



ISSN 2219-1038

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск №1 (14), 2017

Учредитель

Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего
образования
«Воронежский
государственный
технический
университет»

Издатель

Строительный факультет

Главный редактор

Сафронов В.С., д.т.н., проф.

Зам. главного редактора

Ефрюшин С.В., к.т.н., доц.

Ответственный секретарь

Габриелян Г.Е., к.т.н., доц.

Технический секретарь

Флавианов В.М., м.н.с.

Члены редколлегии

Шитикова М.В., д.ф.-м.н., проф.

Шапиро Д.М., д.т.н., проф.

Орлов А.С., д.т.н., проф.

Свентиков А.А., д.т.н., проф.

Иванов Ю.В., к.т.н., доц.

Андреев А.В., к.т.н., доц.

Рогатнев Ю.Ф., к.т.н., доц.

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Аверин А.Н.

Решение задач сопротивления материалов в среде
компьютерной математики MAPLE 5

Кирсанов М.Н.

Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы,
имеющей случаи кинематической изменяемости 27

Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А.

Анализ прогиба внешне статически неопределимой
балочной фермы 31

Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А.

Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой
«STAR» в аналитической форме 36

Коробкин В.Д., Ордян М.Г.

Построение непрерывного поля скоростей
перемещений для одной осесимметричной задачи
теории пластичности 42

Ефрюшин С.В., Бурлаков А.В.

Исследование влияния преднапряжения в оттяжках
мачты на частоты и формы свободных колебаний 45

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Колодежнов С.Н., Гладких Е.Н.

Исследование влияния компоновочных параметров
сводчатого структурного покрытия на НДС
несущих конструкций 52

Колодежнов С.Н., Селиванова А.Н.
Анализ висячих конструктивных систем
подкрепления навеса в виде структурной
плиты

61

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Габриелян Г.Е., Флавианов В.М., Корома Муса
Расчетный анализ напряженно-деформированного
состояния элементов каркаса промздания
с применением пространственных
конечно-элементных моделей

72

Агарков А.В., Меньших П.Н.
Исследование влияния элементов усиления
из композитных материалов на несущую
способность железобетонной балки

87

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Шапиро Д.М., Тютин А.П., Родионов В.А.
Дорожные инженерные сооружения из сварного
трубчатого шпунта: конструкции, теория, расчет

95

**Гриднев С.Ю., Скалько Ю.И., Раводин И.В.,
Янаева В.В.**
Моделирование колебаний упруго опертой
динамической системы с ограничителями хода

108

Попечительский совет

ООО «Предприятие
Инвестстройиндустрия»
в лице директора
Ушакова И.И.

ООО «Предприятие
по инженерному и научно-
техническому обслуживанию
строительного комплекса
«СтройНаука»
в лице зам. директора
Глушкова А.В.

Воронежское региональное
отделение Общероссийской
общественной организации
«РОИС»
в лице председателя
Бутырина В.М.

© ВГТУ, 2017

Адрес редакции: 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./ факс: +7(473) 2715230

**По вопросам размещения статей просьба обращаться
по адресу:**

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./факс: +7 (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф. **Сафронову Владимиру Сергеевичу**,
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: vss22@mail.ru
зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц. **Ефрюшину Сергею Владимировичу**,
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
отв. секретарю, канд. техн. наук, доц. **Габриеляну Грайру Егисеевичу**
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: grayr2010@rambler.ru



ISSN 2219-1038

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific-Technical Journal

Issue №1 (14), 2017

Founder

State Educational Institute
of Higher Vocational Education

Voronezh State Technical
University

Editor

Construction institute

Chief Editor

Dr of Sc. Tech. Prof.
V.S. Safronov

Deputy of Chief Editor

PhD S.V. Efryushin

Senior Secretary

PhD G.E. Gabrielyan

Technical Secretary

Sc. associate V.M. Flavianov

Members of editorial board

Shitikova M.V., Dr of Math
Shapiro D.M., Dr of Tech Sc.
Orlov A.S., Dr of Tech Sc.
Sventikov A.A., Dr of Tech Sc.
Ivanov Y.V., PhD
Andreev A.V., PhD
Rogatnev Y.F., PhD

CONTENT

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

Averin A.N. Solution of the problem of material strength in computational mathematics medium MAPLE	5
Kirsanov M.N. The derivation of formula for deflection of truss with cases of kinematic variability	27
Kirsanov M.N., Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analysis of the deflection of outwardly statically indeterminable girder	31
Gorbunova A.S., Kirsanov M.N., Lepetyucha V.A. Deflection calculation of symmetrical girder with «STAR» lattice in analytical form	36
Korobkin V.D., Ordyan M.G. Construction of continuous field of displacement velocity for one plastic theory axisymmetric problem	42
Efryushin S.V., Burlakov A.V. Research of prestress in support guy lines influence on free motions frequencies and forms	45

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

Kolodezhnov S.N., Gladkikh E.N. Research of arched structural cover layout characteristics influence on bearing structures deflected mode	52
---	----

Kolodezhnov S.N., Selivanova A.N.

Analysis of suspended system of shed support as structural slab

61

Board of Trustees

Ltd. «Enterprise
Investroyindustriya»
Director **I.I. Ushakov**

CALCULATION AND DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES

Gabrielyan G.E., Flavinov V. M., Koroma Musa

Calculation analysis of industrial building structure members deflected mode with application of spatial finite element models

72

Ltd. «Enterprise on Engineering and Scientific Service of Building Complex StroyNauka»
Deputy Director
A.V. Glushkov

Agarkov A.V., Menshikh P.N.

Research of reinforcement members from composite materials influence on reinforced concrete beam bearing capacity

87

Voronezh regional Department of all Russian public organization «RSEC»
Chairman
V.M. Butyrin

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT CONSTRUCTIONS

Shapiro D.M., Tyutin A.P., Rodionov V.A.

Road engineering constructions from welded pipe grooving-and-tonguing: structures, theory, calculation

95

Gridnev S.Yu., Skalko Yu.I., Ravodin I.V., Yanaeva V.V.

Simulation of vibrations of elastically supported dynamical system with movement limiters

108

© VGTU, 2017

Address : 84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh, Russia

Tel/ fax.: +7 (473) 2715230

Concerning the articles publication one can address:

84, 20-letie Oktyabrya st., Voronezh 394006, Russia

Chief editor Dr Sc.Tech., Prof.Vladimir Sergeevich Safronov

Tel./fax: +7 (473) 2715230 E-mail: vss22@mail.ru

Deputy of chief editor, PhD of Tech. Sc., associate professor Sergei Vladimirovich Efrushin

тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

Senior secretary, PhD of Tech.Sc., associate professor Grayr Egisheevich Gabrielyan

тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: grayr2010@rambler.ru

E-mail: grayr2010@rambler.ru

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04:004

*Воронежский государственный
технический университет*

*Канд. техн. наук, доц. кафедры
строительной механики*

А.Н. Аверин

Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-52-30

e-mail: an_averin@mail.ru

Voronezh State Technical University

*PhD of Tech. Sc., Associate professor of Structural
Mechanics department*

A.N. Averin

Voronezh, Russia, tel.: +7(473)2715230

e-mail: an_averin@mail.ru

А.Н. Аверин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ В СРЕДЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Рассматриваются примеры решения задач сопротивления материалов в среде компьютерной математики Maple. Дается анализ НДС статически неопределимых балочных систем: при плоском изгибе, на упругом основании, при продольно-поперечном изгибе, кручении. Для различных расчетных схем используется единый подход при задании математической модели. Усилия и перемещения определяются как решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Смешанная форма записи дифференциальных уравнений используется для построения линий влияния усилий на основе кинематического способа.

Ключевые слова: плоский изгиб, упругое основание, продольно-поперечный изгиб, кручение тонкостенного стержня открытого профиля, линии влияния, напряженно-деформированное состояние, краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, система компьютерной математики Maple.

A.N. Averin

SOLUTION OF THE PROBLEM OF MATERIAL STRENGTH IN COMPUTATIONAL MATHEMATICS MEDIUM MAPLE

The examples of solution of the problem of material strength in computational mathematics medium Maple are under consideration. There is given the analysis of statically indeterminate beam systems: at simple bending, on elastic base, at transverse-longitudinal bending and torsion. The one-size-fits-all approach is used for different for design model at mathematical model definition. Stresses and shifts are defined as a boundary-value problem solution for the system of the first series regular differential equations. Mixed form of the differential equations write is used for construction of stress influence line based on kinematic method.

Key words: simple bending, elastic base, transverse-longitudinal bending, torsion of open profile slender, influence line, deflected mode, boundary-value problem for the system of the ordinary differential equations, computational mathematics system Maple.

Анализу НДС балочной системы предшествует решение математической задачи, сформулированной на основе физико-математической модели стержня. Например, физическая модель плоского изгиба стержня включает: описание объекта «стержень», понятия внутренних усилий, напряжений, перемещений, деформаций, а также допущения и гипотезы, принятые в отношении напряжений и деформаций. Математическая модель плоского изгиба стержня представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, полученную на основе уравнений равновесия, физических (закон Гука) и геометрических уравнений.

© Аверин А.Н., 2017

Математическая модель отдельного стержня универсальна в рамках системы дифференциальных уравнений и переходит в корректно поставленную дифференциальную задачу только после присоединения граничных условий (условий закрепления стержня или условий соединения системы стержней - уравнений связи).

Таким образом, анализ НДС балочной системы предполагает решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Приведем решение конкретных задач сопротивления материалов [1,2,3,4] в среде пакета аналитических вычислений Maple. Пакет Maple – универсальная математическая система, применяемый в научных исследованиях и в преподавании [5]. При решении задач в Maple используются физико-математические модели стержней, построенные в классическом курсе сопротивления материалов. Процесс решения задачи в Maple происходит интерактивно – пользователь вводит команды и видит на экране их выполнение. В начале программы (в поле комментария) размещается рисунок, на котором изображена расчетная схема балочной системы. В соответствии с расчетной схемой магистрант (студент) шаг за шагом составляет уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций, уравнения закона Гука, уравнения связей – формирует дифференциальную задачу. Решение дифференциальной задачи может быть выполнено с помощью одной команды Maple или с помощью нескольких команд. Во втором случае пользователь должен четко представлять алгоритм решения задачи (необходимо знание раздела курса высшей математики - дифференциальные уравнения). Завершает решение задачи графическая иллюстрация результатов вычислений. Именно последние два этапа являются наиболее трудоемкими при решении задачи в классическом курсе и их разумно выполнять с помощью программы компьютерной математики. Важно отметить, что Maple может выдавать как аналитическое (в виде алгебраических выражений), так и численное (таблицы, графики) решения. Именно к аналитическому решению инженер может применять методы математического анализа (например, дифференцировать функцию прогиба при вычислении усилий, интегрировать на участках выражения для линии влияния, вычисляя площади положительных и отрицательных участков).

1. Плоский изгиб

Пример 1. Определить перемещения и внутренние усилия и для статически неопределимой балки (рис. 1) [1].

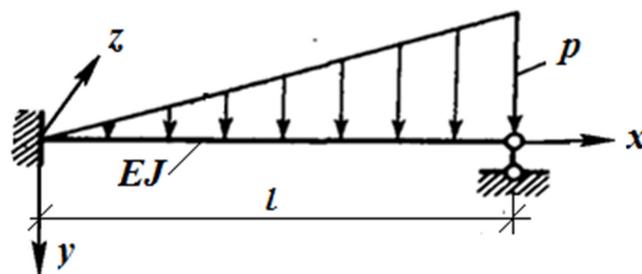


Рис. 1

Система дифференциальных уравнений плоского изгиба стержня имеет вид

$$\frac{dQ_y(x)}{dx} = -p \frac{x}{l}, \quad \frac{dM_z(x)}{dx} = Q_y(x), \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{EJ_z}, \quad \frac{dV(x)}{dx} = \varphi(x), \quad (1)$$

где $Q_y(x)$ - поперечная сила, $M_z(x)$ - изгибающий момент в сечении балки (внутренние усилия) $\varphi(x)$, $V(x)$ - перемещения: углы поворота сечений и прогиб; p - интенсивность распределенной нагрузки; EJ_z - изгибная жесткость балки.

Интегрирование системы (1) необходимо проводить с учетом условий закрепления:

$$\begin{aligned} V(0) = 0, \phi(0) = 0, \\ V(l) = 0, M(l) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Физическая сущность граничных условий: $V(0) = 0, \phi(0) = 0$ - на левом конце балки прогиб и угол поворота сечения в точке жесткого закрепления равны нулю; $V(l) = 0, M(l) = 0$ - на правом конце балки нулю равны прогиб и изгибающий момент.

Система дифференциальных уравнений (1) в совокупности с граничными условиями (2) представляют собой корректно поставленную дифференциальную задачу.

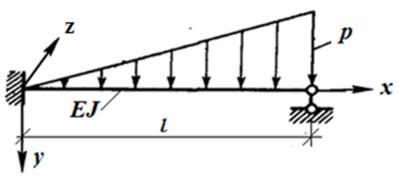
Решение задачи (1)-(2) в курсе сопротивления материалов выполняется следующим образом. Интегрируется первое уравнение системы (1). В результате интегрирования получаем выражение для функции $Q_y(x)$, содержащие неизвестную константу интегрирования C_1 . Далее выражение $Q_y(x)$ подставляется во второе уравнение системы, которое вновь интегрируется. В результате получаем выражение для $M_z(x)$, содержащие неизвестные константы C_1 и C_2 . Аналогично получаем выражение для $\phi(x)$, которое зависит от C_1, C_2, C_3 и выражение для $V(x)$, зависящее от C_1, C_2, C_3, C_4 . Константы интегрирования определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной при подстановке искомых функций в граничные условия (2).

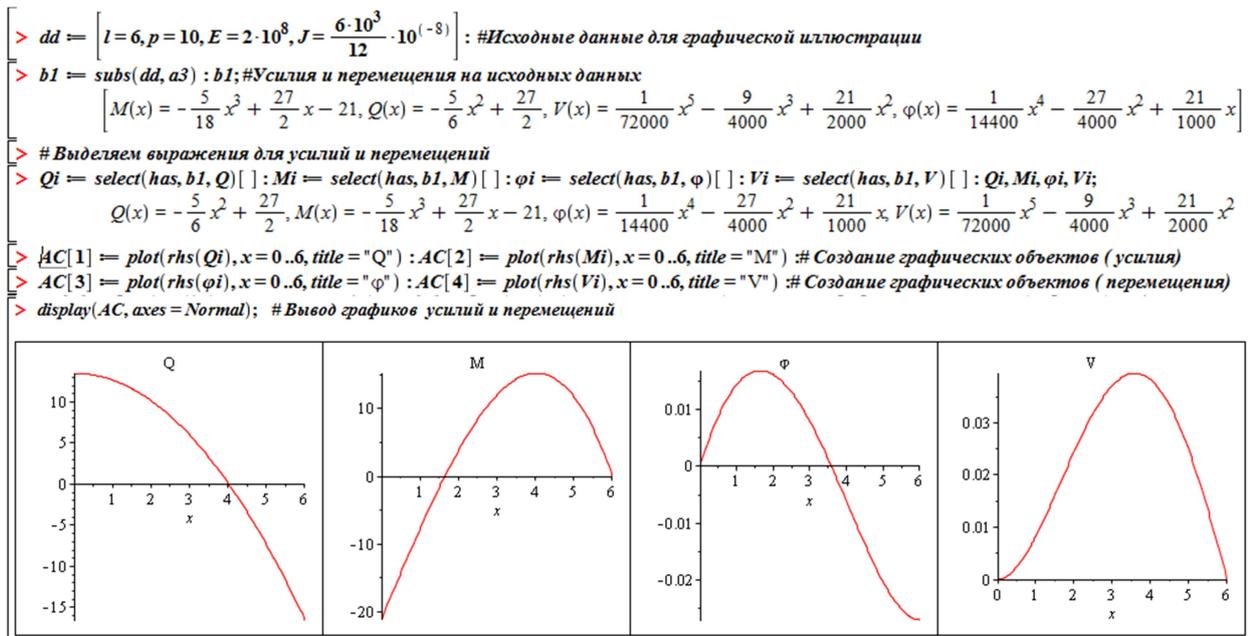
Таким образом, алгоритм решения задачи для магистранта (студента) понятен и можно переходить к решению задачи с помощью программы Maple.

Как уже отмечалось, работа в Maple происходит интерактивно – пользователь вводит команды и видит на экране их выполнение. Квадратная скобка охватывает поле, содержащее команду (после символом “>”) и результат ее выполнения. Символ решетки позволяет дать комментарий к команде. Квалификация пакета обеспечивает выбор подходящих типов переменных и выполнение операций, так что в общем случае не требуется описание переменных.

Ниже представлена программа Maple. Отметим, что если команда заканчивается точкой с запятой, то результат действия команды выводится в поле вывода, а если команда заканчивается символом «двоеточие», то результат не выводится. Содержание команды сопровождается комментарием после символа «решетка».

```
> restart : AC := Array(1..4) : # Описание массива
> with(plots) : with(plottools) : # Подключение программных модулей графики

Расчетная схема балки

> a1 := diff(Q(x), x) = -p/l * x, diff(M(x), x) = Q(x), diff(phi(x), x) = -M(x)/(EJ), diff(V(x), x) = phi(x) : a1 : # Исходная система дифференциальных уравнений
      d/dx Q(x) = -p*x/l, d/dx M(x) = Q(x), d/dx phi(x) = -M(x)/(EJ), d/dx V(x) = phi(x)
> a2 := V(0) = 0, phi(0) = 0, V(l) = 0, M(l) = 0 : a2 : # Условия закрепления (граничные условия)
      V(0) = 0, phi(0) = 0, V(l) = 0, M(l) = 0
> F := [Q(x), M(x), phi(x), V(x)] : # Искомая вектор-функция
      F := [Q(x), M(x), phi(x), V(x)]
> a3 := [solve([a1, a2], F)] : a3 : # Объединение системы диф. уравнений и граничных условий, решение дифференциальной задачи
      M(x) = -1/6 * p*x^3/l + 9/40 * p*l*x - 7/120 * l^2 * p, Q(x) = -1/2 * p*x^2/l + 9/40 * p*l, V(x) = 1/120 * p*x^5/(EJ) - 3/80 * p*l*x^3/(EJ) + 7/240 * l^2 * p*x^2/(EJ), phi(x) = 1/24 * p*x^4/(EJ) - 9/80 * p*l*x^2/(EJ)
      + 7/120 * l^2 * p*x/(EJ)
```



В программах, реализующих последующие примеры, будет использована процедура `Graf_x()`, которая строит эпюры усилий и перемещений в традиционной форме (положительные ординаты эпюр откладываются ниже оси стержня – оси X). Код процедуры размещается в программе до первого ее вызова.

Пример 2. Определить перемещения и внутренние усилия для статически определенной балки (рис. 2).

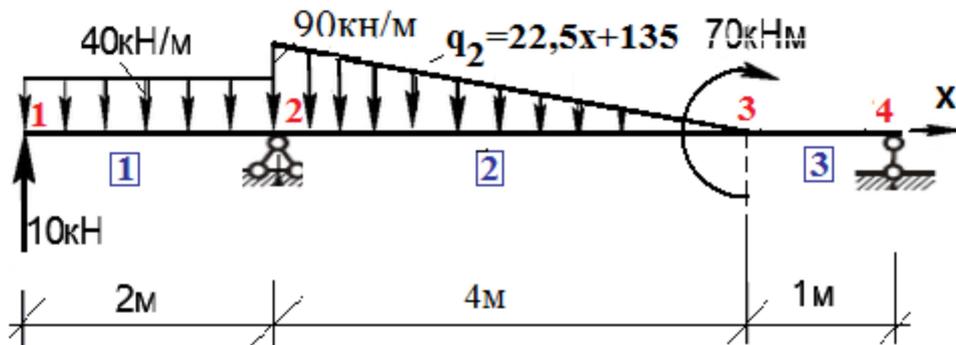


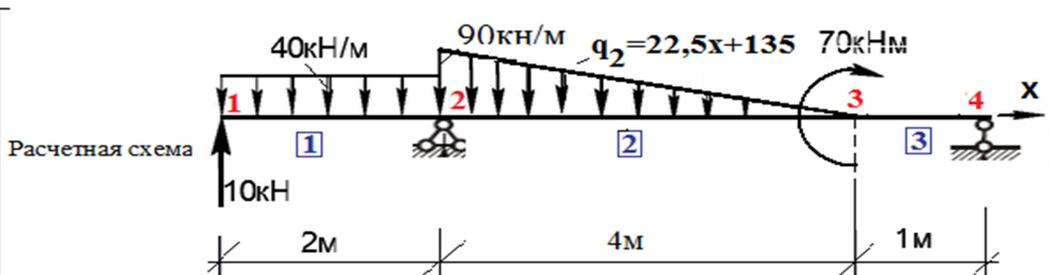
Рис. 2

Ниже представлена программа Maple решения задачи.

```

> restart: with(plottools): with(plots): #Подключение программных модулей графики
> #Код процедуры размещается в программе до момента первого ее вызова
> Graf_x := proc(LF, t, H, Name, K, Sd)
> (Тело процедуры)
> end proc; #Конец процедуры Graf_x

```



```

> p = a · x + b : y = solve( (subs(x=2, p) = 90, subs(x=6, p) = 0), (a, b) ) : q(x) = subs(y, p) ; #Уравнение интенсивности нагрузки на втором участке
q(x) = - 45/2 · x + 135

> ID = {E = 2 · 10^8, J = 3460 · 10^-8} : γ = 1.25 # Исходные данные
> L = [2, 4, 1] ; q = [40, -22.5 · x + 135, 0] ; # Длины участков и закон изменения интенсивности нагрузки на участках
L := [2, 4, 1]
q := [40, -22.5 · x + 135, 0]

> n = nops(L) ; t = [seq( add(L[j], j = 1..k), k = 0..n) ] ; # Определяем число участков и вычисляем координаты границ участков
n := 3
t := [0, 2, 6, 7]

> F = [seq( [Q[k](x), M[k](x), φ[k](x), V[k](x)] , k = 1..n) ] ; # Формируем исконую вектор-функцию
F := [Q1(x), M1(x), φ1(x), V1(x), Q2(x), M2(x), φ2(x), V2(x), Q3(x), M3(x), φ3(x), V3(x)]

```

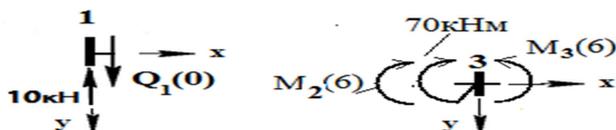
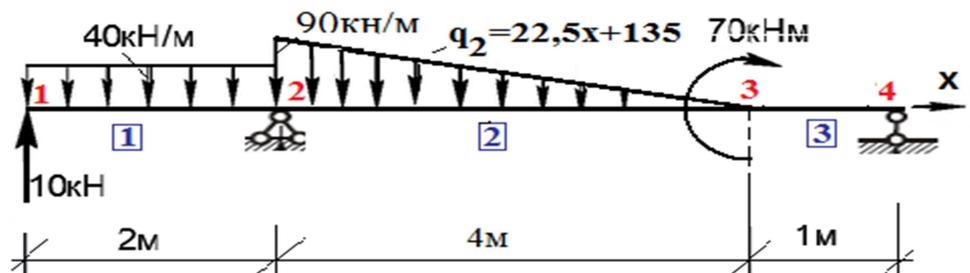
Для каждого участка формируем систему четырех дифференциальных уравнений

```

> a := [seq( [diff(Q[k](x), x) = -q[k], diff(M[k](x), x) = Q[k](x), diff(φ[k](x), x) = -M[k](x)/(E · J), diff(V[k](x), x) = φ[k](x)] , k = 1..n) ] : a;
[ d/dx Q1(x) = -40, d/dx M1(x) = Q1(x), d/dx φ1(x) = -M1(x)/(E · J), d/dx V1(x) = φ1(x), d/dx Q2(x) = 22.5 · x - 135, d/dx M2(x) = Q2(x), d/dx φ2(x) = -M2(x)/(E · J),
d/dx V2(x) = φ2(x), d/dx Q3(x) = 0, d/dx M3(x) = Q3(x), d/dx φ3(x) = -M3(x)/(E · J), d/dx V3(x) = φ3(x) ]

```

Расчетная схема, формируем уравнения связей на границах участков



Из уравнения равновесия узла 1

```

> b1 := M[1](t[1]) = 0, Q[1](t[1]) = 10 : b1;
M1(0) = 0, Q1(0) = 10

```

Прогибы в конце 1-го и в начале 2-го участков равны нулю.

Углы поворота сечений и изгибающие моменты в конце 1-го и в начале 2-го участков равны

```

> b2 := V[1](t[2]) = 0, V[2](t[2]) = 0, φ[1](t[2]) = φ[2](t[2]), M[1](t[2]) = M[2](t[2]) : b2;
V1(2) = 0, V2(2) = 0, φ1(2) = φ2(2), M1(2) = M2(2)

```

На границе 2-го и 3-го участков прогибы, углы поворота, поперечные силы - непрерывные функции

Изгибающие моменты на границе 2-го и 3-го участков определяются из уравнения равновесия узла 3

```

> b3 := V[2](t[3]) = V[3](t[3]), M[3](t[3]) - M[2](t[3]) = 70, φ[3](t[3]) = φ[2](t[3]), Q[3](t[3]) = Q[2](t[3]) : b3;
V2(6) = V3(6), M3(6) - M2(6) = 70, φ3(6) = φ2(6), Q3(6) = Q2(6)

```

В конце 3-го участка (на опоре) прогиб и изгибающий момент равны нулю

```

> b4 := V[3](t[4]) = 0, M[3](t[4]) = 0 : b4;
V3(7) = 0, M3(7) = 0

```

Объединяем условия на границе участков в единый список

> b := [b1, b2, b3, b4]:

Объединяем граничные условия и дифференциальные уравнения в единый список, получаем дифференциальную задачу

> d := [a[], b[]]:

> sol := [solve(d, F)[]]: expand(sol); # Решение дифференциальной задачи

$$M_1(x) = -20x^2 + 10x, M_2(x) = \frac{15}{4}x^3 - \frac{135}{2}x^2 + 355x - 530, M_3(x) = -50x + 350, Q_1(x) = -40x + 10, Q_2(x) = \frac{45}{4}x^2 - 135x + 355, Q_3(x) = -50,$$

$$V_1(x) = \frac{5}{3} \frac{x^4}{EJ} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{EJ} + \frac{206}{15} \frac{x}{EJ} - \frac{204}{5EJ}, V_2(x) = -\frac{3}{16} \frac{x^5}{EJ} + \frac{45}{8} \frac{x^4}{EJ} - \frac{355}{6} \frac{x^3}{EJ} + \frac{265x^2}{EJ} - \frac{7019}{15} \frac{x}{EJ} + \frac{1326}{5EJ}, V_3(x) = \frac{25}{3} \frac{x^3}{EJ}$$

$$- \frac{175x^2}{EJ} + \frac{17506}{15} \frac{x}{EJ} - \frac{12264}{5EJ}, \varphi_1(x) = \frac{20}{3} \frac{x^3}{EJ} - \frac{5x^2}{EJ} + \frac{206}{15EJ}, \varphi_2(x) = -\frac{15}{16} \frac{x^4}{EJ} + \frac{45}{2} \frac{x^3}{EJ} - \frac{355}{2} \frac{x^2}{EJ} + \frac{530x}{EJ} - \frac{7019}{15EJ}, \varphi_3(x)$$

$$= \frac{25x^2}{EJ} - \frac{350x}{EJ} + \frac{17506}{15EJ}$$

Далее в решение подставляются исходные данные и с помощью процедуры Graf_x() строятся эпюры (рис.3)

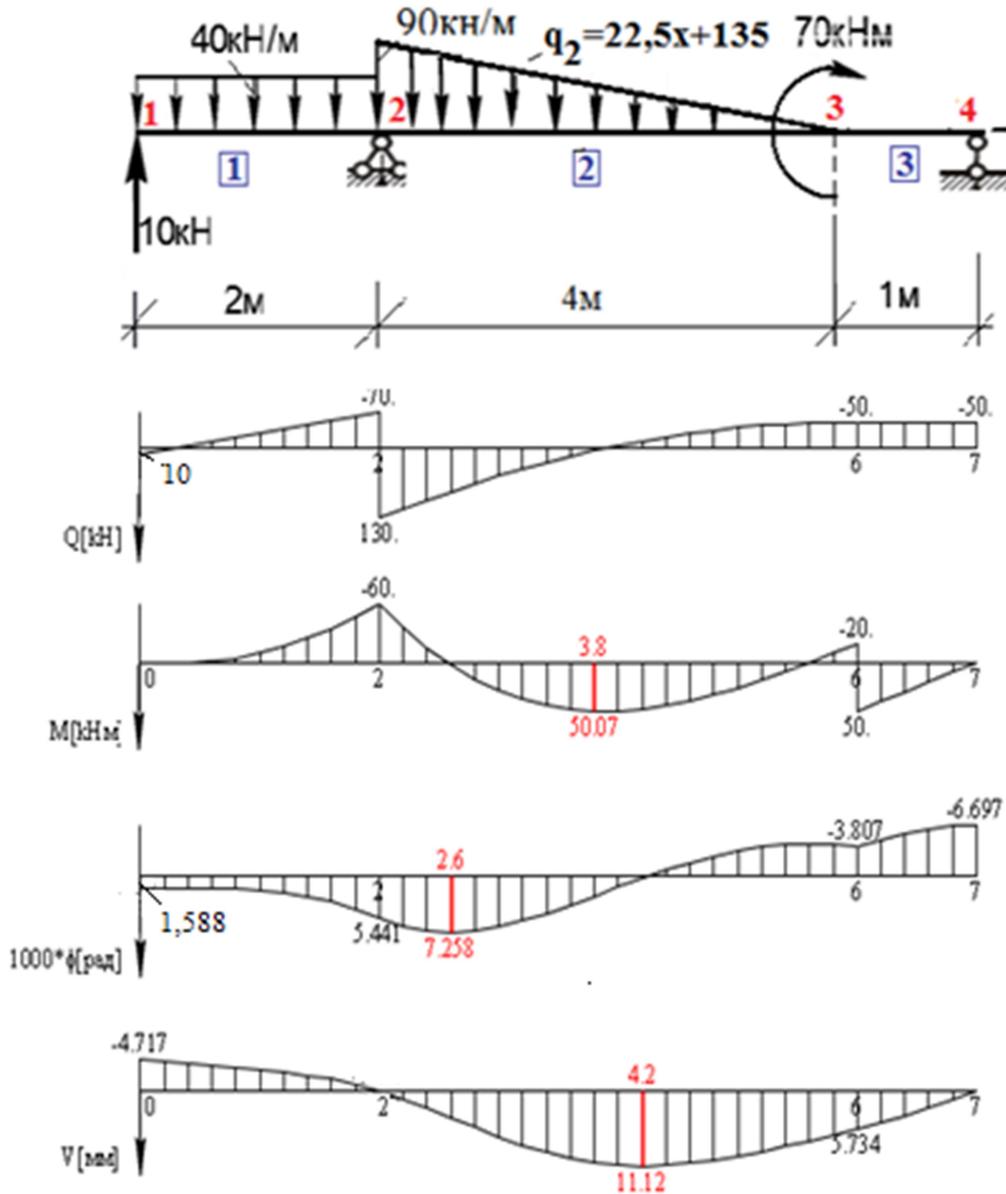
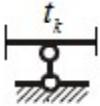
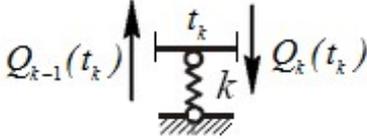
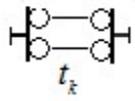
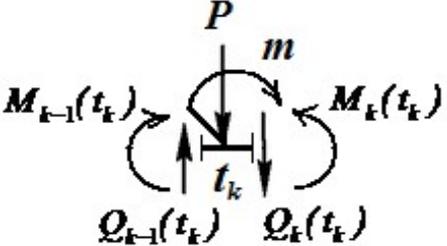


Рис. 3. Эпюры усилий и перемещений.

Механизмы соединения стержней в балочную систему и опорные устройства описываются с помощью уравнений связей (таблица).

Механизмы соединения стержней и опорные устройства	Уравнения связей
	<p>Абсолютно жесткая промежуточная опора:</p> $V_{k-1}(t_k) = 0, \quad V_k(t_k) = 0,$ $\varphi_{k-1}(t_k) = \varphi_k(t_k), \quad M_{k-1}(t_k) = M_k(t_k)$
	<p>Упругая промежуточная опора:</p> $V_{k-1}(t_k) = V_k(t_k), \quad \varphi_{k-1}(t_k) = \varphi_k(t_k),$ $M_{k-1}(t_k) = M_k(t_k), \quad Q_k(t_k) - Q_{k-1}(t_k) - k \cdot V(t_k) = 0.$
	<p>Шарнирное соединение двух стержней:</p> $M_{k-1}(t_k) = 0, \quad M_k(t_k) = 0,$ $V_{k-1}(t_k) = V_k(t_k), \quad Q_{k-1}(t_k) = Q_k(t_k)$
	<p>Соединение двух дисков двумя параллельными стержнями - "качели":</p> $Q_{k-1}(t_k) = 0, \quad Q_k(t_k) = 0,$ $\varphi_{k-1}(t_k) = \varphi_k(t_k), \quad M_{k-1}(t_k) = M_k(t_k)$
	<p>Сосредоточенные сила и пара сил в узле:</p> $M_k(t_k) - M_{k-1}(t_k) - m = 0,$ $Q_k(t_k) - Q_{k-1}(t_k) + P = 0,$ $\varphi_{k-1}(t_k) = \varphi_k(t_k), \quad V_{k-1}(t_k) = V_k(t_k)$

Пример 3. Определить перемещения и внутренние усилия для стальной двутаврового сечения I №30 балки (рис. 4) [2].

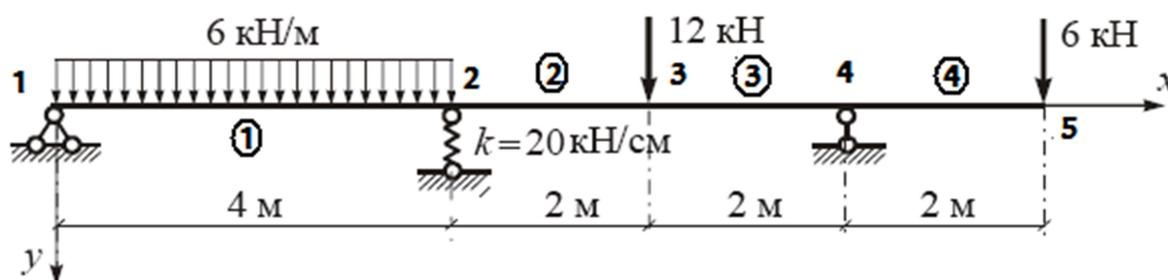


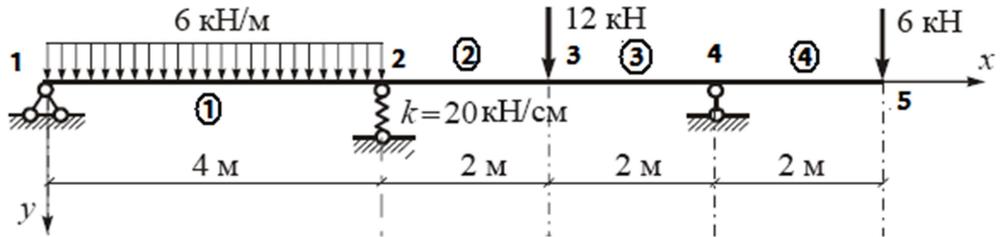
Рис. 4

Решение задачи выполняется по программе Maple.

```

[> restart : with(plottools) : with(plots) : # Подключение программных модулей графики
[> #Код процедуры размещается в программе до момента первого ее вызова
[> Graf_x := proc(LF, t, H, Name, K, Sd)
[> (Тело процедуры)
[> end proc:# Конец процедуры Graf_x

```



> ID := J = 7080 · 10⁻⁸, E = 2.1 · 10⁸, K = 20 · 10²; γf := 1 : ID; # Последовательность исходных данных [Кн], [м]
 J = 0.00007080000000, E = 2.100000000 10⁸, K = 2000

> L := [4, 2, 2, 2]; q := [6, 0, 0, 0]; # Длины участков и интенсивности нагрузки
 L := [4, 2, 2, 2]
 q := [6, 0, 0, 0]

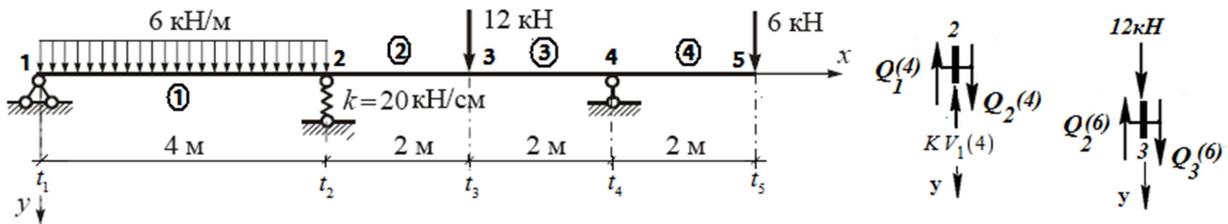
> n := nops(L) : t := [seq(add(L[j], j = 1 .. k), k = 0 .. n)]; # Определяем число участков и вычисляем координаты границ участков
 t := [0, 4, 6, 8, 10]

> F := [seq([Q[k](x), M[k](x), φ[k](x), V[k](x)] | k = 1 .. n)]; # Формируем искомую вектор-функцию
 F := [Q₁(x), M₁(x), φ₁(x), V₁(x), Q₂(x), M₂(x), φ₂(x), V₂(x), Q₃(x), M₃(x), φ₃(x), V₃(x), Q₄(x), M₄(x), φ₄(x), V₄(x)]

Для каждого участка формируем систему четырех дифференциальных уравнений

> a := [seq([diff(Q[k](x), x) = -q[k], diff(M[k](x), x) = Q[k](x), diff(φ[k](x), x) = -M[k](x)/(E·J), diff(V[k](x), x) = φ[k](x)] | k = 1 .. n)];
 a := [d/dx Q₁(x) = -6, d/dx M₁(x) = Q₁(x), d/dx φ₁(x) = -M₁(x)/(E·J), d/dx V₁(x) = φ₁(x), d/dx Q₂(x) = 0, d/dx M₂(x) = Q₂(x), d/dx φ₂(x) = -M₂(x)/(E·J), d/dx V₂(x) = φ₂(x), d/dx Q₃(x) = 0, d/dx M₃(x) = Q₃(x), d/dx φ₃(x) = -M₃(x)/(E·J), d/dx V₃(x) = φ₃(x), d/dx Q₄(x) = 0, d/dx M₄(x) = Q₄(x), d/dx φ₄(x) = -M₄(x)/(E·J), d/dx V₄(x) = φ₄(x)]

| Расчетная схема. Вырезаем узлы 2; 3-составляем уравнения равновесия узлов



> b1 := V[1](t[1]) = 0, M[1](t[1]) = 0 : b1; # Прогиб и изгибающий момент на опоре равны нулю
 V₁(0) = 0, M₁(0) = 0

Условия на перемещения и усилия на границе 1-го и 2-го участков (узел 2)
 > b2 := V[1](t[2]) = V[2](t[2]), φ[1](t[2]) = φ[2](t[2]), M[1](t[2]) = M[2](t[2]), Q[1](t[2]) - Q[2](t[2]) + K·V[1](t[2]) = 0 : b2;
 V₁(4) = V₂(4), φ₁(4) = φ₂(4), M₁(4) = M₂(4), Q₁(4) - Q₂(4) + K·V₁(4) = 0

Условия на перемещения и усилия на границе 2-го и 3-го участков (узел 3)
 > b3 := V[2](t[3]) = V[3](t[3]), φ[2](t[3]) = φ[3](t[3]), M[2](t[3]) = M[3](t[3]), Q[2](t[3]) - Q[3](t[3]) - 12 = 0 : b3;
 V₂(6) = V₃(6), φ₂(6) = φ₃(6), M₂(6) = M₃(6), Q₂(6) - Q₃(6) - 12 = 0

Условия на перемещения и усилия на границе 3-го и 4-го участков (узел 4)
 > b4 := V[3](t[4]) = 0, V[4](t[4]) = 0, φ[3](t[4]) = φ[4](t[4]), M[3](t[4]) = M[4](t[4]) : b4;
 V₃(8) = 0, V₄(8) = 0, φ₃(8) = φ₄(8), M₃(8) = M₄(8)

Условия на перемещения и усилия на правом конце балки

> b5 := M[4](t[5]) = 0, Q[4](t[5]) = 6 : b5;
 M₄(10) = 0, Q₄(10) = 6

Объединяем условия сопряжения в единый список

> b := [b1, b2, b3, b4, b5];

Объединяем условия сопряжения и дифференциальные уравнения в единый список

> d := [a | b];

```

> sola := [dsolve(d,F)[ ]]: sola; # Аналитическое решение (зависит от параметров x, K, EJ)
[ M1(x) = -3x^2 + 9/2 * (72K + 13EJ)x / (32K + 3EJ), M2(x) = - ( 3/2 * (-104K + 9EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) - 144(-6K + EJ) / (EJ(32K + 3EJ)) ) EJ, M3(x) = - ( 3/2 * (152K + 33EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) - 360(4K + EJ) / (EJ(32K + 3EJ)) ) EJ, M4(x) = - ( -6x/EJ + 60/EJ ) EJ, Q1(x) = -6x + 9/2 * (72K + 13EJ) / (32K + 3EJ), Q2(x) = -3/2 * (-104K + 9EJ) / (32K + 3EJ), Q3(x) = -3/2 * (152K + 33EJ) / (32K + 3EJ), Q4(x) = 6, V1(x) = 1/4 * x^4/EJ - 3/4 * (72K + 13EJ)x^3 / (EJ(32K + 3EJ)) + 2(176K + 129EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)), V2(x) = 1/4 * (-104K + 9EJ)x^3 / (EJ(32K + 3EJ)) - 72(-6K + EJ)x^2 / (EJ(32K + 3EJ)) + 150(-16K + 3EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) - 64(-68K + 3EJ) / (EJ(32K + 3EJ)), V3(x) = 1/4 * (152K + 33EJ)x^3 / (EJ(32K + 3EJ)) - 180(4K + EJ)x^2 / (EJ(32K + 3EJ)) + 6(752K + 183EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) - 16(592K + 93EJ) / (EJ(32K + 3EJ)), V4(x) = -x^3/EJ + 30x^2/EJ - 18(496K + 59EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) + 16(1648K + 267EJ) / (EJ(32K + 3EJ)), phi1(x) = x^3/EJ - 9/4 * (72K + 13EJ)x^2 / (EJ(32K + 3EJ)) + 2(176K + 129EJ) / (EJ(32K + 3EJ)), phi2(x) = 3/4 * (-104K + 9EJ)x^2 / (EJ(32K + 3EJ)) - 144(-6K + EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) + 150(-16K + 3EJ) / (EJ(32K + 3EJ)), phi3(x) = 3/4 * (152K + 33EJ)x^2 / (EJ(32K + 3EJ)) - 360(4K + EJ)x / (EJ(32K + 3EJ)) + 6(752K + 183EJ) / (EJ(32K + 3EJ)), phi4(x) = -3x^2/EJ + 60x/EJ - 18(496K + 59EJ) / (EJ(32K + 3EJ)) ]

> sol := subs({ID}, sola); # В аналитическое решение подставляем исходные данные
sol := [ M1(x) = -3x^2 + 13.97534161x, M2(x) = 1.024658392x + 3.802732864, M3(x) = -10.97534161x + 75.80273286, M4(x) = 6.000000000x - 60.00000000,
  Q1(x) = -6x + 13.97534161, Q2(x) = 1.024658392, Q3(x) = -10.97534161, Q4(x) = 6, V1(x) = 0.00001681463546x^4 - 0.0001566601831x^3
  + 0.002811590856x, V2(x) = -0.00001148617156x^3 - 0.0001278831337x^2 + 0.001170850053x + 0.003622503297, V3(x) = 0.0001230309121x^3
  - 0.002549190640x^2 + 0.01569869509x - 0.02543318678, V4(x) = -0.00006725854184x^3 + 0.002017756255x^2 - 0.02083688006x + 0.07199501366,
  phi1(x) = 0.00006725854184x^3 - 0.0004699805492x^2 + 0.002811590856, phi2(x) = -0.00003445851466x^2 - 0.0002557662674x + 0.001170850053, phi3(x)
  = 0.0003690927364x^2 - 0.005098381279x + 0.01569869509, phi4(x) = -0.0002017756255x^2 + 0.004035512510x - 0.02083688006 ]

> Qi := subs(ID, select(has, sol, Q)): Mi := subs(ID, expand(select(has, sol, M))): Qi; Mi; # Выделяем из списка решений выражения для Q, M
[ Q1(x) = -6x + 13.97534161, Q2(x) = 1.024658392, Q3(x) = -10.97534161, Q4(x) = 6 ]
[ M1(x) = -3x^2 + 13.97534161x, M2(x) = 1.024658392x + 3.802732864, M3(x) = -10.97534161x + 75.80273286, M4(x) = 6.000000000x - 60.00000000 ]

> phi := subs(ID, select(has, sol, phi)): Vi := subs(ID, select(has, sol, V)): phi; Vi; # Выделяем из списка решений выражения для phi, V
[ phi1(x) = 0.00006725854184x^3 - 0.0004699805492x^2 + 0.002811590856, phi2(x) = -0.00003445851466x^2 - 0.0002557662674x + 0.001170850053, phi3(x)
  = 0.0003690927364x^2 - 0.005098381279x + 0.01569869509, phi4(x) = -0.0002017756255x^2 + 0.004035512510x - 0.02083688006 ]
[ V1(x) = 0.00001681463546x^4 - 0.0001566601831x^3 + 0.002811590856x, V2(x) = -0.00001148617156x^3 - 0.0001278831337x^2 + 0.001170850053x
  + 0.003622503297, V3(x) = 0.0001230309121x^3 - 0.002549190640x^2 + 0.01569869509x - 0.02543318678, V4(x) = -0.00006725854184x^3
  + 0.002017756255x^2 - 0.02083688006x + 0.07199501366 ]

```

На рис. 5 представлены эпюры усилий и перемещений.

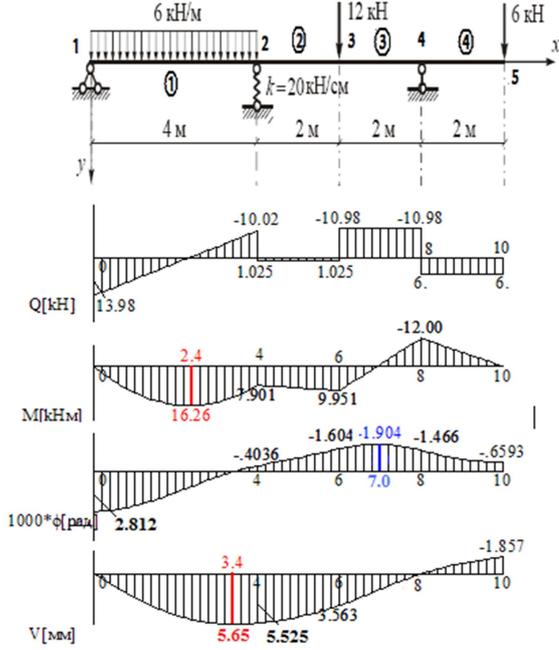


Рис. 5. Эпюры усилий и перемещений (пример 3)

2. Построение линий влияния усилий в статически неопределимых балках

Рассмотрим алгоритм построения линий влияния усилий в статически неопределимых балках кинематическим способом с помощью системы компьютерной математики Maple.

Кинематический способ в курсе строительной механики используется для построения «моделей» линий влияния, т.е. строится лишь очертание линий влияния (без вычисления ординат) [4]. По эскизам определяются участки балки с положительными и отрицательными ординатами. Далее эти участки балки загружают распределенной нагрузкой и вычисляют максимальное и минимальное значения изучаемого усилия методом сил или методом перемещений.

В программе Maple используется идея кинематического способа, но строится не «модель», а реальная линия влияния. Например, построение линии влияния изгибающего момента выполняется по следующему алгоритму. В заданном сечении балки удаляется связь, препятствующая взаимному повороту торцов (вводится шарнир). Далее, в сечение прикладывается единичная групповая пара сил. Для полученной расчетной схемы балки формируется дифференциальная задача. В результате ее решения определяются усилия Q , M и перемещения φ , V . Ординаты линии влияния изгибающего момента получаются делением ординат эпюры вертикальных прогибов на величину взаимного поворота торцов сечения $[\varphi_i(x_i) - \varphi_{i-1}(x_i)]$ (обобщенное перемещение, отвечающее групповой силе). Далее аналитические выражения для линии влияния на участках интегрируются и вычисляются площади соответствующих эпюр. После чего величины положительных площадей суммируются и значение суммы умножается на интенсивность распределенной нагрузки. В результате получаем максимальное значение искомого усилия (аналогично вычисляется минимальное значение).

При построении линии влияния поперечной силы в исследуемом сечении балки удаляется связь, препятствующая взаимному смещению торцов (вводятся «качели»). К торцам сечения прикладывается групповая единичная сила. Ординаты линии влияния Q получаются делением ординат эпюры вертикальных прогибов на величину взаимного смещения торцов сечения $[V_i(x_i) - V_{i-1}(x_i)]$ (обобщенное перемещение, отвечающее групповой силе).

При построении линии влияния опорной реакции R в исследуемом сечении балки удаляется опорная связь. По направлению удаленной связи прикладывается единичная сила. Ординаты линии влияния R получаются делением ординат эпюры вертикальных прогибов на величину прогиба под единичной силой.

Пример 4.

```
> restart : with(plottools) : with(plots) : # Подключение программных модулей графики
> #Код процедуры размещается в программе до момента первого ее вызова
> Graf_x := proc(LF, t, H, Name, K, Sd)
> (Тело процедуры)
> end proc; # Конец процедуры Graf_x
```

Построение Линий влияния изгибающих моментов в неразрезной балке кинематическим способом (I №12)



```

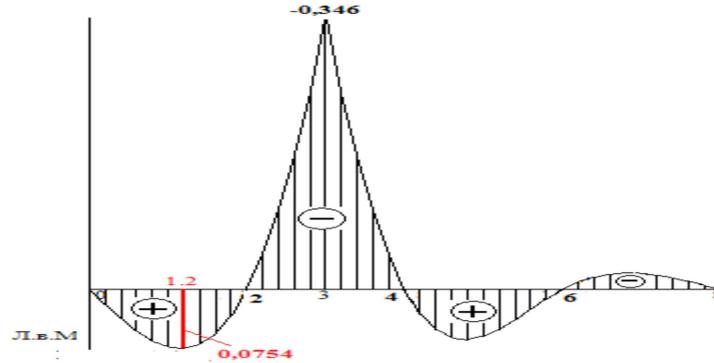
> qLV := 10 : # Интенсивность распределенной нагрузки при загрузении Л.В.;
> J := 350·10-8 : E := 2.1·108 : EJ := J·E : # Изгибная жесткость
> L := [2, 1, 1, 2, 2] : n := nops(L) : L, ` , n; # Длины пролетов. Число участков
                                                    [2, 1, 1, 2, 2], , 5
> q := [0, 0, 0, 0, 0]; # Интенсивность нагрузки на участках
                                                    q := [0, 0, 0, 0, 0]
> t := [seq( add(L[j], j = 1 ..k), k = 0 ..n)]; # Координаты опорных сечений
                                                    t := [0, 2, 3, 4, 6, 8]
> k := [seq( [diff(Q[k](x), x) = -q[k], diff(M[k](x), x) = Q[k](x), diff(phi[k](x), x) = -
# Система дифференциальных уравнений
                                                    M[k](x)/EJ, diff(V[k](x), x) = phi[k](x)] , k = 1 ..n) ] : a;
[ d/dx Q1(x) = 0, d/dx M1(x) = Q1(x), d/dx phi1(x) = -0.001360544218 M1(x), d/dx V1(x) = phi1(x), d/dx Q2(x) = 0, d/dx M2(x) = Q2(x), d/dx phi2(x) =
-0.001360544218 M2(x), d/dx V2(x) = phi2(x), d/dx Q3(x) = 0, d/dx M3(x) = Q3(x), d/dx phi3(x) = -0.001360544218 M3(x), d/dx V3(x) = phi3(x), d/dx Q4(x) = 0,
d/dx M4(x) = Q4(x), d/dx phi4(x) = -0.001360544218 M4(x), d/dx V4(x) = phi4(x), d/dx Q5(x) = 0, d/dx M5(x) = Q5(x), d/dx phi5(x) = -0.001360544218 M5(x),
d/dx V5(x) = phi5(x) ]
> b1 := V[1](t[1]) = 0, M[1](t[1]) = 0 : b1; # Прогиб и изгибающий момент на опоре равны нулю
                                                    V1(0) = 0, M1(0) = 0
> b2 := V[1](t[2]) = 0, V[2](t[2]) = 0, phi[1](t[2]) = phi[2](t[2]), M[1](t[2]) = M[2](t[2]) : b2; # Промежуточная опора
                                                    V1(2) = 0, V2(2) = 0, phi1(2) = phi2(2), M1(2) = M2(2)
В шарнире изгибающие моменты слева справа от узла 3 равны 1. Прогиб и поперечная сила непрерывные функции
> b3 := V[2](t[3]) = V[3](t[3]), M[2](t[3]) = 1, M[3](t[3]) = 1, Q[2](t[3]) = Q[3](t[3]) : b3;
                                                    V2(3) = V3(3), M2(3) = 1, M3(3) = 1, Q2(3) = Q3(3)
> b4 := V[3](t[4]) = 0, V[4](t[4]) = 0, phi[3](t[4]) = phi[4](t[4]), M[3](t[4]) = M[4](t[4]) : b4; # Промежуточная опора
                                                    V3(4) = 0, V4(4) = 0, phi3(4) = phi4(4), M3(4) = M4(4)
> b5 := V[4](t[5]) = 0, V[5](t[5]) = 0, phi[4](t[5]) = phi[5](t[5]), M[4](t[5]) = M[5](t[5]) : b5; # Промежуточная опора
                                                    V4(6) = 0, V5(6) = 0, phi4(6) = phi5(6), M4(6) = M5(6)
> b6 := V[5](t[6]) = 0, M[5](t[6]) = 0 : b6; # Прогиб и изгибающий момент на правой опоре равны нулю
                                                    V5(8) = 0, M5(8) = 0
> b := [b1, b2, b3, b4, b5, b6] : # Объединяем граничные условия в единый список
> F := [seq( [Q[k](x), M[k](x), phi[k](x), V[k](x)] , k = 1 ..n) ] : F; # Генерация списка имен искоемых функций
                                                    [Q1(x), M1(x), phi1(x), V1(x), Q2(x), M2(x), phi2(x), V2(x), Q3(x), M3(x), phi3(x), V3(x), Q4(x), M4(x), phi4(x), V4(x), Q5(x), M5(x), phi5(x), V5(x) ]
> d := [a[ ], b[ ]] : # Объединяем дифференциальные уравнения и граничные условия, получаем дифференциальную задачу
> sol := evalf( [solve(d, F)] ) : sol; # Решение дифференциальной задачи
[M1(x) = 0.4782608696 x, M2(x) = 0.04347826087 x + 0.8695652174, M3(x) = 0.04347826087 x + 0.8695652174, M4(x) = -0.6521739130 x + 3.652173913,
M5(x) = 0.1304347826 x - 1.043478261, Q1(x) = 0.4782608696, Q2(x) = 0.04347826087, Q3(x) = 0.04347826087, Q4(x) = -0.6521739130, Q5(x)
= 0.1304347826, V1(x) = -0.0001084491768 x3 + 0.0004337967072 x, V2(x) = -0.000009859016072 x3 - 0.0005915409643 x2 + 0.001616878636 x
- 0.0007887212858, V3(x) = -0.000009859016072 x3 - 0.0005915409643 x2 + 0.006033717836 x - 0.01403923889, V4(x) = 0.0001478852411 x3
- 0.002484472050 x2 + 0.01360544218 x - 0.02413487135, V5(x) = -0.00002957704822 x3 + 0.0007098491572 x2 - 0.005560485065 x + 0.01419698314,
phi1(x) = -0.0003253475304 x2 + 0.0004337967072, phi2(x) = -0.00002957704822 x2 - 0.001183081929 x + 0.001616878636, phi3(x) = -0.00002957704822 x2
- 0.001183081929 x + 0.006033717836, phi4(x) = 0.0004436557233 x2 - 0.004968944101 x + 0.01360544218, phi5(x) = -0.00008873114465 x2
+ 0.001419698314 x - 0.005560485065 ]
> Qi := select( has, sol, Q ) : Mi := select( has, sol, M ) : # Выделяем из списка решений выражения для Q, M
> phi := select( has, sol, phi ) : Vi := select( has, sol, V ) : phi; Vi; # Выделяем из списка решений выражения для Q, M
[ phi1(x) = -0.0003253475304 x2 + 0.0004337967072, phi2(x) = -0.00002957704822 x2 - 0.001183081929 x + 0.001616878636, phi3(x) = -0.00002957704822 x2
- 0.001183081929 x + 0.006033717836, phi4(x) = 0.0004436557233 x2 - 0.004968944101 x + 0.01360544218, phi5(x) = -0.00008873114465 x2
+ 0.001419698314 x - 0.005560485065 ]
[ V1(x) = -0.0001084491768 x3 + 0.0004337967072 x, V2(x) = -0.000009859016072 x3 - 0.0005915409643 x2 + 0.001616878636 x - 0.0007887212858, V3(x) =
-0.000009859016072 x3 - 0.0005915409643 x2 + 0.006033717836 x - 0.01403923889, V4(x) = 0.0001478852411 x3 - 0.002484472050 x2
+ 0.01360544218 x - 0.02413487135, V5(x) = -0.00002957704822 x3 + 0.0007098491572 x2 - 0.005560485065 x + 0.01419698314 ]

```

```

>  $\delta I1 := \text{evalf}(\text{subs}(x=t[3], \text{rhs}(\phi i[3])) - \text{subs}(x=t[3], \text{rhs}(\phi i[2]))); \# \text{Взаимный поворот сечений примыкающих к шарниру}$ 
 $\delta I1 := 0.004416839200$ 
>  $LVM := \left[ \text{seq}\left(m[k](x) = \frac{\text{rhs}(V i[k])}{\delta I1}, k=1..n \right) \right]; LVM; \# \text{Л.в. изгибающего момента в сечении } t[3] = 3 \text{ м}$ 
 $m_1(x) = -0.02455357143x^3 + 0.09821428574x, m_2(x) = -0.002232142858x^3 - 0.1339285714x^2 + 0.3660714287x - 0.1785714286, m_3(x) =$ 
 $-0.002232142858x^3 - 0.1339285714x^2 + 1.366071429x - 3.178571430, m_4(x) = 0.03348214287x^3 - 0.5625000001x^2 + 3.080357144x - 5.464285717,$ 
 $m_5(x) = -0.006696428574x^3 + 0.1607142857x^2 - 1.258928572x + 3.214285714$ 

```

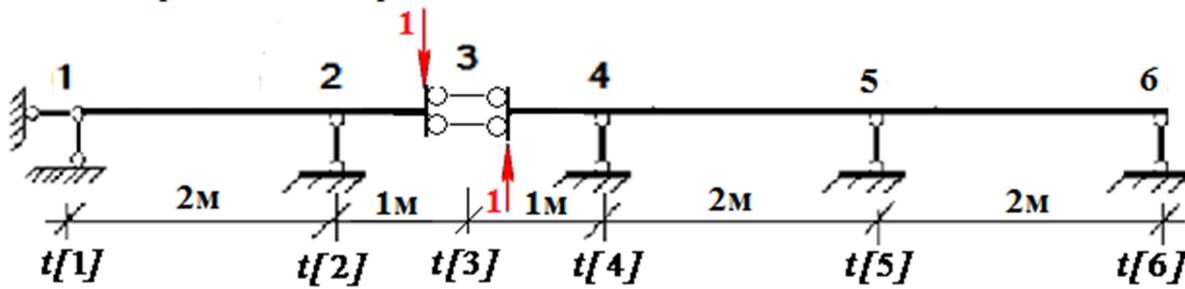


```

Интегрируем на участках аналитические выражения линии влияния, получаем площади этор
>  $P := \left[ \text{seq}(\text{Int}(\text{rhs}(LVM[k]), x=t[k]..t[k+1]), k=1..n) \right] = \left[ \text{seq}(\text{int}(\text{rhs}(LVM[k]), x=t[k]..t[k+1]), k=1..n) \right]; P;$ 
 $\int_0^2 (-0.02455357143x^3 + 0.09821428574x) dx, \int_2^3 (-0.002232142858x^3 - 0.1339285714x^2 + 0.3660714287x - 0.1785714286) dx, \int_3^4 (-0.002232142858x^3$ 
 $- 0.1339285714x^2 + 1.366071429x - 3.178571430) dx, \int_4^6 (0.03348214287x^3 - 0.5625000001x^2 + 3.080357144x - 5.464285717) dx, \int_6^8$ 
 $- 0.006696428574x^3 + 0.1607142857x^2 - 1.258928572x + 3.214285714) dx \Big] = [0.09821428576, -0.1478794638, -0.1467633925, 0.08035714713,$ 
 $-0.02678572607]$ 
>  $LVP := \text{rhs}(P); LVP; \# \text{Площади этор линии влияния на участках}$ 
 $[0.09821428576, -0.1478794638, -0.1467633925, 0.08035714713, -0.02678572607]$ 
>  $a1 := \text{map}(\text{abs}, LVP); a2 := \frac{(LVP - a1)}{2}; a3 := LVP - a2; a3; \# \text{Из общего списка площадей выделяем положительные и отрицательные}$ 
 $[0.09821428576, 0., 0., 0.08035714713, 1.10^{-11}]$ 
 $[0., -0.1478794638, -0.1467633925, 0., -0.02678572608]$ 
Максимальный и минимальный изгибающий момент в середине 2-го пролета
>  $Mmax := qLV \cdot (\text{add}(a3[k], k=1..n)); Mmin := qLV \cdot (\text{add}(a2[k], k=1..n)); \# \text{Суммируем площади и умножаем на интенсивность}$ 
 $Mmax := 1.785714329$ 
 $Mmin := -3.214285824$ 

```

Построение Л.в. поперечной силы



```

Корректируем только условия в точке t[3]
>  $b3 := \phi[2](t[3]) = \phi[3](t[3]), Q[2](t[3]) = 1, Q[3](t[3]) = 1, M[2](t[3]) = M[3](t[3]);$ 
 $\phi_2(3) = \phi_3(3), Q_2(3) = 1, Q_3(3) = 1, M_2(3) = M_3(3)$ 
>  $b := [b1, b2, b3, b4, b5, b6];$ 
 $b := [V_1(0) = 0, M_1(0) = 0, V_1(2) = 0, V_2(2) = 0, \phi_1(2) = \phi_2(2), M_1(2) = M_2(2), \phi_2(3) = \phi_3(3), Q_2(3) = 1, Q_3(3) = 1, M_2(3) = M_3(3), V_3(4) = 0, V_4(4) = 0,$ 
 $\phi_3(4) = \phi_4(4), M_3(4) = M_4(4), V_4(6) = 0, V_5(6) = 0, \phi_4(6) = \phi_5(6), M_4(6) = M_5(6), V_5(8) = 0, M_5(8) = 0]$ 
>  $F := \left[ \text{seq}([Q[k](x), M[k](x), \phi[k](x), V[k](x)] [ ], k=1..n) \right];$ 
 $F := [Q_1(x), M_1(x), \phi_1(x), V_1(x), Q_2(x), M_2(x), \phi_2(x), V_2(x), Q_3(x), M_3(x), \phi_3(x), V_3(x), Q_4(x), M_4(x), \phi_4(x), V_4(x), Q_5(x), M_5(x), \phi_5(x), V_5(x)]$ 

```

```

> d := [a[ ], b[ ]]; # Дифференциальная задача
d := [ d/dx Q1(x) = 0, d/dx M1(x) = Q1(x), d/dx phi1(x) = -0.001360544218 M1(x), d/dx V1(x) = phi1(x), d/dx Q2(x) = 0, d/dx M2(x) = Q2(x), d/dx phi2(x) =
-0.001360544218 M2(x), d/dx V2(x) = phi2(x), d/dx Q3(x) = 0, d/dx M3(x) = Q3(x), d/dx phi3(x) = -0.001360544218 M3(x), d/dx V3(x) = phi3(x), d/dx Q4(x) = 0,
d/dx M4(x) = Q4(x), d/dx phi4(x) = -0.001360544218 M4(x), d/dx V4(x) = phi4(x), d/dx Q5(x) = 0, d/dx M5(x) = Q5(x), d/dx phi5(x) = -0.001360544218 M5(x),
d/dx V5(x) = phi5(x), b[ ] ]

```

```

> h := [a[ ], b[ ]]; # Объединяем дифференциальные уравнения и граничные условия, получаем дифференциальную задачу
> sol := evalf([solve(d, F) [ ]]) : sol; # "Решение дифференциальной задачи"
[M1(x) = -0.4871794872 x, M2(x) = x - 2.974358974, M3(x) = x - 2.974358974, M4(x) = -0.6410256410 x + 3.589743590, M5(x) = 0.1282051282 x
- 1.025641026, Q1(x) = -0.4871794872, Q2(x) = 1., Q3(x) = 1., Q4(x) = -0.6410256410, Q5(x) = 0.1282051282, V1(x) = 0.0001104715391 x^3
- 0.0004418861563 x, V2(x) = -0.0002267573697 x^3 + 0.002023373452 x^2 - 0.004488633061 x + 0.002697831270, V3(x) = -0.0002267573697 x^3
+ 0.002023373452 x^2 - 0.004488633061 x + 0.00009302866448, V4(x) = 0.0001453572882 x^3 - 0.002442002443 x^2 + 0.01337287052 x - 0.02372230944,
V5(x) = -0.00002907145765 x^3 + 0.0006977149836 x^2 - 0.005465434038 x + 0.01395429967, phi1(x) = 0.0003314146172 x^2 - 0.0004418861563, phi2(x) =
-0.0006802721090 x^2 + 0.004046746905 x - 0.004488633061, phi3(x) = -0.0006802721090 x^2 + 0.004046746905 x - 0.004488633061, phi4(x) =
= 0.0004360718647 x^2 - 0.004884004885 x + 0.01337287052, phi5(x) = -0.00008721437295 x^2 + 0.001395429967 x - 0.005465434038 ]

```

```

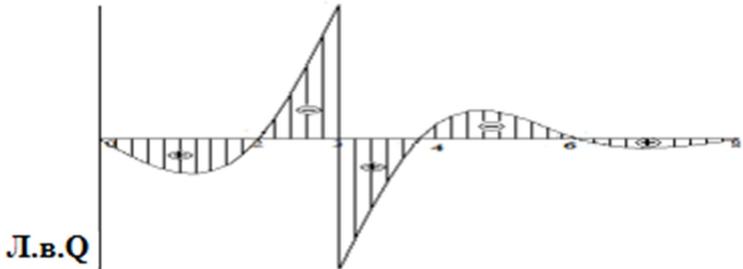
> Qi := select(has, sol, Q) : Mi := select(has, sol, M) : #Выделяем из списка решений выражения для Q, M
> phi := select(has, sol, phi) : Vi := select(has, sol, V) : #Выделяем из списка решений выражения для V
[V1(x) = 0.0001104715391 x^3 - 0.0004418861563 x, V2(x) = -0.0002267573697 x^3 + 0.002023373452 x^2 - 0.004488633061 x + 0.002697831270, V3(x) =
-0.0002267573697 x^3 + 0.002023373452 x^2 - 0.004488633061 x + 0.00009302866448, V4(x) = 0.0001453572882 x^3 - 0.002442002443 x^2
+ 0.01337287052 x - 0.02372230944, V5(x) = -0.00002907145765 x^3 + 0.0006977149836 x^2 - 0.005465434038 x + 0.01395429967 ]
> delta1 := evalf(subs(x=t[3], rhs(Vi[3])) - subs(x=t[3], rhs(Vi[2]))) : # Взаимное смещение торцов качелей
delta1 := -0.002604802606

```

```

> LVM := [ seq( Q[k](x) = rhs(Vi[k]), k=1..n ) ] : LVM; # Л.в. поперечной силы в сечении t[3] = 3 м
[Q1(x) = -0.04241071429 x^3 + 0.1696428571 x, Q2(x) = 0.08705357142 x^3 - 0.7767857139 x^2 + 1.723214285 x - 1.035714285, Q3(x) = 0.08705357142 x^3
- 0.7767857139 x^2 + 1.723214285 x - 0.03571428570, Q4(x) = -0.05580357139 x^3 + 0.9374999999 x^2 - 5.133928570 x + 9.107142854, Q5(x) =
= 0.01116071428 x^3 - 0.2678571428 x^2 + 2.098214285 x - 5.357142855 ]

```



```

Интегрируем на участках аналитические выражения линии влияния, получаем площади эпюр
> P := [ seq( int( rhs(LVM[k]), x=t[k]..t[k+1]), k=1..n ) ] : P;
[ [ 0, 2 ] (-0.04241071429 x^3 + 0.1696428571 x) dx, [ 2, 3 ] (0.08705357142 x^3 - 0.7767857139 x^2 + 1.723214285 x - 1.035714285) dx, [ 3, 4 ] (0.08705357142 x^3
- 0.7767857139 x^2 + 1.723214285 x - 0.03571428570) dx, [ 4, 6 ] (-0.05580357139 x^3 + 0.9374999999 x^2 - 5.133928570 x + 9.107142854) dx,
[ 6, 8 ] (0.01116071428 x^3 - 0.2678571428 x^2 + 2.098214285 x - 5.357142855) dx ] = [ 0.1696428570, -0.2327008916, 0.2237723233, -0.1339285585,
0.04464285307 ]

```

```

> LVP := rhs(P) : LVP; # Площади эпюр линии влияния на участках
[ 0.1696428570, -0.2327008916, 0.2237723233, -0.1339285585, 0.04464285307 ]
> a1 := map(abs, LVP) : a2 := (LVP - a1) / 2 : a3 := LVP - a2 : a3; a2; # Из общего списка площадей выделяем положительные и отрицательные
[ 0.1696428570, 0., 0.2237723233, 0., 0.04464285307 ]
[ 0., -0.2327008916, 0., -0.1339285585, 0. ]

```

```

Максимальная и минимальная поперечная сила в середине 2-го пролета
> Qmax := qLV · (add(a3[k], k=1..n)); Qmin := qLV · (add(a2[k], k=1..n)); # Суммируем площади и умножаем на интенсивность
Qmax := 4.380580334
Qmin := -3.666294501

```

2. Балка на упругом основании

Под упругим основанием в инженерной практике обычно принимают различные грунтовые и скальные среды (массивы), на которые опираются фундаменты зданий, гидротехнические сооружения, дорожные и аэродромные покрытия.

Конструкция на упругом основании находится под действием внешних нагрузок и реактивного отпора основания, непрерывно распределенного по длине или площади контакта. Закон изменения реактивного отпора не может быть определен из уравнений равновесия. Он зависит от свойств упругого основания и характеризуется его расчетной схемой или *моделью*. В инженерной практике наиболее часто используется модель основания Винклера, для которой принимается линейная зависимость между реактивным отпором основания и осадкой его поверхности.

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании Винклера имеет вид

$$EJV''''(x) + k \cdot b \cdot V(x) = q(x),$$

где EJ - изгибая жесткость; $q_r = k \cdot b \cdot V(x)$ - реактивный отпор основания; $V(x)$ - прогиб балки, принимаемый равным осадке поверхности основания; b - ширина площади контакта балки и основания и k - коэффициент жесткости основания, называемый в механике грунтов *коэффициентом постели*.

Коэффициент постели определяется опытным путем и имеет размерность $\text{кН} / \text{см}^3$.

При расчете балок на упругом основании в системе Maple вместо дифференциального уравнения четвертого порядка будем использовать систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно усилий Q , M и перемещения φ, V .

Пример 5.

Для балки в виде стального прокатного двутавра №20, свободно расположенной на поверхности упругого основания (рис. 6), определить усилия и перемещения. В расчетах принять: $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кН} / \text{м}^2$; $k = 8,0 \cdot 10^4 \text{ кН} / \text{м}^3$; $b = 0,1 \text{ м}$; $R = 210 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2$ [2].

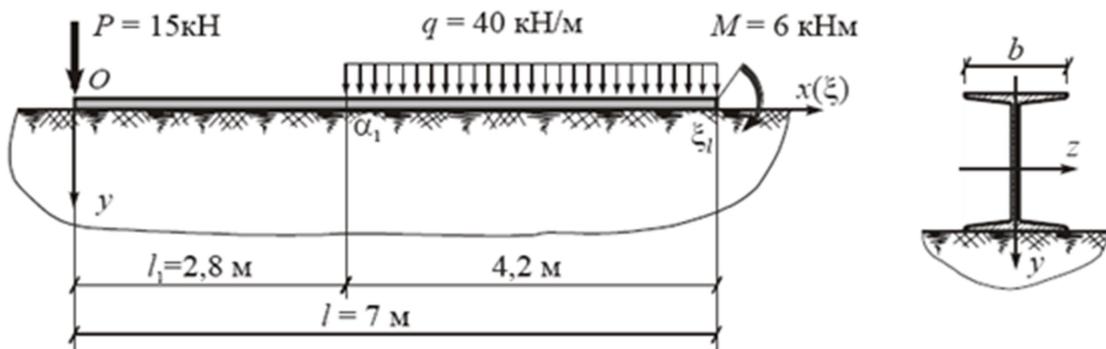


Рис. 6

Программа Maple.

```
> restart : with(plottools) : with(plots) : # Подключение программных модулей графики
> #Код процедуры размещается в программе до момента первого ее вызова
> Graf_x := proc(LF, t, H, Name, K, Sd)
> (Тело процедуры)
> end proc:# Конец процедуры Graf_x
```

```

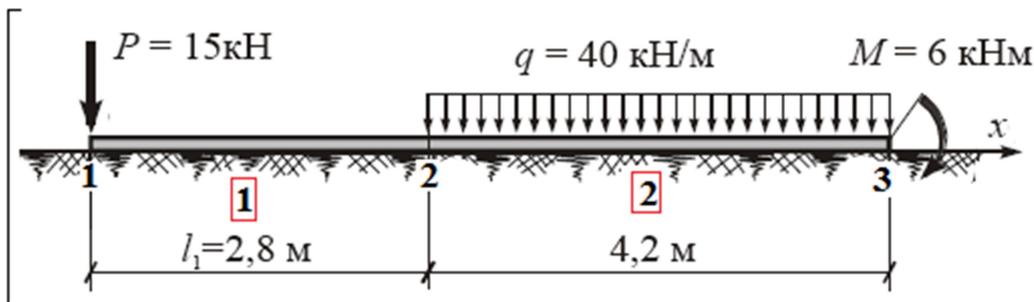
> ID :=  $\gamma f = 1.0, \gamma c = 1.0, E = 2.1 \cdot 10^8, J = 1840 \cdot 10^{-8}, k = 0.08 \cdot 10^6, b = 0.1$ ; #Исходные данные
> kb := subs({ID}, k·b); # Kb- числовой коэффициент ( $Kb \cdot V(x)$  – реактивный отпор основания)
                                                    kb := 8000.000
> al := subs({ID}, EJ = E·J) : al; # Изгибная жесткость
                                                    EJ = 3864.000000
> L := [2.8, 4.2] : n := nops(L) : L, n; # Длины участков балки, число участков
                                                    [2.8, 4.2], 2
> q := [0, 40]; #Интенсивность распределенной нагрузки на участках
                                                    q := [0, 40]
> t := [seq(add(L[j], j = 1..k), k = 0..n)]; #Координаты границ участков (узлов)
                                                    t := [0, 2.8, 7.0]

```

```

> a := subs({ID}, [seq([diff(Q[k](x), x) - kb·V[k](x) = -g[k], diff(M[k](x), x) = Q[k](x), diff(phi[k](x), x) = - $\frac{M[k](x)}{E·J}$ , diff(V[k](x), x) = phi[k](x))] [ ], k = 1..n)]; # Система дифференциальных уравнений
a := [ $\frac{d}{dx} Q_1(x) - 8000.000 V_1(x) = 0, \frac{d}{dx} M_1(x) = Q_1(x), \frac{d}{dx} \varphi_1(x) = -0.0002587991718 M_1(x), \frac{d}{dx} V_1(x) = \varphi_1(x), \frac{d}{dx} Q_2(x) - 8000.000 V_2(x) = -40,$ 
 $\frac{d}{dx} M_2(x) = Q_2(x), \frac{d}{dx} \varphi_2(x) = -0.0002587991718 M_2(x), \frac{d}{dx} V_2(x) = \varphi_2(x)$ ]

```



```

> b1 := M[1](0) = 0, Q[1](0) = -15 : b1; # Из условий равновесия узла 1
                                                    M1(0) = 0, Q1(0) = -15
На границе 1-го и 2-го участков функции перемещений и усилий непрерывны
> b2 := V[1](2.8) = V[2](2.8), phi[1](2.8) = phi[2](2.8), M[1](2.8) = M[2](2.8), Q[1](2.8) = Q[2](2.8) : b2;
                                                    V1(2.8) = V2(2.8), phi1(2.8) = phi2(2.8), M1(2.8) = M2(2.8), Q1(2.8) = Q2(2.8)
> b3 := Q[2](7.0) = 0, M[2](7.0) = 0 - 6 : b3; #Из условий равновесия узла 3
                                                    Q2(7.0) = 0, M2(7.0) = -6
> b := [b1, b2, b3]; # Уравнения связей объединяем в единый список
b := [M1(0) = 0, Q1(0) = -15, V1(2.8) = V2(2.8), phi1(2.8) = phi2(2.8), M1(2.8) = M2(2.8), Q1(2.8) = Q2(2.8), Q2(7.0) = 0, M2(7.0) = -6]
> F := [seq([Q[k](x), M[k](x), phi[k](x), V[k](x)] [ ], k = 1..n)]; # Генерируем список искоемых функций
F := [Q1(x), M1(x), phi1(x), V1(x), Q2(x), M2(x), phi2(x), V2(x)]

```

```

> d := [a[ ], b[ ]]; # Систему дифференциальных уравнений объединяем с уравнениями связей
d := [ $\frac{d}{dx} Q_1(x) - 8000.000 V_1(x) = 0, \frac{d}{dx} M_1(x) = Q_1(x), \frac{d}{dx} \varphi_1(x) = -0.0002587991718 M_1(x), \frac{d}{dx} V_1(x) = \varphi_1(x), \frac{d}{dx} Q_2(x) - 8000.000 V_2(x) = -40,$ 
 $\frac{d}{dx} M_2(x) = Q_2(x), \frac{d}{dx} \varphi_2(x) = -0.0002587991718 M_2(x), \frac{d}{dx} V_2(x) = \varphi_2(x), M_1(0) = 0, Q_1(0) = -15, V_1(2.8) = V_2(2.8), \varphi_1(2.8) = \varphi_2(2.8), M_1(2.8)$ 
 $= M_2(2.8), Q_1(2.8) = Q_2(2.8), Q_2(7.0) = 0, M_2(7.0) = -6$ ]

```

```

> sol := evalf([solve(d,F)[ ]]) : sol; # Решение дифференциальной задачи
[M1(x) = 0.9059910427 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} - 0.9059910427 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
- 14.96169595 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} - 0.9108323470 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, M2(x) =
-122.5881568 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} - 102.7551415 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} + 0.02039398109 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
- 0.009074292291 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, Q1(x) = -13.45897059 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
+ 11.92204756 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} - 1.541029426 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
- 0.004106393763 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, Q2(x) = 191.1361642 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
- 16.82236165 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} + 0.02499498667 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
+ 0.009601358956 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, V1(x) = 0.0001629522463 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
+ 0.0001629522463 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x} + 0.002691022149 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
- 0.0001638230070 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, V2(x) = 0.005000000000 + 0.02204880024 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
- 0.01848161885 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} + 0.000003668077135 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
+ 0.000001632109196 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, phi1(x) = -0.002420740810 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
- 0.002144308652 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} + 0.0002771707388 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
- 7.385791428 10^{-7} cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}, phi2(x) = -0.03437789762 cos(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x}
- 0.003025682916 sin(0.8481999048 x) e^{-0.8481999048 x} + 0.000004495617542 cos(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}
- 0.000001726907812 sin(0.8481999048 x) e^{0.8481999048 x}]

```

На рис. 7 показаны эпюры перемещений и усилий.

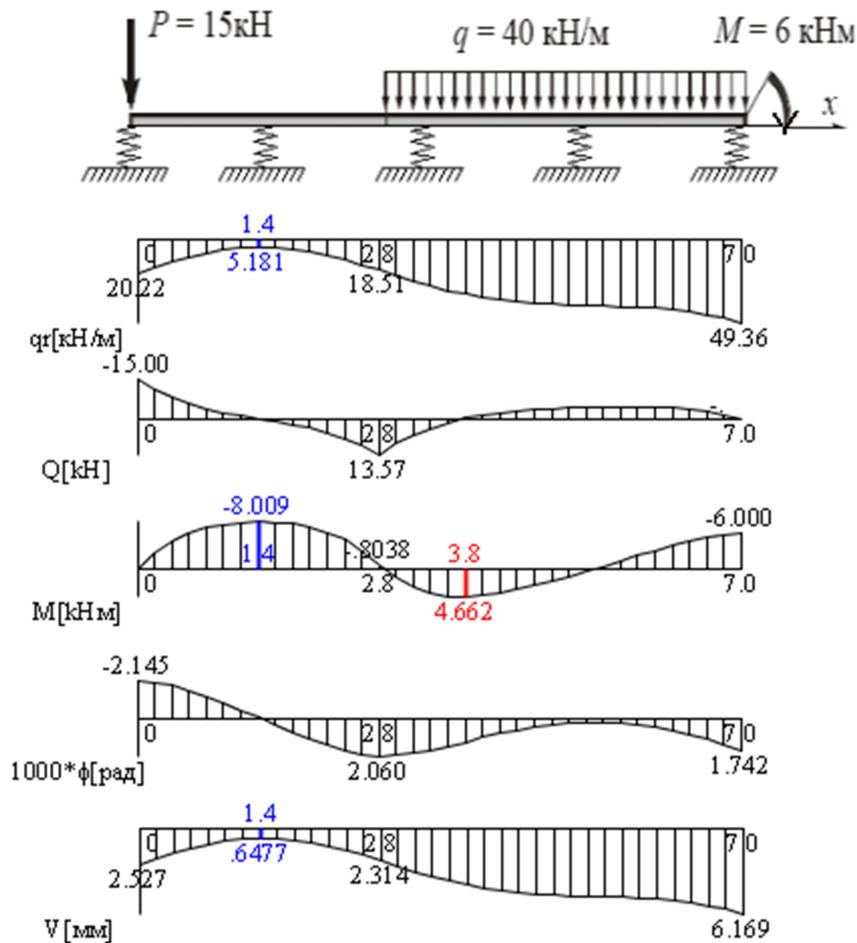


Рис. 7. Балка на упругом основании

4. Продольно-поперечный изгиб статически неопределимой балки

Пример 6. Однопролетная балка шарнирно опёрта по концам, но обе опоры неподвижны (рис. 8). Под воздействием поперечной нагрузки противоположные концы балки стремятся сблизиться, но вследствие неподвижности опор такого сближения не происходит, из-за чего в балке возникает наряду с изгибом растяжение [3]. В данном случае система статически неопределима относительно растягивающей балку силы P и для ее определения необходимо составить уравнение совместности деформаций.

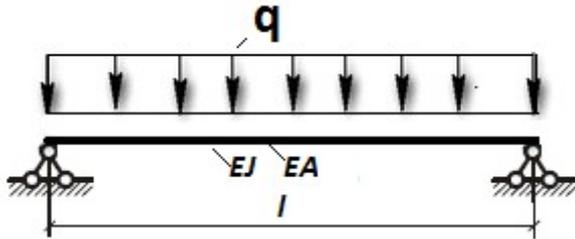


Рис. 8. Заданная система

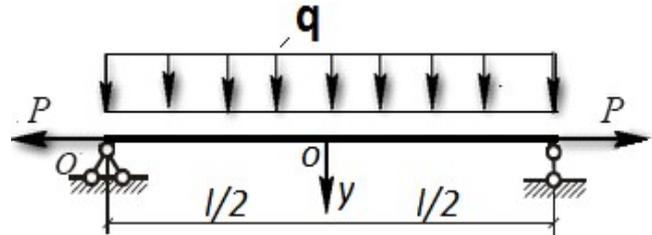


Рис. 9. Основная система метода сил

Удаляем связь, препятствующую горизонтальному сближению опор, а действие ее на систему заменяем *неизвестной реакцией* P (рис. 9). Суть уравнения совместности деформаций: сближение концов балки, вычисленное в основной системе, должно равняться нулю. Уравнение совместности деформаций имеет вид [3]

$$\frac{P \cdot l}{E \cdot A} - \frac{1}{2} \int_0^l [V'(x)]^2 dx = 0. \quad (4.1)$$

Алгоритм решения задачи. Решаем дифференциальную задачу продольно-поперечного изгиба для основной системы (рис.9) в аналитическом виде. Находим $V'(x)$ как функцию P , подставляем в уравнение (4.1), получаем трансцендентное уравнение относительно неизвестной силы P , которое решаем с помощью команды *fsolve*. Подстановка распора P в выражения для усилий и перемещений дает искомое решение.

Ниже приведена программа, реализующая данный алгоритм.

```
> restart :
> with(plottools) : with(plots) : AC := Array(1..4) :
    Балка загружена поперечной нагрузкой и подвергнута воздействию продольных растягивающих сил.
    Начало координат в центре среднего сечения балки.
```

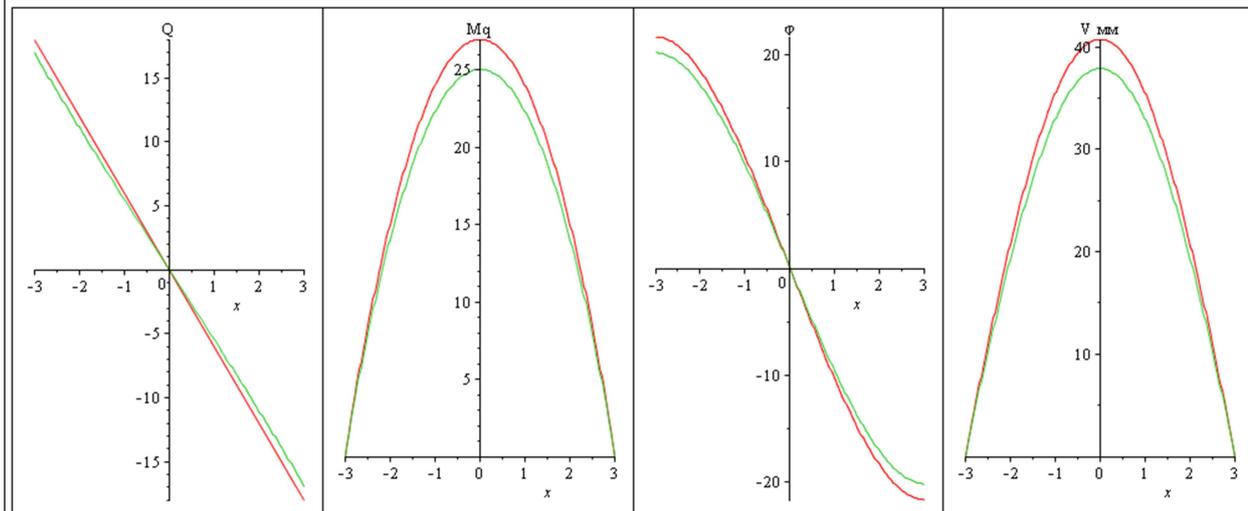
```
> ID := l = 6, q = 6, EJ = 2484.3, A = 24.6 * 10^-4, W = 118.3 * 10^-6, EA = 5.166000000 * 10^5 :# Исходные данные
```

```

> a1 := diff(Q(x), x) + P*diff(phi(x), x) = -q, diff(M(x), x) = Q(x), diff(phi(x), x) = -M(x)/EJ, diff(V(x), x) = phi(x) : a1;# Система ОДУ
      d
      dx Q(x) + P ( d
                    dx phi(x) ) = -q, d
      dx M(x) = Q(x), d
      dx phi(x) = -M(x)/EJ, d
      dx V(x) = phi(x)
> a2 := V(-l/2) = 0, V(l/2) = 0, M(-l/2) = 0, M(l/2) = 0 : a2;# Условия закрепления по концам
      V(-l/2) = 0, V(l/2) = 0, M(-l/2) = 0, M(l/2) = 0
> F := [Q(x), M(x), phi(x), V(x)];#Искомая вектор-функция"
      F := [Q(x), M(x), phi(x), V(x)]
> sol := [dsolve([a1, a2], F)[ ]]: sol := collect(convert(sol, trigh), [EJ, q, P]) :#Решение системы ОДУ;
> Qi := select(has, sol, Q)[ ] : Q0 := rhs(lim_{P->0}(Qi)) : Qi, " ", Q({x, P=0}) = Q0;# Поперечная сила и выражение для неё при P=0
      Q(x) = -frac(q sinh(sqrt(P*x)/sqrt(EJ)) sqrt(EJ))
              sqrt(P) cosh(1/2 * sqrt(P*l)/sqrt(EJ)), " ", Q({x, P=0}) = -q*x
> Mi := select(has, sol, M)[ ] : M0 := rhs(lim_{P->0}(Mi)) : Mi, " ", M({x, P=0}) = M0;# Изгибающий момент и выражение для него при P=0
      M(x) = (frac(cosh(sqrt(P*x)/sqrt(EJ))
                  - cosh(1/2 * sqrt(P*l)/sqrt(EJ))
                  + 1) q EJ)
              P, " ", M({x, P=0}) = 1/8 * q*l^2 - 1/2 * q*x^2
> phi := select(has, sol, phi)[ ] : phi0 := rhs(lim_{P->0}(phi)) : phi, " ", phi({x, P=0}) = phi0;# Угол поворота сечения и его значение при P=0
      phi(x) = -q*x/P + q*sqrt(EJ) sinh(sqrt(P*x)/sqrt(EJ))
                P^(3/2) cosh(1/2 * sqrt(P*l)/sqrt(EJ)), " ", phi({x, P=0}) = 1/24 * 4*q*x^3 - 3*q*x*l^2/EJ
> Vi := select(has, sol, V)[ ] : V0 := rhs(lim_{P->0}(Vi)) : Vi, " ", V({x, P=0}) = V0;# Прогиб и выражение для него при P=0
      V(x) = (frac(cosh(sqrt(P*x)/sqrt(EJ))
                  - cosh(1/2 * sqrt(P*l)/sqrt(EJ))
                  - 1) q EJ)
              P^2 + ((1/8 * l^2 - 1/2 * x^2) q)
                P, " ", V({x, P=0}) = 1/384 * 5*q*l^4 - 24*q*l^2*x^2 + 16*q*x^4/EJ
> u1:=P-EA/2/l*Int((rhs(phi))^2,x=-l/2..l/2):u1=0;#Уравнение совместности
> uP:=evalf(subs(ID,P-EA/2/l*evalf(int((rhs(phi))^2,x=-l/2..l/2)))):#Уравнение совместности как функция P
      EA * Int(-l/2, l/2) ( -q*x/P + q*sqrt(EJ) sinh(sqrt(P*x)/sqrt(EJ))
                             P^(3/2) cosh(1/2 * sqrt(P*l)/sqrt(EJ)) )^2 dx
      P - 1/2 * l = 0
Численное решение уравнения совместности
> X := P = fsolve(uP, P) : X;#`Значение распора
      P = 51.26907510
> ID := X, ID : ID, assign(ID);# Присвоение параметрам задачи численных значений
      P = 51.26907510, l = 6, q = 6, EJ = 2484.3, A = 0.002460000000, W = 0.0001183000000, EA = 5.166000000 10^5
> Qp := evalf(subs(ID, rhs(Qi))) : AC[1] := plot([Q0, Qp], subs(ID, x = -l/2 .. l/2), title = "Q") :#Графики Q(x)
> Mp := evalf(subs(ID, rhs(Mi))) : AC[2] := plot([M0, Mp], subs(ID, x = -l/2 .. l/2), title = "Mq") :#Графики M(x)
> fp := evalf(subs(ID, rhs(phi))) : AC[3] := plot(1000 * [phi0, fp], subs(ID, x = -l/2 .. l/2), title = "phi") :#Графики phi(x)
> Vp := evalf(subs(ID, rhs(Vi))) : AC[4] := plot(1000 * [V0, Vp], subs(ID, x = -l/2 .. l/2), title = "V мм") :#Графики V(x)

```

> display(AC, axes = Normal);# Красный цвет P=0, зеленый цвет `P=51,27 Кн



```

> M := evalf(subs(x = 0, Mp)); σ :=  $\frac{\text{evalf}\left(\frac{P}{A} + \frac{\text{subs}(x = 0, Mp)}{W}\right)}{1000}$ ;# Напряжение в среднем сечении балки в крайнем волокне МПа
M := 25.0572534
σ := 232.6521900

> M0 := evalf( $\frac{q \cdot l^2}{8}$ ); σ0 :=  $\frac{\text{evalf}\left(\frac{\left(\frac{q \cdot l^2}{8}\right)}{W}\right)}{1000}$ ;# Напряжение в среднем сечении балки в крайнем волокне МПа (P=0)
M0 := 27.
σ0 := 228.2333051

> εM :=  $\frac{\text{abs}(M - M0)}{M0} \cdot 100$ ; εσ :=  $\frac{(\sigma - \sigma0)}{\sigma0} \cdot 100$ ;# "Погрешность в %",
εM := 7.195357778
εσ := 1.936126236

```

Выводы (пример 6). Чем больше величина растягивающей силы, тем при прочих равных условиях в большей мере уменьшаются этой силой прогибы, углы поворота и усилия, вызванные поперечной нагрузкой (на графиках красный цвет отвечает изгибу только от поперечной нагрузки q , а зеленый цвет – изгибу с растяжением). Однако это не обязательно означает, что уменьшаются нормальные напряжения в поперечных сечениях. В данном примере изгибающий момент при действии растягивающей силы ($P = 51,27$ кН) снизился на 7,2 %, а нормальные напряжения увеличились на 2 %. Заметим, что при решении данной задачи выражения для усилий и перемещений содержали параметр P в знаменателе. Для раскрытия неопределенности использовалась команда вычисления предела $\lim_{P \rightarrow 0}(V)$.

5. Кручение тонкостенного стержня открытого профиля

Система дифференциальных уравнений кручения тонкостенного стержня открытого профиля имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx} M_{\omega} + GJ_d \frac{d}{dx} \theta = -m, \quad \frac{d}{dx} B_{\omega} = M_{\omega}, \quad EJ_{\omega} \frac{d}{dx} \theta = -B_{\omega}, \quad \frac{d}{dx} \varphi = \theta, \quad (5.1)$$

где M_{ω} - изгибно-крутящий момент, θ - относительный угол закручивания, m - интенсивность крутящего момента, B_{ω} - бимомент ($H \cdot м^2$), φ - угол закручивания, GJ_d, EJ_{ω} - крутильная и секториальная жесткости стержня, G, E - модуль сдвига и модуль упругости материала стержня.

Покажем, что система четырех дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно угла закручивания φ [1]. Из 4-го уравнения $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$, подставляем в 3-е уравнение, находим

$B_\omega = -EJ_\omega \frac{d^2\varphi}{dx^2}$. Подставляем B_ω во 2-е уравнение, получаем $M_\omega = -EJ_\omega \frac{d^3\varphi}{dx^3}$. Под-

ставляем M_ω и θ в 1-е уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение кручения стержня в традиционной форме $EJ_\omega \frac{d^4\varphi}{dx^4} - GJ_d \frac{d^2\varphi}{dx^2} = m$.

Пример 7. Неразрезной 3-пролетный тонкостенный стержень открытого профиля, нагруженный распределенным крутящим моментом интенсивностью $m = 1 \frac{\kappa\text{Нм}}{\text{м}}$ (рис. 10).

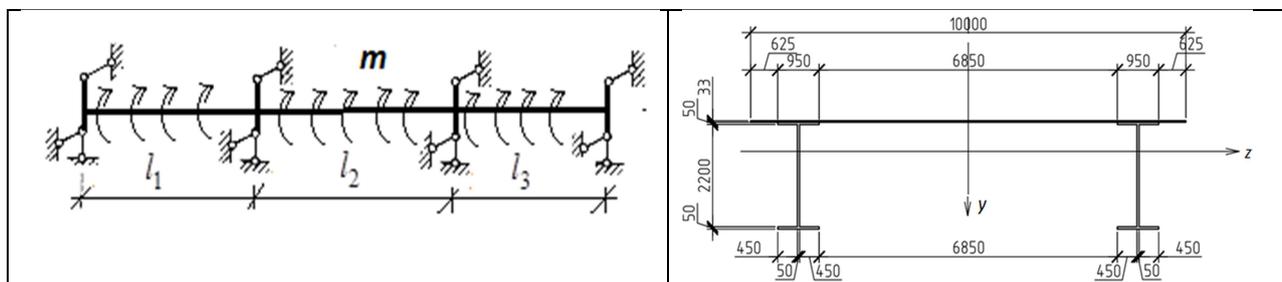
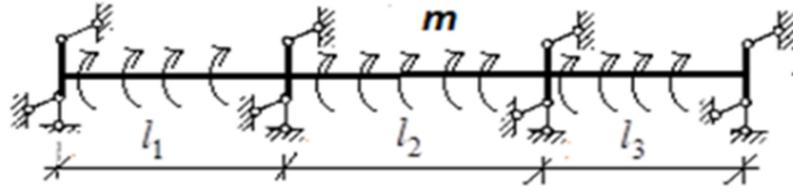


Рис. 10. Расчетная схема и поперечное сечение

Ниже представлена программа Maple.

```
> restart : AC := Array(1..5) : with(plots) : with(plottools) :
> ID := J[d] = 0.207, J[omega] = 4.57, E = 2.1 * 10^8, G = 8.5 * 10^7 : ID; # Исходные данные
      J_d = 0.207, J_omega = 4.57, E = 2.100000000 * 10^8, G = 8.500000000 * 10^7
> GJd := evalf(subs(ID, G * J[d])) : # крутильная жесткость
Задаем длины пролетов и закон изменения интенсивности внешнего крутящего момента в пролетах
> L := [ 36.75, 63.0, 36.75 ] : m := [ 1, 1, 1 ] :
> n := nops(L); t := [ seq( add(L[j], j = 1..k), k = 0..n) ] : # Определяем число участков и вычисляем координаты границ участков
      n := 3
      t := [ 0, 36.75, 99.75, 136.50 ]
> F := [ seq( [ M[omega][j](x), B[omega][j](x), theta[j](x), phi[j](x) ] [ ], j = 1..n) ] : # Формируем искомую вектор-функцию
      F := [ M_omega_1(x), B_omega_1(x), theta_1(x), phi_1(x), M_omega_2(x), B_omega_2(x), theta_2(x), phi_2(x), M_omega_3(x), B_omega_3(x), theta_3(x), phi_3(x) ]
> a := seq( [ diff(M[omega][j](x), x) + G * J[d] * diff(theta[j](x), x) = -m[j], diff(B[omega][j](x), x) = M[omega][j](x), E * J[omega] * diff(theta[j](x), x) = -B[omega][j](x), diff(phi[j](x), x) = theta[j](x) ] [ ], j = 1..n) : a; # Система дифференциальных уравнений
      d/dx M_omega_1(x) + G * J_d * (d/dx theta_1(x)) = -1, d/dx B_omega_1(x) = M_omega_1(x), E * J_omega * (d/dx theta_1(x)) = -B_omega_1(x), d/dx phi_1(x) = theta_1(x), d/dx M_omega_2(x) + G * J_d * (d/dx theta_2(x)) = -1, d/dx B_omega_2(x) = M_omega_2(x), E * J_omega * (d/dx theta_2(x)) = -B_omega_2(x), d/dx phi_2(x) = theta_2(x), d/dx M_omega_3(x) + G * J_d * (d/dx theta_3(x)) = -1, d/dx B_omega_3(x) = M_omega_3(x), E * J_omega * (d/dx theta_3(x)) = -B_omega_3(x), d/dx phi_3(x) = theta_3(x)
> a1 := evalf(subs({ID}, [a])) : a1; # Система диф. уравнений на исходных данных
      d/dx M_omega_1(x) + 1.759500000 * 10^7 * (d/dx theta_1(x)) = -1., d/dx B_omega_1(x) = M_omega_1(x), 9.597000000 * 10^8 * (d/dx theta_1(x)) = -1. * B_omega_1(x), d/dx phi_1(x) = theta_1(x), d/dx M_omega_2(x) + 1.759500000 * 10^7 * (d/dx theta_2(x)) = -1., d/dx B_omega_2(x) = M_omega_2(x), 9.597000000 * 10^8 * (d/dx theta_2(x)) = -1. * B_omega_2(x), d/dx phi_2(x) = theta_2(x), d/dx M_omega_3(x) + 1.759500000 * 10^7 * (d/dx theta_3(x)) = -1., d/dx B_omega_3(x) = M_omega_3(x), 9.597000000 * 10^8 * (d/dx theta_3(x)) = -1. * B_omega_3(x), d/dx phi_3(x) = theta_3(x)
```

Уравнения связей



> b1 := $\varphi[1](t[1]) = 0, B[\omega][1](t[1]) = 0$; b1; # Угол закручивания и бимомент на опоре равны нулю
 $\varphi_1(0) = 0, B_{\omega_1}(0) = 0$

Углы закручивания в конце 1-го участка и в начале 2-го равны нулю. Относительный угол закручивания и бимомент непрерывные функции

> b2 := $\varphi[1](t[2]) = 0, \varphi[2](t[2]) = 0, \theta[1](t[2]) = \theta[2](t[2]), B[\omega][1](t[2]) = B[\omega][2](t[2])$; b2;
 $\varphi_1(36.75) = 0, \varphi_2(36.75) = 0, \theta_1(36.75) = \theta_2(36.75), B_{\omega_1}(36.75) = B_{\omega_2}(36.75)$

> b3 := $\varphi[2](t[3]) = 0, \varphi[3](t[3]) = 0, \theta[2](t[3]) = \theta[3](t[3]), B[\omega][2](t[3]) = B[\omega][3](t[3])$; b3;
 $\varphi_2(99.75) = 0, \varphi_3(99.75) = 0, \theta_2(99.75) = \theta_3(99.75), B_{\omega_2}(99.75) = B_{\omega_3}(99.75)$

> b4 := $\varphi[3](t[4]) = 0, B[\omega][3](t[4]) = 0$; b4;
 $\varphi_3(136.50) = 0, B_{\omega_3}(136.50) = 0$

> Sol := evalf(dsolve([a1, b], F)); # Решение системы диф. уравнений

> Fi := select(has, Sol, φ); # Углы закручивания

$\{\varphi_1(x) = 7.795126034 \cdot 10^{-8} e^{0.1354025640 x} + 0.000003022014901 e^{-0.1354025640 x} - 2.841716397 \cdot 10^{-8} x^2 + 8.207652914 \cdot 10^{-7} x - 0.000003099966159, \varphi_2(x) = 1.541166810 \cdot 10^{-11} e^{0.1354025640 x} + 0.001639365108 e^{-0.1354025640 x} - 2.841716397 \cdot 10^{-8} x^2 + 0.000003878942881 x - 0.0001154879925, \varphi_3(x) = 2.840995607 \cdot 10^{-14} e^{0.1354025640 x} + 8.291806909 e^{-0.1354025640 x} - 2.841716397 \cdot 10^{-8} x^2 + 0.000006937120460 x - 0.0004205412078\}$

> $\theta := select(has, Sol, \theta)$; # Относительные углы закручивания

$\{\theta_1(x) = 1.055480052 \cdot 10^{-8} e^{0.1354025640 x} - 4.091885655 \cdot 10^{-7} e^{-0.1354025640 x} - 5.683432793 \cdot 10^{-8} x + 2.07652914 \cdot 10^{-7}, \theta_2(x) = 2.086779376 \cdot 10^{-12} e^{0.1354025640 x} - 0.0002219742388 e^{-0.1354025640 x} - 5.683432793 \cdot 10^{-8} x + 0.000003878942881, \theta_3(x) = 3.846780893 \cdot 10^{-15} e^{0.1354025640 x} - 1.122731915 e^{-0.1354025640 x} - 5.683432793 \cdot 10^{-8} x + 0.000006937120460\}$

> B $\omega := select(has, Sol, B[\omega])$; # Бимомент

$\{B_{\omega_1}(x) = -1.371552426 e^{0.1354025640 x} - 53.17235218 e^{-0.1354025640 x} + 54.54390452, B_{\omega_2}(x) = -0.0002711683002 e^{0.1354025640 x} - 28844.62906 e^{-0.1354025640 x} + 54.54390452, B_{\omega_3}(x) = -4.998731771 \cdot 10^{-7} e^{0.1354025640 x} - 1.458943425 \cdot 10^8 e^{-0.1354025640 x} + 54.54390452\}$

> M $\omega := select(has, Sol, M[\omega])$; # Изгибно-крутящий момент

$\{M_{\omega_1}(x) = -0.1857117151 e^{0.1354025640 x} + 7.199672817 e^{-0.1354025640 x}, M_{\omega_2}(x) = -0.00003671688312 e^{0.1354025640 x} + 3905.636733 e^{-0.1354025640 x}, M_{\omega_3}(x) = -6.768410985 \cdot 10^{-8} e^{0.1354025640 x} + 1.975446805 \cdot 10^7 e^{-0.1354025640 x}\}$

Графики перемещений и усилий по всей длине стержня

> $\phi 1 := seq(plot(1000 \cdot rhs(Fi[k]), x = t[k]..t[k+1], title = "1000\phi"), k = 1..n)$; AC[1] := display($\phi 1$);

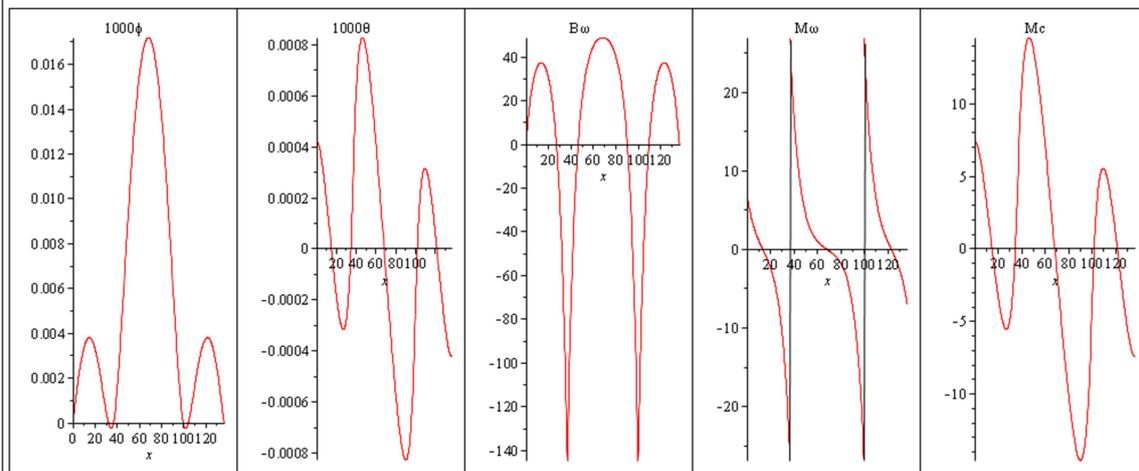
> $\theta 1 := seq(plot(1000 \cdot rhs(\theta[k]), x = t[k]..t[k+1], title = "1000\theta"), k = 1..n)$; AC[2] := display($\theta 1$);

> B1 := seq(plot(rhs(B ω [k]), x = t[k]..t[k+1], title = "B ω "), k = 1..n); AC[3] := display(B1);

> M1 := seq(plot(rhs(M ω [k]), x = t[k]..t[k+1], title = "M ω "), k = 1..n); AC[4] := display(M1);

> Mc := seq(plot(GJd \cdot rhs(\theta[k]), x = t[k]..t[k+1], title = "Mc"), k = 1..n); AC[5] := display(Mc); # Mc-момент свободного кручения

> display(AC); # Графики перемещений и усилий



Таким образом, для различных расчетных схем продемонстрирован единый подход при создании математической модели и ее решении в системе компьютерной математики Maple.

Библиографический список

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – 2 изд. испр. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
2. Сопротивление материалов: учеб. пособие: в 3-х ч. Ч. 2 / Н.М. Атаров [и др.]; под ред. Н.М. Атарова ; М-во образования и науки Росс. Федерации, ФГБОУ ВПО «Моск. Гос. Строит. Ун-т». - Москва: МГСУ, 2013. - 98 с.
3. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела/ А.П. Филин// Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Т. II. – М: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит-ры, 1978. – 616 с.
4. Дарков, А.В. Строительная механика/ А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников : учеб. - 11-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 656 с.
5. Говорухин, В. Компьютер в математическом исследовании Maple, MATLAB, LaTeX/ В. Говорухин, В. Цибулин.: учеб. курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.

References

1. Alexandrov A.V., Strength of materials: textbook for universities/ A.V. Alexandrov, V.D. Potapov, B.P. Derzhavin. – 2 edition. corr. – M.: High school, 2000. – 560 p.
2. Strength of materials: textbook: in 3 parts. Part. 2 / N.M. Atarov [and others.]; edited by N.M. Atarov; Min. of Education and science of RF, FGBOU VPO «Moscow state Construction university» - Moscow: MGSU, 2013. - 98 p.
3. Filin, A.P. Applied Mechanics of deformed rigid body / A.P. Filin/ Materials strength with the elements of the theory of continuum and structural mechanics. Book II. – M: Nauka. Chief ed. Phys. – Math literature, 1978. – 616 p.
4. Darkov, A.V. Structural mechanics/ A.V. Darkov, N.N. Shaposhnikov: textbook. – 11ed. SP.: Pub. House «Lan», 2008. – 656 p.
5. Govoruchin, V. Computer in maths investigation Maple, MATLAB, LaTeX/ V. Govoruchin, V. Tzibulin.: Study course. – SP.: Piter, 2001. – 624 p.

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Д-р физ.-мат. наук, проф.

М. Н. Кирсанов

Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;

e-mail: c216@ya.ru

National Research University "MPEI",
Dr of Physics and Mathematics, Professor

M. N. Kirsanov

Moscow, Russia, tel.: +7(495)3627314;

e-mail: c216@ya.ru

М.Н. Кирсанов

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА РЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ, ИМЕЮЩЕЙ СЛУЧАИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТИ

Плоская ферма с четырьмя опорами при определенном числе панелей допускает мгновенную изменчивость. Найдена закономерность критических чисел панелей. Рассмотрено действие равномерно распределенной по узлам нижнего пояса нагрузки. Методом индукции выведена формула для прогиба фермы в зависимости от размеров и числа панелей. Использована система символьной математики Maple.

Ключевые слова: статически неопределимая балочная ферма, прогиб фермы, метод индукции.

M. N. Kirsanov

THE DERIVATION OF FORMULA FOR DEFLECTION OF TRUSS WITH CASES OF KINEMATIC VARIABILITY

Plane truss with four supports admits momentary variability at a certain number of panels. The regularity of the critical numbers of panels is obtained. Considered The effect of uniformly distributed load on the lower belt nodes was analysed. The formula for the deflection of the truss depending on the size and the number of panels is found by induction method. The system of symbol mathematics Maple is used.

Key words: statically indeterminable beam truss, truss deflection, induction method.

Решетчатая ферма с четырьмя опорами (рис. 1) внешне статически неопределима. Для определения усилий в стержнях и реакций опор необходимо составлять систему уравнений равновесия сразу для всех узлов. В ферме с n панелями в половине пролета, считая по нижнему поясу, число стержней – $n_s = 8n + 14$, включая пять опорных стержней, число шарниров – $m = 4n + 7$.

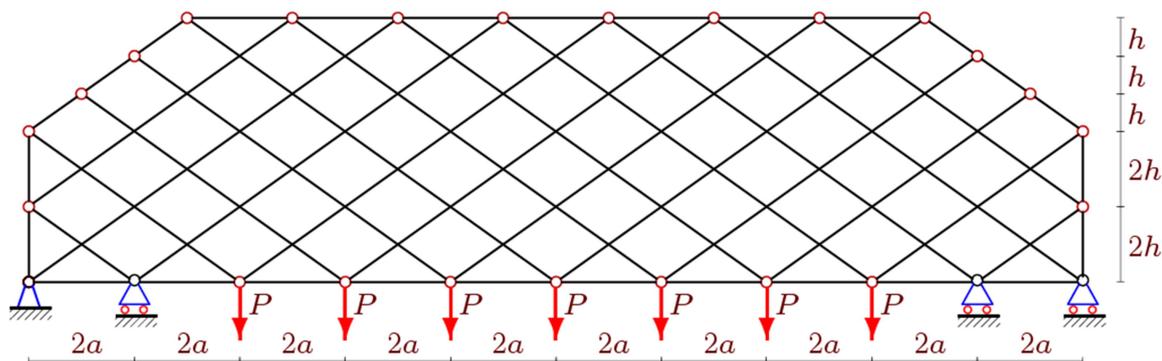


Рис. 1. Ферма при $n=5$

Для определения прогиба по формуле Максвелла - Мора необходимо знать усилия в стержнях. Решение в символьной форме получим по программе [1]. Для этого сначала надо пронумеровать стержни и узлы (рис. 2). Начало координат располагается в левой неподвижной опоре.

© Кирсанов М.Н., 2017

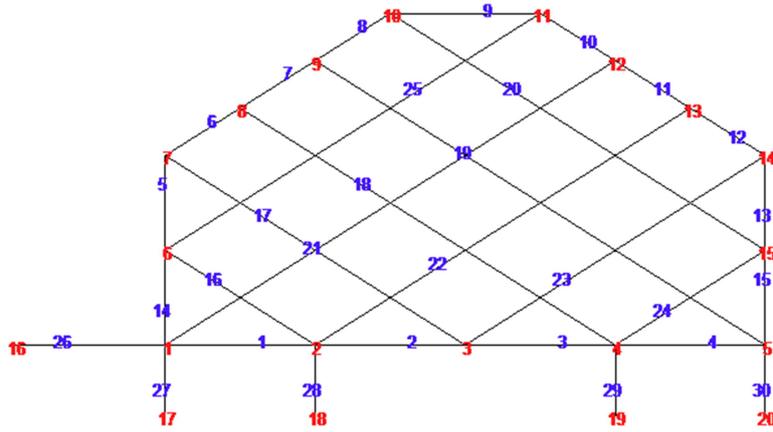


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=2$

Приведем фрагмент ввода координат в программу:

```

> for i to 2*n+1 do x[i]:=2*a*(i-1); y[i]:=0; od:
> for i to 2 do
> x[i+2*n+1]:=0;      y[i+2*n+1]:=2*i*h;
> x[i+4*n+5]:=x[2*n+1]; y[i+4*n+5]:=6*h-2*i*h;
> x[i+2*n+3]:=a*i;    y[i+2*n+3]:=4*h+h*i;
> x[i+4*n+3]:=a*(i-3+4*n); y[i+4*n+3]:=7*h-h*i;
> od:
> for i to 2*n-2 do
> x[i+2*n+5]:=2*a*i+a; y[i+2*n+5]:=7*h;
> od:

```

По координатам узлов определяются направляющие косинусы системы уравнений равновесия, записанной в матричной форме. Решение получается с помощью метода обратной матрицы, который не только легко реализуется в системе Maple, но и заметно быстрее специализированных операторов пакета **Linear Algebra** этой же системы. Для расчета прогиба фермы используем формулу Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (узел с номером $7n+4$, рис. 2). Первые же расчеты сразу указали на особенность конструкции. Оказалось, что при $n=3$, $n=4$ определитель матрицы системы уравнений равновесия обращается в ноль. Очевидно, это соответствует кинематической изменяемости. Последующие расчеты в аналитической форме выявили закономерность последовательности недопустимых чисел панелей

$$n = 4k + 1 - \cos(\pi k) - 4 \cos(\pi k / 2) - 2 \sin(\pi k / 2), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Подтверждением кинематической изменяемости является и схема возможных скоростей, найденная для случая $n=3$ (рис. 3). Большинство шарниров и стержней в этом варианте распределения скоростей неподвижны. Стержни 4-10 и 4-17 совершают мгновенный поворот вокруг некоторого мгновенного центра скоростей с угловой скоростью $\omega = v / (10a) = u / (5c)$. Стержни 9-10, 17-18 и 3-4, 4-5 вращаются вокруг неподвижных шарниров 9, 18 и 3, 4 соответственно.

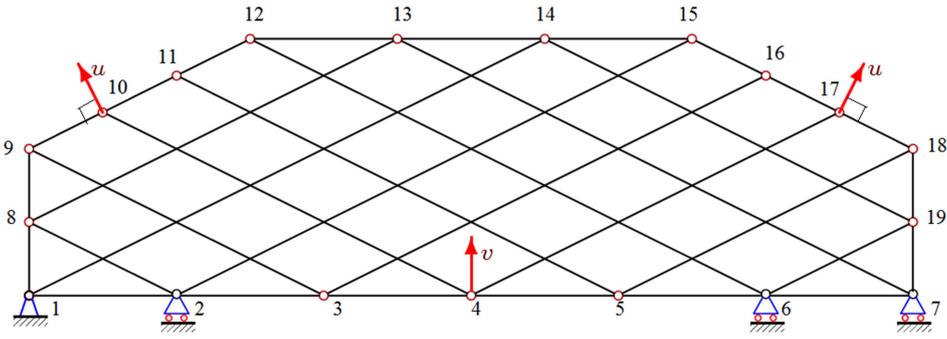


Рис. 3. Схема возможных скоростей, $n=3$

Исключая из последовательности натуральных чисел недопустимые величины, методами системы Maple получим правило образования чисел панелей, при которых ферма не вырождается:

$$n = (14k + 7 + 3 \cos(\pi k) - 2 \cos(\pi k / 2) - 2 \sin(\pi k / 2)) / 8, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Анализ серии решений для ферм с числом панелей от 1 до 34 показал, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$EF\Delta = \frac{P(A_k a^3 + H_k h^3 + C_k c^3)}{h^2}. \quad (2)$$

Последовательность коэффициентов при a^3 удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$A_k = A_{k-1} + 4A_{k-4} - 4A_{k-5} - 6A_{k-8} + 6A_{k-9} + 4A_{k-12} - 4A_{k-13} - A_{k-16} + A_{k-17}.$$

Уравнение получено оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple. Заметим, что по сравнению с аналогичными решениями это уравнение длиннее, требуется большое время для его вывода. Оператор `rsolve` находит решение рекуррентного уравнения

$$\begin{aligned} A_k = & (490k^4 + (980 - 728 \sin \varphi + 516 \cos 2\varphi - 728 \cos \varphi)k^3 + \\ & + (774 \cos 2\varphi - 912 \sin \varphi - 286 - 1272 \cos \varphi)k^2 + \\ & + (1256 \sin \varphi - 776 + 1664 \cos \varphi - 888 \cos 2\varphi)k + \\ & + 2541 - 2352 \cos \varphi - 48 \sin \varphi - 189 \cos 2\varphi) / 768, \end{aligned}$$

где $\varphi = \pi k / 2$. Аналогично определяются другие коэффициенты решения:

$$C_k = (14k^2 + (28 \sin \varphi - 42 \cos 2\varphi + 28 \cos \varphi + 14)k - 28 \cos \varphi + 56 \sin \varphi + 49 - 21 \cos 2\varphi) / 32,$$

$$H_k = 2(2 - 2 \cos \varphi - \sin \varphi)k - \cos 2\varphi + 1.$$

На рис. 4 даны кривые решения (2) для безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta / (P_{sum} L)$, вычисленного при постоянной длине пролета фермы $L=4an=100$ м и постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузки $P_{sum} = (4n-1)P$.

Точки недопустимых значений n (1) на графике отмечены пробелами. С увеличением числа панелей решение для прогиба имеет все меньшие скачки и, начиная с некоторого значения, почти не меняется.

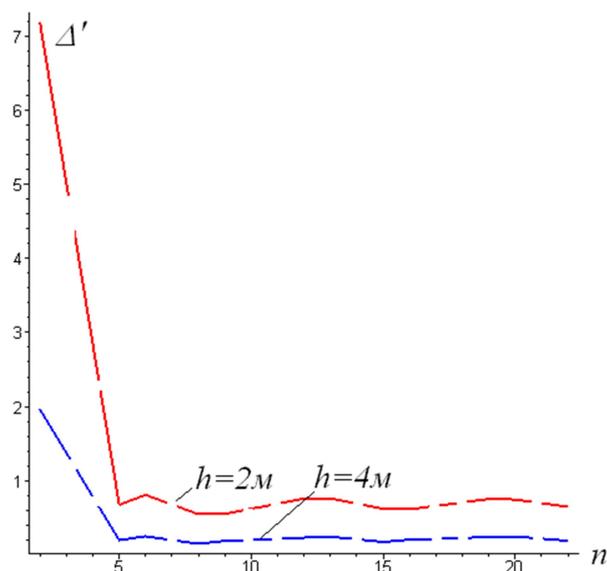


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей

На основе метода индукции при поддержке системы Maple формулы для прогиба плоских ферм различной структуры в аналитической форме выведены также в [2-5].

Библиографический список

1. Кирсанов, М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики/ М.Н. Кирсанов. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. - 512 с.
2. Кирсанов, М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы/ М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов //Строительная механика и расчет сооружений. - 2017. № 2(271). - С. 4-10.
3. Kirsanov, M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering/ М. Kirsanov. - 2016. -No. 3. - Vol. 1. - Pp. 14-17.
4. Тиньков, Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами Д.В. Тиньков // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. - М: Инфра-М, 2015. - Т. 1. - С. 52-56.
5. Тиньков, Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций/ Д.В. Тиньков //Инженерно-строительный нал. - 2015. - №5(57). - С. 66–73.

References

1. Kirsanov, M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Kirsanov, M. N., Maslov A.N. The formula for the deflection of multiple lattice beam truss calculation// Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). P. 4-10.
3. Kirsanov, M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. P. 14-17.
4. Tinkov, D. V. Analysis of the influence of fixation conditions on the deflection of the girder beam flat with downward braces// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M:
5. Infra-M. 2015. Vol. 1. P. 52-56.
6. Tinkov, D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // Civil Engineering journal. - 2015. No. 5(57). P. 66-73.

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Д-р физ.-мат. наук, проф.

М. Н. Кирсанов

Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14

e-mail: c216@ya.ru

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Студентка

А.Р. Рахматулина

Россия, г. Москва, тел.: +7(985)683-93-23

e-mail: anya.rashma@yandex.ru

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Студентка

А.А. Смирнова

Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;

e-mail: Anastasia7773@yahoo.com

National Research University "MPEI"

Dr of Mathematics., Professor

M. N. Kirsanov

Russia, Moscow, tel.: +7(495)3627314

e-mail: c216@ya.ru

National Research University "MPEI",
student

A.R. Rakhmatulina

Russia, Moscow, tel.: +7(985)6839323

e-mail: anya.rashma@yandex.ru

National Research University "MPEI"

Student

A.A. Smirnova

Moscow, Russia, tel.: +7(495)3627314

e-mail: Anastasia7773@yahoo.com

М.Н. Кирсанов, А.Р. Рахматулина, А.А. Смирнова

АНАЛИЗ ПРОГИБА ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

Ферма с параллельными поясами и треугольной шпренгельной решеткой имеет одну боковую дополнительную внешнюю опору. В системе символьной математики Maple выводится зависимость прогиба фермы и усилий в наиболее сжатых и растянутых ее элементах в зависимости от числа панелей. С помощью специальных операторов системы составляются и решаются рекуррентные уравнения для коэффициентов искомых формул.

Ключевые слова: статически неопределимая ферма, ферма с параллельными поясами, треугольная шпренгельная решетка фермы.

M.N. Kirsanov, A.R. Rakhmatulina, A.A. Smirnova

ANALYSIS OF THE DEFLECTION OF OUTWARDLY STATICALLY INDETERMINABLE GIRDER

Truss with parallel chords and triangular lattice has one additional external support on one side. In the system of symbol mathematics Maple the dependence of the deflection of the truss and forces in the most compressed and stretched its elements depending on the number of panels are obtained. With the help of special operators of the system are compiled and solved the recurrence equation for the coefficients of the desired formulas.

Key words: statistically indeterminable truss, truss with parallel girths, triangular subdivided panel truss lattice

Несмотря на три опоры с четырьмя неизвестными реакциями, ферма (рис. 1) статически определима. Для n панелей, считая по верхнему поясу, число стержней – $n_s = 8n + 8$, включая четыре опорных стержня (два на неподвижный шарнир, один боковой горизонтальный и один в правой опоре). Число внутренних шарниров фермы $m = 4n + 4$.

© Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А., 2017

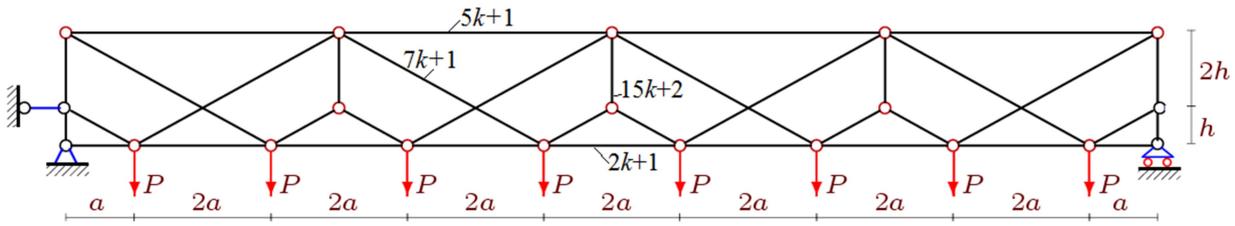


Рис. 1. Ферма при $n=2k=4$

Пронумеруем стержни и узлы фермы (рис. 2). Выберем начало координат в левой неподвижной опоре.

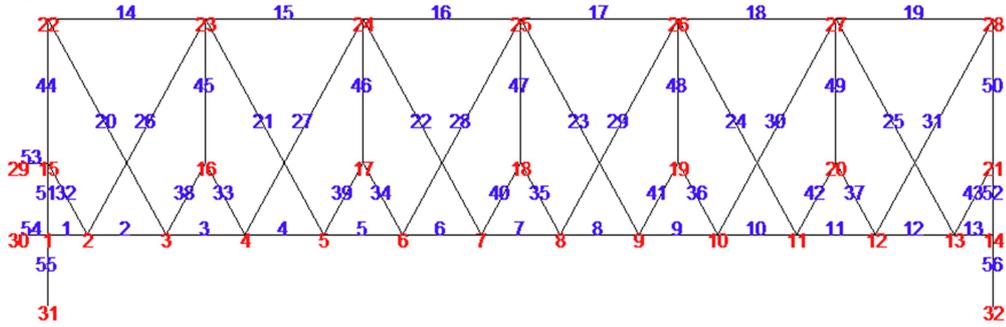


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=2k=6$

Используем программу [1] составления уравнений равновесия узлов фермы и нахождения усилий в стержнях, записанную на языке Maple. Для счета необходимо задать координаты узлов, по которым определяются направляющие косинусы усилий системы уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, y_1 = 0, x_{2n+2} = 4na, y_{2n+2} = 0, \\
 x_{i+1} &= 2ai - a, y_{i+1} = 0, i = 1, \dots, 2n, \\
 x_{i+2n+2} &= x_{i+3n+3} = 4a(i-1), \\
 y_{i+2n+2} &= h, y_{i+3n+3} = 3h, i = 1, \dots, n+1.
 \end{aligned}$$

Координаты опорных точек:

$$\begin{aligned}
 x_{m-3} &= -f, y_{m-3} = h, \\
 x_{m-2} &= -f, y_{m-2} = 0, \\
 x_{m-1} &= 0, y_{m-1} = -f, \\
 x_m &= x_{2n+2}, y_m = -f,
 \end{aligned}$$

где f – произвольное число. Предполагается, что опорные стержни жесткие, поэтому в формулу Максвелла – Мора длины этих стержней не войдут.

Структура решетки по аналогии с заданием графа в дискретной математике представлена векторами $\vec{V}_i, i = 1, \dots, n_s$, содержащими в своих компонентах номера шарниров по концам соответствующих стержней. Здесь первая компонента – номер шарнира в одном конце (условном начале) соответствующего стержня, вторая – номер шарнира в другом его конце. Выбор начала и конца стержня-вектора не влияет на результат счета и не определяет знак усилия. Приведем фрагмент программы на языке системы Maple, задающий структуру фермы:

```

> for i to 2*n+1 do N[i]:=[i,i+1];od;
> for i to n do
> N[i+2*n+1]:=[i+3*n+3,i+3*n+4];
> N[i+3*n+1]:=[2*i+1,i+3*n+3];
> N[i+4*n+1]:=[2*i,i+3*n+4];

```

```

> N[i+5*n+1]:= [2*i,i+2*n+2];
> N[i+6*n+1]:= [2*i+1,i+2*n+3];
> od:
> for i to n+1 do
> N[i+7*n+1]:= [i+2*n+2,i+3*n+3];
> od:
> N[8*n+3]:= [1,2*n+3];
> N[8*n+4]:= [2*n+2,3*n+3];

```

По данным координат и векторам структуры определяются длины стержней и проекции их векторных представлений для вычисления направляющих косинусов, составляющих матрицу уравнений равновесия:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Первый индекс в номере $V_{j,i}$ принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора \bar{V}_i , второй – номеру стержня. Матрица направляющих косинусов \mathbf{G} имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Усилия в стержнях определяются из решения системы уравнений, записанной в матричной форме:

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}. \quad (1)$$

Здесь $\bar{S} = \{S_1, \dots, S_{n_s}\}$ — вектор усилий в стержнях, $\bar{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, \dots, P_{x,n_s}, P_{y,n_s}\}$ - вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Для расчета прогиба фермы используем формулу Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено: $S_i^{(P)}$ - усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i - длины стержней, $S_i^{(1)}$ - усилия от единичной силы, приложенной к середине верхнего пояса. Пусть число панелей четное $n=2k$. В этом случае средний узел имеет номер $7k+4$ (рис. 2). Из анализа серии решений для ферм с различным числом панелей было замечено, что формула для прогиба имеет один и тот же вид:

$$EF\Delta = \frac{P(Aa^3 + Hh^3 + Cc^3)}{3h^2}.$$

Полученная последовательность 36, 504, 2484, 7776, 18900, 39096, 72324, 123264, 197316, 300600 коэффициентов при a^3 удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$A_k = 5A_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5}.$$

Для получения этого уравнения был привлечен специальный оператор **rgf_findrecur** пакета **genfunc** системы Maple. Для его работы требуется четное число членов последовательности. Другой оператор из ядра системы Maple находит решение рекуррентного уравнения $A_k = 6k^2(1 + 5k^2)$. Аналогично (но немного проще) определяются два других коэффициента: $H = 2k(9 + k + 5k^3)$, $C = k^2(11 + 10k^2)$.

Одновременно с определением прогиба в том же цикле по числу панелей в ферме можно вывести формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Однозначно положения этих стержней здесь найти нельзя. В зависимости от соотношения размеров имеем два варианта для усилий в максимально сжатых стержнях (см. рис. 1):

$$S_{5k+1}^{(P)} = -2k^2 Pa / h, S_{15k+2}^{(P)} = -2k^2 P.$$

Отсюда при $a > h$ расчет на устойчивость следует вести по усилию в среднем стержне верхнего пояса, при $a < h$ — по усилию в средней стойке фермы. Для растянутых стержней есть тоже два варианта:

$$S_{2k+1}^{(P)} = 2k^2 Pa / h, S_{7k+1}^{(P)} = (k^2 + 1) Pc / h.$$

Сравнивая две последние величины, получаем, что если $a / h > (k^2 + 1) / \sqrt{(3k^2 + 1)(k^2 - 1)}$, то усилие в среднем стержне нижнего пояса будет больше. Для $k > 1$ правая часть неравенства монотонно уменьшается с увеличением k от значения $5 / \sqrt{39} \approx 0,8$ до предельного значения $\sqrt{3} / 3 \approx 0,58$. Отсюда можно дать приближенную оценку ситуации, когда рассчитывать на предельное напряжение на растяжение нужно по среднему стержню с номером $2k+1$ в нижнем поясе: $a / h > 0,8$.

На рис. 3 отображены кривые безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta / (P_{sum} L)$, вычисленного при постоянной длине пролета фермы $L=4ak=40$ м и постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузки $P_{sum} = 4kP$.

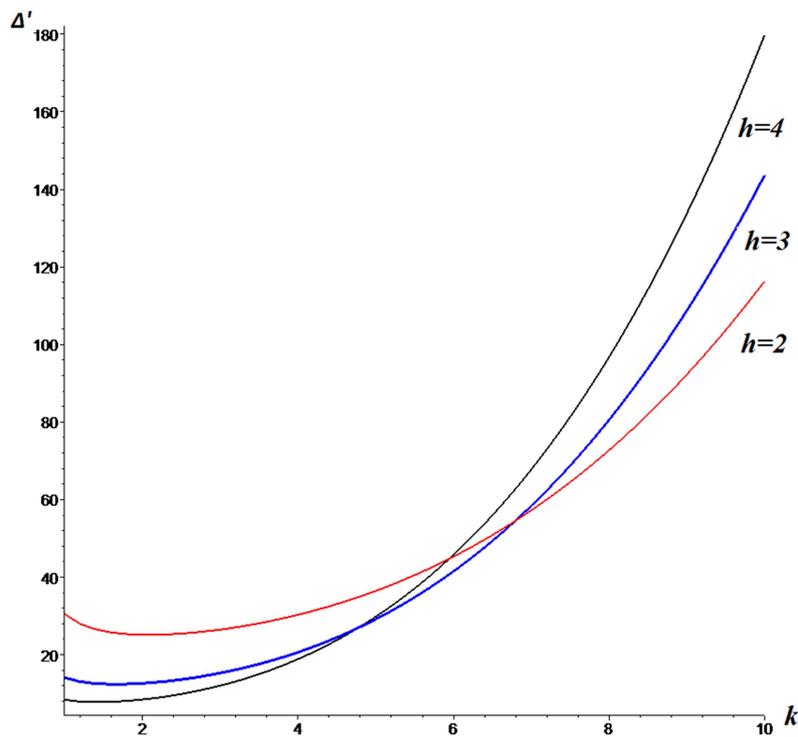


Рис. 3. Зависимость прогиба

Две особенности полученного решения обнаруживают эти кривые. Во-первых, на кривых имеются неявно выраженные минимумы, наиболее явные при малых высотах. Во-вторых, пересечение кривых указывает на возможные варианты выбора размеров конструкции при оптимизации веса и жесткости.

Формулы для прогиба плоских ферм различной структуры в аналитической форме на основе метода индукции при поддержке системы Maple выведены также в [2-4].

Библиографический список

1. Кирсанов, М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики/ М.Н. Кирсанов. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. - 512 с.
2. Кирсанов, М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы/ М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов// Строительная механика и расчеты. - 2017. - №2(271). - С. 4-10.
3. Тиньков, Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами/ Д.В. Тиньков// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М.: Инфра-М. - Т. 1. - 2015. - С. 52-56.
4. Тиньков, Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций/ Д.В. Тиньков// Инженерно-строительный журнал. - 2015. №5(57). - С. 66–73.

References

1. Kirsanov, M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems/ M.P. Kirsanov. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Kirsanov, M. N., Maslov, A.N. The formula for the deflection of multiple lattice beam truss calculation// Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). P. 4-10.
3. Tinkov, D. V. Analysis of the influence of fixation conditions on the deflection of the girder beam flat with downward braces// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015. Vol. 1. P. 52-56.
4. Tinkov, D.V. Comparison analysis of analytical solutions of the problem about truss structures deflection/ D.V.Tinkov// Civil Engineering journal. - 2015. №5(57). - P. 66–73.

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Д-р физ.-мат. наук, проф.
М.Н. Кирсанов
Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14
e-mail: c216@ya.ru

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Студентка
А.С. Горбунова
Россия, г. Москва, тел.: +7(926)924-18-78
e-mail: alisa_96@bk.ru

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Студентка
В.А. Лепетюха
Россия, г. Москва, тел.: +7(916)649-18-90
e-mail: varya.lepetyuha@mail.ru

National Research University "MPEI"
Dr. of Physics and Mathematics, Professor
M. N. Kirsanov
Moscow, Russia, tel.: +7(495)3627314
e-mail: c216@ya.ru

National Research University "MPEI",
Student
A.S. Gorbunova
Moscow, Russia, tel.: +7(926)9241878
e-mail: alisa_96@bk.ru

National Research University "MPEI"
Student
V.A. Lepetyukha
Moscow, Russia, tel.: +7(916)6491890
e-mail: varya.lepetyuha@mail.ru

А.С. Горбунова, М.Н. Кирсанов, В.А. Лепетюха

РАСЧЕТ ПРОГИБА СИММЕТРИЧНОЙ ФЕРМЫ С РЕШЕТКОЙ "STAR" В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Предлагается схема декоративной решетки плоской статически определимой балочной фермы регулярного типа. Приводится индуктивный вывод аналитических зависимостей прогиба и усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях от числа панелей. Дан алгоритм составления монтажной схемы фермы, включающей пересечения и изгиб стержней.

Ключевые слова: ферма с решеткой "STAR", прогиб фермы, метод индукции, хроматический индекс фермы.

A.S. Gorbunova, M.N. Kirsanov, V.A. Lepetyucha

DEFLECTION CALCULATION OF SYMMETRICAL GIRDER WITH «STAR» LATTICE IN ANALYTICAL FORM

The diagram of decorated lattice of plane statically indeterminable beam truss of array type is suggested. The inductive conclusion of analytical dependences of deflections and stresses in the most compressed and stretched rods on plane numbers are given. Scheme construction algorithm of truss assembly excluding crossing and rod deflection is presented in the paper.

Key words: truss with lattice "STAR", truss deflection, induction method, chromatic truss index.

Как правило, решетка ферменных конструкций проектируется, исходя из требований жесткости и прочности конструкции. В тех же случаях, когда ферма является частью архитектурной композиции или играет отдельную декоративную роль, необходимо учесть и рисунок решетки. Один из вариантов такой решетки в виде пятиконечных звезд предлагается на рис. 1.

Выведем формулу для зависимости прогиба фермы от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Воспользуемся разработанным ранее методом индукции [1] и программой [2] расчета усилий, написанной в системе символьной математики Maple.

© Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А., 2017

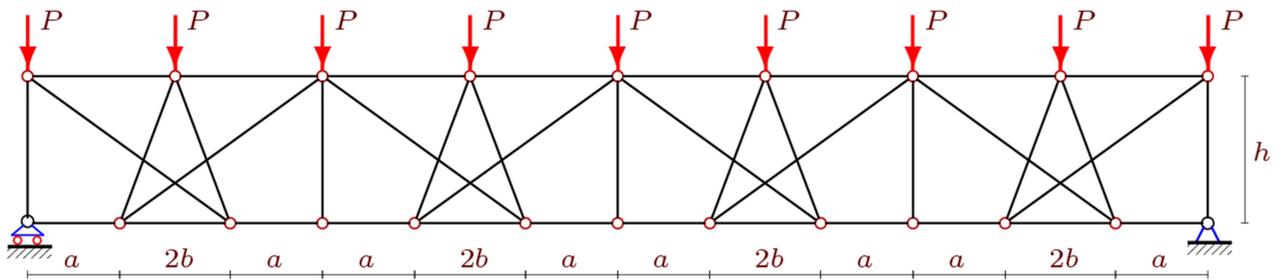


Рис. 1. Ферма $n=2k=4$

Ввод данных в программу начинается с нумерации узлов и стержней, указания координат и порядка соединения узлов (шарниров) и стержней (рис. 2). Ферма с n панелями по нижнему поясу содержит $m=10n+4$ стержней вместе с тремя опорными стержнями, моделирующими левый подвижный опорный шарнир и правый неподвижный. Рассмотрим случай четного числа панелей $n=2k$.

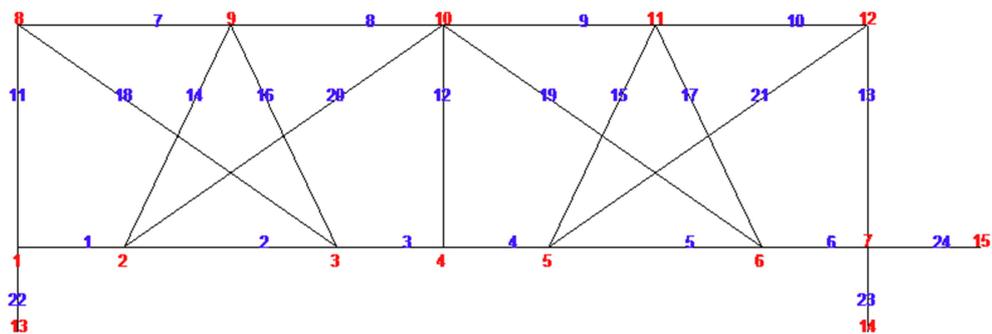


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n=2k=2$

Прогиб. Расчет усилий в стержнях производится методом вырезания узлов. Для вычисления прогиба готовятся два решения в символьной форме: усилия от нагрузки и от единичной силы, приложенной к узлу $3k+1$. Для получения аналитического решения воспользуемся системой компьютерной математики Maple и формулой Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,P} S_{i,1} l_i}{EF},$$

где $S_{i,P}$ – усилие в стержне i от действия внешней нагрузки, $S_{i,1}$ – усилие в стержне i от действия единичной силы, приложенной в середине пролета к узлу нижнего пояса по направлению перемещения, EF – жесткость всех стержней, l_i – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням (опорные стержни приняты жесткими). Рассмотрен случай $b = a$. В результате оказывается, что для любых значений k решение имеет один и тот же вид:

$$EF\Delta = (A_k a^3 + H_k h^3 + C_k (c^3 + f^3)) / (2h^2),$$

где $f = \sqrt{9a^2 + h^2}$; $c = \sqrt{b^2 + h^2}$. Неизменность вида полученной зависимости есть следствие регулярности конструкции. Находим последовательность коэффициентов при a^3 : 104, 1696, 8616, 27264, 66600, 138144, 255976, 436736, 699624, 1066400. Для выявления закономерности образования членов этой последовательности оказался достаточным расчет десяти ферм с последовательно возрастающим числом панелей. Оператор **rgf_findrecur** системы Maple по

данным этой последовательности дает соответствующее однородное рекуррентное уравнение пятого порядка:

$$A_k = 5A_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5},$$

решение которого возвращает оператор **rsolve** и имеет полиномиальный вид:

$$A_k = 8k^2(40k^2 - 1)/3.$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты: $H_k = 4k+1$, $C_k = 4k^2$.

На рис. 3 даны кривые для безразмерного прогиба фермы $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$, где зафиксирована суммарная нагрузка на ферму $P_0 = 1/(4k+1)$ и длина половины пролета $L = 4ka$. Кривые зависимости прогиба при разных высотах изображены на рис. 2 при $L=20$ м и обнаруживают явно выраженные минимумы, позволяющие оптимизировать конструкцию по жесткости.

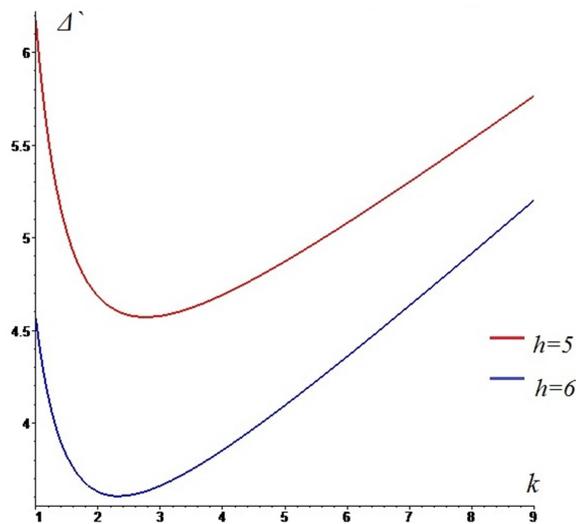


Рис. 3. График зависимости прогиба от числа панелей

Усилия в критических стержнях. Для оценки прочности и устойчивости фермы требуются выражения для усилий в наиболее растянутых и наиболее сжатых элементах конструкции. Очевидно, это стержни в середине нижнего и верхнего пояса соответственно. Методом индукции получаем формулы для усилий в нижнем поясе:

$$S_{3k,P} = 4ak^2 P / h, \quad S_{3k-1,P} = (4k^2 - 3)aP / h.$$

Заметим, что если выражение для $S_{3k,P}$ можно получить непосредственно методом сечения, то формулу для $S_{3k-1,P}$ легче вывести методом индукции. Усилия в верхнем поясе:

$$S_{8k,P} = -(8k^2 - 3)aP / (2h), \quad S_{8k-1,P} = -(8k^2 + 1)aP / (2h).$$

Очевидно, что при такой нагрузке наиболее сжатый стержень будет не на середине верхнего пояса, а рядом с ним, т.к. $|S_{8k-1,P}| > |S_{8k,P}|$. Наиболее растянутый стержень, как и ожидалось, находится в середине нижнего пояса.

Монтажная схема. Ферма имеет пересекающиеся стержни решетки. В случае узловых соединений стержней внахлест необходимо решить задачу монтажа конструкции [3]. Для того, чтобы избежать нежелательного изгиба стержней фермы, при ее монтаже требуется расположить стержни в разных уровнях так, чтобы в узлах были соединены стержни разных уровней. Это в точности соответствует задаче о реберной раскраске графа. Кроме этого, нужно учесть и расположение пересекающихся стержней решетки в разных параллельных плоскостях. Для решения этой технологической задачи предлагается алгоритм, реализованный в системе Maple. Приведем код соответствующей программы на примере фермы с $k=1$ (см. рис. 2). Ребра графа фермы (стержни) записываются в список ребер:

```
> Ed:={3,8},{6,10},
      {3,9}, {6,11},
      {2,9}, {5,11},
      {2,10}, {5,12},
      {1,2,3,4,5,6,7},{8,9,10,11,12},{1,8},{4,10},{7,12}:
```

В начало списка внесены группы пересекающихся стержней решетки. Стержни поясов объединены в отдельные ребра так, что полученный граф становится *суперграфом*. Таким образом, алгоритм позволяет решать задачу монтажа с учетом длинномерных элементов.

```
> M:=nops (Ed) :# число ребер
```

Создаются пустые графы, в которых размещаются ребра одного уровня:

```
> for i to 10 do S[i]:=[]: od:
```

Пересекающиеся стержни заранее располагаются в разные уровни. Эта операция выполняется вручную:

```
> S[1]:={3,8}, {6,10}:#решетка 1
> S[2]:={3,9}, {6,11}:#решетка 2
> S[3]:={2,9}, {5,11}:#решетка 3
> S[4]:={2,10},{5,12}:#решетка 4
```

Вычисляется номер ребра, начиная с которого производится размещение по уровням:

```
> K:=add (nops (S[k]), k=1..4)+1:
```

Цикл по ребрам:

```
> for k from K to M do
```

Цикл по уровням (уровни берутся все, включая и уровни S[1]-S[4], зарезервированные для пересекающихся стержней):

```
> for i to 10 do
> m:=nops (Ed[k]);
> for j to m do
> if evalb (Ed[k][j] in map (op,S[i])) then b[j]:=0:
else b[j]:=1:fi;
> od;
> us:=mul (b[i],i=1..m);
> if us=1 then S[i]:={op(S[i])} union {Ed[k]}; break; fi; od: od:
```

Список уровней:

```
> for i to 10 while nops (S[i])<>0 do i,S[i];od;
```

Результат работы программы:

1, {{3, 8}, {6, 10}, {7, 12}}
2, {{1, 8}, {3, 9}, {4, 10}, {6, 11}}
3, [{2, 9}, {5, 11}]
4, [{2, 10}, {5, 12}]
5, {{8, 9, 10, 11, 12}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}}

На рис. 4 представлена полученная монтажная схема. Получено пять уровней. По аналогии с терминологией теории графов это число можно назвать *хроматическим индексом фермы*. В некоторых узлах для соединения стержней требуются дополнительные шайбы равные по толщине стержням. Это узлы 2 и 5. Заметим, что эффективность алгоритма растет с увеличением числа панелей. В системе Maple есть оператор **EdgeChromaticNumber** пакета GraphTheory для решения задачи о реберной раскраске. Однако он не позволяет рассчитывать гиперграфы и допускает пересечение ребер.

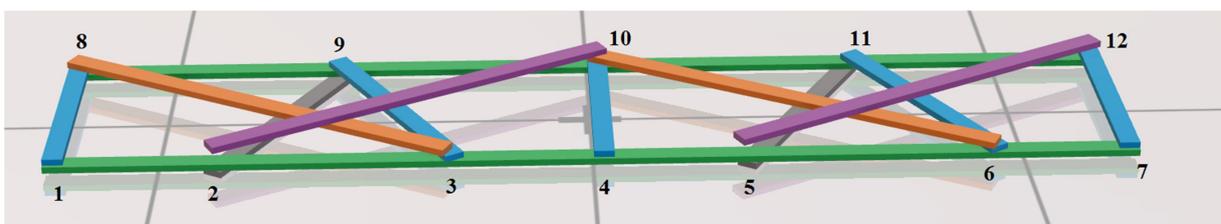


Рис. 4. Монтажная схема

Аналогичные формулы для прогиба плоских ферм методом индукции с применением системы символьной математики получены в работах [1,4,5]. Сравнительный асимптотический анализ аналитических формул в аналогичных постановках дан в [6].

Библиографический список

1. Кирсанов, М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы/ М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов//Строительная механика и расчет сооружений. - 2017. 2(271). - С. 4-10.
2. Кирсанов, М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики/ М.Н. Кирсанов. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. - 512 с.
3. Kirsanov, M.N. Static analysis and mounting diagram of flat truss. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova 5(39) (2016): 61-68. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68 (in Russian).

4. Кийко, Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки/ Л.К. Кийко // Научный вестник.- 2016. - № 1 (7). - С. 247-254.
5. Tinkov, D.V. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials/ D.V. Tinkov, A.A. Safonov //Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017, Vol. 46, No. 1, pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
6. Тиньков, Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций/ Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный нал. - 2015. - №5(57). - С. 66–73.

References

1. Kirsanov, M. N., Maslov A.N. The formula for calculation of the multiple lattice beam truss deflection // Structural mechanics and design of structures. 2017. 2(271). P. 4-10.
2. Kirsanov, M.N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems/ M.N. Kirsanov.-SP.: Pub. House LAN, 2012.- 512 p.
3. Kirsanov, M.N. Static analysis and mounting diagram of flat truss. Bulletin of the state university of sea and river fleet by the name of Admiral S.O. Makarov 5(39) (2016): 61-68. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68 (in Russian).
4. Kiyko, L. K. Analytical evaluation of deflection of arched trusses under wind load /L.K. Kiyko// Scientific Bulletin.- 2016. -No.1 (7).- P. 247-254.
5. Tinkov, D.V. Design optimization of truss bridge structures of composite materials. / D.V. Tinkov, A.A. Safonov //Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017, Vol. 46, No. 1. P. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
6. Tinkov, D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection/ D.V. Tinkov// Civil Engineering journal. 2015. No.5 (57). P. 66–73.

УДК: 539.374

*Воронежский государственный
технический университет
Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры
теоретической и прикладной механики
В.Д. Коробкин
Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры
теоретической и прикладной механики
М.Г. Ордян
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)2764006
e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru, omg84@mail.ru*

*Voronezh State Technical University
Dr. of Physics and Mathematics, Professor of
department of Theoretical and Applied
Mechanics
V.D. Korobkin
PhD in Physics and Mathematics, Associate
professor of Theoretical and Applied Mechanics
department
M.G. Ordyan
Voronezh, Russia, tel. +(473)2764006
e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru, omg84@mail.ru*

В.Д. Коробкин, М.Г. Ордян

ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассмотрен вопрос построения непрерывного поля скоростей перемещений при выдавливании пластического материала через матрицу с гладким профилем. Составлено дифференциальное уравнение и определены первые интегралы. Используя граничные условия на входе материала в пластическую область, решена задача Коши и определены скорости перемещений.

Ключевые слова: пластичность, технологические задачи, поле скоростей перемещений.

V.D. Korobkin, M.G. Ordyan

CONSTRUCTION OF CONTINUOUS FIELD OF SPEEDS FOR A ONE AXISYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF PLASTICITY

The problem of displacements rates continuous field construction while extruding plastic material through a matrix with a smooth profile is considered. A differential equation is constructed and the first integrals are determined. Using the boundary conditions on the material input into plastic area the Cauchy problem is solved and the displacement rates are determined.

Key words: plasticity, technological problems, the field of displacement rates.

Вопрос о непрерывных полях скоростей перемещений возник в связи с тем, что, как показано в работе [1], в упрочняющихся материалах нет разрыва скоростей перемещений. При деформировании упрочняющихся материалов, как правило, учитывают влияния, неразрывности в среднем. Используют решение для жестко-пластического материала и считают, что кинематика мало отличается. Иногда, как например, в работе [2], вместо поверхности разрыва вводят слой, устремляя его толщину к нулю, и фактический получают поверхность разрыва скоростей перемещений. Течение жестко-пластического материала подробно изучено классиками теории пластичности и обработки металлов давлением. Наша задача заключается в следующем: используя метод, предложенный в работе [3], определить непрерывное поле скоростей перемещений для некоторого профиля матрицы.

1. Рассматривается пространственный осесимметричный профиль (рис. 1). Задача решается в цилиндрических координатах z , θ , r .

© Коробкин В.Д., Ордян М.Г., 2017

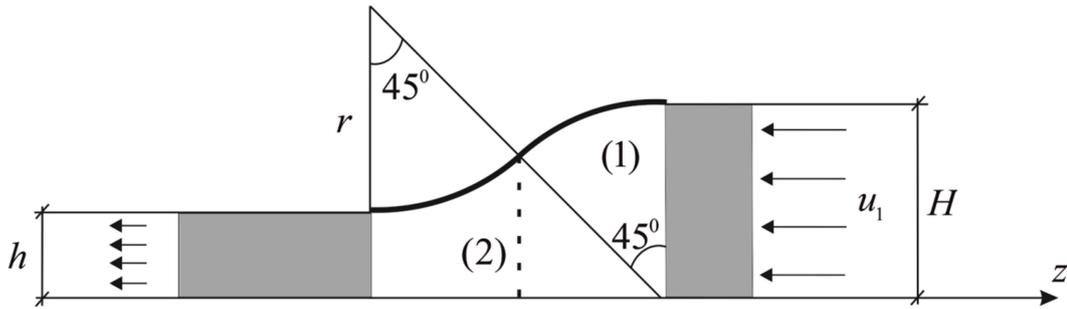


Рис. 1. Схема пластического течения.

Пусть уравнение профиля матрицы задано в виде

$$r = f(z). \quad (1.1)$$

Будем считать, что траектория движения точек задаются следующим образом:

$$r = Cf(z), \quad (1.2)$$

где C – постоянная, которая изменяется в пределах от нуля до 1.

Дифференциальные уравнения движения траекторий точек

$$\frac{dr}{dz} = Cf'(z). \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай установившегося процесса:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{u_r}{u_z}. \quad (1.4)$$

Используя выражения (1.2), (1.3) и подставляя в уравнение (1.4), получим следующее соотношение:

$$\frac{rf'(z)}{f(z)} = \frac{u_r}{u_z}. \quad (1.5)$$

Условие несжимаемости в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) в условия несжимаемости (1.6), получим

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2f'(z)}{f(z)} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

2. Рассмотрим случай, когда компоненты скорости u_z зависят только от координаты z .

Уравнение для определения u_z имеет вид

$$\frac{du_z}{dz} + u_z \frac{2f'(z)}{f(z)} = 0. \quad (2.1)$$

Решая уравнение (2.1), имеем

$$u_z f^2(z) = C_1. \quad (2.2)$$

Используя граничное условие при $z = 0$; $u_z = u_1$; $f(0) = H$ и полагая $H = 1$, получим

$$u_z = \frac{u_1}{f^2(z)},$$

где $f^2(z) = 1 - z^2$.

В итоге имеем

$$u_z = \frac{u_1}{1-z^2}; u_r = -\frac{u_1 r z}{(1-z^2)^2}. \quad (2.3)$$

Таким образом, компоненты скорости деформации

$$\varepsilon_z = \frac{2zu_1}{(1-z^2)^2}; \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{u_1 z}{(1-z^2)}; \gamma_{rz} = -u_1 \left(\frac{1+3z^2}{(1-z^2)^3} \right) r. \quad (2.4)$$

Аналогичным образом можно определить компоненты скорости деформаций ε_z , ε_r , ε_θ во второй зоне пластической деформации.

Вывод

При определении удельного усилия прессования полученные результаты для непрерывных полей скоростей перемещений позволяют исключить мощности на поверхностных разрывах скоростей жесткой и пластической областей.

Библиографический список

1. Ивлев, Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела/ Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
2. Коробкин, В.Д. Диссипация мощности на поверхностях разрыва в упрочняющемся материале/ В.Д. Коробкин, П.Д. Чудаков // Изв. АН СССР, МТТ. – 1969. – № 3. – С. 158 – 161.
3. Коробкин В. Д. Построение непрерывных полей скоростей по линиям тока / В.Д. Коробкин// Изв. вузов, Машиностроение. – 1973. – № 9. – С. 28 – 31.

References

1. Ivlev, D.D. Theory of strengthen elastic body/ D.D. Ivlev, G.I. Bykovtsev. – M.: Nauka, 1971. – 232 p.
2. Korobkin, V.D. Power dissipation on the rapture surface in reinforcing material/ V.D. Korobkin, P.D. Chudakov //News of USSR AS, MS. – 1969. – № 3. – P. 158 – 161.
3. Korobkin, V.D. Rates continuous field construction on current line. / V.D. Korobkin// News of universities, Mechanical engineering. – 1973. – № 9. – P. 28 – 31.

*Воронежский государственный
технический университет
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
С.В. Ефрюшин
Аспирант кафедры строительной механики
А.В. Бурлаков
Россия, г. Воронеж, тел.: +79103470895
e-mail: gefe92@mail.ru*

*Voronezh State Technical University
PhD of Tech. Sc, Associate professor of Structural
Mechanics department
S.V. Efyushin
Postgraduate of Structural Mechanics department
A.V. Burlakov
Russia, Voronezh, tel. +79103470895
e-mail: gefe92@mail.ru*

С.В. Ефрюшин, А.В. Бурлаков

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРЕДНАПРЯЖЕНИЯ В ОТТЯЖКАХ МАЧТЫ НА ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

Приводятся результаты динамического расчета на свободные колебания существующей телевизионной мачты на оттяжках высотой 331,5 метра.

Осуществлена разработка линеаризованной расчетной схемы мачты и ее реализация. Динамический расчет мачты проведен в программном комплексе «MIDAS CIVIL». Приведены результаты модального анализа: спектр собственных частот для первых 11 форм собственных колебаний, графическое изображение форм собственных колебаний мачты.

Рассматривается один из способов линеаризации расчетной схемы мачты, обладающей геометрической нелинейностью для последующего динамического расчета на свободные колебания. Также осуществляется исследование влияния преднапряжения в оттяжках мачты на собственные формы колебаний конструкции.

Ключевые слова: телевизионная мачта, геометрическая нелинейность, линеаризация, свободные колебания.

S.V. Efyushin, A.V. Burlakov

FREE OSCILLATIONS OF THE MAST. STUDY OF THE EFFECT OF PRESTRESSING IN THE BRACES OF THE MAST ON THEIR OWN MODE SHAPES OF THE STRUCTURE.

The results of dynamic analysis on the free oscillations of the existing television guyed mast of 331.5 meters height is under consideration.

The development of mast liberalized design model and its implementation was realized. The mast design was carried out in the program complex «MIDAS CIVIL». The results of the modal analysis: spectrum of natural frequencies for the first 11 natural oscillations forms, graphic image forms of the mast self-excited vibrations.

The paper deals with one of the methods of linearization mast design scheme, which has geometric nonlinearity for the subsequent dynamic analysis on the free oscillations. Also it carried out a study into the effect of prestressing guyed mast on their own forms of vibrations of the structure.

Key words: television mast, geometric nonlinearity, linearization, free oscillations.

В качестве объекта исследования выбрана реально существующая конструкция мачты областного радиотелевизионного передающего центра «Бобровская РТС» высотой 331,5 м.

Конструктивная схема мачты представляет собой ствол, шарнирно опирающийся на фундамент, который подкреплён преднапряжёнными оттяжками из стального каната, расположенными полярно симметрично к стволу.

Ствол мачты – сквозная четырёхгранная конструкция с поясами и распорками трубчатого сечения и крестовыми раскосами из круглой стали (в секциях, где крепятся ванты, раскосы из уголков). Ствол набирается из секций длиной 6,75 м, шириной 3,54 м.

Для поясов используется труба диаметром 273 мм (в верхней секции на отметке 302,25 м, где крепятся ванты 325 мм), распорки диаметром 121 мм, раскосы диаметром 42 мм и уголок 75x75x8.

Оттяжки из стального каната диаметром 45,5 мм и 52 мм крепятся к стволу на отметках 72,75 м, 147,00 м, 221,25 м, 302,25 м, 331,50 м, а к анкерным фундаментам - на расстоянии 128,56 м, 191,28 м, 259,20 м (рис. 1).

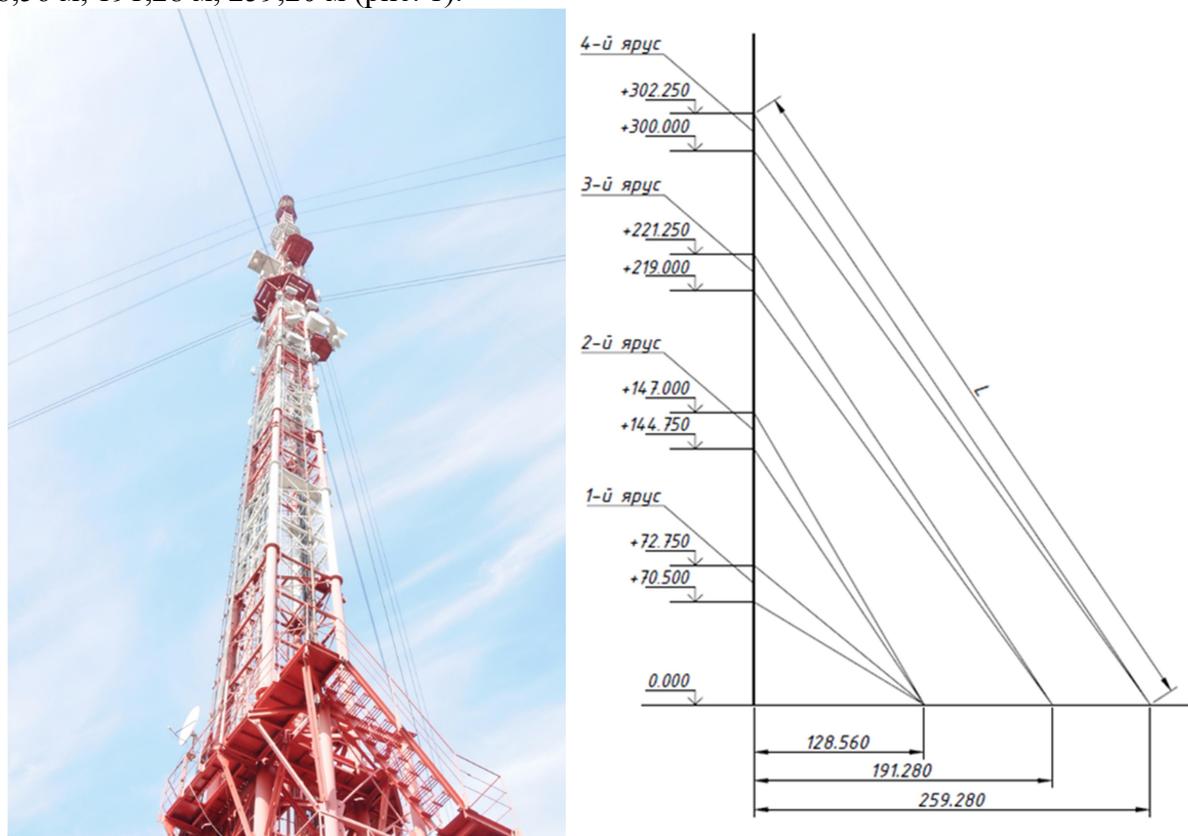


Рис. 1. Общий вид и схема мачты

Расчет свободных колебаний проводится для анализа динамических характеристик конструкций, которые включают в себя формы колебаний, собственные периоды колебаний (собственные частоты). Динамические характеристики определяются массой и жесткостью конструкции.

Определение форм свободных колебаний системы и частот имеет смысл в линейной задаче. В нелинейных задачах говорить о разложении движения системы по формам свободных колебаний в окрестности изучаемого равновесного положения можно лишь при линеаризации поведения системы в этой окрестности, используя динамическую модель линеаризованной системы [1]. Это конструкция, работающая в геометрически линейной подстановке, но учитывающая достигнутый уровень усилий в вантах в состоянии, предшествующем линеаризации.

Конструктивная схема мачты за счет наличия в ней вант обладает геометрической нелинейностью. Показателем геометрической нелинейности служит ситуация, при которой перемещения стержневой системы не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с размерами сооружения.

Для получения линеаризованной системы был использован способ, который предусматривает замену оттяжек ферменными стержнями (работающими только на сжатие, растяжение) с вычислением их приведенных жесткостей [2], определяемых по формуле

$$\bar{EA} = \frac{1}{\frac{1}{EA} + \frac{Dy + Dz}{LH^3}}$$

где \bar{EA} - приведенная жесткость, EA - первоначальное значение жесткости
 L - длина ванты, H - достигнутый уровень усилия в вантах в состоянии, предшествующем линеаризации, D_y , D_z - величины интегралов в случае нагрузок, равномерно распределенных по хорде вантового элемента:

$$D_y = \int_0^L Q_y^2(x) dx = \frac{q_y^2 \cdot L^3}{12}, \quad D_z = \int_0^L Q_z^2(x) dx = \frac{q_z^2 \cdot L^3}{12},$$

Задание жесткости реализуется заданием новой площади поперечного сечения, которая представлена в последнем столбце расчетной табл.1.

Таблица 1

Линеаризация расчетной схемы

Базовое натяжение (H0)													
№ яруса вант	E кН/м2	D мм	A м2	Вес м.п. оттяжек кН/м	Длина ванты L м	Усилие в вантах H кН	EA кН	Dx	Dy	EАпр кН	Апр м2	Радиус приведенного сечения (мм)	D (мм)
1	1,47E+08	45,5	0,000990	0,0763	139,23	41,28	145530,00	1310,19	0,00	7109,94	0,000048	3,92	7,85
2				0,0763	187,77	99,23	145530,00	3213,52	0,00	41004,74	0,000279	9,43	18,85
3		52	0,001300	0,1003	285,79	120,224	191100,00	19586,44	0,00	22384,71	0,000152	6,96	13,93
4				0,1003	391,54	210,38	191100,00	50370,66	0,00	52496,44	0,000357	10,66	21,33
1.3H0													
1	1,47E+08	45,5	0,000990	0,0763	139,23	51,7887	145530,00	1310,19	0,00	13401,39	0,000091	5,39	10,78
2				0,0763	187,77	129,541	145530,00	3213,52	0,00	67822,06	0,000461	12,12	24,24
3		52	0,001300	0,1003	285,79	155,63	191100,00	19586,44	0,00	42708,37	0,000291	9,62	19,24
4				0,1003	391,54	272,821	191100,00	50370,66	0,00	86444,52	0,000588	13,69	27,37
0.7H0													
1	1,47E+08	45,5	0,000990	0,0763	139,23	35,75	145530,00	1310,19	0,00	4698,67	0,000032	3,19	6,38
2				0,0763	187,77	69,93	145530,00	3213,52	0,00	17569,18	0,000120	6,17	12,34
3		52	0,001300	0,1003	285,79	89,03	191100,00	19586,44	0,00	9770,17	0,000066	4,60	9,20
4				0,1003	391,54	150,622	191100,00	50370,66	0,00	23320,90	0,000159	7,11	14,22
0.5H0													
1	1,47E+08	45,5	0,000990	0,0763	139,23	30,64	145530,00	1310,19	0,00	2993,91	0,000020	2,55	5,09
2				0,0763	187,77	51,3	145530,00	3213,52	0,00	7482,79	0,000051	4,03	8,05
3		52	0,001300	0,1003	285,79	69,09	191100,00	19586,44	0,00	4693,85	0,000032	3,19	6,38
4				0,1003	391,54	111,693	191100,00	50370,66	0,00	10250,33	0,000070	4,71	9,42

0.01H0													
1	1,47E+08	45,5	0,000990	0,0763	139,23	16,0243	145530,00	1310,19	0,00	435,95	0,000003	0,97	1,94
2				0,0763	187,77	15,6764	145530,00	3213,52	0,00	224,75	0,000002	0,70	1,40
3		52	0,001300	0,1003	285,79	27,7244	191100,00	19586,44	0,00	310,43	0,000002	0,82	1,64
4				0,1003	391,54	35,0584	191100,00	50370,66	0,00	334,36	0,000002	0,85	1,70

Для проведения исследования влияния преднапряжения в оттяжках на собственные формы колебаний выполнялась линеаризация 5 вариантов преднапряжения в загрузении «Собственный вес + натяжение вант». Определение преднапряжения и принятые варианты показаны в табл. 2.

Таблица 2

Варианты преднапряжения вант

ярус	D каната	канат	L(м)	sina	угол наклона	y*A	H0=(y*A*sina*L)/(8*fo/L) (кН)	H0(ф) кН	Варианты преднапряжения H*			
									1.3	0.7	0.5	0.01
1	45.5	1	138.355	0.50956	30.6	0.0764	37.4	40	52	28	20	0.4
		2	140.134	0.51915	31.3	0.0764	38.6					
2		3	187.893	0.77039	50.4	0.1004	100.9	100	130	70	50	1
		4	190.053	0.77347	50.7	0.1004	102.5					
3	52	5	286.068	0.76555	50.0	0.0764	116.2	120	156	84	60	1.2
		6	288.240	0.76759	50.2	0.0764	117.4					
4		7	391.826	0.76565	50.0	0.1004	209.2	210	273	147	105	2.1
		8	393.898	0.76733	50.1	0.1004	210.8					
Провисание $f_0/L=y*A*sina*L/(8*H_0)$ [м]								0.018	0.014	0.026	0.036	1.800

Расчет свободных колебаний выполнялся в программном комплексе Midas Civil 2016. Для поиска частот и форм собственных колебаний был использован метод Ланшоца, позволяющий провести анализ в заданном частотном диапазоне и указать границы этого диапазона от 0,0 до 3,4 Гц. Инерционные характеристики заданы пересчетом в массы собственного веса. Фрагменты расчётной схемы приведены на рис. 2.

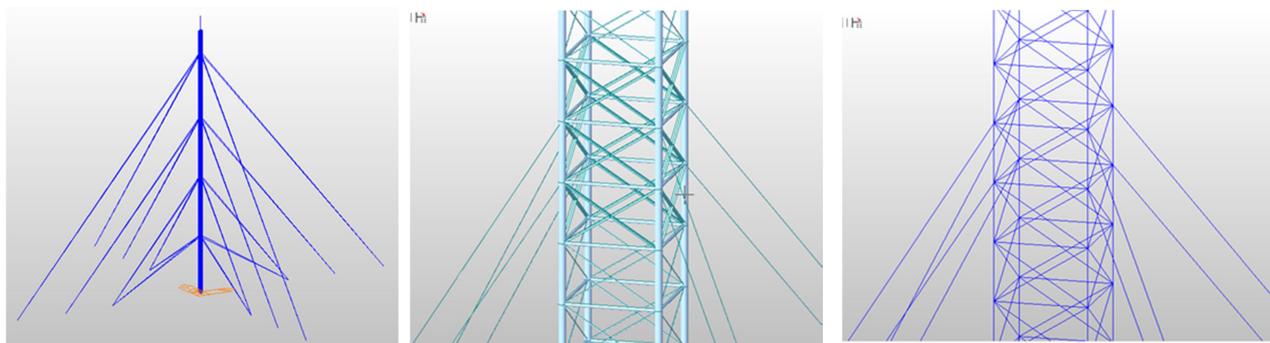


Рис. 2. Расчётная схема в Midas Civil.
Общее число КЭ 3573. Общее число узлов 1195

Результаты расчета собственных частот и форм при различных уровнях преднапряжения оттяжек приведены в табл. 3 и на рис. 3, 4.

Таблица 3

Результаты расчета собственных частот мачты

Форма колебаний	0.01		0.5		0.7		Базовое		1.3	
	Частота	Период								
	(Гц)	(с)								
1	0.034179	29.2576	0.109036	9.171288	0.156937	6.371965	0.223593	4.472409	0.274924	3.637365
2	0.034179	29.2576	0.109036	9.171288	0.156937	6.371965	0.223593	4.472409	0.274924	3.637365
3	0.1816	5.506608	0.225091	4.442652	0.269427	3.711582	0.346823	2.883317	0.421035	2.375102
4	0.1816	5.506608	0.225091	4.442652	0.269427	3.711582	0.346823	2.883317	0.421035	2.375102
5	0.485446	2.059961	0.490622	2.03823	0.494539	2.022084	0.500238	1.99905	0.505754	1.977248
6	0.485446	2.059961	0.490622	2.03823	0.494539	2.022084	0.500238	1.99905	0.505754	1.977248

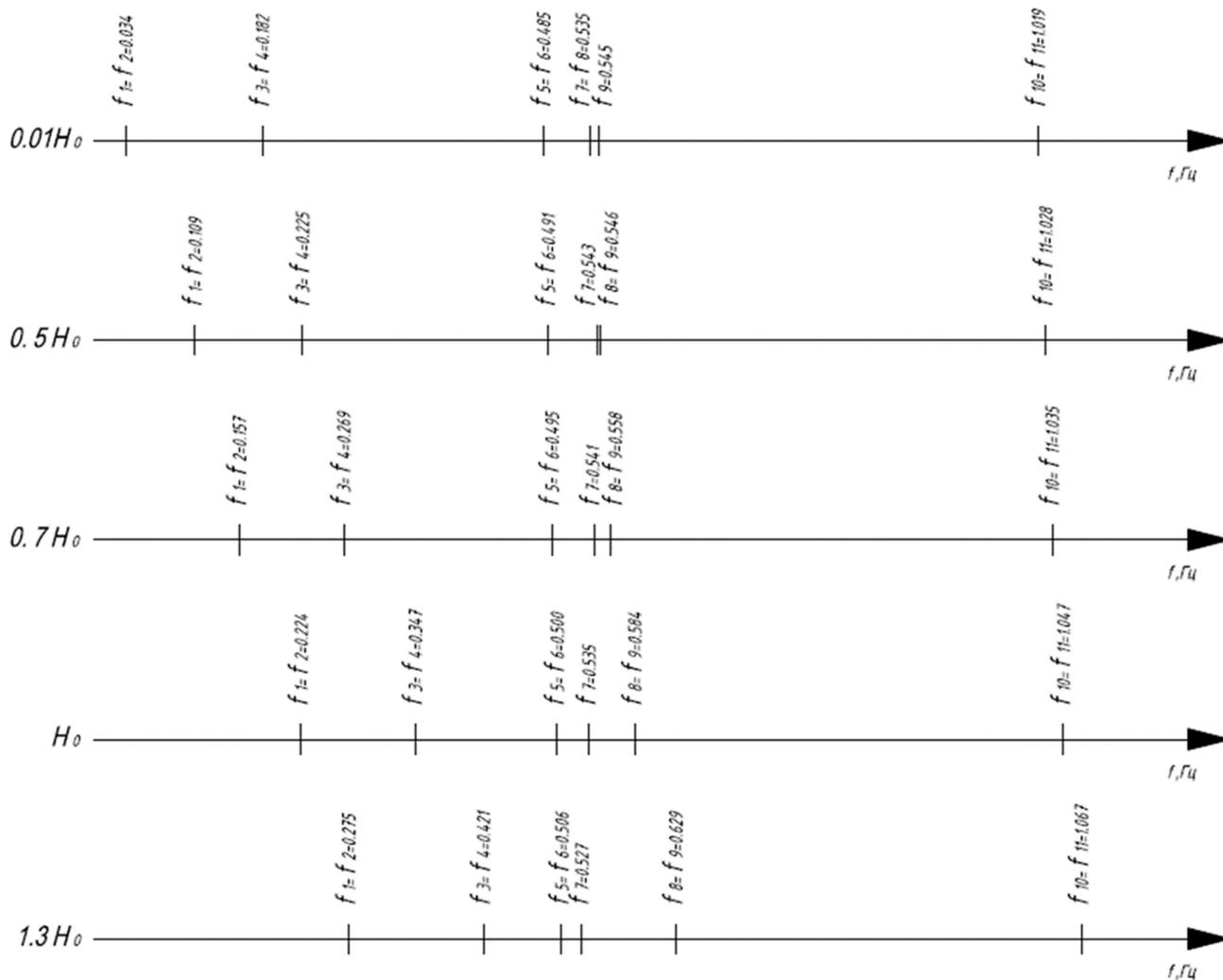
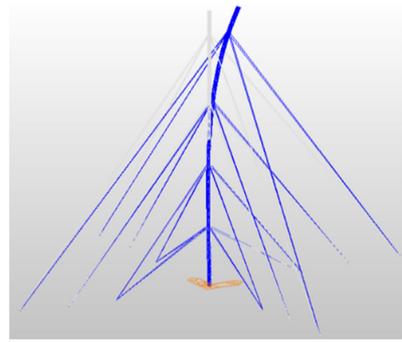
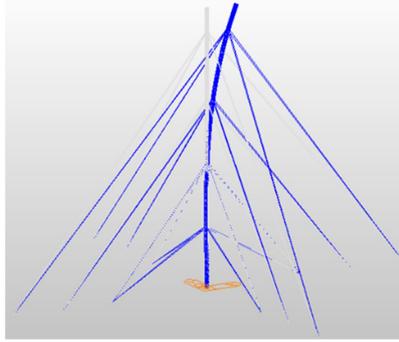
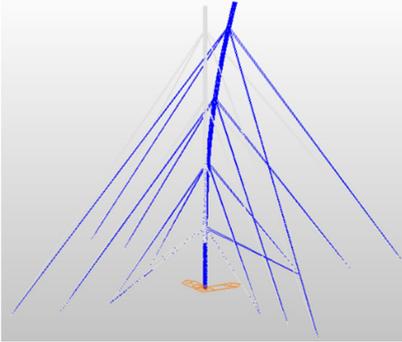


Рис. 3. Спектр собственных частот для первых 11 форм собственных колебаний

1, 2 форма собственных колебаний

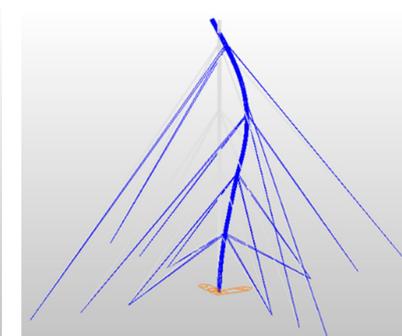
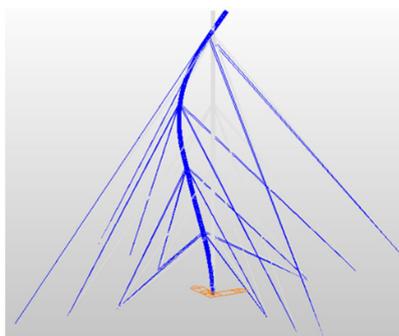
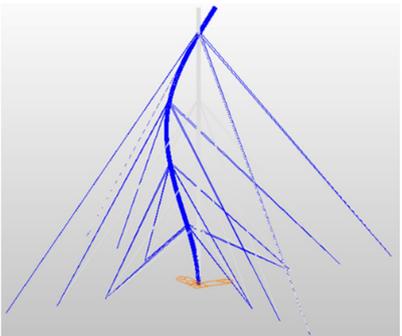


0.7H₀

H₀

1.3H₀

3, 4 форма собственных колебаний

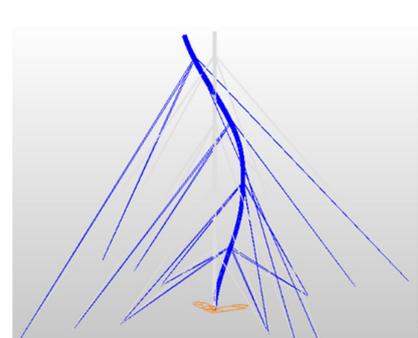
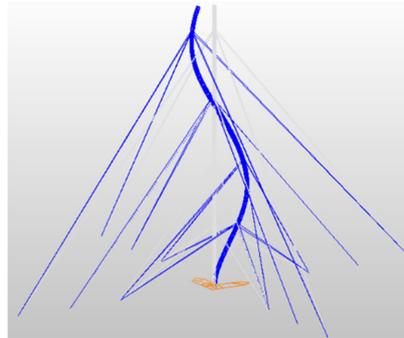
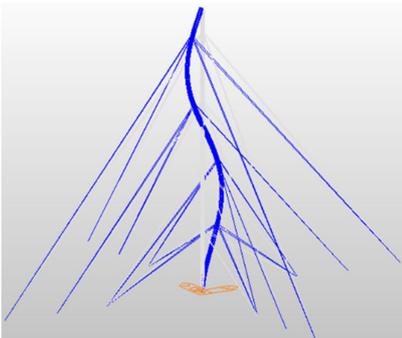


0.7H₀

H₀

1.3H₀

5, 6 форма собственных колебаний



0.7H₀

H₀

1.3H₀

7 форма собственных колебаний
Для всех вариантов преднапряжения

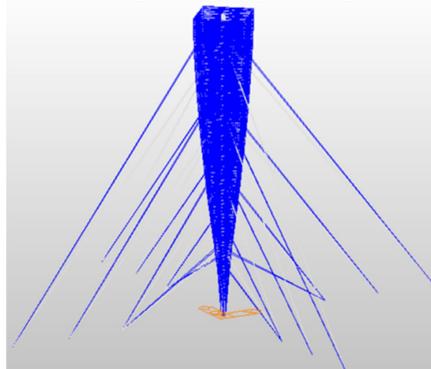


Рис. 4. Формы собственных колебаний при различных уровнях преднапряжения оттяжек

Выводы

1. Использование динамической модели линеаризованной системы позволяет произвести расчет на свободные колебания. Линеаризация расчетной схемы осуществлялась заменой оттяжек ферменными стержнями (работающими только на сжатие, растяжение) с вычислением их приведенных жесткостей.
2. В результате расчета свободных колебаний мачты были получены спектры собственных частот, при различных уровнях натяжения вант. При анализе, которых была выявлена пропорциональная зависимость динамических характеристик системы от преднапряжения оттяжек: для 1, 2, 3, 4 собственной формы колебаний (увеличение частоты, при увеличении преднапряжения); для 5, 6, 7, 8 и 9 собственной формы колебаний наблюдается сгущение спектра; для 10, 11, 12 и следующих собственных форм колебаний имеется небольшая, но также пропорциональная зависимость частоты колебаний от преднапряжения вант.
3. В силу симметрии конструкции частоты, периоды, амплитуды собственных форм № 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т.д. равны между собой (кратные частоты).

Результаты проведенных расчётов могут быть использованы при проектировании и обследовании подобных сооружений.

Библиографический список

1. Справочник проектировщика, металлические конструкции/ под ред.В.В. Кузнецова. – М., 1998. – С. 7.
2. Перельмутер, А.В. SCAD Office. Расчет мачт на оттяжках/ А.В. Перельмутер. – Киев, 2004. – С. 18.
3. Стрелец-Стрелецкий, Е.Б. ЛИРА. Руководство пользователя. Основы: учеб. пособие/ Е.Б. Стрелец-Стрелецкий, В.Е. Боговис, Ю.В. Гензерский. - Киев, 2008. – 85 с.
4. СНиП II-23-81*.Стальные конструкции. Нормы проектирования /Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 1998. – 96 с.
5. СНиП 2.01.07-85* Нагрузки и воздействия. Госстрой России – М:ГП ЦПП 2003. – 44 с.

Reference

1. Designer handbook, metal structures/edited by V.V. Kuznetsov. – M., 1998. – P. 7.
2. Perelmuter, A.V. SCAD Office. Design of masts on guy lines/ A.V. Perelmuter. – Kiev, 2004. – P. 18.
3. Strelets-Streletsky, E.B. Lira. Guidance of user. Basis: textbook/ E.B Strelets-Streletsky., V.E. Bogovis, Yu.V. Genzersky. - Kiev, 2008. – 85 p.
4. Building standards II-23-81*.Steel structures. Design standards /Gosstroy of Russia. – M.: GUP TzPP, 1998.– 96 p.
5. Building standards 2.01.07-85* Loads and influences. Gosstroy of Russia. – M.:GP TzPP 2003. – 44 p.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.014.2

*Воронежский государственный
технический университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических
конструкций и сварки в строительстве
С.Н. Колодежнов
Студентка группы 3861
Е.Н. Гладких Voronezh,
Россия, г. Воронеж, тел.: +79204051465;
e-mail: katya200863@yandex.ru*

*Voronezh State Technical University
PhD.of Tech, Sc., Associate professor of department
of Metal constructions and
welding in construction S.N. Kolodezhnov
Student
E.N. Gladkih
Voronezh, Russia, tel.: +79204051465
e-mail: katya200863@yandex.ru*

С.Н. Колодежнов, Е.Н. Гладких

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОМПОНОВОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ СВОДЧАТОГО СТРУКТУРНОГО ПОКРЫТИЯ НА НДС НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрен расчет стального сводчатого структурного покрытия здания при различных компоновочных параметрах: стрела подъема, ячейки структуры, схема опирания. Выполнен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) различных расчетных схем.

Ключевые слова: структурное покрытие, внутренние усилия, сравнение результатов расчета, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

S.N. Kolodezhnov, E.N. Gladkih

RESEARCH OF ARCHED STRUCTURAL COVER LAYOUT CHARACTERISTICS INFLUENCE ON BEARING STRUCTURES DEFLECTED MODE

There is considered the building steel arched structural covering design with various layout parameters: camber of arch, structural cell, support scheme. The comparative analysis of various analytical models deflected mode is performed.

Key words: structural coating, internal forces, comparison of calculation results, finite element method, deflected mode.

Важное архитектурное свойство сводчатых покрытий - эстетичность внешнего и внутреннего вида. Это создается благодаря включению в объем зала верхней подсводчатой, части, в то время как плоский потолок зачастую производит впечатление перекрытия, провисающего вниз.

Кроме своей архитектурной выразительности своды имеют несомненное преимущество перед балочными и рамными конструкциями благодаря значительно меньшим (в несколько раз) изгибающим моментам. При действии нагрузки на опорах появятся не только вертикальные реакции, но и горизонтальные, называемые распором. Именно распор в каждом сечении свода создает момент, противоположный по знаку моменту от внешних нагрузок, что и позволяет их существенно уменьшить, а в некоторых случаях довести до нуля [1]. Подбирая значение кривизны, можно приблизиться к идеальной, т.е. безмоментной работе конструкции.

© Колодежнов С.Н., Гладких Е.Н., 2017

Работа свода характеризуется тем, что под действием внешней вертикальной нагрузки (собственный вес, снег) в элементах возникают напряжения сжатия, поэтому расчет на устойчивость становится определяющим.

Невыгодная нагрузка на свод соответствует варианту сочетания снеговой нагрузки и собственного веса конструкций без учета ветрового воздействия, так как оно создает отсос.

Сводчатая конструкция, представляющая собой пространственную стержневую структурную оболочку, предлагается для устройства покрытия над летним концертным залом, общий вид которого представлен на рис. 1.



Рис. 1. Общий вид сводчатого структурного покрытия

Для сравнения были рассмотрены две схемы сводчатого структурного покрытия, опертого по углам на четырехветвевые колонны круглого трубчатого сечения и различающиеся стрелой подъема (рис. 2, 3). Схема расположения элементов в плане представлена на рис. 4.

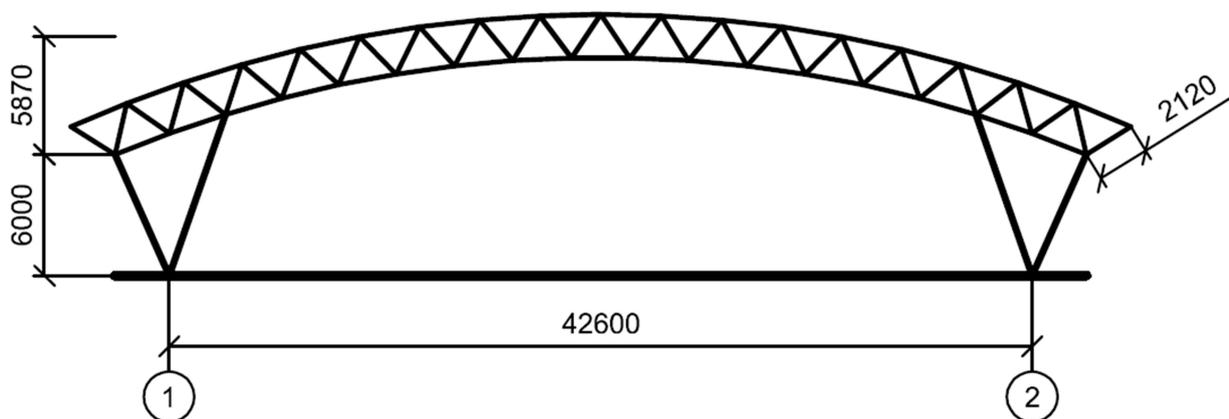


Рис. 2. Поперечный разрез покрытия по схеме 1

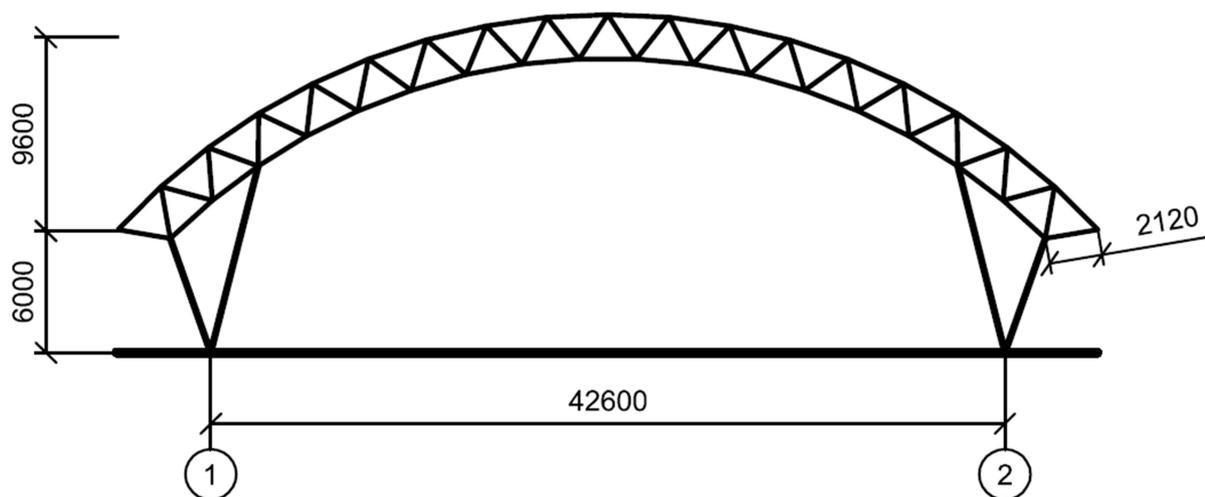


Рис. 3. Поперечный разрез покрытия по схеме 2

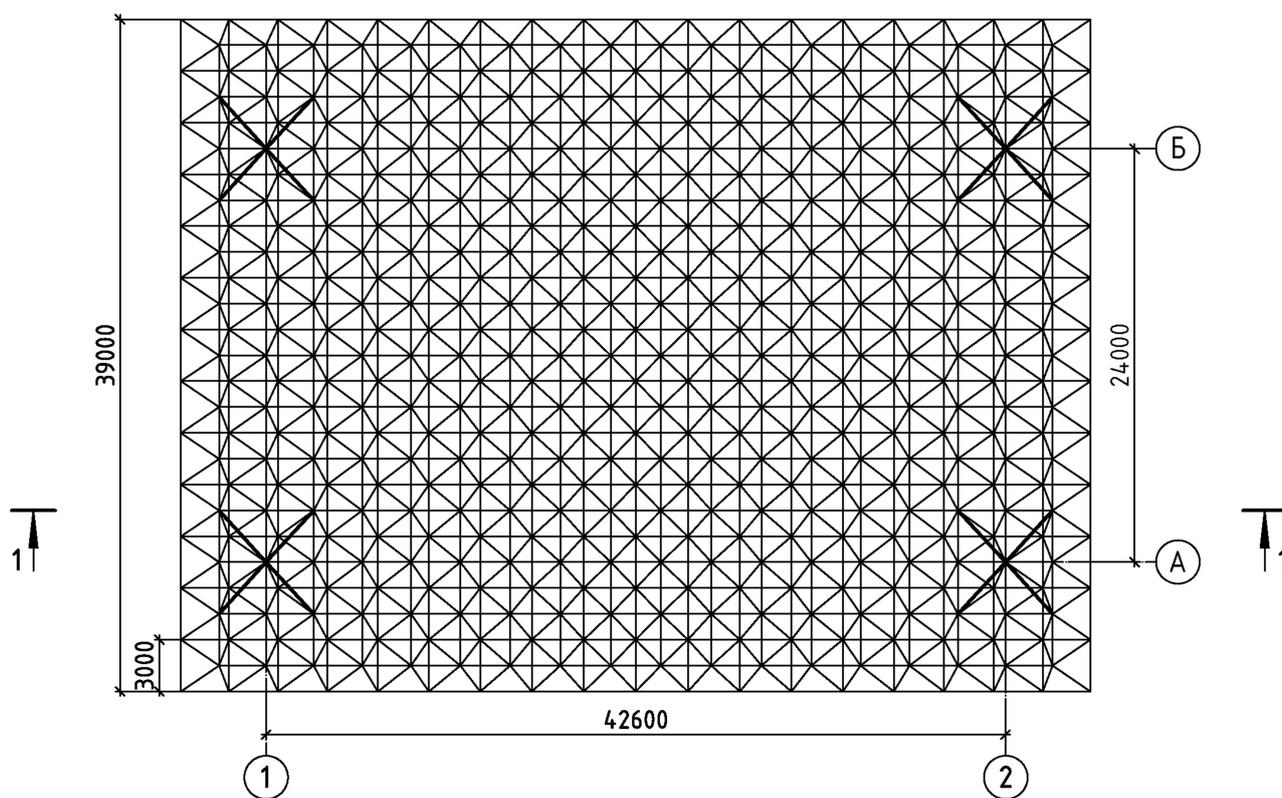


Рис. 4. Схема расположения элементов

Для обоих случаев приняты следующие сечения: элементы структуры – $\text{Ø } 108 \times 10$ мм, ветви колонн – $\text{Ø } 219 \times 10$ мм. Расчет по двум группам предельных состояний (ПС) производился в ПК ЛИРА-САПР 2014. На рис. 5 изображена пространственная конечно-элементная схема конструкции.

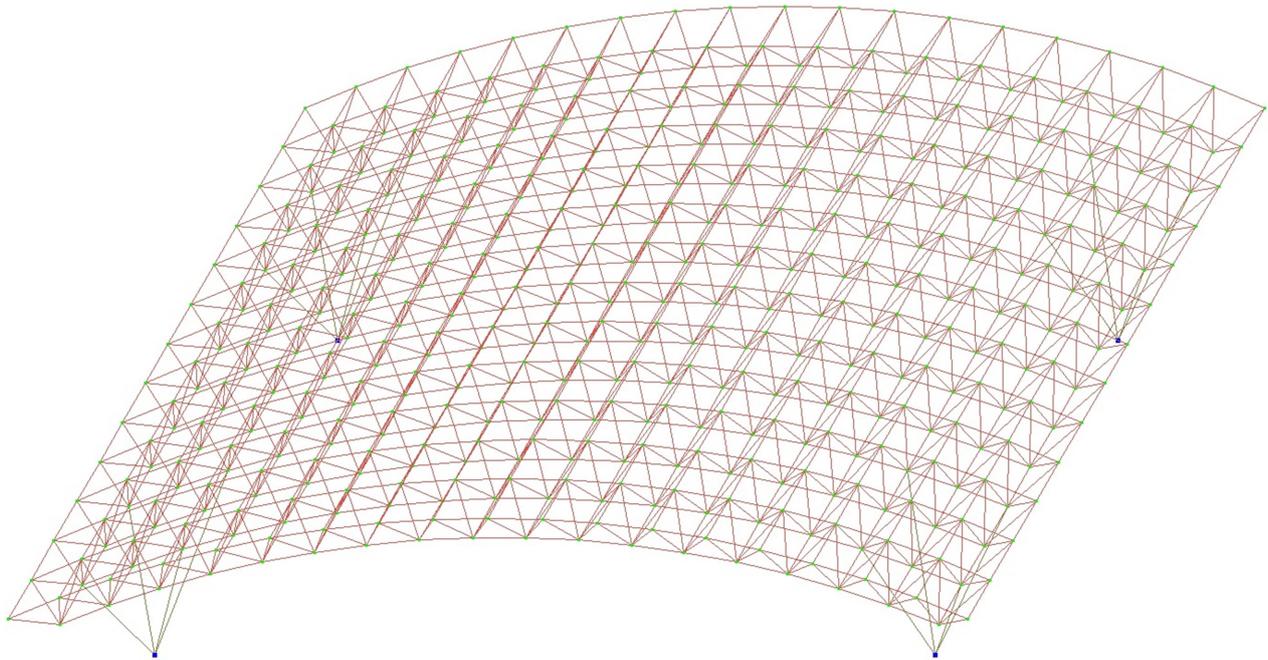


Рис. 5. Пространственная конечно-элементная схема конструкции

Результаты сравнительного анализа структурных плит с различной стрелой подъема приведены в табл. 1. На рис. 6 показаны усилия в элементах поперечного сечения, обозначенного на схеме расположения элементов (см. рис. 4), для двух случаев снеговой нагрузки – симметричное нагружение (μ_1) и несимметричное нагружение (μ_2).

Таблица 1

Анализ результатов расчета структурного покрытия с различной стрелой подъема

Параметр	Значение параметра		Эффект
	Схема 1	Схема 2	
Прогиб от симметричной снеговой нагрузки, мм	36,3	29,7	Уменьшился на 18 %
Прогиб от несимметричной снеговой нагрузки, мм	14,5	21,7	Увеличился на 50 %
Мах сжимающее усилие в верхнем поясе, кН То же растягивающее, кН	-248 246	-235 227	Уменьшилось на 5 % -/- на 8 %
Мах сжимающее усилие в нижнем поясе, кН То же растягивающее, кН	-384 201	-421 284	Увеличилось на 10 % -/- на 41 %
Мах сжимающее усилие в раскосах, кН То же растягивающее, кН	-381 155	-445 215	Увеличилось на 17 % -/- на 39 %
Максимальное усилие в колонне, кН	-965	-974	Увеличилось на 1%
Коэффициент использования несущей способности по 1ПС/2ПС, %	91,7/67,8	102/81,7	Не обеспечена несущая способность по 1ПС

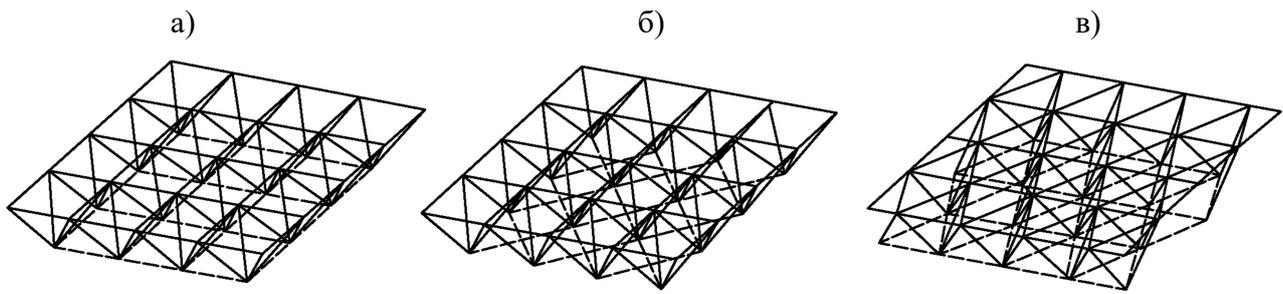


Рис. 7. Схемы структурных плит из решетчатых пирамид:

а - схема I с квадратным основанием (пентаэдров); б – схема II с квадратным основанием (полуоктаэдров);
в – схема III с треугольным основанием (тетраэдров)

По результатам расчета производился подбор сечений стержней покрытия с помощью ПК ЛИРА-САПР 2014 по максимальному коэффициенту использования несущей способности по первой и второй группам ПС:

схема I – $k^{1ПС} = 0,3-99,8 \%$; $k^{2ПС} = 60,6-99,9 \%$;
схема II – $k^{1ПС} = 0,4-100 \%$; $k^{2ПС} = 50,8-100 \%$;
схема III – $k^{1ПС} = 0,3-99,8 \%$; $k^{2ПС} = 60,6-99,9 \%$.

Трудоемкость изготовления металлических конструкций можно определить по методике, рассмотренной в [2]:

$$T = k_s \xi_m k_u \mu \sqrt{G_0 n_0}, \quad (1)$$

где $k_s = 0,8$ – коэффициент серийности; $k_u = 1$ – коэффициент повышения удельной трудоемкости изготовления при применении сталей повышенной или высокой прочности (к стали С245); ξ_m – строительный коэффициент трудоемкости изготовления; $\Psi = 1,2$ – строительный коэффициент массы конструкций; $\mu = 1,5$ – коэффициент, зависящий от вида конструкций;

n_0 – количество основных деталей; G_0 – масса основных деталей в тоннах.

$$\xi_m = 1 + \frac{\beta}{k_u} \sqrt{(\Psi - 1)d} = 1 + \frac{1,49}{1} \sqrt{(1,2 - 1)2,6} = 2,07. \quad (2)$$

Тогда для схемы I:

$$T = 0,8 \cdot 2,07 \cdot 1 \cdot 1,5 \sqrt{52,83 \cdot 1872} = 781,17 \text{ чел. -дн.}$$

Тогда для схемы II:

$$T = 0,8 \cdot 2,07 \cdot 1 \cdot 1,5 \sqrt{61,23 \cdot 2252} = 922,40 \text{ чел. -дн.}$$

Тогда для схемы III:

$$T = 0,8 \cdot 2,07 \cdot 1 \cdot 1,5 \sqrt{61,77 \cdot 2122} = 899,32 \text{ чел. -дн.}$$

Результаты сравнительного анализа структурных плит с различными ячейками приведены в табл. 2, а также графически представлены на рис. 8.

Таблица 2

Анализ результатов расчета структурного покрытия с различными ячейками

Наименование показателей	Данные по вариантам		
	Из пентаэдров Схема I	Из полуоктаэдров Схема II	С треугольным основанием Схема III
1. Масса конструкций сталь, т	52,83	61,23	61,77
2. Показатель массы сталь, т/м ²	0,0273	0,0315	0,0317
3. Трудоемкость изготовления чел.-дн.	781	922	899
4. Число стержневых элементов	1872	2252	2122

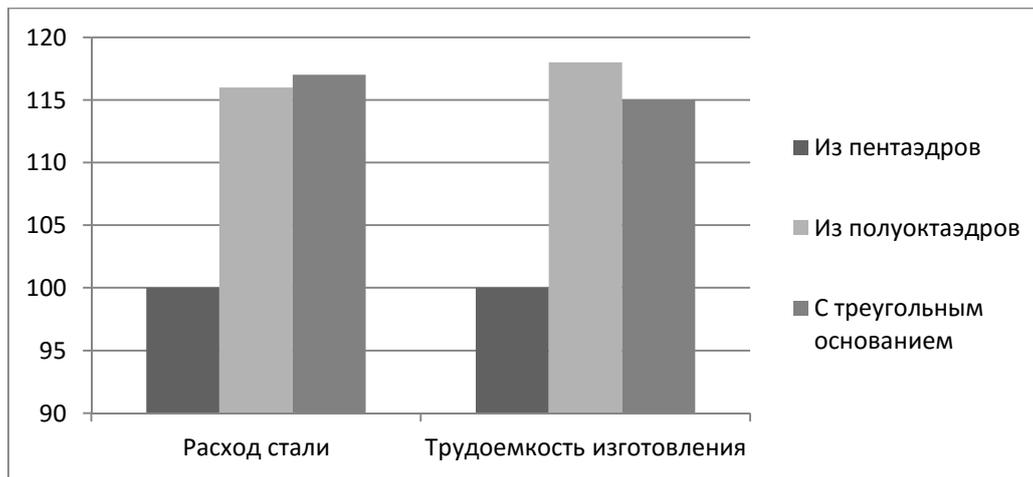


Рис. 8. Графическое представление результатов сравнительного анализа структурных плит с различными ячейками

Схема опирания структурного покрытия с укрупненной сеткой колонн, переход к которой в большинстве случаев целесообразен, приводит к таким преимуществам, как свободная планировка, гибкость при изменении условий эксплуатации, а также экономия площади [3].

Были рассмотрены две схемы опирания структурного покрытия (рис. 9):

- на четырехветвевые колонны, расположенные по углам структуры;
- на двухветвевые колонны, расположенные вдоль коротких сторон структуры с шагом 6 м.

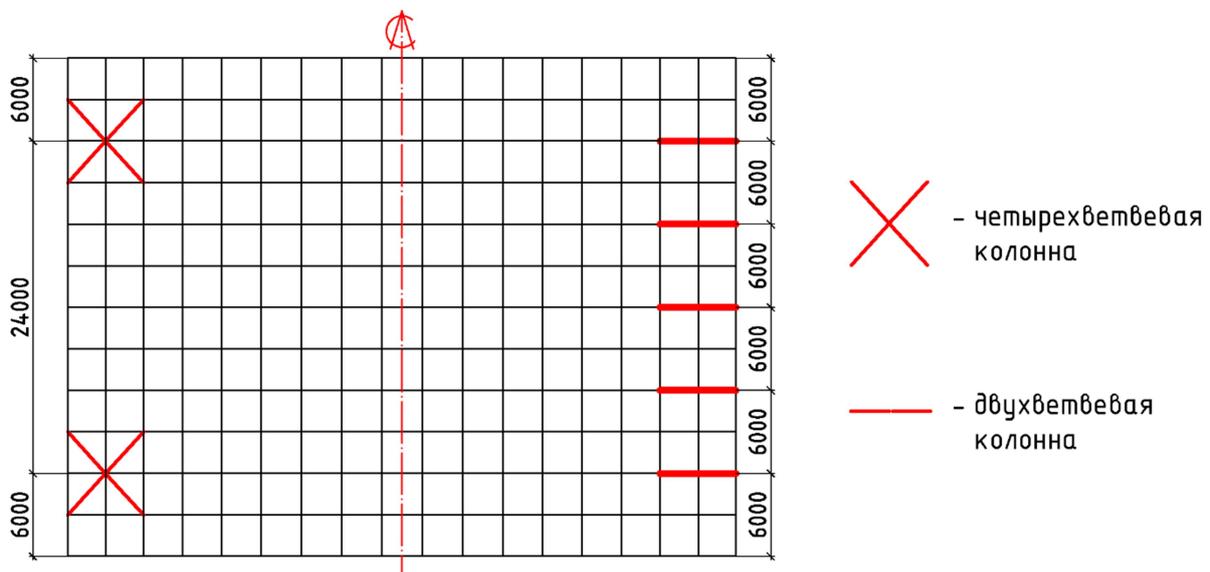


Рис. 9. Схема расположения элементов по нижнему поясу: при опирании по углам (слева); при опирании по двум сторонам с шагом 6 м (справа).

Для обоих случаев в первом приближении, как и ранее, приняты следующие сечения с последующей их корректировкой с помощью ПК ЛИРА-САПР 2014: элементы структуры – $\varnothing 108 \times 10$ мм; ветви колонн – $\varnothing 219 \times 10$ мм.

Результаты сравнительного анализа структурных плит с различными схемами опирания приведены в табл. 3, а также графически представлены на рис. 10.

Анализ результатов расчета структурного покрытия с различным опиранием

Параметр	Значение параметра при способе опирания		Эффект
	По углам	Вдоль двух сторон	
Масса конструкций, т	52,83	81,09	Увеличилась на 53 %
Прогиб от симметричной снеговой нагрузки, мм	36,3	33,3	Уменьшился на 8 %
Прогиб от несимметричной снеговой нагрузки, мм	14,5	13,7	Увеличился на 6 %

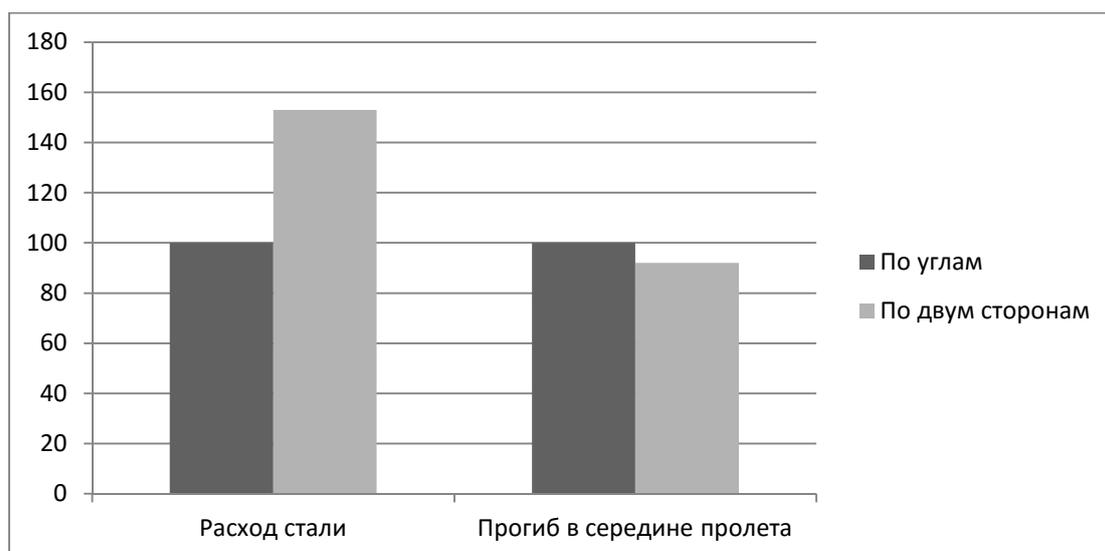


Рис. 10. Графическое представление результатов сравнительного анализа структурных плит с различными схемами опирания

Выводы

1. С увеличением стрелы подъема свода усилия в значительной части элементов возрастают, что может привести к небезопасности несущей способности конструкции по 1ПС. Необходимо также учитывать, что при возведении покрытия большей высоты повышается трудоемкость монтажа.

2. Для структурных сводов по схемам II и III требуется большее число стержней, что ведет к повышению массы конструкций и трудоемкости их изготовления. В силу того, что несущая способность части стержней используется не полностью, их сечения подбираются по предельной гибкости.

3. При опирании структурного блока по двум сторонам на двухветвевые колонны, по сравнению с опиранием на четырехветвевые колонны, расположенные по углам структуры, значительно увеличивается расход металла и незначительно повышается жесткость.

4. Конструкция структурного свода, показавшая из рассмотренных лучшие результаты в ходе исследования, обладает следующими компоновочными параметрами:

- стрела подъема – 5,87 м;
- схема структурного покрытия – с квадратным основанием из решетчатых пирамид-пентаэдров;
- способ опирания – на четырехветвевые колонны, расположенные по углам структуры.

Библиографический список

1. Металлические конструкции: в 3 т. : учеб. для строит. вузов / В. В. Горев. - Т. 2. Конструкции зданий.– 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 528 с.
2. Вариантное проектирование стальных конструкций: учеб. пособие / А.В. Панин, А.С. Щеглов, И.П. Сигаев [и др.]. – Воронеж. гос. арх.-строит. акад. – Воронеж, 2000. - 80 с.
3. Рекомендации по проектированию структурных конструкций/ ЦНИИСК им. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1984. – 303 с.

Reference

1. Metal structures: 3 books.: textbook for construction universities / V.V. Gorev. - B. 2. Buildings construction.– 2-edt. corr., . – М.: High school, 2002. – 528 p.
2. Variant design of steel structures: textbook / A.V.Panin, A.S. Shcheglov, И.Р. Sigaev [and others]. – Voronezh state academy of Architecture and Civil Engineering. – Voronezh, 2000. - 80 p.
3. Recommendations on structures design/ TsNIISK by Kucherenko. – М.: Stroyizdat, 1984. – 303 p.

*Воронежский государственный
технический университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических
конструкций и сварки в строительстве
С.Н. Колодежнов
Студентка гр. 3861
А.Н. Селиванова
Россия, г. Воронеж, тел.: +7-960-129-96-59;
e-mail: alexandra-selivanova@mail.ru*

*Voronezh State Technical University
PhD of Tech. Sc. Associate professor
of department of Metal constructions
and welding in construction
S.N. Kolodezhnov
Student
A.N. Selivanova
Voronezh, Russia, tel: +7-9601299659;
e-mail: alexandra-selivanova@mail.ru*

С.Н. Колодежнов, А.Н. Селиванова

АНАЛИЗ ВИСЯЧИХ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ ПОДКРЕПЛЕНИЯ НАВЕСА В ВИДЕ СТРУКТУРНОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрен расчет висячих систем покрытия трибун футбольного стадиона. Покрытие представляет собой структурную плиту, подкрепленную висячими канатными элементами, ориентированными вдоль длинной стороны. В результате расчета определено необходимое число канатов и обосновано применение системы повышенной жесткости в виде пучков нисходящих вант.

Ключевые слова: структурная плита, висячие конструкции, несущий канат, вертикальные перемещения, кинематические перемещения, нисходящие ванты, жесткий узел в середине пролета.

S.N. Kolodezhnov, A.N. Selivanova

ANALYSIS OF SUSPENDED SYSTEM OF SHED SUPPORT AS STRUCTURAL SLAB

Football stadium stands covering suspended systems is under consideration. The covering is the structural plate supported by hanging rope elements placing along the long side. As a result of the calculation, the required number of cables has been determined and the application of the system of has been justified.

Key words: structural plate, suspension constructions, support cable, vertical displacement, kinematic displacement, descending cables, rigid node in the middle of the span.

Применение висячих покрытий открывает широкие возможности для создания сооружений разнообразных форм, несущие элементы которых экономичны по затрате металла, индустриальны в изготовлении и монтаже.

Характерной особенностью висячих систем в качестве несущих элементов покрытий зданий и сооружений является их высокая податливость.

Дополнительные прогибы (провесы) гибких нитей возникают от следующих факторов:

- 1) упругих удлинений пологой нити, что определяет наибольшие прогибы в середине пролета висячей конструкции;
- 2) кинематических перемещений вследствие изменения первоначальной формы равновесия при загрузке части пролета временной нагрузкой.

В общем случае загрузка системы временной нагрузкой прогибы являются следствием обеих причин: упругих удлинений и кинематических перемещений. Однако для каждой конструкции может быть отмечено преобладающее значение первой либо второй причины.

Какая из этих причин имеет большее значение, можно выяснить сопоставлением прогибов в середине пролета (при загрузке всего пролета) с прогибами в его четверти под действием нагрузки, расположенной на половине пролета. В соответствии с результатами такого анализа могут быть приняты меры, направленные на уменьшение упругих удлинений или кинематических перемещений либо на обеспечение общей жесткости конструкции [1].

В настоящей работе висячие системы рассматриваются как несущие элементы, поддерживающие структурные плиты, являющиеся навесами над трибунами футбольного стадиона (рис. 1).

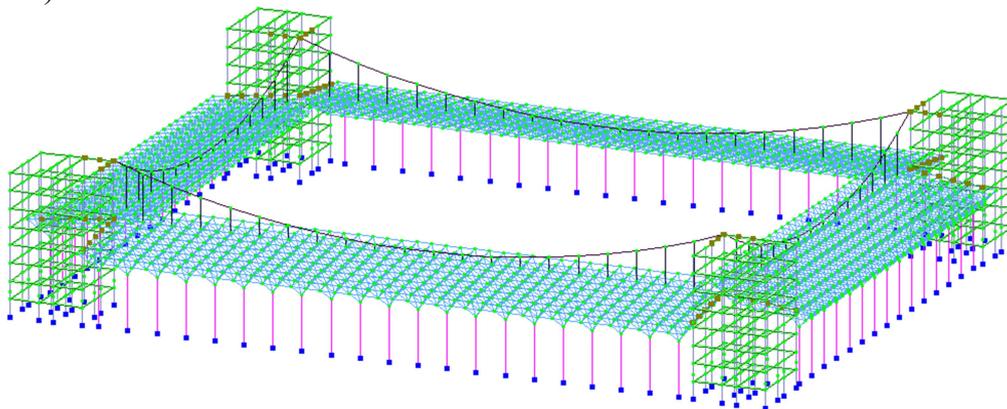


Рис. 1. Схема покрытия трибун футбольного стадиона

Каждая структурная плита вдоль одной длинной кромки опирается на вертикальные стойки и по всей длине подвешена к одному или нескольким несущим канатам.

Целью исследования является определение числа и схем расположения несущих канатов.

В настоящей работе произведен анализ нескольких вариантов висячих конструктивных систем, сравнение которых выполнялось на основании значений внутренних усилий и вертикальных перемещений (прогибов) конструкции, полученных в результате расчета в программном комплексе (ПК) ЛИРА-САПР 2014.

Параметры принятых сечений основных элементов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Используемые типы поперечных сечений элементов

Элемент системы покрытия	Профиль элемента системы покрытия	Площадь поперечного сечения элемента, см ²
1. Стойка	Труба стальная бесшовная горячедеформированная, диаметром 450 мм, толщиной стенки 20 мм	270,20
2. Элемент структурной плиты	Труба стальная бесшовная горячедеформированная, диаметром 140 мм, толщиной стенки 10 мм	40,84
3. Несущий канат	Висячий элемент из шести параллельных канатов, стальных, закрытых, диаметром 70 мм по ГОСТ 7676-73 с двумя слоями клиновидной и одним слоем зетобразной проволоки и сердечником типа ТК 1+6+12+18+24	$6 \times 32,32 = 193,91$
4. Подвеска	Прокат стальной, горячекатаный круглый, диаметром 30 мм	7,069
5. Ванта	Канат стальной, закрытый, несущий, диаметром 50 мм по ГОСТ 7676-73 с двумя слоями клиновидной и одним слоем зетобразной проволоки и сердечником типа ТК 1+6+12+18+24	17,138

Указанные сечения элементов подобраны таким образом, чтобы для каждой расчетной схемы выполнялись условия проверки по первой группе предельных состояний.

Расчет выполнялся лишь для одного более длинного покрытия. При этом опорные конструкции канатов приняты по идеализированной схеме, смоделированной соответствующими внешними связями (рис. 2).

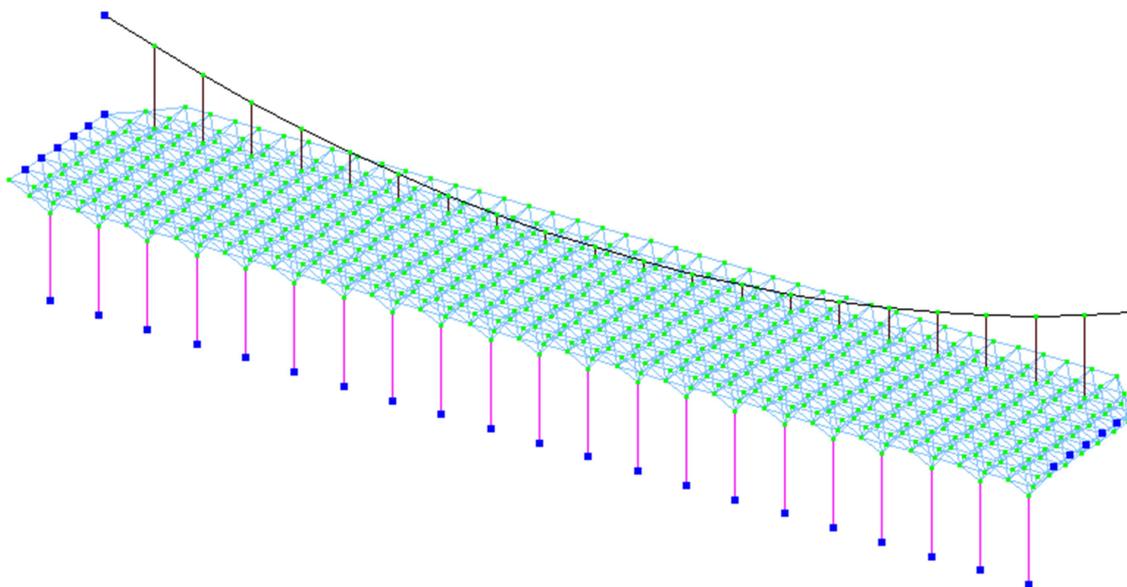


Рис. 2. Конечно-элементная схема рассчитываемого покрытия трибуны футбольного стадиона

Расчет каждой из схем производится в геометрически нелинейной постановке на следующие виды нагрузок:

- 1) собственный вес конструкции;
- 2) вес кровли;
- 3) снеговая нагрузка (приложенная как по всей длине канатного пролета, так и на половине его пролета);
- 4) ветровая нагрузка.

На первом этапе определялось количество несущих подвесных систем (несущих подвесов), используемых для подкрепления структурной плиты. Каждый несущий подвес представляет собой набор из шести параллельных стальных канатов (см. поз. 3, табл. 1) с прикрепленными к нему 20-ю вертикальными подвесками (см. поз. 4, табл. 1).

Значение расчетного усилия одного каната в подвесной системе с учетом коэффициента надежности по материалу $\gamma_m = 1,6$ (п. 6.9 [2]),

коэффициента надежности $\gamma_u = 1,3$ (п. 4.3.2 [2]),

коэффициента условий работы $\gamma_c = 0,8$ (табл. 47 [2])

составляет $N_{cab1} = 2069,2$ кН, а шести – $N_{cab} = 6 \cdot 2069,2 = 12415,4$ кН.

Шаг подвесов, представленных на рис. 3-7, равен величине ячейки структуры и номинально составляет 3 м.

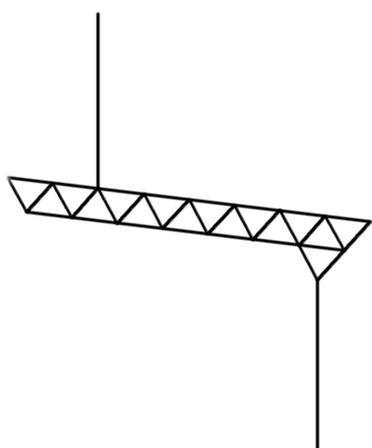


Рис. 3. Конструкция с 1 подвесной системой (вид сбоку на плиту покрытия)

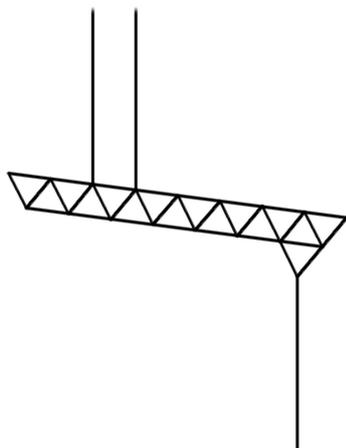


Рис. 4. Конструкция с 2 подвесными системами (вид сбоку на плиту покрытия)

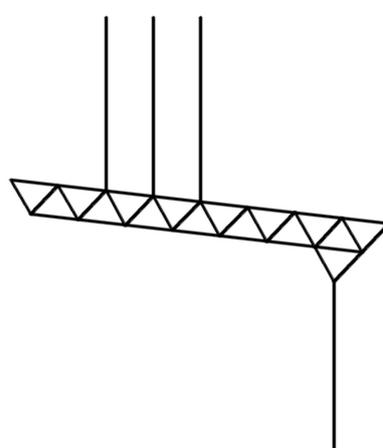


Рис. 5. Конструкция с 3 подвесными системами (вид сбоку на плиту покрытия)

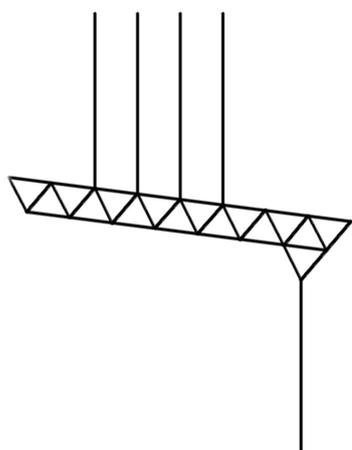


Рис. 6. Конструкция с 4 подвесными системами (вид сбоку на плиту покрытия)

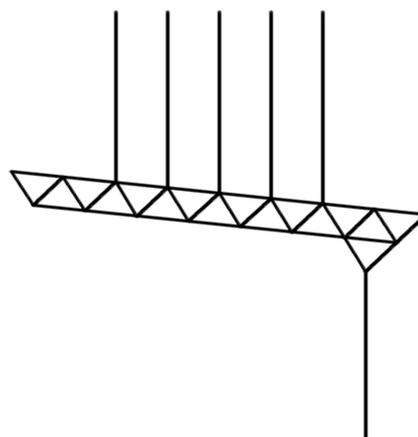


Рис. 7. Конструкция с 5 подвесными системами (вид сбоку на плиту покрытия)

Подбор производился на основании сравнения ряда параметров, указанных в табл. 2. Значения параметров приведены для наиболее неблагоприятного сочетания нагрузок.

Подбор количества несущих подвесов

Сравнительные параметры	Система с 1 подвесом (рис. 3)	Система с 2 подвесами (рис. 4)	Система с 3 подвесами (рис. 5)	Система с 4 подвесами (рис. 6)	Система с 5 подвесами (рис. 7)
Наибольшее усилие в элементе структуры (сжатие/растяжение), кН	-627,78/ 1002,18	-508,21/ 836,05	-470,01/ 791,21	-457,69/ 780,04	-459,52/ 780,22
Наибольшее усилие в стойке, кН	-255,64	-234,24	-217,85	-207,40	-210,87
Наибольшее усилие в несущем канате, кН	6843,62	4621,24	4010,67	3850,28	3848,78
Наибольшее усилие в подвеске, кН	222,64	145,42	124,44	118,95	118,91
Наибольшее вертикальное перемещение конструкции, мм	555	383	334	321	320
Вертикальное перемещение вылета консоли покрытия, мм	160	111	96	93	93
Изменение вертикального перемещения		Уменьшение на 45 % относительно системы с 1 подвесом	Уменьшение на 15 % относительно системы с 2 подвесами	Уменьшение на 4 % относительно системы с 3 подвесами	Уменьшение на 0,3 % относительно системы с 4 подвесами

Из данных табл. 2 видно, что с увеличением числа несущих подвесов происходит уменьшение внутренних усилий в элементах покрытия, а также уменьшение вертикального перемещения конструкции в целом.

При этом основным критерием выбора висячей системы подкрепления навеса является расчет по второй группе предельных состояний.

Вертикальный предельный прогиб покрытия по эстетико-психологическим требованиям согласно табл. Е.1 [3] определяется выражением

$$f_u = \frac{l}{300} = \frac{126000}{300} = 420 \text{ мм}, \quad (1)$$

где $l = 126000 \text{ мм}$ – пролет несущих канатов, ориентированных вдоль покрытия.

Вертикальный предельный прогиб вылета консоли покрытия согласно п. 15.2.3 [3] определяется выражением

$$f_u = \frac{l}{75} = \frac{6000}{75} = 80 \text{ мм}, \quad (2)$$

где $l = 6000 \text{ мм}$ – вылет консоли конструкции покрытия.

На основании представленных в табл. 2 данных можно сделать следующие выводы:

1. При применении системы с одним несущим подвесом вертикальное перемещение конструкции покрытия превышает предельное значение и, соответственно, такая система не может быть принята.
2. Применение систем с четырьмя и пятью несущими подвесами не приносит значительного уменьшения вертикального перемещения, а следовательно, не рационально.

На рис. 8-10 данные из табл. 2 представлены в графической интерпретации.

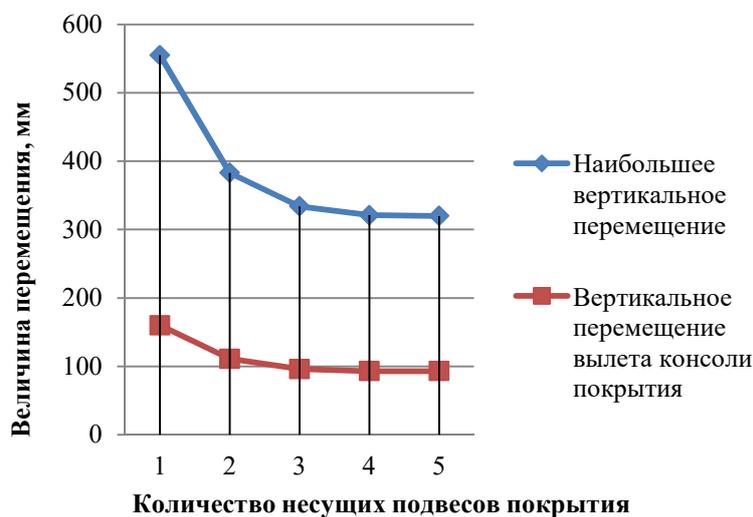


Рис. 8. Зависимость вертикальных перемещений от количества подвесов покрытия

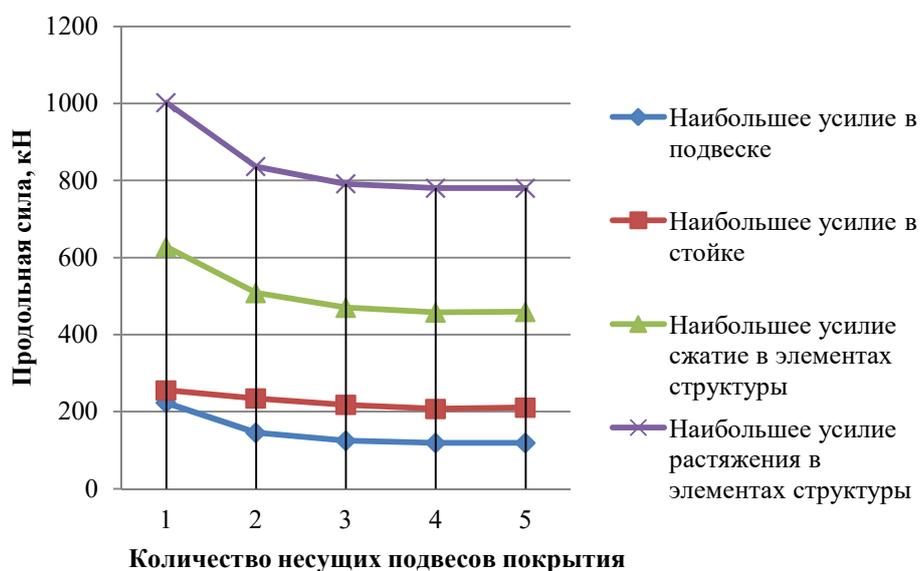


Рис. 9. Зависимость внутренних усилий в элементах покрытия от количества подвесов покрытия

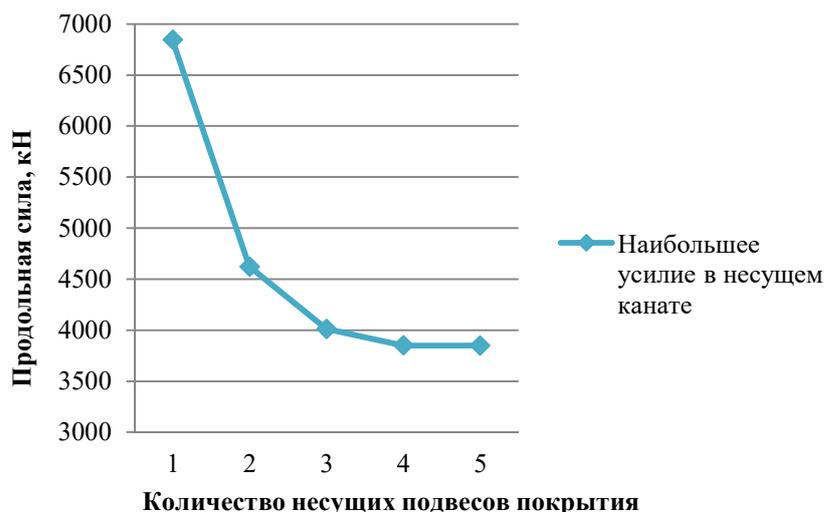


Рис. 10. Зависимость наибольшего усилия в несущем канате от количества подвесов покрытия

Для рассматриваемого покрытия наибольшее вертикальное перемещение возникает в четверти пролета под действием временной нагрузки, расположенной на половине пролета (рис. 11).

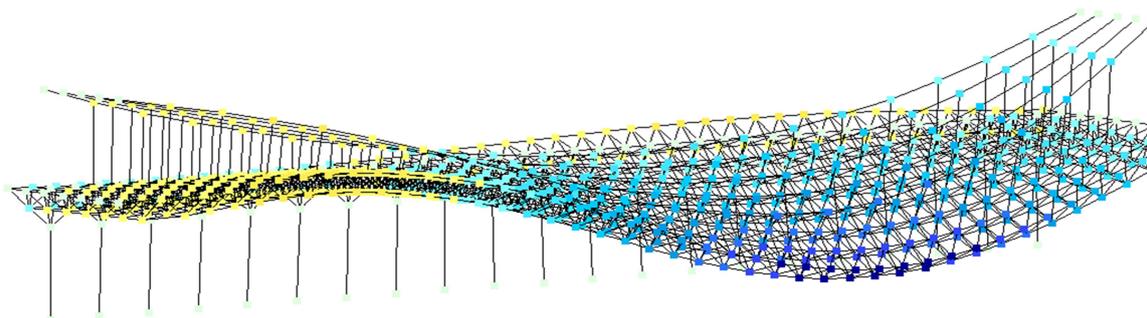


Рис. 11. Деформированная схема конструкции при наиболее неблагоприятном загрузении (на половине пролета)

На втором этапе рассматривались способы уменьшения кинематических перемещений комбинированной системы, основанные на наложении дополнительных связей, ограничивающих горизонтальные перемещения гибкой нити вдоль пролета.

Для выбранных систем с двумя и тремя несущими подвесами в качестве способа уменьшения прогиба рассмотрены следующие варианты:

- 1) добавление к системе пучков нисходящих вант (рис. 12);
- 2) устройство системы с жестким узлом крепления несущего каната к структурной плите в середине пролета (рис. 13).

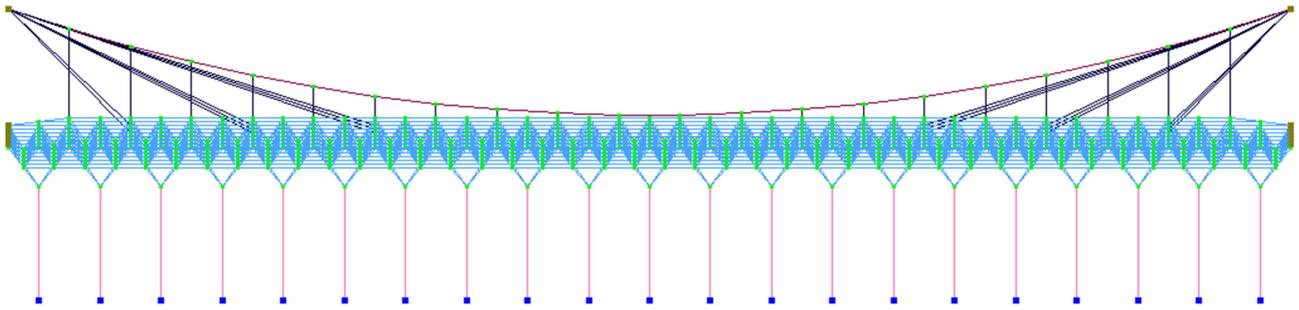


Рис. 12. Расчетная схема покрытия с нисходящими вантами (вид спереди)

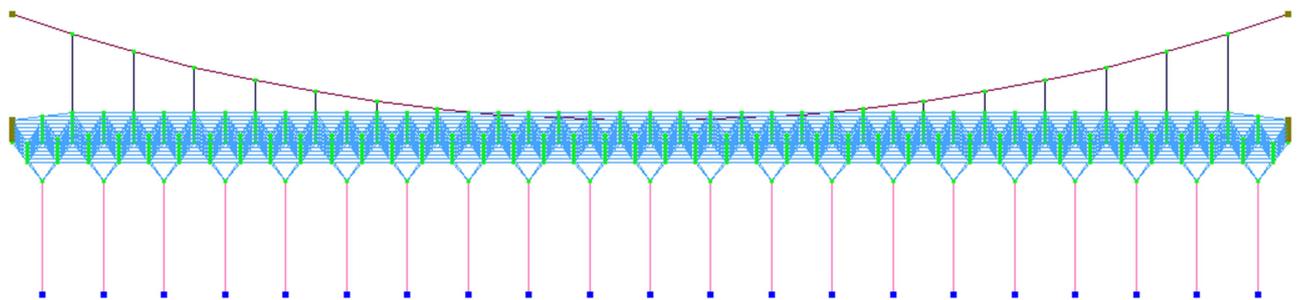


Рис. 13. Расчетная схема покрытия с жестким узлом в середине пролета (вид спереди)

Таким образом, производится сравнение шести следующих расчетных схем:

- 1) системы с двумя несущими подвесами;
- 2) системы с двумя несущими подвесами и пучками нисходящих вант в каждом несущем подвесе;
- 3) системы с двумя несущими подвесами с жестким узлом крепления каждого несущего каната к структурной плите в середине пролета;
- 4) системы с тремя несущими подвесами;
- 5) системы с тремя несущими подвесами и пучками нисходящих вант в каждом несущем подвесе;
- 6) системы с тремя несущими подвесами с жестким узлом крепления каждого несущего каната к структурной плите в середине пролета.

По результатам расчета указанных систем составлена табл. 3, с помощью данных которой можно выбрать наиболее выгодную расчетную схему. Значения параметров приведены для наиболее неблагоприятного сочетания нагрузок.

Подбор висячих конструктивных систем подкрепления навеса

Сравнительные параметры	Система с 2 несущими подвесами			Система с 3 несущими подвесами		
	Обычная по рис. 4	С нисходящими вантами (рис. 12)	С жестким узлом (рис. 13)	Обычная по рис. 5	С нисходящими вантами (рис. 12)	С жестким узлом (рис. 13)
Наибольшее усилие в элементе структуры (сжатие/растяжение, кН)	-508,21/ 836,05	-626,95/ 981,96	-476,68/ 678,46	-470,01/ 791,21	-616,69/ 922,85	-431,49/ 622,35
Наибольшее усилие в стойке, кН	-234,24	-219,69	-250,59	-217,85	-211,60	-232,93
Наибольшее усилие в несущем канате, кН	4621,24	2555,33	4765,72	4010,67	2246,77	4082,51
Наибольшее усилие в подвеске, кН	145,42	72,96	150,53	124,44	62,78	127,05
Наибольшее усилие в ванте, кН		876,63			756,79	
Наибольшее вертикальное перемещение конструкции, мм	383	281	375	334	257	325
Вертикальное перемещение вылета консоли покрытия, мм	111	80	108	96	73	94
Изменение вертикального перемещения		Уменьшение на 36 %	Уменьшение на 2 %		Уменьшение на 30 %	Уменьшение на 3 %

Согласно представленным данным применение в конструкции покрытия пучков нисходящих вант более эффективно по сравнению с устройством жесткого узла в середине пролета. Исходя из выражения (2), ограничивающего вертикальное перемещение вылета консоли покрытия, в качестве системы подкрепления навеса из структурной плиты проектируемого сооружения принята система с тремя подвесами, к каждому из которых добавлены пучки нисходящих вант.

Расчетная схема выбранной системы покрытия представлена на рис. 14.

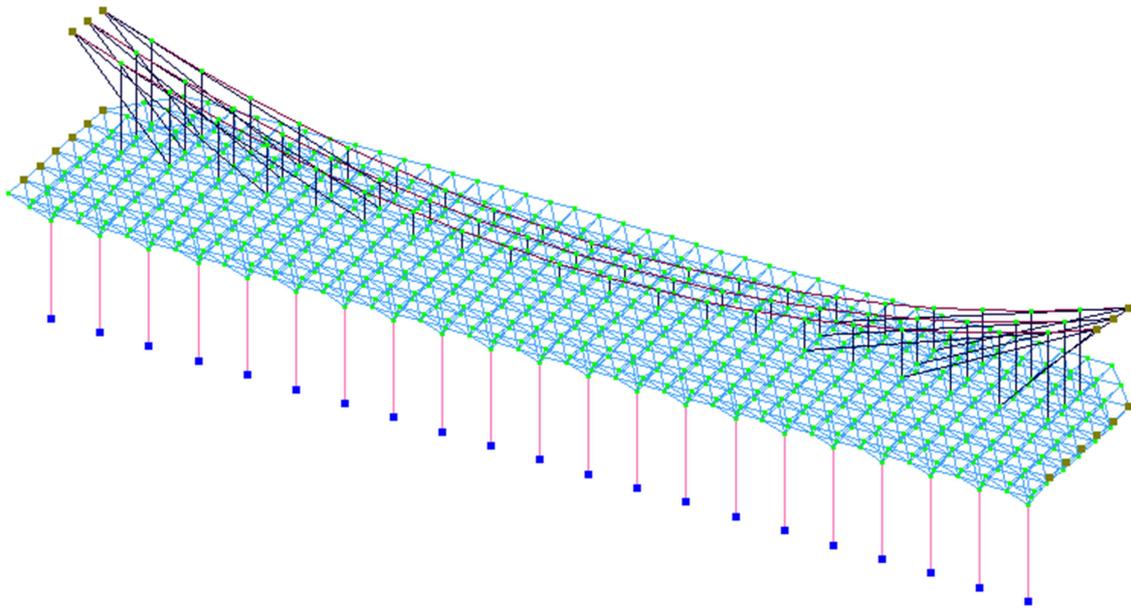


Рис. 14. Принятая расчетная схема покрытия с 3 несущими подвесами и пучками нисходящих вант

На рис. 15 изображена схема сооружения в конечно-элементном представлении с принятой схемой несущих элементов и опорными башенными каркасами, обеспечивающими закрепление канатов в проектном положении.

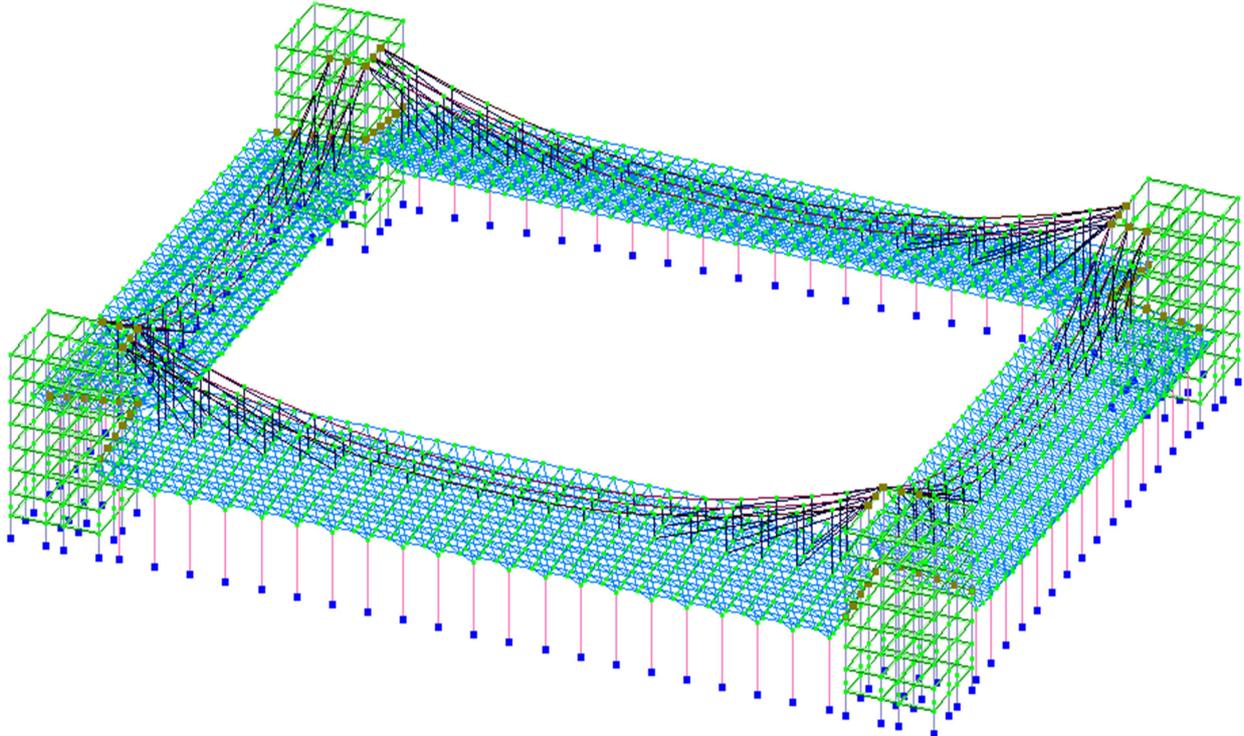


Рис. 15. Конечно-элементная схема сооружения с принятой схемой покрытия

Выводы

При проектировании висячих конструкций в качестве несущих элементов большепролетных зданий и сооружений определяющим является расчет конструкции по второй группе предельных состояний.

Изменение количества несущих подвесов с целью уменьшения вертикального перемещения покрытия дает эффект лишь при их числе не более трех. Дальнейшее увеличение их количества не оказывает значительного влияния на величину прогиба.

Для уменьшения кинематического перемещения рассматриваемой конструкции использование дополнительных связей в виде нисходящих пучков вант более эффективно по сравнению с устройством жесткого несмещаемого узла крепления несущего каната к плите покрытия. Принятый способ ведет к значительному уменьшению вертикальных перемещений как конструкции покрытия в целом, так и вылета консоли навеса в виде структурной плиты. Кроме того, добавление нисходящих пучков вант снижает внутренние усилия в большинстве элементов конструкции покрытия, что особенно заметно на примере несущего каната, в котором продольная сила уменьшается в 1,8 раза по сравнению с системой без указанных пучков нисходящих вант.

Библиографический список

1. Кирсанов, Н.М. Висячие покрытия производственных зданий/ Н.М. Кирсанов. – М.: Стройиздат, 1990. – 128 с.
2. СП 16.13330.2011. Стальные конструкции/ Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2011. – 177 с.
3. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия/ Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2011. – 80 с.

References

1. Kirsanov, N.M. Industrial building suspended covering/ N.M. Kirsanov. – M.: Stroyizdat, 1990. – 128 p.
2. Set of rules 16.13330.2011. Steel structures/Gosstroy of Russia. – M.: GUP TsPP, 2011. – 177 p.
3. Set of rules 20.13330.2011. Loads and influences/ Gosstroy of Russia. – M.: GUP TsPP, 2011. – 80 p.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.075

*Воронежский государственный
технический университет*

*Канд. техн. наук, доц. кафедры
строительной механики*

Г.Е. Габриелян

*Ст. преподаватель кафедры
строительной механики*

В.М. Флавианов

*Магистрант кафедры
строительной механики*

Корома Муса

Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473) 271-52-30;

email: stroymech.vgasu@yandex.ru

Voronezh State Technical University

*PhD of Tech. Sc., Associate professor of Structural
Mechanics department*

G. E. Gabrielyan

Lecturer of Structural Mechanics department

V.M. Flavianov

Undergraduate of Structural Mechanics department

Koroma Musa

Voronezh, Russia, tel.: +7(473)2715230;

email: stroymech.vgasu@yandex.ru

Г.Е. Габриелян, В.М. Флавианов, Корома Муса

РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КАРКАСА ПРОМЗДАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассматриваются плоская и пространственные конечно-элементные расчетные схемы несущей рамы каркаса, различающиеся методикой моделирования плиты перекрытия. Изучаются особенности реализации расчетных моделей и выполняется сравнительный анализ расчетов НДС каркаса здания.

Ключевые слова: железобетон, каркас, стойка, ригель, плита, расчетная модель

G.E., Gabrielyan, V. M Flavinov, Musa Koroma

CALCULATION ANALYSIS OF INDUSTRIAL BUILDING STRUCTURE MEMBERS DEFLECTED MODE WITH APPLICATION OF SPATIAL FINITE ELEMENT MODELS

Plane and spatial final-element calculation schemes of bearing frames deferent by the method of slab panel simulation are under analysis. The peculiarities of analytical models and comparison analysis of building frame deflected mode are studied.

Key words: reinforced concrete, frame, longitudinal girder, brace, slab, analytical model

За последние десятилетия метод конечных элементов (МКЭ) стал фундаментальным для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) сложных инженерных конструкций. Преимуществом МКЭ является универсальность его техники вычислений при использовании различных конечных элементов (КЭ) в модели конструкции. Конечно-элементные модели различных конструкций могут быть сведены к стержневым, пластинчатым, оболочечным или объемным системам, находящимся под действием произвольных нагрузок. МКЭ позволяет рассчитывать сложные инженерные конструкции с единых позиций, т.е. в возможности образования плоских и пространственных расчетных моделей, т.к. матричный аппарат метода носит стандартный характер для КЭ различной формы. Анализ различных пространственных конечно-элементных схем для расчета каркаса промздания посвящена данная работа.

© Габриелян Г.Е., Флавианов В.М., Корома Муса, 2017

Объектом исследования является железобетонный несущий каркас промышленного здания (рис. 1). Здание двухэтажное, прямоугольное в плане, имеет габаритные размеры 18х66 м. Отметка пола первого этажа – $\pm 0,000$ м, отметка пола 2-го этажа - $+4,800$ м, отметка потолка 2-го этажа – $+9,100$ м.



Рис. 1. Общий вид здания

Ж/б элементы несущих конструкций соответствуют следующим типовым сериям:

- колонны соответствуют серии ИИ 22-2/70. Рядовые колонны: ИК 22-2-1; крайние колонны: ИК 21-1-2.

- ригели соответствуют серии ИИ 23-1/70 (ИБЗ-5)

- плиты перекрытия и покрытия соответствуют серии 1.465.1-20. Рядовые плиты: 1,5х6 м, крайние плиты: 0,75х6 м.

Класс бетона по результатам обследования – В25-В30.

Опираение ригеля на колонну через капитель с обваркой закладных деталей.

Опираение плит на ригель свободное с обваркой закладных деталей.

Блок порталных связей выполнен из прокатных равнополочных уголков. Сечение уголков 100х7 (распорка) и 75х5 (подкосы). Блок связей расположен в осях 4 – 5 в пределах первого этажа.

Снеговой район – III (Воронежская область). Расчетная величина снеговой нагрузки – $1,8 \text{ кН/м}^2$

Нормативное ветровое давление принято равным $w_0 = 0,294 \text{ кН/м}^2$, что соответствует II ветровому району. Тип местности – городские территории, лесные массивы и другие местности, равномерно покрытые препятствиями высотой более 10 м.

В проектно-вычислительном комплексе «Ли́ра-САПР» на основе МКЭ разработана плоская стержневая модель каркаса, представленная на рис. 2. В принятой расчетной схеме каждый стержневой КЭ системы имеет 12 степеней свободы, по 6 степеней свободы в узле. Жесткостные характеристики стержней заданы в соответствии с описанными выше типовыми железобетонными конструкциями по соответствующим сериям. Капители колонн замоделированы с помощью жестких вставок. Длины жестких вставок соответствуют длине капители. Элементы, моделирующие ригель, имеют достаточную степень дискретизации, что позволяет получать данные о деформациях и усилиях в характерных узлах по длине элемента. Сопряжение элементов ригеля с колоннами шарнирное. Расчетные нагрузки и их комби-

нации приведены в табл. 1 и 2. Ветровые нагрузки рассчитаны в модуле «Вест». В расчетной модели ветровые нагрузки приведены к узлам на отметках +4,800 и +9,600. Жесткостные характеристики модели приведены в соответствии с описанными выше сечениями элементов. В качестве наиболее неблагоприятного было принято загрузжение 4.

Таблица 1

Расчетные нагрузки на расчетную модель плоской рамы.

Тип нагрузки	Величина нагрузки
Постоянные нагрузки	
Собственный вес конструкций	
Колонна, кН/м	4,00
Ригель, кН/м	8,1
Вес перекрытия (покрытия) из ж/б ребристых плит, кН/м	24,00
Временные нагрузки	
Полезная нагрузка на перекрытие 1-го этажа, кН/м	30,00
Вес снегового покрова, кН/м	10,80
Ветровое давление на отм. +4,800 (напор), кН	0,5
Ветровое давление на отм. +9,600 (напор), кН	0,3
Ветровое давление на отм. +4,800 (напор), кН	0,32
Ветровое давление на отм. +9,600 (напор), кН	0,2

Таблица 2

Расчетные комбинации нагрузок

Номер загрузки	Вес конструкций	Полезная нагрузка	Снег	Ветер «напор»	Ветер «отсос»
1	1	1	-	-	-
2	1	1	1	-	-
3	1	1	-	1	1
4	1	1	1	1	1



Рис. 2. Расчетная стержневая модель плоской рамы каркаса

3. **Модель 3.** Пространственная модель каркаса с пластинчатыми элементами, размер которых соответствует габаритному размеру ячейки ребристой плиты, заключенной между продольными и поперечными ребрами жесткости. Также в данной модели с помощью специальных жестких вставок учитывается работа ребер ж/б плит. Высота жестких вставок соответствует высоте ребра плиты. Соединение пластинчатых и стержневых элементов жесткое, через совпадающие узлы. Связь между пластинчатыми элементами осуществляется через промежуточные узлы.
4. **Модель 4.** Пространственная модель каркаса с пластинчатыми элементами, размер которых соответствует габаритному размеру ячейки ребристой плиты, заключенной между продольными и поперечными ребрами жесткости. При этом пластинчатые элементы в составе одной плиты соединены через соответствующие промежуточные узлы. Физическая связь между пластинчатыми и стержневыми элементами отсутствует. Совместная работа отдельно лежащих плит, а также плит и ригелей моделируется с помощью объединения перемещений соответствующих узлов. Объединяются линейные перемещения (X, Y, Z), а так же взаимный поворот узлов вокруг оси $X - U_x$.

В каждой из указанных расчетных моделей рассматриваются одинаковые Жесткостные характеристики, одинаковые граничные условия, одинаковые нагрузки. Подобный подход позволит оценить и проанализировать изменения напряженно-деформированного состояния в зависимости лишь от способа моделирования связевых пластинчатых элементов.

Для моделирования железобетонных плит вычислена приведенная толщина ребристой плиты $H_{пр} = 16$ см.

Жесткостные характеристики стержневых элементов, а также характеристики материала соответствуют принятым при расчете плоской рамы каркаса. Жесткостные характеристики для плиты вычислены с учетом совместной работы бетона и арматуры. Модуль упругости принят равным $3,31 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона – 0,3.

Нагрузки задаются на плиты перекрытия (покрытия) как равномерно распределенные по площади. Ветровые нагрузки идентичны принятым при расчете плоской рамы каркаса. Комбинации загружений также соответствуют рассмотренным ранее. Нагрузки на пространственные модели приведены в табл. 3.

Таблица 3

Нагрузки на пространственные расчетные модели

Тип нагрузки	Величина нагрузки
Постоянные нагрузки	
Собственный вес конструкций	
Колонна, кН/м	4,00
Ригель, кН/м	8,1
Вес перекрытия (покрытия) из ж/б ребристых плит, кН/м ²	4,00
Временные нагрузки	
Полезная нагрузка на перекрытие 1-го этажа, кН/м ²	5,00
Вес снегового покрова, кН/м ²	1,80
Ветровое давление на отм. +4,800 (напор), кН	0,5
Ветровое давление на отм. +9,600 (напор), кН	0,3
Ветровое давление на отм. +4,800 (напор), кН	0,32
Ветровое давление на отм. +9,600 (напор), кН	0,2

Общий вид пространственной модели 1 и результаты расчетов по ней представлены на рис. 7-15. В качестве наиболее нагруженной несущей рамы для последующего анализа была принята рама по оси 2.

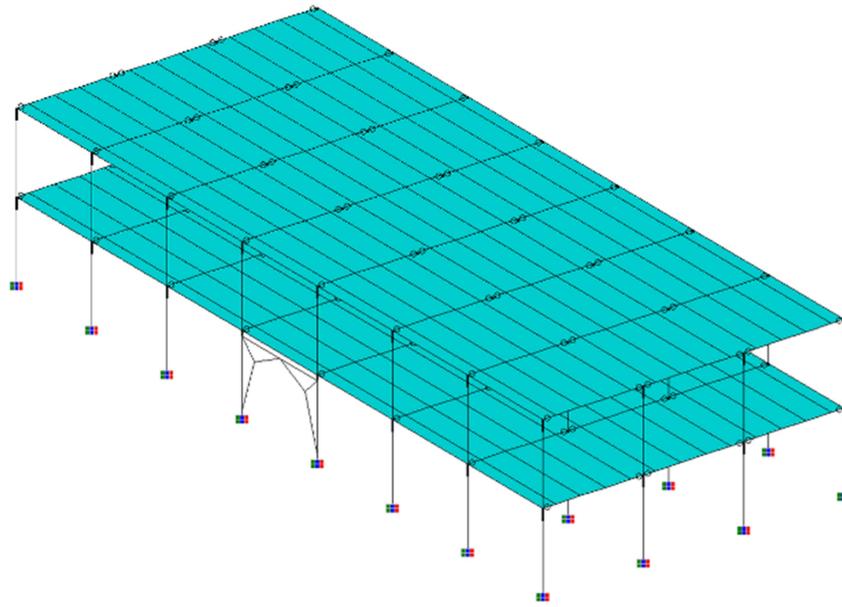


Рис. 7. Общий вид пространственной модели 1

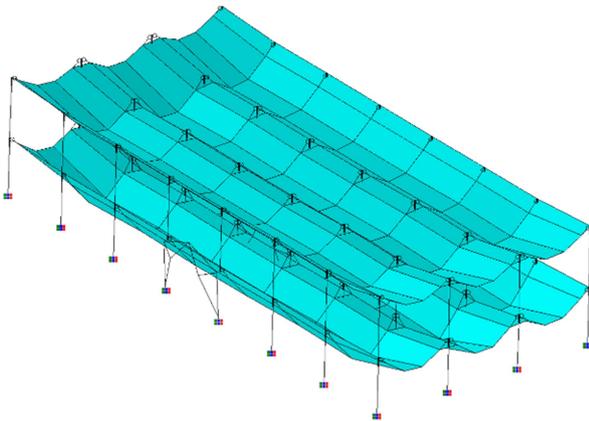


Рис. 8. Деформированный вид конструкции

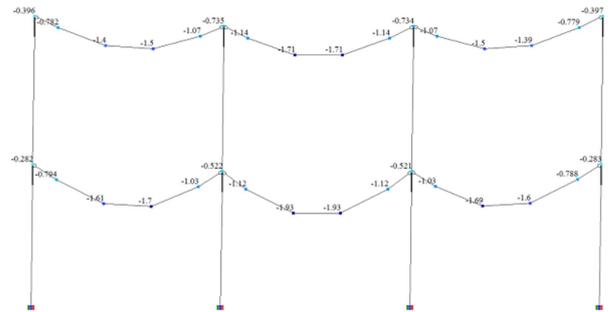


Рис. 9. Значения перемещений по оси Z в наиболее нагруженной раме, мм

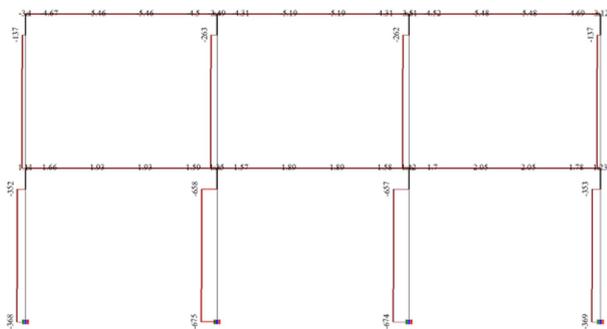


Рис. 10. Эпюры и значения продольной силы N, кН

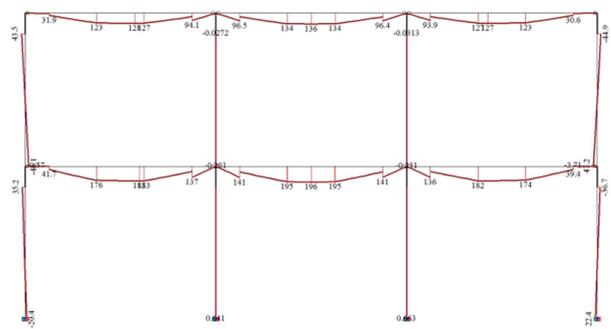


Рис. 11. Эпюры и значения изгибающего момента M_y , кН*м

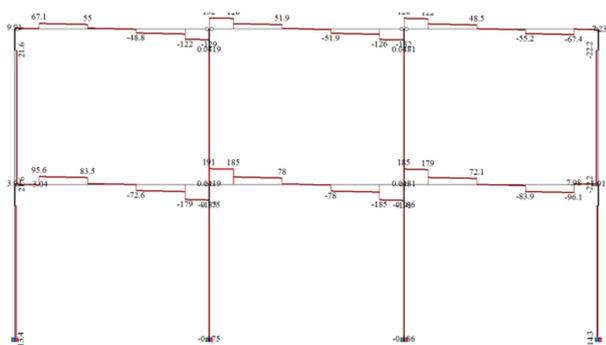


Рис. 12. Эпюры и значения поперечной силы Q_z , кН

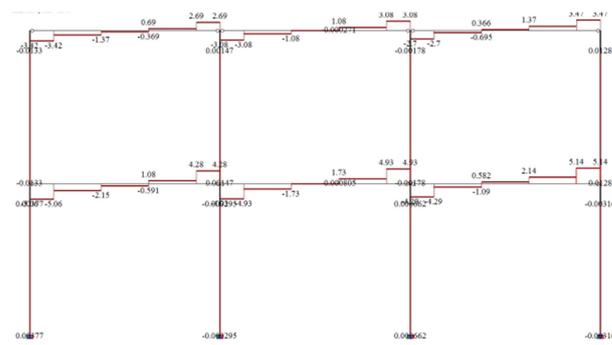


Рис. 13. Эпюры и значения крутящего момента M_x , кН*м

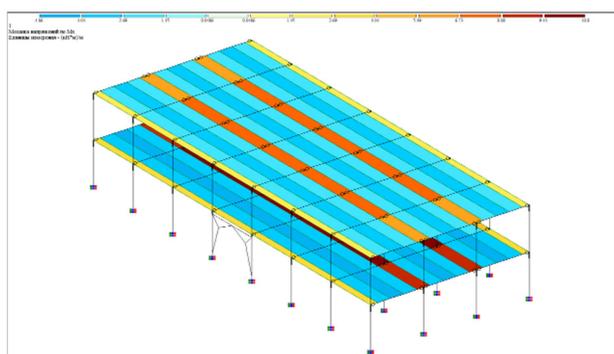


Рис. 14. Мозаика напряжений по M_x , (кН*м)/м

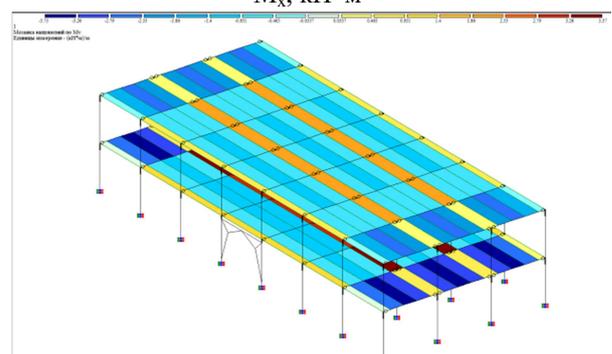


Рис. 15. Мозаика напряжений по M_y , (кН*м)/м

По численному анализу пространственной модели 1 можно сделать следующие выводы:

1. Деформированный вид несущей рамы и величины перемещений близки к полученным при расчете отдельно стоящей рамы. Однако горизонтальные перемещения значительно уменьшились.
2. Вид эпюр и значения усилий в стержневых элементах получены с большей степенью точности. Так же при рассмотрении рамы, выделенной из пространственной модели, появляется возможность отследить весь спектр усилий, возникающих в раме, наибольший интерес из которых представляют значения крутящего момента M_x (рис. 15).
3. Пространственная модель позволяет оценить значения напряжений в пластинчатых элементах. Однако при данном способе моделирования получаемые значения обладают недостаточной точностью и дискретизацией.

Общий вид пространственной модели 2 и результаты расчета по ней представлены на рис 16-24.

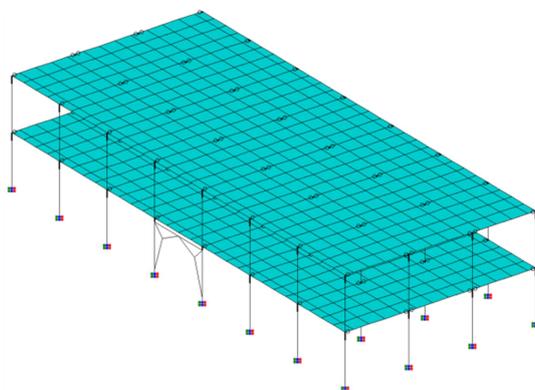


Рис. 16. Общий вид пространственной модели 2

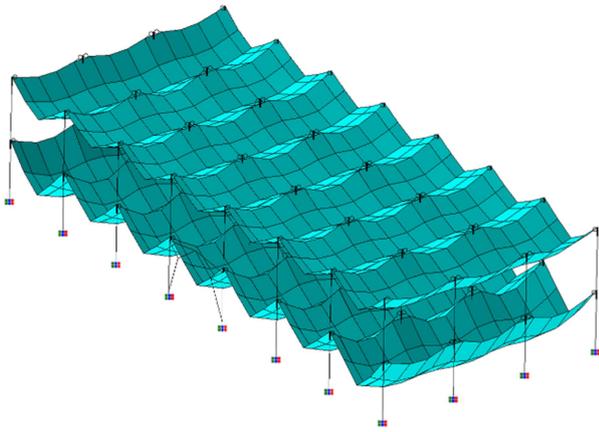


Рис. 17. Деформированный вид конструкции

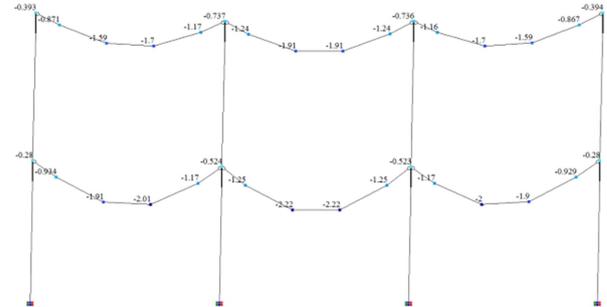


Рис. 18. Значения перемещений по оси Z в наиболее нагруженной раме, мм

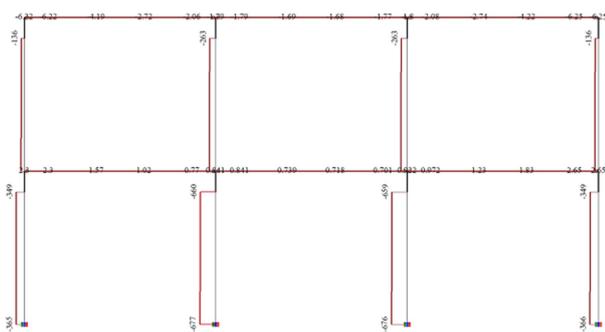


Рис. 19. Эпюры и значения продольной силы N, кН

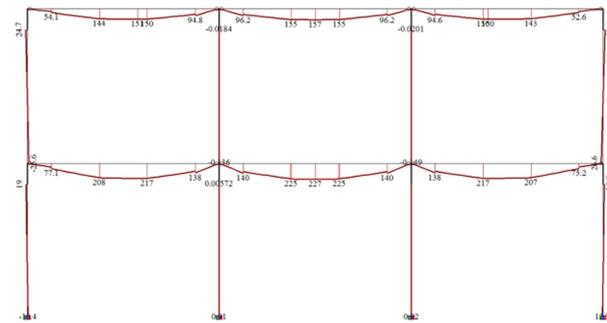


Рис. 20. Эпюры и значения изгибающего момента M_y , кН*м

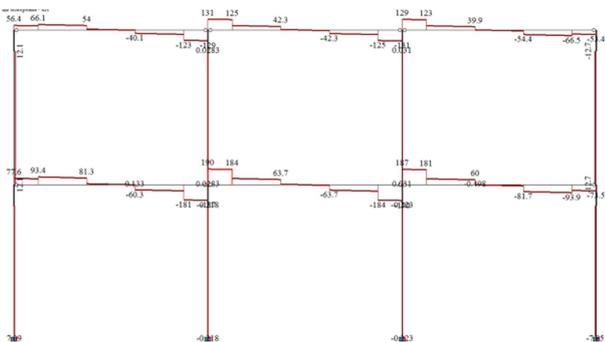


Рис. 21. Эпюры и значения поперечной силы Q_z , кН

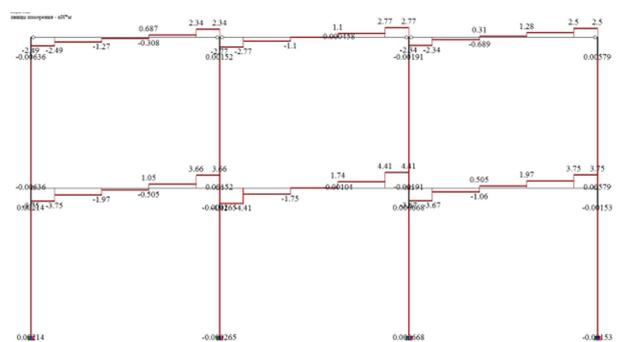


Рис. 22. Эпюры и значения крутящего момента M_x , кН*м

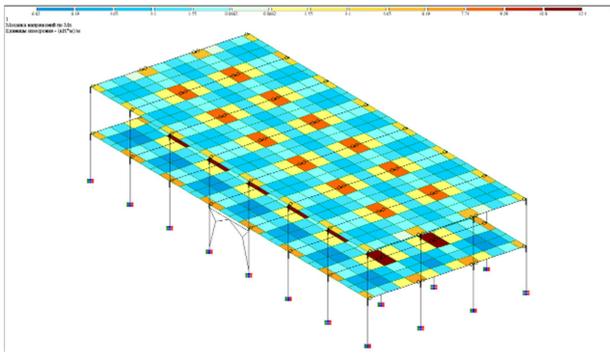


Рис. 23. Мозаика напряжений по M_x , (кН*м)/м

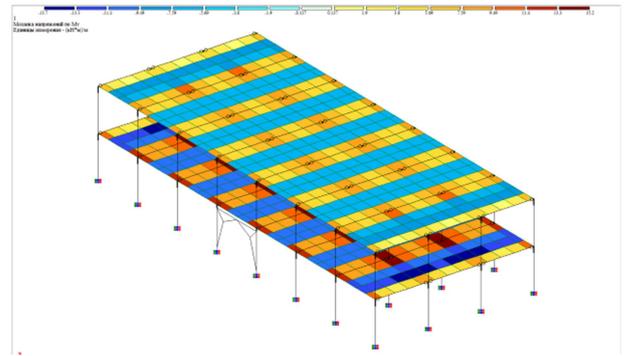


Рис. 24. Мозаика напряжений по M_y , (кН*м)/м

Анализ пространственной модели 2 позволяет сделать следующие выводы:

1. Деформированный вид несущей рамы и величины перемещений близки к полученным при расчете модели 1.
2. Вид эпюр усилий в стержневых элементах сходны с полученными в расчете модели 1. Значения усилий располагаются в середине спектра результатов, полученных при расчете плоской рамы и модели 1.
3. Модель 2 позволяет оценить значения напряжений в пластичнятых элементах с гораздо большей точностью. Полученные мозаики напряжений выявляют характерные зоны концентраций напряжений, позволяют выполнить анализ напряженно-деформированного состояния плит перекрытия (покрытия) с достаточной степенью точности и корректности.

Вид пространственной модели 3, эпюры перемещений и усилий приведены на рис. 25-33.

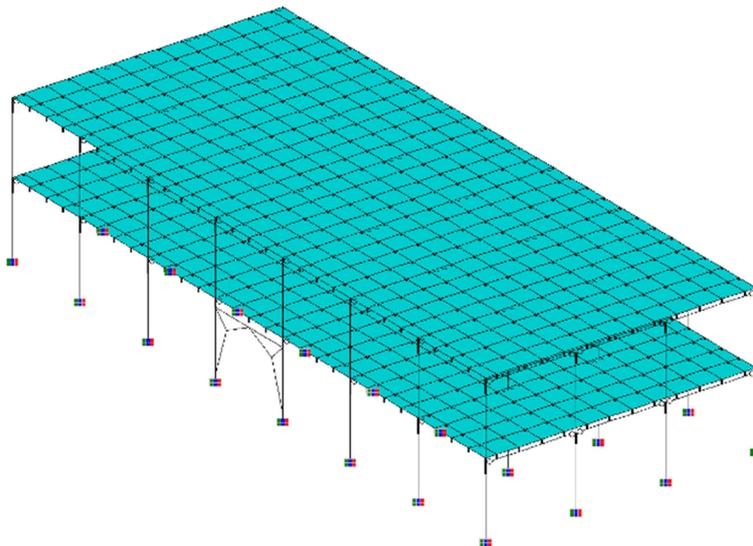


Рис. 25. Общий вид пространственной модели 3

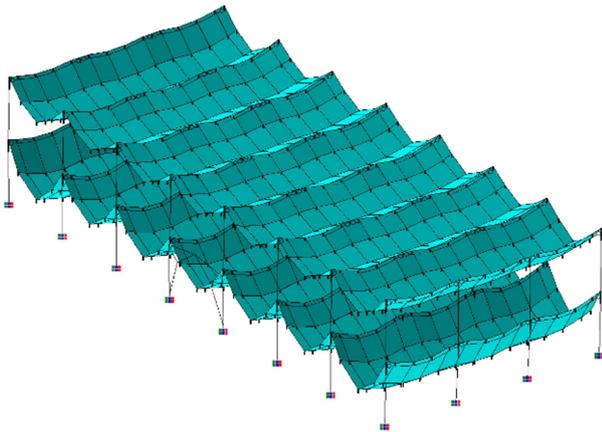


Рис. 26. Деформированный вид конструкции

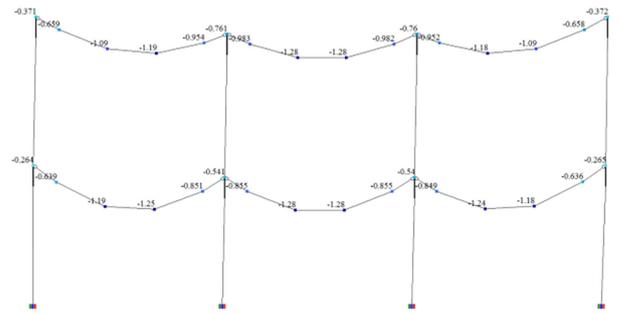


Рис. 27. Значения перемещений по оси Z в наиболее нагруженной раме, мм

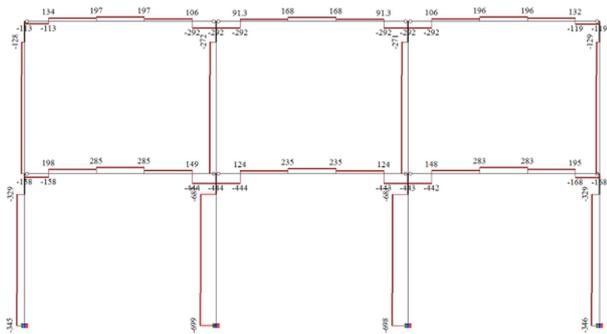


Рис. 28. Эпюры и значения продольной силы N, кН

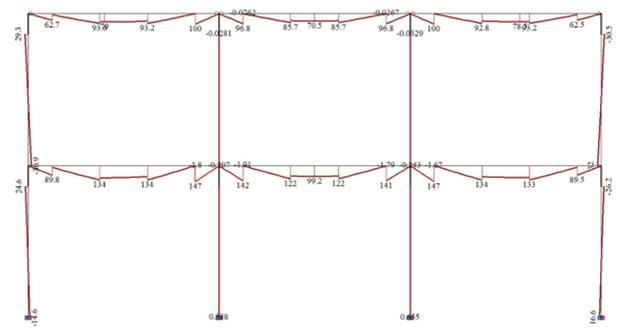


Рис. 29. Эпюры и значения игибающего момента M_y , кН*м

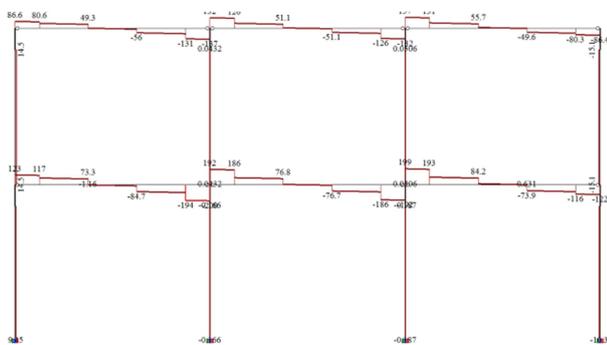


Рис. 30. Эпюры и значения поперечной силы Q_z , кН

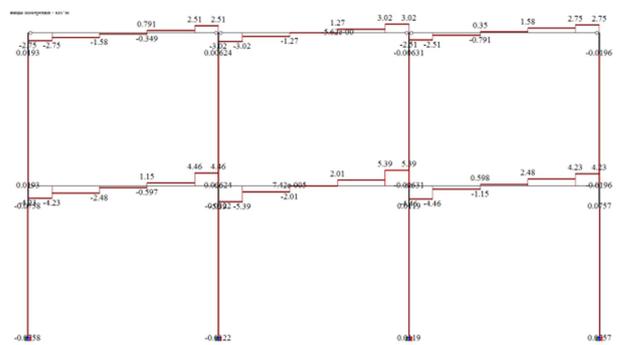


Рис. 31. Эпюры и значения крутящего момента M_x , кН*м

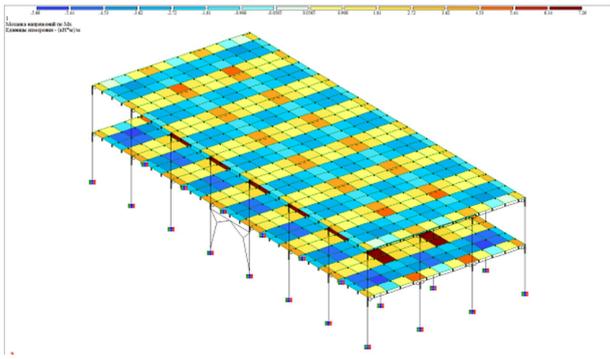


Рис. 32. Мозаика напряжений по M_x , (кН*м)/м

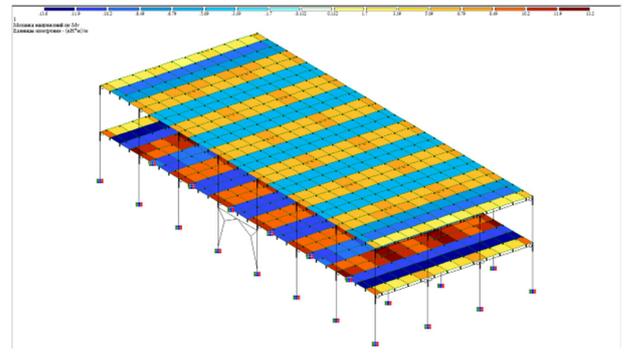


Рис. 33. Мозаика напряжений по M_y , (кН*м)/м

Результаты расчетов по пространственной модели 3 позволяют сделать следующие **ВЫВОДЫ:**

1. Деформированный вид несущей рамы близок к полученным ранее. Однако значения перемещений в середине пролетов ригелей значительно снизились.
2. Вид эпюр и значения усилий также значительно изменились. Произошло перераспределение усилий. В ригелях возникли зоны, воспринимающие значительную продольную силу. Это связано с наличием жестких вставок. Для получения значений изгибающих моментов, соответствующих балочным, необходимо перемножить значения продольных сил на размер жестких вставок и затем просуммировать с полученными в схеме значениями изгибающих моментов. Значения изгибающих моментов в середине пролетов снизились.
3. Мозаики напряжений, полученные при расчете модели 3, не имеют значительных отличий от полученных ранее при расчете модели 2.

Общий вид пространственной модели 4 и результаты расчетов представлены на рис. 34-42.

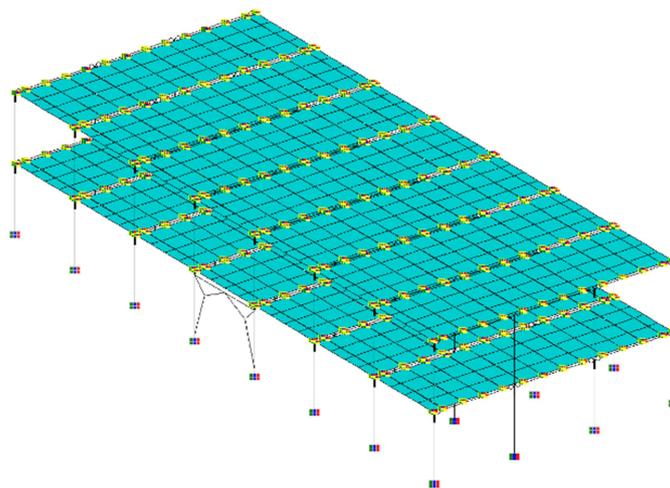


Рис. 34. Общий вид пространственной модели 4

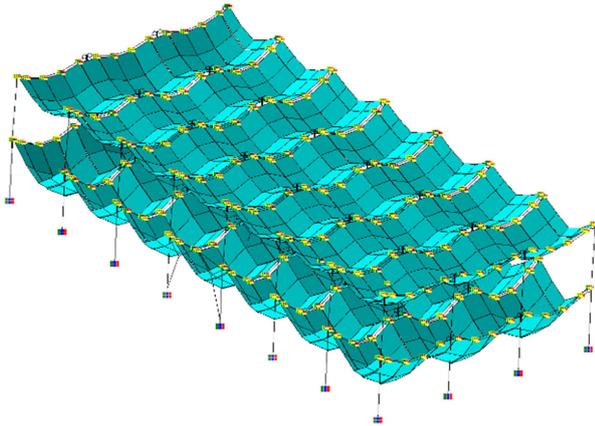


Рис. 35. Деформированный вид конструкции

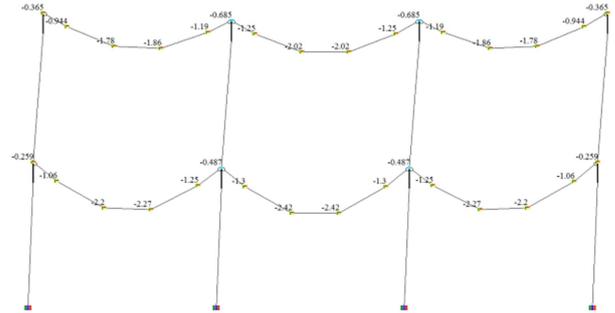


Рис. 36. Значения перемещений по оси Z в наиболее нагруженной раме, мм

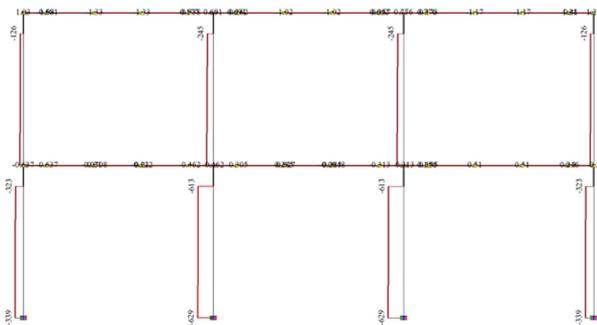


Рис. 37. Эпюры и значения продольной силы N, кН

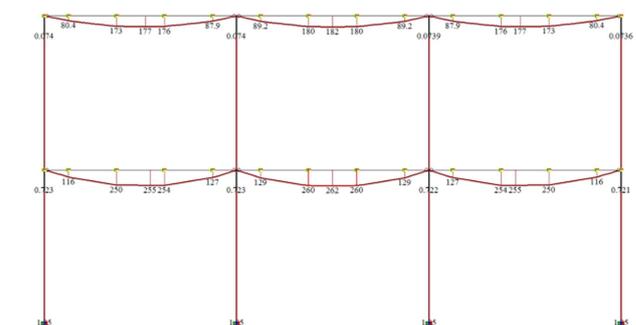


Рис. 38. Эпюры и значения изгибающего момента M_y , кН*м

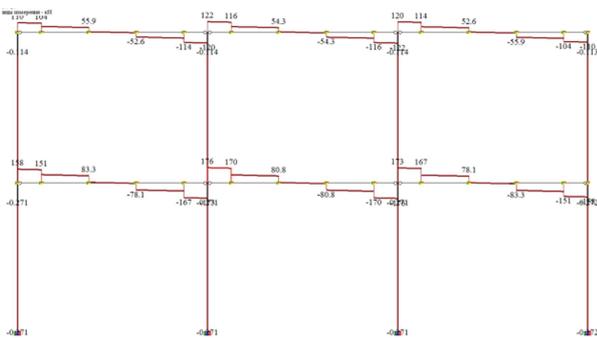


Рис. 39. Эпюры и значения поперечной силы Q_z , кН

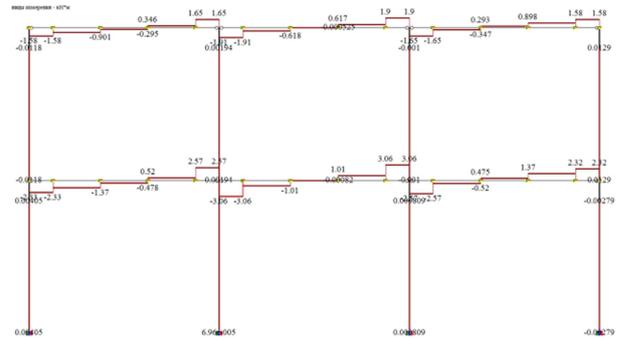


Рис. 40. Эпюры и значения крутящего момента M_x , кН*м

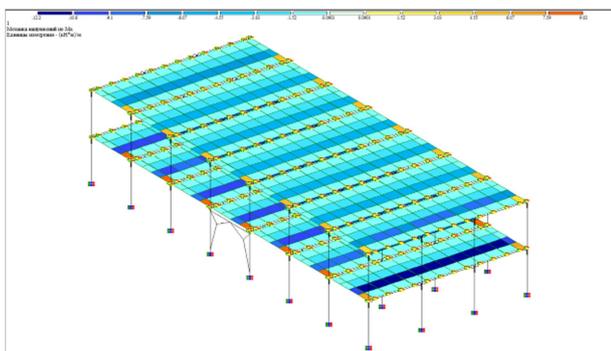


Рис. 41. Мозаика напряжений по M_x , (кН*м)/м

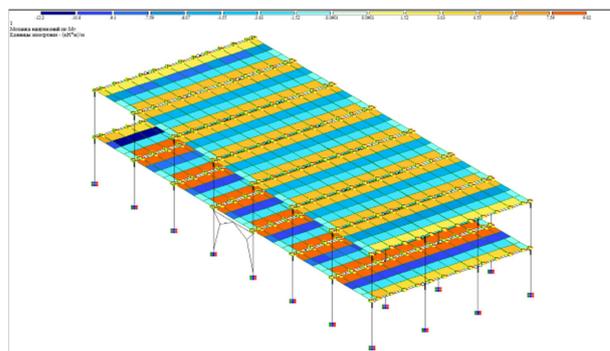


Рис. 42. Мозаика напряжений по M_y , Н*м)/м

Проведенный анализ пространственной модели 4 позволяет сделать следующие выводы:

1. Деформированный вид несущей рамы близок к полученным ранее. Однако значения перемещений в середине пролетов ригелей изменились, заняв нишу между значениями, полученными для исходной плоской рамы и модели 2.
2. Вид эпюр и значения усилий также изменились. В модели 4 отсутствуют ярко выраженные зоны существования продольной силы в ригелях. Эпюры моментов выровнились и приобрели вид, близкий к полученным при расчете плоской рамы. Однако значения моментов остались отличными от первоначального расчета.
3. Мозаики напряжений в пластинах приняли более сглаженный характер по сравнению с результатами в моделях 2 и 3. Также произошла корректировка значений.

Сравнительные характеристики рассмотренных моделей приведены в табл. 4.

Таблица 4

Сравнительные характеристики рассмотренных моделей

Расчетная модель	Контролируемый параметр						
	Стойки		Ригели				
	minN, кН	maxM _y , кН*м	Перемещение maxZ, мм	maxN, кН	maxM _y , кН*м	maxM _x , кН*м	maxQ _z , кН
Плоская рама (эталонная модель)	-668	2,19	-2,53	-0,294	279	-	186
Модель 1	-675	47,2	-1,93	1.93	196	5.06	191
Модель 2	-677	26,6	-2,22	1.57	227	3.75	190
Модель 3	-699	32	-1,28	285	122	4.23	200
Модель 4	-629	1,85	-2,42	-0.212	262	2.33	176

Выводы

1. Рассмотрение пространственных моделей каркасов зданий и сооружений позволяет получить более подробные и точные данные по напряженно-деформированному состоянию конструкции, учесть нагрузки и воздействия на сооружение с большей точностью, использовать результаты расчеты не только при последующем проектировании несущих элементов рам каркаса, но и при анализе НДС плит перекрытия (покрытия).
2. Расчетная модель 1 позволяет получить значения усилий и перемещений в несущих рамах, ниже эталонных (плоская рама). Это вызвано накапливанием части усилий в КЭ оболочки и отрицательно сказывается на корректности модели. Также деформирован-

ный вид конструкции при данном способе моделирования, а также невозможность оценить прогибы и напряжения, возникающие в пролете плит делают данную модель менее выгодной в сравнении с последующими.

3. При рассмотрении расчетной модели 2 были выявлены следующие особенности: значения усилий и перемещений ниже эталонных. Однако данная модель позволяет оценить перемещения и напряжения в пролете плит с достаточной точностью.
4. При использовании в расчетной модели жестких вставок по плите (модель 3) также возможно с достаточной точностью оценить перемещения и напряжения элементов, моделирующих плиты перекрытия (покрытия). При этом перераспределения усилий в стержневых элементах требуют дополнительных вспомогательных расчетов, что увеличивает сложность и трудоемкость использования полученных данных. Значения перемещений занижены.
5. Наиболее корректные значения по перемещениям, усилиям в стержневых элементах, а также напряжениям в пластинчатых КЭ представляет модель 4, в которой используется инструмент объединения перемещений. Она наиболее полно и точно характеризует напряженно-деформированное состояние реальной конструкции. Значения получаемых параметров близки к эталонным, при этом пространственная модель позволяет более точно оценить влияние различных нагрузок на здание. Однако эта расчетная модель отличается значительной трудоемкостью в построении.

Таким образом, для краткого расчета элементов несущих рам каркаса достаточно рассмотреть модель плоской рамы со сбором соответствующих нагрузок (эталонная модель). Для более подробной оценки напряженно-деформированного состояния пространственного каркаса наиболее выгодными являются модели 2 и 4. Данные модели с достаточной точностью позволяют оценить перемещения, усилия и напряжения не только в стержневых несущих элементах, но и в элементах, моделирующих плиты перекрытия (покрытия).

Построение модели 2 обладает невысокой трудоемкостью, однако следует помнить, что в данной расчетной модели происходит понижение усилий в стержневых несущих элементах за счет их накапливания в КЭ оболочки. Понижение усилий лежит в допустимом интервале погрешности по отношению к эталонным значениям, однако для сложных конструкций погрешность может быть превышена.

Построение модели 4 обладает значительной трудоемкостью и требует от инженера повышенного внимания. Однако данная модель позволяет получить наиболее корректные данные по расчету как стержневых элементов несущих рам, так и пластинчатых, моделирующих плиты перекрытия (покрытия). Данную расчетную модель рекомендуется использовать при необходимости подробного анализа напряженно-деформированного состояния элементов пространственных каркасов зданий и сооружений.

Библиографический список

1. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*/ Минрегион России. – М., 2010. – 44 с.
2. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 (с Изменениями N 1, 2). – М., 2012.

3. Сливкер, В.И. Строительная механика. Вариационные основы/ В.И Сливкер. – М.: Изд-во ФСИ, 2005. – 736 с.
4. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа, А.В. Перельмутер, В.И Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
5. Типовые конструкции и детали зданий и сооружений типовые. Конструкции многоэтажных производственных зданий. ИИ22-2/70 «Железобетонные колонны»/ Госстрой СССР. – М., 1993.
6. Типовые конструкции и детали зданий и сооружений типовые. Конструкции многоэтажных производственных зданий. ИИ23-1/70 «Железобетонные ригели»/ Госстрой СССР. – М., 1993.
7. Серия 1.465.1-20 «Плиты железобетонные ребристые размером 1,5х6 м». – М.: Минстрой России, 1993.

Reference

1. Set of rules 20.13330.2011. Loads and influences. Updated version of Building standards 2.01.07-85*/ Minregion of Russia. – М., 2010. – 44 p.
2. Set of rules 63.13330.2012 Concrete and reinforced concrete structures. Main principles. Updated version of Building standards 52-01-2003 (with changes N 1, 2). – М., 2012.
3. Slivker, V.I. Structural Mechanics. Variation basic/ V.I. Slivker. – М.: Pub. House FSI, 2005. – 736 p.
4. Peremulter, A.V. Design models of structures and possibility of their analysis, A.V.Peremulter, V.I. Slivker. – М.: ДМК Press, 2007. – 600 p.
5. Typical structures and buildings and structures members. Construction of multistoried industrial buildings. ИИ22-2/70 «Reinforced colomns»/ Gosstroy of USSR. – М., 1993.
6. Typical structures and buildings and structures members. Construction of multistoried industrial buildings. ИИ22-1/70 «Reinforced colomns»/ Gosstroy of USSR. – М., 1993.
7. Series 1.465.1-20 «Reinforced ribbed plates of 1,5x6 m size». – М.: Minstroy of Russia, 1993.

УДК 624.012.35:691

Воронежский государственный
технический университет
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики

А.В. Агарков

Магистрант кафедры строительной механики

П.Н. Меньших

Россия, г. Воронеж, тел. +7(952) 2557-46-48

e-mail: pavel.menshikh@gmail.com

Voronezh State University
of Technical University

PhD of Tech. Sc., Associate professor
of Structural Mechanics department

A.V. Agarkov

Undergraduate of Structural Mechanics department

P.N. Menshikh

Voronezh, Russia, tel. +7(952) 25574648

e-mail: pavel.menshikh@gmail.com

А.В. Агарков, П.Н. Меньших

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ УСИЛЕНИЯ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ

Рассмотрены вопросы, связанные с методикой расчета предварительно напряженной железобетонной балки, усиленной композитными материалами. Представлены результаты расчетов, полученные двумя разными методиками. Показаны графики зависимостей несущей способности балки от площади и нормативного сопротивления элементов усиления.

Ключевые слова: композитные материалы, усиление железобетонной балки, нелинейная деформационная модель.

A.V. Agarkov, P.N. Menshikh

RESEARCH OF REINFORCEMENT MEMBERS FROM COMPOSITE MATERIALS INFLUENCE ON REINFORCED CONCRETE BEAM BEARING CAPACITY

Problems connected with calculation method of post-tensioned concrete beam reinforced with composite materials are under consideration. There are given the results of calculations received by two different methods. The diagrams of beam bearing capacity dependences on the square and standard strength of reinforcement members are shown.

Key words: composite materials, strengthening of reinforced concrete beams, nonlinear deformation model.

В настоящей статье представлены результаты исследования влияния элементов усиления на несущую способность преднапряженной балки. Поставленные задачи в рамках данного исследования решались на примере балки пролетного строения (рис. 1, а), находящейся в составе существующего путепровода, расположенного на 335+442 км автодороги М-4 «Дон». В качестве элементов усиления использовались углеволоконные ламели, которые наклеивались на нижнюю грань сечения (рис. 1, б).

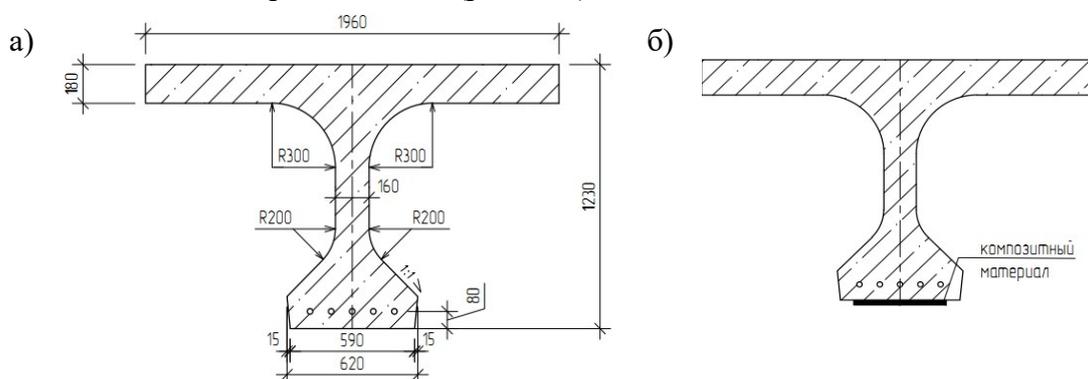


Рис. 1. Поперечный разрез балки: а – геометрические характеристики сечения; б – схема наклеивания композитного материала

Несущая способность балки оценивалась по прочности нормального сечения. Для определения несущей способности железобетонных балок, усиленных композитными материалами, существуют две принципиальные методики:

1. По предельным усилиям (ПУ);
2. На основе нелинейной деформационной модели (НДМ).

Первая – упрощенная методика определения предельных усилий, согласно которой прочность элемента считается обеспеченной, если действующие в его сечениях усилия не превышают предельных значений, определяемых из предположения о равномерном распределении нормальных напряжений, равных расчетным сопротивлениям бетона, арматуры и композитного материала.

При усилении под нагрузкой такой метод расчета не позволяет оценить влияние начальных напряжений и деформаций в усиливаемой части на несущую способность усиленной конструкции, так как в расчете по предельным состояниям не рассматривается напряженно-деформированное состояние конструкции до усиления (при эксплуатационных нагрузках) и исключается возможность учета распределения и перераспределения усилий между элементами (частями) усиленной конструкции при последующем её загрузении и включении элемента усиления в совместную работу. В расчетах используются линейные диаграммы деформирования материалов.

Вторая методика – общий метод анализа напряженно-деформированного состояния поперечных сечений элементов, который известен в русскоязычной литературе под названием «деформационная модель» сечения и включен в еврокоды, строительные нормы и своды правил России, нормы Белоруссии и других стран. Этот метод основан на использовании диаграмм деформирования, аппроксимирующих нелинейную работу бетона и арматуры, и некоторого закона распределения относительных деформаций по площади поперечных сечений элементов; здесь применяется гипотеза плоских сечений.

Вышеотмеченных недостатков, касающихся методики предельных усилий, лишена методика на основе нелинейной деформационной модели. Она позволяет учитывать физическую и геометрическую нелинейность конструкции, различные физико-механические и реологические свойства материалов усиливаемой конструкции и элементов усиления, возраст и предысторию нагружения.

Следует отметить, что в технической литературе последняя методика отражена в меньшей степени, мало информации по практической составляющей вопроса, отсутствуют примеры расчетов, при этом она является рекомендуемой к применению в расчетах, поэтому в работе большее внимание уделено именно этой методике.

Ниже приняты следующие допущения для нелинейной деформационной модели: условие гипотезы плоских сечений, допущение об отсутствии сопротивления бетона растяжению, допущение об отсутствии деформаций сдвига в клеевом составе; трехлинейная диаграмма состояния бетона (рис. 2, а) при сжатии и трехлинейная диаграмма состояния высокопрочной арматуры (рис. 2, б).

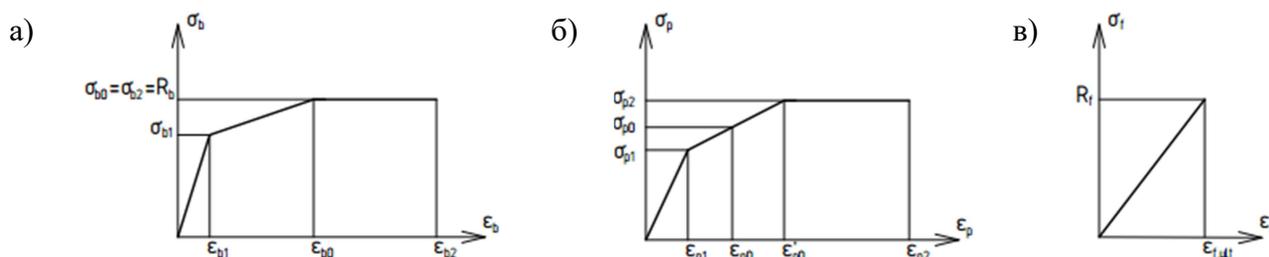


Рис. 2. Диаграммы состояния:

а – сжатого бетона; б – высокопрочной арматуры; в – композитного материала

Ниже приведены диаграммы материалов, а также функции, описывающие аналитические зависимости «напряжения-деформации», из [1] и СП 63.13330.2012 [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_b = \varepsilon_b E_b, \\ \sigma_b = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{b1}}{R_b} \right) \cdot \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}} + \frac{\sigma_{b1}}{R_b} \right] \cdot R_b, \\ \sigma_b = R_b; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{при } 0 < \varepsilon_b < \varepsilon_{b1}, \\ \text{при } \varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b0}, \\ \text{при } \varepsilon_{b0} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b2}; \end{array} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = (\varepsilon_p + \varepsilon_{sp}) E_p, \\ \sigma_p = \left[\left(1 - \frac{\sigma_{p1}}{R_p} \right) \cdot \frac{(\varepsilon_p + \varepsilon_{sp}) - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p0} - \varepsilon_{p1}} + \frac{\sigma_{p1}}{R_p} \right] \cdot R_p, \\ \sigma_p = 1.1 R_p; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{при } 0 < \varepsilon_p < \varepsilon_{p1}, \\ \text{при } \varepsilon_{p1} \leq \varepsilon_p \leq \varepsilon'_{p0}; \\ \text{при } \varepsilon'_{p0} \leq \varepsilon_p \leq \varepsilon_{p2}; \end{array} \quad (2)$$

$$\sigma_f = E_f (\varepsilon_f - \varepsilon_{bt}^0) \geq 0. \quad \text{при } 0 < \varepsilon_f < \varepsilon_{f,ult}. \quad (3)$$

где E_b, R_b – начальный модуль упругости и расчетное сопротивление бетона при сжатии; E_p, R_p – модуль упругости и расчетное сопротивление высокопрочной арматуры при растяжении; E_f – модуль упругости композитного материала; ε_{sp} – относительная деформация предварительного напряжения арматуры, определяемая с учетом потерь предварительного напряжения; ε_{bt}^0 – начальные относительные деформации растянутой грани сечения (до усиления); $\varepsilon_{f,ult}$ – предельные относительные деформации композитного материала.

В соответствии с используемой в расчете гипотезой плоских сечений распределение относительных деформаций по высоте принимается линейным (рис. 3):

$$\varepsilon_b(\varepsilon_0, \rho, z1) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\rho} \cdot (z1), \quad \varepsilon_p(\varepsilon_0, \rho) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\rho} \cdot Z_p, \quad \varepsilon_f(\varepsilon_0, \rho) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\rho} \cdot Z_f. \quad (4)$$

где $z1$ – координата высоты, отсчитываемая от точки О до центра тяжести элементарного участка бетона (рис. 3, а; точка О расположена в ц. т. сечения балки для удобства, её можно расположить в любой координате сечения); Z_p – расстояние от точки О до ц. т. арматуры; Z_f – расстояние от точки О до растянутой грани сечения.

Согласно [1] в качестве независимых переменных принимаются относительная деформация волокна ε_0 (рис. 3, б) в точке О и радиус кривизны ρ относительно оси в плоскости действия изгибающего момента.

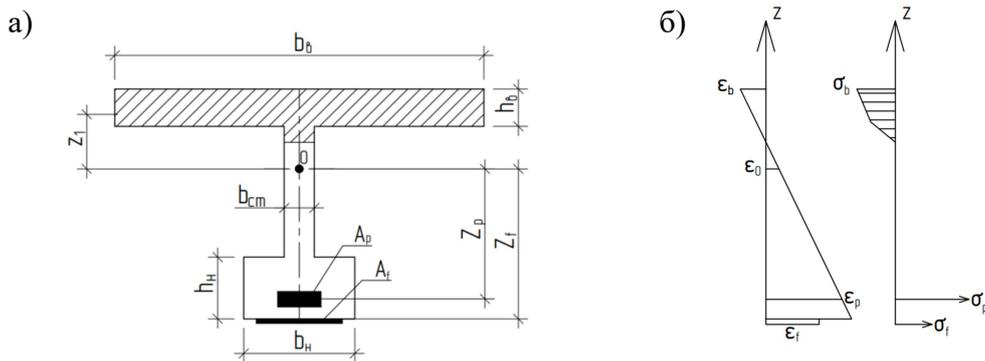


Рис. 3. Схема к деформационному расчету по прочности балки с предварительно напряженной арматурой и композитными материалами: а – приведенное сечение; б – эпюры распределения деформаций и напряжений по высоте сечения балки

Равнодействующие усилий в сжатой зоне бетона F_b , в предварительно напряженной арматуре F_p и в композитном материале F_f :

$$F_b = \int_A \sigma_b dA, \quad F_p = \sigma_p A_p, \quad F_f = \sigma_f A_f. \quad (5)$$

где A, dA – площадь бетона сжатой части сечения и её элементарный фрагмент; A_p, A_f – площадь сечения арматуры и композитного материала;

Изгибающие моменты M :

$$M_b = \int_A (\sigma_b \cdot z_1) dA, \quad M_p = \sigma_p \cdot A_p \cdot Z_p, \quad M_f = \sigma_f \cdot A_f \cdot Z_f. \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) в отличие от уравнений в [1] знак суммы заменен на знак интеграла (\int), означающий суммирование элементарных долей геометрических характеристик в пределах частей сечения: верхней, нижней полки и стенки.

В решаемой задаче действующей нагрузкой является изгибающий момент, продольная сила отсутствует. Система уравнений равновесия внутренних и внешних сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F(\varepsilon_0, \rho) = F_b + F_p + F_f = 0; \\ \sum M(\varepsilon_0, \rho) = M_b + M_p + M_f + M_{вн} = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

где $M_{вн}$ – изгибающий момент от внешней нагрузки.

При решении системы уравнений (7) должны соблюдаться следующие условия:

$$|\varepsilon_b| \leq \varepsilon_{b2}, \quad \varepsilon_p \leq \varepsilon_{p2}, \quad \varepsilon_f - \varepsilon_{bt}^0 \leq \varepsilon_{f,ult}. \quad (8)$$

В исследовании алгоритм решения задачи на основе нелинейной деформационной модели с учетом стадийности возведения конструкции состоит из следующих шагов:

1. Задаются исходные параметры: геометрические размеры сечения (см. рис. 3); данные по армированию A_p, R_p, A_f, R_f ; данные по бетону R_b ; расчетные характеристики материалов E_b, E_p, E_f ; предельные деформации $\varepsilon_{b2}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{f,ult}$.
2. На первом этапе расчета определяется напряженно-деформированное состояние (НДС) железобетонной балки без учета системы усиления. Для этого решается система уравнений (7) при $F_f = 0$ и $M_f = 0$ на нагрузки, действующие на балку до усиления (на этом этапе в данной задаче $M_{вн}$ принимается от собственного веса). В результате расчета определяется значение относительной деформации растянутой грани сечения ε_{bt}^0 , которое учитывается на втором этапе расчета.
3. На втором этапе решается система уравнений (7) с учетом системы усиления и начального НДС балки. В первом приближении значение $M_{вн}$ принимается равным значению предельного момента балки до усиления. Далее $M_{вн}$ увеличивается на 1 % до тех пор, пока не перестанет соблюдаться одно из условий (7). Подбранное значение $M_{вн}$ и будет соответствовать значению предельного момента усиленной балки.

Алгоритм был реализован в математическом пакете MathCAD и верифицирован на примерах с напрягаемой и обычной арматурой, содержащихся в пособии к СП 52-102-2004 [9].

Сравнение результатов по предельному моменту приведено в таблице.

Таблица

Примеры из СП 52-102-2004 [3]	$M_{пред},$ кН·м в пособии	$M_{пред},$ кН·м по НДМ	$\Delta,$ %
Пример 3 (прямоугольное сечение)	572.0	572.8	0.14
Пример 7 (тавровое сечение)	811.2	819.4	1

После апробации алгоритма была произведена серия расчетов по двум методикам с целью сравнения результатов. Для примера в качестве элемента усиления была взята ламель FibArm Lamel ($b_f = 500$ мм, $t_f = 1.2$ мм, $R_{fn} = 2800$ МПа, $E_f = 165000$ МПа). Сравнение представлено на условном графике (рис. 4) в виде зависимости предельного момента балки от площади композитного материала (количества слоев). Точками на кривых обозначены те значения площадей, которые соответствуют целому количеству слоев элементов усиления.

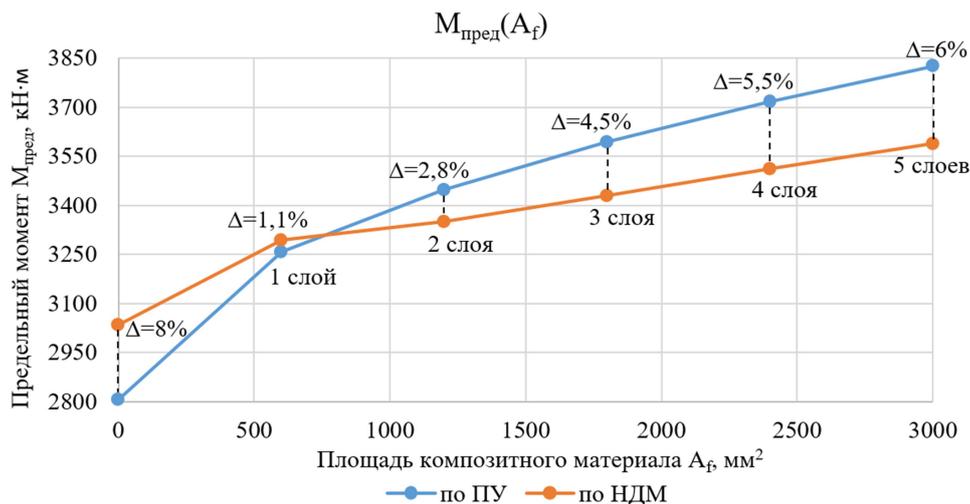


Рис. 4. График сравнения результатов

Анализируя график, можно сделать вывод о том, что результаты расчетов по двум разным методикам отличаются не более чем на 8 %.

Необходимо отметить, что методика предельных усилий имеет ряд допущений, она легко реализуется и подходит для оценочных результатов. С другой стороны, методика на основе нелинейной деформационной модели более трудоемкая, требует более высокой квалификации её исполнителя, но позволяет получать более достоверные результаты и лучше отражает работу конструкции.

Также выполнена другая серия расчетов по нелинейной деформационной модели для построения зависимости предельного момента усиленной балки от площади композитного материала A_f . При этом изменение площади A_f осуществлялось за счет изменения ширины элементов усиления и количества слоев (рис. 5).

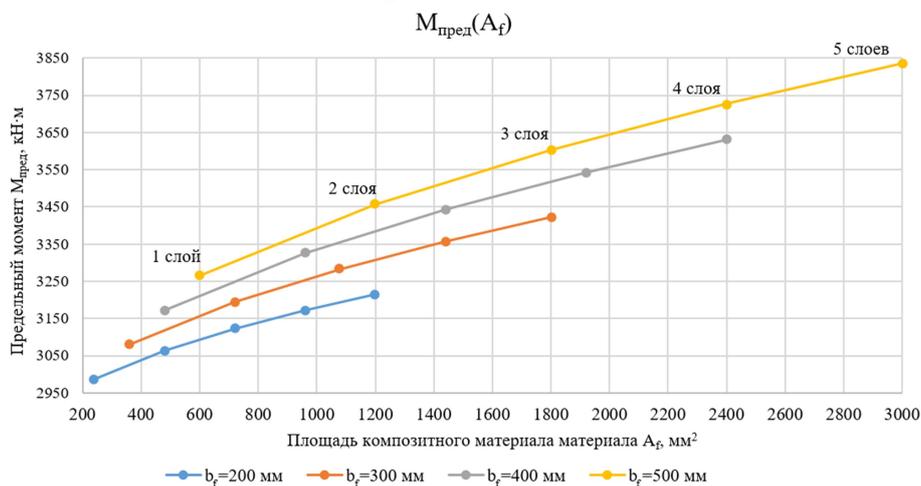


Рис. 5. Диаграмма $M_{пред}(A_f)$

По диаграмме видно, что предельный момент растет с увеличением площади материала, но эффективность от усиления снижается с наклеиванием очередного слоя. Это связано с конструктивными особенностями, которые учитываются коэффициентом условий работы γ_{f2} (коэффициент отслаивания). Коэффициент уменьшается при увеличении количества слоев (рис. 6) и их толщины.

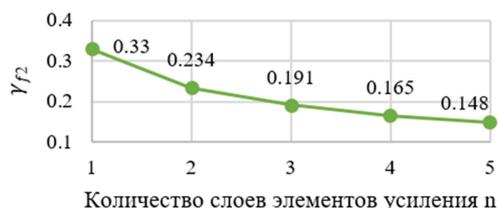


Рис. 6. График зависимости $\gamma_{f2}(n)$

Расчетное сопротивление материала растяжению

$$R_f = \frac{\gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot R_{fn}}{\gamma_f}, \quad (9)$$

где γ_{f1} и γ_f – коэффициенты надежности и условий работы эксплуатации;

R_{fn} – нормативное сопротивление растяжению.

Таким образом, расчетное сопротивление материала растяжению может быть уменьшено в 3-6 раз за счет лишь коэффициента отслаивания.

Для оценки влияния нормативного сопротивления материала R_{fn} на предельный момент выполнена другая серия расчетов по предельным усилиям. Рассмотрено 5 случаев с разным количеством слоев при постоянной ширине материала и толщине монослоя. Зависимость $M_{пред}(R_{fn})$ представлена на рис. 7.

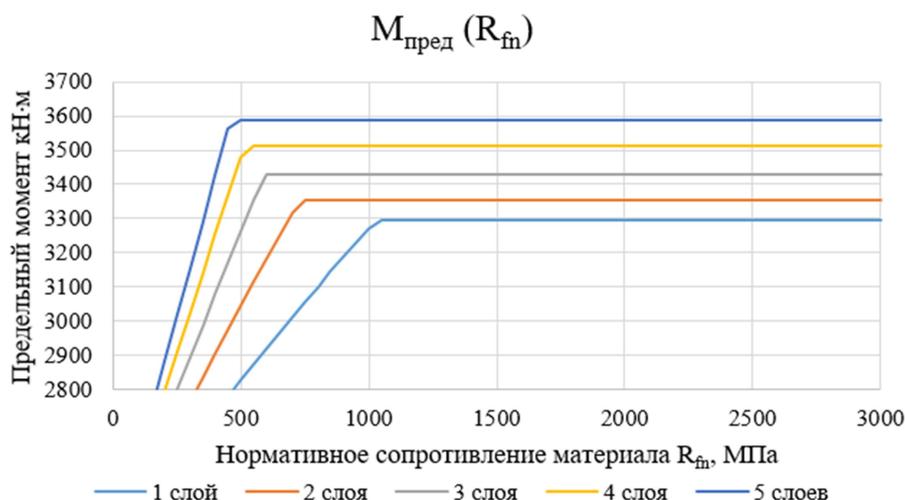


Рис. 7. График зависимости $M_{пред}(R_{fn})$

Во всех случаях проявляется одинаковая закономерность. При использовании более прочного композитного материала на растяжение повышается предельный момент балки и её несущая способность до определенного значения. Причиной тому служит также коэффициент условий работы γ_{f2} .

На основании графиков $M_{пред}(A_f)$ и $M_{пред}(R_{fn})$ (см. рис. 5, 7) можно сделать вывод, что существует предел по повышению несущей способности балки с помощью композитных материалов. Этот предел обусловлен конструктивными особенностями материалов, который учитывается в виде коэффициента условий работы γ_{f2} .

В рамках данного исследования несущую способность железобетонной балки при помощи углеволоконных ламелей удалось повысить до 23 % по НДМ (до 28 % по ПУ).

Выводы

1. Разработан и реализован алгоритм расчета предварительно напряженной ж/б балки, усиленной композитными материалами, на основе НДМ в MathCAD в соответствии с [7]. Алгоритм апробирован на простых примерах из пособия [9].

2. Выполнены расчеты ж/б балки по двум методикам. Полученные результаты отличаются незначительно (разница составила 1-8 %). Для расчетов ж/б конструкций, усиленных композитными материалами, рекомендуется пользоваться нелинейной деформационной моделью, т.к. она лучше отражает работу конструкции. Методику расчета по предельным усилиям возможно использовать для оценочных результатов.

3. Получены зависимости $M_{пред}(A_f)$, $M_{пред}(R_{fn})$. При усилении балки с помощью композитных материалов увеличение несущей способности ограничено конструктивными особенностями материалами (количество слоев, их толщина), учитываемыми с помощью коэффициента отслаивания.

Библиографический список

1. Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами/ под рук. д.т.н., проф. В.А. Клевцова. – М.: НИИЖБ, 2006.
2. Шилин, А.А. Внешнее армирование железобетонных конструкций композиционными материалами/ А.А. Шилин, В.А. Пшеничный, Д.В. Картузов. – М.: Стройиздат, 2007.
3. СТО 13613997-001–2011. Усиление железобетонных конструкций композитными материалами фирмы Sika. – М.: ОАО «ЦНИИПРОМЗДАНИЙ», 2011.
4. СТО 2256-002–2011. Система внешнего армирования из полимерных композитов FibArm для ремонта и усиления строительных конструкций / Холдинговая компания «Композит». – Дата принятия: 18 января 2012.
5. СТО 70386662-101–2012. Применение системы внешнего армирования Mbrace для усиления главных балок железобетонных пролетных строений железнодорожных мостов. – М.: ООО «БАСФ Строительные системы», 2012.
6. Шапиро, Д.М. Деформационный нелинейный расчёт железобетонных балок таврового сечения / Д.М. Шапиро, А.В. Агарков / Науч. вестн. Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и Архитектура. – Воронеж, 2008. – Вып. 1(9) – С. 38 – 44.
7. Шапиро, Д.М. Нелинейные методы расчёта в современном проектировании (на примерах объектов геотехники и мостовых сооружений) / Д.М. Шапиро, А.В. Агарков, Н.Н. Мельничук, Чан Тхи Тхюи Ван/ Науч. вестн. Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и Архитектура. – Воронеж, 2009. – Вып. 3 (15). – С. 85 – 94 .
8. Свод правил по проектированию и строительству. СП 164.1325800.2014. Усиление железобетонных конструкций композитными материалами. – М., 2015.
9. Свод правил по проектированию и строительству. СП 63.1330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. – М., 2012.
10. Пособие к СП 52-102-2004 «Пособие по проектированию предварительно напряженных железобетонных конструкций из тяжелого бетона». – М., 2004.

References

1. Recommendations for concrete structures reinforcement with composite materials/ under the guidance of Dr of Technical Sciences, prof. V.A. Klevtsova. – М.: NIIB, 2006.
- 2 .Shilin A.A., Strengthening of reinforced concrete structures with composite materials. A.A Shilin., V.A. Pshenichny, D.V Kartuzov Moscow: Stroyizdat, 2007.

3. Corporate Standard 13613997-001–2011. Reinforcement of concrete structures with Sika composites. Moscow: OAO TsNIIPROMZDANII Publ, 2011.
4. Corporate Standard 2256-002–2011. System of external reinforcement from polymer composites FibArm for building structures repair and strengthening/ Holding company «Composite». – Accepted date: 18, January, 2012.
5. Corporate Standard 2256-002-2011. External reinforcement system Mbrace for main concrete railway bridge span beams system application. M.: OOO «BASF Building systems», 2012.
6. Shapiro, D.M. Deformational non-linear calculation of reinforced T-section concrete beams / D.M. Shapiro, A.V. Agarkov / «Scientific Bulletin». – «Building and Architecture». – Voronezh, 2008. – Issue 1(9) – P. 38 – 44.
7. Shapiro, D.M. Nonlinear design methods in modern designing (on examples of geotechnical and bridge constructions objects and)// «Building and Architecture»/ D.M. Shapiro, A.V. Agarkov, N.N. Melnichuk, Chan Tkhi Tkhui Van. – Voronezh, 2009. – Issue 3 (15). – P. 85-94.
8. Set of rules on designing and construction 164.1325800.2014 SP. Strengthening of reinforced concrete structures with composite materials. Moscow 2015.
9. Set of rules on designing and building 63.1330.2012. Concrete and reinforced concrete structures. – M., 2012.
10. Aid for set of rules 52-102-2004 «Aid on designing of prestressed reinforced structures from heavy concrete». – M., 2004.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.014.27: 625.74.001.24

Воронежский государственный

технический университет

Д-р техн. наук, проф. кафедры

строительной механики

Д.М. Шапиро

Россия, г. Воронеж, тел. +7(473)271-52-30

e-mail: davshap@mail.ru

Канд. техн. наук, ведущий инженер

ООО «Центр-Дорсервис»

А.П. Тютин

Россия, г. Воронеж, тел. +7(950)753-20-05

e-mail: alextoomail@mail.ru

Ведущий специалист

ООО «Центр-Дорсервис»

В.А. Родионов

Россия, г. Воронеж, тел.: +7(903)854-35-34

Voronezh State Technical University

Dr. of Tech. Sc., Professor of

Structural Mechanics department

D.M. Shapiro

Voronezh, Russia, tel.: +7(473)271-52-30

e-mail: davshap@mail.ru

PhD of Tech. Sc., Advanced engineer

of “Tzentr Dorservis” Ltd

A.P. Tyutin

Voronezh, Russia, tel.: +7(950)753-20-05

e-mail: alextoomail@mail.ru

Top expert

of “Tzentr Dorservis” Ltd

V.A. Rodionov

Voronezh, Russia, tel.: +7(903)854-35-34

Д.М. Шапиро, А.П. Тютин, В.А. Родионов

ДОРОЖНЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ СООРУЖЕНИЯ ИЗ СВАРНОГО ТРУБЧАТОГО ШПУНТА: КОНСТРУКЦИИ, ТЕОРИЯ, РАСЧЁТ

Содержится описание разработанных авторами конструктивно-технологических решений, теоретических основ и алгоритмизации расчёта дорожных инженерных сооружений (мостовых устоев, подпорных стенок) из сварного трубчатого шпунта. Приводятся решения прикладных задач, конечно-элементная схематизация расчёта, комплекс проверок по предельным состояниям, описание программного обеспечения, пример расчёта.

Ключевые слова: шпунт трубчатый сварной, расчёт, проектирование, дорожные подпорные стенки, мостовые устои.

D.M. Shapiro, A.P. Tyutin, V.A. Rodionov

ROAD ENGINEERING CONSTRUCTIONS FROM WELDED PIPE GROOVING-AND-TONGUING: STRUCTURES, THEORY, DESIGN

There are presented the description of the developed by the authors technical and process design details, theoretical basis and algorithms of road engineering structures design (abutments, retaining walls) from welded pipe rabbet. The solutions of the applied problems, finite element design scheme, control according to limit states, road retaining walls, abutments are given in the article

Key words: welded pipe grooving-and-tonguing, calculation, design, road retaining walls, abutments.

1. Конструктивно-технологические решения. В последние десятилетия в области строительства ограждающих систем получило развитие новое конструктивно-технологическое направление – возведение подпорных стенок из трубчатого сварного шпунта (ШТС) [1, 2]. Конструкции ШТС состоят из стальной трубы диаметром 530–1620 мм и приваренных к ней замковых соединений (рис. 1).

© Шапиро Д.М., Тютин А.П., Родионов В.А., 2017

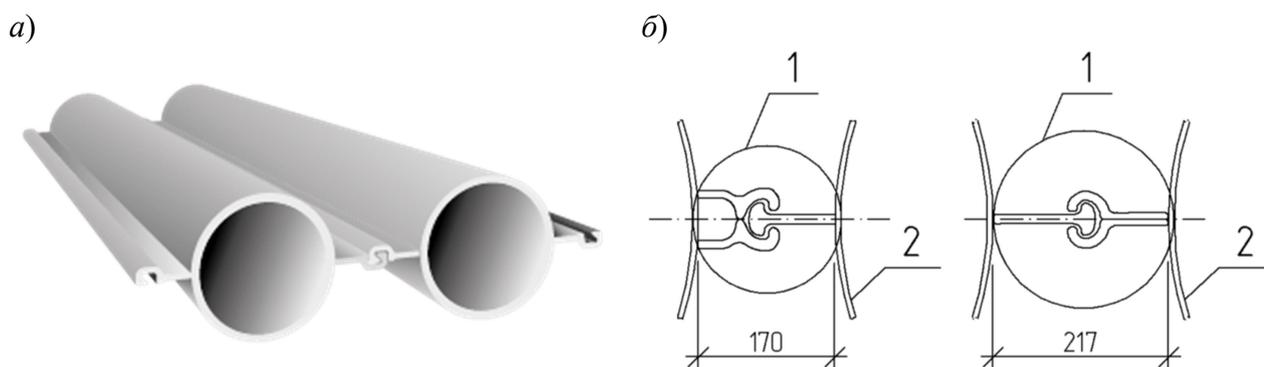


Рис. 1. Конструкции трубчатого сварного шпунта:
а – схема элементов ШТС; *б* – примеры высокоэффективных замковых соединений (1), 2 – труба

Внутренняя полость трубы заполняется песчано-цементной смесью (в соотношении 5:1), монолитным железобетоном или грунтовой пробкой, оставляемой на части длины в пределах заделки в основание.

Конструкции ШТС наиболее широко представлены в гидротехническом строительстве: при устройстве набережных, причалов, ограждений искусственных островов, берегоукреплений. Инициатором их внедрения является ООО «Трест Запсибгидрострой», который при научном сопровождении ЦНИИСа применяет эти конструкции для строительства капитальных объектов с начала 90-х годов прошлого века практически на всей территории Российской Федерации.

Сортамент ШТС включает более 500 типоразмеров, общий вес трубошпунта построенных и строящихся объектов превышает 200 тыс. тонн. За 25 лет создано заводское производство конструкций ШТС, накоплен опыт проектирования и строительства, сформирована система документов технического регулирования, центральным из которых является ГОСТ Р 52664-2010 Шпунт трубчатый сварной. Технические условия.

Достоинствами конструкций ШТС являются высокий уровень заводской готовности, прочность и простота стыковых соединений, пригодность к скоростному строительству и производству работ в стеснённых и суровых климатических условиях. Эти качества придают им привлекательность для применения в строительстве объектов различных назначений, в том числе объектов дорожной отрасли: устоев (крайних опор) мостовых сооружений, подпорных стенок земляного полотна, рамповых участков тоннелей, других видов ограждающих систем.

В 2016 г. научно-проектное предприятие ООО «Центр-Дорсервис» по заданию Федерального дорожного агентства «Росавтодор» разработало отраслевой дорожный документ (ОДМ) «Методические рекомендации по применению трубчатого сварного шпунта при строительстве и реконструкции автомобильных дорог» [3]. Его содержание включает описания конструктивно-технологических решений и инженерных расчётов с использованием современных программных комплексов, технические требования, обеспечивающие надёжность, долговечность и безотказность инженерных сооружений из ШТС в дорожной отрасли. Схематичные изображения таких объектов (мостовых устоев, дорожных подпорных стенок, рамповых участков тоннелей) и их расчётные параметры показаны на рис. 2.

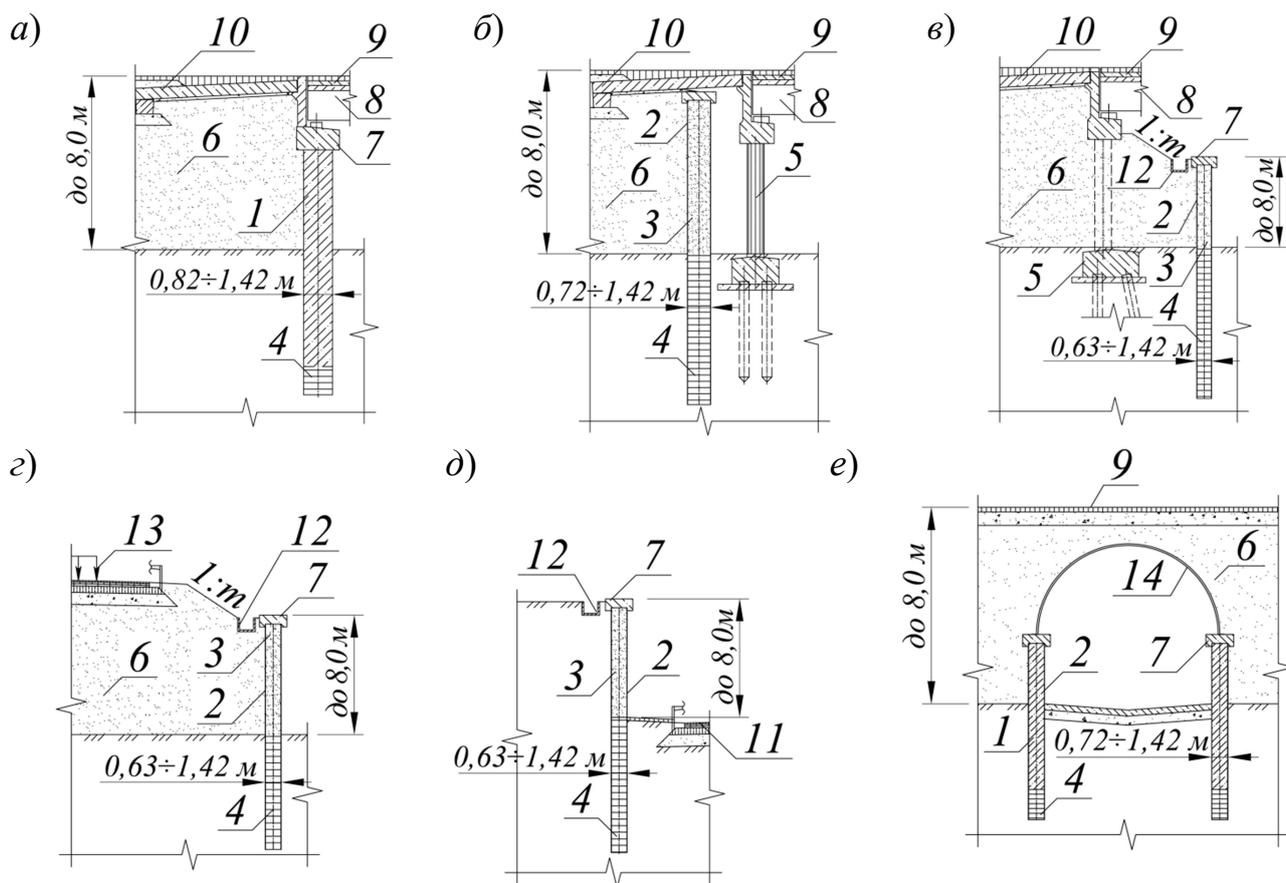


Рис. 2. Схемы дорожных инженерных сооружений из ШТС:

a, б – мостовые устои с совмещёнными и раздельными функциями; *в* – подпорная стенка, ограничивающая заложение конуса моста; *г* – дорожная подпорная стенка; *д* – подпорная стенка рампового участка тоннеля; *е* – водопропускное сооружение из гофрированной стали; 1 – трубошпунт, заполненный железобетоном; 2 – трубошпунтовая подпорная стенка; 3 – заполнение песчано-цементной смесью; 4 – грунтовое ядро; 5 – опора (устой) моста; 6 – земляное полотно дороги, засыпка за устоем; 7 – оголовок устоя, железобетонная насадка; 8, 9 – пролётное строение и дорожная одежда; 10 – переходная плита; 11 – проезжая часть; 12 – водоотводной лоток; 13 – временная нагрузка; 14 – конструкции из гофрированного металла

2. Описание расчётных схем. Расчётный раздел Методических рекомендаций включает описание инженерного метода, основанного на известных положениях теории [4]. Расчёты ШТС в составе дорожных инженерных сооружений выполняются в соответствии с условиями плоской задачи (плоская деформация) по предельным состояниям (ПС) двух групп: первой группы (по прочности и несущей способности) с использованием расчётных значений нагрузок и прочностных характеристик грунтов; второй группы (по перемещениям) с нормативными значениями нагрузок и прочностных характеристик грунтов.

На расчётных схемах (рис. 3) трубошпунтовые подпорные стенки *1* заменяются плоскими стержнями конечной жёсткости *2* с расчётной шириной 1 м, состоящими из двух участков: наземного *AB* и заглублённого в основание *BC*.

Участок *AB* воспринимает активное давление грунта со стороны задней грани шпунтовой подпорной стенки, нагрузки *P, H, M*, приложенные к оголовку устоя (рис. 3, *a*), и собственный вес конструкций подпорной стенки.

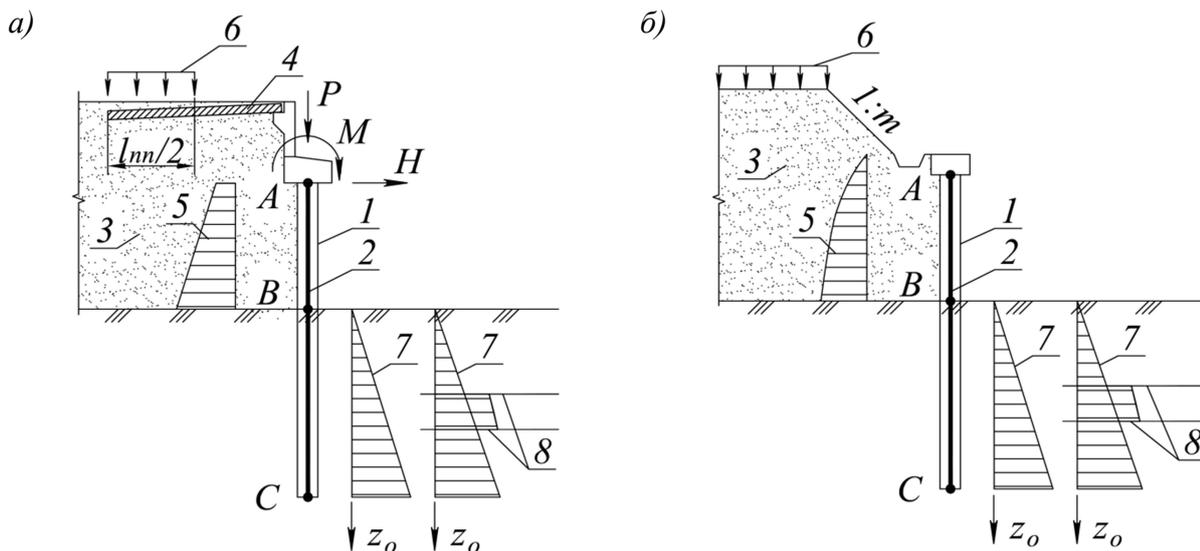


Рис. 3. Расчётные схемы дорожных инженерных сооружений из ШТС: *a* – устоя мостового сооружения; *б* – дорожной подпорной стенки; 1 – устой (подпорная стенка); 2 – плоский стержень; 3 – засыпка за устоем, земляное полотно дороги; 4 – переходная плита; 5 – эпюра активного давления грунта; 6 – временная дорожная вертикальная нагрузка; 7 – распределение коэффициента постели $C_z=Kz_0$ в однородном и слоистом основаниях; 8 – границы геологических слоёв

Для описания силового взаимодействия грунта и заглубленной части *BC* используется расчётная схема, сочетающая теорию метода местных упругих деформаций с треугольной формой распределения коэффициента постели и предельного напряжённого состояния грунта.

Геометрические характеристики сечения: площадь, момент инерции, момент сопротивления в пересчёте на 1 пог. м трубошпунтовой стенки определяются в зависимости от аналогичных параметров сечений труб с приведением железобетона заполнения к стали при помощи соотношения модулей упругости стали трубошпунта и бетона.

Заглубленная часть стержня конечной жёсткости, заменяющего на расчётной схеме трубошпунтовую стенку, разделяется на две части: верхнюю, в пределах которой контактное взаимодействие определяется предельным сопротивлением $p_{пред}$ основания, и нижнюю – защемлённую, изгибаемую в соответствии с решением контактной задачи по методу местных упругих деформаций.

Расчёт выполняется методом последовательных приближений с пошаговым смещением границы между указанными выше частями шпунтовой стенки. Силовое взаимодействие защемлённой части стержня с грунтовой средой описывается функцией коэффициента постели (C_z) в соответствии с уравнением

$$C_z = Kz_0, \quad (1)$$

где K – коэффициент пропорциональности с размерностью кН/м^4 , принимаемый в зависимости от вида грунта в соответствии с указаниями приложения В СП 24.13330.2011 в размере $\frac{1}{2}$ значений табл. В.1; z_0 – координата длины стенки, отсчитываемая от поверхности основания.

Коэффициент постели выражает отношение контактных давлений p_z и совместных горизонтальных перемещений y_z свай и грунтового основания:

$$C_z = \frac{p_z}{y_z}. \quad (2)$$

Горизонтальная нагрузка P_z на 1 пог. м ширины подпорной стенки определяется по отношению

$$P_z = p_z \times 1 \text{ м} = C_z y_z \times 1 \text{ м}. \quad (3)$$

Контактные давления p_z и погонная нагрузка P_z ограничиваются соответствующими предельными значениями $p_{npред}$, $P_{npред}$, которые способно воспринять основание:

$$p_z \leq p_{npред}, \quad P_z \leq P_{npред}. \quad (4)$$

Предельное сопротивление грунта в основании со стороны передней грани шпунтовой подпорной стенки определяется как разность пассивного давления p_n со стороны передней грани и активного давления p_a со стороны задней грани подпорной стенки:

$$p_{npред} = p_n - p_a. \quad (5)$$

Предельная погонная горизонтальная нагрузка на основание

$$P_{npред} = p_{npред} \times 1 \text{ м} = (p_n - p_a) \times 1 \text{ м}. \quad (6)$$

Давления p_n и p_a определяются на основании условия прочности грунта в соответствии с уравнением Мора-Кулона:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0,$$

где $\sigma_{1,2}$ – главные напряжения в точках (элементарных объёмах) грунта на контактных (вертикальных) гранях трубошпунтовой подпорной стенки.

Трение на контактных гранях не учитывается. Напряжения, действующие на этих гранях, являются главными.

Активное p_a и пассивное p_n давление грунта на вертикальные грани шпунтовой подпорной стенки определяются в зависимости от вертикального давления p_v грунта за задней гранью подпорной стенки и природного давления p_{zg} грунта основания со стороны передней грани подпорной стенки.

При определении активного давления σ_2 заменяется на p_a , σ_1 – на p_v :

$$p_a = p_v \frac{(1 - \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi)} - 2c \frac{\cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)} = p_v \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (7)$$

При определении пассивного давления со стороны передней грани подпорной стенки из ШТС в основании σ_1 заменяется на p_n , σ_2 – на природное давление p_{zg} :

$$p_n = p_{zg} \frac{(1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)} + 2c \frac{\cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)} = p_{zg} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (8)$$

Распределение вертикального давления p_{zg} от веса грунтов основания принимается по общепринятым схемам [5] в соответствии с рис. 4.

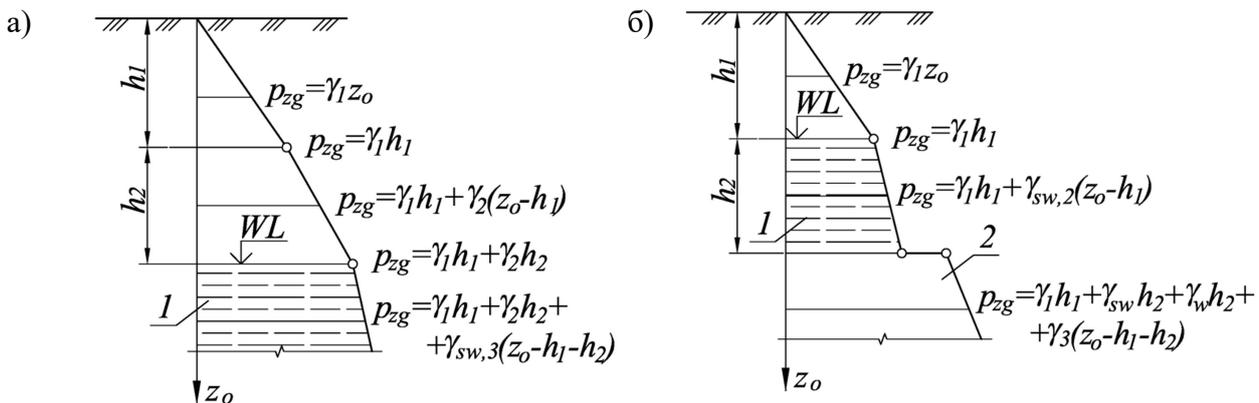


Рис. 4. Эпюры распределения вертикального давления p_{zg} от собственного веса грунтов: *a* – в основаниях с переменным по глубине удельным весом при наличии подземных вод; *б* – в основаниях, частично взвешенных грунтовыми водами, при наличии водоупорного слоя; 1 – водопроницаемый грунт; 2 – водоупорный слой основания; WL – уровень подземных вод

На рис. 4 приняты следующие обозначения: h_1, h_2 – толщина слоёв основания в пределах глубины z_0 , γ_1, γ_2 – удельные веса грунтов слоёв основания выше уровня грунтовых вод, $\gamma_{sw,2}, \gamma_{sw,3}$ – удельный вес слоя водопроницаемого грунта, определяемый, как вес минеральных частиц, взвешенных водой, $\gamma_w=9,8 \text{ кН/м}^3$ – удельный вес воды, γ_3 – удельный вес водоупорного слоя, индексы 1, 2, 3 соответствуют номерам слоёв грунта.

Распределение вертикальных давлений p_v за задней гранью подпорной стенки устоя мостового сооружения (рис. 5, а) определяется по следующим формулам:

- в пределах насыпи за устоем (выше уровня планировочной поверхности)

$$p_v = \gamma_n z, \quad (9)$$

где $\gamma_n=17,7 \text{ кН/м}^3$ – удельный вес грунта насыпи, z – вертикальная координата, отсчитываемая от верха насыпи за устоем в соответствии со схемой на рис. 5, а;

- в пределах основания (ниже уровня планировочной поверхности)

$$p_v = \gamma_n h + p_{zg}. \quad (10)$$

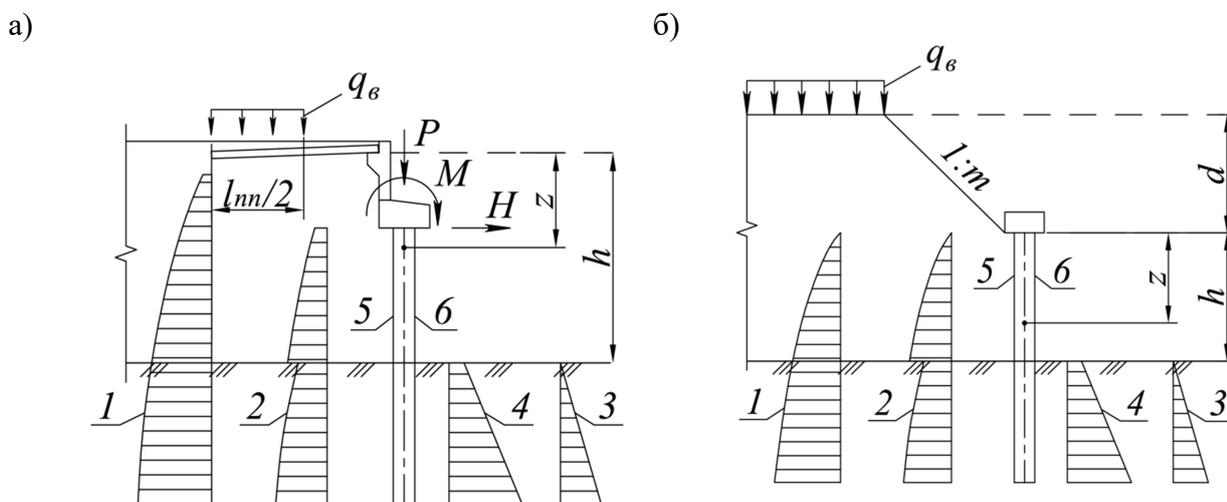


Рис. 5. Распределение давлений $p_v(1), p_a(2)$

на задней (5) и $p_{zg}(3), p_n(4)$ на передней (6) гранях шпунтовой подпорной стенки

Распределение вертикальных давлений p_v за задней гранью дорожной подпорной стенки на рис. 5, б определяется по следующим формулам:

- в пределах насыпи (выше уровня планировочной поверхности)

$$p_v = \gamma_n z + p_{отк}, \quad (11)$$

- в пределах основания (ниже уровня планировочной поверхности)

$$p_v = \gamma_n h + p_{отк} + p_{zg}, \quad (12)$$

где h – высота надземной части подпорной стенки (см. рис. 5, б), $p_{отк}$ – вертикальное давление грунта за задней гранью подпорной стенки от веса откосной части насыпи высотой d , распределённое в соответствии с приведенными ниже выражениями (14), которые получены следующим путём.

Обозначим интенсивность распределённой нагрузки на уровне AB левее точки D (рис.6)

$$q_{отк} = \gamma_n d + q_в, \quad (13)$$

где $q_в$ – временная вертикальная нагрузка, условно принятая равномерно распределённой на поверхности земляного полотна, в соответствии с ГОСТ 32960-2014.

Вертикальные напряжения $p_{отк}$ за задней гранью подпорной стенки определяются в зависимости от $q_{отк}$ при помощи следующего приёма, подобного известному в строительной механике методу граничных элементов (МГЭ). Сущность МГЭ состоит в условном расширении расчётной области до размеров и формы, для которых имеются готовые проверенные решения, и приложении на новых границах такой системы сил, чтобы распределение напряжений на фактической поверхности расчётной области совпало с действующей нагрузкой.

Покажем это на примере решаемой задачи. Расчётная область и действующая нагрузка заменяются эквивалентной системой, в которой уровень горизонтальной грани AB смещается вверх на высоту $\frac{1}{2}md$ в положение $A'B'$. Действующая нагрузка трапециевидального очертания заменяется полосой с интенсивностью $q_{отк}$ и располагается в положении в соответствии со схемой на рис. 6. При этом общий вес откосной части насыпи и заменяющей её эквивалентной нагрузки равны.

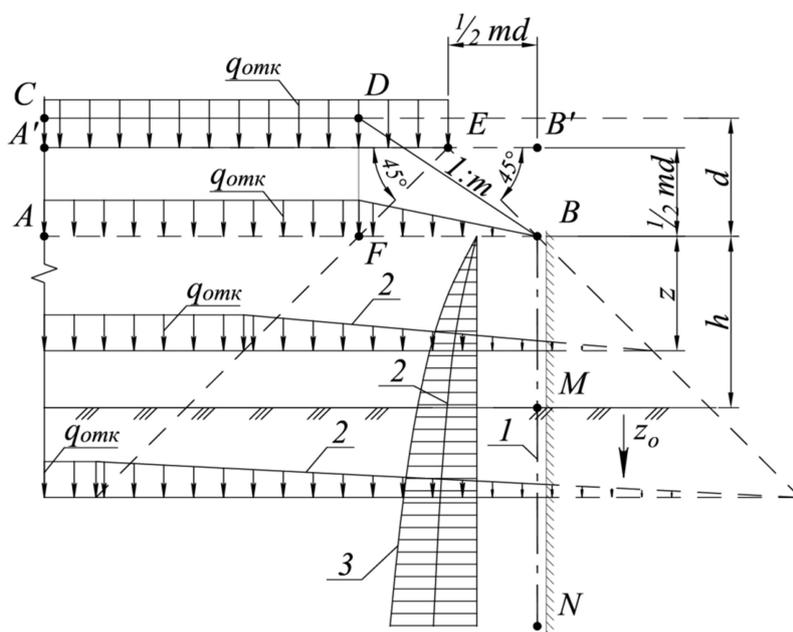


Рис. 6. Схема к определению вертикальных напряжений $p_{отк}$

за задней гранью подпорной стенки от веса откосной части земляного полотна:

- 1 – задняя грань подпорной стенки; 2 – эпюры распределения $q_{отк} z / (md + 2z)$ и $q_{отк} (h + z_0) / [md + 2(h + z_0)]$;
3 – эпюра распределения $p_{отк}$

Проведём из точки E два луча под углом 45° . Один из них пройдёт через точку B , а другой – через точку F . Примем, что на уровне AB интенсивность нагрузки левее точки F равна $q_{отк}$, а правее этой точки меняется по линейному закону до нуля в точке B . Тогда форма распределения нагрузки совпадёт с фактическим очертанием откосной части насыпи.

Будем считать, что воздействие полосовой нагрузки в системе, ограниченной горизонтальной плоскостью $A'B'$, является таким же, как и воздействие фактической нагрузки на нижележащее полупространство. Продолжая оба луча, получим вертикальные напряжения на линии BMN в пределах насыпной части расчётной области:

$$\frac{q_{отк} z}{md + 2z}, \quad (a)$$

в пределах основания

$$\frac{q_{отк} (h + z_0)}{md + 2(h + z_0)}. \quad (б)$$

Полученные выражения соответствуют свободному распределению напряжений в грунте без подпорной стенки.

Если пренебречь горизонтальными перемещениями подпорной стенки, задняя грань будет считаться неподвижной. Для получения $p_{отк}$ можно воспользоваться «методом изображений» ([6] с.400), согласно которому при действии односторонней системы сил неподвижная стенка заменяется плоскостью симметрии. Откуда следует, что для получения $p_{отк}$ выражения (а) и (б) следует удвоить:

$$p_{отк} = \frac{2q_{отк}z}{md + 2z}, \quad p_{отк} = \frac{2q_{отк}(h + z_0)}{md + 2(h + z_0)}. \quad (14)$$

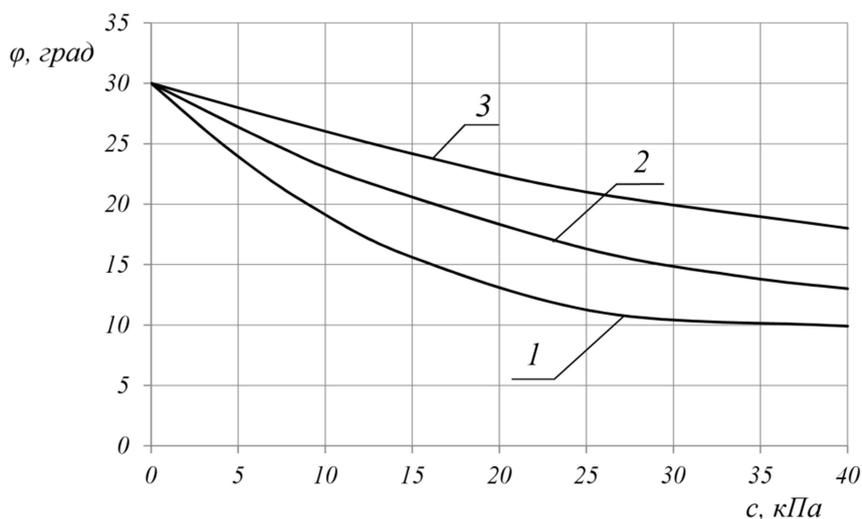


Рис. 7. Диаграммы минимальных расчётных значений углов внутреннего трения φ и удельного сцепления s грунтов нижних и подстилающих слоёв оснований подпорных стенок с применением ШТС высотой до 6 м (кривая 1), от 6 до 8 м (кривая 2), более 8 м (кривая 3)

В Методических рекомендациях предусмотрены требования к грунтам оснований, направленные на обеспечение устойчивости подземной части сооружений:

- не допускается наличие в основаниях следующих инженерно-геологических элементов: структурно неустойчивых грунтов; текучих глинистых грунтов; прослоек толщиной более 1,5 м, состоящих из слабых глинистых грунтов, пылеватых песков с коэффициентом пористости более 0,80;

- слои оснований в нижней части ШТС на высоту 5 м (считая от нижнего конца труб) и подстилающие слои на разведанную глубину должны быть сложены скальными, полускальными или дисперсными грунтами с минимальными расчётными значениями прочностных характеристик (φ , s) в соответствии с диаграммами на рис. 7.

Описание расчёта. Расчёты шпунтовых подпорных стенок в соответствии с изложенными выше положениями рекомендуется выполнять методом конечных элементов (МКЭ). Для выполнения расчётов возможно использование вычислительных комплексов *LIRA*, *SCAD*, *MicroFe*, *Midas civil* или других верифицированных (протестированных) программ, рекомендуемых для применения на территории РФ. Расчёты выполняются в излагаемой ниже последовательности.

1. Создание конечно-элементной схемы путём членения (в надземной и заглубленной частях) вертикального стержня, изображающего шпунтовую подпорную стенку, на конечные элементы (КЭ) с шагом t не более 1 м и не более 0,1 высот надземной и подземной частей.

Отсчёт координат, нумерации КЭ и узлов на их границах начинаются с нижнего конца подпорной стенки (рис. 8).

2. Замена треугольной или ступенчатой эпюры распределения коэффициента постели условными горизонтальными упругими стержнями («пружинами») длиной 1 м с жёсткостью при растяжении-сжатии $B_z=C_z t \times 1$ м. Условные «пружины» помещаются в узлы конечно-элементной системы. Жёсткость условной пружины в i -м узле

$$B_{zi} = K_j z_{O_i} t \times 1 \text{ м}, \quad (15)$$

где z_{O_i} – координата z_O i -го узла, K_j – коэффициент пропорциональности j -го слоя основания, в котором находится i -й узел.

3. Приложение горизонтального давления p_a к узлам надземной части задней грани шпунтовой подпорной стенки. Нагрузка p_a преобразуется в узловые силы F_{ai} по формулам

$$F_{ai} = p_{ai} t \times 1 \text{ м}, \quad (16)$$

где p_{ai} – давление p_a на уровне i -го узла надземной части подпорной стенки.

Определение равнодействующих: горизонтальной силы H и момента M нагрузок, приложенных к оголовку устоя и приложение их верхнему узлу рассчитываемой системы. В расчёте дорожной подпорной стенки эта операция отсутствует.

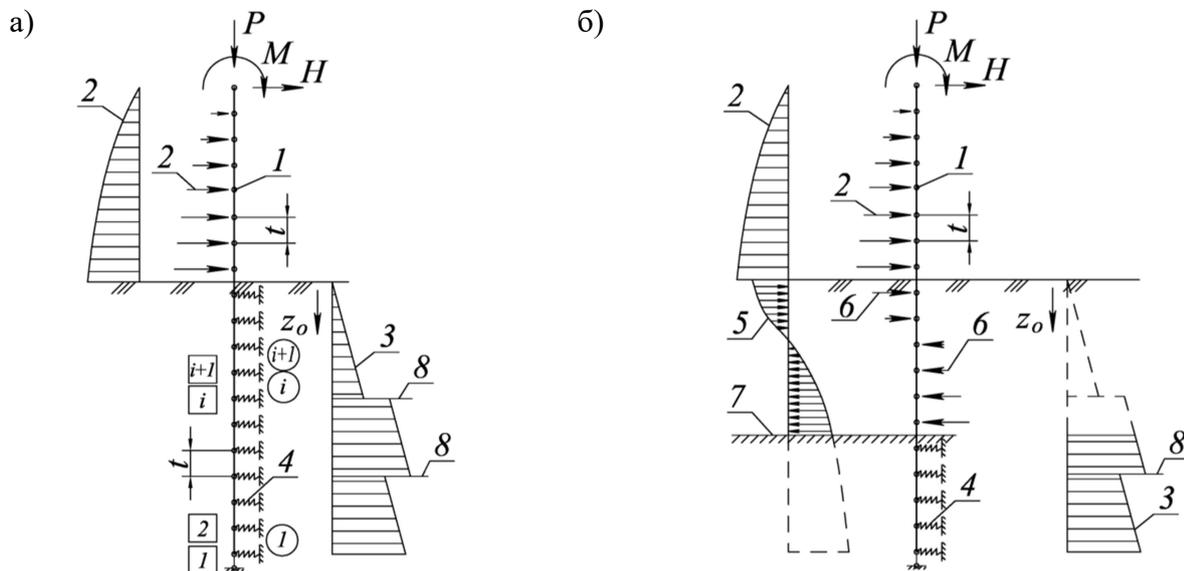


Рис. 8. Схемы к расчётам подпорных стенок (мостовых устоев) МКЭ:

- a* – первый шаг расчёта (граница защемлённой части на уровне планировочной поверхности);
- б* – второй и последующие шаги расчёта; 1 – шпунтовая подпорная стенка; 2 – эпюра p_a и силы F_{ai} в надземной части подпорной стенки; 3, 4 – эпюра коэффициента постели $C_z=Kz_O$ и её замена условными «пружинами» с жёсткостью $B_{zi}=K_j z_{O_i} t \times 1$ м; 5, 6 – погонная нагрузка $P_{пред,i}$ и её замена узловыми силами $F_{пред,i}$;
- 7 – граница защемлённой части ШТС; 8 – граница геологических слоёв; $\square i$ – номера узлов; $\bigcirc i$ – номера КЭ

4. Определение предельной погонной горизонтальной нагрузки $P_{пред,i}$ в узлах защемлённой части

$$P_{пред,i} = (p_{ni} - p_{ai}) \times 1 \text{ м}, \quad (17)$$

где p_{ni} , p_{ai} – погонные нагрузки p_n и p_a на уровне i -го узла защемлённой части шпунтовой подпорной стенки.

5. Первый (начальный) шаг расчёта. Граница защемлённой части шпунтовой подпорной стенки принимается на уровне планировочной поверхности.

Составление и решение системы уравнений МКЭ, выражающих равновесие узлов. Решением являются горизонтальные перемещения y_{zi} и углы поворота φ_{zi} шпунтовой подпорной стенки в узлах.

Определение погонной нагрузки в узлах по формулам

$$P_{zi} = p_{zi} \times 1 \text{ м} = y_{zi} K_j z_{0i} \times 1 \text{ м} \quad (18)$$

и узловых сил в условных «пружинах»

$$R_{zi} = P_{zi} t. \quad (19)$$

Сравнение P_{zi} и $P_{nped,i}$ в узлах системы, выявление узлов, в которых $P_{zi} > P_{nped,i}$. Нахождение узла, в котором $P_{zi} \leq P_{nped,i}$ и перемещение границы защемлённой части шпунтовой подпорной стенки на этот уровень.

6. Второй и последующие шаги расчёта. Уровень защемлённой части шпунтовой подпорной стенки по результатам предыдущего шага расчёта установлен в узле, в котором получено $P_{zi} \leq P_{nped,i}$. В выше расположенных узлах вместо R_{zi} прикладываются нагрузки

$$F_{nped,i} = P_{nped,i} t = (p_{ni} - p_{ai}) t \times 1 \text{ м}. \quad (20)$$

Повторение расчётов и логических действий предыдущего шага с новым уровнем защемления и откорректированными нагрузками.

Последним считается приближение, на котором получены соотношения $P_{zi} \leq P_{nped,i}$ во всех узлах системы. Выполняется проверка условия $P_{zi} \leq P_{nped,i}$ на всех уровнях защемлённой части ШТС.

7. Расчёт по ПС первой группы завершает получение узловых сил $R_{zi} = P_{zi} t$ в условных «пружинах», построение эпюр поперечных сил и моментов для каждого сочетания нагрузок.

Расчёт по ПС второй группы завершает построение изогнутой оси шпунтовой подпорной стенки и определение горизонтального перемещения в узле опирания пролётногo строения на устой (с совмещёнными функциями) мостового сооружения для каждого сочетания нагрузок.

Расчёты по ПС конструкций из трубошпунта в составе устоев мостовых сооружений и дорожных подпорных стенок включают следующие проверки, выполняемые в соответствии с современными сводами правил (СП 35.13330, СП 24.13330 и др.)

По ПС первой группы:

- расчёт поперечных сечений на изгиб или внецентренное сжатие (если шпунтовая стенка воспринимает кроме горизонтального давления продольную силу);
- расчёт сечений трубы на поперечную силу путём сравнения расчётных и предельных касательных напряжений;
- расчёт прочности при сложном напряженном состоянии точек в сечениях трубы, в которых одновременно действуют нормальные и касательные напряжения;
- расчёт прочности круглых сечений железобетонного заполнения на изгиб, внецентренное сжатие и поперечную силу;
- проверка трубошпунтовой сваи по несущей способности грунта основания;
- проверка конструкций деформационных швов на способность восприятия горизонтальных перемещений устоев в сопряжениях со шкафными стенками и опорных частей в узлах опирания пролётных строений мостовых сооружений.

По ПС второй группы: сравнение горизонтального перемещения верхней грани ригеля мостового устоя и верхнего конца дорожной подпорной стенки с предельными значениями.

Устанавливается требование о том, чтобы в конце расчёта по прочности (ПС первой группы) высота защемлённой части была не менее $\frac{1}{3}$ общей высоты заглублённой части шпунтовой сваи и не менее 5 м, а в конце расчёта по перемещениям (ПС второй группы) – не менее $\frac{1}{2}$ общей высоты заглублённой части шпунтовой сваи.

Программное обеспечение. В качестве приложения к Методическим рекомендациям разработана программа, реализующая изложенный выше конечно-элементный расчёт мостовых устоев и подпорных стенок из ШТС.

Программа написана в среде Mathad. Расчётная схема принята в соответствии с рис. 8. Алгоритм расчёта изменён по сравнению с изложенным выше описанием, но ведёт к тождественным или близким результатам.

Действующая нагрузка (активное давление грунта в пределах надземной части, равнодействующие усилий, приложенных к оголовку устоя) делится на 20 равных частей и прикладывается ступенями. На каждой ступени нагрузки корректируется расчётная схема. Упругоподатливые связи (см. рис. 8), в которых усилия достигли предельных значений, выключаются из работы на последующих ступенях нагрузки. При этом на каждой очередной ступени нагрузки должны оставаться упругоподатливые связи, в которых усилия не достигли предельных значений. Если это условие выполнено, расчёт продолжается и считается законченным после приложения последней (20-й) при сохранении части упругоподатливых связей с расчётными усилиями меньше предельных значений.

Программа в соответствии со структурной схемой на рис. 9 состоит из четырёх частей.



Рис. 9. Структурная схема программы расчёта МКЭ мостовых устоев и подпорных стенок из ШТС

1. Исходные данные, сведённые в три документа:
 - описание узлов (координаты, шарниры, крепления);
 - описание конечных элементов (номера узлов на концах, жёсткостные характеристики стержней и упругоподатливых связей, предельные значения усилий в упругоподатливых связях);
 - описание нагрузок (узлы приложения, величины).
2. Подпрограмма линейного расчёта МКЭ.
3. Подпрограмма, реализующая ступенчатое приложение нагрузки, корректировку расчётной схемы.
4. Результаты расчёта: перемещения узлов, усилия в конечных элементах.

Пример расчёта. На рис. 10 показаны: сечение стенки из ШТС, расчётная схема при последнем смещении уровня заделки и результаты расчёта подпорной стенки общей длиной 9,4 м с высотой надземной части 4,0 м, удерживающей грунт дорожной насыпи высотой 4 м. Марка трубошпунта ШТС-820×10-ЗСГ1, внешний диаметр труб 820 мм, толщина стенки 10 мм, геометрические характеристики (с учётом уменьшения толщины стенок на 1 мм на потери от коррозии): $A=0,0231 \text{ м}^2/\text{м}$, $I=0,00189 \text{ м}^4/\text{м}$, $W=0,004622 \text{ м}^3/\text{м}$. Марка стали 09Г2С-12 по ГОСТ 19281-2014, расчётное сопротивление $R_y=295 \text{ МПа}$, модуль упругости $E=2,06 \times 10^5 \text{ МПа}$. Несущая способность ШТС: по моменту $M_{пред}=1363,5 \text{ кН}\cdot\text{м}/\text{м}$, по поперечной силе $Q_{пред}=2051 \text{ кН}/\text{м}$.

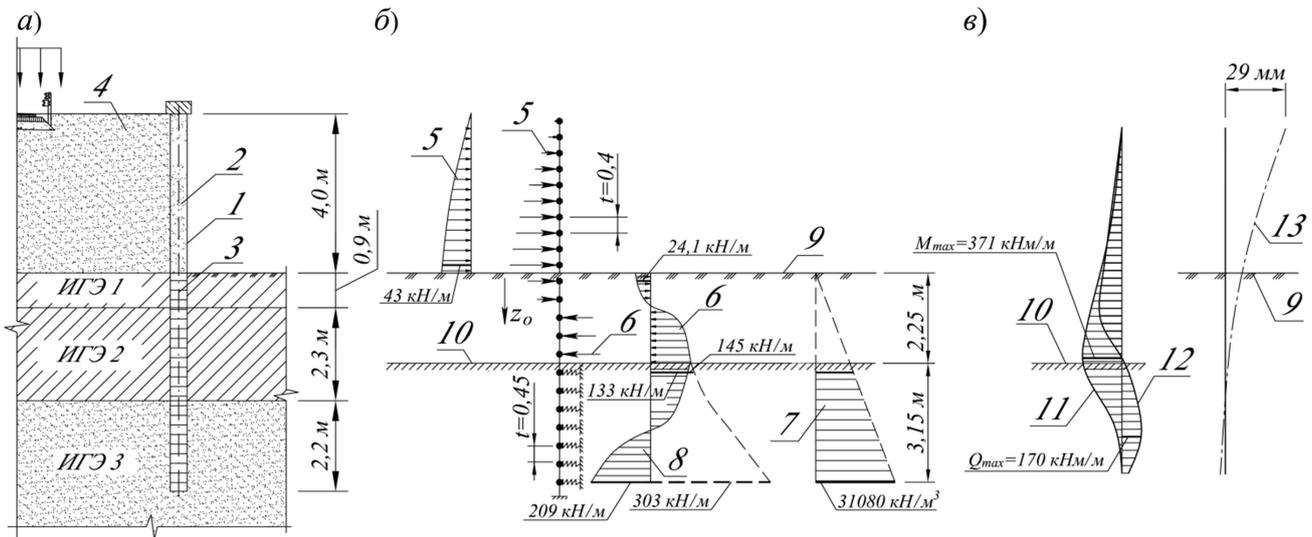


Рис. 10. Схема и результаты расчёта дорожной подпорной стенки:

a – сечение стенки из ШТС, насыпи и основания, *б* – расчётная схема при последнем смещении уровня заделки ШТС, *в* – результаты расчёта; 1 – конструкции ШТС, 2 – заполнение песчано-цементной смесью, 3 – грунтовое ядро, 4 – насыпь земляного полотна, 5 – эпюра активного давления и узловые силы F_{ai} в надземной части подпорной стенки, 6 – погонная нагрузка $P_{пред}$ и её замена узловыми силами $F_{пред,i}$, 7 – эпюра коэффициента постели $C_z = Kz_0$; 8 – погонная нагрузка $P_z = C_z \gamma_z \times 1\text{м}$; 9 – планировочная поверхность; 10 – граница защемления; 11 – эпюра изгибающих моментов, 12 – эпюра поперечных сил, 13 – изогнутая ось шпунтовой стенки

Расчёты выполнялись дважды: по ПС первой – по прочности (второй – по перемещениям) группы с применением расчётных (нормативных) значений нагрузок и механических характеристик грунтов (таблица). В соответствии с изложенным выше, расчёты выполнены методом последовательных приближений с пошаговым смещением границы защемлённой части шпунтовой подпорной стенки. На первых шагах расчётов граница защемлённой части устанавливалась на уровне планировочной поверхности. При определении $P_{пред,i}$ по первой группе ПС приняты коэффициенты надёжности для удельного веса насыпи $\gamma_f = 1,1$, для горизонтального давления насыпи – $\gamma_f = 1,4$, удельные веса и прочностные характеристики ИГЭ 1–3 приняты в соответствии с данными инженерно-геологических изысканий.

Таблица

Механические характеристики грунтов

Номер ИГЭ	Наименование грунтов	нормативные расчётные			
		Удельное сцепление $c_{норм./c_{расч}}$, кПа	Угол внутреннего трения $\varphi_{норм./\varphi_{расч}}$, град.	Удельный вес, $\gamma_{норм./\gamma_{расч}}$, кН/м ³	K , кН/м ⁴
	Насыпь	0/0	30/–	17,7/19,5	
1	Суглинок твёрдый	19,0/10,0	17,0/12,0	19,1/19,0	6000
2	Суглинок твёрдый	28,0/27,0	22,0/21,0	19,6/19,5	6000
3	Пески мелкие, плотные	5,0/3,0	37,0/34,0	18,3/18,3	6000

В расчёте по прочности потребовалось двукратное понижение границы защемления, после чего она определилась на уровне 2,25 м от планировочной поверхности и 3,15 м от нижнего конца ШТС. В расчёте по перемещениям граница защемления была получена на

планировочной поверхности на первом шаге расчёта. По результатам расчёта для обеспечения защемления 5 м требуется увеличить высоту заделки шпунта на 1,85 м.

Результаты расчёта представлены на рис. 10, б, в: эпюры контактных давлений, моментов, поперечных сил (горизонтальных перемещений) по результатам расчётов по ПС первой (второй) группы. Горизонтальное перемещение (29 мм) верхнего конца стенки из ШТС не превысило 1/75 высоты надземной части.

Выводы

Внедрение в дорожную отрасль опыта строительства ограждающих систем из трубчатого сварного шпунта позволит создать конкурентоспособную разновидность мостовых устоев, ограждений земляного полотна и др. объектов.

На основе известных решений теории механики грунтов разработан инженерный метод расчётов однорядных трубошпунтовых систем, включающий описание нагрузок, инженерную схематизацию силового взаимодействия с грунтовой средой, комплекс проверок по предельным состояниям. Полученные решения и их алгоритмизация могут быть применены к другим разновидностям изгибаемых подпорных стенок шпунтового типа.

Библиографический список

1. Инновационная высокотехнологичная отечественная продукция: справочное пособие: проектирование и строительство / В.В. Гончаров, Н.А. Ефремов, В.Н. Слинко. – Сургут – Москва: ООО "Издательство Спец-Адрес", 2013. – 248 с.
2. Шапиро, Д.М. Применение трубчатых сварных шпунтов в дорожном строительстве/ Д.М. Шапиро, Н.Н. Мельничук // Автомобильные дороги. – 2016. – №9. – С. 12 – 16
3. ОДМ 218.2.090-2017 Методические рекомендации по применению трубчатых сварных шпунтов при строительстве автомобильных дорог. – М.: ФДА «Росавтодор», 2017 – 94 с.
4. Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения / под общей ред. В.А. Ильичева и Р.А. Мангушева. – М.: Изд-во АСВ, 2014. – 728 с.
5. Механика грунтов, основания и фундаменты: учебник / С.Б. Ухов [и др.]. – М.: Изд-во АСВ, 1994. – 524 с.
6. Цытович, Н.А. Механика грунтов. 4-е изд. вновь перераб. и доп.– М.: Стройиздат, 1963. – 636 с.

Reference

1. Innovational high technological national production: reference book: designing and construction/ V.V. Goncharov, N.A. Efremov, V.N. Slinko. – Surgut – Moscow: Ltd "Pub.house "Spets. –Adres", 2013. – 248 p.
2. Shapiro, D.M., Melnichuk N.N. Welded pipe rabbet application in road construction/ D.M. Shapiro, N.N. Melnichuk// Roads. – 2016. – №9. – P. 12 – 16
3. ODM 218.2.090-2017 Technique regulations for welded pipe rabbets application during road construction. – M.: FRA "Rosavtodor", 2017 – 94 p.
4. Reference geotechnique. Foundations, bases and underground structures / edited by V.A. Iljichyov and R.A. Mangushev. – M.: Pub. house ASV, 2014. – 728 p.
5. Soil, basis and foundation mechanics. Text book / S.B. Uchov [and others.]. – M.: Pub. house ACU, 1994. – 524 p.
6. Tsitovich N.A.. Soil Mechanics. 4th edition updated and suppl.– M.: Stroyizdat, 1963. – 636 p.

УДК 624.04:534.1

*Воронежский государственный
технический университет*

*Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики*

С.Ю. Гриднев

Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-42-30.

e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru

Магистрант кафедры строительной механики

И. В. Раводин

e-mail: iravodin@yandex.ru

Московский физико-технический институт

*Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры
вычислительной математики*

Ю. И. Скалько

Россия, Московская область, г. Долгопрудный,

тел.: +7(498)744-64-50,

e-mail: skalko@mail.mipt.ru

Студентка бакалавриата

кафедры вычислительной математики

В.В. Янаева

e-mail: yanaeva@phystech.edu

Voronezh State Technical University

*Dr. of Tech. Sc., Professor of Department of Struc-
tural Mechanics*

S.Yu. Gridnev,

Russia, Voronezh, Tel.+7(473)271-52-30

e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru

*Master of Department of Structural
Mechanics*

I. V. Ravodin,

e-mail: iravodin@yandex.ru

Moscow Institute of Physics and Technology

*PhD of Ph.-Math. Sc., Associate Professor of De-
partment of Computational Mechanics*

Yu. I. Skalko,

Russia, Moscow region, Dolgoprudny,

Tel.+7 (498)744-64-50

e-mail: skalko@mail.mipt.ru

Bachelor of Department

of Computational Mechanics

V. V. Yanaeva,

e-mail: yanaeva@phystech.edu

С.Ю. Гриднев, Ю.И. Скалько, И.В. Раводин, В.В. Янаева

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГО ОПЕРТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИ- СТЕМЫ С ОГРАНИЧИТЕЛЯМИ ХОДА

Ставилась задача создания методики и вычислительной программы для анализа поведения упруго опертой конструктивно-нелинейной колебательной системы под действием движущейся нагрузки с целью подбора ее оптимальных параметров при проектировании. Изложены два подхода к моделированию конструктивной нелинейности в колебательном процессе. Алгоритм расчёта реализован в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Выполнен анализ широкого спектра численных исследований. Установлены зависимости амплитуд колебаний динамической системы от жёсткости упругих опор, скорости движения нагрузки, её параметров, геометрии ограничителей хода.

Ключевые слова: колебательная система, упругие опоры, движущаяся нагрузка, ограничители хода, конструктивная нелинейность.

S.Yu. Gridnev, Yu.I. Skalko, I.V. Ravodin, V.V. Yanaeva

SIMULATION OF VIBRATIONS OF ELASTICALLY SUPPORTED DYNAMICAL SYSTEM WITH MOVEMENT LIMITERS

The task was to create a methodology and computer program to analyze the behavior of elastically supported structurally-nonlinear oscillatory system under the action of a moving load with the aim of selecting the optimum parameters in the design. Set out two approaches to the modeling of structural nonlinearity in the oscillatory process. The calculation algorithm implemented in the computer algebra system Wolfram Mathematica. Made the analysis of a wide spectrum of numerical studies. The function of the amplitudes of the oscillations placed of a dynamical system from the stiffness of the elastic abutment, the speed of the load, load parameters, the geometry of the movement limiters.

Keywords: vibrating system, elastic abutment, moving load, movement limiters, structural nonlinearity.

Введение

В практике мостостроения и машиностроения часто используются строительные конструкции, технологическое оборудование, элементы механизмов, представляющие собой упруго опертые конструктивно-нелинейные динамические системы. Особенностью таких систем является изменение расчетной схемы при включении или выключении в работу новых связей, замыкании и размыкании зазоров, использовании ограничителей хода в процессе колебаний под нагрузкой. Конструктивно-нелинейной также является работа сейсмоизолирующих устройств, виброустройств, прессов различной конструкции. Моделирование поведения перечисленных систем имеет важное практическое значение.

В качестве примера можно привести статьи [1,2], в которых исследуется устройство виброплощадок с жестко-упругими ограничительными опорами (рис. 1, а). По мнению авторов, использование ограничителей хода позволяет снизить металлоемкость оборудования, повысить уплотняемость бетонной смеси, продлить срок службы амортизаторов. На рис. 1,б представлен расчетная схема опытного образца проектируемой виброплощадки.

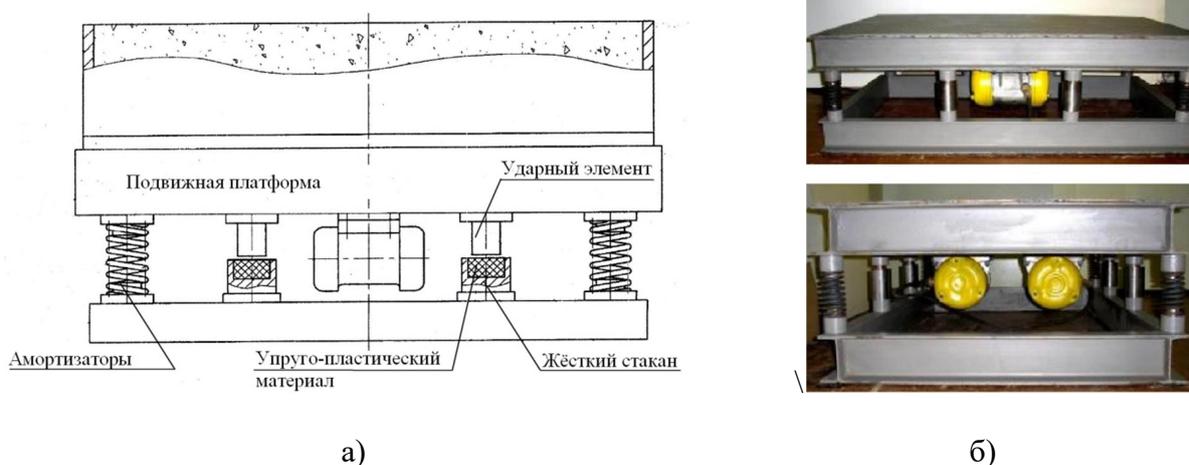


Рис. 1. Виброплощадка с жестко-упругими ограничителями:
а) схема виброплощадки б) фотография опытного образца

Колебания наплавных мостов неразрезной системы с дополнительными ограничительными жесткими опорами при пропуске подвижной нагрузки также являются конструктивно-нелинейными. Исследования поведения таких мостов выполнены в работах [3-6]. В работе [5] предложено моделировать ограничение движения пролетного строения встречей с осциллятором большой жесткости, вязкости и эффективной массой вовлекаемой в движение в процессе опускания пролетного строения на опору. При этом нелинейность раскрывается решением кусочно-линейных дифференциальных уравнений для двух режимов движения.

Аналитические методы расчета для моделирования поведения упруго опертых конструктивно-нелинейных динамических систем при произвольной нагрузке использовать нельзя. В то же время прогресс в области вычислительных технологий, появление пакетов компьютерной вычислительной математики существенно расширили возможности численного анализа колебаний подобных систем. Использование вычислительных программ позволяет прогнозировать поведение динамических систем и выбирать оптимальные параметры исходя из практических потребностей и реальных условий эксплуатации. Описанные в статье подходы могут быть использованы для численных исследований колебаний широкого круга различных систем с любым числом упругих связей и ограничительных опор.

Описание расчетной схемы

На первом этапе изучения конструктивно-нелинейных колебаний динамических систем рассмотрим следующую упрощенную расчетную схему. Она представляет собой недеформируемый стержень со свободными концами длиной l_0 , который опирается на две упругие связи с жесткостью в общем случае c_1 и c_2 . Будем считать изгибные деформации малыми. Плавность приложения нагрузки обеспечивается двумя переходными частями длиной l_1 и l_2 , которые служат только для передачи нагрузки на балку, когда сила находится на переходных частях. Их массой и собственной изгибной жесткостью мы пренебрегаем. Под концами стержня находятся ограничительные жесткие опоры. Между концами стержня и жесткими опорами имеются вертикальные зазоры f_1 и f_2 . При движении по стержню нагрузки вертикальные зазоры изменяются и могут замкнуться и далее разомкнуться, т.е. концы стержня могут поочередно или одновременно опереться на жесткие опоры или оторваться от них (рис. 2). Предполагается, что по балке движется с постоянной скоростью сила, изменяющаяся по гармоническому закону: $P(t) = P_0 + A \sin(\omega t)$.

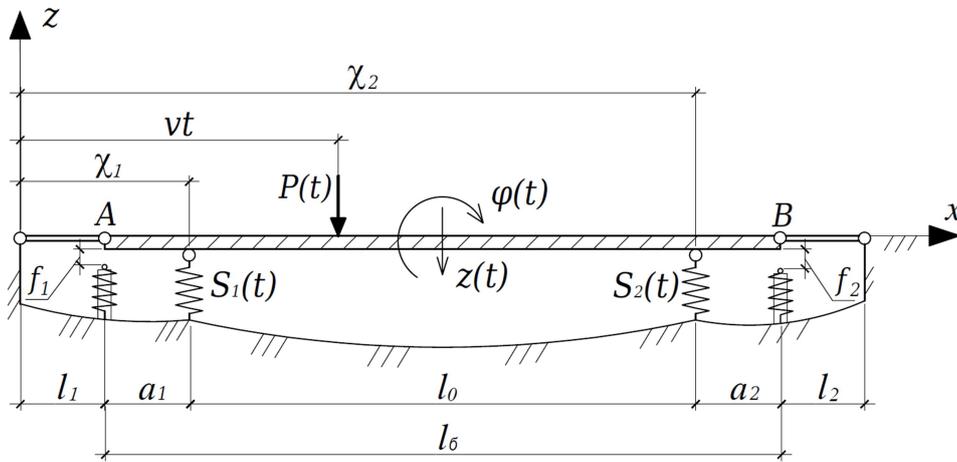


Рис. 2. Динамическая расчетная схема колебательной системы

Система дифференциальных уравнений относительно переменных $z_0(t)$ и $\varphi_0(t)$, полученная с использованием принципа возможных перемещений, описывает колебания балки без учета возможного опирания на ограничительные опоры и имеет вид

$$\begin{cases} M\ddot{z}_0(t) + \sum_{i=1}^2 S_i(t) - P(t) - P_1(t) - P_2(t) = 0, \\ \theta\ddot{\varphi}_0(t) - \sum_{i=1}^2 \sum S_i(t)l_i + P(t)(l_1 + \frac{l_0}{2} - vt) + P_1(t)\frac{l_0}{2} - P_2(t)\frac{l_0}{2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $z_0(t)$ – вертикальные перемещения центра тяжести стержня; $\varphi_0(t)$ – угол поворота стержня относительно центра тяжести; M – масса стержня; θ – момент инерции стержня относительно центра тяжести; $S_i(t)$ – усилие в i -й упругой связи; l_i – плечо i -й связи относительно середины стержня; $P(t) = P_0 + A \sin(\omega t)$ – нагрузка, движущаяся по стержню со скоростью v ; $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – усилия в вертикальных упругих связях, которые определяются через

перемещения сечений стержня над упругими связями; a_1 – расстояние от начала стержня до левой упругой связи, a_2 – аналогично.

Координаты упругих связей определяются следующим образом:

$$\chi_1 = \ell_1 + a_1; \chi_2 = \ell_1 + \ell_{\delta} - a_2. \quad (2)$$

Перемещения точек прикрепления упругих связей (равны их деформациям) и возникающие в них усилия вычисляются по следующим формулам:

$$y_1(t) = z_{\delta}(t) - \varphi_{\delta}(t) \cdot \left(\frac{\ell_{\delta}}{2} - a_1\right); \quad y_2(t) = z_{\delta}(t) + \varphi_{\delta}(t) \cdot \left(\frac{\ell_{\delta}}{2} - a_2\right); \quad (3)$$

$$S_1(t) = c_1 \cdot y_1(t); \quad S_2(t) = c_2 \cdot y_2(t). \quad (4)$$

Силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ передают действие силы $P(t)$ на начало и конец стержня при ее движении по левой и правой переходным частям и соответственно вычисляются по формулам

$$P_1(t) = P(t) \frac{\chi_p}{\ell_1}; \quad P_2(t) = P(t) \frac{\ell_1 + \ell_{\delta} + \ell_2 - \chi_p}{\ell_2}. \quad (5)$$

Два подхода моделирования колебательного процесса с ограничительными опорами

Для выполнения численных исследований использованы два подхода моделирования конструктивной нелинейности:

В первом подходе колебательный процесс делится на временные интервалы, в пределах которых система уравнений движения остаётся неизменной. Так, например, когда оба зазора разомкнуты, решается система уравнений (1). При замыкании левого зазора f изменяется расчетная схема колебательной системы и движение стержня описывает только уравнение угловых колебаний

$$\theta'_{\delta} \ddot{\psi}_{\delta} + \sum_{i=1}^2 S_i(t) l_i - P(t)(l_1 - vt) - P_1(t) \frac{l_{\delta}}{2} - P_2(t) \frac{l_{\delta}}{2} = 0, \quad (6)$$

где ψ_{δ} и θ' - угол поворота и момент инерции стержня относительно точки опирания на левую жесткую опору.

При замыкании зазора в конце стержня уравнение (6) принимает вид

$$\theta'_{\delta} \ddot{\psi}_{\delta} + \sum_{i=1}^2 S_m \cdot \chi'_m - \ell_{\delta} \cdot P_1 - P(t) \cdot \chi' = 0, \quad (7)$$

где координаты χ'_k и χ'_m , определяющие движущейся силы и упругих связей, будут отсчитываться от точки опирания на правую опору в обратную сторону.

Полное вертикальное перемещение произвольного сечения стержня вычисляется по формуле

$$y(t) = \psi_{\delta}(t) \cdot x, \quad (8)$$

где x - расстояние до сечения от правой опоры.

В случае размыкания зазора f происходит возвращение к первоначальной системе уравнений (1) и т.д. В общем случае количество интервалов может быть очень большим, что связано с упругими свойствами ограничительных опор. Чтобы избежать громоздких вычислений, считалось, что при замыкании зазора, энергия удара поглощается ограничительными опорами. Построен алгоритм и создана на его основе вычислительная программа, которая в автоматическом режиме определяет границы интервалов и решает необходимые уравнения.

Во втором подходе ограничительные опоры моделируются упругими или упруго-вязкими связями. Они включаются в работу колебательной системы, когда перемещения концов стержня становятся равными величине зазора f в момент касания. При этом используется система уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{z}_o(t) + \sum_{i=1}^2 S_i(t) - P(t) - P_1(t) - P_2(t) + R_1(t) + R_2(t) = 0, \\ \theta\ddot{\varphi}_o(t) - \sum_{i=1}^2 S_i(t)l_i + \sum_{i=1}^2 R_i(t)l_i + P(t)(l_1 + \frac{l_o}{2} - vt) + P_1(t)\frac{l_o}{2} - P_2(t)\frac{l_o}{2} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $R_1(t)$ и $R_2(t)$ – усилия, возникающие в ограничительных опорах, с учетом вязкого сопротивления:

$$R_1(t) = c_1 \cdot y_1(t) + \lambda(\dot{z}_o(t) - \dot{\varphi}_o(t)\frac{l_o}{2}); \quad R_2(t) = c_2 \cdot y_2(t) + \lambda(\dot{z}_o(t) - \dot{\varphi}_o(t)\frac{l_o}{2}). \quad (8)$$

Перемещения начала $y_1(t)$ и конца стержня $y_2(t)$ определяются через обобщенные координаты $z_o(t)$ и $\varphi_o(t)$:

$$y_1(t) = z_o(t) - \varphi_o(t) \cdot \left(\frac{l_o}{2}\right); \quad y_2(t) = z_o(t) + \varphi_o(t) \cdot \left(\frac{l_o}{2}\right), \quad (9)$$

где λ – коэффициент вязкого сопротивления.

Численные исследования

Выполнена серия вычислительных экспериментов с целью исследования колебаний динамической системы в зависимости от жёсткости упругих опор, скорости движения нагрузки, её параметров, величины зазора.

Для реализации математической модели, описывающей поведение колебательной системы, написана программа в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. С ее помощью выполнена серия вычислительных экспериментов с целью исследования колебаний динамической системы в зависимости от жёсткости упругих опор, скорости движения нагрузки, её параметров, величины зазора.

Функция NDSolve позволяет решать дифференциальные уравнения численными методами с контролем параметров расчёта. Решение получено явным методом Рунге-Кутты. Размер шага подбирался в диапазоне от 0,001 до 0,00005 в зависимости от исходных данных задачи. Поиск экстремальных значений выполнялся при помощи функции FindMaximum, которая ищет локальный максимум функции в окрестности заданной точки. В первом подходе упругие ограничительные опоры моделировались с использованием условного оператора If. При жестком моделировании ограничительных опор переход к решению следующей системы дифференциальных уравнений осуществлялся с помощью функции WhenEvent. Эта функция позволяет задать действие, которое реализуется, если выполняется определённое условие при использовании решателя NDSolve.

На начальном этапе приняты следующие характеристики динамической системы:

$$M = 37,74 \text{ м}; \quad l_o = 42,5 \text{ м}; \quad l_1 = l_2 = 4 \text{ м}; \quad a_1 = a_2 = 4 \text{ м}; \quad c_1 = c_2 = 1200 \text{ кН/м}; \quad P(t) = 100 \text{ кН}; \quad v = 10 \text{ м/с}.$$

В качестве характерных точек примем начало (точка А) и конец (точка В) стержня. Для иллюстрации численных исследований ниже приведены графики вертикальных перемещений этих точек во времени. На рис. 3-5 представлены колебания точек стержня без включения в работу ограничительных опор. На рис. 3 изображены вертикальные колебания начала и конца стержня.

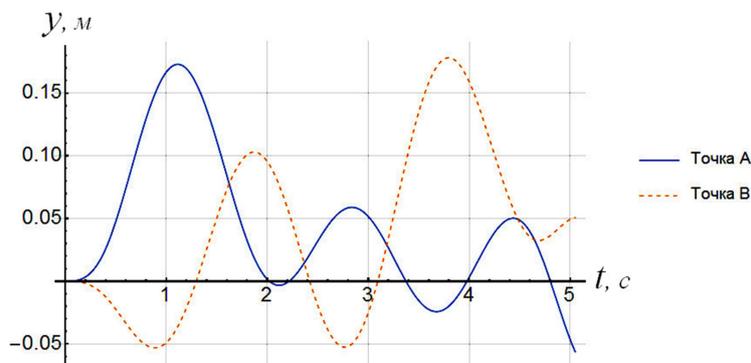


Рис. 3. Вертикальные перемещения начала и конца стержня

Амплитуда точки А существенно возрастает в момент въезда подвижной нагрузки на балку и составляет 0,17298 м. Максимальное перемещение точки В составляет 0,17819 м, что на 3,01 % больше.

Построены графики вертикальных колебаний начала стержня от времени при разной жесткости упругих связей (рис. 4, а) и скорости движущейся нагрузки (рис. 4, б).

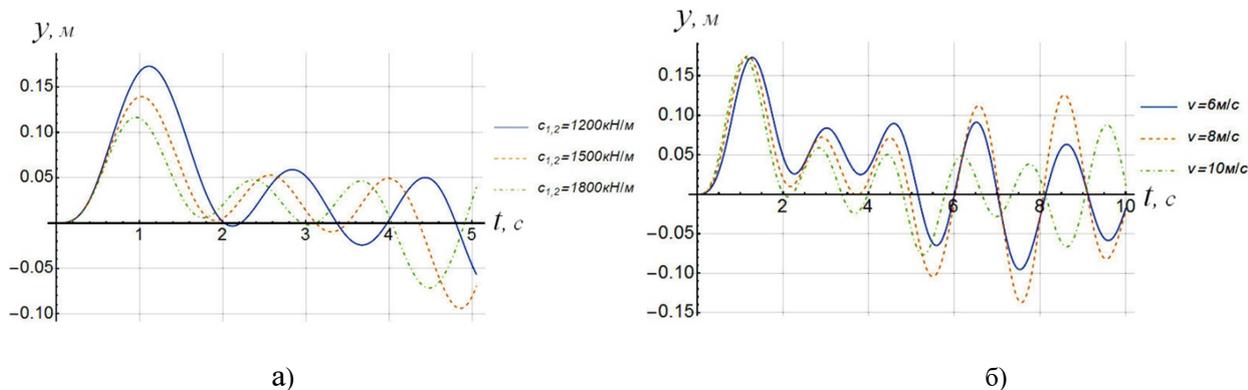


Рис. 4. Вертикальные перемещения точки А в зависимости:
а) от жесткости упругих связей, б) от скорости движения на грузки

При увеличении жёсткости упругих связей на 600 кН/м максимальная амплитуда точки А снижается на 48,3 %. С увеличением скорости движения нагрузки максимальное отклонение от точки равновесия изменяется незначительно, однако при скорости движения нагрузки – 8 м/с, амплитуда свободных колебаний существенно возрастает.

При заданной круговой частоте варьировалась амплитуда динамической составляющей нагрузки. На рис. 5, а представлены графики вертикальных перемещений начала стержня от времени для частоты $\omega = 1 \text{ гц}$. На рис. 5, б - аналогично для частоты $\omega = 2 \text{ гц}$.

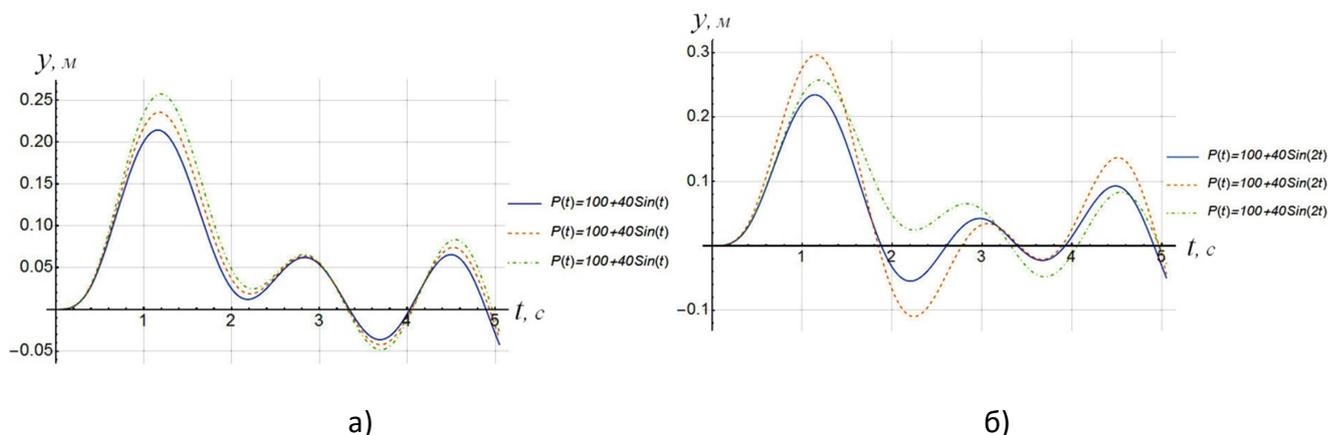


Рис. 5. Вертикальные перемещения точки А, изменялась амплитуда динамической составляющей силы:
а) частота $\omega = 1 \text{ гц}$ б) частота $\omega = 2 \text{ гц}$

По графикам можно сделать вывод, что влияние амплитуды динамической составляющей нагрузки на максимальные вертикальные перемещения начала стержня существенным образом зависит от частоты возмущающей силы. Даже при незначительном увеличении частоты это влияние увеличивается.

Теперь рассмотрим колебания упруго опертого стержня с ограничительными опорами с использованием второго подхода. Жесткость упругих связей, моделирующих ограничительные опоры, при этом подбиралась организацией итерационной процедуры. На рис.6 видна сходимость вертикального перемещения точки А в момент времени $t=3 \text{ с}$. В дальнейших расчетах значение c принималось равным 250000 кН/м .

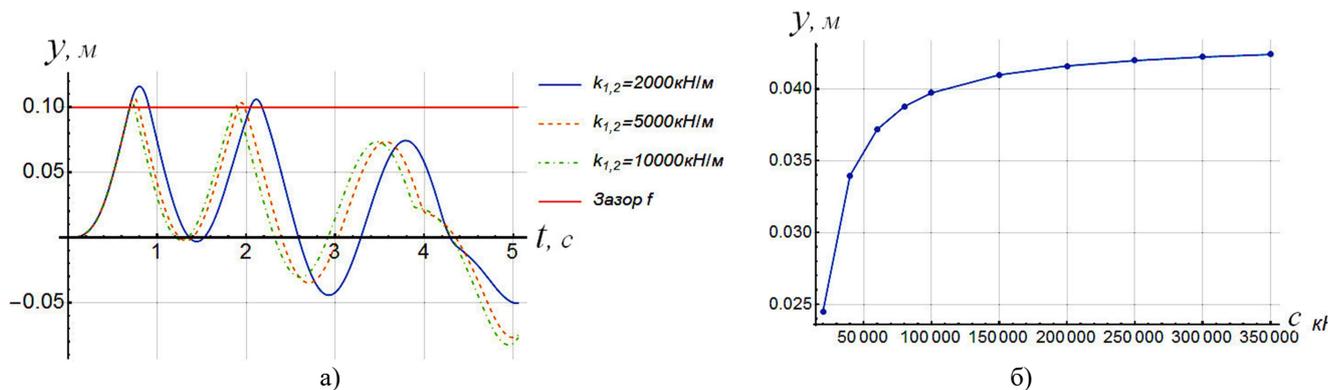


Рис. 6. Моделирование ограничительных опор упругими связями большой жесткости:
а) вертикальные перемещения точки А при разной жесткости ограничительных опор,
б) график сходимости результатов расчета в момент времени $t=3 \text{ с}$

На рис. 7 показано сравнение результатов расчета колебаний упруго опертого стержня с дополнительными ограничительными опорами. В первом подходе конструктивно нелинейный колебательный процесс моделировался решением дифференциальных уравнений в част-

ных производных с разрывными граничными условиями. Во втором – моделирование ограничительных опор осуществлялось упругими связями большой жесткости.

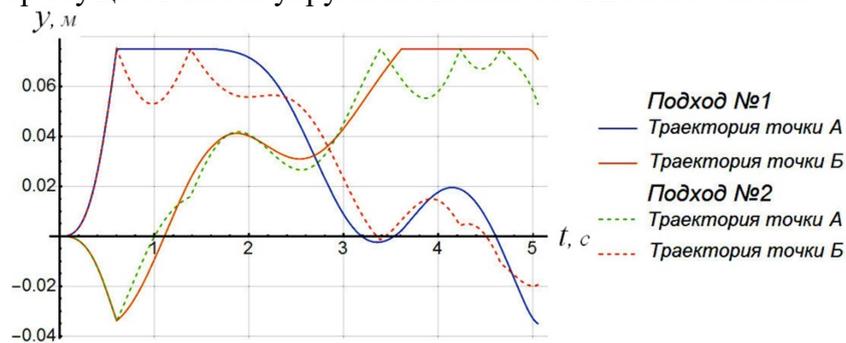


Рис. 7. Вертикальные перемещения начала и конца стержня

Как видно из рис. 7, для принятой колебательной системы, которая не учитывает изгибные деформации стержня, графики достаточно близки. Так как, более простым в реализации является моделирование ограничительных опор упругими связями, далее приведены графики, полученные с использованием второго подхода.

На рис. 8 представлены графики вертикальных перемещений начала стержня во времени в зависимости от величины зазора.

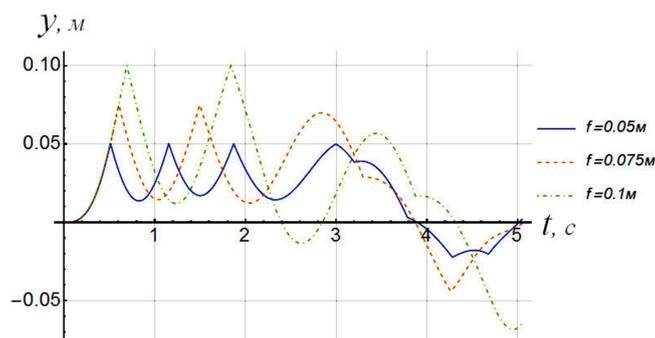


Рис. 8. Вертикальные перемещения точки А при изменении величины зазора ограничительных опор

На рис. 9 представлена трёхмерная поверхность вертикальных перемещений сечений стержня с ограничителями хода. Цвет поверхности устанавливается в зависимости от величины вертикального перемещения сечения.

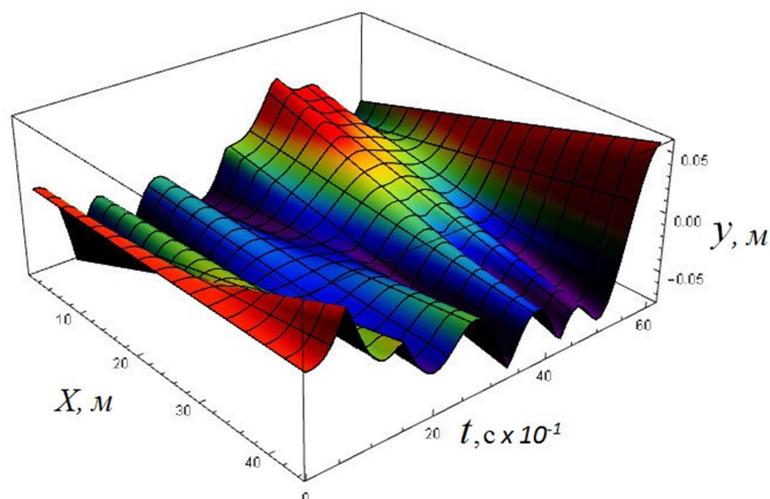


Рис. 9. Вертикальные перемещения сечений стержня с ограничителями хода

Выводы

Изложенные подходы к численному моделированию поведения упруго опертой конструктивно-нелинейной колебательной системы с ограничительными опорами позволили при выполнении вычислительных экспериментов оценить влияние параметров системы на общий характер колебаний и выявить некоторые закономерности. Способ моделирования ограничительных опор упруго-вязкими связями большой жесткости дает возможность учитывать конструктивные особенности работы только для достаточно простых систем. При этом система дифференциальных уравнений и граничные условия остаются неизменными, что существенно упрощает получение решения. Такой способ не подходит при учете изгибных деформаций стержня и для многократного включения и выключения связей, что приводит к накоплению погрешности получаемого решения и в ряде случаев нарушению гладкости решения. В случае более сложных систем необходимо использовать уравнения с разрывными граничными условиями, что потребует разработки специальных подходов к решению таких уравнений и разработки уже вычислительного комплекса. Такая работа будет продолжением научных выполненных исследований, приведенных в статье.

Библиографический список

1. Гриднев, С.Ю. Моделирование конструктивно-нелинейных колебаний наплавных мостов неразрезной системы с ограничительными жесткими опорами в концевых частях под действием подвижной нагрузки / С.Ю. Гриднев // Научный вестник ВГАСУ. Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений. – 2004. – Вып. №1. – С.
2. Гриднев, С.Ю. Расчет конструктивно-нелинейных колебаний балочной системы под действием подвижной нагрузки методом Канторовича/ С.Ю. Гриднев // Материалы Международного конгресса наука и инновации в строительстве: Современные проблемы механики строительных конструкций. – Воронеж : [б. и.], 2008. – С. 83-92.
3. Гриднев, С.Ю. Расчетное моделирование поведения балочных систем под действием подвижной нагрузки с учетом конструктивной нелинейности / С.Ю. Гриднев // Приволжский научный журнал. – 2008. – Вып. 2. – С. 64-71.
4. Gridnev, S.Yu. Analyzing the features of oscillations of a floating bridge under a moving load in view of non-linear effects of end supports // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2014. № 3 (23). pp. 75-83.

5. Маслов, А.Г. Исследование процесса уплотнения цементобетонных смесей на вибрационной площадке с жестко-упругими ограничителями/ А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин// Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету, вип. 6/2005 (35). Частина 2. – Кременчук, 2005. – С. 15– 19 .
6. Маслов, А.Г. Сравнение теоретических и экспериментальных данных исследований виброплощадок с жёстко-упругими ограничителями/ А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин// Вісник Кременчуцького державного полі-технічного університету. Вип. 2/2008 (49). Частина 1. – Кременчук, 2008. – С. 92–94 .

References

1. Gridnev S.Y. Modeling of structurally-nonlinear vibrations of continuous floating bridge system with a restrictive rigid supports at the ends of the parts under the action of a moving load / Gridnev S. Y. // Scientific Herald of VSUACE. Modern methods of static and dynamic calculation of buildings and structures. – 2004. –Vol. No. 1.
2. Gridnev, S. Y. Calculation of structurally nonlinear vibrations of beam system under the action of a moving load by the method of Kantorovich / Gridnev S. Y. // proceedings of the International Congress of science and innovation in the construction industry: Modern problems of mechanics of building constructions. – Voronezh : [b. I.], 2008. – P. 83-92.
3. Gridnev, S. Y. numerical simulation of the behavior of girder system under the action of a moving load taking into account structural nonlinearity / S. Y. Gridnev // Privolzhsky scientific journal. – 2008. – Vol. 2. – P. 64-71.
4. Gridnev S. Yu. Analyzing the features of oscillations of a floating bridge under a moving load in view of non-linear effects of end supports // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2014. No. 3 (23). pp. 75-83.
5. Maslov, A. G., Itkin, A. F. Study of the process of compaction of cement concrete mix on a vibrating platform with rigid-elastic limiters// Bulletin of Kremenchuk sovereign poly – technology University, The issue. 6/2005 (35). Part 2. – Kremenchuk, 2005. – P. 15– 19 .
6. Maslov, A. G., Itkin, A. F., Comparison of theoretical and experimental data studies of vibratory plates with rigid-elastic limiters. Kremenchuk sovereign poly-technonogy University. The issue 2/2008 (49). Part 1. – Kremenchuk, 2008. – P. 92-94 .

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск №1 (14), 2017

Редактор Аграновская Н.Н.

Подп. в печать 00.00.2017. Формат 60x84 1/8. Уч.-изд. л. 14,6. Усл.-печ. л. 14,7.
Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ № .

Отпечатано: **отдел оперативной полиграфии ФГОУ ВПО
«Воронежский государственный технический университет»**

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84