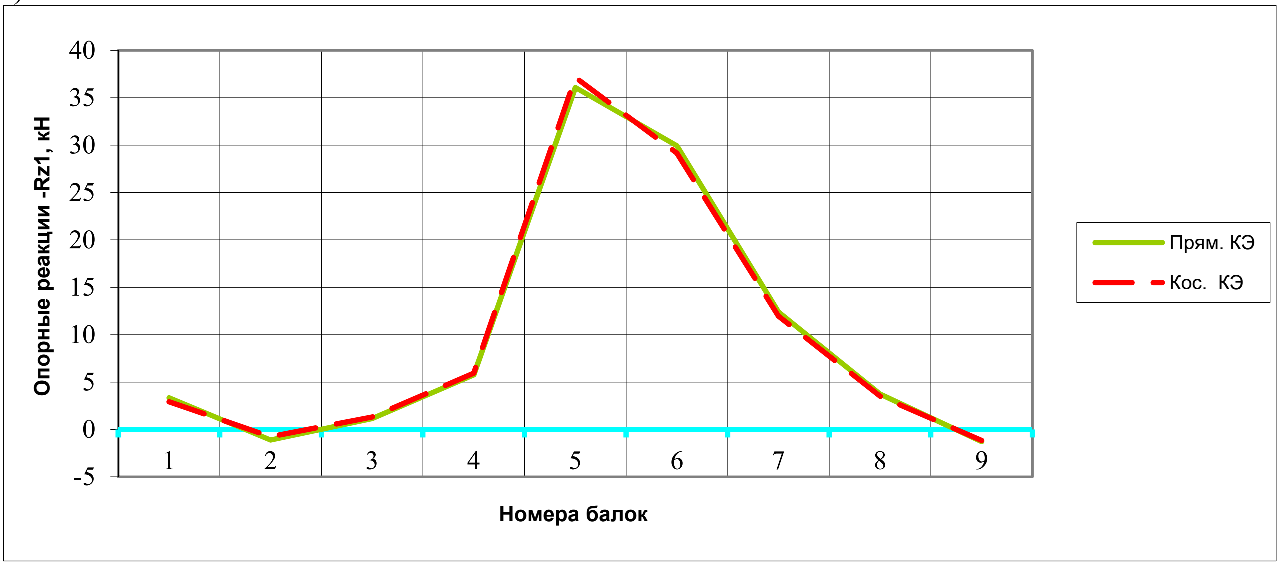
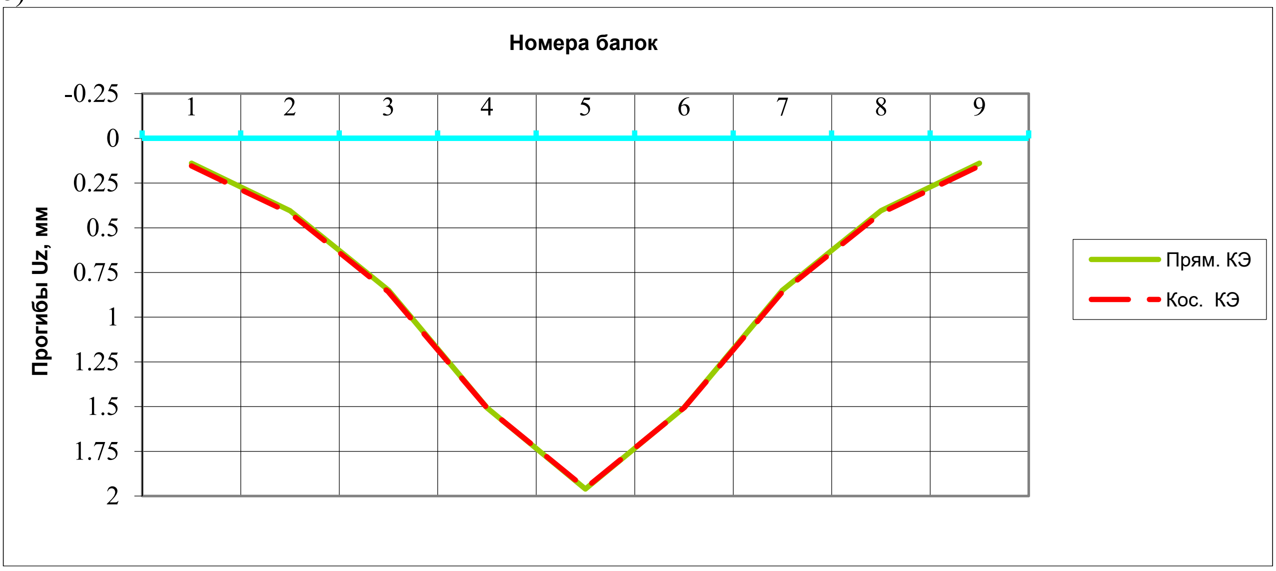


Рис. 10. Поперечные эпюры опорных реакций (а), прогибов (б) и изгибающих моментов (в) при сосредоточенной нагрузке P=180 кН в середине средней балки (схема нагрузки 1)

а)



б)



в)

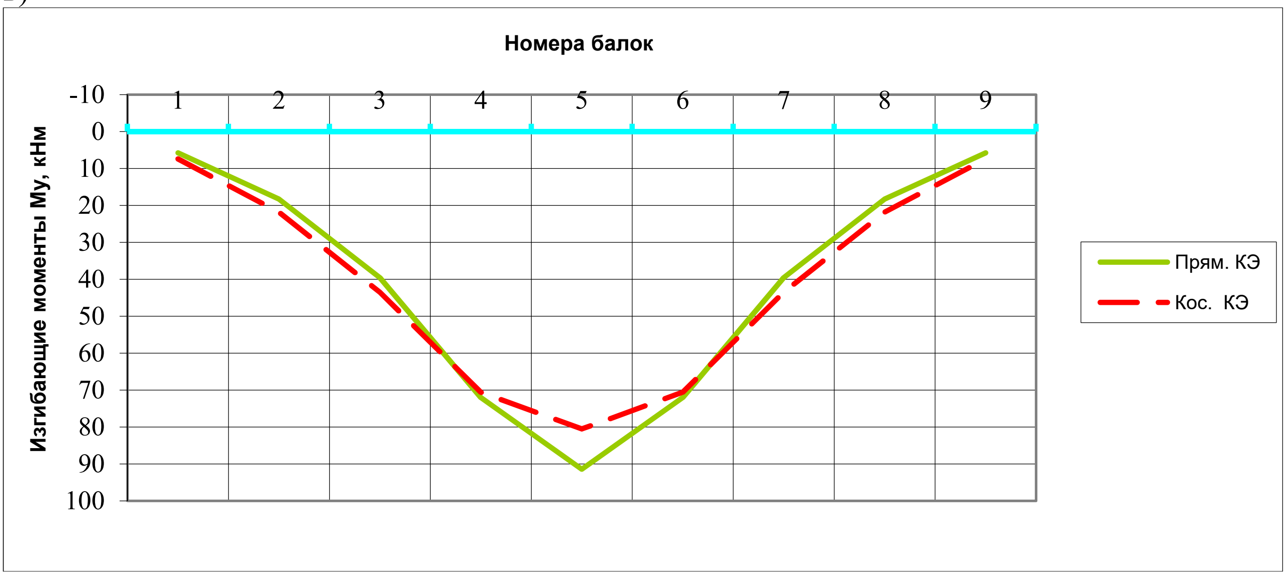
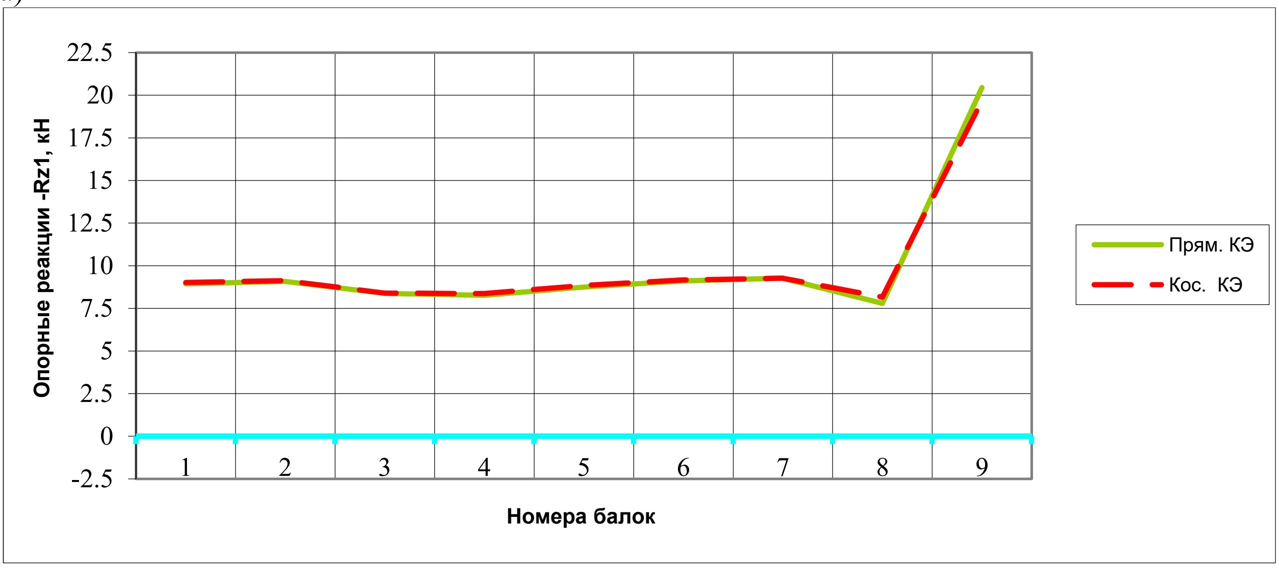
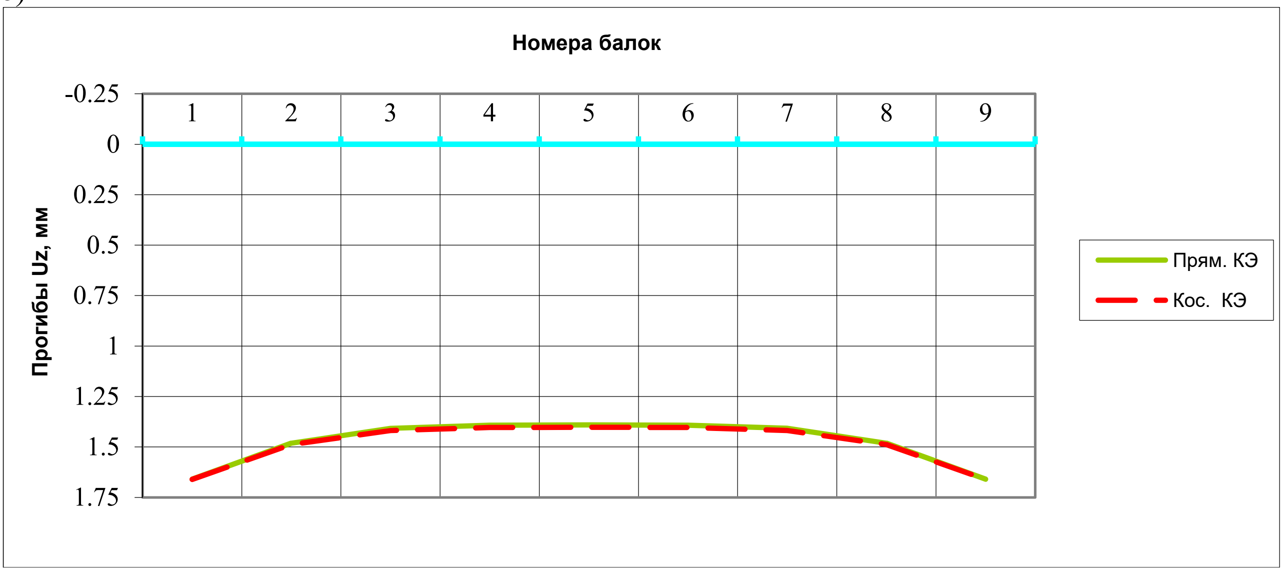


Рис. 11. Поперечные эпюры опорных реакций (а), прогибов (б) и изгибающих моментов (в) при распределенной нагрузке q=9 кН/м по длине средней балки (схема нагрузки 2)

а)



б)



в)

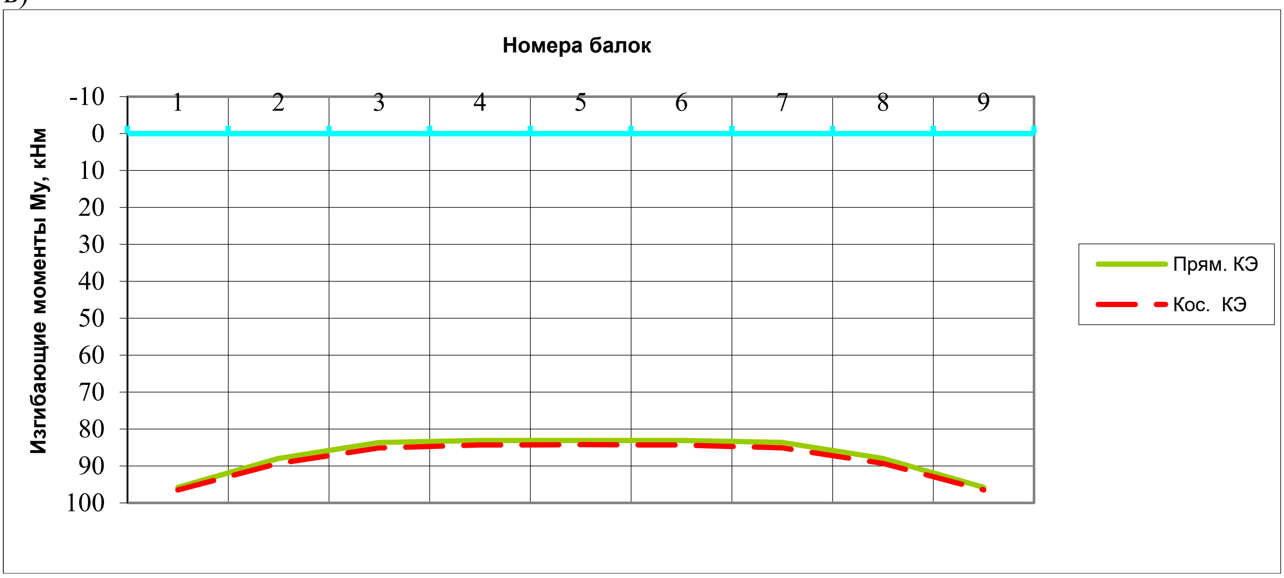
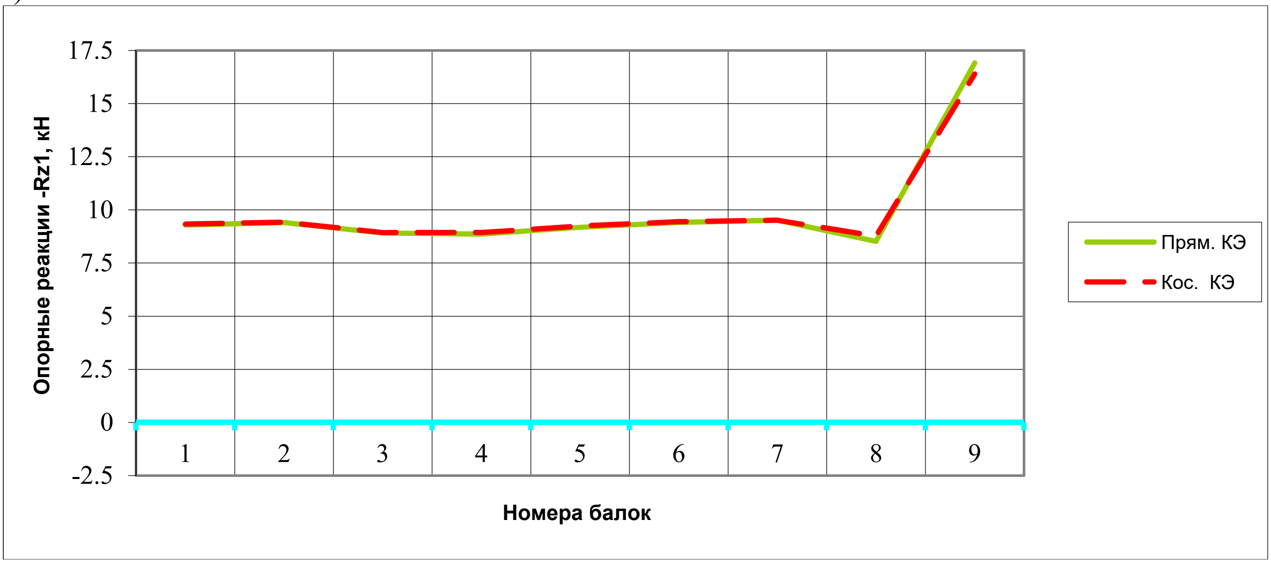
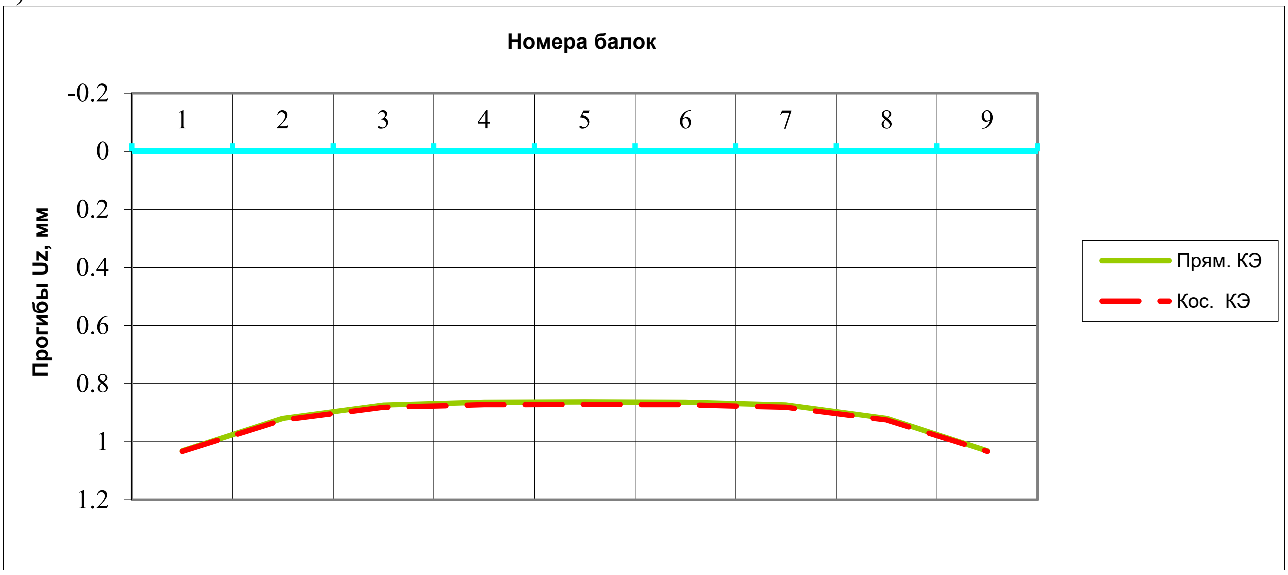


Рис. 12. Поперечные эпюры опорных реакций (а), прогибов (б) и изгибающих моментов (в) при сосредоточенной нагрузке P=20 кН в середине всех балок (схема нагрузки 3)

а)



б)



в)

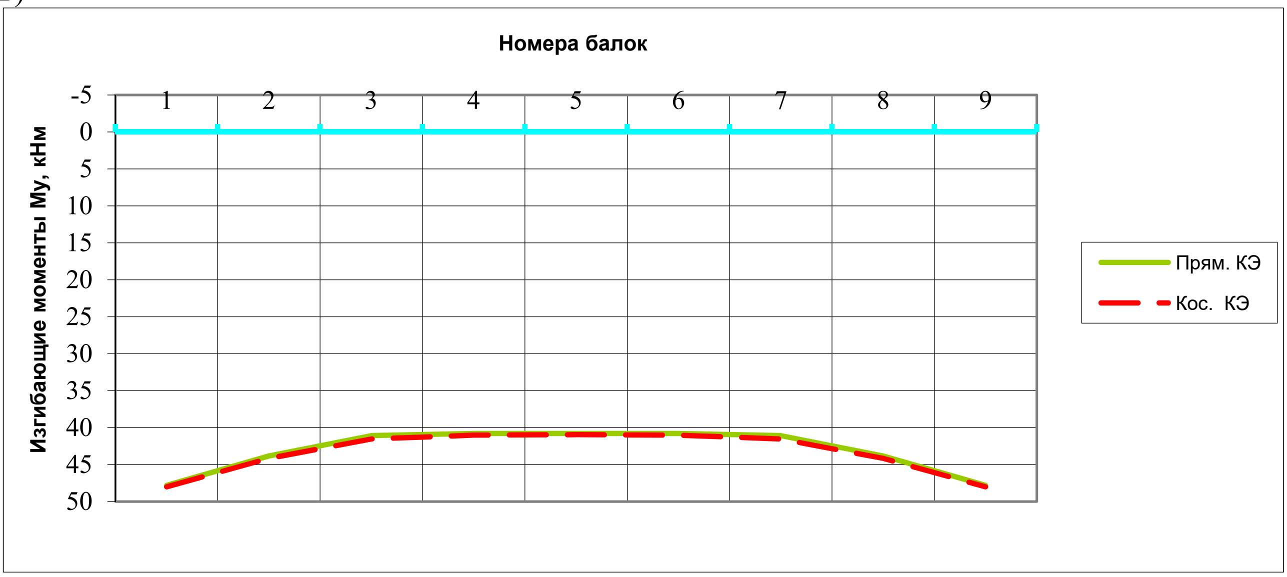


Рис. 13. Поперечные эпюры опорных реакций (а), прогибов (б) и изгибающих моментов (в) при распределенной нагрузке q=1 кН/м по длине всех балок (схема нагрузки 4)

Таблица

Сравнение опорных реакций $\boldsymbol{R_{z1}}$, прогибов $\boldsymbol{u_z}$ и изгибающих моментов $\boldsymbol{M_y}$ при использовании в расчетной схеме пролетного строения прямоугольных и косоугольных пластинчатых КЭ

Схема нагрузки	Имя	Размерность	Максимальные значения			Средние значения		
			Прямоугольные КЭ	Косоугольные КЭ	Погрешность ε, %	Прямоугольные КЭ	Косоугольные КЭ	Погрешность ε, %
1	$\boldsymbol{R_{z1}}$	кН	36,888	36,688	0,545	10,000	10,000	0,001
	$\boldsymbol{u_z}$	мм	3,3624	3,3312	0,937	1,3910	1,4022	0,797
	$\boldsymbol{M_y}$	кНм	293,810	271,410	8,253	82,502	84,032	1,821
2	$\boldsymbol{R_{z1}}$	кН	36,087	37,147	2,854	10,000	10,000	0,001
	$\boldsymbol{u_z}$	мм	1,9601	1,9556	0,230	0,8617	0,8700	0,949
	$\boldsymbol{M_y}$	кНм	91,412	80,511	13,540	40,283	40,774	1,203
3	$\boldsymbol{R_{z1}}$	кН	20,439	19,673	3,894	10,000	10,000	0,000
	$\boldsymbol{u_z}$	мм	1,6600	1,6610	0,060	1,4751	1,4828	0,518
	$\boldsymbol{M_y}$	кНм	95,805	96,491	0,711	87,130	88,303	1,329
4	$\boldsymbol{R_{z1}}$	кН	16,910	16,397	3,129	10,000	10,000	0,001
	$\boldsymbol{u_z}$	мм	1,0316	1,0334	0,174	0,9159	0,9219	0,654
	$\boldsymbol{M_y}$	кНм	47,823	48,003	0,375	43,106	43,380	0,633

Общей закономерностью приведенных на рис. 10 – 13 эпюр опорных реакций в левых опорах является смещение их центров тяжести вправо, а для реакций в правых опорах в силу отмеченной выше симметрии – влево, то есть в обоих случаях в сторону более нагруженного тупого угла косого пролетного строения.

Ожидаемой закономерностью эпюр прогибов и изгибающих моментов при нагружении средней балки (см. рис. 10 – 11 для схем нагрузки 1, 2) являются максимальные ординаты в середине. А при равномерном нагружении всех балок в поперечном направлении (см. рис. 12 – 13 для схем нагрузки 3, 4) максимальные ординаты появляются на краях аналогичных эпюр, что на первый взгляд выглядит странно. Объясняется последняя закономерность проявлением эффекта Пуассона, из-за которого сжатые в продольном направлении полки изгибаемых балок распирает в поперечном направлении, вызывая в балках крутящие моменты и перераспределение между ними усилий и прогибов.

Сравнение приведенных на рис. 10 – 13 эпюр и результатов расчетов в таблице при использовании двух описанных выше расчетных схем пролетного строения показывает хорошее совпадение максимальных значений опорных реакций для всех схем нагрузки с погрешностями в диапазоне 0,545 – 3,894 % и точное совпадение средних значений.

Диапазоны погрешностей при сравнении максимальных и средних значений прогибов не выходят за один процент и соответственно равны 0,060 – 0,937 % и 0,518 – 0,949 %, что свидетельствует о практической эквивалентности жесткостей пролетного строения при разных вариантах расчетной схемы.

Наибольшие погрешности в диапазонах 0,375 – 13,540 % и 0,633 – 1,821 % фиксируются при сравнении максимальных значений изгибающих моментов, возникающих при сосредоточенном характере нагрузки в поперечном направлении (см. рис. 10 – 11 для схем нагрузки 1, 2). Объясняется это тем, что изгибающие моменты при использовании в расчетных схемах прямоугольных пластинчатых КЭ определяются в сечениях, нормальных к осям балок, а при использовании косоугольных КЭ – в косых сечениях.

Между этими сечениями на балку действуют погонные усилия в прилегающих к ней стыках полок, которые необходимо учитывать при переводе усилия в косом сечении к усилию в нормальном сечении или наоборот. Применительно к изгибающему моменту данный перевод осуществляется по формуле:

$$M_{yni} = M_{yki} + (q_{z\,i-1} x_{\ell i} - q_{x\,i-1} z_c + h_{y\,i-1}) x_{\ell i} + (-q_{z\,i} x_{pi} - q_{x\,i} z_c + h_{y\,i}) x_{pi} \quad (76)$$

где $\boldsymbol{M_{yni}}$, $\boldsymbol{M_{yki}}$ – изгибающие моменты в нормальном и косом сечениях $\boldsymbol{i}$–й балки;

$\boldsymbol{q_{zi}}$, $\boldsymbol{q_{xi}}$, $\boldsymbol{h_{yi}}$ – погонные усилия в плоскости шва между полками и погонный крутящий момент в $\boldsymbol{i}$–м стыке полок;

$\boldsymbol{z_c}$ – привязка центра тяжести сечения к верху балки (см. рис. 4);

$\boldsymbol{x_{\ell i}}$, $\boldsymbol{x_{pi}}$ – смещения левого и правого краев полок балки за счет косины, равные

$$x_{\ell\, i} = y_{\ell\, i} \tan\theta \ ; \qquad x_{p\,i} = y_{p\,i} \tan\theta \ . \quad (77)$$

Здесь $\boldsymbol{y_{\ell i}}$, $\boldsymbol{y_{pi}}$ – ширина левой и правой полок $\boldsymbol{i}$–й балки.

Для рассмотренного выше примера расчета при использовании в расчетной схеме пролетного строения косоугольных пластинчатых элементов входящие в формулы (76), (77) размеры и усилия в середине средней балки равны:

$\boldsymbol{z_c}$=0,3 м; $\boldsymbol{\theta}$=45°; $\boldsymbol{y_{\ell i}}$=$\boldsymbol{y_{pi}}$=$\boldsymbol{x_{\ell i}}$=$\boldsymbol{x_{pi}}$=1 м;

схема нагрузки 1 –> $\boldsymbol{q_{zi-1}}$=-$\boldsymbol{q_{zi}}$=7,1595 кН/м; $\boldsymbol{q_{xi-1}}$=$\boldsymbol{q_{xi}}$=14,038 кН/м; $\boldsymbol{h_{yi-1}}$=$\boldsymbol{h_{yi}}$=7,5757 кНм/м;
$\boldsymbol{M_{yni}}$= 292,46 кНм (293,81 кНм); $\boldsymbol{M_{yki}}$=271,41 кНм; $\boldsymbol{\varepsilon}$=0,462 % (8,253 %);

схема нагрузки 2 –> $\boldsymbol{q_{zi-1}}$=-$\boldsymbol{q_{zi}}$=3,3815 кН/м; $\boldsymbol{q_{xi-1}}$=$\boldsymbol{q_{xi}}$=3,7480 кН/м; $\boldsymbol{h_{yi-1}}$=$\boldsymbol{h_{yi}}$=4,8017 кНм/м;
$\boldsymbol{M_{yni}}$= 94,629 кНм (91,412 кНм); $\boldsymbol{M_{yki}}$=80,511 кНм; $\boldsymbol{\varepsilon}$=3,40 % (13,540 %).

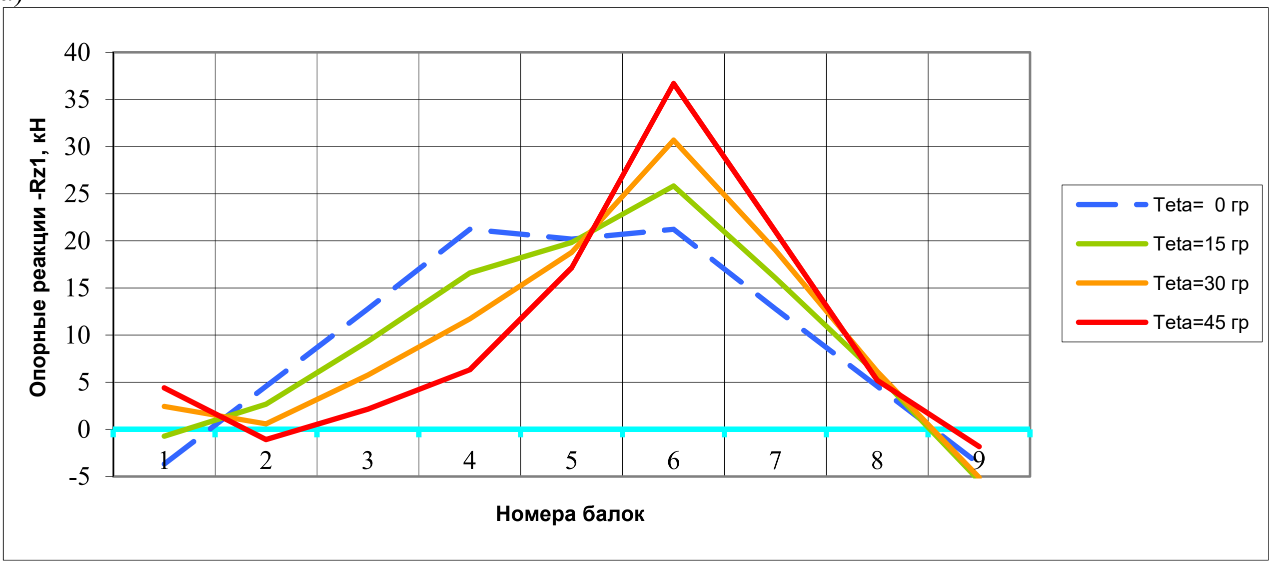
Здесь в скобках для сравнения указаны изгибающие моменты, полученные при использовании в расчетной схеме прямоугольных пластинчатых элементов, и относительные погрешности $\boldsymbol{\varepsilon}$ по данным приведенной выше таблицы для схем нагрузки 1, 2. Отметим, что аналогичные погрешности в таблице для схем нагрузки 3, 4 не превышают одного процента, поскольку при равномерном приложении нагрузки в поперечном направлении погонные усилия в стыках полок балок невелики.

Таким образом, перевод изгибающего момента в косом сечении к моменту в нормальном сечении по формуле (76) позволяет значительно сократить погрешность усилий, определенных при использовании в расчетной схеме разработанных косоугольных пластинчатых элементов. Однако является предметом возможной дискуссии вопрос о том, какая из рассмотренных расчетных схем более корректна и имеет ли смысл вообще осуществлять такой перевод усилий.

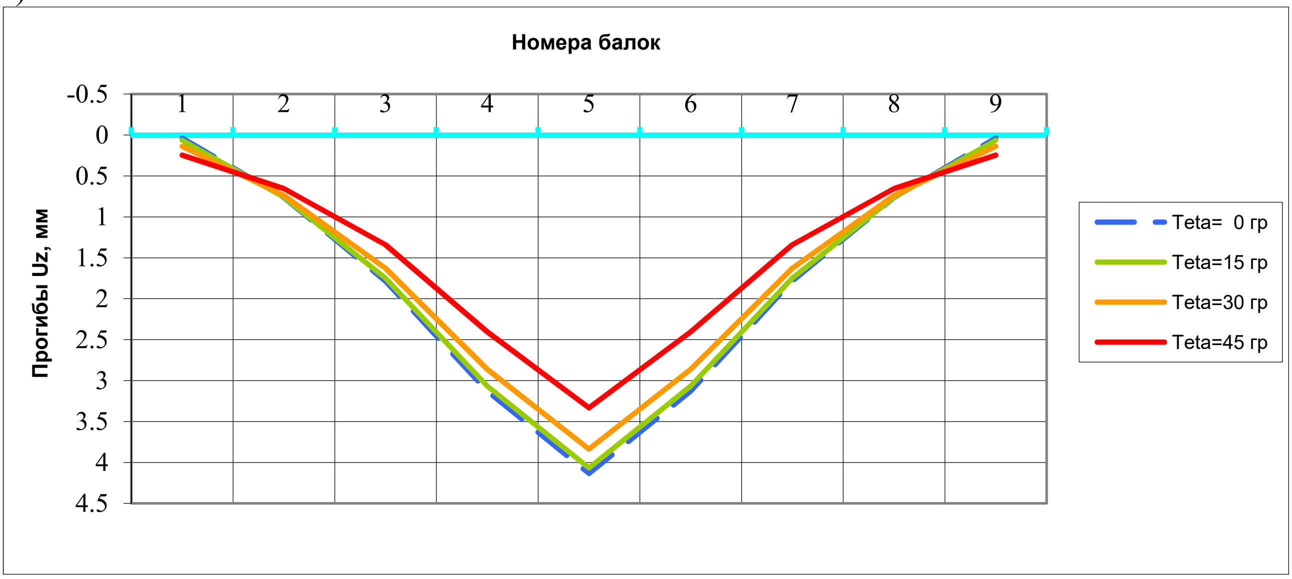
Проблема заключается в том, что при оценке грузоподъемности железобетонного пролетного строения обычно используются результаты пространственного расчета конструкции в линейной постановке. Из них отбираются изгибающие моменты в конкретных сечениях балок, которые затем сопоставляются с предельными моментами. Последние находятся для этих сечений путем нелинейного расчета с учетом таких факторов, как раскрытие трещин, нелинейное деформирование материалов балки, течение арматуры и бетона и т. п. Такое совместное использование результатов линейных и нелинейных расчетов само по себе является некорректным. Усугубляется проблема и тем, что не учитывается влияние на напряженное состояние полного набора усилий в поперечном сечении балки и погонных усилий в стыках полок.

В завершение проведенных численных исследований на рис. 14 представлены поперечные эпюры, аналогичные эпюрам на рис. 10 для схемы нагрузки 1, которые были построены с использованием косоугольных пластинчатых КЭ при различных углах косины $\boldsymbol{\theta}$=0°, 15°, 30°, 45°. Здесь, наряду с уже отмечавшимися ранее общими закономерностями этих эпюр, можно обратить внимание на то, что с ростом угла косины увеличивается максимальная ордината эпюры опорных реакций и уменьшаются максимальные ординаты эпюр прогибов и изгибающих моментов.

а)



б)



в)

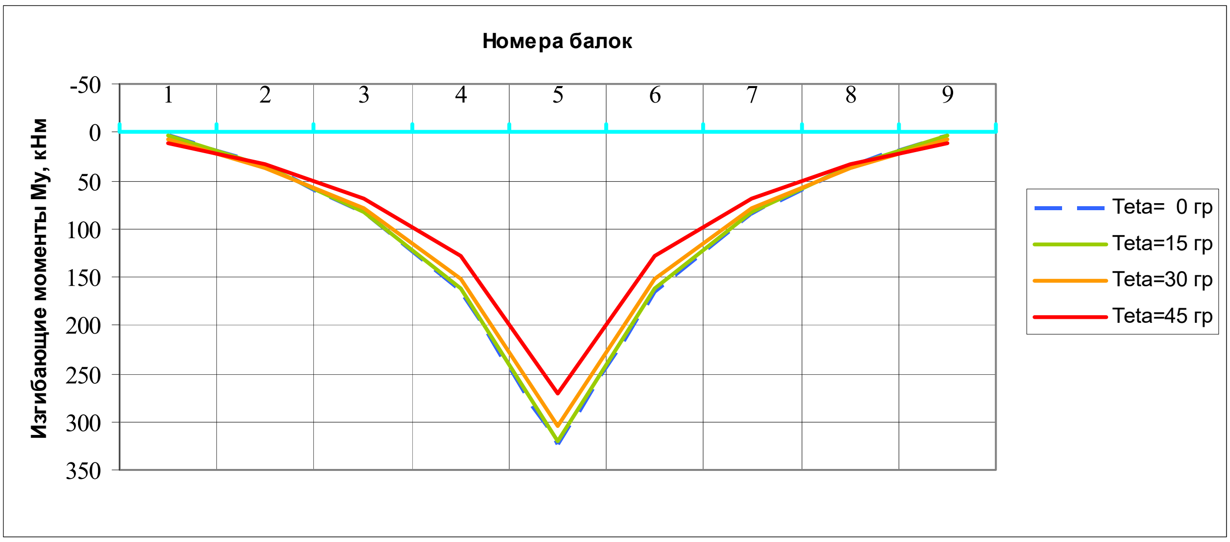


Рис. 14. Поперечные эпюры опорных реакций (а), прогибов (б) и изгибающих моментов (в) при сосредоточенной нагрузке P=180 кН в середине средней балки для разных углов косины.

Выводы

Разработаны косоугольные конечные элементы для плоского напряженного состояния теории упругости и изгибного состояния по теории плиты Кирхгофа. Особенностью данных элементов является наличие не только линейных, но и угловых степеней свободы, что позволяет жестко сопрягать узлы КЭ с различной пространственной ориентацией. Такой набор СС обеспечивается использованием высокоточных функций формы в виде кубических полиномов Эрмита для аппроксимации поля перемещений.

Достоинством построенных КЭ является также получение для них матриц жесткости в аналитическом виде, что позволяет исключить погрешности вычисления компонент матриц и, как следствие, результатов расчета, характерные для численных способов.

Апробация данных элементов осуществлялась путем сопоставления результатов расчетов косого плитно-балочного пролетного строения по двум вариантам расчетной схемы, разработанным с применением не только косоугольных, но и аналогичных прямоугольных пластинчатых элементов. В последнем варианте эффект косины пролетного строения достигался путем сдвижки опор каждой последующей балки по сравнению с предыдущей балкой.

Сопоставление результатов расчетов по разным расчетным схемам, выполненное путем сравнения поперечных эпюр опорных реакций, прогибов и изгибающих моментов, а также в табличной форме с вычислением относительных погрешностей, показало хорошую точность разработанных косоугольных КЭ и их «работоспособность» даже при большом угле косины в 45°.

Таким образом, построенные косоугольные конечные элементы могут эффективно применяться в расчетных схемах плитно-балочных пролетных строений автодорожных мостов.

Библиографический список

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – С. 156, 199.
2. Тимошенко С.П. Теория упругости/ С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – С. 41-43.
3. Петреня Е.Н. Суперэлементная модель сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста с накладной плитой, учитывающая податливость продольных стыков/ Е.Н. Петреня, С.А. Осипов // Научный Вестник ВГАСУ. Серия: «Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений». – Воронеж: ВГАСУ, 2005. – №2. – С. 104-119.
4. Петреня Е.Н. Построение прямоугольных конечных элементов пластины переменной толщины с высокоточной аппроксимацией/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. Вып. 4. - Воронеж, 1998.- С. 60-70.
5. Петранин А.А. Конечный элемент пластины для динамических расчетов балочных конструкций/ А.А. Петранин, Е.Н Петреня // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. Вып. 1. - Воронеж, 1992.- С. 43-48.
6. Петреня Е.Н., Петранин А.А. Построение совместного по перемещениям плитного конечного элемента с учетом инерции вращения/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Современные

методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. Вып. 2. - Воронеж, 1993. - С. 27-33.

References

1. Zenkevich O. Method of finite elements in technics. – M.: Mir, 1975. – P. 156, 199.
2. Timoshenko S.P., G. Gudier. Theory of elasticity/– M.: Nauka, 1979. – P. 41-43.
3. Petrenya E.N., Osipov S.A. Super elemental model of road bridge steel – reinforced span with laid on plate which accounts longitudinal splices deformation capacity. Scientific bulletin of VGASU. Seria: «Modern methods of static and dynamic design of buildings and structures». – Voronezh: VGASU, 2005. – №2. – P. 104-119.
4. Petrenya E.N., Petranin A.A. Construction of plate rectangular finite elements of variable thickness with highly accurate approximation. «Modern methods of static and dynamic design of buildings and structures». Issue 4. - Voronezh, 1998.- P. 60-70.
5. Petrenya E.N., Petranin A.A. Plate finite element for dynamic design of braced structures «Modern methods of static and dynamic design of buildings and structures» Issue 1. - Voronezh, 1992.- P. 43-48.
6. Petrenya E.N., Petranin A.A Construction of mutual displacement plate finite element with account of rotary inertia. «Modern methods of static and dynamic design of buildings and structures». Issue 2. - Voronezh, 1993.- P. 27-33.

УДК 624.072.526

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОЙ НИТИ ВБЛИЗИ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

А.Н. Аверин[1]

Воронежский государственный технический университет

Россия, г. Воронеж

[1]Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(432) 271-52-30;
e-mail: AN_Averin@mail.ru

Рассматривается дискретная модель жесткой нити в виде цепи, состоящей из отдельных, соединенных между собой стержней с упругими вставками. Масса элементов и все нагрузки приводятся в узлы. Материал стержней считается линейно-упругий. За исходные принимаются уравнения равновесия узлов и стержней цепи. Продольные и поперечные силы в звеньях и изгибающие моменты в узлах цепи выражаются через координаты узлов. Учитываются продольные удлинения стержней. Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая колебания дискретной модели жесткой нити. Рассмотрена задача свободных колебаний жесткой нити вблизи статического положения равновесия. Разрешающие уравнения получены на основе разложения решения дифференциальной задачи в ряд в окрестности точки статического равновесия с удержанием первых двух членов. Для гармонических колебаний выполнен переход к задаче на собственные значения. Из решения задачи определяются частоты и соответствующие формы свободных колебаний. Апробация математической модели жесткой нити выполнялась посредством решения примеров, приведенных в литературе.

Ключевые слова: гибкая нить, жесткая нить, жесткая нить-струна, пологая нить, дискретная модель жесткой нити, малые колебания нити вблизи статического положения равновесия, нелинейные колебания.

RIGID ROD LOW FLUCTUATION NEAR BALANCE STATIC POSITION.

A.N. Averin[1]

Voronezh state technical university

Voronezh Russia

[1]PhD of Tech. Sc., Associate professor of department of Structural Mechanics, tel.: +7(432) 271-52 -30;
e-mail: AN_Averin@mail.ru

Rigid rod discrete model as chain from separate joined with each other bars with elastic pieces is under consideration. Elements mass and all loads are in knot. Bar material is linear-elastic. Chain bars and knots balance equations are taken as initial one. Bar longitudinal lengthening is under consideration. There were received nonlinear normal deferential equations describing fluctuations of rigid rod discrete model. The problem of rigid rod free motion near balance static position is analyzed. There are obtained enabling equations based on deferential problem solution expansion into the raw at the surrounding of balance static point with keeping of two members. For harmonic fluctuation there was used the approach to the problem with own values. Frequencies and corresponding forms of free motions are determined according to the problem solution. Math model of rigid rod was tested with the help of examples given in the literature.

Keywords: flexible rod, rigid rod, rigid rod - string, slanting rod, discrete model of rigid rod, rod low fluctuations near static position of balance, nonlinear fluctuations.

1. Дискретная модель жесткой нити

В качестве расчетной схемы реальной нити принимается цепь, состоящая из отдельных, соединенных между собой элементов с упругими вставками. Масса элементов и все нагрузки приводятся в узлы (рис. 1).

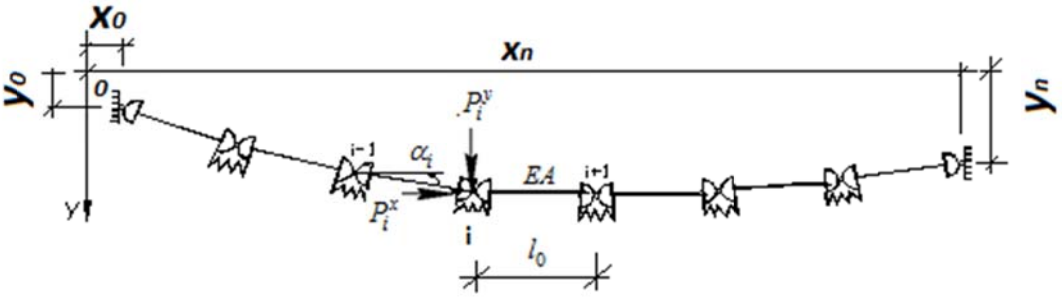


Рис. 1

Уравнения равновесия узлов и элементов цепи имеют вид [1]

$$-N_i\cos(\alpha_i)+N_{i+1}\cos(\alpha_{i+1})+Q_i\sin(\alpha_i)-Q_{i+1}\sin(\alpha_{i+1})+P_i^x=l_0m\cdot(\frac{d^2x_i}{dt^2}) \qquad (1.1)$$

$$-N_i\sin(\alpha_i)+N_{i+1}\sin(\alpha_{i+1})-Q_i\cos(\alpha_i)+Q_{i+1}\cos(\alpha_{i+1})+P_i^y=l_0m\cdot(\frac{d^2y_i}{dt^2}) \qquad (1.2)$$

$$Q_i\cdot l_0=M_{i+1}-M_i\,, \qquad (1.3)$$

где N_i, Q_i - продольная и поперечная силы в i-м элементе цепи, M_i - изгибающий момент в i - м узле, α_i - угол наклона i - го элемента к оси x, $l_0=\frac{L}{n}$ - длина элемента цепи, L - начальная длина заготовки нити, $(x_i(t), y_i(t))$ - координаты i-го узла.

Считаем, что материал стержней линейно-упругий. Абсолютное удлинение элемента цепи пропорционально продольной силе, а изгибающий момент пропорционален кривизне (закон Гука)

$$\Delta l_i=\frac{N_i\cdot l_0}{E\cdot A}\,, \qquad (1.4)$$

$$M_i=E\cdot J\cdot(\frac{1}{\rho})=\frac{2\cdot E\cdot J\cdot\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})}{l_0\cdot(1+\cos(\alpha_i-\alpha_{i+1}))}. \qquad (1.5)$$

В формулах (1.4), (1.5) введены следующие обозначения: E - модуль упругости материала, A - площадь, J - момент инерции поперечного сечения элемента цепи.

Обозначим через $l_i=l_0+\Delta l_i=l_0+\frac{N_i\cdot l_0}{E\cdot A}$ длину элемента цепи в результате продольной деформации. Тогда выражение для продольной силы можно представить в виде

$$N_i=EA\cdot\frac{l_i-l_0}{l_0}\,. \qquad (1.6)$$

Длину i-го элемента цепи выразим через координаты узлов:

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}\,. \tag{1.7}$$

Направляющие косинусы элемента цепи определяться по формулам:

$$\cos(\alpha_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}},$$

$$\sin(\alpha_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} \tag{1.8}$$

После подстановки (1.6) и (1.8) в уравнения (1.1), (1.2) получим

$$\begin{aligned}
&-EA\cdot[\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}](x_i - x_{i-1}) + \\
&+EA\cdot[\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}](x_{i+1} - x_i) + P_i^x +, \\
&+Q_i \sin(\alpha_i) - Q_{i+1}\sin(\alpha_{i+1}) = l_0 m\cdot(\frac{d^2 x_i}{dt^2}).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&-EA\cdot[\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}](y_i - y_{i-1}) + \\
&+EA\cdot[\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}](y_{i+1} - y_i) + P_i^y - \\
&-Q_i \cos(\alpha_i) + Q_{i+1}\cos(\alpha_{i+1}) = l_0 m\cdot(\frac{d^2 y_i}{dt^2}).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Если в уравнениях (1.9), (1.10) изгибную жесткость положить равной нулю ($EJ = 0$), то получим уравнения нелинейных колебаний гибкой нити [2].

Подстановка выражений для изгибающего момента (1.5) в уравнение равновесия элемента (1.3) дает

$$Q_i l_0 = \frac{2\cdot E\cdot J\cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{l_0\cdot(1 + \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i))} - \frac{2\cdot E\cdot J\cdot \sin(\alpha_i - \alpha_{i+1})}{l_0\cdot(1 + \cos(\alpha_i - \alpha_{i+1}))}\,. \tag{1.11}$$

В уравнениях (1.9) заменяем слагаемые, содержащие поперечную силу по формулам (1.11). В результате получаем

$$\begin{aligned}
&-EA\cdot[\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}](x_i - x_{i-1}) + \\
&+EA\cdot[\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}](x_{i+1} - x_i) + P_i^x + \\
&+[\frac{2\cdot E\cdot J\cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{l_0^2\cdot(1 + \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i))} - \frac{2\cdot E\cdot J\cdot \sin(\alpha_i - \alpha_{i+1})}{l_0\cdot(1 + \cos(\alpha_i - \alpha_{i+1}))}]\sin(\alpha_i) - \\
&[\frac{2\cdot E\cdot J\cdot \sin(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1})}{l_0^2\cdot(1 + \cos(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}))} - \frac{2\cdot E\cdot J\cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_{i+2})}{l_0\cdot(1 + \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_{i+2}))}]\sin(\alpha_{i+1}) = l_0 m\cdot(\frac{d^2 x_i}{dt^2}).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Аналогичная замена в уравнениях (1.10) дает

$$
\begin{aligned}
&-EA\cdot[\frac{1}{l_0}-\frac{1}{\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}}](y_i-y_{i-1})+\\
&+EA\cdot[\frac{1}{l_0}-\frac{1}{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}}](y_{i+1}-y_i)+P_i^y-\\
&-[\frac{2\cdot E\cdot J\cdot\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}{l_0^2\cdot(1+\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_i))}-\frac{2\cdot E\cdot J\cdot\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})}{l_0\cdot(1+\cos(\alpha_i-\alpha_{i+1}))}]\cos(\alpha_i)+\\
&+[\frac{2\cdot E\cdot J\cdot\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})}{l_0^2\cdot(1+\cos(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}))}-\frac{2\cdot E\cdot J\cdot\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})}{l_0\cdot(1+\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}))}]\cos(\alpha_{i+1})=l_0m\cdot(\frac{d^2y_i}{dt^2}).
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

После подстановки выражений для направляющих косинусов элементов цепи (1.8) в уравнения (1.12), (1.13) получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных координат узлов цепи $(x_i(t), y_i(t))$, ($i=1,..,n-1$). Полученные уравнения описывают нелинейные колебания дискретной модели жесткой нити.

Если в уравнениях (1.12), (1.13) (записанных через координаты узлов цепи) силы инерции положить равными нулю, то приходим к системе 2(n-1) нелинейных уравнений статики жесткой нити с симметричной и положительно определенной матрицей Якоби.

Отметим, что нелинейные уравнения статики для дискретной модели жесткой нити, но записанные в усилиях, были получены в работе [3]. Неизвестными в этих уравнениях являлись проекции на координатные оси усилий в элементах цепи X_i, Y_i и безразмерные величины $k_i = tg(\frac{Q_i}{N_i})$. Методом начальных параметров уравнения были сведены к системе трех нелинейных уравнений. В качестве неизвестных были приняты проекции на координатные оси усилий в первом элементе цепи X_1, Y_1 и величина $k_1 = tg(\frac{Q_1}{N_1})$, связывающая отношение поперечной и продольной сил.

Результаты сравнительных расчетов по двум описанным выше алгоритмам показали хорошее совпадение.

Отметим, что уравнения (1.12), (1.13) (в перемещениях) могут быть использованы для описания работы нитевых моделей упругого основания [4]. Для этого в уравнениях (1.13) необходимо ввести слагаемые $c\cdot l_0\cdot y_i$, суть которых – реакции в упругих опорах, моделирующих основание.

Если упругие опоры сопротивляются только сжатию, то получим уравнения, описывающие колебаний жесткой нити на одностороннем упругом основании. Такая расчетная схема может применяться при исследовании колебаний трубопроводов, заглубленных в грунт.

Решение отдельных задач статики плоских стержневых систем с односторонними связями приведено в [5]. В работе [6] показано использование гибких нитей в качестве односторонних связей.

2. Уравнения свободных колебаний жесткой нити вблизи положения равновесия.

Обозначим через $U(t)$ вектор координат узлов цепи $U(t)=[x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t),.., x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)]^T$, а через $P(t)$ - вектор узловых сил

$P(t) = [P_1^x(t), P_1^y(t), P_2^x(t), P_2^y(t),.., P_{n-1}^x(t), P_{n-1}^y(t)]^T$. Введем в рассмотрение вектор-функцию $F(U)$ с $2 \cdot (n-1)$ компонентами. Компоненты вектор -функции $F(U)$ - левые части уравнений (1.12), (1.13) (инерционные слагаемые входят в правые части уравнений). Тогда уравнения нелинейных колебаний дискретной модели жесткой нити примут вид

$$F(U(t)) = m \cdot l_0 \cdot \frac{d^2U(t)}{dt^2}. \tag{2.1}$$

Координаты узлов для произвольного момента времени t представим в виде

$$U(t) = U(t_0) + \Delta U(t), \tag{2.2}$$

где $U(t_0)$ - вектор координат, отвечающий статическому положению равновесия цепи, $\Delta U(t)$ - вектор покоординатных отклонений от статического положения равновесия.

Разложим вектор-функцию $F(U)$ в ряд в точке $U(t_0)$, с точностью до величин второго порядка малости $o(\Delta t)^2$, получим

$$F(U(t)) = F(U(t_0)) + J(U(t_0)) \cdot \Delta U(t), \tag{2.3}$$

где $J(U(t_0))$ - матрица Якоби вектор – функции $F(U)$ по переменным U в точке $U(t_0)$.

Так как $F(U(t_0)) = 0$, то

$$F(U(t)) = J(U(t_0)) \cdot \Delta U(t). \tag{2.4}$$

Подстановка (2.2), (2.4) в уравнение (2.1) дает

$$J(U(t_0)) \cdot \Delta U(t) = m \cdot l_0 \cdot \frac{d^2 \Delta U(t)}{dt^2}. \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.5) представим в виде

$$\Delta U(t) = \Delta V \cdot \sin(\omega \cdot t). \tag{2.6}$$

После подстановки (2.6) в (2.5) получаем задачу на собственные значения для определения частот и форм свободных колебаний дискретной модели жесткой нити

$$-J(U(t_0)) \cdot \Delta V = \lambda \cdot \Delta V. \tag{2.7}$$

В уравнениях (2.7) собственные числа λ связаны с собственными частотами свободных колебаний ω соотношениями

$$\lambda = m \cdot l_0 \cdot \omega^2. \tag{2.8}$$

В уравнениях (2.7) через ΔV обозначены собственные векторы – амплитуды отклонений узлов от статического положения равновесия при колебании нити с частотой ω.

Матрица Якоби $-J(U(t_0))$ системы (2.7), является симметричной, и, следовательно, формы колебаний ортогональны

$$\Delta V_i^T \cdot \Delta V_j = 0, \ (i \neq j), \ \Delta V_i^T \cdot \Delta V_i = 1. \tag{2.9}$$

Таким образом, уравнения (2.7) описывают совместные вертикальные и горизонтальные колебания жесткой нити в плоскости ее провисания.

Свойство ортогональности собственных форм позволяет решать задачу вынужденных колебаний жесткой нити вблизи положения равновесия методом Бубнова - Галеркина.

Отметим, что аналогичная модель пространственных свободных колебаний гибкой нити была построена в [7]. Конечный элемент гибкой нити был использован для анализа свободных колебаний пространственной системы гибких нитей в работе [8].

3. Примеры апробации дискретной модели жесткой нити

Универсальность построенной математической модели жесткой нити продемонстрируем на примерах, приведенных в литературе. Кроме того дадим краткое описание теоретических предпосылок и алгоритмов используемых авторами при решении задач.

Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую по концам балку с неподвижными опорами (рис. 2). Под воздействием поперечной нагрузки противоположные концы балки стремятся сблизиться, но вследствие неподвижности опор такого сближения не происходит, из-за чего в балке возникает наряду с изгибом растяжение [9]. В данном случае система статически неопределима относительно растягивающей балку силы P и для ее определения необходимо составить уравнение совместности деформаций.

Удаляем связь, препятствующую горизонтальному сближению опор δ, а действие ее на систему заменяем неизвестной реакцией P (рис.3). Суть уравнения совместности деформаций: сближение концов балки δ, вычисленное в основной системе, должно равняться нулю. Уравнение совместности деформаций имеет вид [9]

$$\frac{P\cdot l}{E\cdot A}-\frac{1}{2}\int_0^l [V'(x)]^2\,dx=0. \tag{3.1}$$

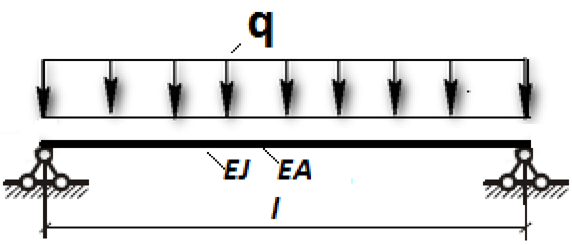


Рис. 2

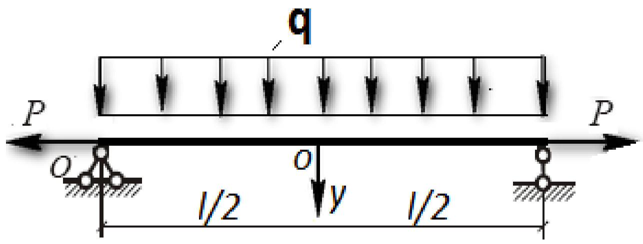


Рис. 3

Сближение концов балки при изгибе можно найти как разность длин оси изогнутого стержня и длины его проекции на первоначальное направление оси

$$\delta=\int_0^l \sqrt{1+(V')^2}\,dx-\int_0^l dx\approx\int_0^l [1+\frac{1}{2}(V')^2]dx-l=\frac{1}{2}\int_0^l [V'(x)]^2\,dx.$$

Алгоритм решения задачи следующий. Сначала решается дифференциальная задача продольно-поперечного изгиба балки для основной системы (рис.3) в аналитическом виде. Находится $V'(x)$ как функцию P, и подставляется в уравнение (3.1), полученное трансцендентное уравнение решается относительно неизвестной силы P. Подстановка распора P в выражения для усилий и перемещений дает искомое решение. Пример решения задачи по данному алгоритму приведен в [10].

Пример 1. Исходные данные задачи: длина балки $L=6\,м$; модуль упругости материала E=2,1*10^8 кН/м^2, интенсивность распределенной нагрузки $q=6$ кН/м; площадь поперечного сечения $A=24.6\cdot 10^{-4}$ м^2; жесткость на растяжение $EA=5{,}166\cdot 10^5\,кН$; момент инерции $J=1183\cdot 10^{-8}\,м^4$; изгибная жесткость $EJ=2484{,}3\,кНм^2$; момент сопротивления $W=118.3\cdot 10^{-6}\,м^3$.

В данном примере мы принимаем расчетную схему «жесткая нить-струна» (точки закрепления нити находятся на одном уровне и начальная длина нити равна длине пролета).

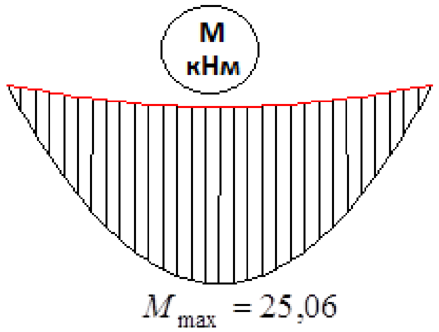
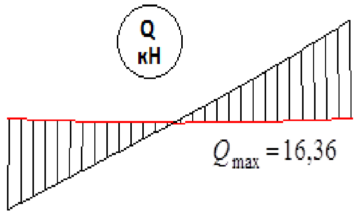
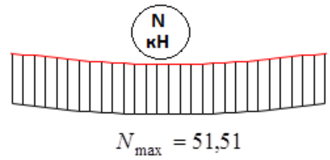
При решении данной задачи (и последующих примерах) число дискретных элементов жесткой нити задавалось равным $n = 30$.

В качестве начального приближения для координат узлов жесткой нити принимались координаты узлов, полученные при расчете простой балки: $V_{\max}^{b} = \dfrac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} = 40,76$ *мм*.

Расчетное значение стрелы провисания жесткой нити равно: $f == 37,93\,мм$.

В табл. 1 представлены эпюры внутренних усилий: M - изгибающие моменты; Q - поперечные силы; N - продольные силы.

Таблица 1

Изгибающий момент	Поперечная сила	Продольная сила
		

Продольная сила $N_{\max} = 51,51$ кН, напряжение $\sigma(N_{\max}) = \dfrac{N_{\max}}{A} = 20,94$ МПа.

Изгибающий момент $M_{\max} = 25,06$ *кНм* (в балке $M_{\max}^{b} = \dfrac{q \cdot l^2}{8} = 27\,кНм$), напряжения в нижних и верхних волокнах $\sigma(M_{\max}) = \pm\dfrac{M_{\max}}{W} = \pm 211,8$ МПа (в балке $\sigma(M_{\max}^{b}) = \pm\dfrac{M_{\max}^{b}}{W} = \pm 228,2$ МПа).

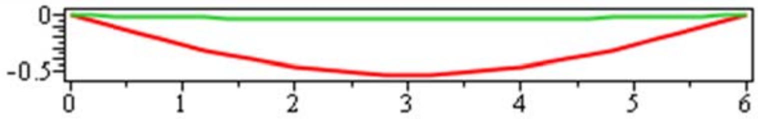
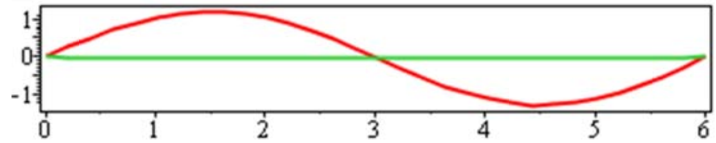
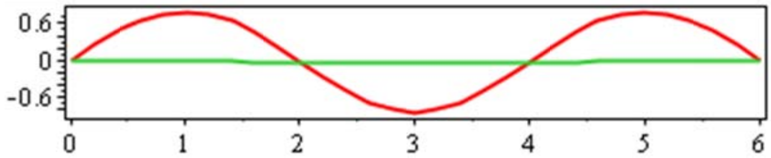
Растягивающие напряжения в нижних волокнах и сжимающие напряжения в верхних волокнах двутавра : $\sigma_н = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_{\max}}{W} = 232,76$ МПа, $\sigma_в = \dfrac{N}{A} - \dfrac{M_{\max}}{W} = -190,88$ МПа.

Полученные значения перемещений и усилий хорошо согласуются с аналогичными величинами, приведенными в [10].

Таким образом, если сравнивать работу простой балки и балки с распором (жесткая нить – струна), то можно сделать следующий вывод: учет растягивающей продольной силы уменьшает прогибы и изгибающие моменты, но не уменьшает нормальные напряжения.

Частоты, периоды и формы свободных колебаний жесткой нити - струны вблизи статического положения равновесия представлены в таблице 2 (зеленый цвет - форма статического равновесия, красный цвет - форма колебаний).

Таблица 2

Номер формы	Форма колебаний	Частота, Гц	Период, с
1		17,20	0,058
2		62,54	0,016
3		245,7	0,0041

Для сравнительной оценки были выполнены расчеты частот свободных колебаний балки методом конечных разностей [11]. Спектр частот балки по отношению к спектру частот жесткой нити сдвинут в сторону увеличения.

Расчет пологой жесткой нити на основе ее дискретной модели продемонстрируем на примере, приведенном в работе [12]. В указанной работе при расчете пологих жестких нитей используется техническая теория изгиба: принимается приближенное выражение для кривизны и для длины дуги нити. В исходных данных задается длина пролета l и стрела провисания нити f_0 при начальной нагрузке $q_н$. Считается, что нить провисает по дуге квадратной параболы (в соответствии с теорией гибких нитей) и длина нити вычисляется по приближенной формуле, расчет ведется по деформированной схеме. Статическая неопределимость раскрывается связью длин нити до и после приложения дополнительной нагрузки $q_д$ с упругим удлинением ее, вызванным этой нагрузкой. Нить считается пологой если отношение стрелы провисание к длине пролета менее 0,1 $(\frac{f_0}{l} < 0{,}1)$. Если точки подвеса нити расположены на разных уровнях, то угол наклона к горизонту линии, соединяющей опоры, не должен превышать 20^0.

Пример 2. Нить представляет собой круглую стальную трубу наружным диаметром 720 мм с толщиной стенки 10 мм. Труба шарнирно подвешена к двум опорам, расположенных на разных уровнях (рис. 4). Разница h между отметками крепления трубы к опорам равна 15 м. Расчетный пролет трубы $l = 150$ м. Начальная нагрузка (собственный вес трубы) $q_н = 1.75$ кН/м, дополнительная нагрузка $q_д = 2$ кН/м расположена на всем пролете. Стрела провисания при начальной нагрузке $f_0 = 6$ м (f_0/l=1/25). Модуль упругости материала трубы E=2,1*10^8 кН/м. Геометрические характеристики поперечного сечения: площадь A= 0,02231 $м^2$; момент сопротивления W=0,00391 $м^3$; момент инерции J=0,001406 $м^4$. Изгибная жесткость EJ=2,9522*10^5 кН$м^2$.

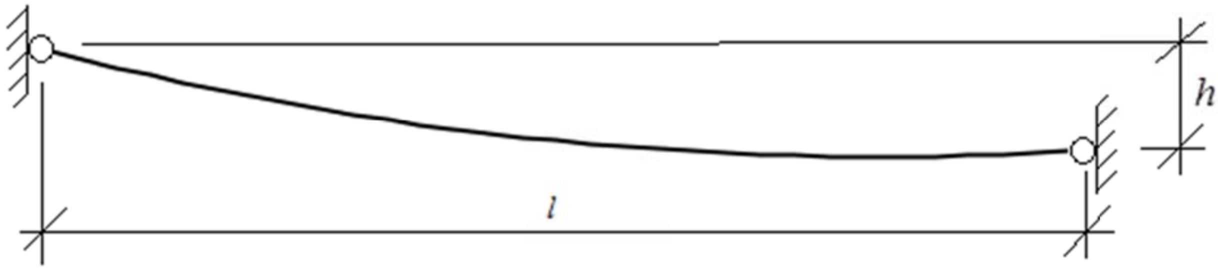


Рис. 4

При расчете жесткой нити на начальную нагрузку ($q_н = 1.75$ кН/м) мы считаем начальную длину заготовки нити L неизвестной и подбираем ее так, чтобы стрела провисания f_0 равнялась 6 м (при каждом задании L_k решаем нелинейную систему уравнений). Расстояние между опорными точками $L_{оп} = 150,75$ м.

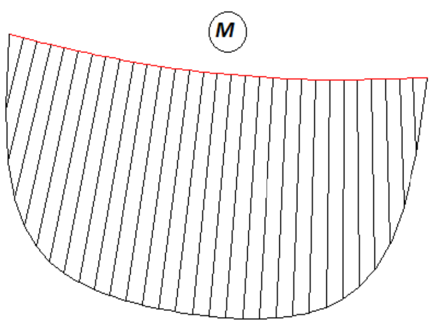
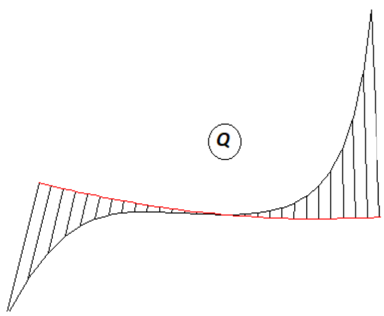
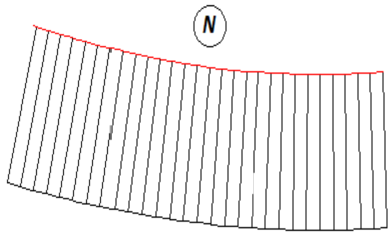
В качестве начального приближения для координат узлов жесткой нити принимались координаты узлов формы равновесия гибкой нити, расчет которой выполнялся с использованием уравнений работы [13].

Значения координат узлов гибкой и жесткой нитей оказались близкими. Максимальная величина нормального напряжения от продольной силы в гибкой нити равна $\sigma(N) = 32,47\,МПа$.

В результате подбора определена длина заготовки жесткой нити $L = 151,35$ м, при которой от начальной нагрузки $q_н = 1.75$ кН/м стрела провисания $f_0 = 6,1$ м.

Эпюры внутренних усилий от начальной нагрузки $q_н = 1,75$ кН/м представлены в табл. 3.

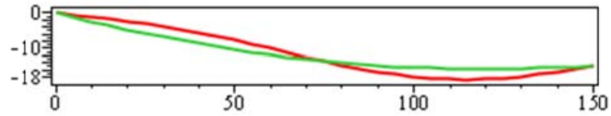
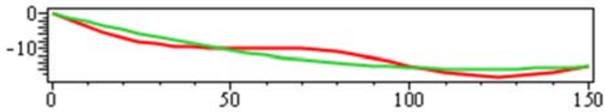
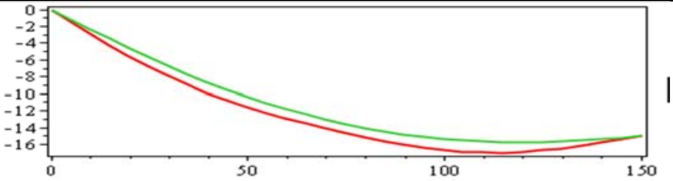
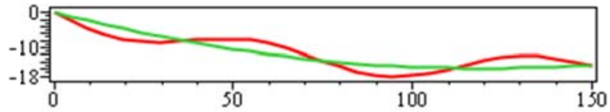
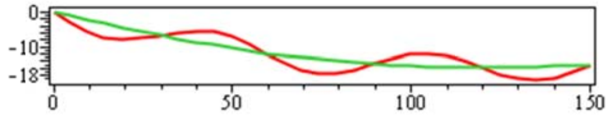
Таблица 3

Изгибающий момент	Поперечная сила	Продольная сила
 $M_{max} = 695.1$ *кНм*	 *Qmax* = 31.773 кН	 N=724 кН

Напряжения от изгибающего момента и продольной силы равны:
$\sigma(Mmax) = \pm 178.0\ МПа$, $\sigma(Nmax) = 32,47\ МПа$.
Растягивающие напряжения в нижних волокнах и сжимающие напряжения в верхних волокнах трубы равны: $\sigma_н = 210.5\ МПа$, $\sigma_в = -145.53\ МПа$

Частоты, периоды и формы свободных колебаний жесткой нити вблизи положения равновесия от начальной нагрузки представлены в таблице 4 (зеленый цвет - форма статического равновесия, красный цвет - форма колебаний).

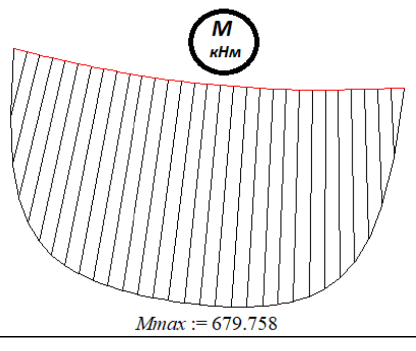
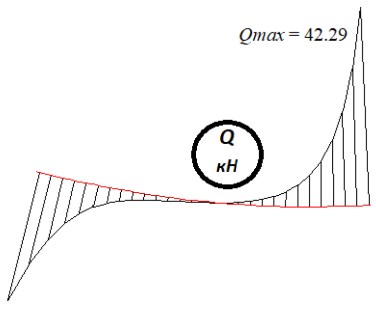
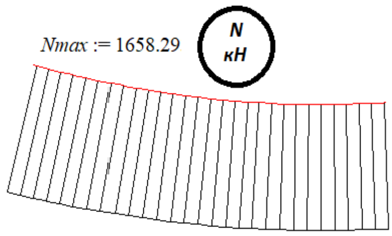
Таблица 4

Номер формы	Форма колебаний	Частота, Гц.	Период, с
1		0,542	1.845
2		0,987	1,014
3		1,582	0,632
4		1,620	0,617
5		2,394	0,418

Ниже представлены результаты расчета жесткой нити от начальной нагрузки $q_н = 1,75$ кН/м и дополнительной $q_д = 2,0$ кН/м на всем пролете. Полная нагрузка на всем пролете равна $q = 3,75$ кН/м.

Эпюры внутренних усилий представлены в табл. 5

Таблица 5

Изгибающий момент	Поперечная сила	Продольная сила
		

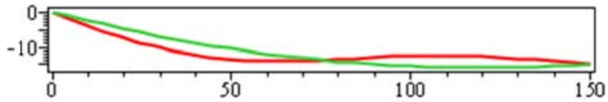
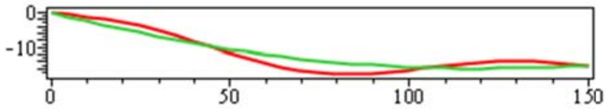
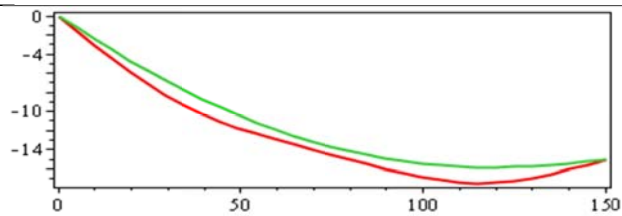
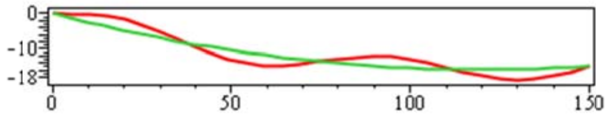
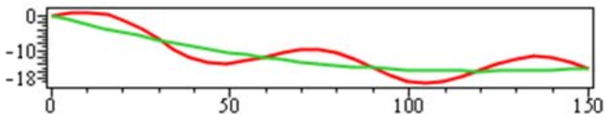
Напряжения от изгибающего момента и продольной силы: $\sigma(M_{\max}) = \pm 174{,}074\, МПа$, $\sigma(N_{\max}) = 74{,}34\, МПа$. Растягивающие напряжения в нижних волокнах и сжимающие напряжения в верхних волокнах трубы равны: $\sigma_н = 248,42\ МПа$, $\sigma_в = -99,730\ МПа$.

Отношение максимальных значений поперечной силы к продольной силе

$$\frac{Q_{\max}}{N_{\max}} = 0{,}026$$ (менее 2,6 %).

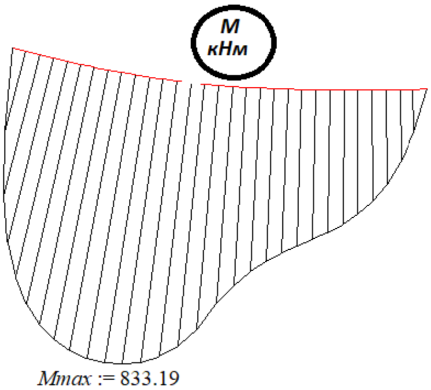
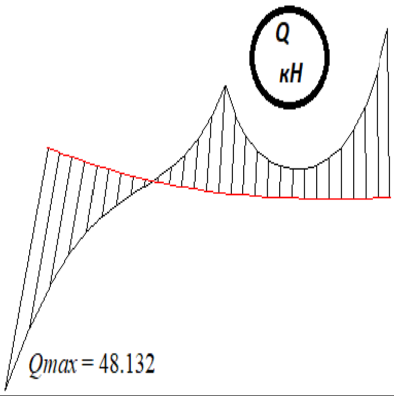
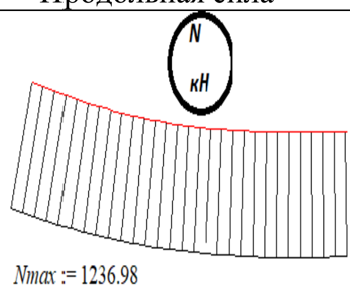
Частоты, периоды и формы свободных колебаний жесткой нити вблизи положения равновесия от начальной нагрузки и дополнительной нагрузке на всем пролете представлены в табл. 6.

Таблица 6

Номер формы	Форма колебаний	Частота, Гц.	Период, с.
1		0,717	1,394
2		1,179	0,848
3		1,672	0,598
4		1,872	0,534
5		2,667	0,375

Ниже представлены результаты расчета жесткой нити от начальной нагрузки $q_н = 1{,}75$ кН/м и **дополнительной** $q_д = 1{,}75$ кН/м **на половине пролета**. Эпюры внутренних усилий показаны в табл. 7.

Таблица 7

Изгибающий момент	Поперечная сила	Продольная сила
		

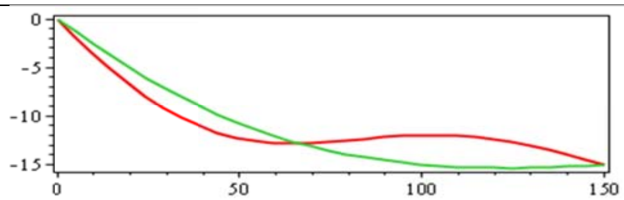
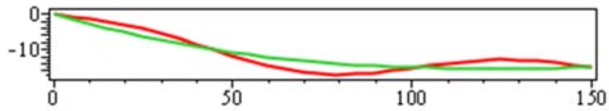
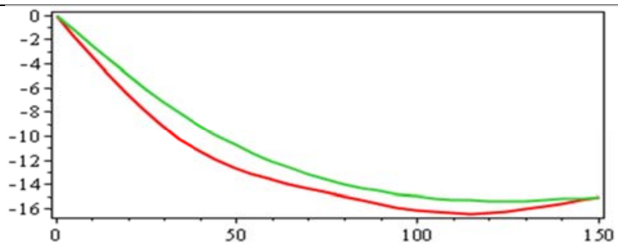
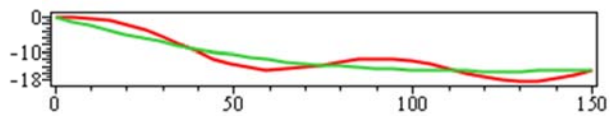
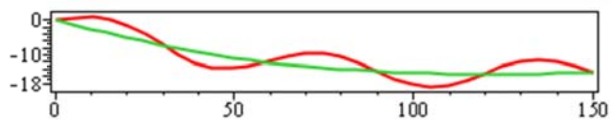
Напряжения от изгибающего момента и продольной силы равны: $\sigma(M_{\max}) = \pm 213{,}36\ МПа$, $\sigma(N_{\max}) = 55{,}456\ МПа$. Растягивающие напряжения в нижних волокнах и сжимающие напряжения в верхних волокнах трубы равны: $\sigma_н = 268,82\,МПа$, $\sigma_в = -157,91\ МПа$.

Таким образом, при расположении дополнительной равномерно распределенной нагрузки на половине пролета напряжение в нити оказывается большим, чем в случае, когда дополнительная нагрузка той же интенсивности располагается по всему пролету.

Максимальная стрела провисания $f = 6{,}186$ м смещается влево от середины пролета (абсцисса $x = 69{,}33$ м).

Частоты, периоды и формы свободных колебаний жесткой нити вблизи положения равновесия от начальной нагрузки и дополнительной нагрузке на половине пролета представлены в табл. 8 (зеленый цвет - форма статического равновесия, красный цвет - форма колебаний).

Таблица 8

Номер формы	Форма колебаний	Частота Гц.	Период сек.
1		0,623	1.610
2		1,106	0,904
3		1,663	0,568
4		1,761	0,568
5		2,545	0,393

Проведенные расчеты показывают, что частота собственных колебаний нити зависит от изгибной жесткости, растягивающего усилия, от статической нагрузки и от стрелы провисания.

Библиографический список

1. Ананьин А.И. К расчету гибких и жестких нитей / А.И. Ананьин, А.Н. Аверин // Исследования висячих комбинированных конструкций. - Воронеж, 1980. - С. 15-29.

2. Аверин А.Н. Исследование нелинейных колебаний гибкой нити / А.Н. Аверин, А.Ф. Хмыров // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвуз. Сб. науч. тр. - Воронеж, 1998. - С. 8-12.
3. Аверин А.Н. Вариант уравнений жесткой нити / А.Н. Аверин// Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1990. - С. 160-166.
4. Аверин А.Н. Многопараметрические нитевые модели упругого основания / А.Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. - 2018. - Т. 1. - № 16. - С. 97-104.
5. Аверин А.Н. Расчет систем с односторонними связями / А.Н. Аверин, А.Ю. Пузаков // Строительная механика и конструкции. - 2015. - Т. 1. - № 10. - С. 15-32.
6. Аверин А.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния геометрически нелинейных стержневых систем. / А.Н. Аверин, А.Ю. Пузаков // Строительная механика и конструкции. - 2013. - Т. 1. - № 6. - С. 34-52.
7. Аверин А.Н. Малые колебания непологой гибкой нити / А.Н. Аверин, А.Ф. Хмыров // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2000. - С. 149-154.
8. Аверин А.Н. Конечный элемент гибкой нити / А.Н. Аверин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2002. - С. 34-38.
9. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики / А.П. Филин. - Т. II. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1978, 616 с.
10. Аверин А.Н. Решение задач сопротивления материалов в среде компьютерной математики MAPLE / А.Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. - 2017. - Т. 1. - № 14. - С. 5-26.
11. Аверин А.Н. Расчет свободных изгибных колебаний стержня переменного сечения с сосредоточенными включениями. / А.Н. Аверин // Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1983. - С.3-11.
12. Шимановский В.Н. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости) / В.Н. Шимановский, Ю.В. Смирнов, Р.Б. Харченко. – Киев: "Будевельник", 1973. - С. 198.
13. Аверин А.Н. Уравнения гибкой нити. / А.Н. Аверин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1992. - С. 117-121.

References

1. Ananjin A.I., Averin A.N. To the design of flexible and rigid rods. Researches of suspension completed structures. - Voronezh, 1980. - P. 15-29.
2. Averin A.N., Khmyrov A.F. Research of nonlinear motions of flexible rod. Modern methods of static and dynamic design of constructions and structures.: inter universities collection of works. - Voronezh, 1998. - P. 8-12.
3. Averin A.N. Variant of rigid rod equation. Methods and algorithms of constructions and structures design. - Voronezh, 1990. - P. 160-166.
4. Averin A.N. Multiparametrical rod models of elastic base. Structural Mechanics and structures. - 2018. - V. 1. - № 16. - P. 97-104.
5. Averin A.N., Puzackov A.Yu. Design of the systems with one side connections Structural Mechanics and structures. - 2015. - V. 1. - № 10. - P. 15-32.
6. Averin A.N., Puzackov A.Yu Analysis of deflected mode of geometrically nonlinear bar system. Structural Mechanics and structures. - 2013. - V. 1. - № 6. - P. 34-52.
7. Averin A.N., Khmyrov A.F. Low motions of nongentle flexible rod. Modern methods of static and dynamic design of constructions and structures.

Voronezh, 2000. - P. 149-154.

8. Averin A.N. Finite element of flexible rod. Modern methods of static and dynamic design of constructions and structures. - Voronezh, 2002. - P. 34-38.
9. Filin A.P. Applied Mechanics of solid deforming body. Materials resistance with elements of continuum theory and structural mechanics. - V. II. – M: Nauka. Chief editor of physical – mathematic literature, 1978, 616 p.
10. Averin A.N. Solution of the problem of materials resistance in computer mathematics MAPLE. Structural Mechanics and structures. - 2017. - V. 1. - № 14. - P. 5-26.
11. Averin A.N. Design of free motions of flexible motions of variable section rod with concentrated inclusions. Researches of the statics and dynamics of rod and thin walled systems: collection of works. - Voronezh, 1983. - P.3-11.
12. Shimanovsky V.N., Smirnov Yu. V., Kharchenko R.B. Design of suspension structures (bars of finite rigid). – Kiev: "Budevelnik", 1973. - P. 198.
13. Averin A.N. Equations of flexible rod. Modern methods of static and dynamic design of constructions and structures. - Voronezh, 1992. - P. 117-121.

УДК 624.04

FORMULA FOR THE DEFLECTION OF THE PLANAR HINGED-PIVOT FRAME

M.N. Kirsanov[1]

National Research University "MPEI",
Russia. Moscow

[1] Dr.Sci., Professor tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

A scheme of a statically definable frame with two hinged fixed supports is proposed. The induction method using the computer mathematic system Maple obtained analytical expressions for the deflection of this structure under the action of concentrated force and load uniformly distributed over the nodes of the crossbar's belts. It is shown that for some values of the number of panels in the crossbar and racks, the truss is kinematically degenerate. The determinant of the system of equilibrium equations vanishes. The corresponding scheme of possible node velocities is given.

Keywords: arch, planar truss, deflection, induction method, Maple, analytical solution

ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ

М.Н. Кирсанов[1]

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Россия, г. Москва

[1]Докт. физ.-мат. наук, профессор, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Рассматривается статически определимая рама с двумя шарнирными неподвижными опорами. Методом индукции с привлечением системы компьютерной математики Maple получены аналитические выражения для прогиба этой конструкции под действием сосредоточенной силы и нагрузки, равномерно распределенной по узлам поясов ригеля. Показано, что при некоторых значениях числа панелей в ригеле и стойках ферма кинематически вырождается. Определитель системы уравнений равновесия обращается в нуль. Приведена соответствующая схема возможных скоростей узлов.

Ключевые слова: рама, плоская ферма, прогиб, метод индукции, Maple, аналитическое решение

Introduction

Hinged-pivot frames can enter as an integral part in spatial structures, for example, hulls of industrial buildings. As a rule, the calculation of such trusses is carried out numerically, taking into account all the features of the structure. Analytical solutions can serve either for checking and debugging numerical solutions, or for a preliminary simple evaluation of the design being designed. The most effective are those analytical solutions that are represented not by a complicated formula with the greatest number of parameters of the system. The greatest difficulty in obtaining such formulas is the consideration of numerical characteristics, for example, the number of rods or panels.

In [1-5] by induction, calculation formulas were obtained for some statically determinate planar frame-trusses. Polynomial formulas for deflection and forces are found in some critical rods with respect to stability or loss of strength.

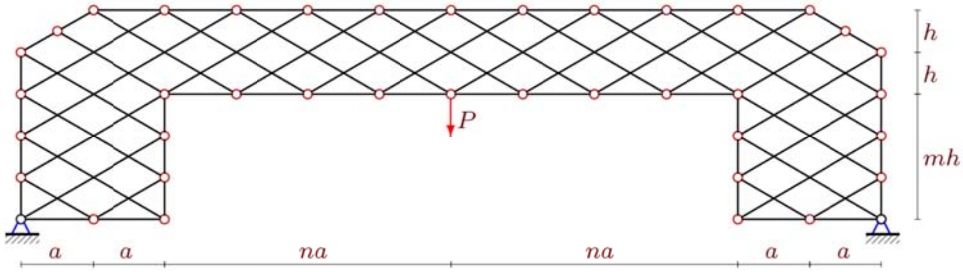


Fig. 1. Truss: n=4, m=3

Calculation of forces in a symbolic form is carried out according to the program [6], in which the coordinates of the nodes and the order of connection of the hinges and rods are entered. The first calculations showed that for odd n and even m there is no solution to the problem, the determinant of the system of equilibrium equations vanishes. The system becomes instantly kinematically variable. This is confirmed by the obtained picture of the possible node velocities (Fig. 2). The majority of nodes remain stationary, the speeds of others are equal to u, v and u'. Obviously the ratio of velocities $u/h = v/a = 2u'/c$, where $c = \sqrt{a^2+h^2}$. Let us consider the case $m = 2k_1 - 1$, $n = 2k_2$ and $k_1 = k_2 = k$.

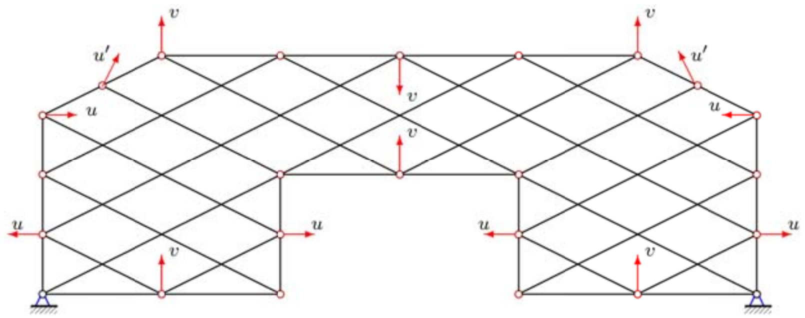


Fig. 2. Scheme of possible rates of the variable truss: n=2, m=2

The deflection is determined by the Maxwell-Mohr's formula [7]:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-4} S_i s_i l / (EF),$$

where: EF — the stiffness of the rods, S_i — the forces in the rods from the load, s_i – the forces in the rods from the action of a single vertical force applied to the middle node of the lower girdle of the crossbar, l_i – the length of the rods, K=8(n+m)+20 — the number of rods in the design without taking into account four rods simulating the fixed hinge supports, which are adopted to be rigid. The calculation shows that the general form of the formula for deflection does not depend on the number of panels and has the form:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_1 a^3 + C_1 a^3)/(4h^2 EF). \tag{1}$$

The following non-monotonically increasing sequence is obtained for the coefficient a^3: 39, 99, 1191, 379, 5895, 979, 16583, 2027, 35687, 3651, 65639, 5979, 108871, 9139, 167815, 13259. Identifying the formation of terms of this sequence allows the operator **rgf_findrecur** package **genfunc** system Maple, which returns the next recursion equation of the eighth order

$$C_{1,n} = 4C_{1,n-2} - 6C_{1,n-4} + 4C_{1,n-6} - C_{1,n-8}.$$

The solution of the equation is given by **rsolve**

$$C_1 = (8(10-9(-1)^k)k^3 + 6(5(-1)^k - 1)k^2 + 26(3(-1)^k - 1)k - 36(-1)^k + 69)/3.$$

Similarly, other coefficients are obtained

$$C_2 = 4(8(1-(-1)^k)k^3 + 6((-1)^k - 1)k^2 + ((-1)^k + 4)k + 1),$$

$$C_3 = 2(32(1-(-1)^k)k^3 + 30((-1)^k - 1)k^2 + 2(4(-1)^k + 5)k - 6(-1)^k + 3)/3.$$

In the case of loading by a uniformly distributed load (Fig. 3), the solution becomes more complicated. The sequence of coefficients required for analysis is lengthened, which leads to an increase in the counting time. In the case of symbolic transformations, computer mathematics systems work much more slowly. In some cases (including for the structure under study), the solution can not be obtained simply because of the not really long time of the transformations.

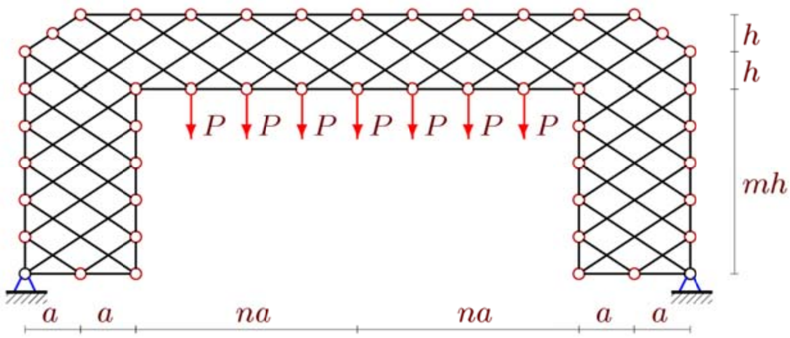


Fig. 3. Truss with load on the lower belt: n=4, m=5

The required length of the sequence is 20, and the recurrent equation is of the tenth order:

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-2} - 10C_{1,n-4} + 10C_{1,n-6} - 5C_{1,n-8} + C_{1,n-10}.$$

The coefficients in (1) for this load have the form

$$C_1 = ((132-160(-1)^k)k^4 + 4(9(-1)^k - 37)k^3 + (76(-1)^k - 60)k^2 + (148 - 114(-1)^k)k - 33)/3,$$

$$C_2 = 64(1-(-1)^k)k^4 + 32((-1)^k - 3)k^3 + (42 - 8(-1)^k)k^2 - 4(-1)^k(-1)^k k - (-1)^k - 3,$$

$$C_3 = 2(64(1-(-1)^k)k^4 + 12(4(-1)^k - 9)k^3 + (19(-1)^k + 41)k^2 + 3(1 - 9(-1)^k)k + 6(-1)^k - 3)/3.$$

Simultaneously with calculating the deflection in the same cycle in terms of the number of panels by induction, one can obtain an expression for the expansion (horizontal reaction of the hinged support) $X = 2kPa/h$ and vertical reaction $Y = (4k-1)P/2$. In the case of loading by one force (Figure 1), these reactions have the form $X = (1-(-1)^k)Pa/(2h)$, $Y = P/2$.

When the upper belt is loaded, the coefficients of the solution (1) have the form

$$C_1 = (4(33 - 40(-1)^k)k^4 - 4(39(-1)^k + 1)k^3 + 4(22(-1)^k - 57)k^2 + 2(15(-1)^k + 8)k - 57(-1)^k + 102)/3,$$

$$C_2 = 64(1-(-1)^k)k^4 - 32((-1)^k + 1)k^3 + 6(4(-1)^k - 9)k^2 + 4((-1)^k + 6)k + (-1)^k + 7,$$

$$C_3 = 2(64(1-(-1)^k)k^4 - 4(4(-1)^k + 11)k^3 + 67((-1)^k - 1)k^2 + (7(-1)^k + 29)k - 15(-1)^k + 12)/3.$$

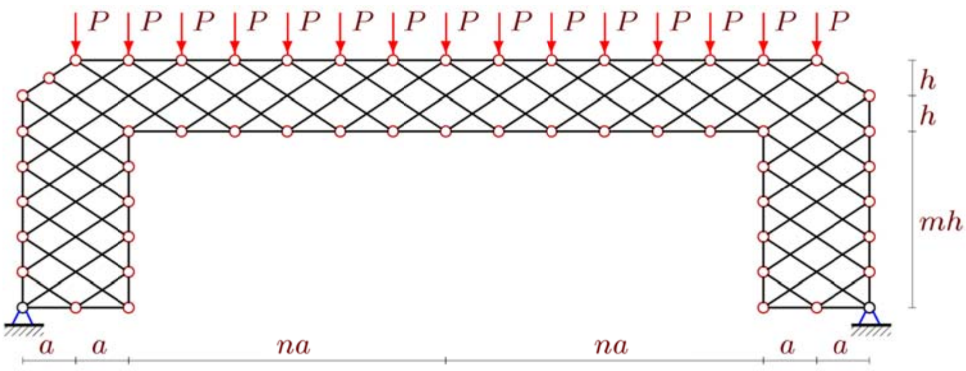


Fig. 4. Truss with load on the upper belt: n = 6, m = 5

A characteristic feature of the solution obtained is the strong jumps in the deflection when the number of panels changes. This is due to the presence in the coefficients of the terms with a factor $(-1)^k$. That is why to evaluate the deformation it is necessary to calculate the deflection at several neighboring nodes.

An overview of some papers containing the derivation of analytical dependences for the arch of arch and frame structures is given in [8].

References

1. Savinykh A.S. Analysis of deflection of the arch truss loaded at the upper belt, *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and Architecture], 2017, vol. 5, no. 3, pp. 159–161 (in Russ.). doi: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636
2. Kirsanov M.N., Orlov I.V. The dependence of the deflection of the rod of a statically exterior indeterminate truss on the number of panels. Postulat. 2017. № 12 (26). Pp. 75. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1005/1031
3. Gribova O.V. Calculation of the deflection of flat externally statically indefinable core frame, *Postulat* [Postulate], 2017, no. 12. Article 116 (8 p.) (in Russ.). URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1046/1073
4. Kirsanov M.N. Analysis of forces and deformations in the ship frame simulated by truss. *Vestnik gos. un-ta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O.Makarova* [Bulletin of Admiral S.O. Makarov State Univ. of the Marine and River Fleet], 2017, No. 3, Pp.560–569 (in Russ.). doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
5. Kirsanov M.N. Formulas for calculating of the arch truss, *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018. №1. Pp. 7-11.
6. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
7. Shaposhnikov N.N., Kristalinskii R.E., Darkov A.V. *Stroitel'naya mekhanika. 13-e izd.* [Structural Mechanics. 13th edition], St. Petersburg: Lan Publishing House, 2017. 692 p. ISBN 978-5-8114-0576-3.
8. Osadchenko N.V. analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018. Vol. 1. № 16. Pp. 12–33.

Библиографический список

1. Савиных А.С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 3. С. 159–161. DOI: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636

2. Kirsanov M.N., Orlov I.V. The dependence of the deflection of the rod of a statically exterior indeterminate truss on the number of panels // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 75. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1005/1031
3. Грибова О.В. Расчёт прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 116. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1046/1073
4. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
6. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
7. Шапошников Н.Н., Кристалинский Р.Е., Дарков А.В. Строительная механика. 13-е изд. СПб.: Лань, 2017. 692 с. ISBN 978-5-8114-0576-3.
8. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.

УДК 624.04

ANALYTICAL CALCULATION AND ANALYSIS OF PLANAR SPRINGEL TRUSS

A. R. Rakhmatulina[1], A. A. Smirnova[2]

National Research University "MPEI",

Russia. Moscow

[1]Student, tel.: *+7(495)362-73-14;*; e-mail: anya.rashma@yandex.ru

[2]Student, tel.: *+7(495)362-73-14;*; e-mail: Anastasia7773@yahoo.com

A statically determinate symmetric beam-type truss has a reinforcement of the racks. The method of induction shows the dependence of the deflection of the farm on the number of panels. The system of symbolic mathematics Maple and the Maxwell-Mora formula are used. Analytic expressions are obtained for the forces in some of the bars most dangerous in terms of stability and loss of strength. It is shown that the optimal position of Sprengel's fastening is close to the middle of the vertical rack. Special Maple operators are involved to compose and solve the recurrence equations necessary to obtain the coefficients of the sought formulas.

Keywords: truss, deflection, induction, analytical solution, Maple

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ

А.Р. Рахматулина[1], А.А. Смирнова[2]

Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Россия, г. Москва

[1]Студентка, тел.: *+7(495)362-73-14;*; e-mail: anya.rashma@yandex.ru

[2]Студентка, тел.: *+7(495)362-73-14;*; e-mail: Anastasia7773@yahoo.com

Рассматривается статически определимая симметричная ферма балочного типа со шпренгельным усилением стоек. Методом индукции выводится зависимость прогиба фермы от числа панелей. Используется система символьной математики Maple и формула Максвелла - Мора. Получены аналитические выражения для усилий в некоторых наиболее опасных с точки зрения устойчивости и потери прочности стержнях. Показано, что оптимальное положение крепления шпренгелей близко к середине стойки. Задействованы специальные операторы Maple для составления и решения рекуррентных уравнений, необходимых для получения коэффициентов искомых формул.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, аналитическое решение, Maple

Simple analytical solutions to the problems of building structures are useful as estimates of more complex numerical solutions that take into account a larger number of factors. In [1], the problem of the deflection of a truss (Fig. 1) was solved under the action of a concentrated force; in [2], a particular solution was found for deflecting the same truss under the action of a load along the lower belt at $h_1 = h_2$. In [3], the induction method derived a formula for the deflection of a truss under a load on the upper belt.

The considered truss has a height $h_1 + h_2$ and $2n$ panels in the span (Figure 1). In the belts of the $4n$ rod of length a, $4n$ racks are high h_1 and h_2, one central stand is tall and $4n$ long strings

$d_1 = \sqrt{a^2 + h_1^2}$ and $d_2 = \sqrt{a^2 + h_2^2}$. The task is to determine the analytical dependence of the deflection of the truss against the number of panels in the case of uniform loading of the truss by the nodes of the upper or lower belt.

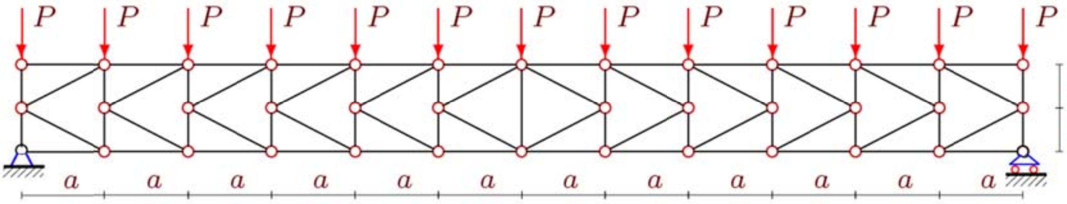


Fig. 1. A truss with n = 6. Load on the upper belt

To calculate the forces in the rods of the truss, the program [4] is used. In the program written in the language of symbolic mathematics Maple, it is necessary to enter the coordinates of the nodes. We number the rods and nodes of the truss (Figure 2). We set the origin in the left fixed support.

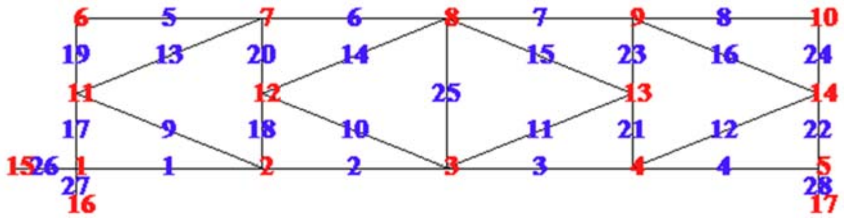


Fig. 2. Numbering of knots and rods, n = 2

The fragment of the coordinate input program has the form

```
> for i to 2*n+1 do
>   x[i]:=a*i-a:     y[i]:=0:
>   x[i+2*n+1]:=x[i]: y[i+2*n+1]:=h1+h2:
> od:
> for i to n do
>  x[i+4*n+2]:=a*i-a:  y[i+4*n+2]:=h1:
>  x[i+5*n+2]:=a*i+n*a: y[i+5*n+2]:=h1:
> od:
```

A matrix of the system of equations of node equilibrium is formed in the program. Among the unknowns, the reactions of the supports are included. The solution is obtained in symbolic form. The forces are determined separately for the given load and for the unit force applied at the deflection point. Calculation of the deflection is carried out using the Maxwell-Mohr's formula:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-3} S_i s_i l / (EF),$$

where: EF — the stiffness of the rods, S_i — the forces in the rods from the load, s_i — the forces in the rods from the action of a single vertical force applied to the middle node of the lower belt, l_i — the length of the rods, K = 12n + 1 — the number of rods, rods, modeling supports, they are taken rigid). The solution is successively for n = 1, 2, 3 ... Each time the solution has the form

$$EF\Delta = P(C_1a^3 + C_2d_1^3 + C_3d_2^3 + C_4h_1^3 + C_5h_2^3 + C_6h_1h_2^2 + C_7h_2h_1^2)/(2(h_1+h_2)^2).$$

The coefficients $C_1, C_2, ...C_7$ depend only on the number of panels and are determined by the induction method previously used in analogous problems in [1-3, 5-11]. Identify the recurrence equation, which is subject to the terms of this sequence can operator **rgf_findrecur** of the Maple system. This operator only works with an even number of arguments, and the necessary sequence length is determined by the type of the equation obtained (the coefficients in it must be integer) and the physical validity of the solution. In addition, the solution is checked numerically for large values of the number of panels. The solution of the equation is given by the **rsolve** operator. For the program to work, you need to connect a special package **genfunc**. Here is a fragment of the program for compiling a recurrence formula for the sequence of coefficients:

```
> n:='n':with(genfunc):
> S:=seq(C1[i],i=1..Nmax);
> NN:=nops([S])/2:
> Z:=rgf_findrecur(NN, [S], t,n); # The equation
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..NN)},t));# sulution
> factor(ZZ);# Simplification of the formula (factorization)
```

All actions (matrix compilation, solution) are performed in **for n to Nmax do ... end** loop. In the same cycle, with the help of the operator **coeff**, the coefficients are determined for the degree of the given variable. The operator **seq** creates a sequence of coefficients. Thus, the program compiled a recurrence equation for the sequence 0, 6, 42, 152, 400, 870, 1666, 2912, 4752, 7350 of the coefficients for a^3:

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

The solution of this equation has the form [3]

$$C_1 = n^2(5n-1)(n-1)/6.$$

Similarly, recursive equations for other coefficients are obtained and their expressions are determined

$$C_2 = C_3 = C_4 = n^2, C_5 = n^2 + 1,\ C_6 = 2n+1, C_7 = 2n.$$

When loading the lower belt (Figure 3), we get the following expressions for the coefficients:

$$C_1 = n^2(5n-1)(n-1)/6,\ C_2 = C_3 = C_4 = n^2, C_5 = n^2 + 1,\ C_6 = 2n+1, C_7 = 2n.$$

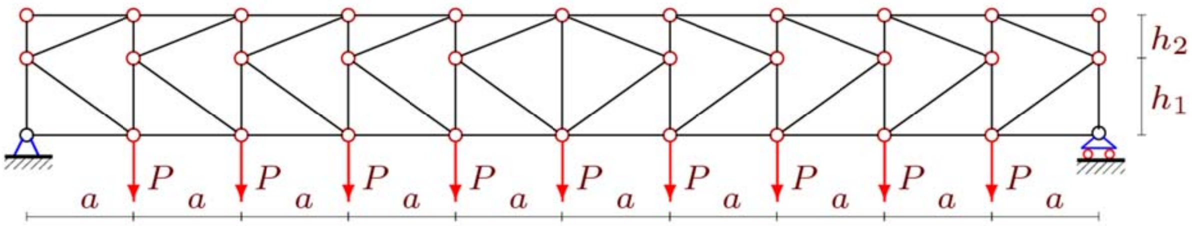


Fig. 3. A truss with n = 5. Load on the lower belt

In general, the strings can be fixed not in the middle of the post. Fixing the height $H = h_1 + h_2$ of the truss, we study the effect of the deviation ε of the hinge mounting point on the post: $h_1 = H/2 - \varepsilon$. Denote $\Delta' = \Delta EF/(P_s L)$ the dimensionless relative deflection, where $P_s = (2n+1)P$ the total load on the truss when loading the upper belt, $L = 2na$. Dependence (1) shows that the minimum deflection has a truss with a joint hinge in the middle of the column (Figure 4, – ε in meters). Any displacement of the hinge causes an increase in deflection.

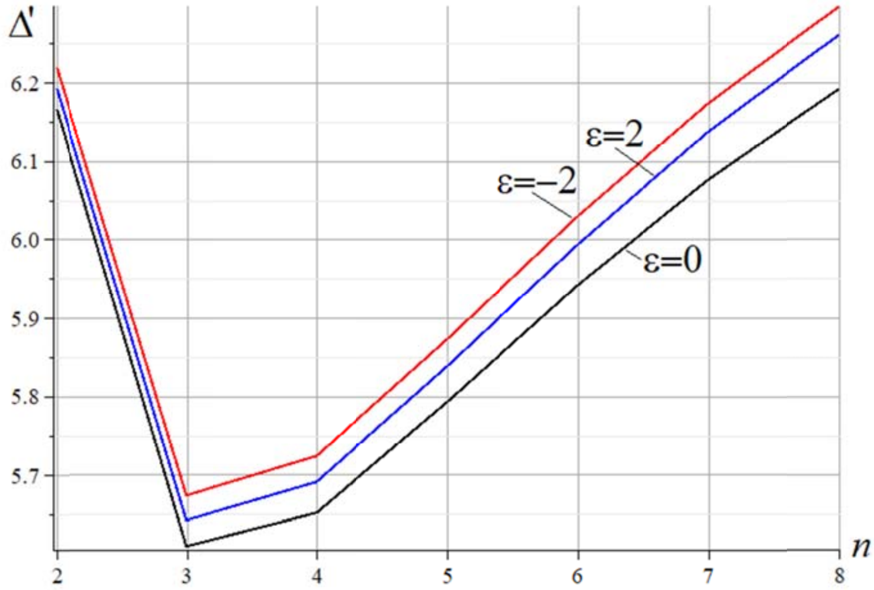


Fig. 4. Deflection depending on the number of panels

However, the exact minimum is not necessary $\varepsilon = 0$. Assuming the value ε to be small and using the Maclaurin expansion operator mtaylor(DEL,epsilon,3), from the condition $d\Delta'/d\varepsilon = 0$ we get that the minimum deflection corresponds to the value:

$$\varepsilon = \frac{(4n-1)c^2H^2}{2c((3n^2-2n+1)Hc+3n^2(2a^2+H^2))} .$$

With an increase in the number of panels ε tends to zero. Another useful asymptotic analysis can be performed for the deflection function as a function of *n*. Judging by the curves in Figure 3, the deflection increases with the number of panels. Accepting the previous limitations $P_s = (2n+1)P$, $L = 2na$ for relative deflection we have the slope of the horizontal asymptote

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta'}{n} = \frac{h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2}{2L(h_1+h_2)}.$$

To test the strength and stability of the structure as a whole, it is useful to know the expressions for the forces in the most stretched and compressed elements. Consider forces in the middle panel of the structure when loading the upper belt (Figure 5).

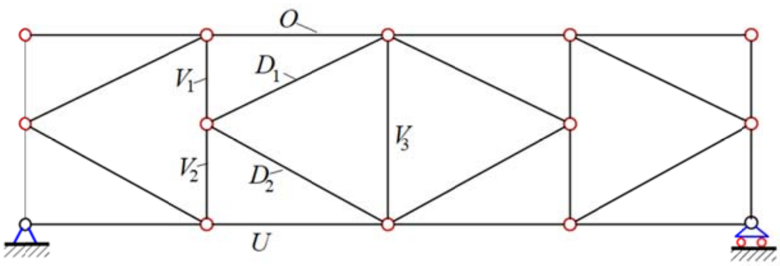


Fig. 5. Forces in rods

The calculation shows that in some bars the forces do not depend on the number of panels:

$$V_1 = -P(2h_1+h_2)/(2H),\ V_2 = -3Ph_1/(2H),$$
$$D_1 = -Pd_2/(2H),\ D_2 = Pd_1/(2H),\ V_3 = -Ph_1/H.$$

By induction we obtain expressions in two other rods. The upper belt is compressed, the lower one is stretched:

$$O = -U = -Pa(n^2 - 1)/(2H).$$

In problems on the deflection of planar trusses, the method of induction with the support of the Maple system was applied earlier in [2-9]. Problems in the symbolic form for arch trusses are solved in [10-16], lattice — [17-22], spatial — [23-27]. The formula for deflecting an externally statically indeterminate truss for an arbitrary number of panels was obtained in [28]. In [29], the **mtaylor** operator was also used to study the forces of the mounting error on deflection. Surveys of work in this direction can be found in [9,10,30].

References

1. Erzunov I.A., Gudozhnikov R.A. Progib ploskoj staticheski opredelimoj shprengel'noj fermy s proizvol'nym chislom panelej. Nauka i obrazovanie v XXI veke: sbornik nauchnyh trudov po materialam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii 31 oktyabrya 2014 g. v 17 chastyah. CHast' 4. Tambov: OOO«Konsaltingovaya kompaniya YUkom», 2014. Pp. 55-56. (in Rus.).
2. Logvinenko A. S. Formula dlya progiba shprengel'noj fermy pod dejstviem ravnomernoj nagruzki po nizhnemu poyasu. Aktual'nye voprosy v nauchnoj rabote i obrazovatel'noj deyatel'nosti: sb. nauch. tr. po mat-lam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 maya 2015 g.: CHast' 6. Tambov, 2015. Pp. 94-96. (in Rus.).
3. Logvinec A. A. Analiz progiba shprengel'noj fermy pod dejstviem ravnomernoj nagruzki po verhnemu poyasu. Aktual'nye voprosy v nauchnoj rabote i obrazovatel'noj deyatel'nosti: sb. nauch. tr. po mat-lam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 maya 2015 g.: CHast' 6. Tambov, 2015. Pp. 96-97. (in Rus.).
4. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p. (in Rus.).
5. Kirsanov M.N. Analiz usilij i deformacij v korabel'nom shpangoute, modeliruemom fermoj. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2017. Vol. 9. № 3. Pp. 560-569. (in Rus.).
6. Kirsanov M. N. Staticheskij analiz i montazhnaya skhema ploskoj fermy. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2016. No. 5 (39). Pp. 61-68. (in Rus.).
7. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti sterzhnevoj reshetki.Vestnik mashinostroeniya. 2015. № 8. Pp. 49-51. (in Rus.).
8. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99.
9. Osadchenko NV Calculation of the deflection of a flat, continuous, statically determinate truss with two spans. Postulat. 2017. No. 12. (in Rus.).
10. Osadchenko N.V. Analiticheskie resheniya zadach o progibe ploskih ferm arochnogo tipa. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2018. T. 1. № 16. Pp. 12–33. (in Rus.).
11. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba arochnoj fermy. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2018. №1. Pp.7-11. (in Rus.).
12. Kirsanov M.N. Induktivnyj analiz deformacii arochnoj fermy. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70 (in Rus.).
13. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. O zavisimosti deformacij ploskoj arochnoj fermy ot chisla panelej. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2017. № 5. Pp. 9-14. (in Rus.).

14. Kirsanov M.N. Analiz progiba arochnoj fermy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2017. № 5. Pp. 50-5. (in Rus.).
15. Kirsanov M.N. Sravnitel'nyj analiz zhestkosti dvuh skhem arochnoj fermy. Stroitel'stvo unikal'nyh zdanij i sooruzhenij. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55. (in Rus.).
16. Kirsanov M.N. Analiticheskoe issledovanie deformacij ploskoj fermy arochnogo tipa. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48. (in Rus.).
17. Kirsanov M. N., Maslov A.N. The formula for the deflection of multiple lattice beam truss calculation. Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). Pp. 4-10. (in Rus.).
18. Domanov E.V. Vyvod formuly dlya progiba balochnoj fermy s krestoobraznoj reshetkoj. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2017. №2 (15). Pp. 15-19. (in Rus.).
19. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilij v reshetchatoj ferme. Mekhanizaciya stroitel'stva. 2017. №4. Pp. 20-23. (in Rus.).
20. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoj fermy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2017. N3. Pp. 23–27. (in Rus.).
21. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
22. Gridnev S.Yu., Kirsanov M.N., Ovchinnikov I.G. Static calculation of a double-beam girder truss. Internet-journal Naukovedenie. 2016. Vol. 8, No. 6 (in Rus.).
23. Kirsanov M.N. Progib prostranstvennogo pokrytiya s periodicheskoj strukturoj. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2017. № 8(76). Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6 (in Rus.).
24. Kirsanov M.N. Izgib, kruchenie i asimptoticheskij analiz prostranstvennoj sterzhnevoj konsoli. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2014. № 5 (49). Pp. 37-43.
25. Kirsanov M.N. Analiticheskoe issledovanie zhestkosti prostranstvennoj staticheski opredelimoj fermy. Vestnik MGSU. 2017. T. 12. № 2 (101). Pp. 165–171. (in Rus.).
26. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
27. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2012. № 1. Pp. 49-53. (in Rus.).
28. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Issledovanie deformacij ploskoj vneshne staticheski neopredelimoj fermy. Vestnik MGSU. 2017. T. 12, № 8 (107). Pp. 869–875. (in Rus.).
29. Kirsanov M.N. Induktivnyj analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost' i prochnost' ploskoj fermy. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2012. №5(31). Pp. 38-42. (in Rus.).
30. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection. Magazine of Civil Engineering. 2015. No.5(57). Pp. 66–73 doi: 10.5862/MCE.57.6 (in Rus.).

Библиографический список

1. Ерзунов И.А., Гудожников Р.А. Прогиб плоской статически определимой шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 55-56.
2. Логвиненко А. С. Формула для прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30

мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 94-96.
3. Логвинец А. А. Анализ прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 96-97.
4. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
5. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569.
6. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
7. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
8. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99
9. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 28.
10. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С. 7-11.
12. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
13. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9-14.
14. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-5
15. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
17. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10.
18. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. №2 (15). С. 15-19.
19. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23
20. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. N3. С. 23–27.
21. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
22. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. Том 8, №6 (2016)
23. Кирсанов М.Н. Прогиб пространственного покрытия с периодической структурой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6

24. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
25. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165–171.
26. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
28. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
29. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42.
30. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

УДК 624.04

THE DEPENDENCE OF THE DEFLECTION OF THE CANTILEVER TRUSS ON THE NUMBER OF PANELS OBTAINED IN THE SYSTEM MAPLE

E. V. Domanov[1]

National Research University “MPEI”

Russia. Moscow

[1]Student, tel.: *+7(999)602-98-50*; e-mail: domanov312@mail.ru

A symmetrical cantilever-beam trussed grid is loaded on the lower or upper belt. The method of induction with the use of special operators of symbolic mathematics Maple shows the dependence of the deflection of the middle of the span of the truss on the number of panels in the span and on its console parts. To determine the coefficients of the desired formula, recurrence equations are compiled and solved. The graphs of the dependences obtained reveal extreme points that can be used to optimize the stiffness design

Keywords: truss, deflection, induction, analytical solution, Maple, Mohr's integral

ВЫВОД ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА КОНСОЛЬНОЙ ФЕРМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

Е. В. Доманов[1]

Национальный исследовательский университет “МЭИ”

Россия, г. Москва

[1]Студент, тел.: *+7(999)602-98-50*; e-mail: domanov312@mail.ru

Рассматривается симметричная консольно-балочная ферма с треугольной решеткой, которая загружена по нижнему или верхнему поясу. Методом индукции с привлечением специальных операторов символьной математики Maple выводится зависимость прогиба середины пролета фермы от числа панелей в пролете и на консольных ее частях. Для определения коэффициентов искомой формулы составлены и решены рекуррентные уравнения. Графики полученных зависимостей обнаруживают экстремальные точки, которые могут быть использованы для оптимизации конструкции по жесткости.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, аналитическое решение, Maple, интеграл Мора

You can use not only numerical methods to calculate truss. The development of computer systems of symbolic mathematics makes it possible to find formulas for calculating regular-type constructions. The induction method in [1-6] obtained formulas for the dependence of the deflection on the number of panels, the load, and the size of the truss. In [7-10] the induction method derived formulas for the deflection of arches, and in [11-22] for the deflection of lattice trusses. The problems of deformations of spatial constructions are solved in [23-30]. As a rule, in these problems, we conducted induction on one parameter — the number of panels in the span. More complex generalizations can be carried out on two parameters – the number of panels in the span and on the consoles. It is this task that is being solved in this work.

Consider a truss with 2n panels in the span and m panels on consoles (Fig. 1). The truss is loaded on the upper belt. For the solution we use the system of computer mathematics Maple [31].

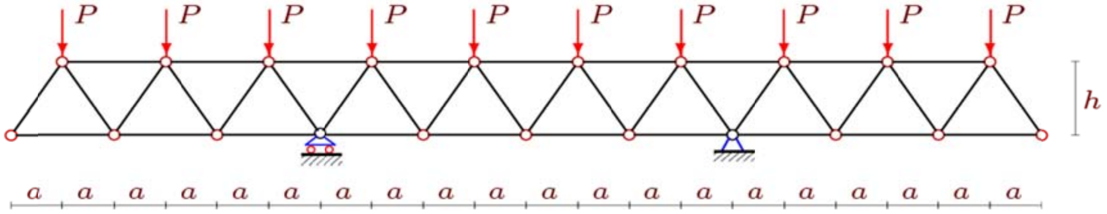


Fig. 1. A truss with n = 2, m = 3. Load on the upper belt

The program numbers the rods and nodes (Fig. 2). The origin is located at the left end of the truss on the console. Define the coordinates of the nodes.

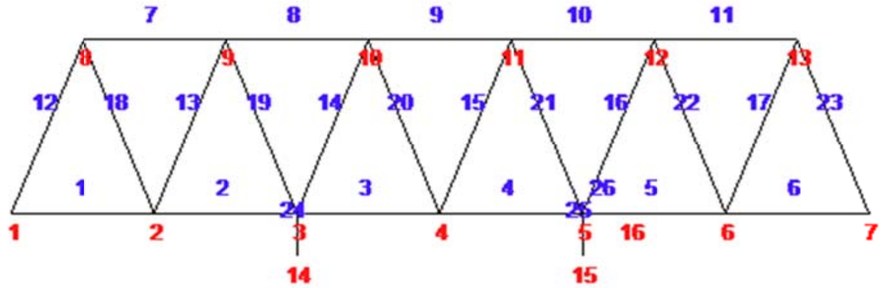


Fig. 2. Numbering of knots and rods, n = 1, m = 2

The fragment of the coordinate input program has the form

```
> for i to 2*(n+m)+1 do
>   x[i]:= 2*a*(i-1):  y[i]:=0:
> od:
> for i to 2*(n+m) do
>  x[i+2*(n+m)+1]:= 2*a*(i-1)+a:   y[i+2*(n+m)+1]:=h:
> od:
```

A matrix of the system of equations of all nodes in truss equilibrium is formed in the program. Among the unknowns, the three reactions of two supports are includedIn the right part of the system write the load value. Vertical forces are written in even lines:

```
> for i from 2*(m+n)+2 to 4*(m+n)+1 do np:=i;  Bp[2*np]:=1: od:
```

The solution is obtained in symbolic form. The forces are determined separately for the given load and for the unit force applied at the deflection point. Calculation of the deflection is carried out using the Mohr's integral:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-3} S_i s_i l / (EF),$$

where: EF — the stiffness of the rods, S_i— the forces in the rods from the load, s_i — the forces in the rods from the action of a single vertical force applied to the middle node of the lower belt, l_i — the length of the rods, $K = 8(m+n)+2$ — the number of rods, rods, modeling supports, they are taken rigid). The general form of the solution does not change for any numbers n and m (the regularity property of the problem):

$$EF\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 b^3)/h^2. \tag{1}$$

First, we induction on the number of panels n for fixed m. For m = 1, we solve the problem of deflection of 10 trusses with a consecutive number of panels n = 1, 2, ... 10. Using the rgf_findrecur operator, we get the recursion equation for the coefficient for a^3, solve it with the rsolve operator and find the coefficient $C_1 = (10n^4 - 10n^2)/3$. Similarly, for m = 2, we get

$C_1 = (10n^4 - 46n^2)/3$. For m = 3, $C_1 = (10n^4 - 106n^2)/3$ etc. As a result, we obtain a sequence of the number of panels on consoles 10,46,106,190,298,430,586,766,970,1198 . We find the general term of this sequence and write down the general form of the coefficient for a^3

$$C_1 = (10n^4 - (12m^2 - 2)n^2)/3.$$

The other coefficient turns out to be independent of m and is simpler, without using the Maple operators

$$C_2 = n^2.$$

Omitting the computations and the intermediate results, we give the solution of the problem of the deflection of the middle of a truss under the action of a load distributed over the *lower* belt (Fig. 3):

$$C_1 = (10n^4 - (12(m^2 + m) + 1)n^2)/3,\ C_2 = n^2.$$

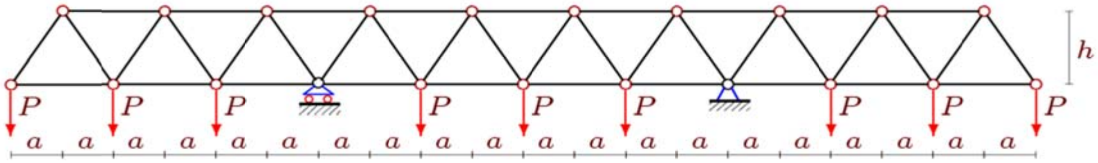


Fig. 3. A truss with n = 2, m = 3. Load on the lower belt

Denote $\Delta' = \Delta EF/(P_s L)$ the dimensionless relative deflection, where $P_s = (2n + 2m + 1)P$ the total load on the truss when loading the upper belt, $L = 2(n+m)a$. The constructed graphs reveal two characteristic regularities. First, the curves have pronounced minima. Secondly, the curves after some value of n change the order and the deflection begins to grow.

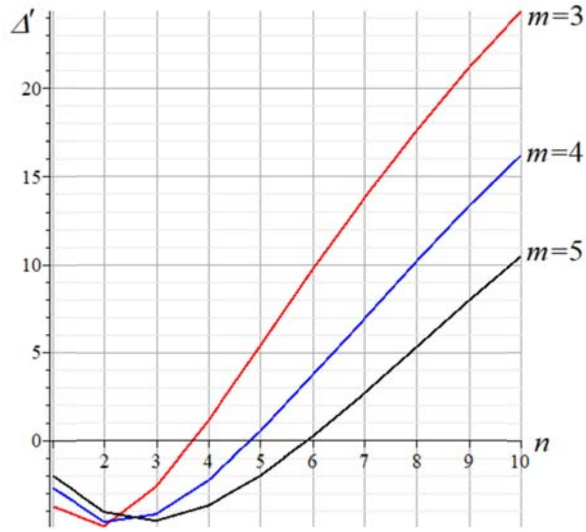


Fig. 4. Deflection depending on the number of panels *n*, *L*=100*m*, *h*=5*m*

Similar features reveal the curves of the dependence on the number of panels on the consoles (Fig. 5). At the same time it is noticed that the minimum essentially depends on the number of panels in the span.

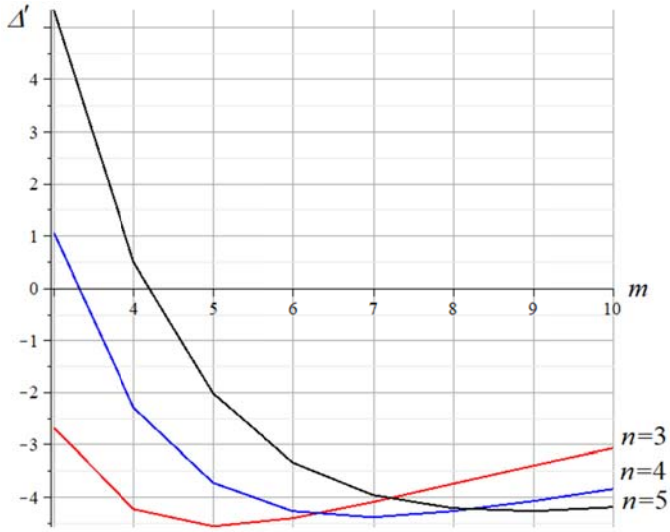


Fig. 5. Deflection depending on the number of panels *n*, *L*=100*m*, *h*=5*m*

Surveys of work in this direction applied to planart trusses can be found in [32,33].

References

1. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. *Science Almanac.* 2016, no. 4-3 (18). pp. 257-259.
2. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of the girder beam, loaded on the bottom flange in the system Maple. *Science Almanac.* 2016, no. 5-3 (19). pp. 236-239.
3. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. *Russian Journal of Building Construction and Architecture.* 2018, no. 1 (37). pp. 92-99.
4. Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R Analytical calculation of the displacement of the truss support. *Science Almanac.* 2017, no. 2-3 (28). pp. 275-278.
5. Kirsanov M.N. Calculation of a three-dimensional bar system permitting instantaneous variability. *Construction mechanics and design of structures.* 2012, no. 3. pp. 48-51.
6. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the effect of the installation error on the stiffness and strength of a flat truss. *Engineering and Construction Journal.* 2012, no. 5 (31). pp. 38-42.
7. Kirsanov M.N. Formulas for calculating arch arch deflection . *Construction mechanics and structures.* 2018, no. 1. pp.7-11.
8. Kirsanov M.N. Analysis of arch arch deflection. *Construction mechanics of engineering structures and structures.* 2017, no.5. pp. 50-55.
9. Kirsanov M.N. Analysis of efforts and deformations in a ship frame modeled by a truss. *Vestnik of the State University of the Marine and River Fleet. Admiral S.O. Makarov.* 2017. Vol. 9, no. 3. pp. 560-569.
10. Osadchenko N.V. Analytic solutions of problems on the deflection of flat arches of arch type. *Construction mechanics and constructions.* 2018, no. 1. pp.12-33.
11. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences.* 2016, no. 4-3 (8). pp. 7-8.
12. Kirsanov M.N. To the choice of the lattice of the beam truss . *Construction mechanics of engineering structures and structures.* 2017, no. 3. pp. 23-27.
13. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of the spacer truss with an arbitrary number of panels. *Mechanization of construction.* 2017, no. 3. pp. 26-29.

14. Kirsanov M.N. Formulas for the calculation of deflection and effort in the lattice truss. *Mechanization of construction.* 2017, no.4. pp. 20-23.
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a two-span flat truss. *Mechanization of construction.* 2017, no. 5. pp. 35-38.
16. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Investigation of deformations of a planarly externally statically indeterminate truss. *Vestnik MGSU.* 2017, Vol. 12, no.8 (107). pp. 869-855.
17. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering.* 2016, Vol. 1, no. 3. pp. 14-17.
18. Kirsanov M.N. The derivation of the formula for the deflection of a lattice truss having cases of kinematic variability. *Construction Mechanics and Constructions.* 2017, Vol. 1, no. 14. pp. 27-30.
19. Kirsanov M.N. Analytical method for calculating the deflection of a flat truss with a complex grid of a spiral type. *Transport construction.* 2017, no.5. pp. 11-13.
20. Kirsanov M.N. Analytic calculation of a beam truss with a complex lattice. *Construction mechanics and calculation of structures.* 2015, no. 3 (260). pp. 7-12.
21. Kirsanov M. Calculation of the deflection of a flat lattice truss with four supports. *Transport construction.* 2017, no.7. pp. 15-18.
22. Kirsanov M.N. Calculation of the stiffness of the rod lattice. *Bulletin of Machine Building*. 2015, no. 8. pp. 49-51.
23. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of the truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering.* 2016, no. 4. pp. 52-58. doi: 10.5862 / MCE.64.5.
24. Kirsanov M.N. Static analysis and installation diagram of a flat truss. *Vestnik of the State University of Marine and River Fleet named after Admiral S.O. Makarov.* 2016, no. 5 (39). pp. 61-68.
25. Kirsanov M.N. The deflection of a spatial covering with a periodic structure. *Magazine of Civil Engineering.* 2017, no. 8 (76). pp. 58-66. doi: 10.18720 / MCE.76.6
26. Kirsanov M.N. Bending, torsion and asymptotic analysis of the spatial core console. *Engineering and Construction Journal.* 2014, no. 5 (49). pp. 37-43.
27. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a truss of a rectangular spatial covering. *Magazine of Civil Engineering.* 2015, no. 1 (53). pp. 32-38.
28. Kirsanov M.N. Features of the analytical calculation of spatial rod systems. *Construction mechanics and calculation of structures.* 2011, no. 5. pp. 11-15.
29. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod regular structure with a flat face. *Construction mechanics and calculation of structures.* 2015, no. 2 (259). pp. 2-6.
30. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of a spatial beam truss. *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute.* 2012, no.5, pp. 5-8.
31. Kirsanov M.N. Problems in theoretical mechanics with solutions in Maple 11. - Moscow: Fizmatlit, 2010. 264 p.
32. Osadchenko NV Calculation of the deflection of a flat, continuous, statically determinate truss with two spans. *Postulate.* 2017, no. 12.
33. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of the deflection of truss structures. *Magazine of Civil Engineering.* 2015. №5 (57). pp. 66-73.

Библиографический список

1. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load// Science Almanac. 2016. №. 4-3(18). C. 257-259.
2. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Science Almanac. 2016. №. 5-3(19). pp. 236-239.

3. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. №. 1(37). P.92-99.
4. Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R Analytical calculation of the displacement of the truss support// Science Almanac. 2017. №. 2-3(28). С. 275-278.
5. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 48-51.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
9. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569.
10. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С.12-33.
11. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). С. 7-8.
12. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №.3. С. 23–27.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3. С. 26-29.
14. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35-38
16. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, №.8 (107). С. 869 – 875.
17. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
18. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решётчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1, № 14. С. 27 – 30.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С. 11-13.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
21. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
22. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки//Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
23. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. №. 4. pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
24. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
25. Кирсанов М.Н. Прогиб пространственного покрытия с периодической структурой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6

26. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
27. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
28. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11-15.
29. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
31. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. - М.: Физматлит, 2010. 264 с.
32. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12.
33. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 669.01(075.8)

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТ ДОЛГОВЕЧНОСТИ РЕКОНСТРУИРУЕМОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЗДАНИЯ ПОСЛЕ ПЕРЕПРОФИЛИРОВАНИЯ

В.С. Сафронов[1], Д.Т. Чан[2]

Воронежский государственный технический университет[1,2]
Россия, г. Воронеж

[1] Д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики, *тел.: +7 (473) 2715230; e-mail:* vss22@mail.ru
[2] Магистрант кафедры строительной механики

Предлагается и апробируется на реальном объекте методика расчета надежности и остаточной долговечности несущей системы длительно эксплуатируемого одноэтажного многопролетного производственного здания после перепрофилирования в логистический комплекс с учетом интенсивности изменения временных технологических нагрузок на основные элементы несущего каркаса. Количественные параметры надежности несущей системы определяются по вероятностным показателям отказа составляющих элементов конструктивной схемы здания на основе модели нагрузок в виде случайных стационарных нормальных эргодических функций с использованием теории выбросов за постоянный нормальный случайный уровень с заданным средним и стандартом. Приводятся результаты численных исследований надежности и остаточной долговечности несущей системы реконструируемого здания в зависимости от параметров их нагруженности.

Ключевые слова: производственное здание, перепрофилирование, несущая система, надежность несущей системы, остаточная долговечность, расчетный алгоритм, технологические временные нагрузки, стационарная случайная функция, теория выбросов.

PROBABILISTIC DESIGN OF UNDER RECONSTRUCTION INDUSTRIAL BUILDING AFTER CHANGING THE LINE OF BUSINESS

V.S. Safronov[1], D.T. Chan[2]
Voronezh State Technical University[1,2]
Voronezh, Russia

[1] Dr of Tech.Sc. Professor of Department of Structural Mechanics, *tel.: +7(473) 2715230; e-mail:* vss22@mail.ru
[2] Master of Department of Structural Mechanics

There is suggested and tested on real object the method of calculation of durability and residual life of load-carrying system of one-storied multispan industrial building after changing the line of business into logic complex with account of intensity of temporary technological loads changing on the load – carrying frame main members. Numerical parameters of load – carrying system durability are determined by probabilistic indexes of building structural scheme component members failure based on load models as random permanent normal ergodic functions with application of theory of runs outside the normal random level with designed average one and standard. There are presented the results of numerical researches of durability and residual life of load-carrying system of under reconstruction industrial building in dependence on their burden parameters.

Keywords: industrial building, changing the line of business, load- carrying system, load-carrying system durability, design algorithm, residual life, temporary technological loads, stationary accidental loads, stationary random function, theory of runs.

Введение

Современные тенденции в развитии применяемых в строительной инженерной практике расчетных методик ориентированы на их постоянное совершенствование с целью применения современных конечно-элементных вычислительных комплексов. Наиболее эффективно указанный процесс происходит при использовании вероятностных методик, которые позволяют получать более обоснованные проектные решения [1]. Применяемые в настоящее время вычислительные алгоритмы вероятностных расчетов используют модели действующих нагрузок и применяемых материалов в виде случайных величин, однако такой подход является приближенным, так как не учитывает флуктуации учитываемых параметров во времени [2]. Более совершенным считается построение вычислительных алгоритмов расчета надежности на основе моделей действующих на сооружения нагрузок в виде случайных функций [3-4]. В последние годы такие вычислительные алгоритмы используются для оценок изменяющихся параметров надежности зданий и сооружений при сейсмических воздействиях [5] и для определения остаточного ресурса длительно эксплуатируемых несущих конструкций зданий производственного назначения [6]. Построение моделей описания действующих нагрузок в виде случайных функций для расчетного анализа проектных решений при перепрофилировании строительного объекта требует учета изменения во времени интенсивности загруженности изношенных конструкций и новых несущих элементов. Это требует построения более совершенных вычислительных алгоритмов [9-14]

В настоящем исследовании на примере перепрофилирования расположенного в г. Воронеже ремонтного трамвайно-троллейбусного завода в логистический центр предлагается и апробируется методика расчета надежности длительно эксплуатируемой несущей системы здания на основе моделей в виде стационарных случайных функций для действующих нагрузок и случайных величин - для предельных усилий. Исследования надежности отдельных конструктивных элементов указанного производственного здания с позиций теории надежности и приближенного описания нагрузок в виде случайных величин выполнены нами в работах [7-8].

1. Основные положения вычислительного алгоритма расчета надежности и долговечности несущей системы перепрофилируемого производственного здания

Учет влияния длительности эксплуатации выполним на основе методики, математическое описание которой приведено в работах [3] и [4]. Ниже приведем её описание с использованием следующих допущений:

- действующие в несущих элементах каркаса и элементах покрытия усилия от суммарного действия постоянных и временных нагрузок считается нормальным стационарным эргодическим случайным процессом с заданным математическим ожиданием m_R, стандартом σ_F и корреляционной функцией $K_R(\tau)$.
- предельные усилия R в несущих элементах сооружения моделируются случайными не зависящими от времени случайными величинами с заданными математическими ожиданиями m_R и стандартом σ_R, которые соответствуют используемым в публикациях [7-8] величинам. Они определяются с учетом разброса прочностных характеристик материалов различных конструкции и грунта основания под фундаментами колонн здания.

Указанные допущения вводятся для описания процессов изменения во времени загруженности несущих элементов здания с момента завершения строительно-монтажных работ по перепрофилированию. В логистических центрах случайная функция F(t) изменения усилий в отдельных элементах несущей системы включает постоянную случайную составляющую от постоянных нагрузок и зависящую от времени составляющую от временных нагрузок при загрузке и разгрузке с помощью . кранового оборудования складируемых товаров.

Графически рассматриваемая модель загружения несущих элементов здания представлена на рис. 1, где наряду со случайной функцией нагрузки F(t) показан случайный постоянный уровень предельного усилий R в конструкции.

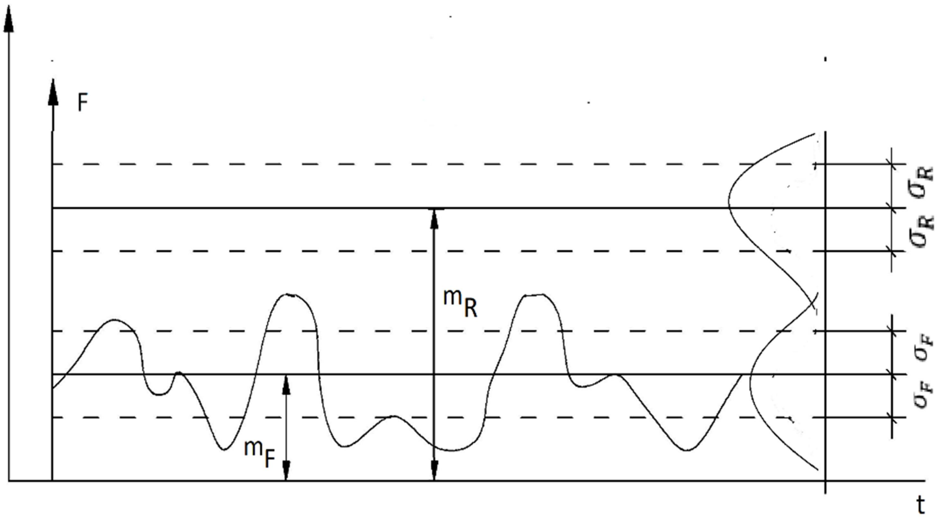


Рис. 1. Расчетные модели действующих от нагрузок усилий и их предельных значений

В такой расчетной постановке вероятность отказа строительной конструкции определяется на основе теории выбросов нормальной стационарной эргодической случайной функции за заданный уровень. Интенсивность отказов в единицу времени можно вычислять по формуле

$$U = \frac{1}{T}\ \exp\left(\frac{-(m_F - m_R)2}{2\ (\sigma_F^2 + \sigma_R^2)}\right), \tag{1}$$

где T - эффективный период загружения несущей конструкции, при котором возможно одно превышение действующим в строительной конструкции усилия его предельного значения.

Для большинства эксплуатируемых строительных конструкций, срок службы которых находится в диапазоне от 30 до 100 лет, величина интенсивности отказа является весьма малой. Поэтому вероятность хотя бы одного отказа за срок службы t определяется по схеме «редких событий» [3]:

$$Q(t) = 1 - \ \exp(-U \times t)\ , \tag{2}$$

По найденным величинам вероятности отказов в основных несущих элементах производственного здания можно вычислить надежности безотказного функционирования этих элементов для тех же моментов времени t из известного соотношения:

$$H(t) = 1 - Q(t). \tag{3}$$

Надежность несущей системы производственного здания в целом для произвольного момента времени $H(t)$ определяется в зависимости от топологии соединения между собой составляющих несущих элементов $H_i(t)$ на тот же момент времени. При последовательном соединении, когда отказ одного из элементов приводит к отказу здания в целом, следует использовать теорему умножения независимых случайных событий:

$$H_c(t) = \Pi_{i=1}^{i=n} H_i\ . \tag{4}$$

Далее по вычисленной надежности производственного здания в целом можно определить удобные для практического использования логарифмический показатель надежности:

$$\rho_c = \log\left(1/(1 - H_c)\right). \quad (5)$$

В связи с тем, что при последовательном сопряжении несущих конструкций здания, отвечающих статически определенной статической схеме, надежность здания в целом близка к надежности наиболее ненадежной конструкции легко выявить элементы, которые следует усилить при реконструкции.

Остаточный срок службы здания T_o или его отдельных несущих элементов определим из выражения (2), задаваясь минимальной величиной вероятности отказа Q_{min} при установившейся длительное время их интенсивности U:

$$T_o = \frac{-\ln(1-Q_{min})}{U}. \quad (6)$$

По описанному выше алгоритму составлена вычислительная программа на языке математического комплекса Mathcad. Ниже приводятся результаты ее применения для реального объекта.

2. Объект применения предлагаемой методики расчета надежности

Объектом исследований является выведенный из эксплуатации в 1994 году и длительное время находящийся без технического обслуживания главный производственный корпус трамвайно-троллейбусного ремонтного завода в г. Воронеже. Общий вид здания снаружи и несущей системы с внутренней стороны после демонтажа производственного оборудования представлены соответственно на рис.2 и рис.3. При длительной эксплуатации корпуса под влиянием атмосферных воздействий в несущих конструкциях появились различные дефекты, снижающие их долговечность и несущую способность. Подробное описание несущей системы здания, представляющей собой смонтированные по закрепленным в фундаментах стаканного типа железобетонным колоннам стропильные фермы с полигональными поясами из железобетона, представлено в работе [7. 8].

Надежность несущей системы прослужившего около 50 лет производственного здания изучена нами в этих исследованиях с использованием моделей случайных величин для действующих нагрузок и прочностных характеристик материалов без учета особенностей эксплуатации, при котором технологические процессы осуществлялись без применения прикрепленных к несущим конструкциям грузоподъемных кранов. Влияние фактора времени исследовано по параметрам коррозии арматуры в нижних поясах стропильных ферм покрытия в статье [7] по данным натурного обследования. Наряду со стропильными фермами в этой работе изучены другие основные несущие конструкции здания : подстропильные фермы, колонны, фундаменты и грунт основания. Полученные данные о логарифмических показателях надежности здания для крайних $\rho_к = 3.98$ *и* для средних пролетов $\rho_c = 4.75$ позволили рекомендовать перепрофилировать здание в логистический центр и определить конструктивные мероприятия для повышения надежности несущей системы. Однако в связи тем, что для обеспечения работы логистического центра в несущую систему здания включается крановое оборудование, требуются дополнительные исследования с целью определения интенсивности и весовых параметров загружаемых товаров. Методика и результаты этих исследований приводятся ниже на основе теории выбросов стационарных случайных функций [3-4].

Рис. 2. Южный фасад главного корпуса трамвайно-троллейбусного ремонтного завода в период длительного простоя без проведения работ по консервации несущих и ограждающих конструкций с отключенным отоплением

Рис. 3.Общий вид изнутри несущих конструкций главного корпуса завода после демонтажа технологического оборудования

3. Апробация предлагаемой методики расчета долговечности

При реализации предлагаемого вычислительного алгоритма расчета надежности и долговечности несущей системы перепрофилируемого производственного здания использовались плоская и пространственная расчетные схемы, которые были применены при вычислении усилий в следующих несущих элементах: стропильных и подстропильных фермах, на участках крайнего и среднего рядов колонн в надкрановой (верхней) и подкрановой (нижней) частях, в фундаментах стаканного типа под колонны крайних и средних рядов каркаса и грунтах основания под фундаментами колонн.

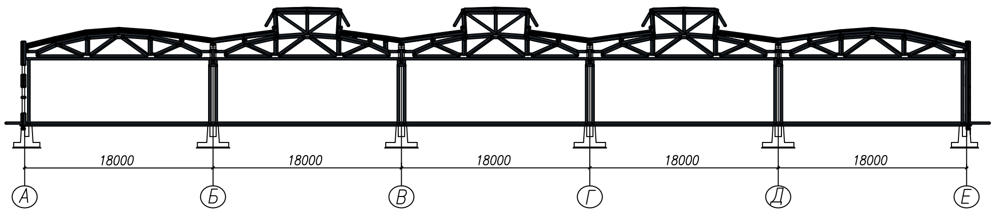


Рис. 4. Плоская расчетная схема производственного здания

В целях сокращения объема статьи геометрические размеры, характерные сечения и армирование основных конструктивных элементов несущей системы рассматриваемого здания: железобетонных ферм покрытия, железобетонных колонн и фундаментов столбчатого типа не приводятся, так как они даны на представленных рисунках в статьях [7-8]

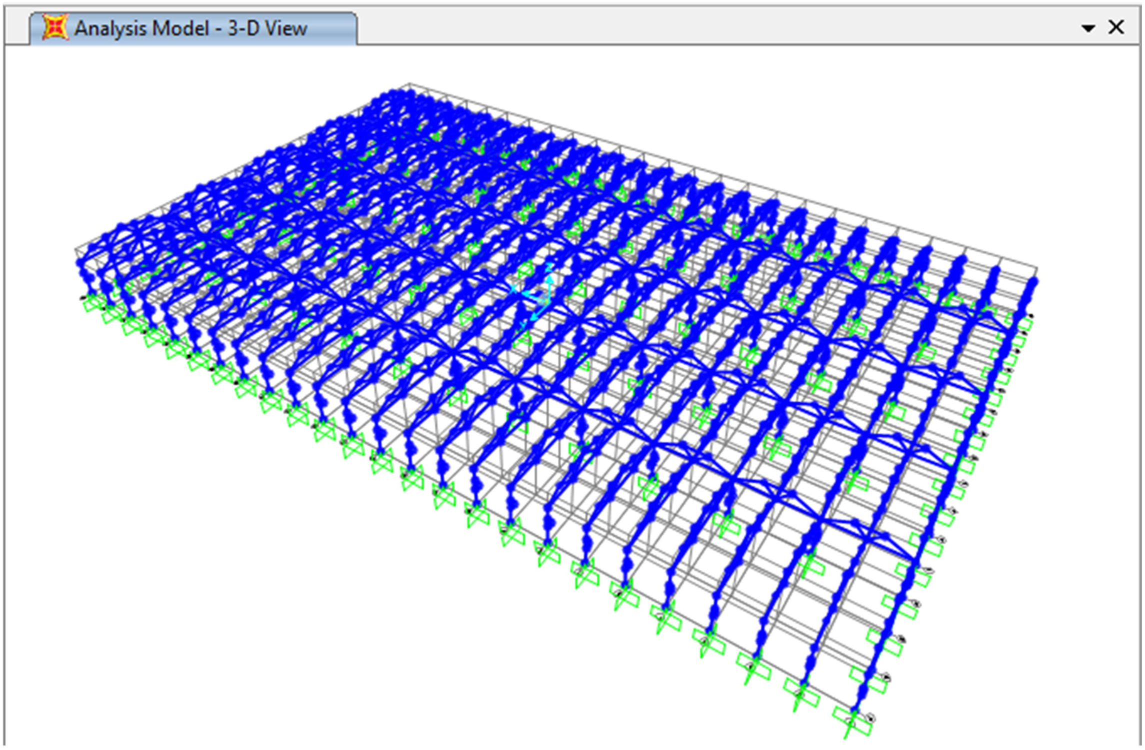


Рис. 5. Пространственная расчетная схема несущего каркаса цеха

При выполнении расчетов надежности отдельных конструктивных элементов несущей системы рассматриваемого здания использовались следующие критерии:

- **для железобетонных стропильных и подстропильных ферм покрытия** - прочность средних элементов нижних поясов, которые по данным приведенных в работе [7] расчетов типовой стропильной фермы являются наименее надежными. В качестве расчетного показателя принимается усилие растяжения, воспринимаемого только рабочей арматурой в нижнем поясе;

- **для характерных сечений подкрановой и надкрановой участков колонн каркаса** – прочность внецентренно сжатых железобетонных стержней прямоугольного поперечного сечения с двойным армированием. Расчетный показатель представляется изгибающим моментом M, равным произведению нормальной сжимающей силы N на эксцентриситет: $e = {}^{M}/_{N}$;
- **для железобетонных фундаментов под колонны** – прочность на изгиб перпендикулярных поперечным осям здания опорных сечений консольных элементов фундаментной плиты. Расчетный показатель отвечает максимальному изгибающему моменту в этом сечении;
- **для грунтовых оснований под фундаментами колонн** – прочность грунта на наиболее нагруженном краю фундаментной плиты.

4. Результаты расчетов надежности несущей системы реконструируемого цеха

Описанная выше методика определения надежности конструктивных элементов реконструируемого цеха реализована в виде вычислительной программы на языке математического комплекса Mathcad, позволяющей проследить изменения по времени надежности отдельных конструктивных элементов несущей системы одного из крайних пролетов цеха зависимости от времени и интенсивности эксплуатации логистического центра. Количественные показатели логарифмического показателя надежности для эффективного периода нагружения несущей системы логистического центра, составляющего один месяц (1/12 года), приведены в таблице.

Таблица

Расчетные показатели надежности здания
в зависимости продолжительности эксплуатации

Элемент несущей системы	Максимальное усилие от нагрузок		Предельное усилие		Логарифм. показатели ρ для лет эксплуатации			
	матем. ожидание	стандарт	матем. ожидание	стандарт	5	10	20	30
Железобетонная стропильная ферма	620	40	940	42	3,75	3,45	3,15	2,97
Железобетонная подстропильная ферма	569	30	848	42	3,49	3,19	2,89	2,71
Надкрановая часть железобетонной колонны	101	11	417	55	4,04	3,73	3,43	3,26
Подкрановая часть железобетонной колонны	206	29	468	40	3,25	2,95	2,65	2,47
Опорное сечение консоли фундаментной плиты	81	16	360	18	15	15	15	15
Грунтовое основание под фундаментом	196	39	867	100	5,63	5,33	5,03	4,85
Несущая система здания в целом					2,94	2,63	2,33	2,16

Количественные показатели нагрузочных факторов для всех элементов несущей системы здания в приведенной таблице даны для основного сочетания эксплуатационных воздействий, включающего постоянные нагрузки и временные от снега, ветра и крановых воздействий. Их количественные значения, а также статистические характеристики приведены в таблице. Там же даны средние (математические ожидания) и стандарты предельных значений принятых в вероятностных расчетах надежности прочностных показателей рассматриваемых элементов несущей системы здания.

Из анализа данных, приведенных в таблице, которые характеризуют надежность различных элементов несущей системы здания, видно, что они существенно отличаются друг от друга. Наиболее низкие логарифмические показатели надежности имеют подстропильные фермы покрытия и подкрановые участки железобетонных колонн, которые за 10 лет эксплуатации снижаются до минимально допустимых величин ρ=3,0. Эти элементы несущей системы здания при проведении реконструкции должны быть подвергнуты усилению. Остаточный срок эксплуатации стропильных ферм покрытия, надкрановых частей колонн, столбчатых фундаментов и грунтов основания превышает 30 лет, поэтому эти конструкции не требуют усиления.

Отметим, что вероятностные расчеты по плоской и пространственной расчетным схемам здания показали близкие результаты. Существенным фактором, влияющим на изменение надежности отдельных несущих элементов и здания в целом, является интенсивность загружения, определяемая зависящим от частоты появления близких к предельным загружениям эффективного периода. На рис. 6 представлены полученные по численным расчетам зависимости логарифмических показателей надежности системы здания в целом по времени на крайних рядах для трех следующих различных эффективных периодов: 1 месяц (1/12 года), 1 неделя (1/52 года) и один день (1/365 года)..

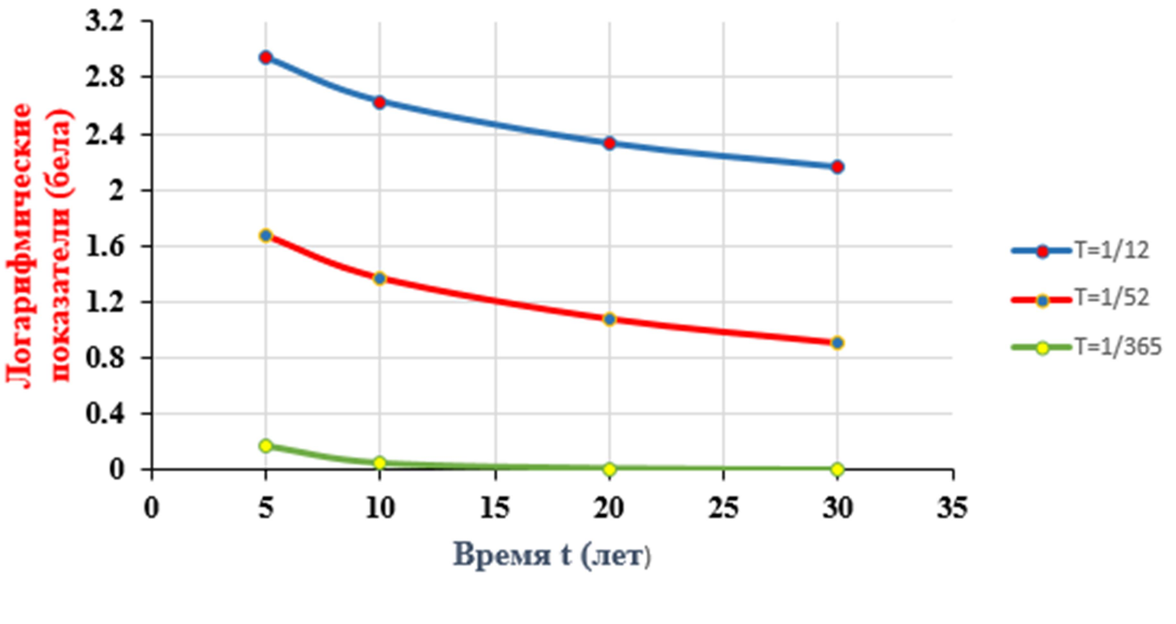


Рис. 6. График изменения логарифмических показателей надежности системы здания в целом по времени на крайних рядах

Сопоставление представленных графиков приводит к очевидному выводу, что надежность несущей системы здания в целом не позволяет обеспечить безопасную эксплуатацию логистического центра при достаточно интенсивных режимах эксплуатации, когда выбросы усилий, близкие к предельным значениям, возможны чаще, чем один раз в месяц.

Выводы

Предложенная в настоящей статье методика расчета надежности несущей системы, которая построена на модели действующих нагрузок в виде случайных функций, апробирована при проектировании реконструкции существующего длительно эксплуатируемого одноэтажного многопролетного здания производственного назначения .

По результатам численных расчетов с учетом регламентируемых действующими нормативными документами параметров разброса прочностных характеристик материалов и действующих нагрузок по основному сочетанию выявлены зависимости от срока службы и интенсивности эксплуатации логарифмических показателей надежности разных конструктивных элементов несущей системы здания.

Долговечность и остаточный ресурс несущей системы здания без проведения ремонтно-восстановительных работ на изношенных несущих конструкциях следует осуществлять в зависимости от количественных показателей надежности отдельных конструкций в крайних и средних пролетах здания. В первую очередь они должны осуществляться на конструктивных элементах, имеющих меньшие логарифмические показатели надежности.

Библиографический список

1. Перельмутер А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций// А.В. Перельмутер. – Киев: УкрНИИпроектстальконструкция, 2000. – 216 с.
2. Райзер, В.Д. Теория надежности сооружений/ В.Д. Райзер. - М.: АСВ, 2010. – 252 с.
3. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука. 1968. 464с.
4. Екимов В.В. Вероятностные методы в строительной механике корабля/ В.В Екимов. – Л.: Судостроение, 1966. – 328 с.
5. Пшеничкина В.А. Надежность зданий как пространственных составных систем при сейсмических воздействиях// В.А. Пшеничкина, А.С. Белоусов, А.Н. Кулешова, А.А. Чураков. - Волгоград: ВолГАСУ. 2010. 180с.
6. Пшеничкина В.А. Оценка остаточного ресурса основного корпуса Р-1 ОАО «ВОЛТАЙР-ПРОМ» как сложной системы//В.А. Пшеничкина, К.Н. Сухина// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. - № 1. - С. 60-65
7. Сафронов В.С. Прогнозирование риска разрушения длительно эксплуатируемой железобетонной фермы покрытия здания//В.С.Сафронов, Д.Т.Чан// Строительная механика и конструкции. - 2016. - Вып. 2 (13). - С. 45-54.
8. Сафронов В.С. Надежность несущего каркаса реконструируемого производственного здания при перепрофилировании//В.С. Сафронов, Д.Т. Чан// Строительная механика и конструкции. - 2018. - Вып. 1(16). - С. 54-65.
9. Сафронов В. С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок//В.С.Сафронов, Нгуен Динь Хоа// Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. «Строительство и архитектура». – 2010. - №1(17). - С 152-166
10. Сафронов В. С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы//В.С. Сафронов, Д.И. Доманов// Механика разрушения бетонов, железобетонов и других строительных материалов: сб. ст. по мат. 7-й Международной науч. конф.: в 2 т. -2013. - С. 31-38.
11. Сафронов В.С. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразования при стесненном кручении железобетонных мостовых балок//В.С. Сафронов, Д.И. Доманов// Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2013. - Вып. 2(7). – С. 47-52.

12. Сафронов В. С. Вероятностная оценка грузоподъемности эксплуатируемого путепровода // В. С. Сафронов, Е. А. Опабола// Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2015. - Вып. 1(10). - С. 57-67.
13. Сафронов В.С. Расчет несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели// В. С. Сафронов, Катембо А.Л.// Строительная механика и конструкции. - Воронеж, 2016. - Вып. 1(12). - С. 64-74.
14. Сафронов В.С. Влияние деформационных характеристик песчаной засыпки на напряженно-деформированное состояние грунтозасыпных мостов// В.С. Сафронов, В.В. Зазвонов// Строительная механика и конструкции. – Вороне, 2010. - Вып. 1. - С. 18-22.

References

1. Perelmuter A.V. Chosen problems of durability and safety of building structures. – Kiev: Ukrania NIIproectstalconstructziya, 2000. – 216 p.
2. Raizer, V.D. Theory of structural reliability. - M.: ASV, 2010. – 252 p.
3. Sveshnikov A.A. Applied methods of the theory of random functions. M.: Nauka. 1968. 464p.
4. Ekimov V.V. Probabalistic methods in structural mechanics of a ship. -L: Shipbuilding, 1966. – 328 p.
5. Pshenichkina V.A., Belousov A.S., Kuleshov A.N., Churakov A.A. Building durability as spatial compound system under seismic influence. - Volgograd: VolGASU. 2010. 180p.
6. Pshenichkina V.A., Sukhina K.N. Assessment of residual resources of the main building. Structural mechanics of engineering structures and constructions. – 2016. - № 1. - P. 60-65
7. Safronov V.S., Chan D.T. Prediction of the risk of failure Прогнозирование риска разрушения long operated reinforced concrete building roofing truss. Structural mechanics and structures. - 2016. - Issue. 2 (13). - P. 45-54.
8. Safronov V.S., Chan D.T. Durability of under reconstruction industrial building load-carrying frame during changing of business line. Structural mechanics and structures. - 2018. - Issue. 1(16). - P. 54-65.
9. Safronov V.S. Nguen Dinh Hoa. Scientific bulletin Voronezh state university of architecture and civil engineering. «Construction and Architecture». – 2010. - №1(17). - P 152-166
10. Safronov V.S., Domanov D.I. Assessment of the risk of reinforced concrete beams of random form normal sections. Mechanics of disintegration of concrete, reinforced concrete and other building materials: collected articles on math. 7th integration scientific conference: in 2 t. -2013. - P. 31-38.
11. Safronov V.S., Domanov D.I. Application of theory of assessment of cracks forming probability at twisting of reinforced bridge beams. Structural mechanics and structures. – Voronezh, 2013. - Issue. 2(7). – P. 47-52.
12. Safronov V.S., Opaloba E.A. Probabilistic assessment of load capacity of operated ovewr(under)pass. Structural mechanics and structures. – Voronezh, 2015. - Issue. 1(10). - P. 57-67.
13. Safronov V.S., Catembo A.L. Design of load carrying capacity of eccentrically load bar from reinforced concrete with the help of deformation model. Structural mechanics and structures. - Voronezh, 2016. - Issue 1(12). - P. 64-74.
14. Safronov V.S., Zazvonov V.V. Influence of deformative characteristics of sand filling on deflected mode of soil particulate bridges. Structural Mechanics and structures. - Voronezh 2010. - Issue. 1. - P. 18-22.

УДК 624.046.5: 69.059.2: 699.88

РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ПОВЫШЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ К ПРОГРЕССИРУЮЩЕМУ ОБРУШЕНИЮ

С.В. Ефрюшин[1], А.С. Саражинский[2]
Воронежский государственный технический университет[1,2]
Россия, г. Воронеж

[1] Канд. техн. наук, зав. кафедрой строительной механики
[2] Магистрант кафедры строительной механики, тел.: +7(473) 271-52-30; e-mail: stroymech.vgasu@yandex.ru

Исследование проведено на примере 25- этажного жилого здания в монолитно-каркасном исполнении. Цель исследования - сравнение результатов расчета на прогрессирующее обрушение при разных вариантах расположения элементов защиты каркаса здания от прогрессирующего обрушения – аутригерного этажа по высоте здания. Выявлена зависимость напряжённо-деформированного состояния каркаса жилого дома при разрушении 2-х угловых колонн от расположения по высоте здания элементов защиты каркаса здания от прогрессирующего обрушения – аутригерного этажа. Приводятся практические выводы и рекомендации по расчету на прогрессирующее обрушение и способам защиты от него с использованием программного комплекса ЛИРА-САПР 2013. Учитывается физическая и геометрическая нелинейность. Опыт проделанных расчётов может быть использован при моделировании подобных чрезвычайных ситуаций.

Ключевые слова: прогрессирующее обрушение, физическая и геометрическая нелинейность, нелинейный расчет, ЛИРА-САПР 2013.

CALCULATION ANALYSIS OF CONSTRUCTIVE MEASURES FOR INCREASING FRAME BUILDING RESISTANCE TO PROGRESSING COLLAPSE

S.V. Efryushin[1], A.S. Sarazhinsky[2]
Voronezh state technical university[1,2]
Voronezh, Russia

[1] Dr. of Tech. Sc., Head of Department of Structural Mechanics
[2] Master of Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30 e-mail; stroymech.vgasu@yandex.ru

The research is conducted on the example of 25 – storied residential building in monolithic and frame design.. Research target is to compare the calculation results of progressing collapse at different variants of frame building location frame building elements protection against the autrigger floor progressing collapse. Residential building frame deflected mode during 2 corner columns destruction dependence on autrigger floor location along building height is revealed. There are given practical conclusions and recommendations on progressing collapse calculation and methods of protection against it with the help of bundled software LIRA -SAPR 2013. Physical and geometrical nonlinearity is under account. Experience of performed calculations can be used while simulating the analogical emergency situations.

Keywords: the progressing collapse, physical and geometrical nonlinearity, nonlinear calculation, LIRA-SAPR 2013.

Каркасные монолитные жилые здания имеют ряд особенностей, которые связаны с более «свободными» архитектурно-планировочными решениями [6], что обусловливает специфику расчета монолитных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения при чрезвычайных ситуациях, поэтому данное исследование актуально. Его целью является сравнение результатов расчета на прогрессирующее обрушение при разных вариантах расположения элементов защиты каркаса здания от прогрессирующего обрушения – аутригерного этажа [5] по высоте здания. Для исследования на прогрессирующее обрушение был взят проект 25-этажного жилого дома, построенного в г. Воронеже. Указанный объект по конструктивным характеристикам является достаточно распространённым в практике строительства [6]. Проанализировано шесть вариантов расположения аутригерного этажа: 12-й этаж; 19-й этаж; 7-й этаж; 12-й и 19-й этажи; 7-й и 12-й этажи; 1-й, 7-й и 12-й этажи.

Далее приводятся основные данные расчётной модели на прогрессирующее обрушение, которые выполнялись в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013 [3].

Было выполнено следующее:

- создана физическая модель 25-этажного жилого дома (рис. 1);

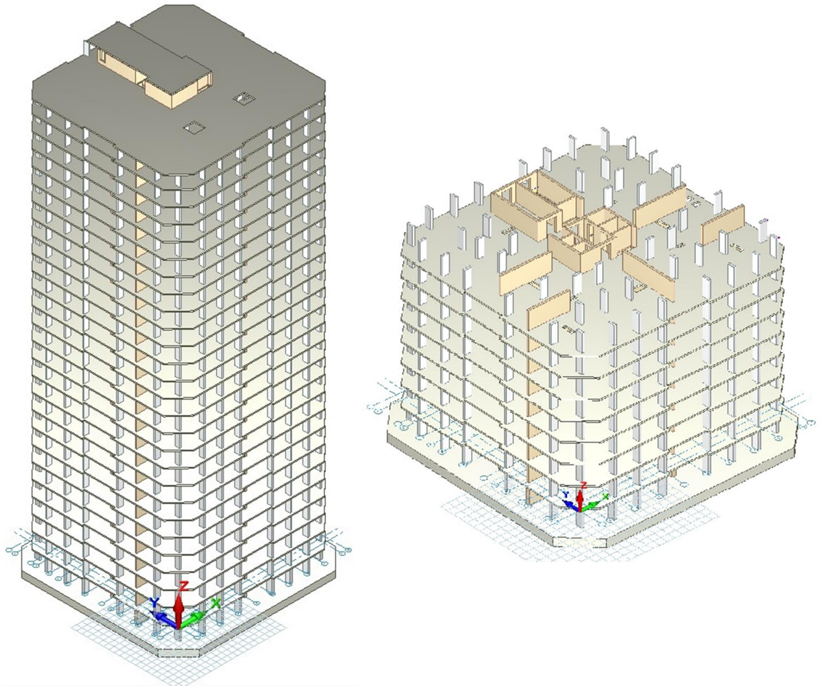


Рис. 1. Аналитическая модель жилого дома

- собраны нагрузки согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия»;
- выполнена четырехугольная триангуляция пластин с шагом 0,3 м;
- назначены связи – все узлы фундаментной плиты закреплены по 6-ти степеням свободы: X, Y, Z, UX, UY, UZ;
- назначены жесткости и материалы согласно СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003»;
- составлена таблица расчетных сочетаний нагрузок (РСН) и таблица расчетных сочетаний усилий (РСУ) в соответствии с СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия»;
- выполнен расчет 25-этажного жилого дома в линейной постановке на все действующие расчетные нагрузки для последующего задания армирования несущих элементов здания (для расчета в нелинейной постановке).

После анализа результатов армирования несущих конструкций жилого дома было выполнено следующее:

- смена типа конечных элементов КЭ 10, 42, 44 на КЭ 410, 442, 444 (с учетом физической и геометрической нелинейности) соответственно для расчета в нелинейной постановке;
- задание жесткостей несущим элементам здания (рис. 2 - 4) с учетом результатов армирования. Материал несущих конструкций – бетон В25, арматура А500. Прочностные и деформационные характеристики материалов принимаются нормативными согласно СП

63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003» и рекомендациям по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения п. 2.3 [7].

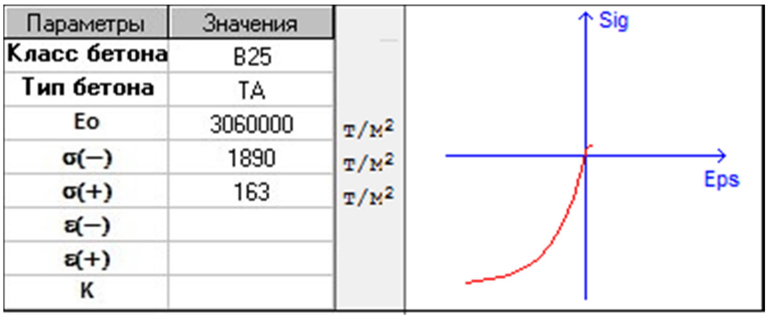


Рис. 2. Закон нелинейного деформирования материала – бетон В25

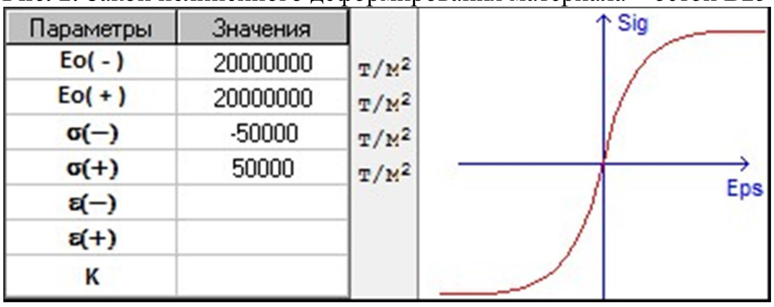


Рис. 3. Закон нелинейного деформирования материала – арматура А500

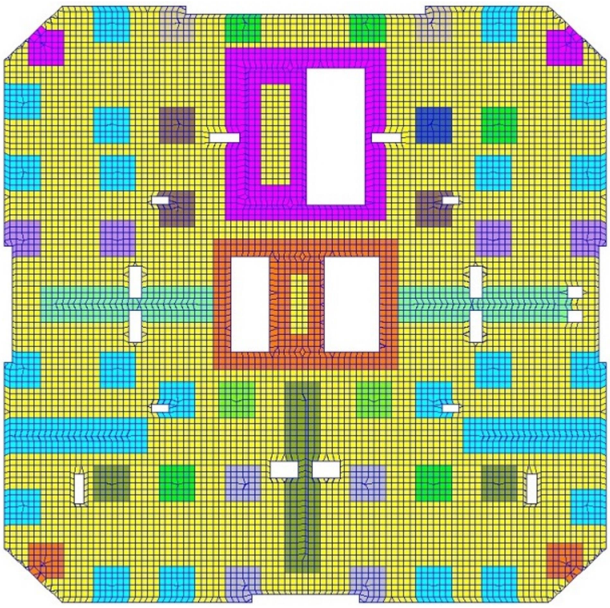


Рис. 4. Пример задания жесткостей в нелинейной постановке

Выполнено два загружения с использованием системы МОНТАЖ ЛИРА-САПР [4, 8]:

- стадия 1, включающая постоянные и длительные временные нагрузки согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия», с коэффициентами сочетания нагрузок и коэффициентами надежности по нагрузкам, равными единице согласно рекомендациям по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения п. п.2.1 и 2.2 [7];

- стадия 2 – демонтаж 2-х угловых колонн (рис. 5) и в верхние узлы разрушенных колонн прикладывается вертикальная нагрузка (против направления оси Z) для учета коэффициента динамичности.

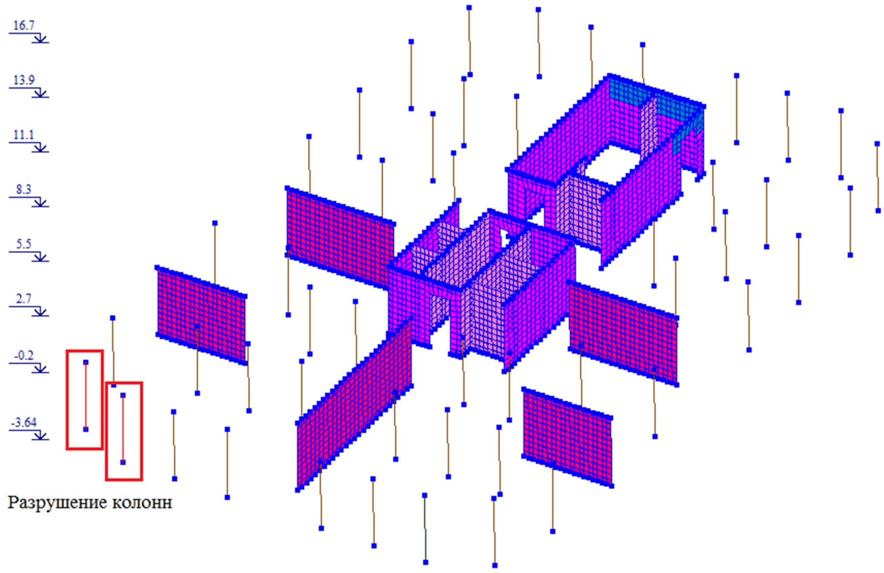


Рис. 5. Демонтаж 2-х угловых колонн

Вычисление коэффициента динамичности выполнялось согласно методике, изложенной в работе [1]. Согласно данной методике коэффициент динамичности k_d=1,14;

- накладываем на плиту перекрытия над разрушенными элементами ограничение по перемещению UZ согласно рекомендациям учебного пособия «ЛИРА-САПР 2011», пример 16 - «Технология расчета на устойчивость к прогрессирующему обрушению» [2];

- моделирование аутригерного этажа [5] (рис. 6) – стены толщиной 300 мм (бетон В40, арматура А500 – 25 мм), балки сечением 300х300 мм (бетон В40, арматура А500 – угловая 25 мм, распределенная – 16 мм);

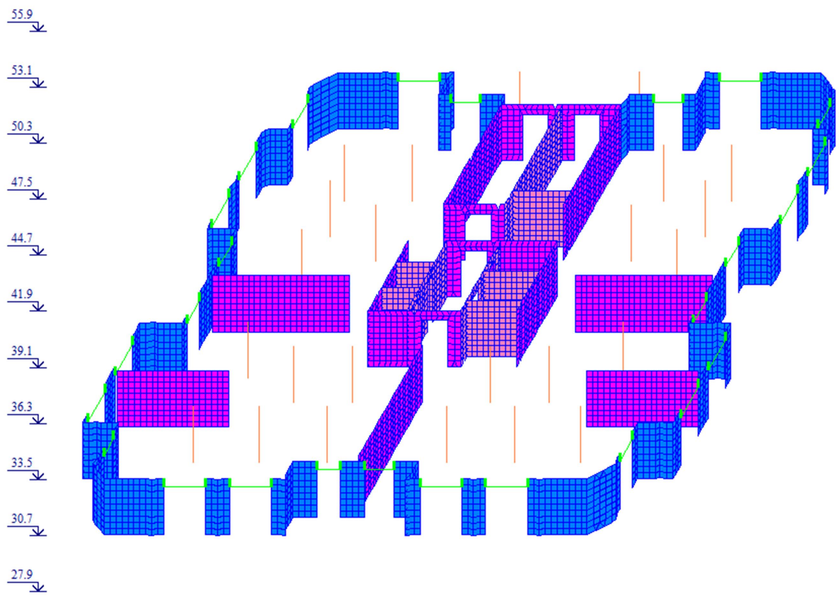


Рис. 6. Аутригерный этаж

- моделирование нелинейных загружений конструкции: простой шаговый метод расчета, количество шагов 10.

1. Анализ результатов расчета на прогрессирующее обрушение по деформациям (рис. 7-12, 19, 20): параметр анализа – перемещение по Z:

- при расположении аутригерного этажа на «экваторе» здания – 12-й этаж, деформации уменьшились на 18 %; при расположении выше «экватора» здания – 19-й этаж, деформации уменьшились на 15 %; при расположении ниже «экватора» здания – 7-й этаж, деформации уменьшились на 22 %;
- при расположении аутригерных этажей в верхней части по высоте здания – 12-й и 19-й этажи, деформации уменьшились на 27 %; при расположении в нижней части здания – 7-й и 12-й этажи, деформации уменьшились на 32 %.

2. Анализ результатов расчета на прогрессирующее обрушение по усилиям (рис. 21, 22): параметр анализа – усилие N в колоннах:

- исследование по способу защиты от прогрессирующего обрушения – аутригерный этаж, показало, что усилие N в колонне, которая при перераспределении усилий восприняла большую часть усилий от разрушенных колонн, уменьшилось до 5 %; данный результат указывает, что перераспределение усилий незначительно - до 5 %, но анализируя другие колонны, которые при перераспределении усилий также восприняли усилия от разрушенных колонн, на примере колонны в осях А-3 (таблица), можно сделать вывод, что перераспределение усилий достаточно существенно, причем не только на этаже, рядом с разрушенными колоннами – 11 %, но и по высоте здания – 17 %.

3. Анализ результатов расчета на прогрессирующее обрушение по разрушениям (рис. 13-18, 23, 24): параметр анализа – количество КЭ в стадии образования пластического шарнира:

- при расположении аутригерного этажа на «экваторе» здания – 12-й этаж, разрушения уменьшились на 36 %; при расположении выше «экватора» здания – 19-й этаж, разрушения уменьшились на 28 %; при расположении ниже «экватора» здания – 7-й этаж, разрушения уменьшились на 45 %;
- при расположении аутригерных этажей в верхней части по высоте здания – 12-й и 19-й этажи, разрушения уменьшились на 51%; при расположении в нижней части здания – 7-й и 12-й этажи, разрушения уменьшились на 60%.

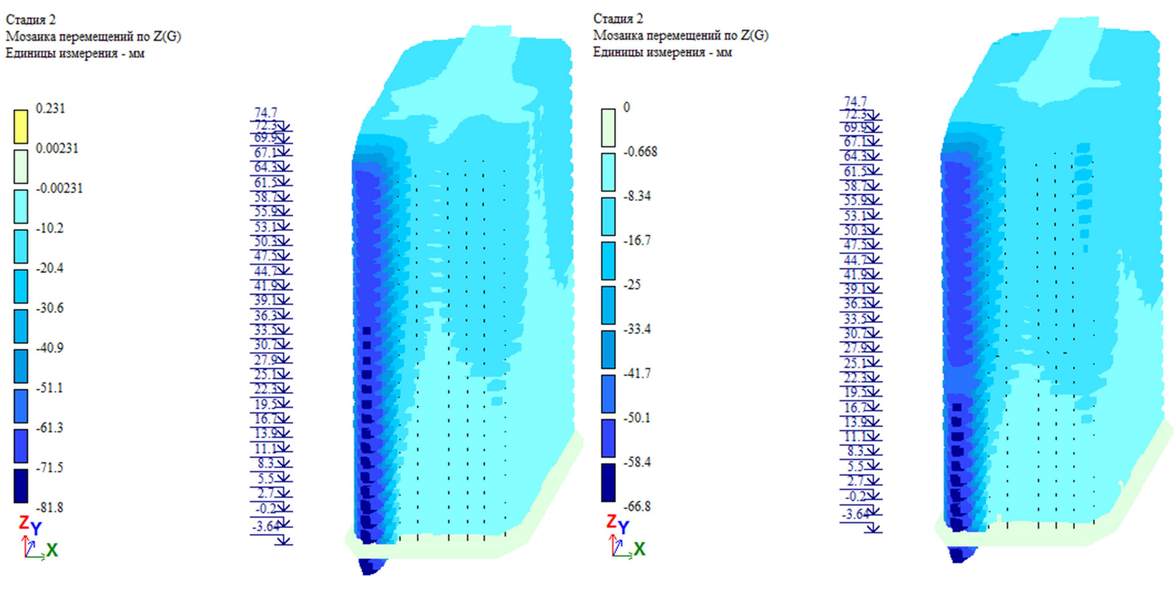


Рис. 7. Перемещение по Z. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 12 этаже жилого дома

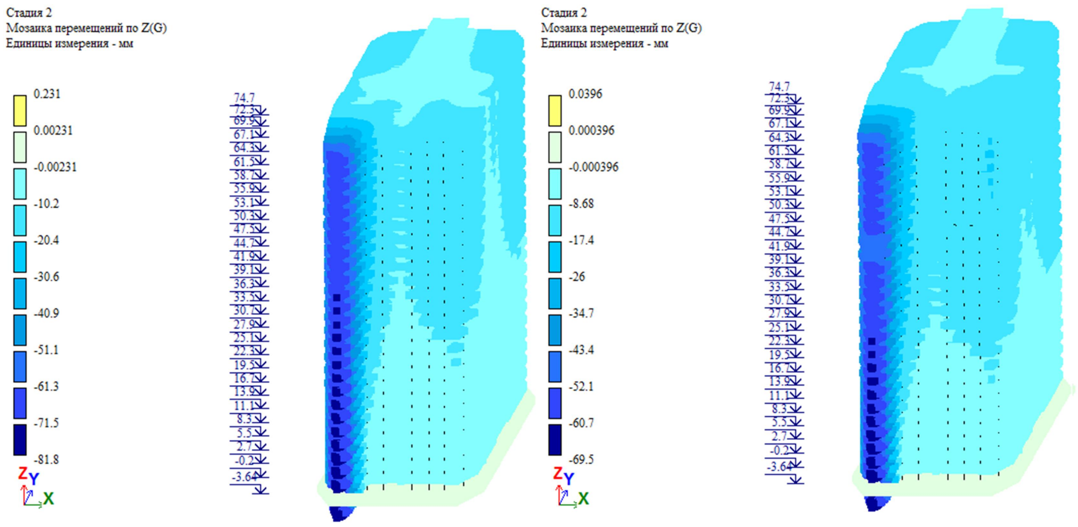


Рис. 8. Перемещение по Z. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 19 этаже жилого дома

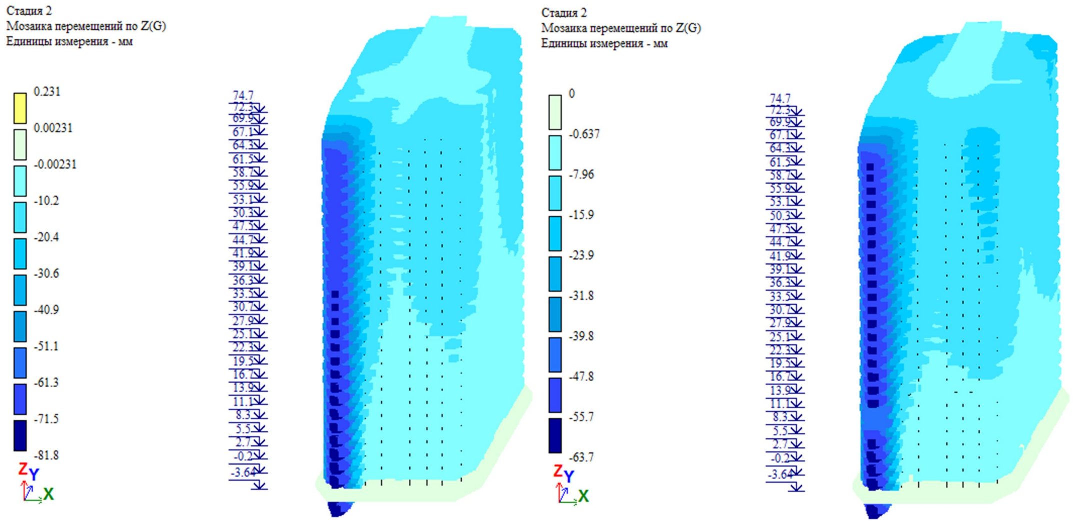


Рис. 9. Перемещение по Z. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 7 этаже жилого дома

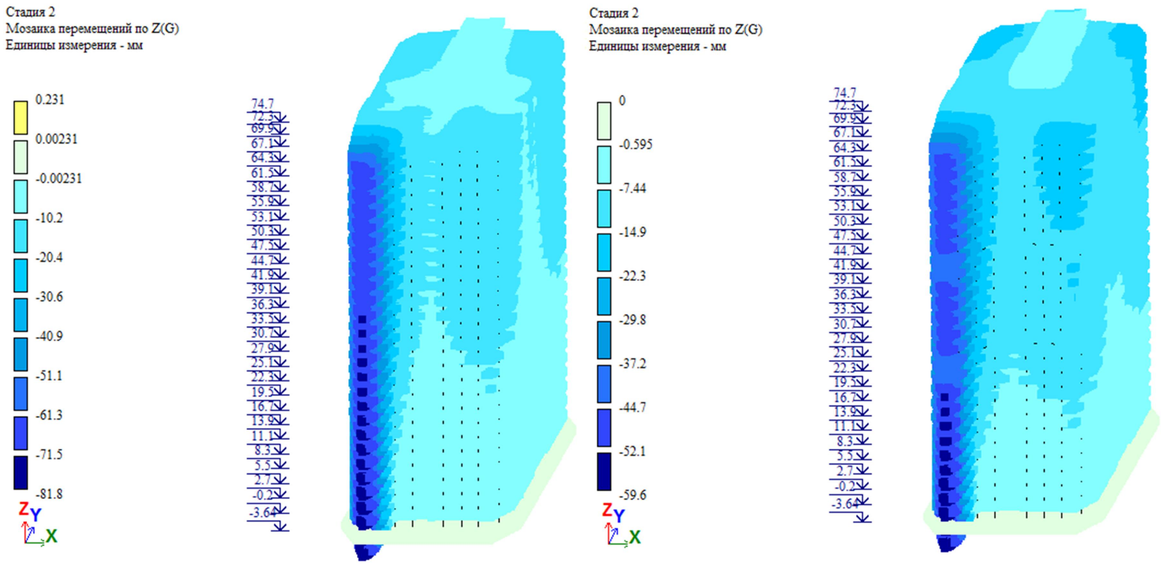


Рис. 10. Перемещение по Z. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 12 и 19 этаже жилого дома

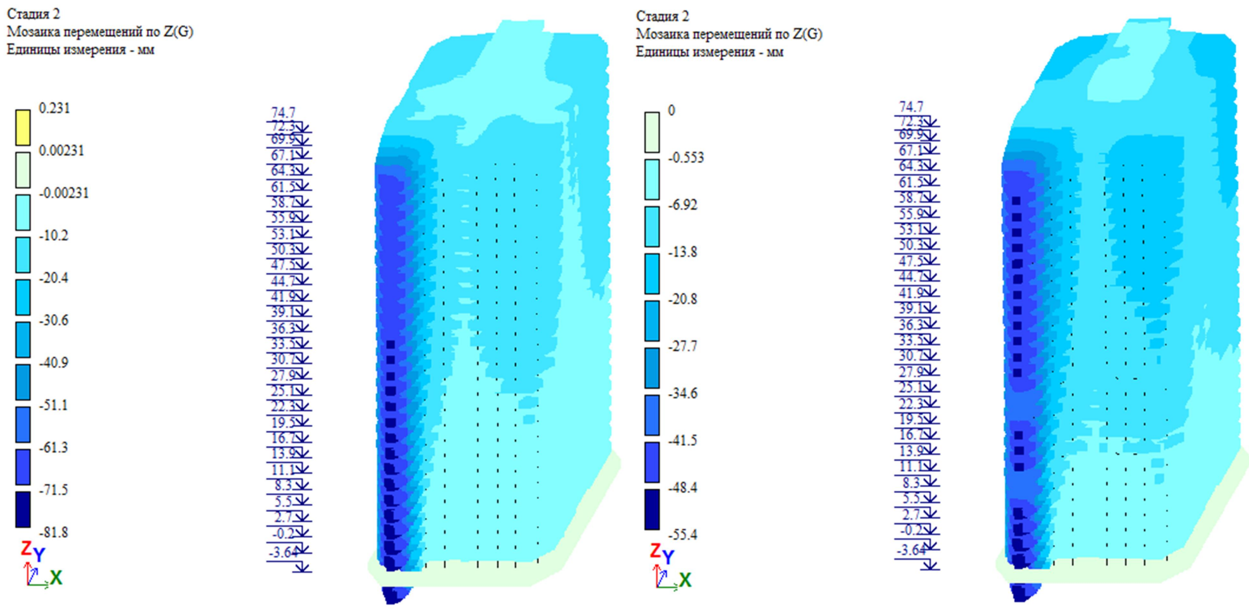


Рис. 11. Перемещение по Z.
Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 7 и 12 этаже жилого дома

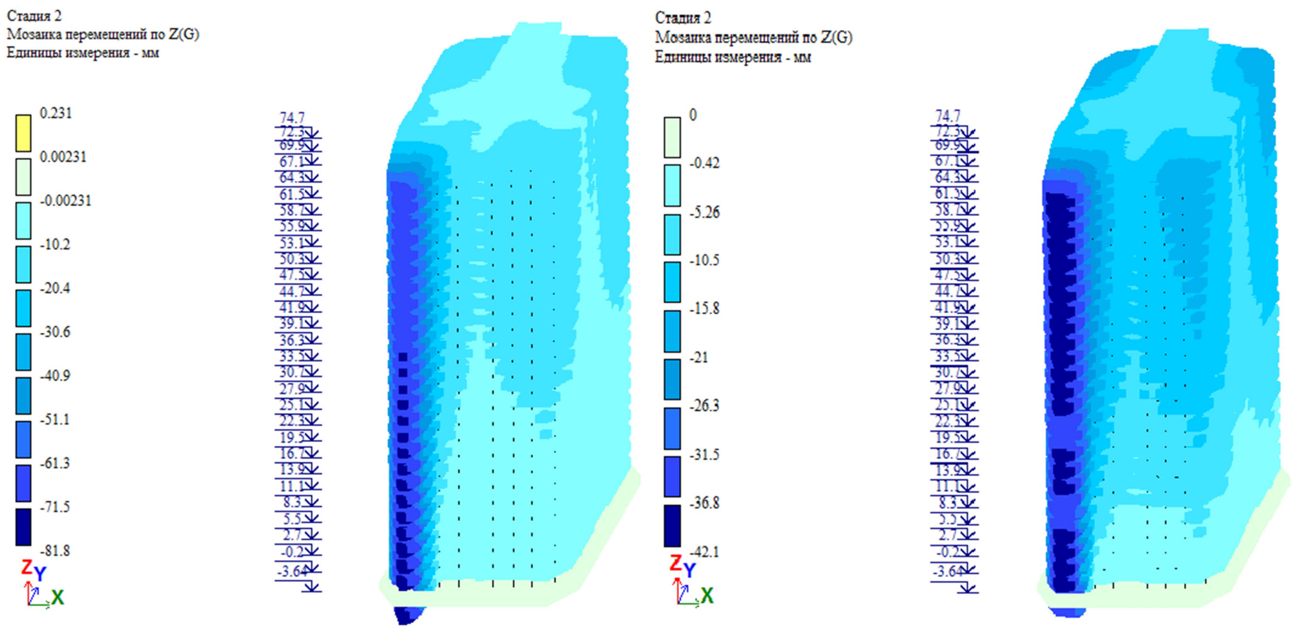


Рис. 12. Перемещение по Z.
Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 1, 7 и 12 этаже жилого дома

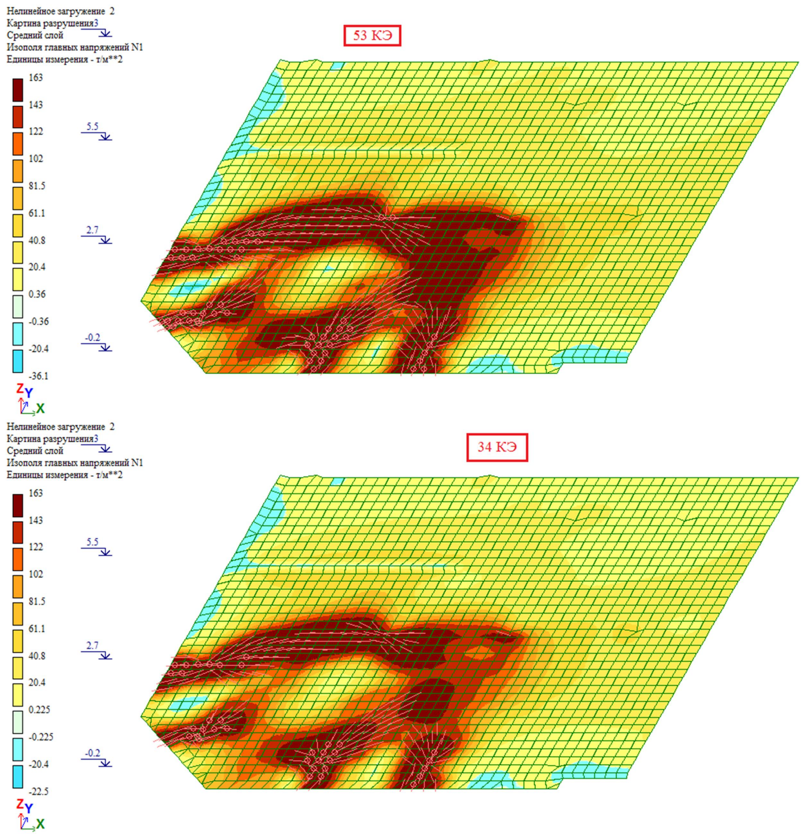


Рис. 13. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 12 этаже жилого дома

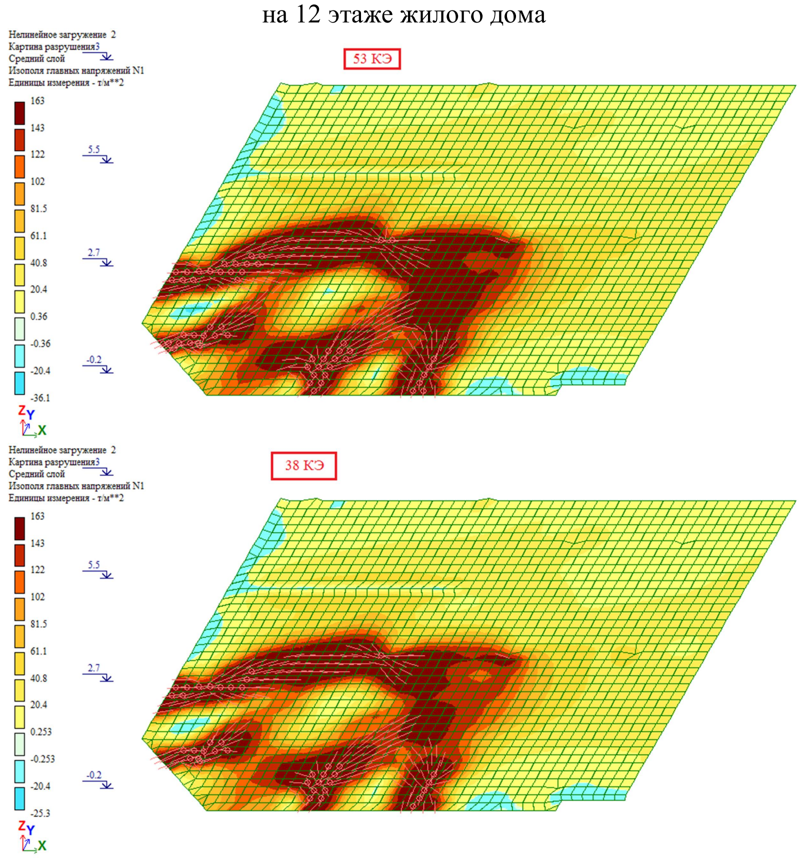


Рис. 14. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 19 этаже жилого дома

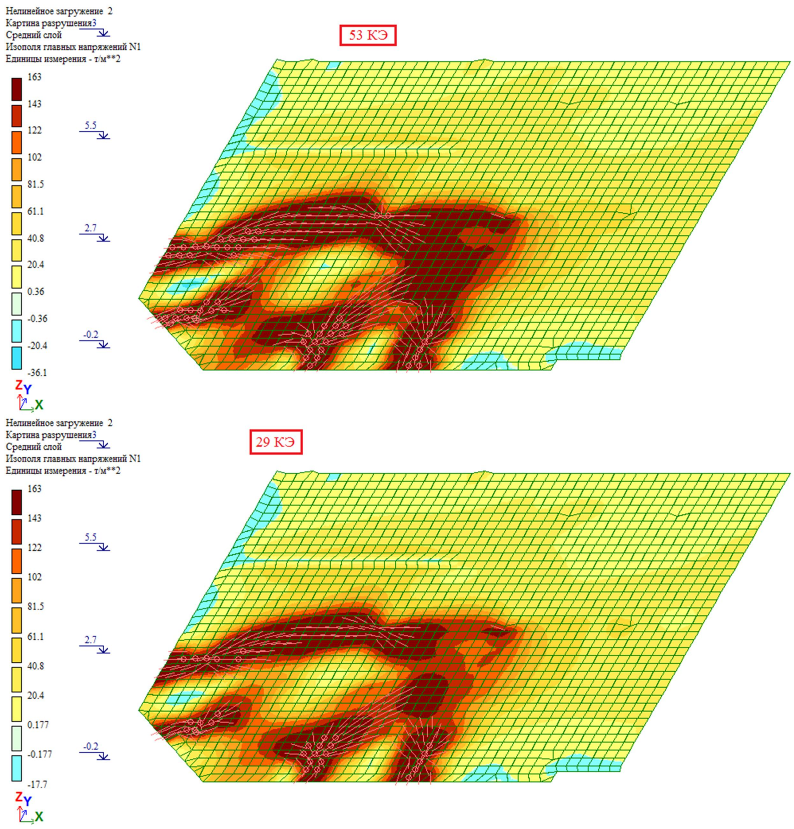


Рис. 15. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 7 этаже жилого дома

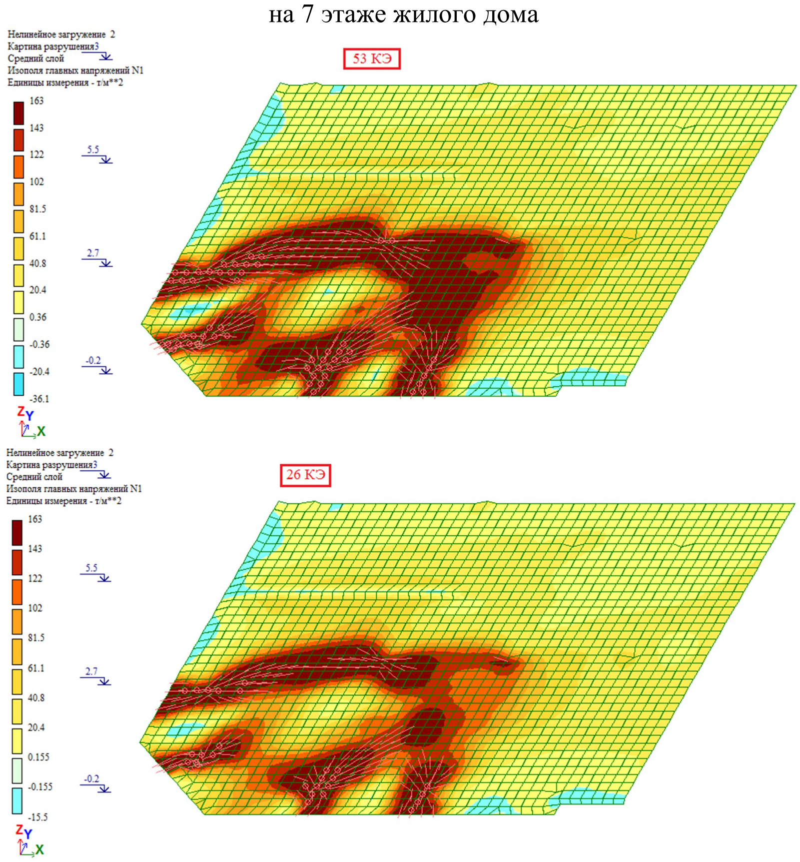


Рис. 16. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 12 и 19 этаже жилого дома

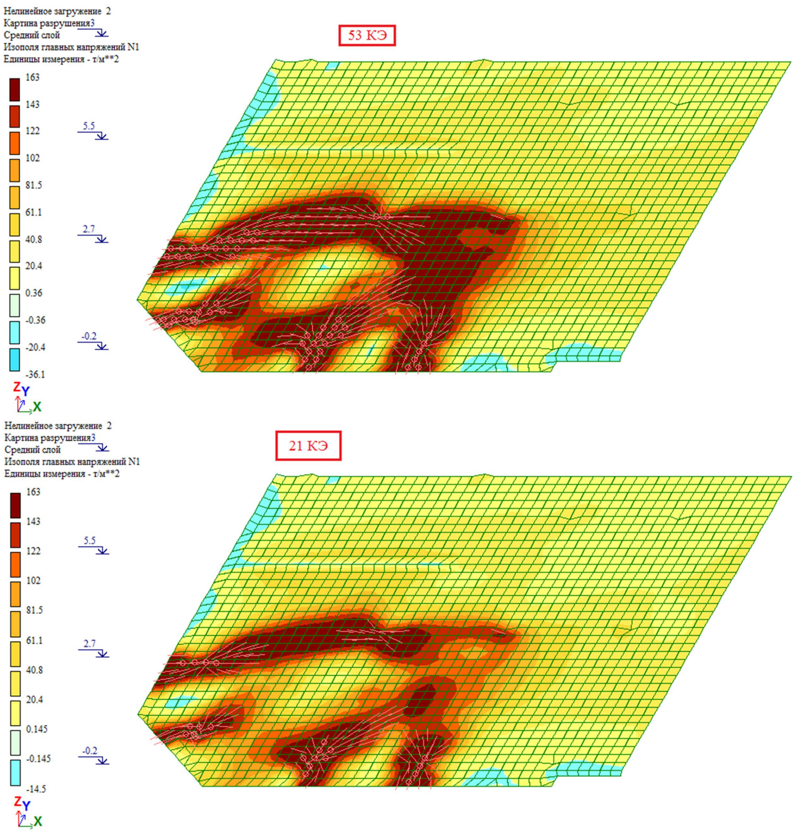


Рис. 17. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 7 и 12 этаже жилого дома

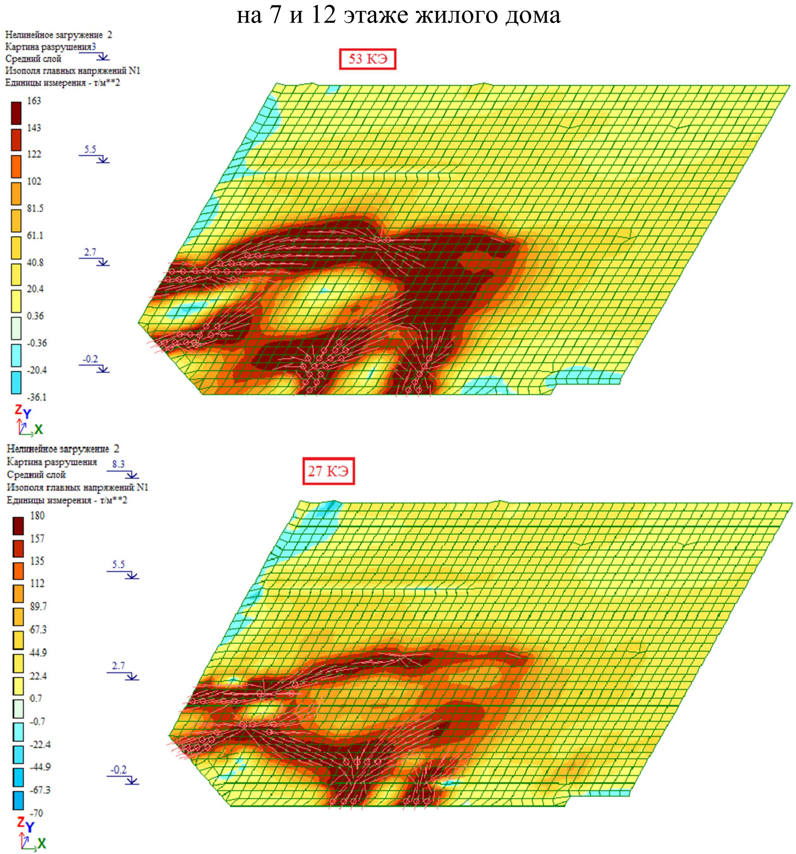


Рис. 18. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами. Без аутригерного этажа и с аутригерным этажом на 1, 7 и 12 этаже жилого дома

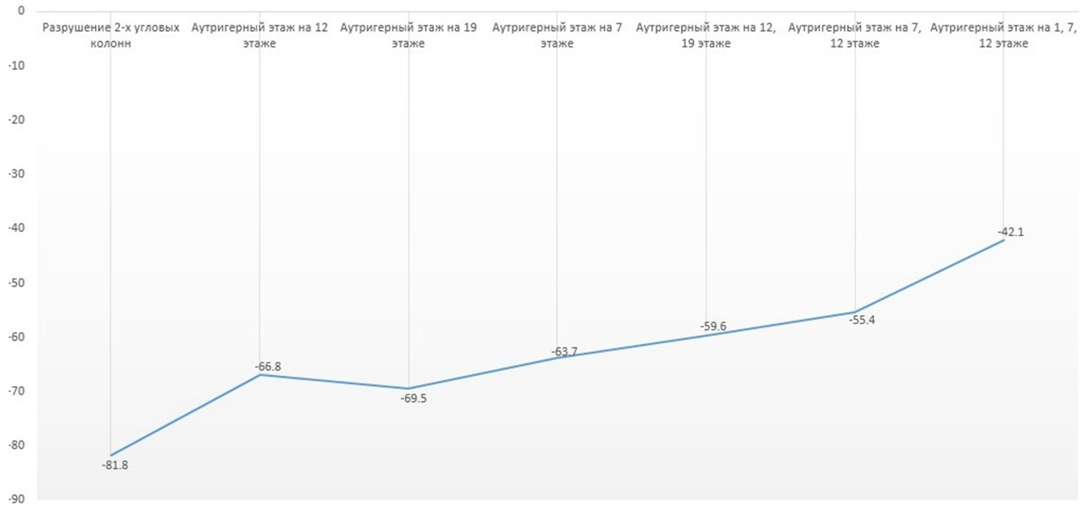


Рис. 19. Максимальное перемещение по Z в соответствии с расположением аутригерного этажа, мм

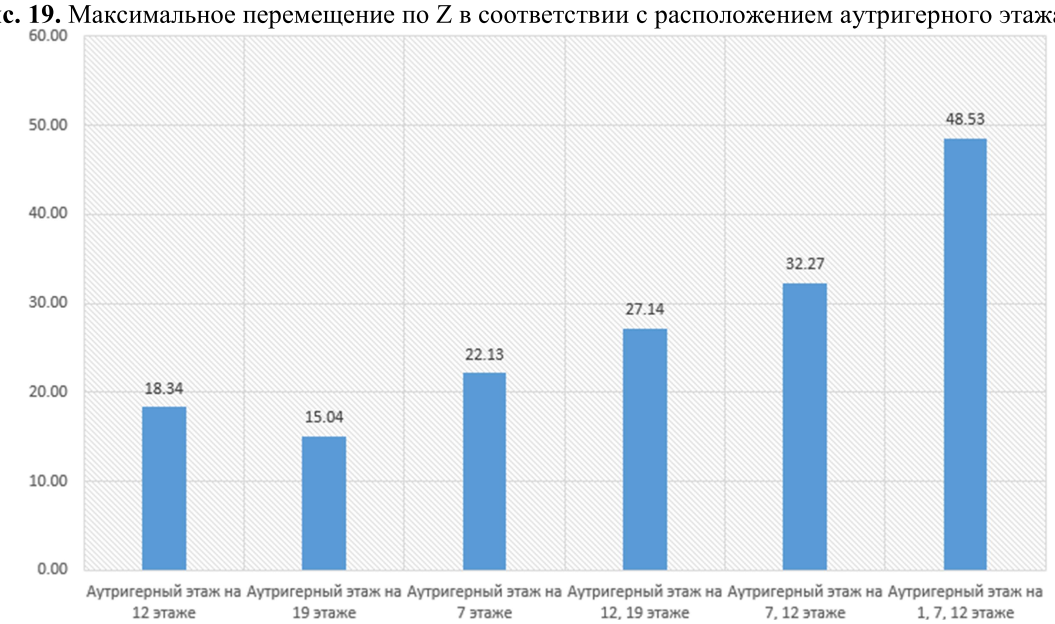


Рис. 20. Процентное уменьшение максимального перемещения по Z в соответствии с расположением аутригерного этажа от разрушения 2-х угловых колонн жилого дома

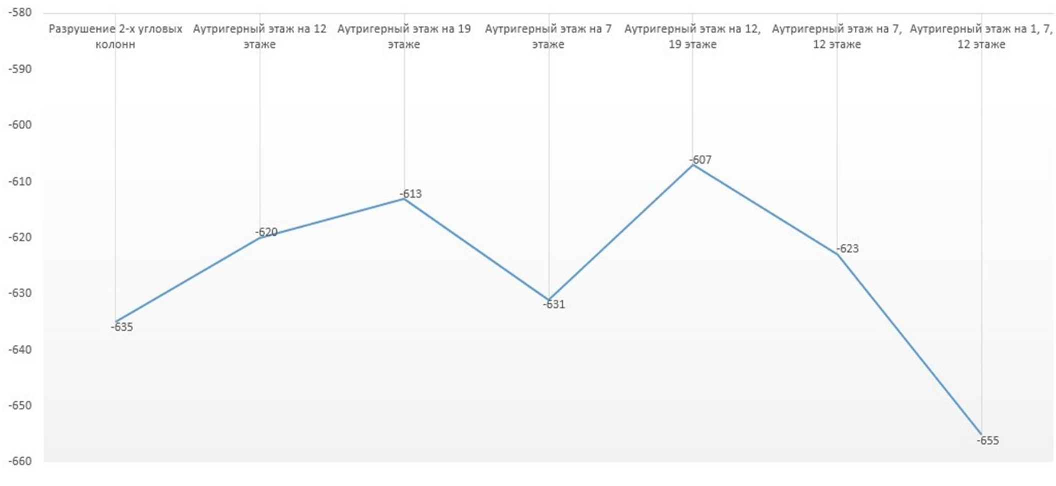


Рис. 21. Максимальное усилие N в колонне в соответствии с расположением аутригерного этажа, т

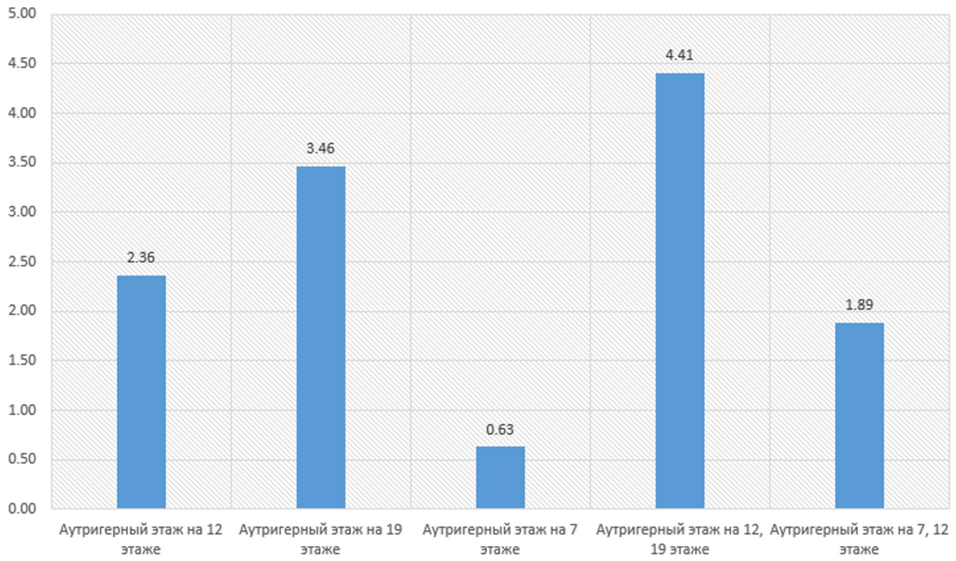


Рис. 22. Процентное уменьшение максимального усилия N
в соответствии с расположением аутригерного этажа от разрушения 2-х угловых колонн жилого дома

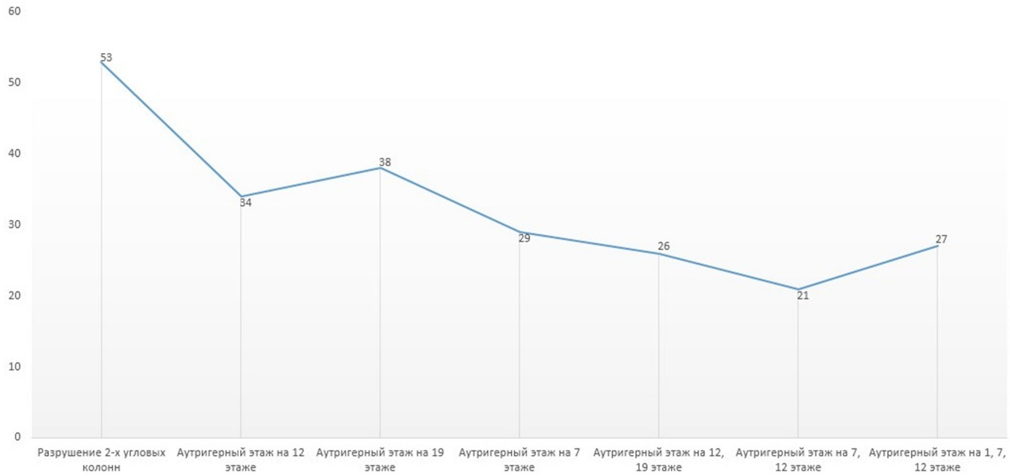


Рис. 23. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира)
в соответствии с расположением аутригерного этажа, кол-во КЭ

Рис. 24. Процентное уменьшение разрушения плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами, в соответствии с расположением аутригерного этажа от разрушения 2-х угловых колонн жилого дома

Таблица

Перераспределение усилий в колонне в осях А-3

Описание	Усилие N в верхнем узле колонны в осях А-3, т			
	Техподполье	6 этаж	11 этаж	18 этаж
Разрушение 2-х угловых колонн	-631	-442	-314	-165
Аутригерный этаж на 12 этаже			-306	
Аутригерный этаж на 19 этаже				-161
Аутригерный этаж на 7 этаже		-427		
Аутригерный этаж на 12, 19 этаже			-294	-150
Аутригерный этаж на 7, 12 этаже		-413	-283	
Аутригерный этаж на 1, 7, 12 этаже	-561	-377	-260	
Max процентные соотношения, %	11.09	14.71	17.20	9.09

Исследование по способу защиты от прогрессирующего обрушения – аутригерный этаж, показало, что расположение аутригерных этажей в нижней части по высоте здания повышает устойчивость к прогрессирующему обрушению в случаи разрушения 2-х угловых колонн здания; количество аутригерных этажей зависит от предъявляемых к конструкциям требований; в исследовании смоделировано три аутригерных этажа в нижней части здания, примерно на равном удалении друг от друга, и получено уменьшение деформаций на 49 % и уменьшение разрушений (кол-ва КЭ в стадии образования пластического шарнира) на 49 %.

Библиографический список

1. Алмазова В.О. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему обрушению / В.О. Алмазова, А.И. Плотникова, Б.С. Расторгуева // Вестник МГСУ. – 2011. - №2. – С. 15-20.
2. Гензерский Ю.В. ЛИРА-САПР 2011: учеб. пособие / Ю.В. Гензерский, Д.В. Медведенко, О.И. Палиенко, В.П. Титок. – К.: Электронное издание, 2011. - 396 с.
3. Городецкий Д.А. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ЛИРА-САПР 2013: учеб. пособие / Д.А. Городецкий, М.С. Барабаш, Р.Ю. Водопьянов, В.П. Титок, А.Е. Артамонова; под ред. Акад. РААСН А.С. Городецкого. – К. – М.: Электронное издание, 2013. - 376 с.
4. Ефрюшин С.В. Исследование напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / Ефрюшин С.В., Саражинский А.С. // Строительная механика и конструкции. – 2016. - №2 (13). – С. 33-44.
5. Кравченко Г.М. Обоснование конструктивных решений аутригерных этажей высотного здания при прогрессирующем разрушении / Г.М. Кравченко, Е.В. Труфанова, Д.С. Заритовский, А.С. Небоженко // Инженерный вестник Дона. – 2017. - №2. – С. 10.
6. Молодых С.А. Возведение зданий и сооружений из монолитного железобетона: учеб. пособие / С.А. Молодых, Е.А. Митина, В.Т. Ерофеев и др. - М.: Изд-во АСВ, 2005, 192 с.
7. Рекомендации по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения / Москомархитектура. - М.: МНИИТЭП и НИИЖБ, 2005. – 40 с.
8. Струков С.Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов монолитного железобетонного каркаса многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С.Ю. Струков, С.В. Ефрюшин, А.В. Глушков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №2 (15). – С. 95-103.

References

1. Almazova V.O., A.I. Plotnikova, B.S. Rastorgueva. Problems of buiding resistance against progressing collapse. Bulletin of MGSU. – 2011. - №2. – P. 15-20.
2. Genzersky Yu.V., MedvedenkoD.V., Palienko O.I., Titok V.P. LIRA-SAPR 2011: student handbook – KК.: Electronic issue, 2011. - 396 p.
3. Gorodetsky D.A., Barabash M.Yu., Vodopjyanov P.Yu., Titik V.P. bundled software LITA-SAPR 2013: Handbook edited by Gorodetsky D.A. – К. – М.: Electronic issue, 2013. - 376 p.
4. Efryushin S.V., Sarazhinsky A.S. Research of deflected mode of base plate of multistoried building with account of its construction stage. Structural Mechanics and structures. – 2016. - №2 (13). – P. 33-44.
5. Kravchenko G.M., Trufanova E.V., Zaritovsky D.S., Nebozhko A.S. Substanation of constructive solutions of autrigger floors of multistoried building at progressing collapse . Engineering bulletin Dona. – 2017. - №2. – P. 10.
6. Molodikh S.A., Mitina E.A., Erofeev V.A. Construction of buildings and structures from monolithic reinforced concrete . - M.: Pub. House ASB, 2005, 192 p.
7. Guidelines on protection of monolithic residential buildings against progressing collapse. Moskomarchetectura. - M.: MNIITEP and NIIZHB, 2005. – 40 p.
8. Strukov S.Yu., Efryushin S.V., Glushkov A.V. Research of deflected mode of monolithic reinforced concrete frame of multistoried building with account of its construction stage . Structural Mechanics and structures. – 2017. - №2 (15). – P. 95-103.

УДК 624.014:621.791.75

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ГРУЗОВЫХ БАЛОК ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ КОЗЛОВЫХ КРАНОВ

А.Ф. Николаев[1], Е.В. Бурлакова[2], И.К. Халиков[3], Н.А. Семенихин[4]

Воронежский государственный технический университет[1,2,3]
Россия, г. Воронеж
Воронежский государственный университет[4]
Россия, г. Воронеж

[1]Канд. техн. наук, доцент кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве, тел.: +7(951)850-01-04
[2]Магистрант кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве, тел.: +7(904)697-07-80
[3]Магистрант кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве
[4]Магистрант кафедры коммуникационных технологий

На основе натурных данных об износе при длительной эксплуатации козлового двухконсольного крана ККС-10 изучается возможность восстановления работоспособности грузоподъемного оборудования путем усиления грузовой балки без длительного выведения механизма из рабочего цикла. Предлагается и обосновывается оптимальный технологический процесс ремонта двутавровой грузовой балки усилением нижних полок путем приварки новых дополнительных деталей – стальных полос. Для снижения неблагоприятных сварочных напряжений применяется метод выполнения всех сварочных работ двумя сварщиками одновременно с использованием обратноступенчатого способа приварки полос с двух сторон от середины к краям сплошными, прерывистыми швами и электрозаклепками по центрам. Приводятся данные о достигаемом эффекте при усилении длительно эксплуатируемого козлового крана грузоподъемностью 50 т. Доказывается универсальность предлагаемой технологии при выполнении усиления изношенных металлических конструкций аналогичного типа.

Ключевые слова: козловые двухконсольные краны, металлическая грузовая балка, дуговая сварка, капитальный ремонт, усиление, технологическая методика, напряжения и деформации, восстановление работоспособности.

RESTORATIVE FUNCTION OF OPERATED FULL GANTRY CRANES LOAD BEAMS

A.F. Nikolaev[1], E.V. Burlakova[2], I.K. Khalikov[3], N.A. Semenikhin[4]

Voronezh state technical university[1,2,3]
Voronezh, Russia
Voronezh state university[4]
Voronezh, Russia

[1]PhD of Tech Sc, Associate Professor of Department of metal structures and weld in building, tel.: +7(951)8500104
[2] Master of Department of metal structures and weld in building, tel.: +7(904)6970780
[3] Master of Department of metal structures and weld in building
[4] Master of Department of Communication technologies

Based on actual data about the tear-and-wear of full gantry double-cantilever crane KKS-10 during long operation there is studied the possibility of load lifting restorative function with load beam reinforcement without prolonged removal of the mechanism from the working cycle. There is suggested and substantiated the optimal technological process of double-cantilever load beam repair by reinforcement of the lower flanges by welding new additional elements – steel bars. To reduce unfavorable welding effort there is used the method of all welding works implementation by two welders simultaneously with application of step-back method of bars welding from both sides from the center up to the edges with continuous interrupted welds and plug lap joints by centers. There are given the data about the achieved effect during the strengthening of full gantry crane long operation with hoisting capacity of 50t. The versatility of suggested technology during implementation of reinforcement of foreworn analogical metal structures.

Keywords: full gantry double-cantilever crane, metal load beam, arc welding, capital repair, reinforcement, technological methodology, tension and deformation, restoration of operational integrity.

В процессе изготовления, монтажа строительных конструкций используются различные подъёмные механизмы. Существенную долю занимают козловые двухконсольные краны общего назначения со средней грузоподъемностью до 50 т, длиной пролета от 10 до 40 м, высотой подъема грузов до 16 м. Такие механизмы позволяют обслуживать большие рабочие площади грузовых территорий, складов, различных погрузочно-разгрузочных эстакад [1].

Обычно козловые краны используются на открытых площадках и воспринимают воздействия от климатических осадков, резких перепадов температур, воздушной среды города и предприятий, пыльных частиц песка, цемента, которые вызывают существенный износ деталей и способствуют образованию трещин в металлических конструкциях. При этом снижается безопасность функционирования, особенно в условиях погрузочно-разгрузочных эстакад заводов по изготовлению железобетонных конструкций [2].

В козловых кранах наибольшему износу подвержены нижние полки двутавровых грузовых балок в зонах перемещения роликов грузовой тележки. С целью восстановления работоспособности грузоподъёмных машин, устранения отказов и восстановления израсходованного ресурса в соответствии с требованиями технических условий на капитальный, полнокомплектный и капитально-восстановительный ремонты РД 22-322-02 осуществляется их ремонт, выполняемый квалифицированными специалистами. От качества проведения ремонтных работ зависит эффективность эксплуатации крана в последующем.

Для выполнения качественного ремонта выполняется полное обследование крана с составлением дефектной ведомости, которая является основанием для устранения всех выявленных дефектов в соответствии с требованиями действующего нормативного документа по обследованию грузоподъемных машин с истекшим сроком службы РД 10-42-5-97.

Незначительные дефекты, к которым относятся небольшие трещины, местная деформация стоек, коррозия и т.п., ликвидируют в процессе текущего или среднего ремонта металлических конструкций. В случае обнаружения дефектов типа разрушения узлов конструкции или превышающих допустимые нормы параметров износа рабочих поверхностей для устранения опасности аварийной ситуации производят капитальный ремонт, направленный на восстановление частично или полностью израсходованного ресурса деталей и узлов грузоподъёмной машины. Чаще всего изношенные краны демонтируют. При этом изношенные узлы, не подлежащие восстановлению, меняют на новые, после чего производят сборку, настройку и испытание крана в соответствии с требованиями действующего в настоящее время нормативного документа по проведению испытаний грузоподъемных машин РД 10-525-03. Это требует значительных затрат средств, времени, остановки технологического цикла предприятия.

В результате обследования длительно эксплуатируемого в г. Воронеже козлового крана ККС-10 (зав. № 2323, рег. № 1372-ПМ) Государственным инспектором подъёмных сооружений определено, что в процессе эксплуатации крана образовались интенсивный износ, наклёп, коррозия верхних поверхностей и боковых граней нижних двух полок металлического двутавра № 30 грузовой балки по всей длине до 4 мм и отдельных участков поверхностей до 6 мм (рис. 1).

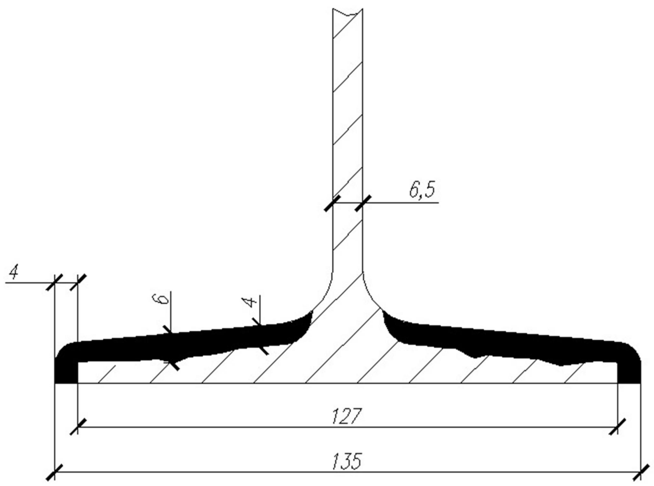


Рис. 1. Характерный износ поверхностей нижних полок двутавра №30

По итогам обследования предложено произвести капитальный ремонт эксплуатируемого крана с заменой грузовой балки на новую без остановки рабочего заводского цикла. Ниже описывается выбранная технологическая последовательность проведения ремонтных работ.

Наиболее нагруженные элементы металлических конструкций, испытывающие растяжение, сжатие или изгиб, усиливаются увеличением сечений путём приварки новых дополнительных деталей [3]. При этом несущая способность элементов возрастает вследствие увеличения размеров поперечных сечений. Таким образом, усиливались нижние полки двутавровой грузовой балки крана. Однако нагрев балки в процессе сварки может снизить ее несущую способность. Степень снижения зависит от режима сварки, толщины и ширины усиливающегося элемента, направления сварки [8] .

При проведении усиления применялись следующие технологических приемы: объём сварки минимизировался, сварные швы располагались в удобных доступных местах, не использовались потолочные швы [4]. По указанным соображениям грузовая балка крана усиливалась симметричными накладками с использованием ручной дуговой сварки по ГОСТ 5264-80. Применяемая в реальных условиях методика усиления грузовой балки вследствие сравнительно небольшого расхода металла, простоты усиления, отсутствия необходимости разгрузки конструкции и демонтажа является универсальной и применимой в условиях действующего производства.

При выполнении швов большой протяжённости (более 500 мм) возможно образование остаточных сварочных напряжений и деформаций в металлических конструкциях [5, 6]. Для устранения негативных последствий разработана специальная технология усиления грузовой двутавровой балки козлового крана ККС-10.

В качестве усиливающих элементов применены стальные полосы (марка стали Ст3сп аналогична стали двутавра) размерами 55х8 мм длиной 3 метра (ГОСТ 103-76), с отверстиями, просверленными по центру полосы, диаметром 20 мм, шагом 500 мм. Сварные швы выполнены дуговой сваркой электродами Э46А диаметром не более 4 мм. Во избежание значительных сварочных напряжений и деформаций тавровой балки применяется специальная технология, которая предусматривает определённую последовательность сборки, сварки и режимов усиления.

Перед сваркой контактные поверхности полок, между старым и новым металлом очищают от ржавчины, краски, окалины.

Глубокие локальные участки износа верхних поверхностей двутавровой грузовой балки крана заплавляют сваркой до уровня меньшего износа полок и зачищают наждачным кругом. Все остальные сварочные работы выполняются с двух сторон усиливаемой двутавровой балки двумя сварщиками одновременно.

Укладку усиливающих полос на полки начинают по одной, с двух сторон, от середины к краям балки, в шахматном порядке и прижимают струбцинами. Каждую полосу прихватывают сваркой к полкам с двух сторон и в отверстиях для элетрозаклёпок.

Предварительная сборка всех элементов конструкции на прихватках обеспечивает совместное сопротивление действующим нагрузкам основного стержня и элементов усиления при наложении основных швов.

Для обеспечения прочности сварного соединения крайние сварные швы усиливающих полос и полок двутавровой грузовой балки выполняют сплошными с катетом шва 8 мм. С целью снижения напряжений и сохранения упругости стальной балки внутренние швы выполняют прерывистыми, цепными длиной 200 мм и шагом 500 мм, катет шва 10 мм. Все швы и электрозаклёпки сваривают по схеме обратноступенчатого способа - от середины к краям грузовой балки. Стыковые швы усиливающих полос сваривают как соединения С19 (рис. 2).

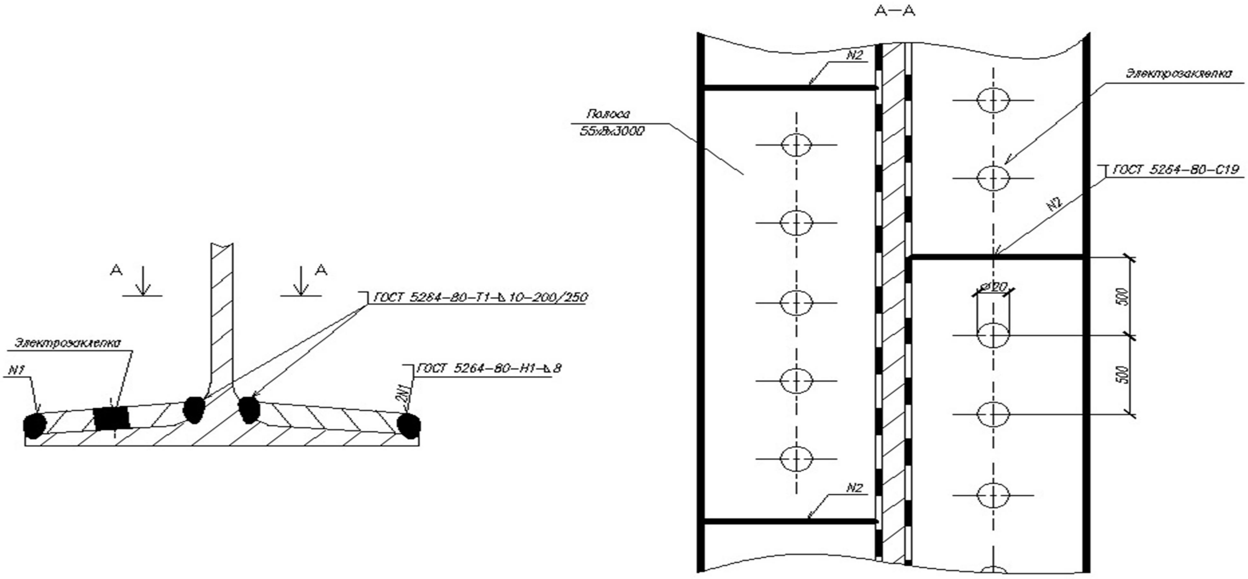


Рис. 2. Раскладка и сварка усиливающих полос на нижних полках двутавра №30

Рациональная последовательность сварки деталей для уравновешивания деформаций, применение обратноступенчатого способа сварки, заключающегося в том, что всю длину каждой полосы размечают на отдельные ступени и сварку каждой ступени выполняют в направлении, обратном общему направлению сварки, обеспечивают резкое снижение остаточных сварочных напряжений и деформаций в усиливаемой грузовой балке. Горизонтальные швы (связи сдвига) воспринимают сдвигающие усилия, а электрозаклёпки (поперечные связи) препятствуют отрыву элементов усиления от основной конструкции.

В связи с тем, что сварочные напряжения, возникающие в конструкции при описанной выше методике проведения усиления ответственной части грузоподъемного крана, являются незначительными [7], их можно при оценке прочности составной конструкции не учитывать.

Выполненный на действующем кране ремонт по описанной выше методике привел к увеличению погонной массы двутавровой балки на 316,7 кг/п.м, что составляет 0,026 % от массы максимального груза и грузовой тележки. Одновременное применение электрозаклепок и продольных швов обеспечивает совместную работу металла основного сечения с элементами усиления, делает этот приём ремонта грузовой балки универсальным и применимым в условиях действующего производства для конструкций аналогичного типа.

Ремонт грузовой балки крана не снизил её рабочих параметров. Козловой кран ККС-10 успешно эксплуатируется в настоящее время (рис. 3).

Рис. 3. Усиленная грузовая балка козлового крана ККС-10

Выводы

1. Предлагаемый технологический процесс усиления грузовой балки является достаточно простым, может быть успешно реализован в условиях строительной площадки, так как отвечает условиям безопасной эксплуатации козловых кранов.

2. Сравнительно небольшой расход металла, простота изготовления, отсутствие необходимости замены балки на новую, применение усиливающих полос, выполнение сварных швов в определённой последовательности – все перечисленное обеспечивает снижение остаточных напряжений и сохраняет достаточную прочность металлической конструкции.

3. Сварочные напряжения, возникающие в конструкции при описанной выше методике проведения усиления ответственной части грузоподъемного крана, являются незначительными, их можно при оценке прочности составной конструкции не учитывать.

4. Простота проведения ремонтных работ, отсутствие необходимости замены грузовой балки на новую, делают этот технический приём универсальным и применимым в условиях действующего производства для металлических конструкций аналогичного типа.

Библиографический список

1. Куликова Н.Н. Консольные и козловые краны, мостовые перегружатели (Справочник по кранам: в 2 Т. Т 2) / Н.Н.Куликова , М.П. Александров, М.М. Гохберг, А.А. Ковин и др.; под ред. М.М. Гохберга. – М.: Машиностроение, 1988. – 559 с.
2. Карпенко Г.В.. Влияние среды на прочность и долговечность металлов/Г.В. Карпенко. – Киев. «Наукова думка», 1976. – 128 с.
3. Барченкова Н.А. Анализ напряженно-деформированного состояния упруго подкрепленной полосы с учетом начальных несовершенств/ Н.А. Барченкова, Н.В. Минаева// Строительная механика и конструкции. Вып. №1(2). – Воронеж, 2011. – С. 24-26.
4. Бельский М.Р. Усиление металлических конструкций под напряжением/ М.Р. Бельский. – Киев: «Будивельник», 1975. – 120 с.
5. Сварочные напряжения и деформации: в 2 частях. - Части I и II /Сост. Т.Ю. Малеткина. – Томск: Изд-во ТГАСУ, 2010. – 26 с.
6. Суворин В.Я. Исследование свойств сварных соединений с помощью критического раскрытия трещины/ В.Я. Суворин, А.Ф. Николаев, В.В. Фролов, С.А. Куркин, Ю.Г. Сильвестров// Изв. вузов. Машиностроение, 1978, №9, с. 127-131.
7. Николаев А.Ф. Усиление строительных конструкций под нагрузкой /А.Ф. Николаев, Н.С. Сова, И.Ш. Алирзаев// Строительная механика и конструкции. Вып. №1(2). - Воронеж, 2011. – С. 34-37.
8. Справочник строителя. Сварка и резка в промышленном строительстве: В 2 Т. Т. 1; под ред. Б.Д. Малышева. – М.: Стройиздат, 1989. – 590 с.

References

1. Kulikova N.N., Alexandrov M.P., Gokhberg M.M., Kovin A.A. and others. Bracket gantry cranes, bridge loading elevator (Manual on cranes: in 2 volumes. V. 2). edited by M.M. Gokhberg. – M.: Mechanical engineering, 1988. – 559 p.
2. Karpenko G.V.. Environmental influence on metal strength and durability. Kiev. «Naukova Dumka», 1976. – 128 p.
3. Barchenkova N.A., Minaeva N.V. Analysis of deflected mode of elastically supported bar with account of initial imperfections. Structural Mechanics and structures. Issue №1(2). – Voronezh, 2011. – P. 24-26.
4. Belsky M.P. Reinforcement of metal structures under tension. – Kiev: «Budivelnik», 1975. – 120 p.
5. T.Yu. Maletkina. Welding tensions and deformations in 2 parts. – Parts I and II. Tomsk: Pub TGASU, 2010. – 26 p.
6. Suvorin V.Ya., Nikolaev A.F., Frolov V.V., Kurkin S.A., Silvestrov Yu.G. Research of welding connections properties with the help of crack critical opening. Inst. News. Mechanical engineering, 1978, №9, p. 127-131.
7. Nikolaev A.F., Sova N.S., Alirzaev I.Sh. Reinforcement of building materials under load. Structural Mechanics and structures. Issue. №1(2). - Voronezh, 2011. – P. 34-37.
8. Builder's manual. Welding and cutting in industrial construction: In 2 V. V. 1; under B.D. Malishev's editorship. – M.: Stroiizdat, 1989. – 590 p.

УДК 539.3

ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕСОМОМ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОМ КЛИНЕ И ЕЁ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. М. Шапиро[1]

Воронежский государственный технический университет
Россия, г. Воронеж

[1] *Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail:davshap@mail.ru*

Представлено решение задачи о распределении напряжений в весомом линейно деформируемом клине с одной горизонтальной гранью и тупым углом при вершине. Задача решена путём интегрирования формул известного решения теории упругости (М. Леви, 1902) о полосовой нагрузке, приложенной к грани клина. Показано хорошее соответствие полученного аналитического решения результатам лабораторных опытов на моделях. На основе решения задачи о весомом клине разработан способ оценки устойчивости откосных грунтовых массивов при помощи полученных автором формульных соотношений и графических зависимостей.

Ключевые слова: весомый клин, линейно деформируемый откосный грунтовый массив, оценка устойчивости.

PROBLEMS OF TENSION DISTRIBUTION IN HEAVY LINEARLY ELASTIC CHOCK AND ITS PRACTICAL APPLICATION

D.M. Shapiro

Voronezh state technical university

Voronezh, Russi

a

[1]*Dr. of Tech. Sc., Professor of Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)2715230, e-mail:davshap@mail.ru*

There is given the solution of the problem concerning the tension distribution in heavy linearly elastic chock with horizontal face and bird's-mouth at the top. The problem is decided by integration of the formulas of well-known theory of elasticity (m. Levy, 1902) about band load applied to chock face. Good correspondence of received analytical solution and laboratory test results on the models is presented. Based on the heavy chock problem solutions there was developed the method of assessment of slop ground massif stability with the help of the formula and graphic dependences relations.

Keywords: heavy chock, linearly elastic slop ground massif, assessment of stability.

Весомый клин с одной горизонтальной гранью и тупым углом $\pi-\alpha$ ($0<\alpha<\pi/2$) при вершине может служить расчётной схемой насыпных грунтовых массивов, в которых объёмные силы представлены последовательно укладываемыми горизонтальными слоями. Каждая точка расчётной области находится под воздействием веса вышележащих слоёв грунта. Вес слоя грунта толщиной dh создаёт на горизонтальной грани возведённой части насыпи равномерное давление γdh, где γ – удельный вес грунта (рис. 1). Напряжения в точке M расчётной области внутри угла AO_1B при возведении очередного слоя грунта описываются следующими выражениями-в соответствии известным решением теории упругости (М. Леви, 1902):

УДК 539.3

ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕСОМОМ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОМ КЛИНЕ И ЕЁ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. М. Шапиро[1]

Воронежский государственный технический университет
Россия, г. Воронеж

[1] *Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail:davshap@mail.ru*

Представлено решение задачи о распределении напряжений в весомом линейно деформируемом клине с одной горизонтальной гранью и тупым углом при вершине. Задача решена путём интегрирования формул известного решения теории упругости (М. Леви, 1902) о полосовой нагрузке, приложенной к грани клина. Показано хорошее соответствие полученного аналитического решения результатам лабораторных опытов на моделях. На основе решения задачи о весомом клине разработан способ оценки устойчивости откосных грунтовых массивов при помощи полученных автором формульных соотношений и графических зависимостей.

Ключевые слова: весомый клин, линейно деформируемый откосный грунтовый массив, оценка устойчивости.

PROBLEMS OF TENSION DISTRIBUTION IN HEAVY LINEARLY ELASTIC CHOCK AND ITS PRACTICAL APPLICATION

D.M. Shapiro

Voronezh state technical university

Voronezh, Russi

a

[1]*Dr. of Tech. Sc., Professor of Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)2715230, e-mail:davshap@mail.ru*

There is given the solution of the problem concerning the tension distribution in heavy linearly elastic chock with horizontal face and bird's-mouth at the top. The problem is decided by integration of the formulas of well-known theory of elasticity (m. Levy, 1902) about band load applied to chock face. Good correspondence of received analytical solution and laboratory test results on the models is presented. Based on the heavy chock problem solutions there was developed the method of assessment of slop ground massif stability with the help of the formula and graphic dependences relations.

Keywords: heavy chock, linearly elastic slop ground massif, assessment of stability.

Весомый клин с одной горизонтальной гранью и тупым углом $\pi-\alpha$ ($0<\alpha<\pi/2$) при вершине может служить расчётной схемой насыпных грунтовых массивов, в которых объёмные силы представлены последовательно укладываемыми горизонтальными слоями. Каждая точка расчётной области находится под воздействием веса вышележащих слоёв грунта. Вес слоя грунта толщиной dh создаёт на горизонтальной грани возведённой части насыпи равномерное давление γdh, где γ – удельный вес грунта (рис. 1). Напряжения в точке M расчётной области внутри угла AO_1B при возведении очередного слоя грунта описываются следующими выражениями-в соответствии известным решением теории упругости (М. Леви, 1902):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{\gamma dh}{\pi-\alpha+tg\alpha}\left(\pi-\alpha-\theta-\sin\theta\cos\theta\right);\\
\sigma_z &= -\frac{\gamma dh}{\pi-\alpha+tg\alpha}\left(\pi-\alpha-\theta+tg\alpha+\sin\theta\cos\theta\right);\\
\tau_{xz} &= \frac{\gamma dh\cdot\sin^2\theta}{\pi-\alpha+tg\alpha},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где θ – угловая координата точки M, отсчитываемая от грани O_1B.

Общие напряжения в точке M, расположенной на расстоянии z от горизонтальной грани расчётной области, получены интегрированием по θ в пределах от θ=0 до $\theta=\theta_0$. На основании геометрических построений на рис. 1 выводится следующее соотношение, связывающие приращение высоты насыпи dh и соответствующий ему центральный угол $d\theta$ [1]:

$$dh = z\frac{tg\theta_0 + tg\alpha}{tg\theta_0}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2(\theta+\alpha)}d\theta. \quad (2)$$

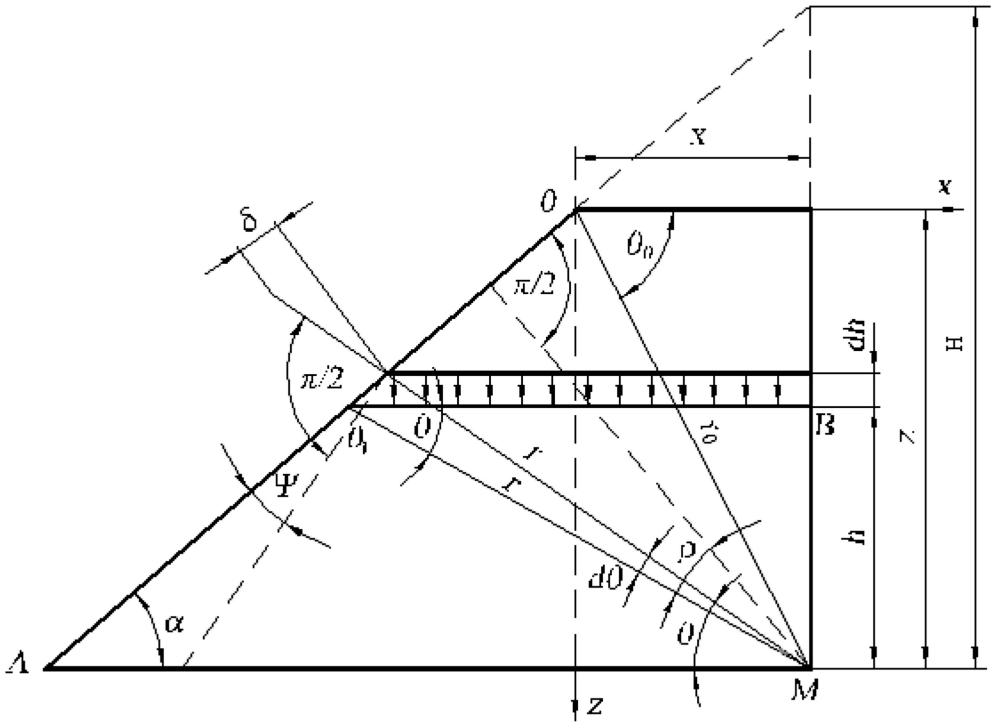


Рис. 1. Расчётная схема к определению напряжений в точке M весомого клина:

$$\rho = \psi = \frac{\pi}{2} - (\theta+\alpha);\ \delta = \frac{rd\theta}{\sin(\theta+\alpha)};\ r = \frac{H\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)};\ dh = \delta\sin\alpha;\ H = z\frac{tg\theta_0 + tg\alpha}{tg\theta_0};$$

$$dh = z\frac{tg\theta_0 + tg\alpha}{tg\theta_0}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2(\theta+\alpha)}d\theta$$

После подстановки соотношения (2) в уравнения (1) и интегрирования получается следующее распределение напряжений в расчётной области, состоящей из горизонтальных слоёв, вес γdh каждого их которых воздействует только на ранее возведённую часть насыпи:

$$\sigma_x = -\gamma z K s_x,\ \sigma_z = -\gamma z K s_z,\ \tau_{xz} = \gamma z K t_{xz}, \quad (3)$$

где K, s_x, s_z, t_{xz} – безразмерные коэффициенты, определяемые в зависимости от тригонометрических функций углов α и θ_0:

$$K = \frac{tg\theta_0 + tg\alpha}{tg\theta_0} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\pi - \alpha + tg\alpha};$$

$$s_x = (\pi - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha)ctg\alpha - (\pi - \alpha - \theta_0 + \sin\alpha\cos\alpha)ctg(\theta_0 + \alpha) -$$

$$-2\cos^2\alpha \ln\frac{\sin(\theta_0 + \alpha)}{\sin\alpha} - \theta_0 \sin 2\alpha;$$

$$s_z = (\pi - \alpha + tg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)ctg\alpha - (\pi - \alpha + tg\alpha - \theta_0 - \sin\alpha\cos\alpha)ctg(\theta_0 + \alpha) -$$

$$-2\sin^2\alpha \ln\frac{\sin(\theta_0 + \alpha)}{\sin\alpha} + \theta_0 \sin 2\alpha;$$

$$t_{xz} = \theta_0 \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \ln\frac{\sin(\theta_0 + \alpha)}{\sin\alpha} - \sin^2\alpha[ctg(\theta_0 + \alpha) - ctg\alpha].$$

Так как K, s_x, s_z, t_{xz} меняются только в зависимости от угловой координаты θ_0, то в соответствии с (3) все компоненты напряжений изменяются по лучам-векторам, определяемым углами θ_0, по линейному закону от 0 при $r_0=z/\sin\theta_0=0$ до ∞ при $r_0\to\infty$.

Недостатком решения (1) является его неполная теоретическая строгость. В соответствии с теоремой Кирхгофа условием единственности решения задач теории упругости является заданность граничных условий на замкнутом контуре. В рассматриваемой задаче граничные условия являются доказанными на внешних гранях и не заданы внутри расчётной области. Этот недостаток перешёл в решение (3). Следствием этого является отсутствие в обоих решениях коэффициента поперечной деформации Пуассона.

Данное свойство характерно для задач теории упругости о расчётных областях с бесконечно удалёнными границами [2, 3, 4]. Несмотря на это, решения таких задач (Фламана, Буссинеска, Митчелла, Миндлина и др.) успешно применяются в исследованиях и инженерной практике при условиях соответствия инженерным требованиям и результатам экспериментов.

Распределение напряжений в соответствии с аналитическим решением (3) сопоставлено с результатами лабораторных опытов на моделях насыпей, выполненных в СибЦНИИСе (Р. Е. Подвальный, 1970 [5]). На рис. 2 показано графическое сравнение распределения напряжений, полученных расчётным и экспериментальным путём, на примере откоса с заложением 1:1,5. Такое же удовлетворительное совпадение результатов получено для откосов с заложением 1:1,75 и 1:2,0. Эти данные подтверждают правомерность использования решения (3) в качестве способа расчёта при анализе и исследовании геотехнических объектов, соответствующих схеме на рис. 1.

Решение (3) задачи о весомом клине в сочетании с условием прочности Мора-Кулона позволяет исследовать размеры и границы «областей разрушения» в грунтовых откосах с горизонтальной поверхностью. Для этой цели используется следующее соотношение:

$$\frac{|\sigma_2| + \sigma_c}{|\sigma_1| + \sigma_c} \le ctg^2(45° - \frac{\varphi}{2}), \qquad (4)$$

где $\sigma_c = \dfrac{c}{tg\varphi}$ – «давление связности». Главные напряжения $\sigma_{2,1}$ в точке M описываются следующими выражениями:

$$\sigma_{2,1} = -\gamma z K s_{2,1}, \quad s_{2,1} = \frac{s_x + s_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_z}{2}\right)^2 + t_{xz}{}^2}. \qquad (5)$$

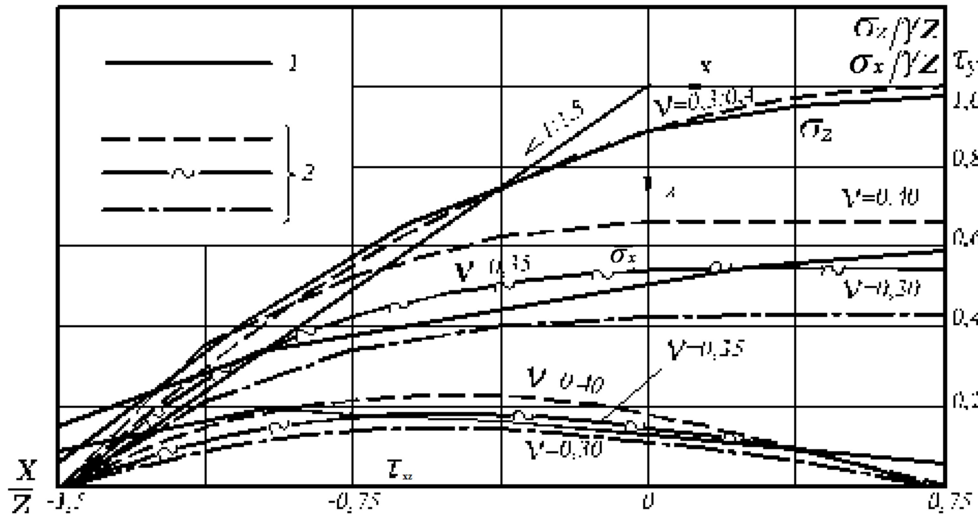


Рис. 2. Аналитическое *1* и экспериментальное *2* распределение напряжений в насыпи с заложением откоса 1:1,5 (ν – коэффициент Пуассона)

Если обозначить левую часть соотношения (4) через n, а правую часть через m, то это неравенство может быть представлено в виде $n \leq m$.

В случае несвязного грунта (c=0, σ_c=0)

$$n_{c=0}=\sigma_2/\sigma_1= s_2/s_1. \tag{6}$$

Величины $n_{c=0}$ постоянны для радиусов-векторов, проведённых через вершину клина O. На рис. 3 показаны кривые $n_{c=0}=f(\theta_0)$ при заложениях откосов1:1, 1:1,5, 1:2.

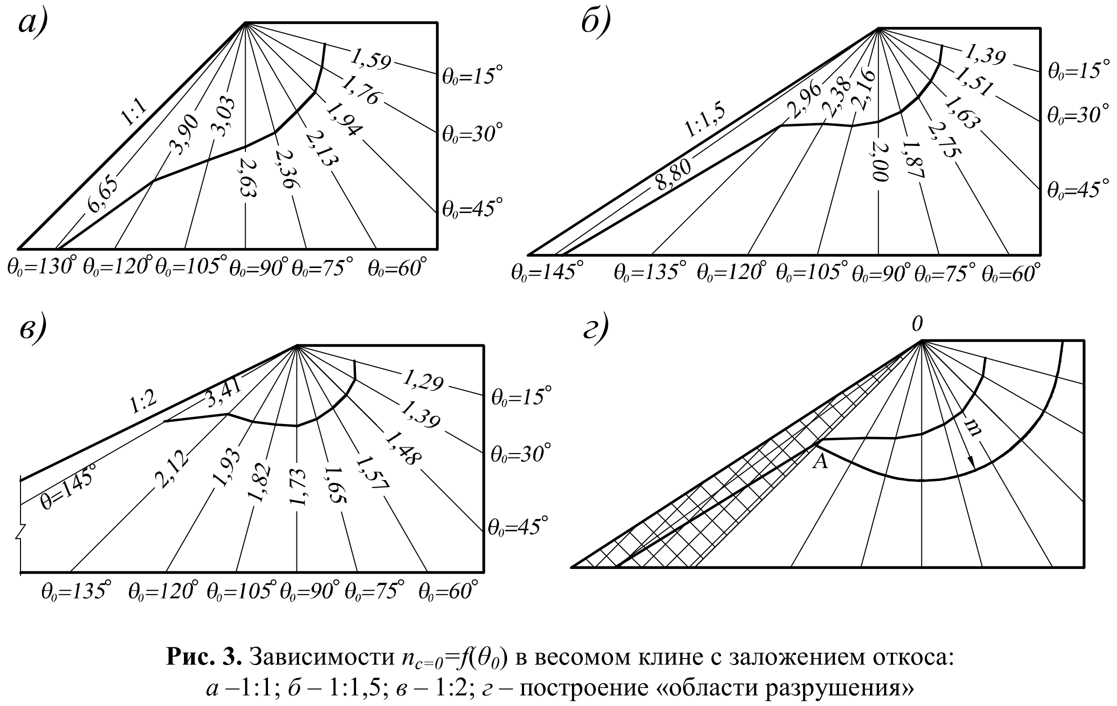


Рис. 3. Зависимости $n_{c=0}=f(\theta_0)$ в весомом клине с заложением откоса: *а* –1:1; *б* – 1:1,5; *в* – 1:2; *г* – построение «области разрушения» в весомом клине из несвязного грунта

Если из вершины клина O провести дугу радиусом $m=ctg^2(45^0-\varphi/2)$ (рис. 3,*г*), то точка A пересечения этой дуги с кривой $n_{c=0}$ определит луч OA, который соответствует условию предельного напряжённого состояния. Сектор клина между наклонной гранью и лучом OA является «областью разрушения», где не выполняется условие $n \leq m$.

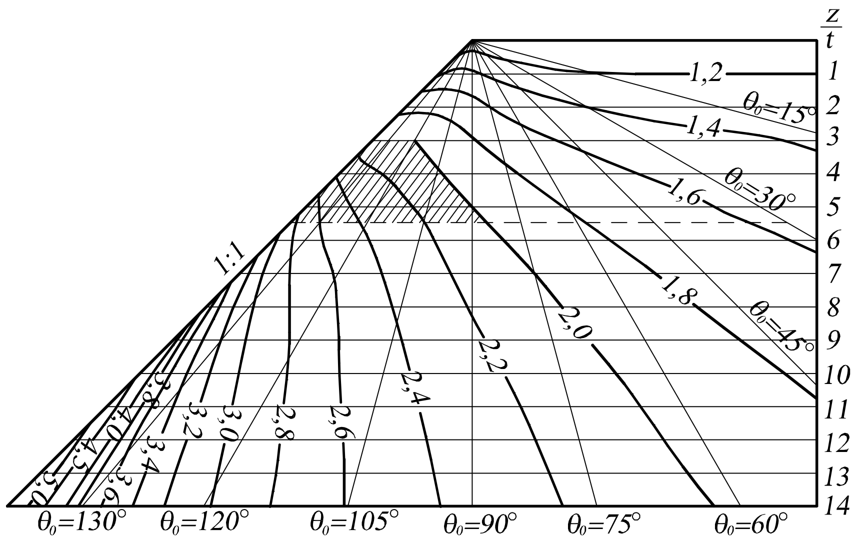
Продолжим анализ соотношения (4) для условий весомых клиньев, сложенных связными грунтами. Обозначим $\sigma_c=\gamma t$, тогда выражение для n может быть представлено в виде

$$n=\frac{\gamma z K s_2+\gamma t}{\gamma z K s_1+\gamma t}=\frac{K s_2+t/z}{K s_1+t/z}. \qquad (7)$$

где $t=\sigma_c/\gamma$.

Условие (7) позволяет построить изолинии n на диаграммах с безразмерными координатами z/t, как это показано на рис. 4 на примерах откосов с заложением 1:1, 1:1,5, 1:2. При $c\neq 0$ верхняя часть расчётной области находится в допредельном состоянии ($n<m$). «Область разрушения» заключена между наклонной гранью и изолинией $n=m$. Так, например, если заложение откоса 1:1, высота z=15 м, удельный вес грунта γ=20кН/м^3, $\varphi=20^0$, c=20кПа, значение $m=ctg^2(45^0-\varphi/2)=2{,}0$, $t=\dfrac{c/tg\phi}{\gamma}=\dfrac{20}{20tg20^\circ}=2{,}75$ м и $\dfrac{z}{t}=\dfrac{15}{2{,}75}=5{,}5$. «Область разрушения», где не выполняется условие $n\leq m$, выделена на рис. 4, *а* штриховкой.

а)



б)

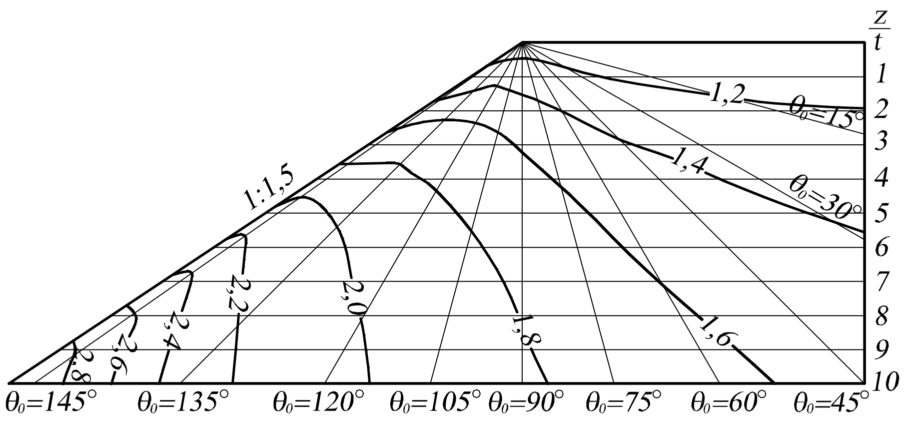


Рис. 4 (начало). Изолинии n при $c\neq 0$ в весомом клине с заложением откоса: *а* –1:1; *б* – 1:1.5; *в* – 1:2

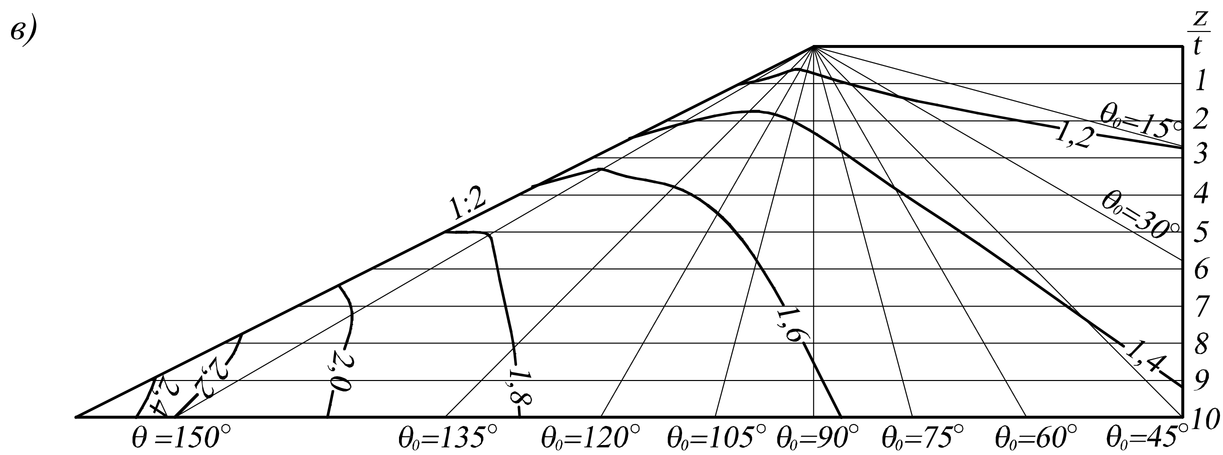


Рис. 4 (окончание). Изолинии *n* при $c \neq 0$ в весомом клине с заложением откоса:
а –1:1; *б* – 1:1,5; *в* – 1:2

Если грунтовая насыпь частично подтоплена, то напряжения с учётом взвешивания водой можно определить наложением на «сухой» клин (с удельным весом γ) второго клина с направленными вверх (отрицательными) объёмными силами ($\gamma_{взв}-\gamma$), где $\gamma_{взв}$ – удельный вес грунта во взвешенном состоянии [6]. Второй клин (с отрицательными объёмными силами) ограничен откосом и границей подтопления. Расстояние между горизонтальными гранями клиньев равно d. Координаты точек во втором клине (рис. 5, *а*)

$$x_1=x+d\,ctg\alpha,\ z_1=z-d;\ \theta_1=arc\ tg(z_1/x_1). \qquad (8)$$

Обозначим $(\gamma_{взв}-\gamma)/\gamma$ через μ, z_1/z через η. Компоненты напряжений в насыпи, частично взвешенной подтоплением, определятся как суммы соответствующих напряжений от действия объёмных сил γ и $(\gamma_{взв}-\gamma)$ обоих клиньев:

$$\sigma_x^{\ n}=-\gamma z(Ks_x+\mu\eta K_1 s_{x1}),\ \sigma_z^{\ n}=-\gamma z(Ks_z+\mu\eta K_1 s_{z1}),\ \tau_{xz}^{\ n}=\gamma z(Kt_{xz}+\mu\eta K_1 t_{x1z1}), \qquad (9)$$

где $K_1, s_{x1}, s_{z1}, t_{x1z1}$ – безразмерные коэффициенты, аналогичные K, s_x, s_z, t_{xz}, определяемые в зависимости от тригонометрических функций углов α и θ_1.

Формулы (9) позволяют определить $\sigma_x^{\ n}$, $\sigma_y^{\ n}$, $\tau_{xz}^{\ n}$, затем $\sigma_{2,1}^{\ n}$ и соотношения

$n_n = \dfrac{\left|\sigma_2^{\ n}\right| + \sigma_c}{\left|\sigma_1^{\ n}\right| + \sigma_c}$ или (при c=0, σ_c=0) $n_{n,c=0} = \dfrac{\left|\sigma_2^{\ n}\right|}{\left|\sigma_1^{\ n}\right|}$. На рис. 5, *б* изображён пример построения изолиний $n_{n,c=0}$ для насыпи из несвязного грунта с заложением откоса 1:2. Изолинии $n_{n,c=0}$ ниже уровня подтопления, отклоняясь от прямолинейного направления, смещаются от откоса в глубь грунтового массива, что соответствует влиянию взвешивающего действия воды на устойчивость откоса.

На основании анализа прочностных показателей типовых откосов земляного полотна автомобильных дорог и мостовых конусов получены условия ограничения «областей разрушения» [где не выполняется условие (4)] следующего вида (рис. 6):

$$\rho \leq 12\div15^0,\ \theta_y \geq 130\div135^0, \qquad (10)$$

где ρ – центральный угол сектора со стороны наклонной грани, в котором должна помещаться «область разрушения», θ_y – угловая координата луча, ограничивающего «область разрушения».

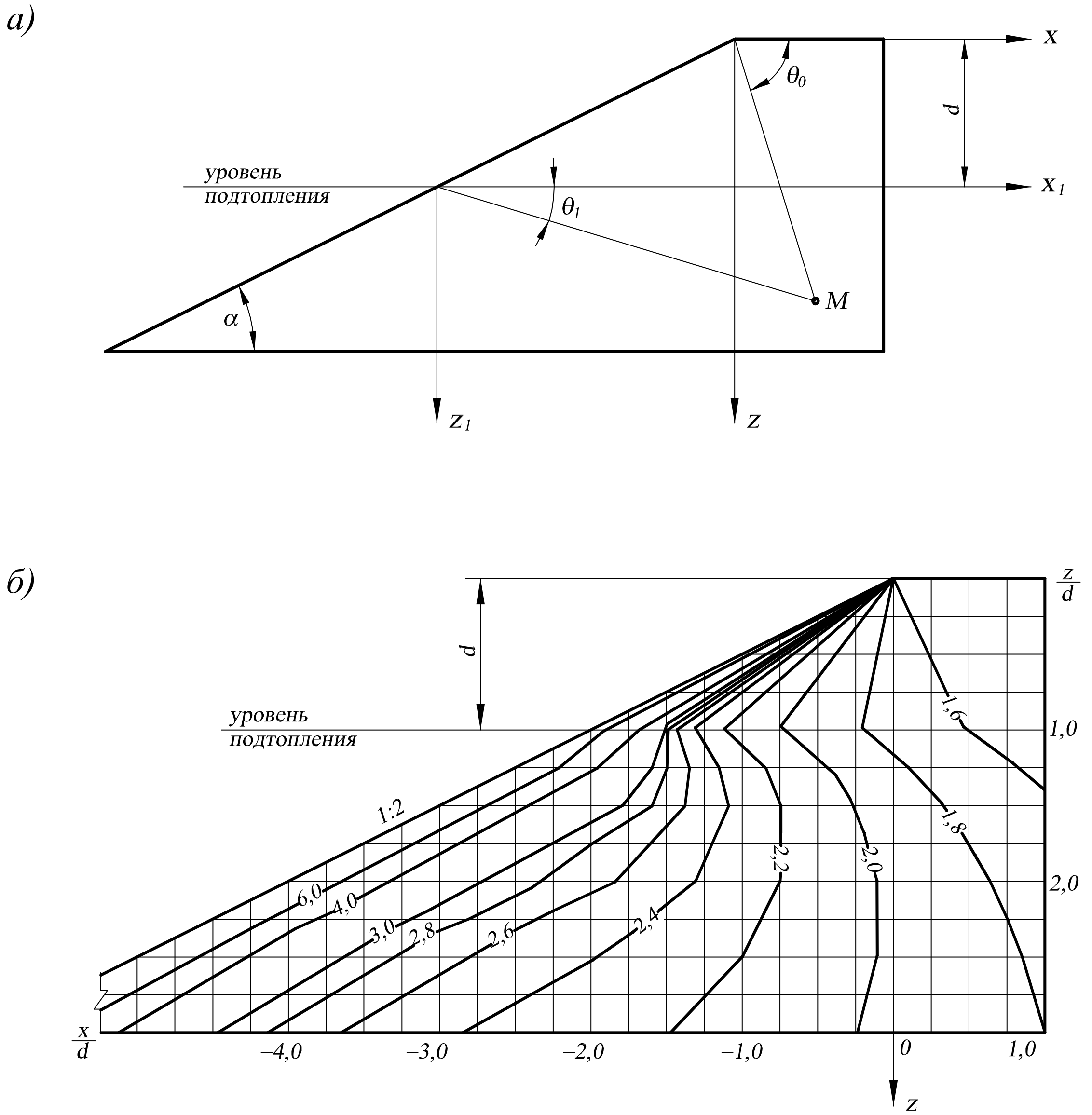


Рис. 5. Расчётная схема (*а*) и изолинии $n_{n,c=0}$ (*б*) в весомом клине,
частично взвешенном подтоплением

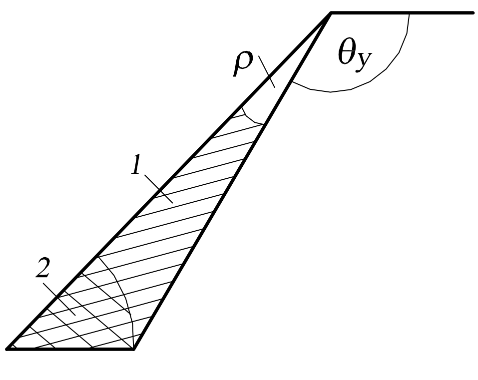


Рис. 6. Схема к соотношениям (10):
положения центральных углов
$\rho \le 12\div15^0$, $\theta_y \ge 130\div135^0$;
1 – несвязный грунт, *2* – связный грунт

При выполнении этих условий грунтовый массив может считаться прочным, устойчивым и решение (3) является правомерным для расчётов в пределах области клина, где выполняется условие прочности (4).

Рассмотренные выше условия применимости решения теории линейно деформируемой среды для насыпей и верхних слоёв их оснований соответствуют стадии напряжённого состояния, которое является в основном допредельным и имеет место ограниченное развитие пластической области. В таблице содержатся произведения коэффициентов $Ks_2 = (Ks_2)_{135^\circ} = \dfrac{|\sigma_2|}{\gamma z}$ и $Ks_1 = (Ks_1)_{135^\circ} = \dfrac{|\sigma_1|}{\gamma z}$, соответствующие угловой координате θ_0=135^0, при различных заложениях откосов.

Таблица

Произведения коэффициентов $(Ks_{1,2})_{135^0}$

Заложения откосов	$(Ks_2)_{135^\circ}$	$(Ks_1)_{135^\circ}$
1,25	0,484	0,108
1,50	0,574	0,194
1,75	0,635	0,262
2,00	0,678	0,320
2,50	0,738	0,408

Подстановка этих коэффициентов в условие прочности (4) позволяет получить следующее условие допредельного состояния весомого клина [7]:

$$\frac{\gamma z (Ks_2)_{135^\circ} tg\varphi + c}{\gamma z (Ks_1)_{135^\circ} tg\varphi + c} \le ctg^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2}). \qquad (11)$$

На рис. 7 представлены примеры диаграмм, упрощающих практическое применение соотношения (11). Эти графики выражают условие прочности по Мору-Кулону в записи (4) на лучах с угловой координатой θ_0=135^0 для соответствующих сочетаний c, φ, z и заложений откосов 1,25 и 1,50 при γ=17,7 кН/м^3. Расположение точек с координатами c, φ выше и правее соответствующих кривых означает отсутствие или ограниченное развитие «области разрушения». Данные таблицы и кривые на рис. 7 составлены для условий «сухих» насыпей. При расчётах откосов из водопроницаемого грунта, взвешенного подтоплением, можно воспользоваться теми же табличными данными и диаграммами, но при выполнении проверки следует условно увеличивать крутизну откосов с 1:2 до 1:1,5, с 1:1,75 до 1:1,25. Данный приём основывается на полученной по расчётам приблизительном равенстве – центральных углов ρ секторов со стороны наклонной грани, в которых помещаются «области разрушения».

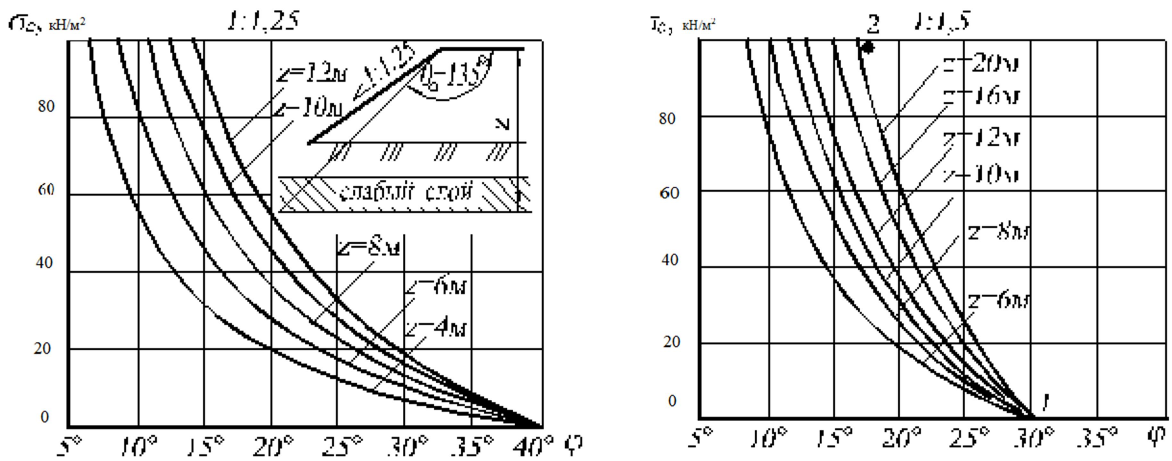


Рис. 7. Примеры диаграмм, упрощающих применение соотношения (11):
а – заложение откоса 1,25, *б* – заложение откоса 1,50

Библиографический список

1. Шеляпин Р.С. Применение задачи о весомом линейно деформируемом клине для исследования напряжённого состояния откосов/ Р.С. Шеляпин, Д.М. Шапиро // Основания, фундаменты и механика грунтов». - Киев, «Будівельник», 1971. – С. 265 – 269.
2. Шапиро Д.М. Теория и расчётные модели оснований и объектов геотехники/ Д.М. Шапиро. – М.: Изд-во АСВ, 2016. – 176 с.
3. Шапиро Д. М. Аналитический и численный линейные расчёты оснований фундаментов мелкого заложения/ Д.М. Шапиро // Вестник Пермского национального исследовательского университета, Строительство и архитектура. – Пермь, 2015, № 4. – С. 5 – 18.
4. Шапиро Д.М. Анализ решений классических прикладных задач механики грунтов/ Д.М. Шапиро // Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении: материалы международной научно-технической конференции. – Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2018. – С. 54 – 76.
5. Подвальный Р.Е. К вопросу о распределении напряжений в насыпях и бортах выемок/ Р.Е. Подвальный// Сб. трудов ЦНИИС, вып. 32. - М., 1970.
6. Шапиро Д.М. Напряжённое состояние весомого грунтового клина, возводимого горизонтальными слоями/ Д.М. Шапиро // Основания, фундаменты и подземные сооружения: сб. трудов НИИ оснований. – М.: Стройиздат, 1972. - №63.– С. 10 – 12.
7. Шапиро Д.М. Оценка общей устойчивости насыпи на основе решения теории линейно деформируемой среды/ Д.М. Шапиро//Транспортное строительство. – 1973. - №10. – С. 40 – 41.

References

1. Sheljapin P.S., Shapiro D.M. Application of the problem about heavy linearly elastic chock for slope deflected mode research. “Bases, foundations and mechanics of grounds”. - Kiev, “Budivelnik”, 1971. – P. 265 – 269.
2. Shapiro D.M. Theory and design models of bases and geotechnics objects. – M.: Pub. house ASV, 2016. – 176 p.
3. Shapiro D.M. Analytical and numerical linear design of shallow. Bulletin of Perm national research university. Constructions and architecture. – Perm, 2015, № 4. – P. 5 – 18.
4. Shapiro D.M Analysis of solutions of the ground mechanics classic applied problems. Mechanics of grounds in geotechnics and foundation construction: materials of international scientific – technical conference. – Novochercassk: YuRGPU (NPI), 2018. – P. 54 – 76.
5. Podvalny R.E. For the problem of tension in embankment and ground upcast. Work collection of TzNIIS, issue. 32. - M., 1970.
6. Shapiro D.M. Deflected mode of heavy ground chock constructed horizontally layer by layer. Bases, foundations and underground structures. Work collections of research institute of foundations.– M.: Stroiizdat, 1972. - № 63.– P. 10 – 12.
7. Shapiro D.M. Assessment of total embankment stability based on the solution of linearly elastic background theory. Transport building. – 1973. - №10. – P. 40 – 41.