



ISSN 2219-1038

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск № 1(6), 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Учредитель

Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего
профессионального
образования
«Воронежский
государственный
архитектурно-строительный
университет»

Издатель

Строительный факультет

Главный редактор

Сафронов В.С., д.т.н., проф.

Зам. главного редактора

Ефрюшин С.В., к.т.н., доц.

Ответственный секретарь

Габриелян Г.Е., к.т.н., доц.

Технический секретарь

Флавианов В.М., м.н.с.

Члены редколлегии

Борисов Ю.М., д.т.н., проф.
Шитикова М.В., д. ф.-м. н., проф.
Шапиро Д.М., д.т.н., проф.
Орлов А.С., д.т.н., проф.
Свентиков А.А., д.т.н., проф.
Иванов Ю.В., к.т.н., доц.
Андреев А.В., к.т.н., доц.
Рогатнев Ю.Ф., к.т.н., доц.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Петреня Е.Н., Петрагин А.А.

Построение матрицы инерции конечного элемента
пространственного стержня с учетом депланации
и исследования динамических уравнений плоского
изгиба балки по различным теориям

5

Аверин А.Н., Пузаков А.Ю.

Анализ напряженно-деформированного состояния
геометрически нелинейных стержневых систем

34

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

Шапиро Д.М., Тарасов А.А.

Совершенствование расчета оснований подпорных
стенок и армогрунтовых сооружений

53

Леденев В.В., Нгуен З.Х., Тью Тхи Хоанг Ань

Распределительная способность грунтов и взаимное
влияние подземных конструкций

58

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Сафронов В.С., Барченкова Н.А., Блинова А.А.

Анализ напряженно-деформированного состояния
структурного покрытия на основе ПВК SCAD

67

Сафронов В.С., Доманова Ю.А.

Динамический расчет висячего трубопроводного пере-
хода на воздействия от гидравлического удара
при внезапной остановке насоса

75

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

Гриднев С.Ю., Будковой А.Н.

Колебания балочных систем при переходных режимах движения одиночного автомобиля 84

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Сафронов В.С., Антипов А.В.

Современные конечно-элементные модели балочных бездиафрагменных пролетных строений автодорожных мостов 92

Шапиро Д.М., Тютин А.П.

Нелинейный деформационный пространственный расчет железобетонных пролетных строений автодорожных мостов 102

Сафронов В.С., Доманов Д.И.

Динамические модели и параметры свободных колебаний косых разрезных пролетных строений железобетонных мостов 109

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

Леденев В.В., Нгуен З.Х.

Примеры повреждения зданий и сооружений, вызванных пристройкой 117

Адрес редакции: 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел., факс +7(473) 2715230

По вопросам размещения статей просьба обращаться по адресу:

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

Тел./факс: +7 (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф.

Сафронову Владимиру Сергеевичу,

тел./ факс: +7 (473) 2715230

E-mail: vss22@mail.ru

зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц.

Ефрюшину Сергею Владимировичу,

тел./ факс: +7 (473) 2715230

E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

отв. секретарю, канд. техн. наук, доц.

Габриеляну Грайру Егисеевичу

тел./ факс: +7 (473) 2715230

E-mail: grayr2010@rambler

Тел./факс +7(473) 271-52-30

Редакторы Аграновская Н.Н., Акритова Е.В.
Подп. в печать 21.06.2013. Формат 60x84 1/8.
Усл.-печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 16,1.. Бумага писчая.
Тираж 200 экз. Заказ № 305.

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий
Воронежского ГАСУ

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

Попечительский совет

ООО «Предприятие
Инвестстройиндустрия»
в лице директора
Ушакова И.И.

ООО «Предприятие
по инженерному и научно-
техническому обслуживанию
строительного комплекса
«СтройНаука»
в лице зам. директора
Глушкова А.В.

ОАО Воронежский филиал
ГИПРОДОРНИИ
в лице ген. директора
Мажарова А.В.



ISSN 2219-1038

**STRUCTURAL MECHANICS
AND CONSTRUCTIONS**
Scientific –Technical Journal
Issue № 1(6), 2013

Founder

State Educational Institute
of Higher Vocational
Education
Voronezh State University
of Architecture
and Civil Engineering

Editor

Constructional Department

Chief Editor

Dr of Tech.Sc. V.S.Safronov

Deputy of Chief Editor

PhD S.V. Efryushin

Senior Secretary

PhD G.E. Gabrielyan

Technical Secretary

Sc.associate V.M. Flavianov

Members of editorial board

Dr of Tech. Sc. Prof.

Y.M. Borisov .

Dr of Math Prof. M.V. Shitikova

Dr of Tech. Sc. Prof.D.M. Shapiro

Dr of Tech. Sc. Prof. A.S. Orlov

Dr of Tech. Sc. Prof.

A.A. Sventikov

PhD Y.V. Ivanov

PhD A.V. Andreev

PhD Y.F. Rogatnev

CONTENTS

**STRUCTURAL MECHANICS
AND STRENGTH OF MATERIALS**

Petrenya E.N., Petranin A.A.

Construction of the finite space bar inertia matrix taking into consideration the warping and dynamic equation analysis of bar simple bending according to different theories 5

Averin A.N., Puzakov A.Yu.

Analysis of deflected mode of geometrically nonlinear bar systems 34

**CALCULATION AND DESIGN OF BASES
AND FOUNDATIONS**

Shapiro D.M, Tarasov A.A.

Perfecting of retaining walls groundwork and reinforced soil structures 53

Ledenov V.V., Nguyen D.H., Chu Thi Hoang Anh

Distributing capacity of soil and cross effect of underground structures 58

**CALCULATION AND DESIGN
OF METAL STRUCTURES**

Safronov V.S., Barchenkova N.A., Blinova A.A.

Deflected mode analysis of Structural surface based on engineering computing complex scad 67

Safronov V.S., Domanova Y.A.

Suspension pipeline dynamic calculation of knocking effect caused by pump hitch 75

MOBILE LOAD EFFECT ON ELASTIC SYSTEMS

- Gridnev S.Yu., Budkovoï A.N.**
Beam system fluctuation during transient state
of a single vehicle traffic **84**

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES

- Safronov V.S., Antipov A.V.**
Modern finite – element models of bar without cut
off wall auto road spans **92**
- Shapiro D.M., Tyutin A.P.**
Nonlinear deformative dimensional design of reinforced
auto road spans **102**
- Safronov V.S., Domanov D.I.**
Dynamic models and parameters of free motions of
inclined isolated spans of railway bridges **109**

EXPERIMENTAL and NATURAL INVESTIGATIONS of STRUCTURES and MATERIALS

- Ledenov V.V., Nguyen D.H.**
Examples of building and structural damage caused by
other constriction **117**

Address: 84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh Russia
Tel/fax: +7(473)2715230

Concerning articles publication one can address:
84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh Russia
Tel./fax: +7(473) 2715230

Chief editor Dr Sc.Tech. Prof.

Vladimir Sergeevich Safronov

Tel/fax: +7(473)2715230 E-mail: vss22@mail.ru

Deputy of Chief editor, PhD, Associate Professor

Sergei Vladimirovich Efryushin

Tel/fax: +7(473)2715230 E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

Senior secretary:

PhD, Associate Professor

Gabrielyan Grayr Egisheevich

E-mail: grayr2010@rambler Tel./fax: +7(473) 2715230

Editors N.N. Agranovskaya, E.V. Akritova

Board of Trustees

Ltd. “Enterprise
Investstroyindustriya”
Director
I.I. Ushakov

Ltd. “Enterprise on
Engineering and Scientific
Service of Building Complex
StroyNauka” Deputy Director
A.V. Glushkov

Ltd. “Voronezh department of
Giprodomni” Chief Executive
Officer
A.V. Mazharov

Printed: office of operated polygraphy of Voronezh State University of Architecture and Civil
Engineering
84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh Rus

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3:624.074.5

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет*

Канд. техн. наук, доц.

кафедры строительной механики

Е.Н. Петреня

Канд. техн. наук, доц.

кафедры строительной механики

А.А. Петранин

Россия, г. Воронеж, тел. 8(473)271-52-30

e-mail: petranin.san@yandex.ru

Voronezh State University

of Architecture and Civil Engineering

PhD of Tech. Science, Associate Professor

Of Department of Structural Mechanics

E.N. Petrenya

PhD of Tech. Science, Associate Professor

Of Department of Structural Mechanics

A.A. Petranin

Voronezh, Russia, tel. 8(473)2715230

e-mail: petranin.san@yandex.ru

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ИНЕРЦИИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ДЕПЛАНАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ИЗГИБА БАЛКИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ТЕОРИЯМ

На основе теории пространственного стержня с учетом депланации при сдвигах и кручении построена матрица инерции конечного элемента методом Бубнова-Галеркина с использованием точных статических функций формы. Для апробации теории рассмотрен ее частный случай – плоский изгиб балки. Выполнен волновой анализ уравнений с учетом депланации и частотный анализ свободных колебаний шарнирно опертой балки. Результаты исследований сопоставлены с балочными теориями Бернулли-Эйлера, Релея и Тимошенко, а также с решением плоской задачи теории упругости.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

THE BUILDING OF THE MATRIX OF INERTIA OF THE FINITE ELEMENT OF SPATIAL ROD WITH REGARD DEPLANATION STUDY OF DYNAMIC EQUATIONS OF FLAT BENDING BEAMS OF DIFFERENT THEORIES

On the basis of the theory of spatial rod with a view of deplanation in bends and torsion is constructed matrix of inertia of the finite element method of Bubnov-Galerkin method using the exact static functions of the form. To test the theory considered her a special case of the flat bending of the beam. Is made of the wave analysis of the equations given deplanation and frequency analysis free hesitation is pivotally supported beams. The research results are compared with the racks theories Bernoulli-Euler, and Rayleigh Tymoshenko, as well as with the decision of the plane problem of elasticity theory.

В работах [1,2] были сформированы системы исходных дифференциальных уравнений пространственного стержня с учетом депланации для статических и динамических задач и на их основе построен стержневой конечный элемент (КЭ). Матрицы КЭ для статических задач определялись точным методом прямого интегрирования исходных уравнений для задач динамики – приближенным методом Бубнова-Галеркина, но с использованием точных статических функций формы (ФФ). матрица инерции не была приведена из-за громоздких выражений. Настоящая статья восполняет данный пробел.

© Петреня Е.Н., Петранин А.А., 2013

Найденные последним способом матрицы жесткости и приведения нагрузок КЭ совпали с найденными прямым интегрированием точными матрицами, а аналогично полученная матрица инерции не была приведена из-за громоздких выражений. Настоящая статья восполняет данный пробел.

1. Построение матрицы инерции конечного элемента методом Бубнова-Галеркина

1.1. Исходные формулы

В работе [2] получены следующие важные формулы, ссылки на которые отмечены здесь и далее звездочками.

Приближенная аппроксимация вектора перемещений (см.(74)*, (93)*):

$$\tilde{u}_* = \tilde{\Phi}_*^T \bar{u} + \tilde{\Theta}_*^T \bar{q} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{N*}^T & \tilde{\Phi}_{K*}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_N \\ \tilde{u}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{N*}^T & \tilde{\Theta}_{K*}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_N \\ \tilde{q}_K \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где звездочки указывают на приближенный характер векторов и матриц. В дальнейшем в качестве приближенных функций формы $\tilde{\Phi}_*$, $\tilde{\Theta}_*$ были приняты точные статические Φ , $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Theta}$, равные (см.(75)*):

$$\tilde{\Phi}_N^T = \begin{bmatrix} \xi_1 \tilde{I} - \frac{L^3}{4} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 & \frac{L^2}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & \frac{L^3}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ \frac{L^2}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T - L \xi_3 \tilde{G}_{21} & \xi_4 \tilde{I} - L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{2\xi} - L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \\ \frac{L}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T & - \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{4\xi} - L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\Phi}_K^T = \begin{bmatrix} \xi \tilde{I} - \frac{L^3}{4} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 & - \frac{L^2}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & \frac{L^3}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ \frac{L^2}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T + L \xi_5 \tilde{G}_{21} & \xi_6 \tilde{I} + L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{5\xi} - L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \\ \frac{L}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T & \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{6\xi} - L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\tilde{\Theta}_N^T = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{6} \xi_7 \tilde{C}_{11}^{-1} - \frac{L^5}{48} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^3}{120} \tilde{C}_{11}^{-1} (-\xi_8 \tilde{R}_{12} + L \xi_2 \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1}) \\ \frac{L^3}{24} (-\xi_9 \tilde{G}_{21} + L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T) \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{10} \xi_{10} \tilde{D} + \frac{L^2}{60} \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{7\xi} - L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^3}{24} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{60} \tilde{N}^{-T} (3 \tilde{K}_{8\xi} - L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\Theta}_K^T = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{6} \xi_{11} \tilde{C}_{11}^{-1} - \frac{L^5}{48} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{120} \tilde{C}_{11}^{-1} (\xi_{12} \tilde{R}_{12} + L \xi_2 \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1}) \\ \frac{L^3}{24} (\xi_9 \tilde{G}_{21} + L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T) \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{10} \xi_{13} \tilde{D} + \frac{L^2}{60} \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{9\xi} + L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^3}{24} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{60} \tilde{N}^{-T} (3 \tilde{K}_{10\xi} + L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в формулах (75)* статьи [2] были допущены опечатки, исправленные в (2) – в выражениях для компонент на пересечении 1-й строки и 3-го столбца матриц $\tilde{\Phi}_N^T, \tilde{\Phi}_K^T$ пропущены два последних сомножителя $\tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T$.

В формулах (2) для сокращения записи введены диагональные матрицы $\tilde{\Lambda}_i$ (см.(61)*, (68)*), матрицы функций $\tilde{K}_{i\xi}$ и полиномы ξ_i (см.(76)*, (77)*):

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}_1 = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s^{-1}; \\ \tilde{\Lambda}_2 = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_t^{-1}; \\ \tilde{\Lambda}_3 = \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\Lambda}_4 = \tilde{I} - 12 \tilde{\Lambda}_3 + 60 \tilde{\Lambda}^{-2} - 120 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Lambda}^{-2}; \\ \tilde{\Lambda}_5 = 3 \tilde{\Lambda}_1 + 7 \tilde{\Lambda}_2 - 20 \tilde{\Lambda}^{-2} + 20 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Lambda}^{-2}; \\ \tilde{\Lambda}_6 = 7 \tilde{\Lambda}_1 + 3 \tilde{\Lambda}_2 - 20 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Lambda}^{-2}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \tilde{K}_{1\xi} = \tilde{J}^{-1} [-3 \xi^2 \tilde{I} + \tilde{J}_{1\xi} + (6 \xi^2 \tilde{I} + \tilde{J}_{2\xi} - \tilde{J}_{4\xi}) \tilde{\Lambda}_3]; \\ \tilde{K}_{2\xi} = -\xi_6 \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_1; \\ \tilde{K}_{3\xi} = \tilde{J}^{-1} [\tilde{I} + (\tilde{J}_{3\xi} - \tilde{J}_{5\xi}) \tilde{\Lambda}_3]; \\ \tilde{K}_{4\xi} = -\tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_1; \\ \tilde{K}_{5\xi} = -\xi_6 \tilde{\Lambda}_3 + \tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_2; \\ \tilde{K}_{6\xi} = \tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_2; \\ \tilde{K}_{7\xi} = \tilde{J}^{-1} (-18 \xi^2 \tilde{I} + 21 \tilde{J}_{1\xi} + 36 \xi^2 \tilde{\Lambda}_3 - \xi_6 \tilde{\Lambda}_4 + 2 \tilde{J}_{6\xi} + 3 \tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_5 + 3 \tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_6); \\ \tilde{K}_{8\xi} = \tilde{J}^{-1} (7 \tilde{I} + 10 \tilde{J}_{7\xi} + \tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_5 + \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_6); \\ \tilde{K}_{9\xi} = \tilde{J}^{-1} (-12 \xi^2 \tilde{I} + 9 \tilde{J}_{1\xi} + 24 \xi^2 \tilde{\Lambda}_3 + \xi_6 \tilde{\Lambda}_4 + 2 \tilde{J}_{8\xi} + 3 \tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_6 + 3 \tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_5); \\ \tilde{K}_{10\xi} = \tilde{J}^{-1} (3 \tilde{I} + 10 \tilde{J}_{9\xi} + \tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_6 + \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_5); \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - \xi; \\ \xi_2 = \xi - \xi^2; \\ \xi_3 = \xi - 2 \xi^2 + \xi^3; \\ \xi_4 = 1 - 3 \xi^2 + 2 \xi^3; \\ \xi_5 = \xi^2 - \xi^3; \\ \xi_6 = 3 \xi^2 - 2 \xi^3; \\ \xi_7 = 2 \xi - 3 \xi^2 + \xi^3; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_8 = 6 \xi - 21 \xi^2 + 20 \xi^3 - 5 \xi^4; \\ \xi_9 = \xi^2 - 2 \xi^3 + \xi^4; \\ \xi_{10} = 3 \xi^2 - 7 \xi^3 + 5 \xi^4 - \xi^5; \\ \xi_{11} = \xi - \xi^3; \\ \xi_{12} = 4 \xi - 9 \xi^2 + 5 \xi^4; \\ \xi_{13} = 2 \xi^2 - 3 \xi^3 + \xi^5. \end{cases} \quad (5)$$

Входящие в выражения (4) диагональные матрицы функций $\tilde{J}_{i\xi}$, равные (см. (72)*):

$$\begin{cases}
\tilde{J}_{1\xi} = (\xi + 2\xi^3)\tilde{I} - 4\xi^3\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{J}_{2\xi} = \tilde{\Lambda}_{c\xi} - \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1} - \tilde{I} ; \\
\tilde{J}_{3\xi} = (\tilde{\Lambda}_{s\xi} - \tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1})\tilde{\Lambda} ; \\
\tilde{J}_{4\xi} = \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1} ; \\
\tilde{J}_{5\xi} = \tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{\Lambda} ; \\
\tilde{J}_{6\xi} = 30(\tilde{J}_{2\xi} + \xi\tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - (15\xi^2 - 5\xi^3 + 15\xi^4 - 3\xi^5)\tilde{I} + 6(5\xi^4 - \xi^5)\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{J}_{7\xi} = 2(\tilde{J}_{3\xi} + \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - (2\xi - \xi^2)\tilde{I} ; \\
\tilde{J}_{8\xi} = 30(\tilde{J}_{4\xi} - \xi\tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - (5\xi^3 + 3\xi^5)\tilde{I} + 6\xi^5\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{J}_{9\xi} = 2(\tilde{J}_{5\xi} - \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - \xi^2\tilde{I} ,
\end{cases} \quad (6)$$

выражаются через степенные полиномы и диагональные матрицы гиперболических функций $\tilde{\Lambda}_{c\xi}$, $\tilde{\Lambda}_{s\xi}$ (см.(29)*):

$$\tilde{\Lambda}_{c\xi} = \text{diag}[\cosh \lambda_i \xi] ; \quad \tilde{\Lambda}_{s\xi} = \text{diag}[\sinh \lambda_i \xi] . \quad (7)$$

Матричное уравнение динамического равновесия конечного элемента (см.(98)*):

$$\bar{M}_* \ddot{\bar{u}} + \bar{C}_* \dot{\bar{u}} = \bar{g} + \bar{P}_* \ddot{\bar{q}} + \bar{Q}_* \bar{q} , \quad (8)$$

где матрицы жесткости \bar{C}_* и приведения нагрузок \bar{Q}_* тождественно совпали с точными матрицами \bar{C} , \bar{Q} (см. (65)*, (67)*), а матрицы инерции \bar{M}_* и приведения ускорений нагрузок \bar{P}_* , равные (см.(99)*):

$$\begin{cases}
\bar{M}_* = \int \tilde{\Phi}_* \tilde{M} \tilde{\Phi}_*^T dx ; \\
\bar{P}_* = -\int_L^L \tilde{\Phi}_* \tilde{M} \tilde{\Theta}_*^T dx ,
\end{cases} \quad (9)$$

не были приведены в [2] в окончательном виде из-за громоздких выражений.

В формулах (9) матрица инерции \tilde{M} бесконечно малого элемента стержня равна (см.(86)*, (87)*):

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & & \tilde{M}_{13} \\ & \tilde{M}_{22} & \\ \tilde{M}_{31} & & \tilde{M}_{33} \end{bmatrix} . \quad (10)$$

Отметим, что в формуле (99)* статьи [2] была допущена опечатка, исправленная в (9) – в выражении для \bar{P}_* пропущен знак минус.

1.2. Техника интегрирования произведений функциональных коэффициентов и матриц

Построение матриц по формулам (9) с учетом (10) и использованием точных статических $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Theta}$ (2) после последовательной подстановки (4)-(6) сводится к взятию определенных интегралов следующих пяти видов.

1. Интеграл от степенной функции:

$$\int_0^1 \xi^n d\xi = \frac{1}{n+1}. \quad (11)$$

2. Интегралы от диагональных матриц гиперболических функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \tilde{\Lambda}_{s\xi} d\xi = \tilde{\Lambda}^{-1}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I}); \\ \int_0^1 \tilde{\Lambda}_{c\xi} d\xi = \tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Lambda}_s. \end{array} \right. \quad (12)$$

3. Смешанные интегралы, вычисляемые рекуррентным способом, начиная с $n = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \xi^n \tilde{\Lambda}_{s\xi} d\xi = \tilde{\Lambda}^{-1}(\tilde{\Lambda}_c - n \int_0^1 \xi^{n-1} \tilde{\Lambda}_{c\xi} d\xi); \\ \int_0^1 \xi^n \tilde{\Lambda}_{c\xi} d\xi = \tilde{\Lambda}^{-1}(\tilde{\Lambda}_s - n \int_0^1 \xi^{n-1} \tilde{\Lambda}_{s\xi} d\xi). \end{array} \right. \quad (13)$$

4. Интегралы от квадратов и произведений диагональных матриц гиперболических функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \tilde{\Lambda}_{s\xi}^2 d\xi = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I}); \\ \int_0^1 \tilde{\Lambda}_{c\xi}^2 d\xi = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}_c + \tilde{I}); \\ \int_0^1 \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_{c\xi} d\xi = \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Lambda}_s^2. \end{array} \right. \quad (14)$$

5. Интегралы от произведений диагональных матриц гиперболических функций и простой числовой матрицы \tilde{M} :

$$\int_0^1 \tilde{\Lambda}_{p\xi}\tilde{M}\tilde{\Lambda}_{q\xi} d\xi = \tilde{M}_{pq}, \quad p, q = s, c, \quad (15)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{pq} = \tilde{L}_{pq} * \tilde{M}; \\ \tilde{L}_{pq} = \int_0^1 \tilde{\lambda}_{p\xi}\tilde{\lambda}_{q\xi}^T d\xi, \end{array} \right. \quad p, q = s, c. \quad (16)$$

Здесь звездочкой обозначена операция покомпонентного умножения матриц и введены векторы:

$$\tilde{\lambda}_{s\xi} = \text{vec}\tilde{\Lambda}_{s\xi} = \begin{bmatrix} s_{1\xi} \\ s_{2\xi} \\ s_{3\xi} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\lambda}_{c\xi} = \text{vec}\tilde{\Lambda}_{c\xi} = \begin{bmatrix} c_{1\xi} \\ c_{2\xi} \\ c_{3\xi} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} s_{i\xi} = \sinh \lambda_i \xi; \\ c_{i\xi} = \cosh \lambda_i \xi, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad (18)$$

а символы «*vec*» указывают на операцию преобразования диагональной матрицы в вектор.

Матрицы интегралов (16) составляются из известных по справочникам интегралов и равны:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{sc} &= \begin{bmatrix} \frac{2\lambda_1(c_1c_1 - 1) - \lambda_1s_1s_1}{2\lambda_1^2} & \frac{\lambda_1(c_1c_2 - 1) - \lambda_2s_1s_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} & \frac{\lambda_1(c_1c_3 - 1) - \lambda_3s_1s_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{\lambda_2(c_2c_1 - 1) - \lambda_1s_2s_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{2\lambda_2(c_2c_2 - 1) - \lambda_2s_2s_2}{2\lambda_2^2} & \frac{\lambda_2(c_2c_3 - 1) - \lambda_3s_2s_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{\lambda_3(c_3c_1 - 1) - \lambda_1s_3s_1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} & \frac{\lambda_3(c_3c_2 - 1) - \lambda_2s_3s_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} & \frac{2\lambda_3(c_3c_3 - 1) - \lambda_3s_3s_3}{2\lambda_3^2} \end{bmatrix}, \\ \tilde{L}_{ss} &= \begin{bmatrix} \frac{2\lambda_1c_1s_1 - \lambda_1s_1c_1}{2\lambda_1^2} - \frac{1}{2} & \frac{\lambda_1c_1s_2 - \lambda_2s_1c_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} & \frac{\lambda_1c_1s_3 - \lambda_3s_1c_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{\lambda_2c_2s_1 - \lambda_1s_2c_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{2\lambda_2c_2s_2 - \lambda_2s_2c_2}{2\lambda_2^2} - \frac{1}{2} & \frac{\lambda_2c_2s_3 - \lambda_3s_2c_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{\lambda_3c_3s_1 - \lambda_1s_3c_1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} & \frac{\lambda_3c_3s_2 - \lambda_2s_3c_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} & \frac{2\lambda_3c_3s_3 - \lambda_3s_3c_3}{2\lambda_3^2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \tilde{L}_{cc} &= \begin{bmatrix} \frac{2\lambda_1s_1c_1 - \lambda_1c_1s_1}{2\lambda_1^2} + \frac{1}{2} & \frac{\lambda_1s_1c_2 - \lambda_2c_1s_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} & \frac{\lambda_1s_1c_3 - \lambda_3c_1s_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{\lambda_2s_2c_1 - \lambda_1c_2s_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \frac{2\lambda_2s_2c_2 - \lambda_2c_2s_2}{2\lambda_2^2} + \frac{1}{2} & \frac{\lambda_2s_2c_3 - \lambda_3c_2s_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{\lambda_3s_3c_1 - \lambda_1c_3s_1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} & \frac{\lambda_3s_3c_2 - \lambda_2c_3s_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} & \frac{2\lambda_3s_3c_3 - \lambda_3c_3s_3}{2\lambda_3^2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

где аналогично (18) обозначено:

$$\begin{cases} s_i = \sinh \lambda_i; \\ c_i = \cosh \lambda_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Параметры λ_i , s_i , c_i , входящие в выражения компонент матриц (19), ранее были объединены в диагональные числовые матрицы (см. (31)*, (33)*):

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_i]; \quad \tilde{\Lambda}_s = \text{diag}[s_i]; \quad \tilde{\Lambda}_c = \text{diag}[c_i]. \quad (21)$$

Структура матриц (19) позволяет разложить их в суммы произведений матриц с использованием обозначений (20), (21):

$$\begin{cases} \tilde{L}_{sc} = \tilde{L}_{cs} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s^2 + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_c \tilde{L} \tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_s \tilde{L} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda} \tilde{L}; \\ \tilde{L}_{ss} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}_c - \frac{1}{2} \tilde{I} + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_c \tilde{L} \tilde{\Lambda}_s - \tilde{\Lambda}_s \tilde{L} \tilde{\Lambda}_c \tilde{\Lambda}; \\ \tilde{L}_{cc} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}_c + \frac{1}{2} \tilde{I} + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_s \tilde{L} \tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_c \tilde{L} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\tilde{L} = -\tilde{L}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} & \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & 0 & \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \\ \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} & \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

– кососимметричная матрица. Подставляя (22) в (16-1), окончательно получим:

$$\begin{cases} \tilde{M}_{sc} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s^2 \tilde{M}' + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_c \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_s \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda} \tilde{M}''; \\ \tilde{M}_{cs} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s^2 \tilde{M}' + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_s \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_s - \tilde{\Lambda}_c \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_c \tilde{\Lambda} + \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}; \\ \tilde{M}_{ss} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}_c \tilde{M}' - \frac{1}{2} \tilde{M}' + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_c \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_s - \tilde{\Lambda}_s \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_c \tilde{\Lambda}; \\ \tilde{M}_{cc} = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}_c \tilde{M}' + \frac{1}{2} \tilde{M}' + \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_s \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_c \tilde{M}'' \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}, \end{cases} \quad (24)$$

где матрицы со штрихами получаются из заданной матрицы \tilde{M} по формулам

$$\tilde{M}' = \tilde{I} * \tilde{M}; \quad \tilde{M}'' = \tilde{L} * \tilde{M}, \quad (25)$$

при этом матрица \tilde{M}' является диагональной, а матрица \tilde{M}'' – кососимметричной в случае симметрии \tilde{M} .

1.3. Матрица инерции конечного элемента

Матрица инерции получена по формуле (9-1) с учетом (2), (10) и с применением техники интегрирования по (11)-(25), реализованной в авторской компьютерной программе Matrix. Она представляется в блочной форме:

$$\bar{M}_* = \begin{bmatrix} \bar{M}_{NN} & \bar{M}_{NK} \\ \bar{M}_{KN} & \bar{M}_{KK} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

где блоки матрицы равны:

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{NN} &= \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 + \frac{L}{3}\tilde{M}_{11} + \frac{L^3}{105}\tilde{M}_1 & \tilde{L}_2 - \frac{11L^2}{210}\tilde{M}_4 & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_4 \\ \tilde{L}_2^T - \frac{11L^2}{210}\tilde{M}_4^T & \tilde{L}_5 + \frac{13L}{35}\tilde{M}_{22} & \tilde{L}_6 + \frac{L^2}{70}\tilde{M}_5^T\tilde{N}_{13}\tilde{N}^T \\ \tilde{L}_3^T + \tilde{L}_4^T & \tilde{L}_6^T + \frac{L^2}{70}\tilde{N}\tilde{N}_{13}\tilde{M}_5 & \tilde{L}_7 + \tilde{L}_8 \end{bmatrix}; \\
\bar{M}_{NK} = \bar{M}_{KN}^T &= \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 + \frac{L}{6}\tilde{M}_{11} - \frac{L^3}{140}\tilde{M}_1 & -\tilde{L}_2 - \frac{13L^2}{420}\tilde{M}_4 & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_9 \\ \tilde{L}_2^T + \frac{13L^2}{420}\tilde{M}_4^T & -\tilde{L}_5 + \frac{9L}{70}\tilde{M}_{22} & \tilde{L}_6 - \frac{L^2}{70}\tilde{M}_5^T\tilde{N}_{20}\tilde{N}^T \\ \tilde{L}_3^T + \tilde{L}_9^T & -\tilde{L}_6^T + \frac{L^2}{70}\tilde{N}\tilde{N}_{20}\tilde{M}_5 & \tilde{L}_7 + \tilde{L}_{10} \end{bmatrix}; \\
\bar{M}_{KK} &= \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 + \frac{L}{3}\tilde{M}_{11} + \frac{L^3}{105}\tilde{M}_1 & -\tilde{L}_2 + \frac{11L^2}{210}\tilde{M}_4 & \tilde{L}_3 + \tilde{L}_4 \\ -\tilde{L}_2^T + \frac{11L^2}{210}\tilde{M}_4^T & \tilde{L}_5 + \frac{13L}{35}\tilde{M}_{22} & -\tilde{L}_6 - \frac{L^2}{70}\tilde{M}_5^T\tilde{N}_{13}\tilde{N}^T \\ \tilde{L}_3^T + \tilde{L}_4^T & -\tilde{L}_6^T - \frac{L^2}{70}\tilde{N}\tilde{N}_{13}\tilde{M}_5 & \tilde{L}_7 + \tilde{L}_8 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь введены вспомогательные матрицы \tilde{L}_i , равные:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_1 &= -\frac{L^4}{48}\langle\tilde{M}_{11}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_1\rangle + \frac{L^7}{480}\tilde{D}_1\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{M}_{11}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_1 - \frac{L^4}{840}\langle\tilde{M}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_1\tilde{D}_2^T\rangle + \\
&+ \tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{L}_{11}\tilde{J}^{-1}\tilde{D}_2^T + \frac{L^2}{4}\langle\tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_6\tilde{M}_7\rangle - \frac{L^5}{48}\langle\tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_7\tilde{M}_7\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_1\rangle; \\
\tilde{L}_2 &= \tilde{L}_{12}\tilde{M}_{11}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_4 + \frac{L^3}{420}\tilde{M}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_1\tilde{D}_5 - \frac{2}{L}\tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{L}_{11}\tilde{J}^{-1}\tilde{D}_5 + \frac{L^3}{280}\tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_8\tilde{M}_5 + \\
&+ \frac{L^4}{24}\tilde{R}_{12}\langle\tilde{D}_5^T\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_7\tilde{M}_7\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_4\rangle - \frac{L}{2}\tilde{M}_7^T\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_6\tilde{D}_5; \\
\tilde{L}_3 &= L\tilde{L}_{12}\tilde{M}_{11}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_2\tilde{\Lambda}_3\tilde{N}^T + \frac{L^4}{420}\tilde{M}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_1\tilde{D}_3\tilde{\Lambda}_3\tilde{N}^T - 2\tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\tilde{L}_{11}\tilde{J}^{-1}\tilde{D}_3\tilde{\Lambda}_3\tilde{N}^T - \\
&- \tilde{D}_2\tilde{J}^{-1}\left(\tilde{L}_{13} - \frac{L^5}{24}\tilde{N}_7\tilde{M}_7\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{D}_2\tilde{\Lambda}_3\right)\tilde{N}^T - \frac{L^2}{2}\tilde{M}_7^T\tilde{J}^{-1}\tilde{N}_6\tilde{D}_3\tilde{\Lambda}_3\tilde{N}^T + \\
&+ \tilde{D}_1\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{M}_7^T\left(\frac{L^5}{24}\tilde{N}_7\tilde{D}_3\tilde{\Lambda}_3 - \frac{L^4}{4}\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{N}_6\right)\tilde{N}^T; \\
\tilde{L}_4 &= -\frac{L^3}{420}\tilde{M}_2\tilde{N}_9\tilde{N}^T + L\tilde{M}_7^T\tilde{N}_{12}\tilde{N}^T;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_5 = & \frac{L^5}{120} \tilde{D}_4^T \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{M}_{11} \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_4 + \frac{4}{L^2} \tilde{D}_5^T \tilde{J}^{-1} (\tilde{L}_{11} - \frac{L^4}{560} \langle \tilde{D}_5^T \tilde{J}^{-1} \tilde{N}_8 \tilde{M}_5 \rangle) \tilde{J}^{-1} \tilde{D}_5 - \\ & - \frac{L^3}{12} \langle \tilde{D}_5^T \tilde{J}^{-1} \tilde{N}_7 \tilde{M}_7 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_4 \rangle; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_6 = & \tilde{D}_4^T \tilde{C}_{11}^{-1} (\frac{L^6}{120} \tilde{M}_{11} \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 + \frac{L^3}{2} \tilde{M}_7^T \tilde{\Lambda}^{-2} \tilde{N}_6) \tilde{N}^T + \frac{2}{L} \tilde{D}_5^T \tilde{J}^{-1} (\frac{L^2}{8} \tilde{L}_{11} \tilde{J}^{-1} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 + \\ & + \tilde{L}_{13}) \tilde{N}^T - (\frac{L^3}{140} \tilde{M}_5^T \tilde{J}^{-1} \tilde{N}_8 \tilde{D}_3 + \frac{L^4}{12} \langle \tilde{D}_5^T \tilde{J}^{-1} \tilde{N}_7 \tilde{M}_7 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_4 \rangle \tilde{N}^{-T}) \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_7 = & \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 [\frac{L^7}{120} \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{M}_{11} \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 + 4 \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{L}_{11} \tilde{J}^{-1} \tilde{D}_3 - L^2 \langle \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{M}_6 \rangle - \\ & - \frac{L^5}{12} \langle \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{N}_7 \tilde{M}_7 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \rangle] \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T + \tilde{N} (12L^4 \langle \tilde{\Lambda}^{-4} \tilde{N}_6 \tilde{M}_3 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 \rangle - \\ & - L^4 \langle \tilde{\Lambda}^{-2} \tilde{N}_{16} \tilde{M}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 \rangle - \frac{L^4}{140} \langle \tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}_3 \tilde{N}_8 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_3 \rangle + L^4 \langle \langle \tilde{M}_3'' \tilde{\Lambda}_3 \rangle \tilde{J}^{-1} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 \rangle + \\ & + \frac{L^4}{2} \langle \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{N}_4 \tilde{J}^{-1} \rangle - L^2 \langle \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \langle \tilde{M}_6'' \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\Lambda}_3 \rangle \rangle + \frac{L^4}{2} \langle \tilde{\Lambda}^{-2} \tilde{N}_6 \tilde{M}_7 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \rangle) \tilde{N}^T; \end{aligned}$$

$$\tilde{L}_8 = \frac{L^3}{2} \tilde{N} (\langle \tilde{\Lambda}_1 \tilde{M}_3 \tilde{N}_{14} \rangle + \frac{1}{35} \langle \tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}_3 \tilde{N}_{15} \rangle + 2 \langle \tilde{M}_3'' \tilde{\Lambda}_2 \rangle + \tilde{N}_{17} - \frac{2}{L^2} \langle \tilde{M}_6'' \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\Lambda}_2 \rangle) \tilde{N}^T;$$

$$\tilde{L}_9 = (\frac{L^3}{420} \tilde{M}_2 \tilde{N}_{18} - L \tilde{M}_7^T \tilde{N}_{19}) \tilde{N}^T;$$

$$\tilde{L}_{10} = -\frac{L^3}{2} \tilde{N} (\langle \tilde{\Lambda}_1 \tilde{M}_3 \tilde{N}_{14} \rangle + \frac{1}{70} \langle \tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}_3 \tilde{N}_{21} \rangle + 2 \langle \tilde{M}_3'' \tilde{\Lambda}_1 \rangle + \tilde{N}_{22} - \frac{2}{L^2} \langle \tilde{M}_6'' \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\Lambda}_1 \rangle) \tilde{N}^T;$$

$$\tilde{L}_{11} = \frac{L^5}{1680} \langle \tilde{M}_3 \tilde{N}_2 \rangle + \frac{L^5}{280} \langle \tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}_3 \tilde{N}_3 \rangle + \frac{L^5}{2} \langle \tilde{M}_3'' \tilde{\Lambda}_3 \rangle + \frac{L^5}{4} \tilde{N}_4 + \frac{L^3}{8} \langle \tilde{M}_6 \tilde{N}_5 \rangle - \frac{L^3}{2} \langle \tilde{M}_6'' \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\Lambda}_3 \rangle;$$

$$\tilde{L}_{12} = \frac{L^3}{24} \tilde{I} - \frac{L^6}{240} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1};$$

$$\tilde{L}_{13} = \frac{L^4}{280} (\tilde{N}_3 \tilde{M}_3 \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{M}_3 \tilde{N}_{10} + \tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}_3 \tilde{N}_{11}) + \frac{L^4}{2} \langle \tilde{M}_3'' \tilde{\Lambda}_3 \rangle + \frac{L^4}{4} \tilde{N}_4 - \frac{L^2}{2} \tilde{M}_6 \tilde{\Lambda}_3 - \frac{L^2}{2} \langle \tilde{M}_6'' \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\Lambda}_3 \rangle,$$

а также диагональные матрицы \tilde{N}_i :

$$\tilde{N}_1 = \tilde{I} - 9\tilde{\Lambda}_3 + 420\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_3 - 2520\tilde{\Lambda}^{-4} + 5040\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3;$$

$$\tilde{N}_2 = \tilde{I} + 840\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_3 - 5040\tilde{\Lambda}^{-4} + 10080\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3;$$

$$\tilde{N}_3 = -3\tilde{I} + 17\tilde{\Lambda}_3 - 140\tilde{\Lambda}^{-2} + 1680\tilde{\Lambda}^{-4} - 3360\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3;$$

$$\tilde{N}_4 = -(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}^{-2})\tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}'_3 + (\tilde{I} + \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\Lambda}_1)\tilde{\Lambda}_3 \tilde{M}'_6;$$

$$\tilde{N}_5 = \tilde{I} - 4\tilde{\Lambda}_3;$$

$$\tilde{N}_6 = \tilde{I} - 2\tilde{\Lambda}_3;$$

$$\tilde{N}_7 = \tilde{I} - 12\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{N}_6;$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_8 &= -17\tilde{\Lambda}_3 - \tilde{N}_3 ; \\
\tilde{N}_9 &= 35\tilde{\Lambda}_1 + 22\tilde{\Lambda}_3 - 420\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_2 + 1680\tilde{\Lambda}^{-4} - 2520\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{10} &= -140\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_3 + 840\tilde{\Lambda}^{-4} - 1680\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{11} &= 17\tilde{\Lambda}_3 - 140\tilde{\Lambda}^{-2} + 1680\tilde{\Lambda}^{-4} - 3360\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{12} &= \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}^{-2} ; \\
\tilde{N}_{13} &= 35\tilde{\Lambda}_1 + 26\tilde{\Lambda}_3 - 70\tilde{\Lambda}^{-2} + 420\tilde{\Lambda}^{-4} - 840\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{14} &= \tilde{\Lambda}_1 - 2\tilde{\Lambda}^{-2} ; \\
\tilde{N}_{15} &= -13\tilde{\Lambda}_3 + \tilde{N}_{13} ; \\
\tilde{N}_{16} &= \tilde{I} - \tilde{\Lambda}_3 + 6\tilde{\Lambda}^{-2} - 12\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{17} &= (\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_2 + \tilde{\Lambda}_1^2)\tilde{M}'_3 + (\tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}^2\tilde{\Lambda}_1^2)\tilde{M}'_6 ; \\
\tilde{N}_{18} &= 35\tilde{\Lambda}_1 + 13\tilde{\Lambda}_3 - 420\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{\Lambda}_1 - 840\tilde{\Lambda}^{-4} + 2520\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{19} &= \tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}^{-2} ; \\
\tilde{N}_{20} &= 35\tilde{\Lambda}_1 + 9\tilde{\Lambda}_3 - 420\tilde{\Lambda}^{-4} + 840\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{21} &= 70\tilde{\Lambda}_1 + 9\tilde{\Lambda}_3 - 840\tilde{\Lambda}^{-4} + 1680\tilde{\Lambda}^{-4}\tilde{\Lambda}_3 ; \\
\tilde{N}_{22} &= (\tilde{\Lambda}^{-2} + \tilde{\Lambda}_2)\tilde{\Lambda}_1\tilde{M}'_3 + (\tilde{I} - \tilde{\Lambda}^2\tilde{\Lambda}_2)\tilde{\Lambda}_1\tilde{M}'_6 .
\end{aligned} \tag{29}$$

Для сокращения записи расширен список матриц \tilde{D}_i (см.(66)^{*}) и введены дополнительные матрицы \tilde{M}_i :

$$\begin{cases}
\tilde{D}_1 = \tilde{R}_{12}\tilde{D}^{-1}\tilde{G}_{21} ; \\
\tilde{D}_2 = \tilde{R}_{12}\tilde{D}^{-1}\tilde{N}^{-T} ; \\
\tilde{D}_3 = \tilde{N}^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{N}^{-T} ; \\
\tilde{D}_4 = \tilde{R}_{12}\tilde{D}^{-1} ; \\
\tilde{D}_5 = \tilde{N}^{-1}\tilde{D}^{-1} ; \\
\tilde{D}_6 = \tilde{D}_2\tilde{\Lambda}_3\tilde{N}^T ; \\
\tilde{D}_7 = \tilde{D}_3\tilde{\Lambda}_3\tilde{N}^T ;
\end{cases}
\begin{cases}
\tilde{M}_1 = \tilde{R}_{12}\tilde{M}_{22}\tilde{G}_{21} ; \\
\tilde{M}_2 = \tilde{R}_{12}\tilde{M}_{22}\tilde{N}^{-T} ; \\
\tilde{M}_3 = \tilde{N}^{-1}\tilde{M}_{22}\tilde{N}^{-T} ; \\
\tilde{M}_4 = \tilde{R}_{12}\tilde{M}_{22} ; \\
\tilde{M}_5 = \tilde{N}^{-1}\tilde{M}_{22} ; \\
\tilde{M}_6 = \tilde{N}^{-1}\tilde{M}_{33}\tilde{N}^{-T} ; \\
\tilde{M}_7 = \tilde{N}^{-1}\tilde{M}_{13}^T .
\end{cases} \tag{30}$$

В формулах (28) применены угловые скобки, также позволяющие сократить запись и обозначающие операцию симметризации с заключенными в них матрицей или матричным выражением:

$$\langle \tilde{M} \rangle = \tilde{M} + \tilde{M}^T . \tag{31}$$

Аналогично матрице инерции была получена по (9-2) матрица приведения ускорений нагрузок \bar{P}_* , выражения которой также оказались громоздкими. К тому же ее целесообразно использовать только в динамических расчетах с большими ускорениями изменения погонных нагрузок, поэтому матрица \bar{P}_* в данной статье не приводится.

2. Динамические уравнения плоского изгиба балки с учетом деформации

Разработанная в [1,2] теория пространственного стержня с учетом деформации и построенный на ее основе конечный элемент требуют всесторонних исследований, проверок и

апробации в практических расчетах. Эту работу целесообразно начинать с простых примеров, поэтому ниже рассматривается частный случай теории – плоский изгиб балки, состоящей из одного материала (рис. 1,2).

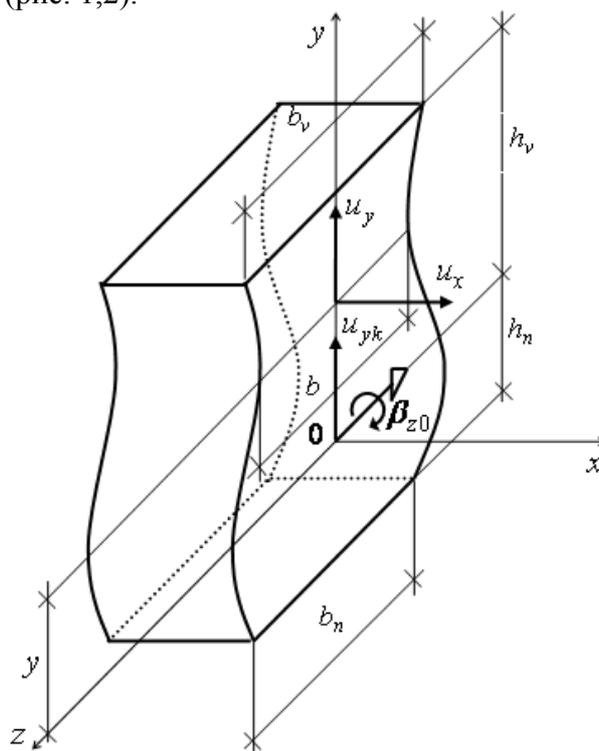


Рис. 1. Перемещения балки

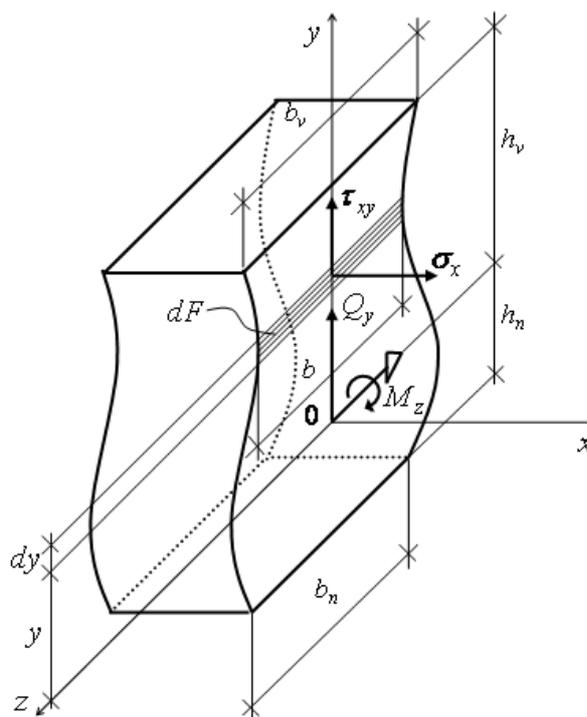


Рис. 2. Усилия и напряжения в балке

2.1. Исходные дифференциальные уравнения

Базовые перемещения и деформации балки:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \beta_{z0} \\ u_{yk} \\ \gamma_{xyk} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mu_{z0} \\ \gamma_{xzk} \\ \lambda_{xyk} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Внутренние усилия и погонные нагрузки:

$$\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{s}}' + \tilde{\mathbf{s}}'' = \begin{bmatrix} M_z \\ Q_y \\ L_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_z \\ Q_y' \\ L_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_y'' \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m_z \\ q_y \\ \overline{Q_y''} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{q}}; \\ \tilde{\mathbf{s}}' = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{e}}; \\ \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{u}}, \end{cases} \quad (34)$$

где операторы и матрицы равны:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \partial^x & & & \\ & 1 & \partial^x & \\ & & & \partial^x \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} EJ_z & & & \\ & GF_y & & \\ & & & EI_{\psi yy} \end{bmatrix}; \quad (35)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} -\partial^x & 1 & & \\ & -\partial^x & & \\ & & & -\partial^x \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{M}} = \rho \begin{bmatrix} J_z'' & & & \\ & F & & \\ & & & I_{\psi yy}'' \end{bmatrix}. \quad (36)$$

2.2. Волновой анализ уравнений

Классический анализ волновых процессов изучает поведение бесконечной гармонической волны, для которой решение задается в виде (см. [3]):

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{a}} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (37)$$

где $\tilde{\mathbf{a}}$ – вектор комплексных амплитуд; k – волновое число; ω – частота. Длина волны λ связана с волновым числом формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (38)$$

Подставляя решение (37) в разрешающее операторно-матричное уравнение без правой части вида

$$\tilde{\mathbf{L}}(\partial^x, \partial, \dots) \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (39)$$

получим однородную алгебраическую систему уравнений:

$$\tilde{\mathbf{L}}(ik, -i\omega, \dots) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (40)$$

условием существования нетривиального решения которой является

$$\det \tilde{\mathbf{L}}(ik, -i\omega, \dots) = 0. \quad (41)$$

Условие (41) представляет собой алгебраическое уравнение, которое называется дисперсионным и связывает частоту ω с волновым числом k . При решении дисперсионного уравнения находится зависимость $\omega = \omega(k)$.

Данная зависимость используется при определении фазовой скорости c_f (скорость распространения монохроматической волны) и групповой скорости c_g (скорость распространения пакета волн с близкими длинами, равная скорости переноса энергии волн) по формулам

$$c_f = \frac{\omega}{k}; \quad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (42)$$

Применим методику волнового анализа (37)-(42) к системе дифференциальных уравнений балки (34)-(36). Для упрощения выкладок зададим решение (37) в действительной форме:

$$\begin{cases} \beta_{z0} = -B_z \cos(kx - \omega t); \\ u_{yk} = U_y \sin(kx - \omega t), \end{cases} \quad (43)$$

где B_z, U_y – амплитуды волны. Последовательно подставляя (43) в (34-3,2,1), получим:

$$\begin{cases} \mu_{z0} = \beta_{z0}^x = kB_z \sin(kx - \omega t); \\ \gamma_{xyk} = \beta_{z0} + u_{yk}^x = (-B_z + kU_y) \cos(kx - \omega t); \\ \lambda_{xyk} = \gamma_{xyk}^x = -k(-B_z + kU_y) \sin(kx - \omega t); \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} M_z = EJ_z \mu_{z0} = kEJ_z B_z \sin(kx - \omega t); \\ Q_y' = GF_y \gamma_{xyk} = GF_y (-B_z + kU_y) \cos(kx - \omega t); \\ L_{xy} = EI_{\psi yy} \lambda_{xyk} = -kEI_{\psi yy} (-B_z + kU_y) \sin(kx - \omega t); \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} Q_y'' = \rho I_{\psi yy}'' \dot{\gamma}_{xyk} - L_{xy} = \delta (-B_z + kU_y) \cos(kx - \omega t); \\ Q_y = Q_y' + Q_y'' = (GF_y + \delta) (-B_z + kU_y) \cos(kx - \omega t), \end{cases} \quad (46)$$

где
$$\delta = k^2 EI_{\psi yy} - \omega^2 \rho I_{\psi yy}'' . \quad (47)$$

Оставшиеся уравнения равновесия при отсутствии погонных нагрузок $m_z = q_y = 0$ дадут два последних уравнения:

$$\begin{cases} [(-k^2 EJ_z + \omega^2 \rho J_z'') B_z + (GF_y + \delta) (-B_z + kU_y)] \cos(kx - \omega t) = 0; \\ [k(GF_y + \delta) (-B_z + kU_y) - \omega^2 \rho F U_y] \cos(kx - \omega t) = 0, \end{cases} \quad (48)$$

из которых находим выражения для соотношения амплитуд:

$$\frac{B_z}{U_y} = \frac{\omega^2 \rho F}{k(k^2 EJ_z - \omega^2 \rho J_z'')} \equiv k - \frac{\omega^2 \rho F}{k(GF_y + \delta)}. \quad (49)$$

Из равенства (49) следует биквадратное дисперсионное уравнение:

$$A \omega^4 - B \omega^2 + C = 0, \quad (50)$$

где

$$\begin{cases} A = \rho^2 [k^2 J_z'' I_{\psi yy}'' + F (J_z'' + I_{\psi yy}'')]; \\ B = \rho \{k^4 E (J_z'' I_{\psi yy} + J_z I_{\psi yy}'') + k^2 [EF (J_z + I_{\psi yy}) + GF_y J_z''] + GF_y F\}; \\ C = k^4 EJ_z (k^2 EI_{\psi yy} + GF_y). \end{cases} \quad (51)$$

Уравнение (50) имеет два корня:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad (52)$$

которым соответствует два типа изгибно-сдвиговых волн – преимущественно сдвиговые и преимущественно изгибные.

2.3. Сравнение волновых свойств балок по различным теориям

Будем сравнивать представленную теорию балки с учетом деформации со следующими классическими теориями, для которых ниже приведены аналоги формул (49)-(52).

1. Теория Бернулли-Эйлера – техническая теория, учитывающая только изгибные деформации и инерцию поперечных перемещений.

$$\frac{B_z}{U_y} = \frac{\rho F \omega^2}{E J_z k^3} \equiv k; \quad (49a)$$

$$-\rho F \omega^2 + E J_z k^4 = 0; \quad (50a)$$

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{E J_z}{\rho F}}. \quad (52a)$$

2. Теория изгиба с учетом сдвиговых деформаций.

$$\frac{B_z}{U_y} = \frac{\rho F \omega^2}{E J_z k^3} \equiv \frac{\kappa_y G k^2 - \rho \omega^2}{k \kappa_y G}; \quad (49б)$$

$$-\rho(\kappa_y G F + E J_z k^2) \omega^2 + \kappa_y G E J_z k^4 = 0; \quad (50б)$$

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{\kappa_y G E J_z}{\rho(\kappa_y G F + E J_z k^2)}}, \quad (52б)$$

где κ_y – коэффициент формы поперечного сечения.

3. Теория Релея, учитывающая инерцию поворота поперечных сечений.

$$\frac{B_z}{U_y} = \frac{\rho F \omega^2}{k(E J_z k^2 - \rho J_z'' \omega^2)} \equiv k; \quad (49в)$$

$$-\rho(F + J_z'' k^2) \omega^2 + E J_z k^4 = 0; \quad (50в)$$

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{E J_z}{\rho(F + J_z'' k^2)}}. \quad (52в)$$

4. Теория Тимошенко, одновременно учитывающая сдвиговые деформации и инерцию поворота поперечных сечений.

$$\frac{B_z}{U_y} = \frac{\rho F \omega^2}{k(E J_z k^2 - \rho J_z'' \omega^2)} \equiv \frac{\kappa_y G k^2 - \rho \omega^2}{k \kappa_y G}; \quad (49г)$$

$$\rho^2 J_z'' \omega^4 - \rho[\kappa_y G(F + J_z'' k^2) + E J_z k^2] \omega^2 + \kappa_y G E J_z k^4 = 0; \quad (50г)$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{[\kappa_y G(F + J_z'' k^2) + E J_z k^2] \mp \sqrt{[\kappa_y G(F + J_z'' k^2) + E J_z k^2]^2 - 4\kappa_y G E J_z'' J_z k^4}}{2\rho J_z''}}. \quad (52г)$$

На рис. 3, 4 показаны графики фазовых и групповых скоростей изгибно-сдвиговых волн для рассмотренных балочных теорий, построенные по формулам (42) для прямоугольного сечения с характеристиками:

$$\kappa_y = F_y / F = 5/6; \quad J_z'' = J_z = bh^3 / 12; \quad I_{\psi yy}'' = I_{\psi yy} = bh^3 / 1008. \quad (53)$$

На них по оси ординат отложены относительные скорости $\zeta = c / c_i$, по оси абсцисс – отношения высоты балки к длине волны $\eta = h / \lambda = hk / (2\pi)$.

Из графиков видно, что при увеличении отношения η или волнового числа k (уменьшении длины волны λ согласно (38)) фазовые и групповые скорости по теории Тимошенко стремятся к асимптотическим значениям:

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow c_{f1} \approx c_{g1} \rightarrow c_s = \sqrt{\frac{\kappa_y G}{\rho}}, \quad c_{f2} \approx c_{g2} \rightarrow c_i = \sqrt{\frac{EJ_z''}{\rho J_z''}}, \quad (54)$$

где c_s, c_i – скорости чисто сдвиговых и изгибных волн. Аналогичные скорости по теории с учетом деформации для обоих типов волн стремятся к одной асимптоте c_i . При этом графики скоростей для второго типа волн по данным теориям, показанные на рисунках штрих - пунктиром, практически совпадают.

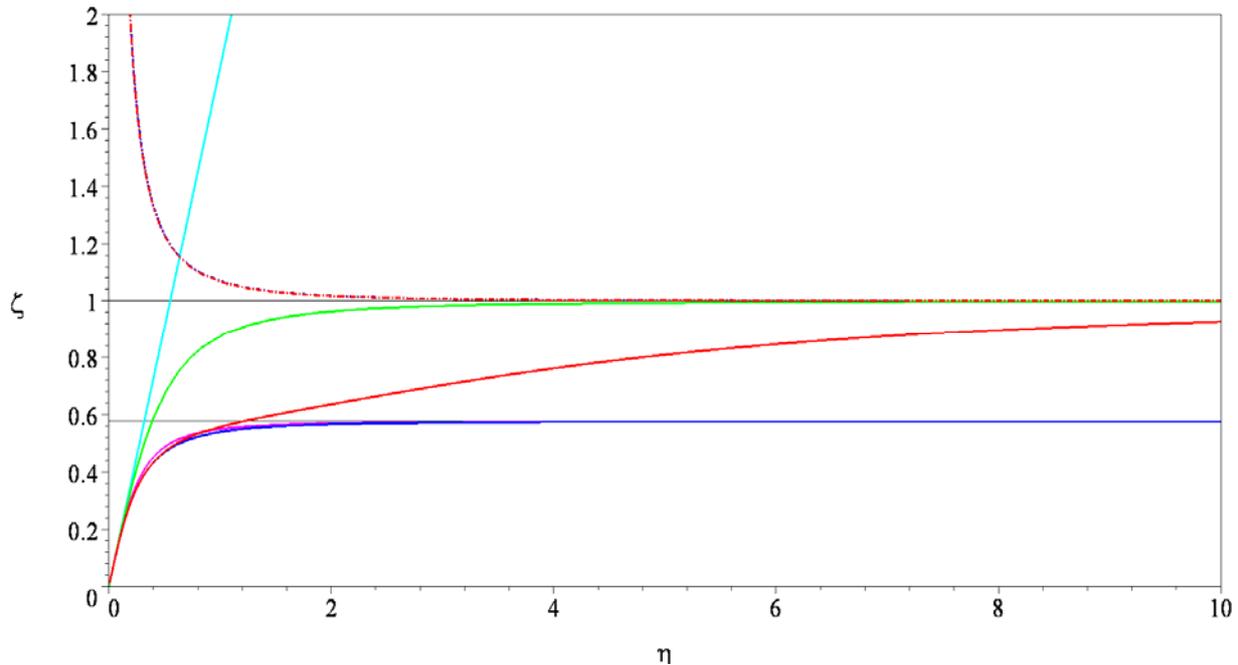


Рис. 3. Графики фазовых скоростей изгибно-сдвиговых волн

Условные обозначения к рис. 3,4:

- теория Бернулли-Эйлера
- учет сдвиговых деформаций
- теория Релея
- теория Тимошенко
- теория с учетом деформации
- волны первого типа
- волны второго типа

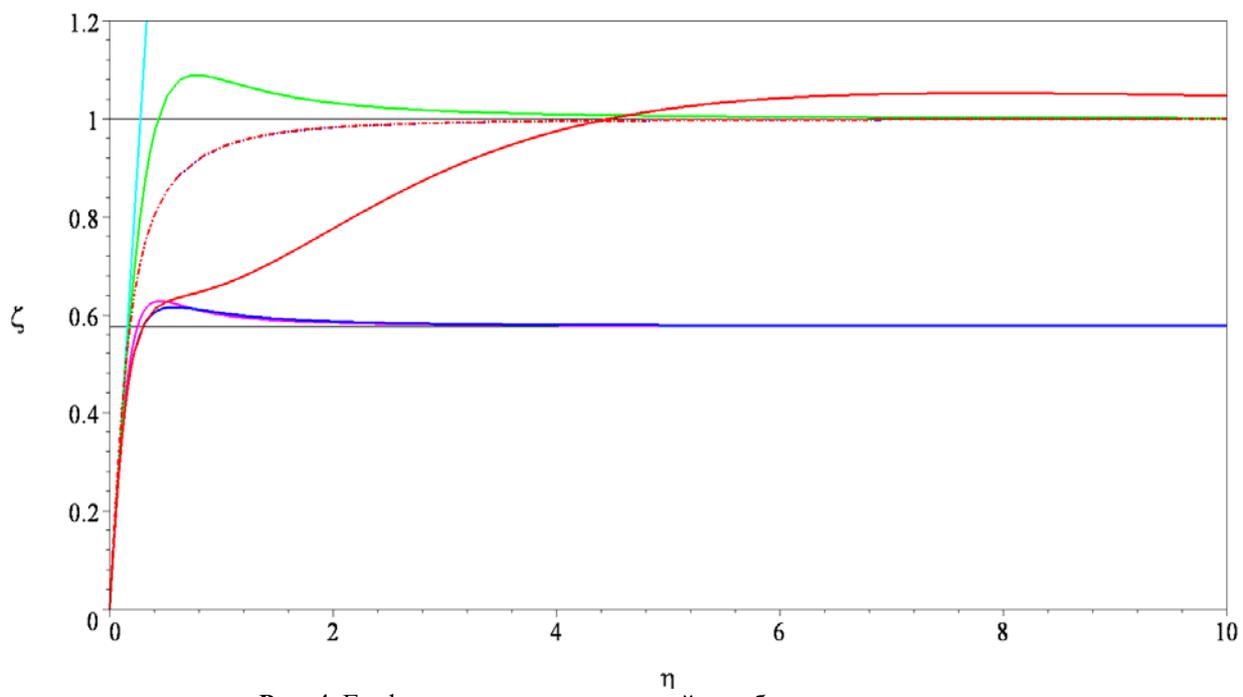


Рис. 4. Графики групповых скоростей изгибно-сдвиговых волн

На рис. 5-8, а, б приведены формы волны двух типов для отношений $\eta = 1/3, 1/2, 1, 2$.

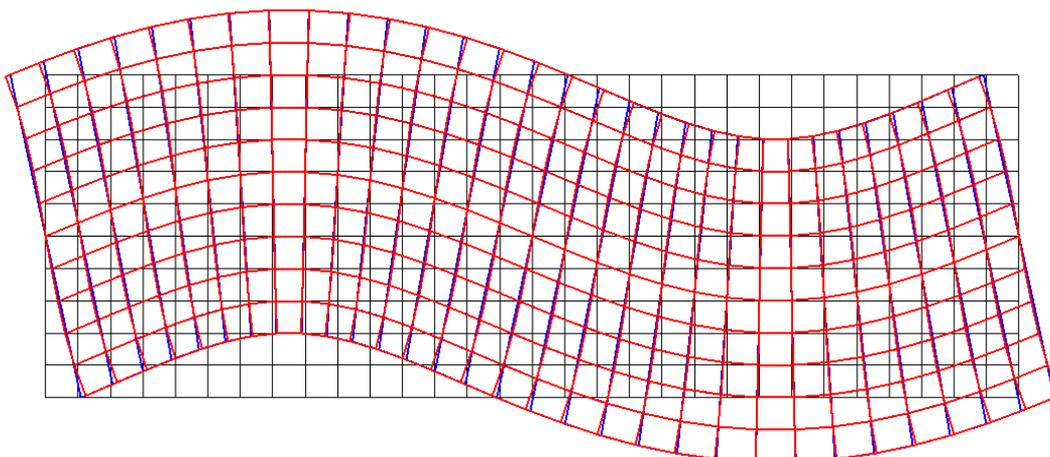


Рис. 5, а. Форма волны 1-го типа при $\eta=1/3$

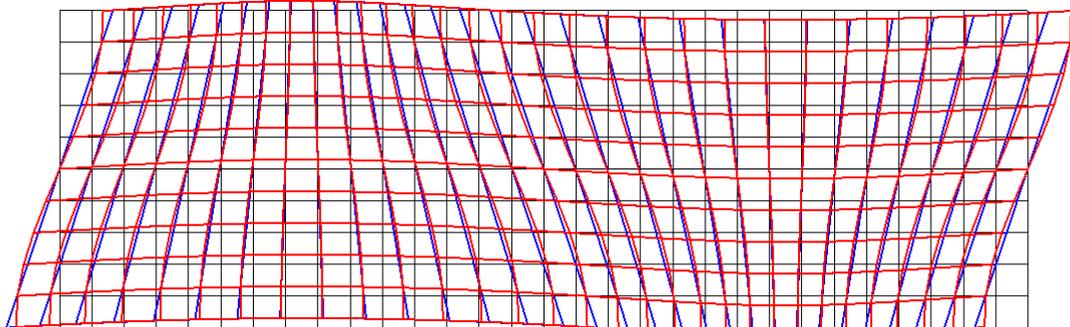


Рис. 5, б. Форма волны 2-го типа при $\eta=1/3$

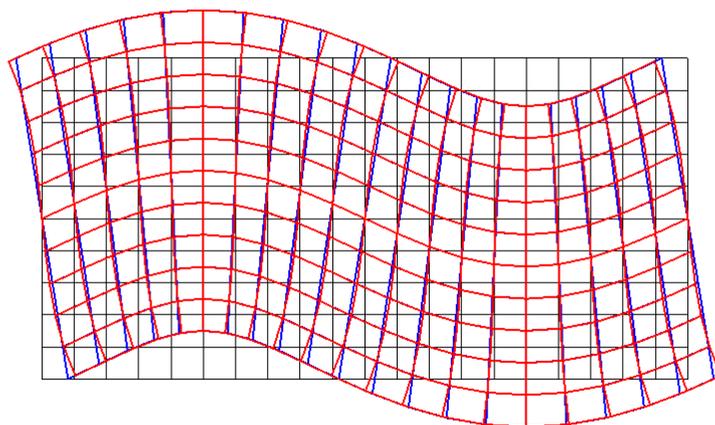


Рис. 6, а. Форма волны 1-го типа при $\eta=1/2$

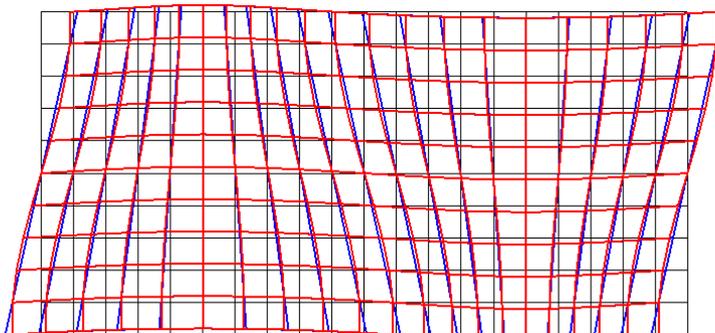


Рис. 6, б. Форма волны 2-го типа при $\eta=1/2$

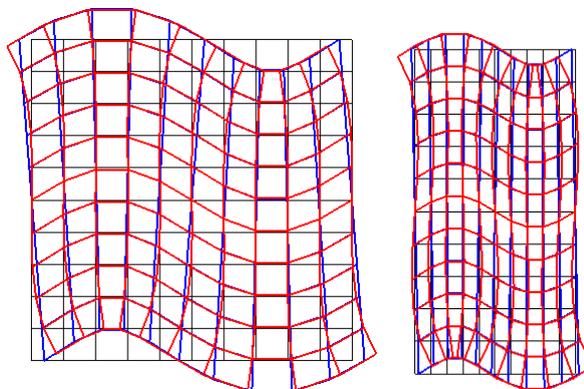


Рис. 7, а. Форма волны 1-го типа при $\eta=1$

Рис. 8, а. Форма волны 1-го типа при $\eta=2$

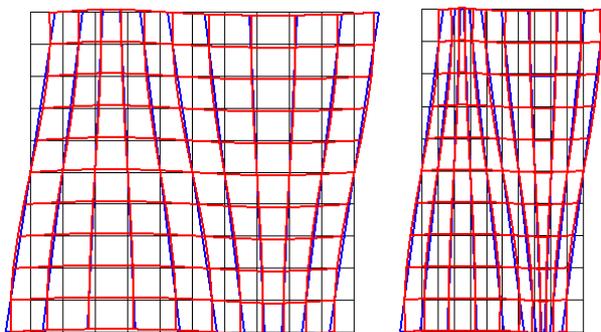


Рис. 7, б. Форма волны 2-го типа при $\eta=1$

Рис. 8, б. Форма волны 2-го типа при $\eta=2$

На этих рисунках синим цветом показаны формы волн по теории Тимошенко, красным – по теории с учетом деформации поперечных сечений.

Можно отметить, что с укорочением длины волна первого типа приобретает всё более выраженный сдвиговой характер, а волна второго типа – изгибный, при этом эффект деформации возрастает.

2.4. Частотный анализ свободных колебаний шарнирно опертой балки

Поперечные перемещения при свободных колебаниях шарнирно опертой балки описываются выражением

$$u_{y0} = U_y \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \omega_{in} t, \quad (55)$$

где U_y – амплитуда; ℓ – длина пролета; i, n – тип и номер формы колебаний, равный количеству полуволн синусоиды, укладываемых в пролете; ω_{in} – частота колебаний, соответствующая i -му типу и n -му номеру формы.

Аналогичное (55) решение можно смоделировать с помощью суммирования прямой и обратной волн с половинными амплитудами, которые в совокупности дают стоячую волну:

$$u_{y0} = \frac{1}{2} U_y \sin(kx - \omega_i t) + \frac{1}{2} U_y \sin(kx + \omega_i t) \equiv U_y \sin kx \cos \omega_i t. \quad (56)$$

Сопоставляя (55) с (56), получим:

$$k = \frac{n\pi}{\ell}; \quad (57)$$

$$\omega_{in} = \omega_i \left(k = \frac{n\pi}{\ell} \right). \quad (58)$$

Таким образом, при вычислении частоты ω_{in} по (58) можно использовать приведенные выше выражения (52,52, а-г) для частот ω_i по рассмотренным теориям с заменой в них волнового числа k согласно (57). Для балки Бернулли-Эйлера получим известную формулу

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{\rho F}}. \quad (59a)$$

Вычисленные указанным способом частоты свободных колебаний шарнирно опертой балки прямоугольного поперечного сечения с соотношением высоты сечения к длине пролета $h/\ell = 1/10$ представлены в табл. 1. Данные частоты приведены для рассмотренных теорий в относительном виде, т.е. по отношению к первой собственной частоте балки Бернулли-Эйлера.

Таблица 1

Частоты свободных колебаний шарнирно опертой балки по различным теориям

Но- мер фор- мы	Относительные частоты по теориям							Коэффициент увеличения фибровых напряжений	
	Бер- нул- ли – Эй- лера	учета сдвигов	Релея	Тимошенко		учета депланации			
				Форма типа 1	Форма типа 2	Форма типа 1	Форма типа 2	Форма типа 1	Форма типа 2
1	1	0,988	0,996	0,984	71,336	0,984	70,922	1,004	0,832
2	4	3,816	3,936	3,765	74,578	3,765	74,164	1,016	0,828
3	9	8,141	8,684	7,945	79,521	7,946	79,106	1,035	0,823
4	16	13,548	15,041	13,101	85,731	13,108	85,315	1,060	0,817
5	25	19,661	22,769	18,898	92,862	18,918	92,444	1,090	0,811
6	36	26,198	31,622	25,104	100,666	25,148	100,247	1,126	0,805
7	49	32,968	41,368	31,565	108,972	31,650	108,554	1,166	0,800
8	64	39,851	51,802	38,181	117,665	38,329	117,250	1,210	0,795
9	81	46,776	62,751	44,890	126,664	45,124	126,252	1,259	0,791
10	100	53,703	74,075	51,650	135,909	52,000	135,502	1,313	0,787
11	121	60,610	85,663	58,434	145,358	58,932	144,957	1,370	0,784
12	144	67,486	97,432	65,226	154,976	65,909	154,583	1,432	0,781
13	169	74,327	109,318	72,013	164,739	72,922	164,354	1,497	0,778
14	196	81,132	121,274	78,789	174,626	79,967	174,249	1,566	0,776
15	225	87,904	133,266	85,551	184,619	87,045	184,251	1,638	0,773
16	256	94,643	145,269	92,296	194,706	94,156	194,346	1,714	0,772
17	289	101,352	157,267	99,022	204,874	101,300	204,523	1,794	0,770
18	324	108,034	169,247	105,730	215,113	108,482	214,771	1,876	0,768
19	361	114,691	181,201	112,420	225,416	115,703	225,084	1,961	0,767
20	400	121,326	193,125	119,092	235,776	122,966	235,452	2,049	0,766

Из таблицы видно, что техническая теория Бернулли-Эйлера дает завышенные значения собственных частот по сравнению с другими теориями, при этом разница в частотах стремительно растет с увеличением номера. Частоты по теории Релея также завышены по сравнению с более точными теориями, но в меньшей степени. Теории Тимошенко и с учетом депланации дают два спектра частот, соответствующих двум типам форм колебаний, причем второй спектр существенно сдвигается и начинается после двенадцатой частоты первого спектра. При этом первые спектры частот по данным теориям довольно близки, а вторые спектры практически совпадают.

Существенное отличие двух последних теорий заключается в формулах для вычисления нормальных и касательных напряжений. По теории с учетом депланации имеем:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{yM_z}{J_z} + \frac{\psi_y L_{xy}}{I_{\psi yy}}; \\ \tau_{xy} = \frac{(1 + \psi_y^y) Q_y}{F_y}, \end{cases} \quad (60)$$

по теории Тимошенко –

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{yM_z}{J_z}; \\ \tau_{xy} = \frac{S_z^\omega Q_y}{J_z b}. \end{cases} \quad (60\Gamma)$$

Для максимальных фибровых напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения при $y = h/2$, $\psi_y(h/2) = -h/12$ из (60), (60Г) с учетом (45), (53), (49) получим:

$$\sigma_x = \frac{kEh}{12}(5B_z + kU_y) = \frac{kEh}{12}\left[5 + \frac{k^2}{F}\left(\frac{k^2 EJ_z}{\omega_{in}^2 \rho} - J_z''\right)\right]B_z; \quad (61)$$

$$\sigma_x = \frac{kEh}{2}B_z. \quad (61\Gamma)$$

Отсюда коэффициент увеличения фибровых напряжений при учете депланации для i -го типа формы колебаний и n -й частоты равен:

$$f_{in} = \frac{1}{6}\left[5 + \frac{k^2}{F}\left(\frac{k^2 EJ_z}{\omega_{in}^2 \rho} - J_z''\right)\right]. \quad (62)$$

Данные коэффициенты приведены в двух последних столбцах табл. 1 и показывают, что фибровые напряжения для форм колебаний второго типа снижаются примерно на 20 % почти независимо от номера частоты, а напряжения для форм первого типа повышаются с ростом номера частоты и для двадцатой формы достигают более чем двукратного увеличения.

3. Динамические уравнения плоского изгиба балки по теории упругости

Приведенное выше сравнение представленной теории плоского изгиба балки с учетом депланации с классическими балочными теориями не является полным без аналогичного сопоставления с точным решением уравнений плоской теории упругости (ТУ).

3.1. Исходные дифференциальные уравнения

Чтобы данное сопоставление смогло выявить принципиальные различия между теориями, используем в теории упругости присущее балочным теориям допущение об отсутствии деформаций в плоскости поперечного сечения, которое для плоской задачи сводится к условию

$$\varepsilon_y = 0. \quad (63)$$

Реализовать условие (63) без ущерба для точности исходных уравнений ТУ можно путем учета анизотропии материала балки, имеющего независимые характеристики:

$$E_x = E; \quad E_y \rightarrow \infty; \quad \nu_{xy} = \nu = 0; \quad G_{xy} = G. \quad (64)$$

Отметим, что в отличие от теории изгиба с учетом депланации в уравнениях ТУ не учитываются объемные моменты и, следовательно, действует закон парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Другое отличие состоит в учете напряжений σ_y в уравнениях равновесия ТУ, без которых их невозможно удовлетворить. При этом выражение σ_y через деформации ввиду условий (63), (64) приводит к неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и поэтому не может быть включено в состав физических уравнений.

С учетом сделанных замечаний исходные дифференциальные уравнения плоской теории упругости принимают следующий вид.

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_x - \sigma_x^x - \tau_{yx}^y = p_x = 0; \\ \rho \ddot{u}_y - \sigma_y^y - \tau_{xy}^x = p_y = 0. \end{cases} \quad (65)$$

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_x^x; \\ \gamma_{xy} = u_x^y + u_y^x. \end{cases} \quad (66)$$

Физические уравнения:

$$\begin{cases} \sigma_x = E \varepsilon_x; \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy}. \end{cases} \quad (67)$$

Граничные условия на горизонтальных кромках:

$$\begin{cases} \sigma_y(y = \pm h/2) = 0; \\ \tau_{yx}(y = \pm h/2) = 0. \end{cases} \quad (68)$$

3.2. Волновой анализ уравнений

Зададим решение системы уравнений (65)-(68), удовлетворяющее условию (63), в действительной форме, аналогичной (43):

$$\begin{cases} u_x = (-yB_z + \psi_y \Gamma_{xy}) \cos(kx - \omega t); \\ u_y = U_y \sin(kx - \omega t); \\ \sigma_y = \varphi_y \sin(kx - \omega t), \end{cases} \quad (69)$$

где B_z, U_y, Γ_{xy} – амплитуды волны; ψ_y, φ_y – функции аргумента y , первая из которых является аналогом функции деформации в балочной теории.

Последовательно подставляя (69) в (66), (67), (65), получим:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -k(-yB_z + \psi_y \Gamma_{xy}) \sin(kx - \omega t); \\ \gamma_{xy} = (1 + \psi_y^y) \Gamma_{xy} \cos(kx - \omega t); \end{cases} \quad (70)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -kE(-yB_z + \psi_y \Gamma_{xy}) \sin(kx - \omega t); \\ \tau_{xy} = G(1 + \psi_y^y) \Gamma_{xy} \cos(kx - \omega t); \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{cases} [(k^2 E - \omega^2 \rho)(-yB_z + \psi_y \Gamma_{xy}) - G \psi_y^{yy} \Gamma_{xy}] \cos(kx - \omega t) = 0; \\ [-\omega^2 \rho U_y + kG(1 + \psi_y^y) \Gamma_{xy} - \varphi_y^y] \sin(kx - \omega t) = 0. \end{cases} \quad (72)$$

Отметим, что выражение угла сдвига γ_{xy} по (70-2) через соответствующую амплитуду Γ_{xy} возможно лишь при следующем соотношении между амплитудами:

$$\Gamma_{xy} = -B_z + kU_y. \quad (73)$$

Из граничных условий (68) с учетом формул (69-3), (71-2) и нечетности функций ψ_y, φ_y имеем:

$$\begin{cases} \varphi_{y^*} = \varphi_y(y = h/2) = 0; \\ \psi_{y^*} = \psi_y(y = h/2) = -1, \end{cases} \quad (74)$$

где звездочкой для краткости записи обозначена процедура подстановки в функцию конкретного значения аргумента $y = h/2$.

Выразим из (72-2) производную от функции φ_y и проинтегрируем с учетом ее нечетности, приводящей к равенству нулю постоянной интегрирования:

$$\begin{cases} \varphi_y^y = -\omega^2 \rho U_y + kG(1 + \psi_y^y) \Gamma_{xy}; \\ \varphi_y = -\omega^2 \rho y U_y + kG(y + \psi_y) \Gamma_{xy}. \end{cases} \quad (75)$$

Подставив (75-2) в граничное условие (74-1), получим уравнение

$$\varphi_{y^*} = -\frac{\omega^2 \rho h}{2} U_y + kG\left(\frac{h}{2} + \psi_{y^*}\right) \Gamma_{xy} = 0, \quad (76)$$

из которого находим еще одно соотношение между амплитудами:

$$U_y = \frac{kG}{\omega^2 \rho} \left(1 + \frac{2\psi_{y^*}}{h}\right) \Gamma_{xy}. \quad (77)$$

Из оставшегося уравнения равновесия (72-1) с учетом соотношений (73), (77) следует дифференциальное уравнение для функции депланации ψ_y :

$$(k^2 E - \omega^2 \rho) \left\{ -y \left[\frac{k^2 G}{\omega^2 \rho} \left(1 + \frac{2\psi_{y^*}}{h}\right) - 1 \right] + \psi_y \right\} - G \psi_y^{yy} = 0, \quad (78)$$

или

$$\psi_{yi}^{yy} \mp \mu_i^2 \psi_{yi} = \mp \mu_i^2 a_i y, \quad (79)$$

где

$$\begin{cases} \mu_i^2 = \pm \frac{k^2 E - \omega^2 \rho}{G} > 0; \\ a_i = \frac{k^2 G}{\omega^2 \rho} \left(1 + \frac{2\psi_{yi^*}}{h}\right) - 1. \end{cases} \quad (80)$$

Здесь функция депланации и введенные коэффициенты разделены индексом $i = 1, 2$ по двум типам, которым соответствуют верхний или нижний знак в формулах (79), (80-1). При этом тип определяется значением частоты ω из условия положительности коэффициента μ_i^2 в (80-1).

Решением уравнения (79) является функция

$$\psi_{yi} = a_i y + b_i s_{iy}, \quad (81)$$

где b_i – неизвестный коэффициент; s_{iy} – функция гиперболического или тригонометрического синуса (аналогично косинуса) в зависимости от типа i :

$$s_{iy} = \begin{cases} \sinh \mu_1 y, & i = 1; \\ \sin \mu_2 y, & i = 2; \end{cases} \quad c_{iy} = \begin{cases} \cosh \mu_1 y, & i = 1; \\ \cos \mu_2 y, & i = 2. \end{cases} \quad (82)$$

Из (81) значения функции депланации и ее производной при аргументе $y = h/2$ равны:

$$\begin{cases} \psi_{yi^*} = \frac{a_i h}{2} + b_i s_i; \\ \psi_{yi^*}^y = a_i + \mu_i b_i c_i, \end{cases} \quad (83)$$

где

$$s_i = \begin{cases} \sinh (\mu_1 h / 2), & i = 1; \\ \sin (\mu_2 h / 2), & i = 2; \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} \cosh (\mu_1 h / 2), & i = 1; \\ \cos (\mu_2 h / 2), & i = 2. \end{cases} \quad (84)$$

Подставляя (83) в (80-2), (74-2), получим вырожденную систему двух уравнений относительно коэффициентов a_i, b_i :

$$\begin{cases} \left(\frac{k^2 G}{\omega^2 \rho} - 1 \right) (a_i + 1) = - \frac{k^2 G}{\omega^2 \rho} \cdot \frac{2b_i s_i}{h}; \\ a_i + 1 = - \mu_i b_i c_i, \end{cases} \quad (85)$$

из которой следует дисперсионное уравнение

$$\frac{k^2 G - \omega^2 \rho}{G} \cdot \frac{\mu_i h}{2} = k^2 t_i, \quad (86)$$

где

$$t_i = \begin{cases} \tanh (\mu_1 h / 2), & i = 1; \\ \tan (\mu_2 h / 2), & i = 2. \end{cases} \quad (87)$$

Дополнительным к (85) уравнением, позволяющим определить неизвестные коэффициенты a_i, b_i , является интегральное условие на функцию депланации (см. (51), (44) в [1]):

$$I_{y\psi y} = \int_F y \psi_y dF = b \int_{-h/2}^{h/2} y \psi_y dy = 0, \quad (88)$$

подставляя в которое (81) с учетом (82) получим

$$\frac{h^3 a_i}{12} \mp \frac{2c_i}{\mu_i^2} \left(t_i - \frac{\mu_i h}{2} \right) b_i = 0. \quad (89)$$

Решая совместно (85-2), (89), найдем неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} a_i = \left[1 \pm \frac{24}{\mu_i^3 h^3} \left(t_i - \frac{\mu_i h}{2} \right) \right]^{-1} - 1; \\ b_i = - \left\{ \mu_i c_i \left[1 \pm \frac{24}{\mu_i^3 h^3} \left(t_i - \frac{\mu_i h}{2} \right) \right] \right\}^{-1}. \end{cases} \quad (90)$$

Решение дисперсионного уравнения (86) с учетом (80-1), (87) не выражается в явном виде $\omega = \omega(k)$, и его приходится искать итерационным методом, например методом деле-

ния интервала пополам. Как показывает анализ уравнения, решение первого, гиперболического типа при $i=1$ единственно, а решений второго, тригонометрического типа при $i=2$ – бесчисленное множество, для которого будем полагать $i=2,3,4,\dots$, и каждое из всех этих решений гарантированно находится в интервалах:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1: \quad 0 < \omega_1 < k \sqrt{\frac{G}{\rho}}; \\ i > 1: \quad \sqrt{\frac{k^2 E + \frac{\pi^2}{h^2} (2i-3)^2 G}{\rho}} < \omega_i < \sqrt{\frac{k^2 E + \frac{4\pi^2}{h^2} (i-1)^2 G}{\rho}}. \end{array} \right. \quad (91)$$

На рис. 9, 10 показаны графики фазовых и групповых скоростей изгибно-сдвиговых волн для рассмотренного варианта плоской теории упругости, построенные по формулам (42) для первых четырех типов волн (см. комментарии к рис. 3, 4). Для сравнения из рис. 3, 4 перенесены соответствующие графики для балочных теорий Тимошенко и с учетом деформации.

Из графиков видно, что функции скоростей волн по ТУ имеют, как и по теории Тимошенко, две асимптоты, причем первая асимптота незначительно отличается, т.к. в ее выражении не учитывается коэффициент формы κ_y (см. (54)), а вторая совпадает с балочной:

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow c'_{f1} \approx c'_{g1} \rightarrow c'_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad c'_{f2} \approx c'_{g2} \rightarrow c_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (92)$$

Отметим, что графики скоростей первого типа волн по ТУ проходят между соответствующими графиками по балочным теориям, причем для длинных и средних волн при $\eta < 1$ точнее оказывается теория с учетом деформации, для коротких волн при $\eta > 1$ – теория Тимошенко. Графики скоростей второго типа волн по всем трем теориям практически совпадают, а волны следующих типов отсутствуют в балочных теориях.

На рис. 11-14 приведены графики функций деформации для первых четырех типов волн при конкретных значениях отношения высоты балки к длине волны $\eta = 0,01 \approx 0, 1, 2, 3, 4, 5$. При этом ординаты функций отложены по горизонтали, а по вертикали – относительные координаты $\xi = y/h$. Красным цветом при $\eta = 0$ показан график функции деформации по балочной теории, которая не зависит от отношения η и для прямоугольного сечения равна

$$\psi_y = \frac{y}{4} \left(1 - \frac{20y^2}{3h^2} \right). \quad (93)$$

Из графиков на рис. 11 видно, что функция деформации для первого типа волны при $\eta = 0$ совпадает с балочной функцией по (93), а при $\eta = 1$ отличается от нее незначительно. Это объясняет отмеченное выше близкое совпадение графиков фазовых и групповых скоростей по теориям упругости и с учетом деформации для длинных и средних волн. Однако с ростом отношения η ординаты функции деформации уменьшаются практически до нуля почти по всей высоте поперечного сечения за исключением фибровых волокон, что свидетельствует о появлении признака поверхностной волны и снижении влияния деформации при сдвиге. Последнее обстоятельство объясняет лучшую точность теории Тимошенко для коротких волн.

Функция деформации для второго типа волны, показанная на рис. 12, мало отличается от функции по балочной теории и практически не зависит от отношения η , что соответствует хорошей точности обеих балочных теорий при описании волн данного типа. Функции деформации для последующих типов волн на рис. 13, 14, присущих только ТУ, имеют очерта-

ние по синусоиде, частота которой возрастает с увеличением номера типа i , а амплитуда уменьшается с ростом η .

Условные обозначения:

- ТУ, волны первого типа
- ТУ, волны следующих типов
- - - теория Тимошенко
- - - теория с учетом деформации
- волны первого типа
- - - волны второго типа

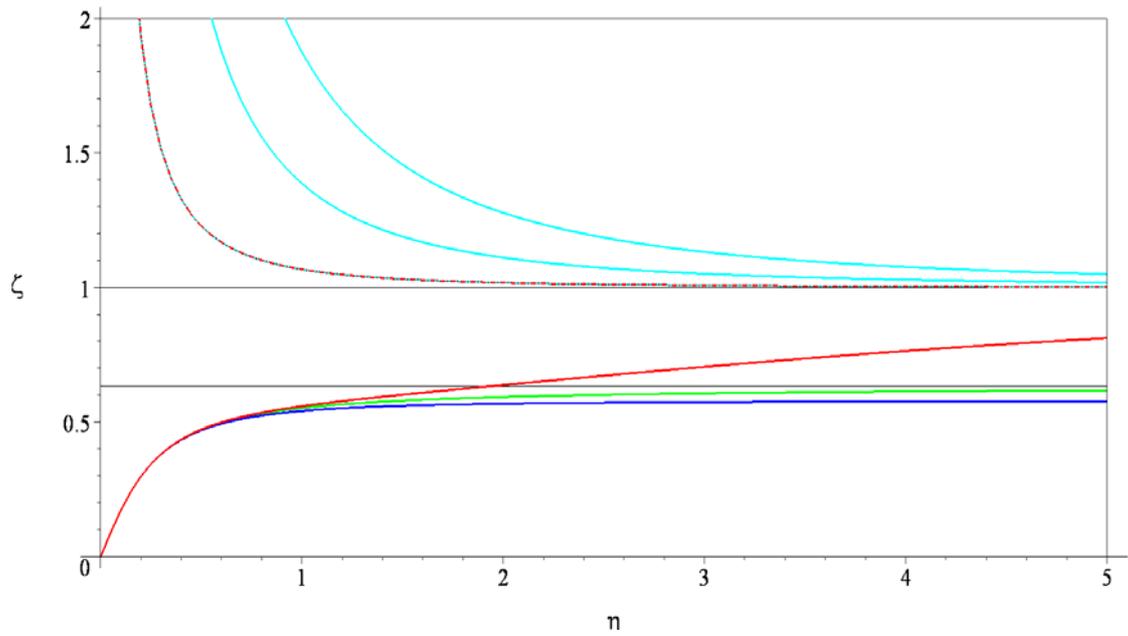


Рис. 9. Графики фазовых скоростей изгибно-сдвиговых волн

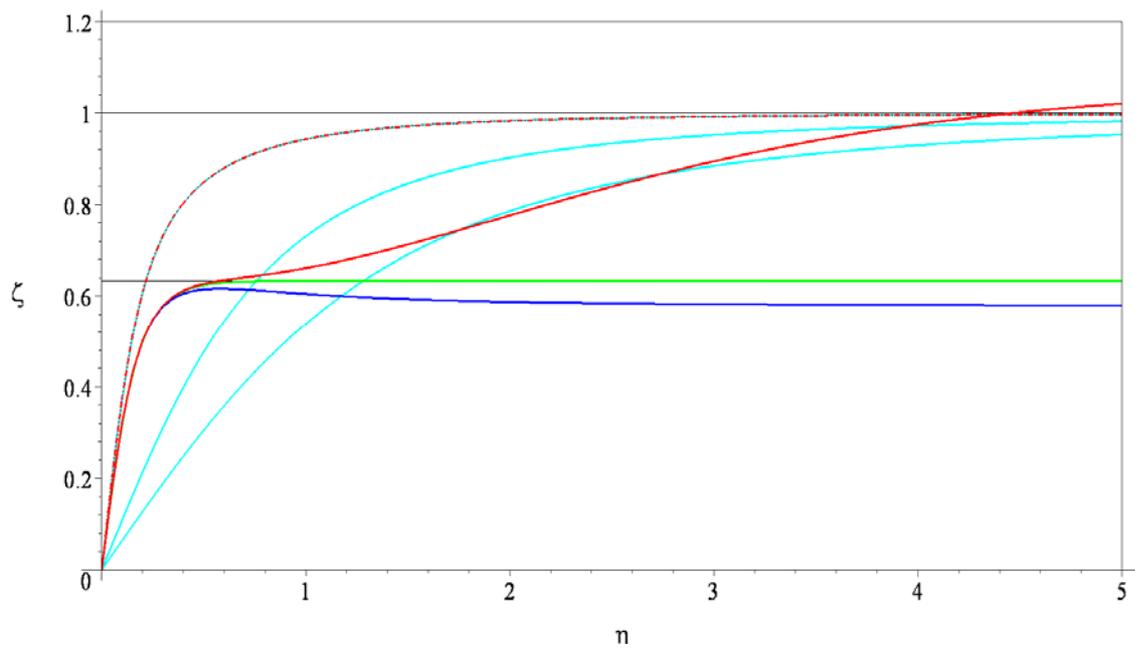


Рис. 10. Графики групповых скоростей изгибно-сдвиговых волн

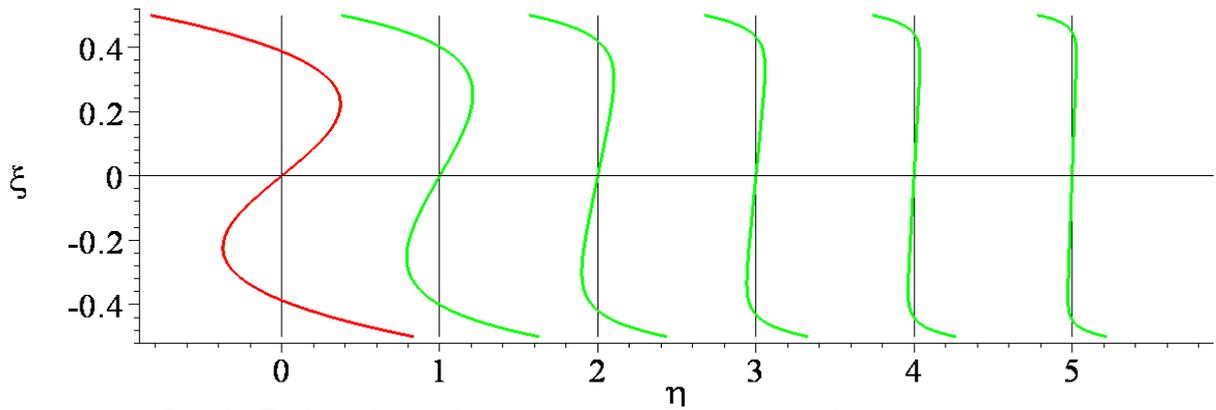


Рис. 11. Графики функций деформации для 1-го типа изгибно-сдвиговых волн

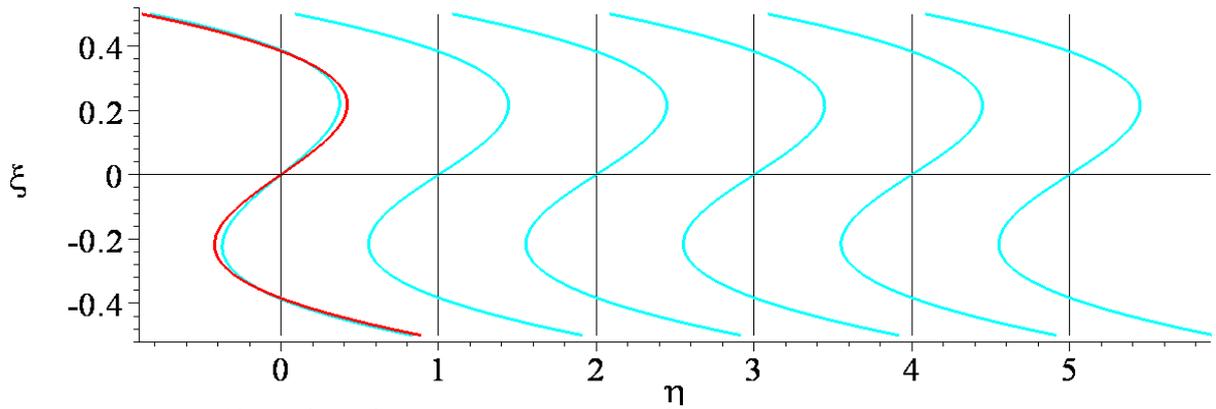


Рис. 12. Графики функций деформации для 2-го типа изгибно-сдвиговых волн

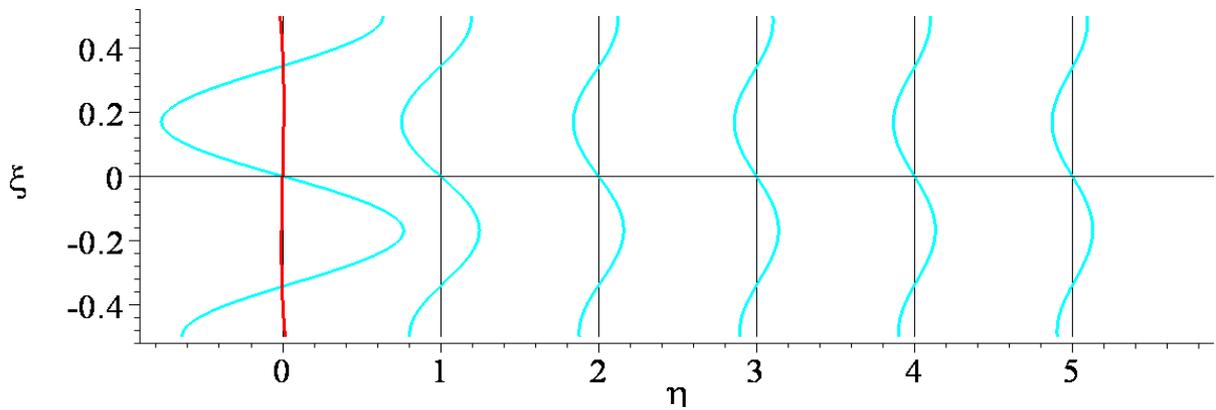


Рис. 13. Графики функций деформации для 3-го типа изгибно-сдвиговых волн

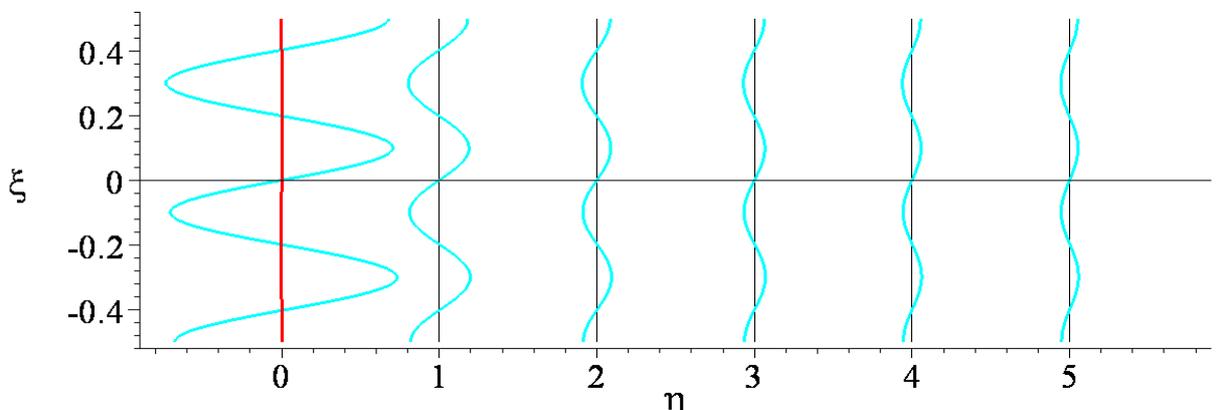


Рис. 14. Графики функций деформации для 4-го типа изгибно-сдвиговых волн

Таким образом, **принципиальное различие между теориями упругости и изгиба балки с учетом депланации** заключается в неизменности функции депланации, находимой по последней теории из решения статической задачи, тогда как в точном решении ТУ форма данной функции меняется с изменением длины волны и существенно отличается от статической для коротких волн первого типа.

Отметим, что в традиционном варианте ТУ для изотропного материала графики фазовых и групповых скоростей для второго и последующих типов волн стремятся к асимптоте, соответствующей скорости поверхностных волн Релея (см. [3, с.260]).

3.3. Частотный анализ свободных колебаний шарнирно опертой балки

Частоты колебаний рассмотренной в предыдущем разделе шарнирно опертой балки, рассчитанные по плоской теории упругости аналогичным способом моделирования стоячей волны, представлены для первых четырех типов форм колебаний в табл. 2. Данные частоты также приведены по отношению к первой собственной частоте балки Бернулли-Эйлера.

Максимальные фибровые напряжения в балке для i -го типа формы колебаний и n -й частоты найдем из (71-1) с учетом соотношений между амплитудами (73), (77):

$$\sigma_{xin} = kE\left(\frac{h}{2} B_z - \psi_{yin*} \Gamma_{xy}\right) = kE\left\{\frac{h}{2} - \psi_{yin*} \left[\frac{k^2 G}{\omega_{in}^2 \rho} \left(1 + \frac{2\psi_{yin*}}{h}\right) - 1\right]^{-1}\right\} B_z . \quad (94)$$

Таблица 2

Частоты свободных колебаний шарнирно опертой балки по теории упругости

Но- мер фор- мы	Относительные частоты по теориям				Коэффициент увеличения фибровых напряжений				
	Бер- нул- ли - Эй- лера	Плоской теории упругости							
		Форма типа 1	Форма типа 2	Форма типа 3	Форма типа 4	Форма типа 1	Форма типа 2	Форма типа 3	Форма типа 4
1	1	0,984	70,876	209,515	348,868	1,004	0,821	7,395	20,554
2	4	3,765	74,118	210,415	349,397	1,016	0,817	7,373	20,530
3	9	7,946	79,057	211,905	350,277	1,034	0,811	7,337	20,491
4	16	13,108	85,264	213,973	351,505	1,058	0,804	7,288	20,436
5	25	18,917	92,392	216,599	353,078	1,087	0,797	7,228	20,368
6	36	25,145	100,193	219,763	354,990	1,120	0,790	7,158	20,285
7	49	31,643	108,499	223,441	357,237	1,157	0,784	7,081	20,190
8	64	38,312	117,193	227,605	359,811	1,196	0,779	6,997	20,083
9	81	45,093	126,195	232,227	362,706	1,239	0,773	6,910	19,966
10	100	51,945	135,445	237,279	365,913	1,284	0,769	6,820	19,839
11	121	58,843	144,900	242,732	369,425	1,331	0,765	6,729	19,704
12	144	65,771	154,526	248,559	373,232	1,380	0,761	6,638	19,561
13	169	72,717	164,297	254,732	377,326	1,431	0,758	6,549	19,413
14	196	79,675	174,192	261,226	381,696	1,483	0,755	6,461	19,260
15	225	86,640	184,195	268,016	386,334	1,537	0,753	6,376	19,103
16	256	93,610	194,291	275,080	391,229	1,591	0,751	6,293	18,943
17	289	100,582	204,469	282,397	396,372	1,647	0,749	6,214	18,782
18	324	107,555	214,719	289,946	401,753	1,704	0,747	6,139	18,619
19	361	114,529	225,032	297,709	407,362	1,762	0,745	6,067	18,457
20	400	121,504	235,401	305,671	413,190	1,820	0,744	5,999	18,295

Отсюда, учитывая (61г), коэффициент увеличения фибровых напряжений по сравнению ТУ с техническими балочными теориями равен

$$f_{in} = \left[1 - \left(\frac{h}{h + 2\psi_{yin*}} - 1 \right) \left(\frac{k^2 G}{\omega_{in}^2 \rho} - 1 \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (95)$$

Коэффициенты по (95) для рассмотренных типов форм приведены в последних столбцах табл. 2.

Сопоставление данных табл. 1, 2 показывает, что частоты колебаний балки с учетом деформации точнее частот балки Тимошенко для обоих типов форм колебаний. Отметим, что отношение η для приведенных в таблицах двадцати форм колебаний меняется в диапазоне $0,05 < \eta < 1$, соответствующем волнам средней длины, для которых, как отмечалось выше, более точной является именно первая балочная теория.

Сравнение коэффициентов в таблицах подтверждает полученный по балочной теории с учетом деформации эффект увеличения фибровых напряжений для форм колебаний первого типа, хотя этот эффект по точному решению ТУ немного меньше, но значительно возрастает для третьего и последующих типов форм.

Выводы

Таким образом, в данной работе завершено построение конечного элемента пространственного стержня с учетом деформации для решения задач динамики, начатое в статье [2]. Приведены окончательные выражения для матрицы инерции, полученной методом Бубнова-Галеркина с аппроксимацией перемещений точными статическими функциями формы.

Разработанная в [1,2] теория стержня и построенный на ее основе конечный элемент требуют всесторонних исследований и проверок. Эта работа начата с рассмотрения простого частного случая – теории плоского изгиба балки с учетом деформации, для которого приведены исходные дифференциальные уравнения (32)-(36).

Выполнен волновой анализ данных уравнений, в ходе которого получено дисперсионное уравнение (50), построены графики фазовых и групповых скоростей изгибно-сдвиговых волн и приведены формы двух типов волн при различных отношениях высоты балки к длине волны. Результаты исследований сопоставлены с классическими балочными теориями Бернулли-Эйлера, Релея и Тимошенко.

Проведен частотный анализ свободных колебаний шарнирно опертой балки, результаты которого для всех рассмотренных балочных теорий сведены в табл. 1. Выявлен эффект существенного увеличения фибровых напряжений при учете деформации для форм свободных колебаний первого типа.

Аналогичные исследования выполнены для варианта плоской теории упругости (63)-(68), в котором использовалось присущее балочным теориям допущение об отсутствии деформаций в плоскости поперечного сечения. Установлено принципиальное различие между теориями упругости и изгиба балки с учетом деформации, которое заключается в неизменности функции деформации, находимой по последней теории из решения статической задачи. При сопоставлении с точным решением ТУ подтверждена лучшая точность представленной балочной теории по сравнению с рассмотренными классическими теориями для длинных и средних волн и соответствующих им форм свободных колебаний.

Библиографический список

1. Петреня, Е.Н. Исходные дифференциальные уравнения пространственного стержня с многоконтурным поперечным сечением произвольной формы / Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. - Воронеж. - №2. – 2011. – С. 7-28.
2. Петреня, Е.Н. Построение конечного элемента пространственного стержня с учетом деформации для решения статических и динамических задач / Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. - Воронеж. - №2. – 2012. – С. 7-30.
3. Вибрации в технике: справочник: в 6-ти т. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – С. 256-261.

References

1. Petrenya, E.N., Initial differential equations of spatial bar with the multicontour cross-section of free-form/ E.N Petrenya., A.A Petranin// Structural Mechanics and Constructions.-Voronezh, issue 2, 2011. -P. 7-28.
2. Petrenya, E.N. Construction of special bar finite element with consideration of warping for statistic and dynamic for problems solution /E.N Petrenya, A.A Petranin// Structural Mechanics and Constructions. – Voronezh, №2, 2012. – P. 7-30.
3. Vibration in engineering: reference book in 6 books, B.1. Vibration of linear systems/ Under red. of V.V. Bolotina. – M.: Engine building, 1978. – С. 256-261.

Ключевые слова: стержневая теория, теория упругости, деформация, дифференциальные уравнения, характеристики поперечного сечения, конечный элемент, функция формы.

Keywords: theory of bar, theory of elasticity, warping, differential equations, parameters of cross-section, finite element, functions of form

УДК 624.072.327

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет

Канд. техн. наук, доц.

кафедры строительной механики

А.Н. Аверин

Студент кафедры строительной механики

А.Ю. Пузаков

Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30

e-mail: an_averin@mail.ru

e-mail: puzakow@list.ru

Voronezh State University of Architecture and
Civil Engineering

PhD of Tech. Sc. Associate Professor

of Department of Structural Mechanics

A.N. Averin

Student of department of Structural Mechanics

A.Yu. Puzakov

Russia, Voronezh, tel.: 8(473)271-52-30

e-mail: an_averin@mail.ru

e-mail: puzakow@list.ru

А.Н. Аверин, А.Ю. Пузаков

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются примеры расчета стержневых систем в геометрически нелинейной постановке. Для материала стержней используются физические уравнения закона Гука. Решение задач выполняется в среде ПКВ Лира. Анализируется НДС сильно изгибаемого стержня, исследуются формы равновесия в зависимости от предыстории нагружения. Выполняется нелинейный расчет мгновенных механизмов и конструктивно нелинейных систем. При различных значениях силовых факторов исследуются устойчивые и неустойчивые формы равновесия кольца и гибкой фермы. Анализируется поведение стержня при потере устойчивости плоской формы изгиба.

A.N. Averin, A.Yu. Puzakov

ANALYSIS OF DEFLECTED MODE OF GEOMETRICALLY NONLINEAR BAR SYSTEMS

The examples of bar systems design in geometrically nonlinear placement are analyzed. Physical equations of Huk law are used for bar material. The problems are decided in the field of the complex Lira. VAT of strongly bendable bar is under consideration, the forms of equilibrium depending on previous stress history are investigated. Nonlinear computation of momentary mechanisms and structurally nonlinear systems is implemented. Stable and unstable forms of equilibrium of a ring and flexible girder are examined at different values of force factors. Bar behavior while loosing stability of plate form of bend is investigated.

Введение. Подавляющее большинство конструкций в строительстве рассматривается в линейной постановке задачи. В линейных задачах существует прямая пропорциональность между нагрузками и перемещениями вследствие малости перемещений, а также между напряжениями и деформациями в соответствии с законом Гука. Поэтому для них справедливы принцип начальных размеров и принцип суперпозиции.

В геометрически нелинейных задачах отсутствует прямая пропорциональность между деформациями и перемещениями. На практике наибольшее распространение имеет случай больших перемещений при малых деформациях, при этом считается, что справедлив закон Гука. Нелинейность порождается изменением геометрии стержневой системы при ее деформировании.

© Аверин А.Н., Пузаков А.Ю., 2013

Особую категорию систем представляют мгновенные механизмы, для которых нельзя пользоваться принципом начальных размеров и их расчет надо выполнять в нелинейной постановке.

Комбинированные системы, состоящие из гибких стержней и гибких нитей, при различных нагрузках становятся конструктивно нелинейными, так как в ходе работы изменяется их расчетная схема. Например, к системам с односторонними связями можно отнести мачты, включающие гибкие нити, которые позволяют сблизиться своими концевыми точками и не разрешают им удалиться более чем на длину нити (с учетом ее деформации).

При различных значениях силовых факторов конструкция принимает разные формы равновесия. Формы равновесия могут быть устойчивыми и неустойчивыми.

Геометрически нелинейную постановку задач сопровождает, как правило, потеря единственности решения, причем множественность решений может быть и не связана с потерей устойчивости механической системы [9].

Аналитические решения для геометрически нелинейных задач сложны и получены только для некоторых простейших случаев [2]. Во всех случаях, когда нагружение производится сосредоточенными силами и моментами, когда жесткость и начальная кривизна постоянны, задача о равновесии гибкого стержня решается с помощью эллиптических интегралов [6].

В настоящее время для расчета геометрически нелинейных систем (ГНС) применяются специальные программные комплексы (Ли́ра, SCAD, ANSYS и др.) [3]. В программах используются конечные элементы типа: сильно изгибаемый стержень, гибкая нить, конечный элемент, моделирующий предварительное натяжение вант («форкопф») и другие. Все методы решения основаны на линеаризации нелинейных конечно-элементных уравнений, т.е. поиск решений нелинейных уравнений осуществляется решением рекуррентной последовательности линейных (метод последовательных нагружений в сочетании с различными модификациями метода Ньютона). Программный модуль расчета ГНС многопараметрический. Успешное решение задачи зависит от правильного задания набора параметров, управляющих процедурой расчета.

Далее в работе анализируется НДС геометрически нелинейных плоских стержневых систем с помощью ПК Ли́ра [1].

Задача №1. Сильный изгиб консольного стержня прямоугольного сечения под действием сосредоточенной силы (рис. 1). Исходные данные: размеры сечения

$b = 1,4434$ м, $h = 0,03464$ м; площадь и момент инерции сечения $A = 0,05$ м², $J = 5 \cdot 10^{-6}$ м⁴; модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^8$ кН/м.

Рассматриваемая задача является одним из простейших примеров геометрически нелинейных задач, однако её решение является показательным вследствие наглядности и возможности сравнения с аналитическим решением [2].



Рис. 1. Расчетная схема стержня

Для решения задачи в ПК Лира был использован специальный тип конечных элементов – сильно изгибаемый стержень (тип КЭ 309) [1]. Задача решена в нелинейной постановке (стержень разбит на 100 дискретных элементов). На рис. 2 показана форма равновесия стержня.

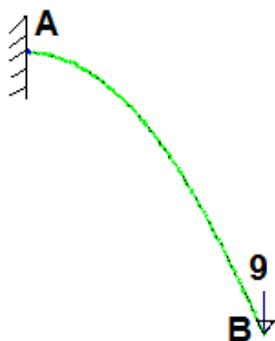


Рис. 2. Форма равновесия консольного стержня

На рис. 3 изображены эпюры продольных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

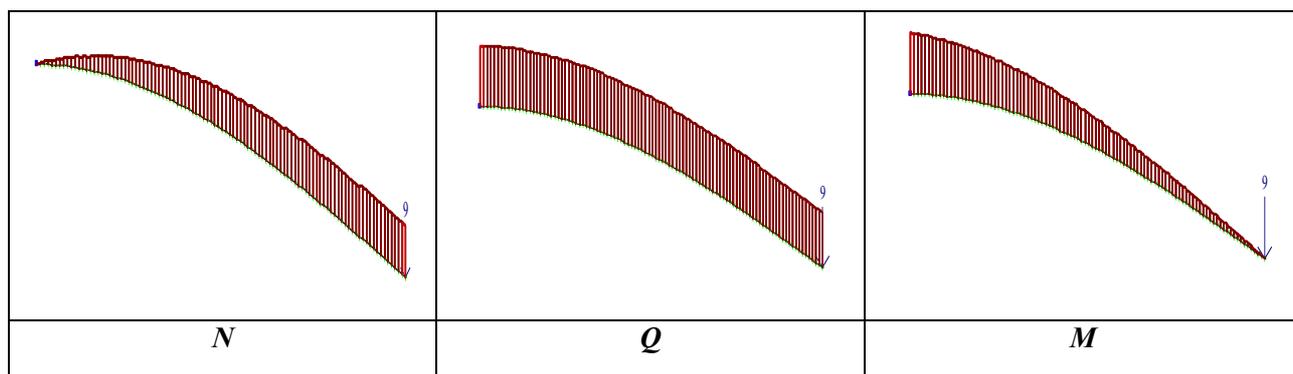


Рис. 3. Эпюры внутренних усилий

В табл. 1 представлены перемещения точки В и изгибающий момент в защемлении (точка А).

Таблица 1

Точка	Искомая величина	Результаты расчета (Лира)
В	u_B , м	-0,429
В	w_B , м	-2,65
А	M_A , кН*м	86,16

Анализ результатов

- Величина перемещений сопоставима с размерами поперечного сечения.
- Максимальное напряжение не превышает предела пропорциональности, следовательно, материал работает в упругой стадии.

$$\sigma_{нц} = 300 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_{\max}}{b * h^2} = \frac{6 * 86,16}{1,4434 * 0,03464^2} = 298,48 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{нц} > \sigma_{\max} .$$

- Так как углы поворота сечения значительны ($v'=0,404$ рад = $23,147^\circ$), то дифференциальная зависимость между кривизной и изгибающим моментом нелинейная:

$$M_z = E \cdot J \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 1}} . \quad (1)$$

- Решение задачи в нелинейной постановке имеет следующие особенности: горизонтальные u и вертикальные w перемещения – величины одного порядка, изгибающий момент в защемлении определяется с учетом горизонтального перемещения точки приложения силы, в сечении стержня наряду с изгибающим моментом M и поперечной силой Q возникает продольная сила N .

- В данной задаче мы имеем третий уровень нелинейности [9,10]: уравнения равновесия составляются с учетом перемещения точки приложения силы $M_A = (10 - 0,429) * 9 = 86,14$ (кНм); значения углов поворота сечений в квадрате соизмеримы с единицей ($0,404^2 = 0,163$); линейные деформации (относительные удлинения волокон) малы $\varepsilon = \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{289}{2,1 \cdot 10^5} = 0,0014$.

Задача №2. Сильный изгиб консоли под действием момента (рис. 4).

Исходные данные: $E = 2,1 \cdot 10^8$ кН/м², $b = 1,4434$ м, $h = 0,03464$ м, $A = 0,05$ м²,

$$J = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Введем допущение, что материал абсолютно упругий (материал подчиняется закону Гука, при загрузении возникают только упругие деформации).

Известно, что при чистом изгибе ось стержня искривляется по дуге окружности.



Рис. 4. Чистый изгиб консольного стержня

Создадим условия, при которых стержень изгибается, образуя своей осью дугу окружности с центральным углом 180° . Используем известную зависимость между кривизной и изгибающим моментом:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ}, \text{ получим } M = EJ * \frac{1}{r} = EJ * \frac{\pi}{L} = 329,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

На рис. 5 показана форма равновесия и эпюра изгибающих моментов (начало координат на свободном конце стержня).

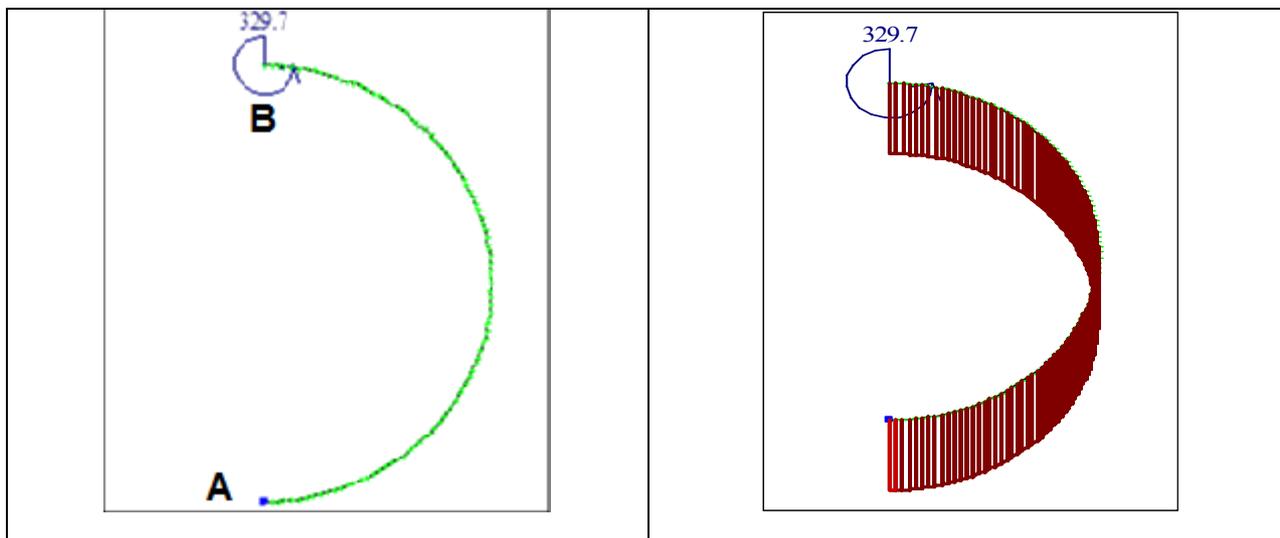


Рис. 5. Форма равновесия стержня и эпюра изгибающих моментов

В табл. 2 представлены перемещения точки В и изгибающий момент в закреплении (точка А). Продольные и поперечные силы в стержне не возникают (чистый изгиб).

Таблица 2

Точка	Искомая величина	Результаты расчета
В	u_B , м	10
В	w_B , м	6,4
А	M_A , кН*м	329,7

Анализ результатов

Задача является геометрически нелинейной и демонстрирует связь между изгибающим моментом и кривизной оси стержня.

Задача №3. Сильный изгиб консоли под действием сосредоточенной силы и момента (силовые факторы прикладываются в различной последовательности, рис. 6).

На конец консоли прикладываем момент величиной 329,7 кНм и силу 100 кН [6]. Исходные данные: $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$, $A = 0,05 \text{ м}^2$, $J = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$.



Рис. 6. Расчетная схема стержня

На рис. 7 показаны формы равновесия стержня при различной последовательности приложения силовых факторов

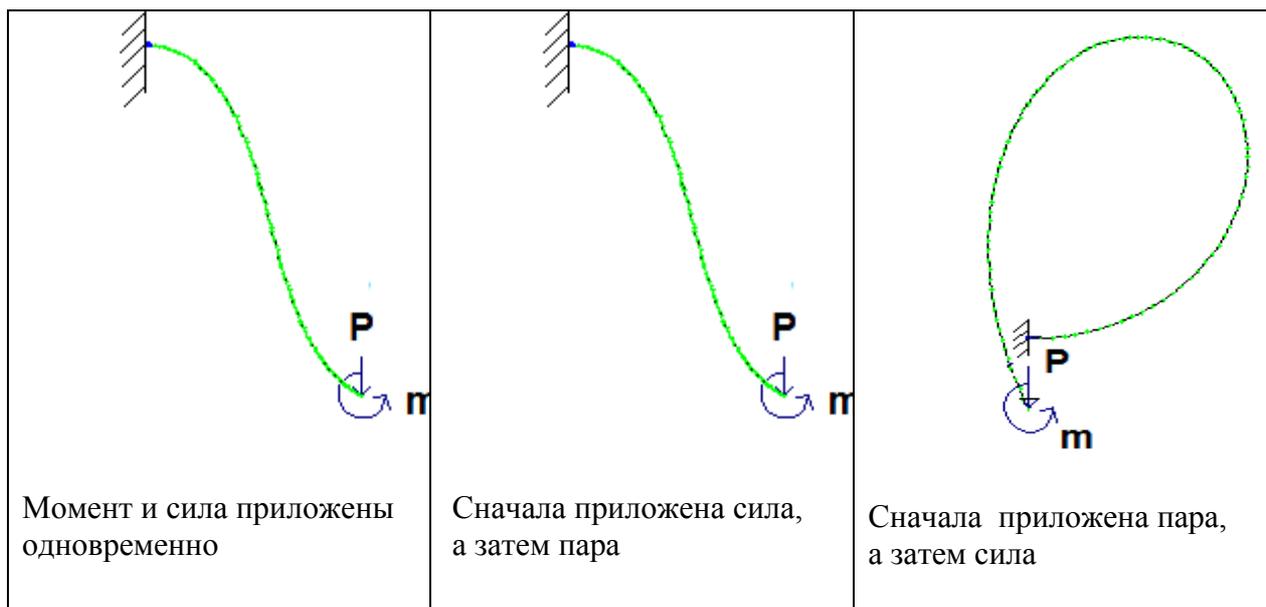


Рис. 7. Формы равновесия стержня при различной последовательности приложения силовых факторов

В табл. 3-5 приведены численные значения перемещений и усилий.

Таблица 3

Точка	Искомая величина	Результаты расчета (Лира)
В	$u_B, м$	-2,57
В	$w_B, м$	-6,25
А	$M_A, кН*м$	414,233

Таблица 4

Точка	Искомая величина	Результаты расчета (Лира)
В	$u_B, м$	-2,57
В	$w_B, м$	-6,27
А	$M_A, кН*м$	414,372

Таблица 5

Точка	Искомая величина	Результаты расчета (Лира)
В	$u_B, м$	-12,23
В	$w_B, м$	-0,697
А	$M_A, кН*м$	723,404

Анализ результатов

Определенная последовательность загрузений может привести к различным формам равновесия стержня, причем если первые две последовательности загрузений приводили к одной форме равновесия, то последняя – к совершенно иной форме. И если в первых двух случаях максимальный изгибающий момент практически одинаков, то в третьем его значение больше в 1,75 раз. Таким образом, формы равновесия и возникающие в стержне усилия зависят не только от величины силовых факторов, но и от последовательности их приложения (предыстории).

Задача №4. Гибкое кольцо

Примем допущение, что материал абсолютно упругий.

Кольцо присоединено к земле с помощью четырех стержней и нагружено силами P в точках A и B (рис. 8) [3]. Используется КЭ 309 универсальный пространственный сильно изгибаемый стержень [1], метод расчета – автоматический выбор шага (изменения нагрузки) с поиском новых форм равновесия.

Исходные данные: $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м², $A = 3,14 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 0,7854 \cdot 10^{-8}$ м⁴. Кольцо заменено правильным вписанным двадцатиугольником [3].

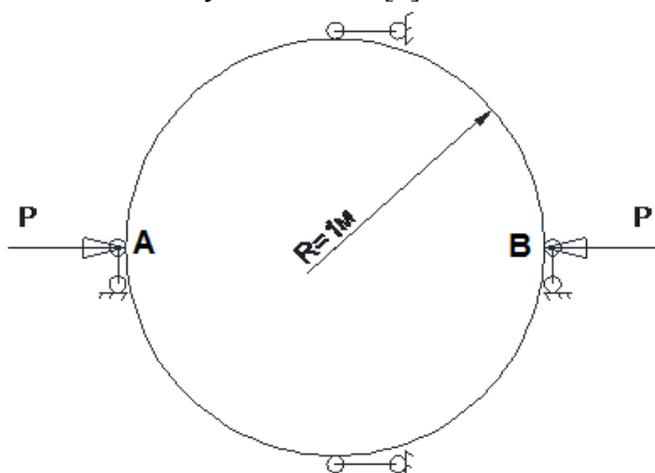


Рис. 8. Гибкое кольцо

На рис.9 показаны формы равновесия кольца при различных значениях силы.

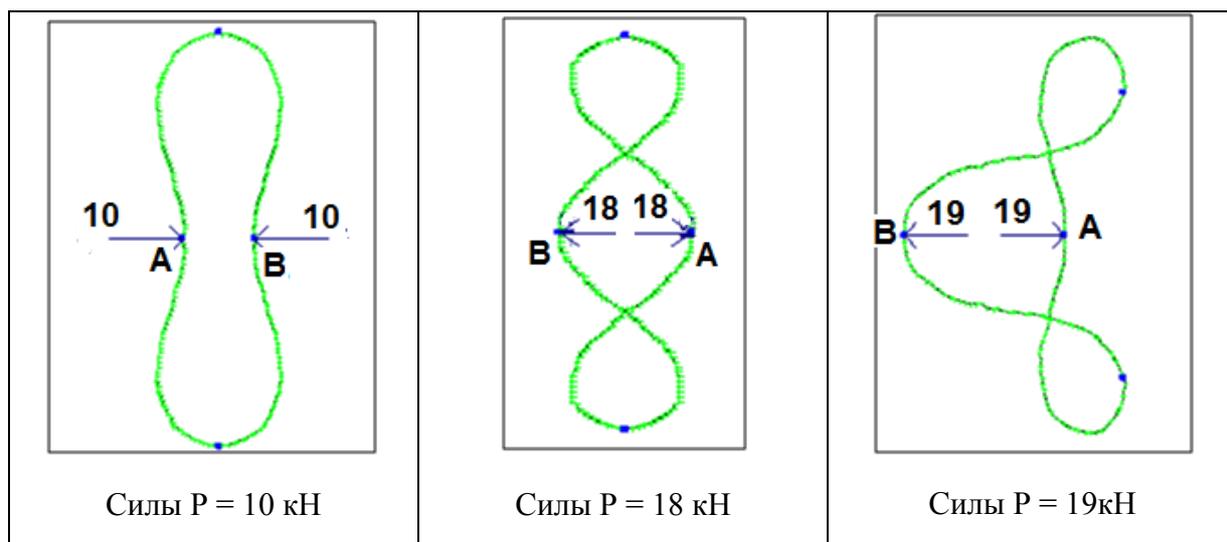


Рис. 9. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия кольца

Анализ результатов

При различных значениях силовых факторов конструкция принимает разные формы равновесия. При этом не менялись ни места приложения сил, ни их направления (смещаются точки приложения сил **A** и **B**).

Заметим, что форма равновесия кольца при действии силы $P=10$ кН устойчива (если мы будем увеличивать силу или уменьшать малыми порциями, то гантелеобразная форма равновесия будет сохраняться). Во втором случае малые приращения к силе $P=18$ кН будут приводить к изменению формы равновесия (третий случай). Таким образом, вторая форма равновесия является неустойчивой. Форма равновесия кольца будет устойчивой, если касательная матрица жесткости (матрица Якоби), отвечающая данной форме равновесия, будет положительно определена [3].

Задача №5. Мачта

Исходные данные [1] (рис. 10): ствол мачты - три трубы 133×5 , $EF = 1,24 \cdot 10^6$ кН; тросы - канаты жесткостью на растяжение $EF = 3,8 \cdot 10^5$ кН.

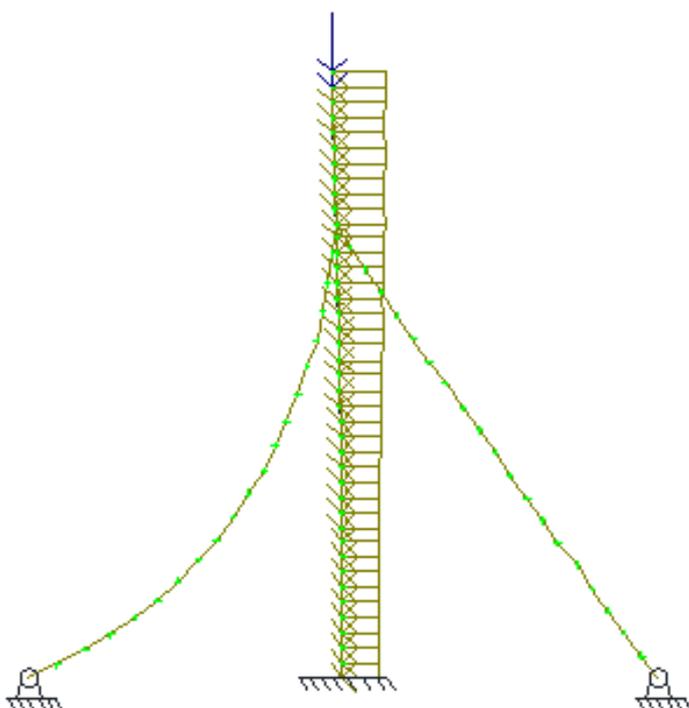


Рис. 10. Расчетная схема мачты

Первое нагружение – собственный вес. Второе нагружение – ветер + вертикальная сила на ствол мачты.

Тросы моделируются специальным конечным элементом – гибкая нить (тип КЭ - 310) [1]. Этот конечный элемент работает только на растяжение. На рис. 11 представлены эпюры внутренних усилий в элементах мачты

Анализ результатов

При заданном нагружении система представляет собой конструктивно нелинейную, так как в ходе работы изменяется ее расчетная схема (из работы выключается левый трос). Как видно из представленных эпюр, конечный элемент типа «нить» работает корректно (в нитях возникают только растягивающие усилия).

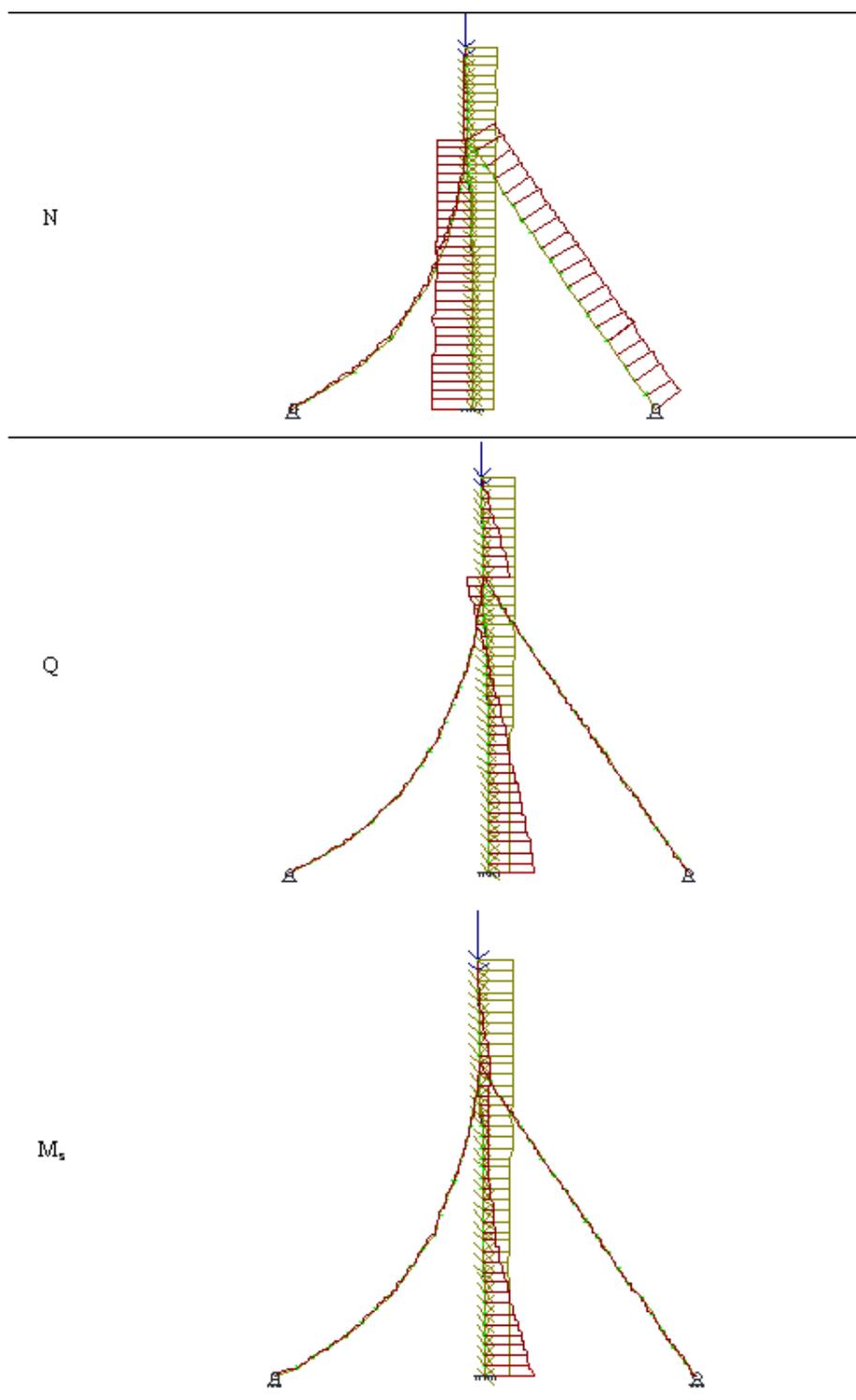


Рис. 11. Эпюры внутренних усилий

Задача №6. Устойчивость плоской фермы (рис.12)

Рассмотрим устойчивость регулярной плоской фермы в нелинейной постановке задачи [5]. Представленная задача решена аналитически для первой формы потери устойчивости и на её основе поставлен эксперимент [8].

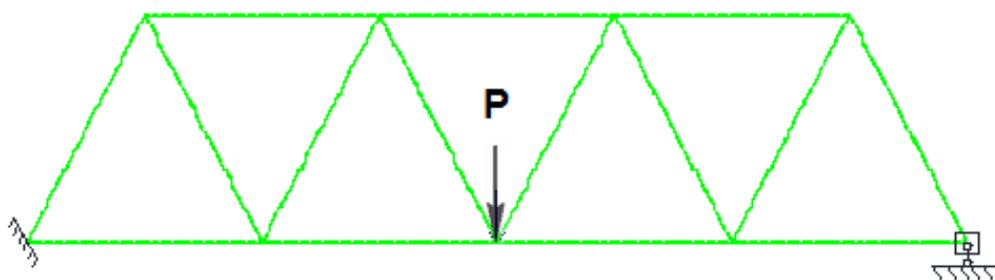


Рис. 12. Расчетная схема фермы

Ферма состоит из одинаковых стержней, изготовленных из закаленной стальной полосы прямоугольного поперечного сечения шириной 40 мм и толщиной 1,1 мм. В узлах стержни соединены жестко путем заделки их по концам между накладками и полками уголков, скрепленных болтами. Длина каждого стержня 42,5 см. Ферма установлена на двух опорах из мощных стальных уголков, заделанных в стене. Каждый опорный узел прикреплен к уголкам двумя болтами. Жесткость опорных уголков при изгибе в горизонтальной плоскости значительно меньше жесткости нижнего пояса при растяжении; в то же время жесткость тех же уголков при кручении значительно больше жесткости элементов фермы при их изгибе. Поэтому одна из опор фермы (правая) при вертикальной нагрузке рассматривается как подвижная по горизонтали, но оба опорных узла закреплены от поворота.

К узлу нижнего пояса подвешиваются грузы, действующие на ферму силой P .

Аналитически, с помощью методики расчета стержневых систем на устойчивость по Н.В. Корноухову, была определена первая критическая нагрузка.

$$P_{кр} = \frac{v_{0,кр} * EJ}{0,577} = 118,5 \text{ Н.}$$

В результате опыта установлено, что наименьшая критическая нагрузка $P_{кр}=115 \text{ Н}$. Опытное значение критической нагрузки несколько меньше расчетной, поскольку не учтены начальные несовершенства, начальные смещения узлов и начальные искривления стержневой фермы, дополнительная жесткость накладок.

Был произведен расчет фермы в ПК Лира для разных значений силы P в линейной и нелинейной постановке.

6.1. Линейная постановка задачи

Статический расчет: сила $P=100 \text{ Н}$ (сила меньше критической, рис. 13).

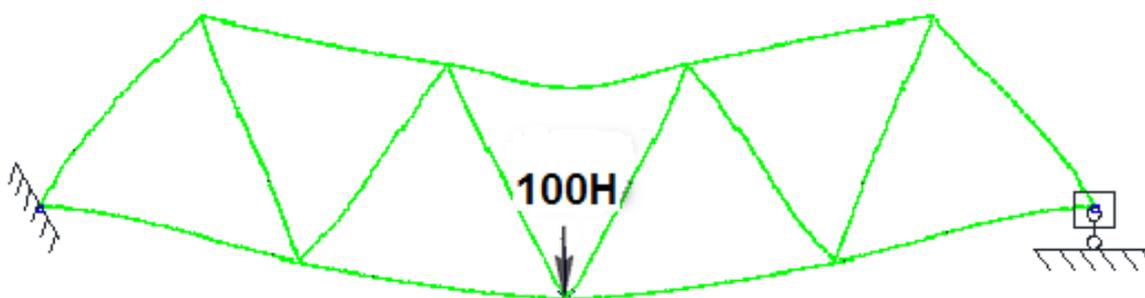


Рис. 13. Деформированный вид фермы, прогиб $V_{max}=0,0292 \text{ мм}$

6.2. Лине́йная постановка задачи

Статический расчет: сила $P=119\text{ Н}$ (сила равна критической, рис. 14).

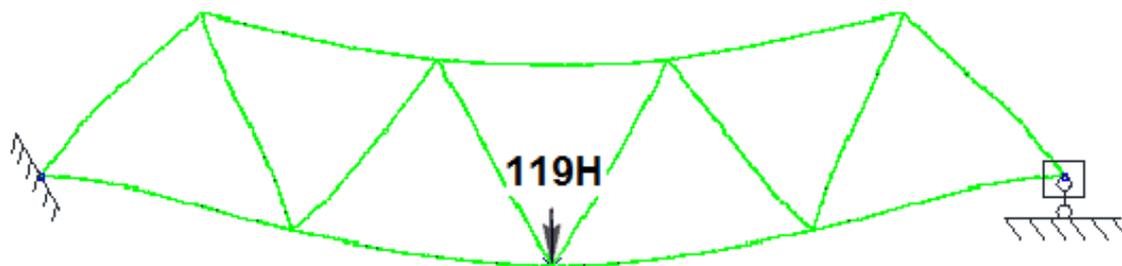


Рис. 14. Деформированный вид фермы, прогиб $V_{\max}=0,0346\text{ мм}$

6.3. Лине́йная постановка задачи

Расчет на устойчивость (ПВК Лира).

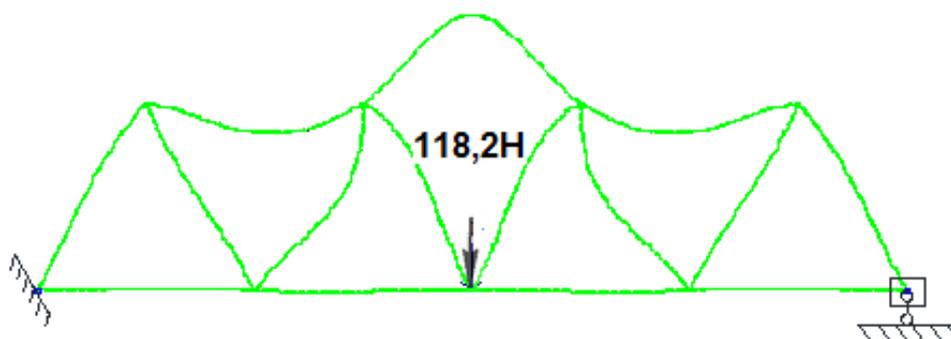


Рис. 15. Первая форма потери устойчивости, $P_{\text{кр}}=118,2\text{ Н}$

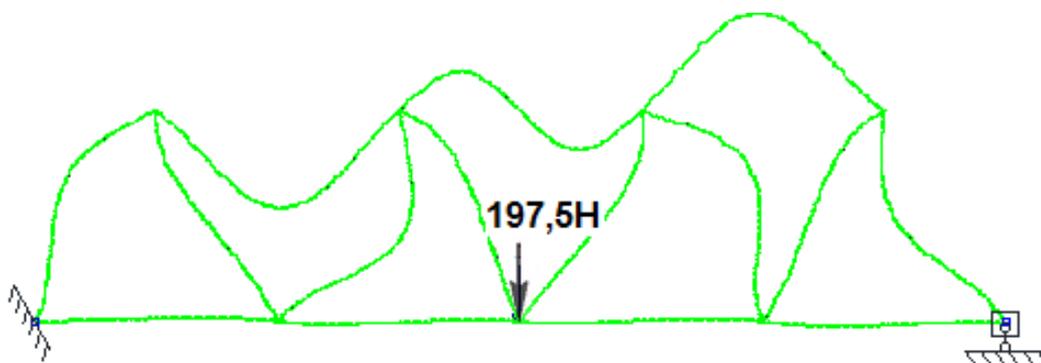


Рис. 16. Вторая форма потери устойчивости, $P_{\text{кр}}=197,5\text{ Н}$

6.4. Нелинейная постановка задачи

Каждый стержень разбит на 100 элементов с типом КЭ 309 – универсальный пространственный сильно изгибаемый стержень. Метод нелинейного расчета – автоматический выбор шага с поиском новых форм равновесия. В первом случае была приложена нагрузка меньше критической: $P = 100\text{ Н}$.

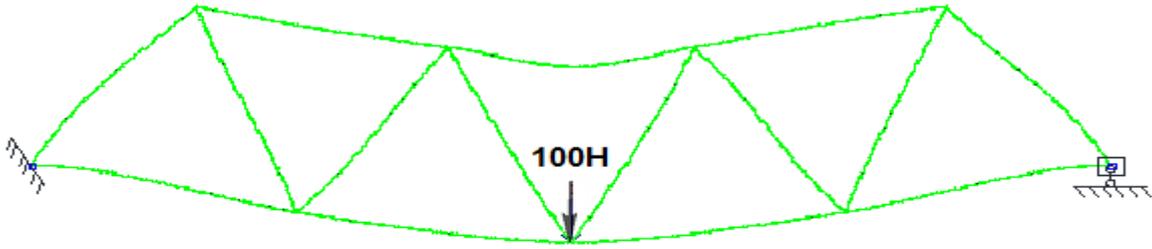


Рис. 17. Деформированный вид фермы, $V_{\max}=0,032$ мм

Максимальный прогиб по вертикали $V_{\max}=0,032$ мм (в линейной постановке $V_{\max} = 0,0292$ мм).

6.5. Нелинейная постановка задачи

Нагрузка равна критической $P = 118,5$ Н (рис. 18).

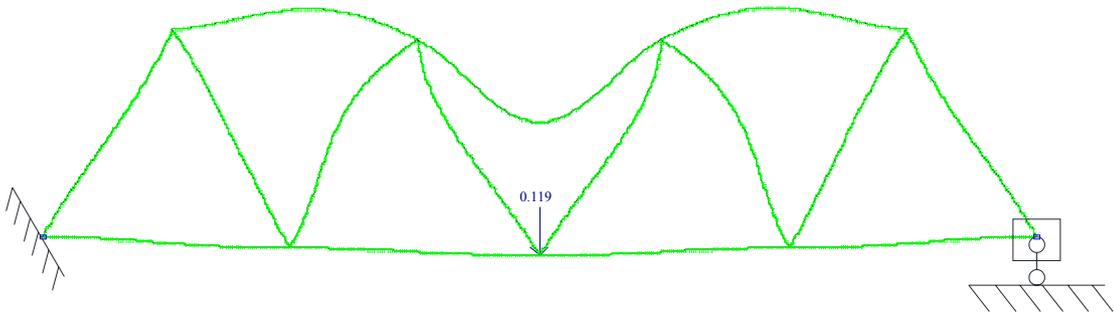


Рис. 18. Деформированный вид фермы, $V_{\max}=0,179$ мм

Максимальный прогиб по вертикали 0,179мм (линейная $V_{\max} = 0,0346$ мм).

6.6. Нелинейная постановка задачи

Нагрузка 200 Н (рис. 19).

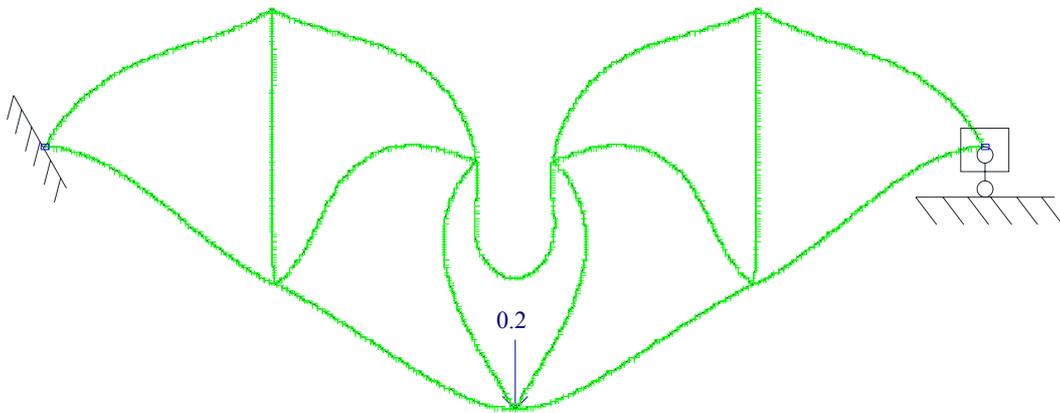


Рис. 19. Деформированный вид фермы, $V_{\max}=569$ мм

6.7. Нелинейная постановка задачи

Нагрузка 250 Н (рис. 20).

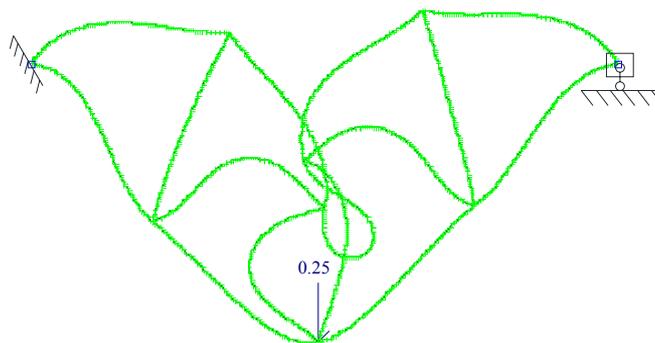


Рис. 20. Деформированный вид фермы, $V_{\max}=776$ мм

Анализ результатов

Сопоставление решений с данными эксперимента позволяет сделать следующие выводы: формы равновесия фермы, полученные при решении нелинейной задачи, в большей степени отвечают работе реальной конструкции. При загрузке силой, меньшей критической, перемещения в конструкции малы и соизмеримы с перемещениями в линейной постановке. При загрузке критической силой наблюдается изменение формы равновесия, увеличение прогибов, значительное несоответствие перемещений в сравнении с линейной постановкой задачи. С ростом силы P перемещения возрастают нелинейно. При загрузке нагрузкой $P=250$ Н наблюдается вторая форма равновесия.

Задача №7. Два шарнирно соединенных стержня (мгновенный механизм)

Рассмотрим два шарнирно соединенных стержня, расположенных на одной прямой [6,7] (рис. 21). При любой, сколь угодно малой силе, отличной от нуля, система стержней в исходном состоянии не находится в равновесии. Системы подобного рода называют мгновенными механизмами. Это означает, что в каком-то положении система является кинематически изменяемой, то есть допускает перемещение элементов, не сопровождающееся деформациями. В данном случае кинематическая изменяемость имеет место в малой окрестности исходного положения, когда три шарнира находятся на одной прямой.

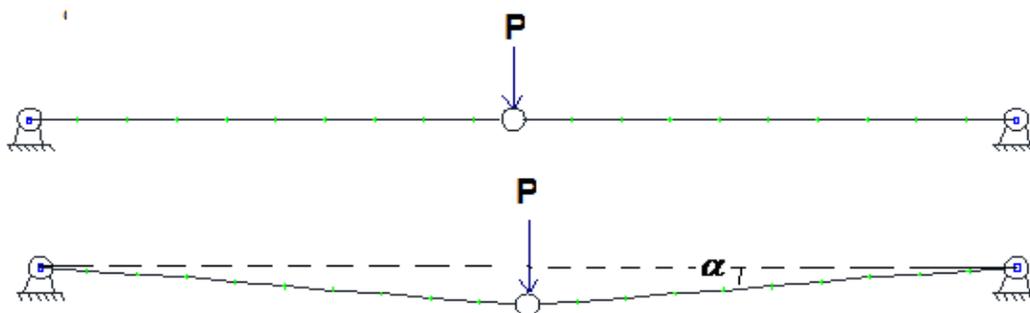


Рис. 21. Расчетная схема и форма перемещений

Здесь даже при малых перемещениях точки приложения силы форма системы меняется таким образом, что это обстоятельство надо учитывать при составлении уравнений равновесия ($N = P/(2 * \sin(\alpha))$).

Мгновенные механизмы представляют категорию систем, для которых нельзя пользоваться принципом начальных размеров [7].

Расчетная схема представляет собой два стержня, соединенных шарнирами. Каждый стержень длиной 10 метров разбит на 10 элементов и реализован с помощью конечного элемента «гибкая нить». Поперечное сечение – канат 8,0. Центральный шарнир, к которому приложена сила 100 кН, реализован с помощью объединения перемещений концов стержня.

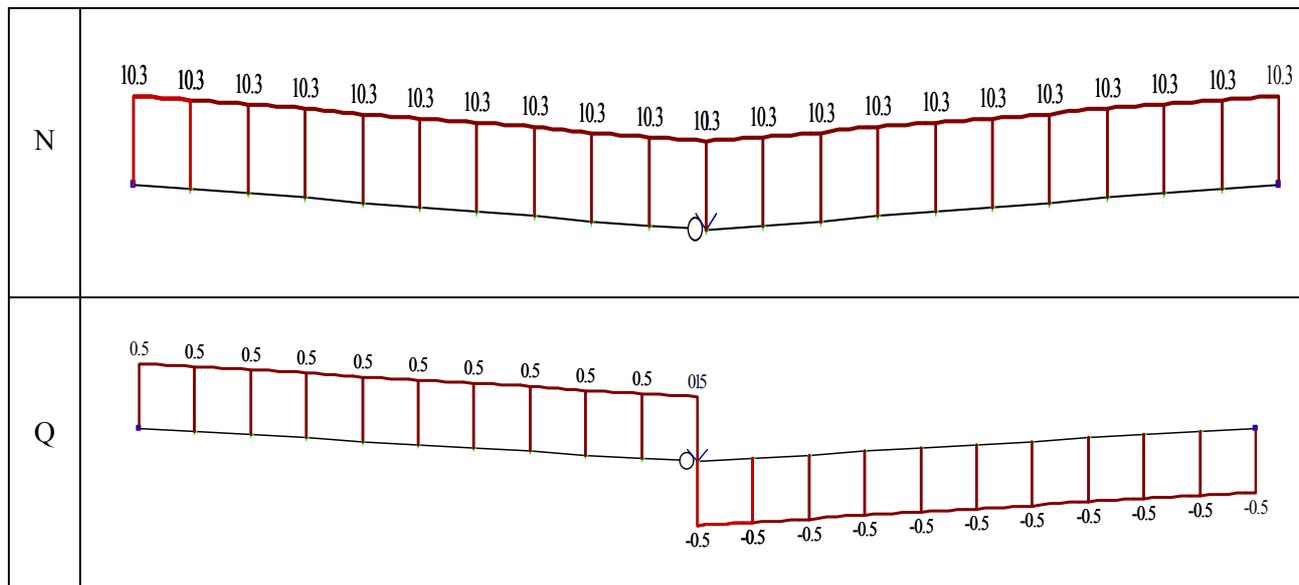


Рис. 22. Эпюры внутренних усилий

Анализ результатов

Данная задача является примером мгновенного механизма. Зависимость между перемещениями и силой здесь нелинейная. Решая задачу аналитически, применив теорему Лагранжа, можно вывести зависимость силы от вертикального перемещения центрального шарнира:

$$P = \frac{E \cdot F \cdot f^3}{l^3},$$

где l – длина стержня, f – величина вертикального перемещения центрального шарнира, EF – жесткость стержня на растяжение-сжатие.

Так как использовался конечный элемент типа «гибкая нить», то в конструкции не возникает изгибающих моментов.

Задача №8. Устойчивость плоской форма изгиба балки

При поперечном плоском изгибе балки возможна потеря устойчивости конструкции. Исходные данные (рис. 23): $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м², $b = 1$ мм, $h = 39$ мм, $l = 50$ см.

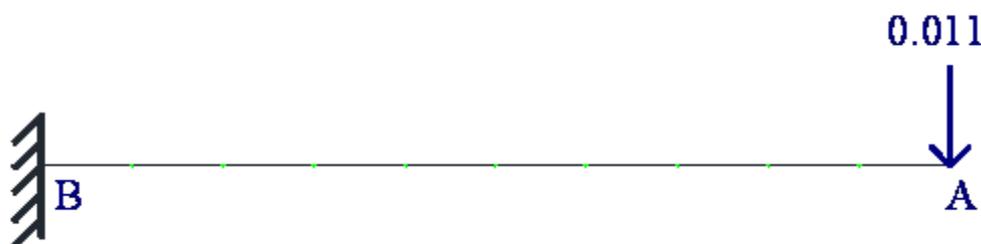


Рис. 23. Расчетная схема балки

При нагружении критической силой и выводе из положения равновесия малой силой из плоскости балка теряет устойчивость (рис. 24).



Рис. 24. Форма равновесия

На рис. 25 представлены эпюры внутренних усилий, возникающие в стержне при потере устойчивости (N – продольная сила, Q_z , Q_y – поперечные силы, M_z , M_y – изгибающие моменты, M_x – крутящий момент).

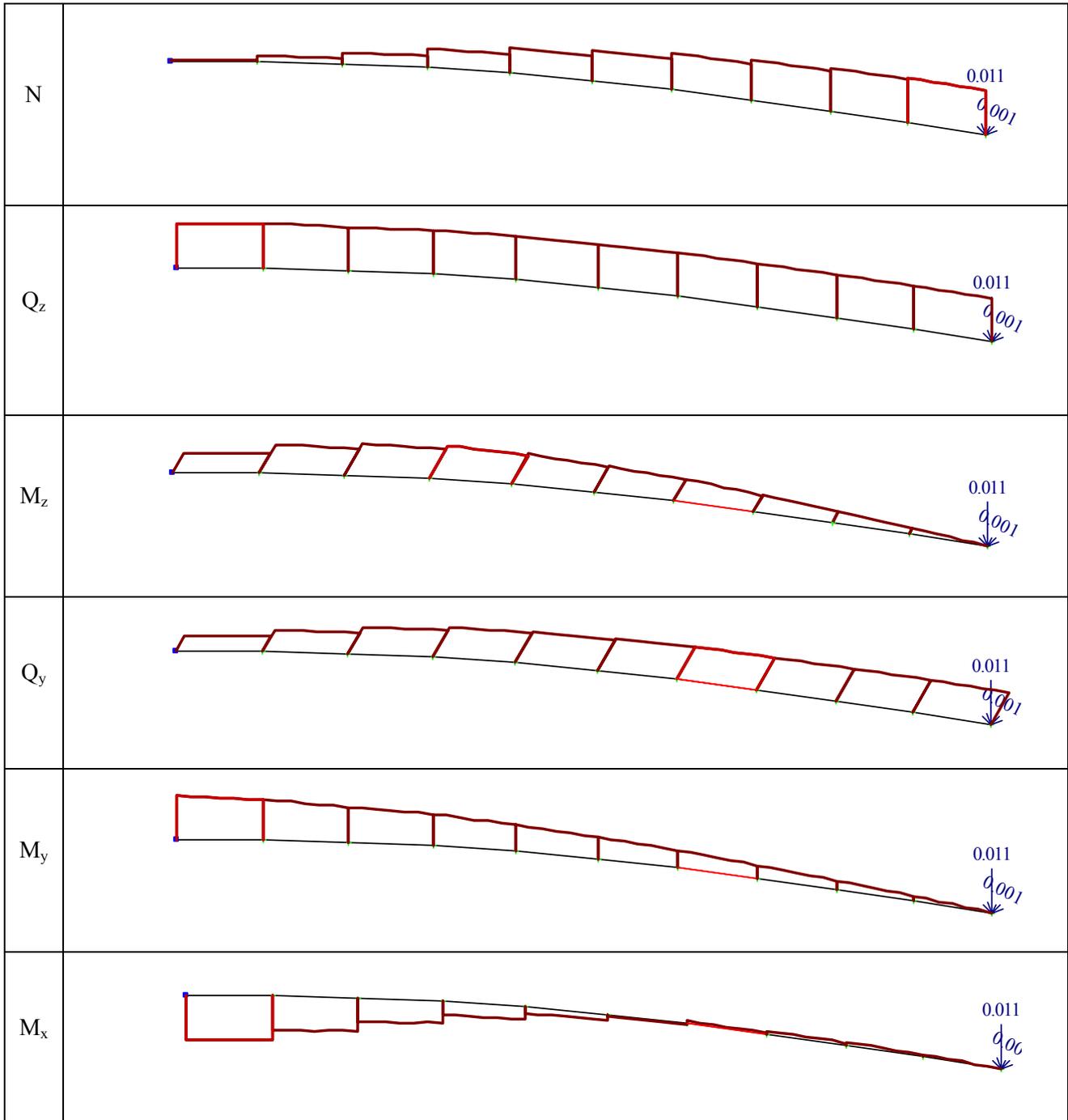


Рис. 25. Эпюры внутренних усилий

На рис. 26 показаны продольные перемещения точек оси стержня и углы закручивания, а также линейные и угловые перемещения в направлении главных центральных осей инерции поперечного сечения.

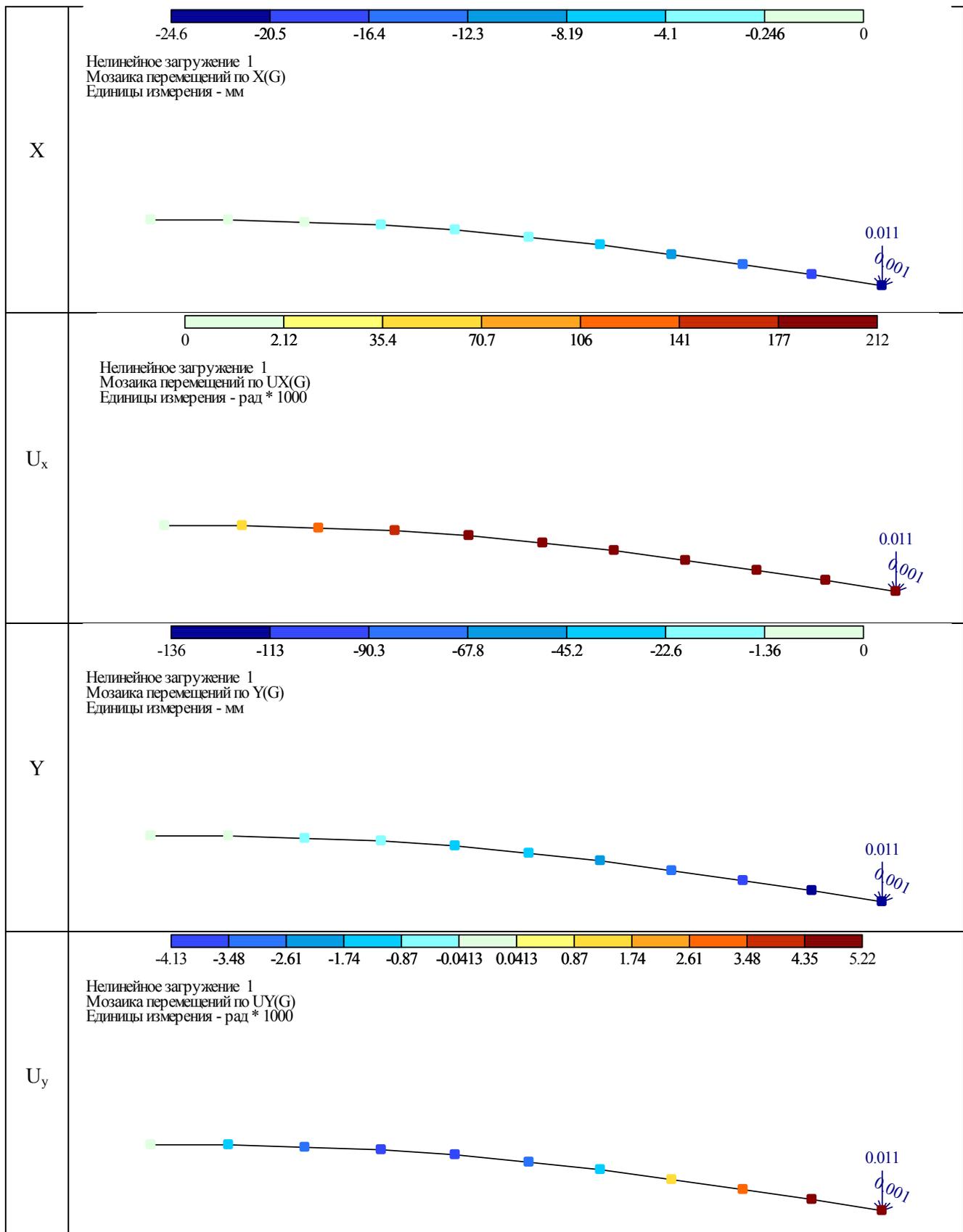


Рис. 26. Мозаика перемещений

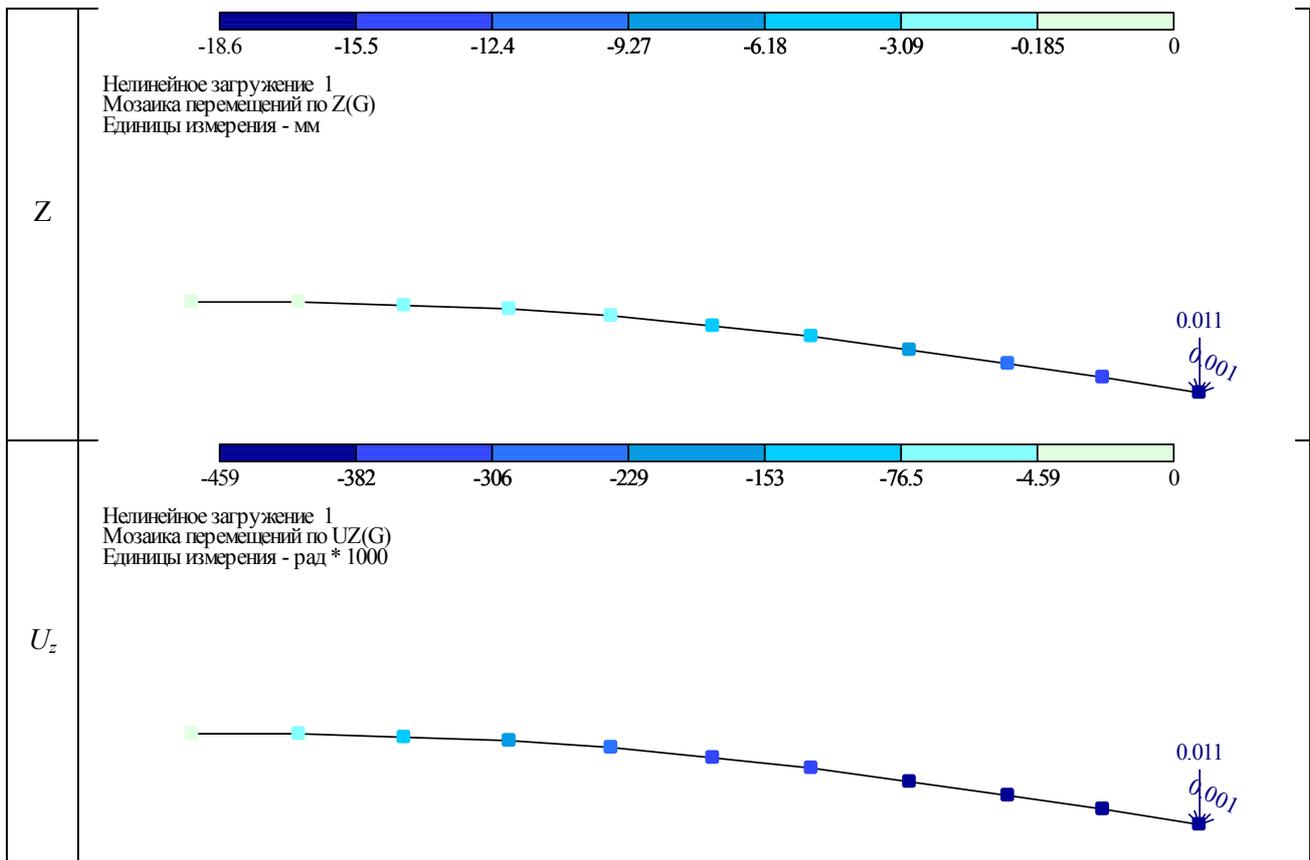


Рис. 26 (окончание). Мозаика перемещений

Анализ результатов

При потере устойчивости плоской формы изгиба консольная балка испытывает косой изгиб и кручение.

Выводы

При сильном изгибе консольного стержня: горизонтальные u и вертикальные w перемещения – величины одного порядка, изгибающий момент в защемлении определяется с учетом горизонтального перемещения точки приложения силы, значения угловых перемещений соизмеримы с единицей, в сечении стержня наряду с изгибающим моментом M и поперечной силой Q возникает продольная сила N .

Формы равновесия и возникающие в стержне усилия зависят не только от величины силовых факторов, но и от последовательности их приложения (предыстории).

Мгновенные механизмы представляют категорию систем, для которых нельзя пользоваться принципом начальных размеров, их расчет надо выполнять в нелинейной постановке.

При различных значениях силовых факторов конструкция принимает разные формы равновесия. Формы равновесия могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Форма равновесия гибкой стержневой системы будет устойчивой, если касательная матрица жесткости (матрица Якоби), отвечающая данной форме равновесия, будет положительно определена.

Геометрически нелинейную постановку задач сопровождает, как правило, потеря единственности решения, причем множественность решений может быть и не связана с потерей устойчивости механической системы.

Комбинированные системы, состоящие из гибких стержней и гибких нитей, при различных загрузках становятся конструктивно нелинейными, так как в ходе работы изменяется их расчетная схема.

Сопоставление решений с данными эксперимента позволяет сделать следующие выводы: формы равновесия системы из гибких стержней (фермы), полученные при решении нелинейной задачи, в большей степени отвечают работе реальной конструкции.

Библиографический список

1. Городецкий, А.С. Компьютерные модели конструкций / А.С. Городецкий, И.Д. Евзоров.- Киев.: изд-во «Факт», 2005. - 344 с.
2. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости /Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 1965.-204 с.
3. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник 11-е изд., стер./ А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 656 с.
4. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов \ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин.- 2-е изд. испр. - М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
5. Феодосьев, В.И. Телевизионный курс сопротивления материалов. Напряжённое состояние и устойчивость / В.И Феодосьев. - М.:Высшая школа, 1981. – 168 с.
6. Феодосьев, В.И. Телевизионный курс сопротивления материалов. Изгиб и статически неопределимые системы / В.И. Феодосьев. – М.: Высшая школа, 1981. – 150 с.
7. Феодосьев, В.И. Телевизионный курс сопротивления материалов. Растяжение и кручение \ В.И. Феодосьев. - М.:Высшая школа, 1977. – 133 с.
8. Методические указания к лабораторной работе по курсу «Строительная механика» «Исследование модели плоской фермы на устойчивость»/ сост.: А.Г. Барченков, А.Ф. Хмыров; Воронеж. инж.-строит. ин-т. – Воронеж, 1984.
9. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа/ А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. - 600 с.
10. Новожилов, В.В. Математические модели и точность инженерных расчетов // Судостроение. – 1979. - № 7. - С. 5-12.
11. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций Лира. Руководство пользователя. – Киев, 2002.

References

1. Gorodetsky, A.S. Computer models of structure / A.S..Gorodetsky I.D.Evsyrovov//Kiev.: pub.house “Fact”, 2005. – 344 p.
2. Landau, L.D., Theoretical Physics. B.VII. Theory of Elasticity/ L.D. Landau E.M. Lifshiz. - M.: Nauka, 1965. – 204 p.
3. Darkov, A.V. Structural Mechanics. Text book 11th issue / A.V. Darkov N.N.Shaposhnikov, StP.: Pub.”Lan”, 2008. – 656 p.

4. Alexandrov, A.V. Strength of materials/ A.V. Alexandrov, V.D. Potapov, B.P. Derzhavin// Textbook for institutes. – 2 issue cor. - M.: High School, 2000. - 560 p.
5. Feodosiev, V.I. TV course of strength of materials. State of stress and stability/ V.I. Feodosiev. - M.: High School, 1981. – 168 p.
6. Feodosiev, V.I. TV course of strength of materials. Bending and statistically indeterminable systems// V.I. Feodosiev. – M.: High School. - 1981. - 150 p.
7. Feodosiev, V.I. TV course of strength of materials. Tension and torsion/ V.I Feodosiev. - M. : High School 1977. – 133 p.
8. Method instructions for laboratory work on Construction Mechanics course “Stiffness investigation of plate truss//A.G. Barchenkov, A.F. Hmirov. - Voronezh Construction Engineering Institute. - 1984.
9. Pereljmutter, A.V. Design models of structures and possibility of their analysis// A.V Pereljmutter, V.I. Slivker. –M.: DMK Press, 2007. – 600 p.
10. Novozhilov, V.V. Math models and accurate of engineering design/ V.V. Novozhilov // Shipbuilding. – 1079. - № 7. – P. 5-12
11. Program complex for computation and design of structure Lira. Instruction of user. – Kiev, 2002.

Ключевые слова: сильно изгибаемый стержень, гибкая нить, геометрически нелинейная система, предыстории нагружения, мгновенный механизм, конструктивно нелинейная система, устойчивые и неустойчивые формы равновесия, устойчивость плоской формы изгиба стержня.

Key words: strongly bendable bar, flexible filament, geometrically, nonlinear system, previous stress history, constructively nonlinear system, stable and unstable forms of equilibration

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

УДК 624.16:624.131.54

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф.*

Д. М. Шапиро

г. Воронеж, тел. 8(910)344-73-34;

email: davshap@mail.ru

Аспирант кафедры строительной механики

А.А. Тарасов

г. Воронеж, тел. 8(904)210-76-81;

email: taralal@mail.ru

*Voronezh State University of Architecture
and Civil Engineering*

Dr. of Tech. Sc., Prof.

D.M. Shapiro

Voronezh, ph. 8(910)344-73-34;

email: davshap@mail.ru

Postgraduate of Department of Structural

Mechanics A.A. Tarasov

Voronezh, ph. 8(904)210-76-81;

email: taralal@mail.ru

Д.М. Шапиро, А.А.Тарасов

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РАСЧЁТА ОСНОВАНИЙ ПОДПОРНЫХ СТЕНОК И АРМОГРУНТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ

Рассматривается способ уточнения расчёта устойчивости (при сдвиге по криволинейным линиям скольжения) оснований ограждающих сооружений с вертикальной передней гранью. Уточнение достигается путём распределения на линии скольжения давлений от веса насыпи (за и перед её передней гранью) и локальных нагрузок (на верхней грани тела обрушения) по эпюрам в виде ломаных линий. Приводится пример расчёта подпорной стенки из армированного грунта, иллюстрирующий и обосновывающий изложенные в статье положения и приёмы расчёта.

D.M. Shapiro, A.A. Tarasov

PERFECTING OF RETAINING WALLS GROUNDWORK AND REINFORCED SOIL STRUCTURES

Method of calculation clarification of stability (while shifting along hunting slide lines) of containing structures groundwork with vertical front side. The clarification is achieved by the way of distribution along slide lines of pressure from embankment weight (before and behind its front side) and local loadings (on the top side of loading) according to diagram in the form of jogged lines. The example of retaining wall from reinforced soil illustrates and substantiates the statements and the calculation methods described in the article.

В составе комплекса проверок по предельным состояниям при проектировании подпорных стенок и армогрунтовых сооружений выполняется расчёт устойчивости основания. На практике (в большинстве случаев), а также в соответствии с рекомендациями нормативно-методических документов [1, 2 и др.] при выполнении указанного расчёта используется графоаналитический метод. Расчёт заключается в определении минимального отношения удерживающих и сдвигающих сил, действующих на линии скольжения, или максимума равнодействующей горизонтальных составляющих этих сил. Задача решается как плоская статически определимая путём генерирования и перебора линий скольжения заданной формы.

Расчёт выполняется по одному из двух известных методов: «круглоцилиндрических поверхностей скольжения» или «горизонтальных сил» Г. М. Шахунянца [3]. Содержание настоящей статьи связано с методом горизонтальных сил как более универсальным, позволяющим рассматривать линии скольжения любой формы (а не только круглоцилиндрические).

© Шапиро Д.М., Тарасов А.А., 2013

Как будет показано ниже, это имеет значение для грунтовых массивов, ограниченных вертикальной гранью.

В графоаналитических методах используется деление тела обрушения вертикальными плоскостями на отсеки. Вес i -го отсека G_i вместе с нагрузками (силами), действующими в его пределах, раскладывается на касательную $T_i = G_i \sin \alpha_i$ и нормальную составляющие $N_i = G_i \cos \alpha_i$, где α_i – средний угол наклона к горизонтали участка дуги скольжения на рис. 1. Кроме того, учитываются горизонтальные нагрузки, действующие внутри (сейсмические силы, фильтрационное давление) и на поверхности тела обрушения.

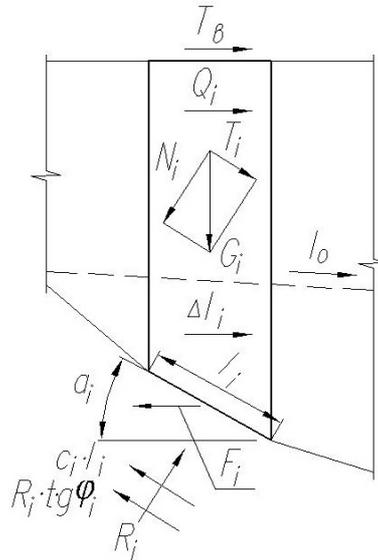


Рис. 1. Схема к уравнениям (1), описывающим равновесие средней части i -го отсека

Основное уравнение метода Г. М. Шахунянца может быть представлено в виде решения, выражающего равновесие и одновременно отношение горизонтальных составляющих удерживающих и сдвигающих сил, действующих на линии скольжения:

$$\eta = \frac{\Sigma[(T_{i,уд}| + N_i \cdot \operatorname{tg} \varphi_i + c_i \cdot l_i) \frac{\cos \varphi_i}{\cos(\alpha_i - \varphi_i)} + F_i]}{\Sigma[(T_{i,сд} \frac{\cos \varphi_i}{\cos(\alpha_i - \varphi_i)} + \Delta l_i + Q_i + T_b]} \leq \gamma_k, \quad (1)$$

где Σ – знаки суммы, распространяющиеся на все отсеки тела обрушения, φ_i , c_i – угол внутреннего трения и удельное сцепление грунта насыпи или основания, пересекаемого линией скольжения, l_i – длина линии скольжения в пределах i -го отсека, α_i – угол наклона линии скольжения в пределах i -го отсека, F_i – суммарная удерживающая сила от воздействия армирующих элементов, пересекаемых линией скольжения в пределах i -го отсека, Q_i – равнодействующая горизонтальных сейсмических сил в пределах i -го отсека, $\Delta l_i = I_0 \cdot S_i$ – равнодействующая сил фильтрационного давления в пределах i -го отсека, I_0 – средний уклон грунтовых вод или водной поверхности при спаде половодья, S_i – площадь затопленной части i -го отсека, T_b – внешние горизонтальные силы, действующие на поверхности тела обрушения; γ_k – требуемый (предусмотренный нормами) коэффициент запаса устойчивости, принимаемый в размере 1,2 – 1,4 в зависимости от уровня ответственности сооружения.

В формуле (1) касательные силы T_i разделены на сдвигающие $T_{i,сд}$, действующие в отсеках, где $\alpha_i > 0$, $\sin \alpha_i > 0$ (на нисходящей части линии скольжения), и удерживающие $T_{i,уд}$, где $\alpha_i < 0$, $\sin \alpha_i < 0$ (на восходящей части линии скольжения).

В расчётах с использованием графоаналитического метода является общепринятым включение внутренних и внешних нагрузок в состав отсеков, где они приложены, без распределения давлений в стороны. Это является необоснованным упрощением, которое про-

является в сопоставительных расчётах, где сравниваются распределение давлений в грунтовых массивах, определяемых по методу Г. М. Шахунянца (а также по другим решениям с использованием графоаналитического метода), и МКЭ.

Расчёты оснований ограждающих сооружений могут быть существенно уточнены, если давление в основании от веса насыпи впереди и за вертикальной гранью принять распределённым не ступенчато, а по эпюре в виде ломаной линии ABC (рис. 2). Напряжения q в основании на горизонтальной линии на глубине z распределены в соответствии со следующими записями: при $x < -z \operatorname{tg} \alpha$ $q=p$; при $x > z \operatorname{tg} \alpha$ $q=0$;

при $-z \operatorname{tg} \alpha \leq x \leq z \operatorname{tg} \alpha$

$$q = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{x}{z \operatorname{tg} \alpha} \right), \quad (2)$$

где x – горизонтальная координата точки, $p=\gamma h$ – давление насыпи высотой h на поверхности основания, γ – удельный вес грунта насыпи, $\alpha=30^\circ \div 45^\circ$ – угол расширения зоны действия нагрузки.

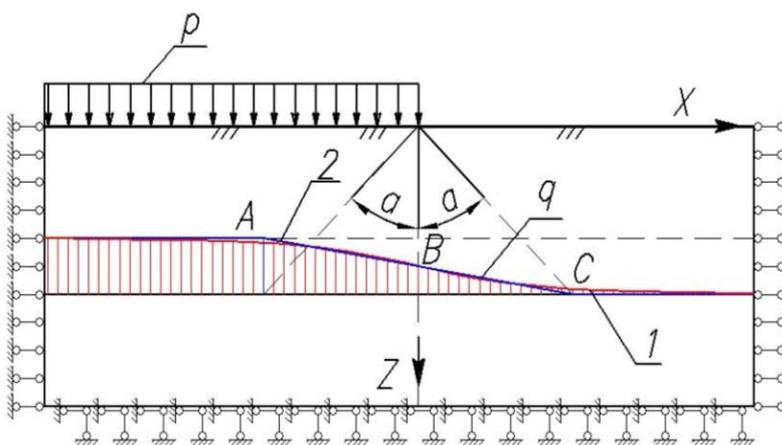


Рис. 2. Графики распределения вертикальных напряжений в основании насыпи:
1 - по решению МКЭ, 2 - принимаемый в расчете

Для уточнения значений угла α выполнено численное исследование. Полубесконечная полосовая нагрузка интенсивностью p прикладывалась к расчётной области в соответствии с рис. 2. Задача решалась средствами МКЭ. Расчёт повторялся три раза со следующими значениями коэффициента поперечной деформации основания: $\nu=0,30$, $\nu=0,35$, $\nu=0,42$. Результаты расчётов показали возможность принять для всех видов грунтов значение угла $\alpha=45^\circ$.

Аналогичным образом следует принимать распределение давлений на линии скольжения от местных нагрузок, приложенных на внешних гранях или внутри тела обрушения. В этом случае выделяется и делится на три зоны область $FCABEG$ воздействия нагрузки с интенсивностью p на площадке шириной d (рис. 3).

В первой зоне, находящейся внутри треугольника ABD , в точках с координатами $-d/2+z \operatorname{tg} \alpha \leq x \leq d/2-z \operatorname{tg} \alpha$ и $z \leq (d/2) \operatorname{ctg} \alpha$ давление $q=p$. Во второй зоне, внутри треугольников ACD и BDE , в точках с координатами $d/2-z \operatorname{tg} \alpha \leq |x| \leq d/2+z \operatorname{tg} \alpha$, $z \leq (d/2) \operatorname{ctg} \alpha$ давление описывается уравнением $q = \frac{p}{2 \cdot z \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{d}{2} - |x| + z \operatorname{tg} \alpha \right)$. В третьей зоне, ограниченной ломаной линией $FCDEG$, в точках с координатами $|x| \leq d/2+z \operatorname{tg} \alpha$, $z \geq (d/2) \operatorname{ctg} \alpha$ давление описывается уравнением $q = \frac{p \cdot d}{(2 \cdot z \operatorname{tg} \alpha + d)} \left(1 - \frac{|x|}{0.5d + z \operatorname{tg} \alpha} \right)$.

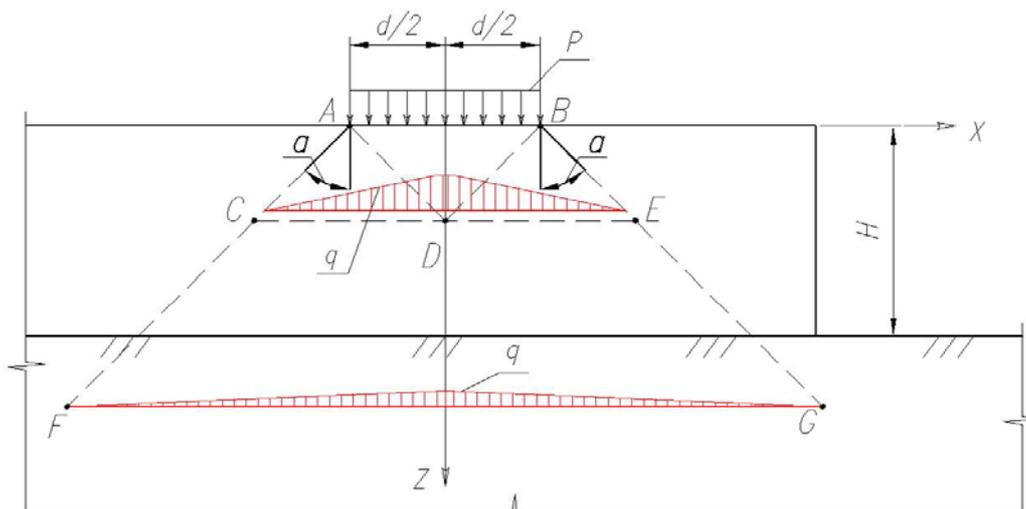


Рис. 3. Схема к расчету армированных насыпей с вертикальной передней стенкой по модифицированному методу Г.М. Шахунянца

Иллюстрацией изложенного выше является следующий пример расчёта устойчивости основания подпорной стенки из армированного грунта, завершающего насыпь вертикальной гранью.

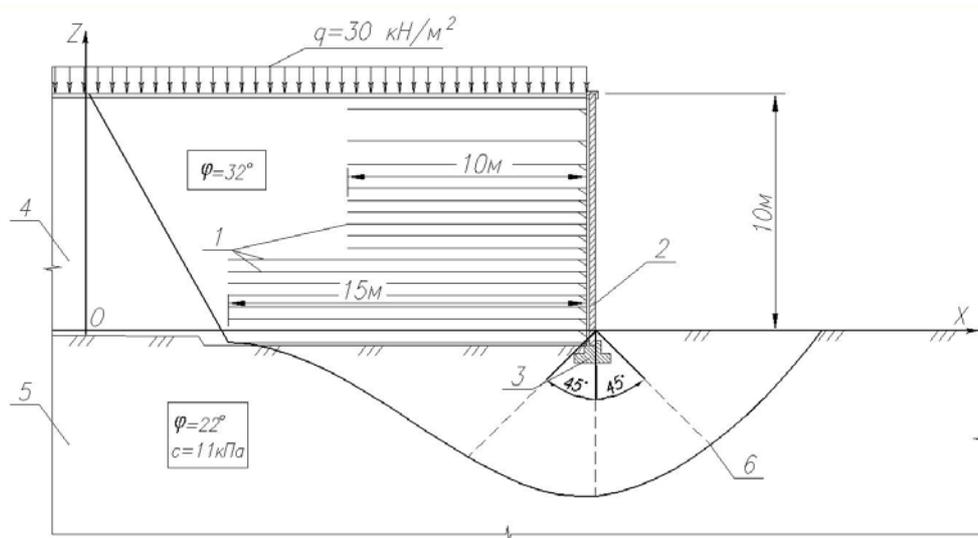


Рис. 4. Подпорная стенка из армированного грунта:
 1 – армирующие элементы из высокопрочного полиэфира, 2 – лицевая стенка,
 3 – фундамент лицевой стенки, 4 – песок средней крупности с углом внутреннего трения $\varphi=32^\circ$,
 5 – супесь пластичная $\varphi=22^\circ$, $c=11\text{кПа}$, 6 – составная линия скольжения

Пример расчета. Расчётная схема подпорной стенки показана на рис. 4. Высота насыпи – 10 м, грунт насыпи – песок с удельным весом $\gamma=19\text{ кН/м}^3$, углом внутреннего трения $\varphi=32^\circ$. Верхний слой основания на глубину 8,5 м сложен супесью удельным весом 19 кН/м^3 , углом внутреннего трения $\varphi=22^\circ$, удельным сцеплением $c=11\text{кПа}$.

В качестве армирующего материала принят геотекстиль из высокопрочного полиэфира с кратковременной прочностью 200 кН/пог. м. Протяжённость зоны армирования принята равной 10 м в верхней части насыпи на высоту 7 м и 15 м – на остальной части высоты насыпи. Шаг армирующих прослоек 0,5 м.

Расчёты коэффициента запаса устойчивости η и равнодействующей горизонтальных составляющих сил E выполнены по двум вариантам: с учётом и без учёта перераспределения давления от веса насыпи и нагрузки на её поверхности. Для расчетной схемы с учётом пере-

распределения вертикального давления в соответствии с предложениями настоящей статьи получено $\eta = 1,24$, $E = -522$ кН; без учета перераспределения давления $\eta = 1,16$, $E = -365$ кН. Распределение вертикальных напряжений от веса насыпи на линии скольжения показано на рис. 5.

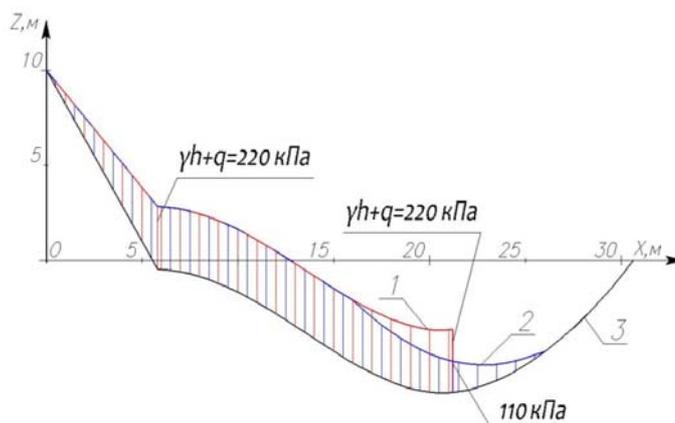


Рис. 5. Распределение вертикального давления от веса насыпи и нагрузки на её поверхности на линии скольжения: 1 – без учета перераспределения давления; 2 – с учетом перераспределения давления; 3 – линия скольжения

Предложенный способ распределения давлений от веса насыпи и нагрузок на её поверхности позволяет уточнить расчёты подпорных стенок и ограждающих конструкций с вертикальными внешними гранями.

Библиографический список

1. Проектирование подпорных стен и стен подвалов: справ. пособие к СНиП. – М.: Стройиздат, 1990. – 101 с.
2. ОДМ 218.5.003-2010 Рекомендации по применению геосинтетических материалов при строительстве и ремонте автомобильных дорог
3. Шахунянц, Г. М. Железнодорожный путь / Г.М. Шахунянц. – М.: Транспорт. 1969. – 532 с.
4. Шапиро, Д. М. Расчет устойчивости устоев и конусов мостовых сооружений / Д.М. Шапиро, А.А. Тарасов// Научный вестник ВГАСУ. - № 2 (26). - 2012.

References

1. Design of retaining walls and basement walls; reference book for building regulations and standards. – M.; Stroiizdat, 1990. – 101p.
2. ODM 218.5.2010 Recommendations for application of geometrics materials during road construction and rehabilitation.
3. Shakhunyants, G.M. Railway/ G.M. Shakhunyants. - M.: Transport.1969. – 532 p.
4. Shapiro, D.M. Calculation of stability of bridge structure abutments and cones/ D.M. Shapiro, A.A. Tarasov// Scientific Bulletin of VGASU. - №2 (26). – 2012.

Ключевые слова: устойчивость мостовых устоев, устои с отдельными функциями, армированные системы. метод горизонтальных сил Г. М. Шахунянца.

Key words: stability of bridge embankments, embankments with separate functions, retaining walls of reinforced soil, Shakhunyats' method.

УДК 624.131.7

*Тамбовский государственный технический университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры конструкций зданий
и сооружений
В.В. Леденев
Магистрант кафедры конструкций зданий и сооружений
З.Х. Нгуен
Ханой, архитектурный университет
Инженер, преподаватель кафедры конструкций
зданий и сооружений
Тью Тхи Хоанг Ань
Россия, г. Тамбов, тел.: +7953-709-29-55;
e-mail: nguyenduyhoa_062012@yahoo.com*

*Tambov State Technical University
Dr. of Tech.Sc. Prof. of Dept. of Building Structures
V.V. Ledenov
Master of Department. of Building Structures
D.H. Nguyen
Hanoi University of Architecture
Engineer, lecturer of Dept. of Building Structures
Chu Thi Hoang Anh
Russia, Tambov, tel.: +7953-709-29-55;
e-mail: nguyenduyhoa_062012@yahoo.com*

В.В. Леденев, З.Х. Нгуен, Тью Тхи Хоанг Ань

РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ГРУНТОВ И ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ПОДЗЕМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ *

Приведены полевые и лабораторные данные об особенностях деформирования грунтов оснований. Рассмотрены результаты экспериментов по исследованию взаимного влияния близко расположенных подземных конструкций и их элементов. Отмечено отличие экспериментальных и расчетных величин. Даны практические рекомендации по снижению повреждений конструкций.

V.V. Ledenov, D.H. Nguyen, Chu Thi Hoang Anh

DISTRIBUTING CAPACITY OF SOIL AND CROSS EFFECT OF UNDERGROUND STRUCTURES *

Field and laboratory data of the peculiarities of soil foundation straining are shown. The results of experiments of cross effect of close underground structures and their elements. The difference between the experimental and design values is mentioned. The practical recommendations for degradation of structural damages are given.

Введение. Наблюдения [2, 3, 5, 6] показывают, что подземные конструкции часто оказывают силовое воздействие друг на друга. Вследствие этого возникают дополнительные напряжения и перемещения. При проектировании это не учитывается или учитывается не в полной мере. Применение решений линейной теории упругости для оснований приводит к значительным ошибкам [4]. Одним из путей повышения несущей способности оснований является применение ограждающих стенок или армирование основания [5 - 10].

Ранее проведенные эксперименты [5, 6] проанализированы. Некоторые из них повторены, поставлены многочисленные дополнительные опыты [6 - 10]. Особое внимание уделено изучению напряжений в среде, в основном горизонтальных. При этом ориентировались на фундаментальные положения из [11].

Полевые опыты. Проводили в песчаном и глинистом грунтах естественной и нарушенной структуры [5, 6]. Ниже рассмотрены результаты опытов в песчаном основании ненарушенной структуры. Нагрузку на основание передавали через вертикальные железобетонные фундаменты диаметром 10...80 см, длиной 10...320 см, фундаменты – штампы, состоящие из ствола и диска (днища), составных моделей фундаментов [5, 6]. Последние были изготовлены из отдельных элементов с зазорами между ними (колец и диска – днища). Между всеми элементами оставались зазоры.

© Леденев В.В., Нгуен З.Х., Тью Тхи Хоанг Ань, 2013

При передаче вертикальной нагрузки на какой-либо элемент измеряли перемещения остальных. В опытах с фундаментом – штампом ($d=50$ см, $h=125$ см) нагрузку передавали на диск – днище, а измеряли перемещения диска и ствола. Заметили, что между днищем и стволом имелся зазор.

Кроме того, проводили опыты с буронабивными фундаментами, имеющими полость под подошвой и зазор между боковой поверхностью и грунтом.

Целью экспериментов являлось изучение характера деформирования и разрушения основания, взаимного влияния элементов фундамента или рядом расположенных фундаментам.

Установлено

1. В процессе нагружения фундамента вокруг него образуются области: упругих (структурных деформаций) на расстоянии до $6d$ от оси фундамента; уплотнённых ядер у поверхности фундамента и перемещающихся вместе с ним; уплотнения и пластического течения (рис. 1).

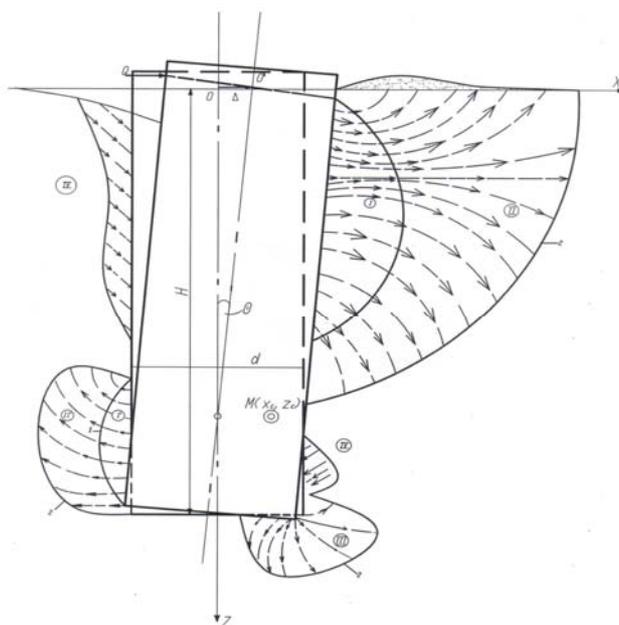


Рис. 1. Характер деформирования основания круглого заглубленного фундамента по мере роста горизонтальной силы до разрушения: зоны I и I' упругие; II и II' – сдвигов; III – течения; IV – сдвига грунта в образовавшиеся зазоры

Выявлены поверхности скольжения, величины разрыва скоростей деформации.

Остаточные деформации составляли до 85 % от полных. Построены поля перемещений и плотностей. Сдвиговые деформации изменялись от 2 до 10 мм в зависимости от вида грунта основания, размеров фундамента и схем нагружения.

2. Осадка ненагруженного буронабивного фундамента в песчаном основании ($d=50$ см, $h=180$ см) составила 6...8 % от такого же нагруженного осевой вертикальной силой. Расстояние между осями фундаментов равнялось $3d$.

При последующем нагружении фундаментов до наступления предельного состояния, испытанных как заглубленные штампы (грунт вокруг боковой поверхности убирали), осадка ненагруженного фундамента составила 21 % от осадки нагруженного.

В опытах с фундаментами – штампами ($d=50$ см, $h=125$ см) нагрузку передавали на подошву (штампа) и вели наблюдения за осадкой ствола. Заметим, что между штампом и стволом имелся зазор. При вдавливании подошвы на 4 мм ствол опустился на 0,63 мм (15,7 %). Дальнейшее увеличение нагрузки на подошву не привело к росту осадок ствола.

При всех опытах с составным фундаментом осадки нагружаемых элементов вызывали осадки (1...10 %) остальных.

3. Нагружение фундамента осевой вертикальной силой приводило к появлению осадочной воронки диаметром до $6d$. Наибольшие перемещения происходили в интервале $(0,5 \dots 1)d$ от оси нагруженного фундамента.

4. В многочисленных экспериментах изучали характер распределения горизонтальных напряжений в грунтовой среде, возникающих от действия нагрузки на фундамент [7].

Распределение горизонтальных напряжений в грунтовой среде, возникающих от нагруженного фундамента [7], зависит от большего числа параметров, в том числе от расстояний до граничной плоскости и нагруженной конструкции.

Лабораторные опыты. Проводили в плоских и пространственных металлических лотках с металлическими и железобетонными штампами и моделями фундамента.

Целью являлось изучение напряженно-деформированного состояния основания нагруженных конструкций, а также влияние ограждающих стенок при сложных схемах нагружения.

Отдельные результаты обсуждали в [6-10]. Характерная картина деформирования песчаного основания при разных схемах нагружения приведена на рис. 2.

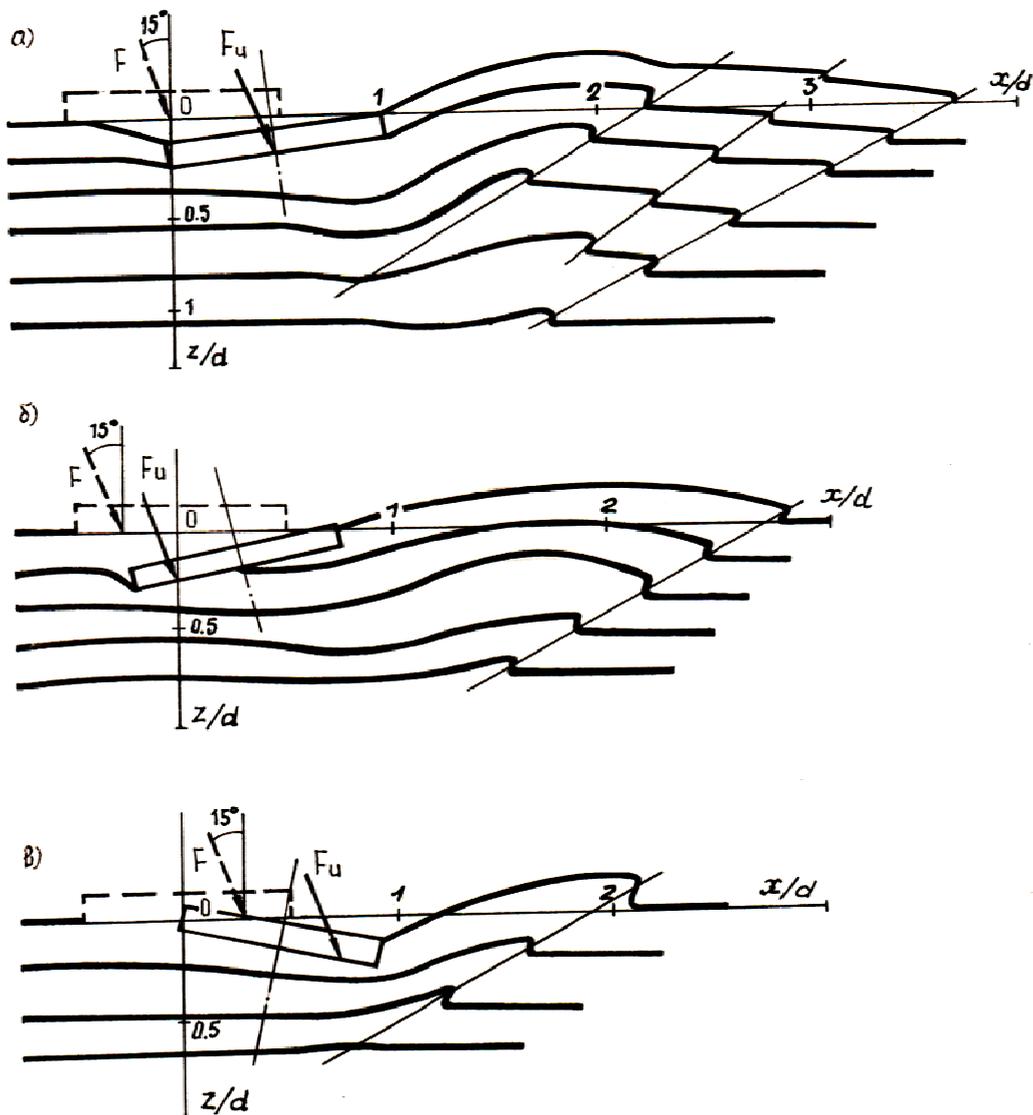


Рис. 2. Особенности деформирования основания круглого незаглубленного штампа при разном относительном эксцентриситете вертикальной силы:
а) 0; б) -0,5; в) 0,5

На основании экспериментов **установлено**:

1. Ограждающие стенки изменяют напряженное состояние среды (рис. 3) и искажают картину перемещения нагружаемого штампа (рис. 4).

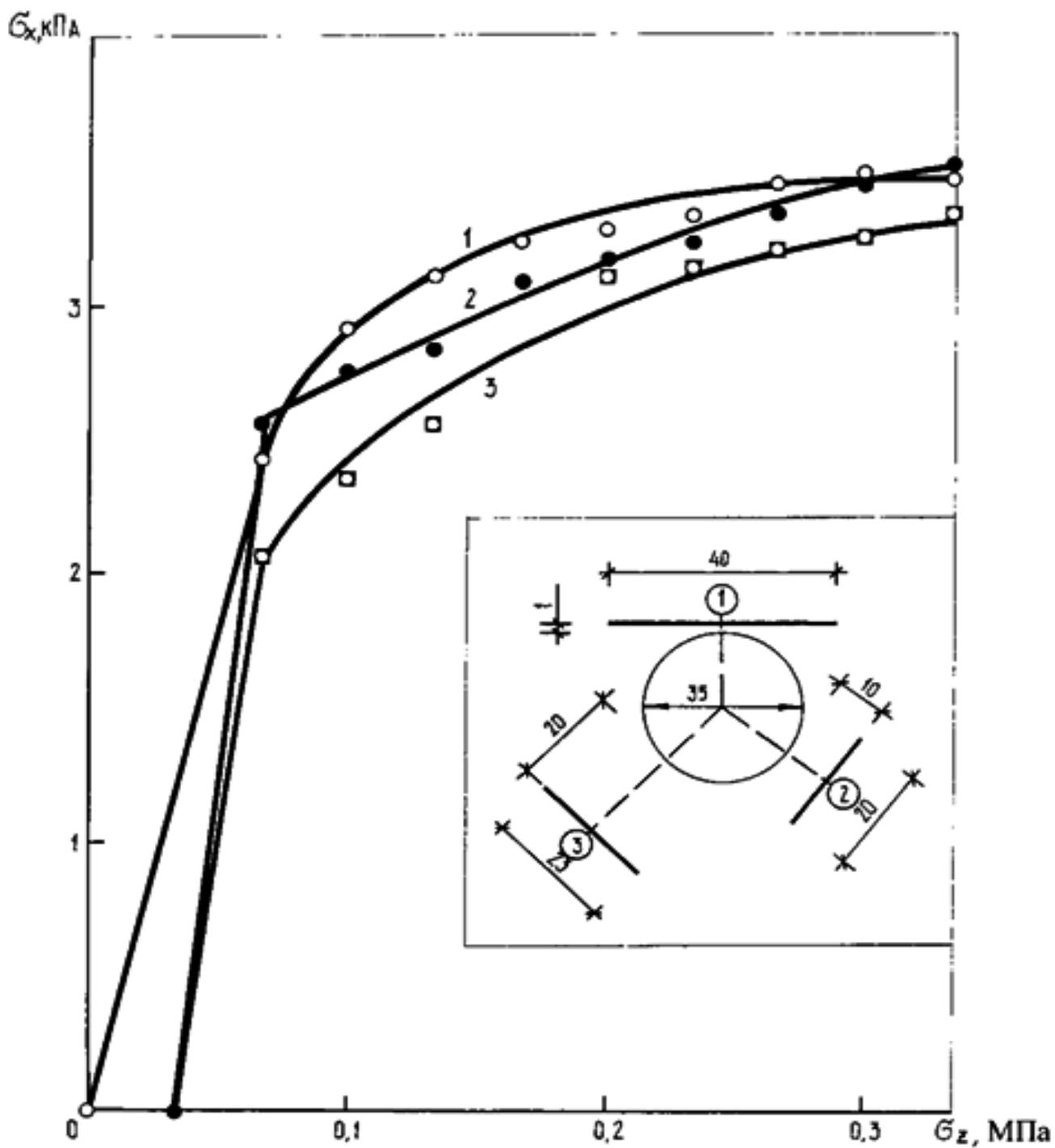


Рис. 3. Зависимость осреднённых горизонтальных напряжений на вертикальные штампы от вертикальных давлений на основание круглого горизонтального штампа

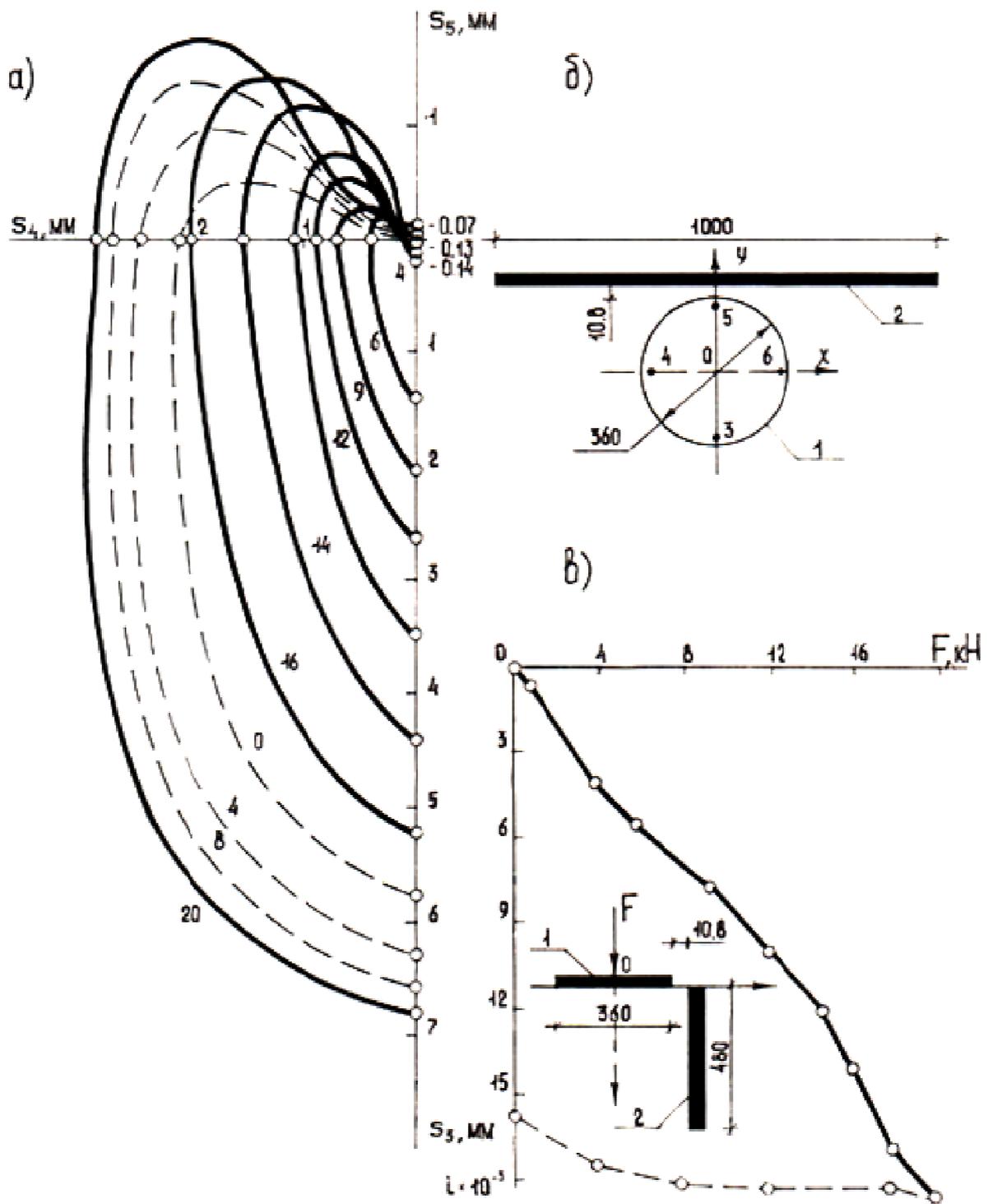


Рис. 4. Зависимость осадок краев горизонтального круглого штампа (а) от расположения вертикальной стенки (б) и нагрузки на него (кН) (а, в). Пунктир – разгрузка

2. Нагрузка на фундамент мелкого заложения и возникающие силовые поля оказывают заметное влияние и на сваи, расположенные вблизи нагруженного фундамента (рис. 5).

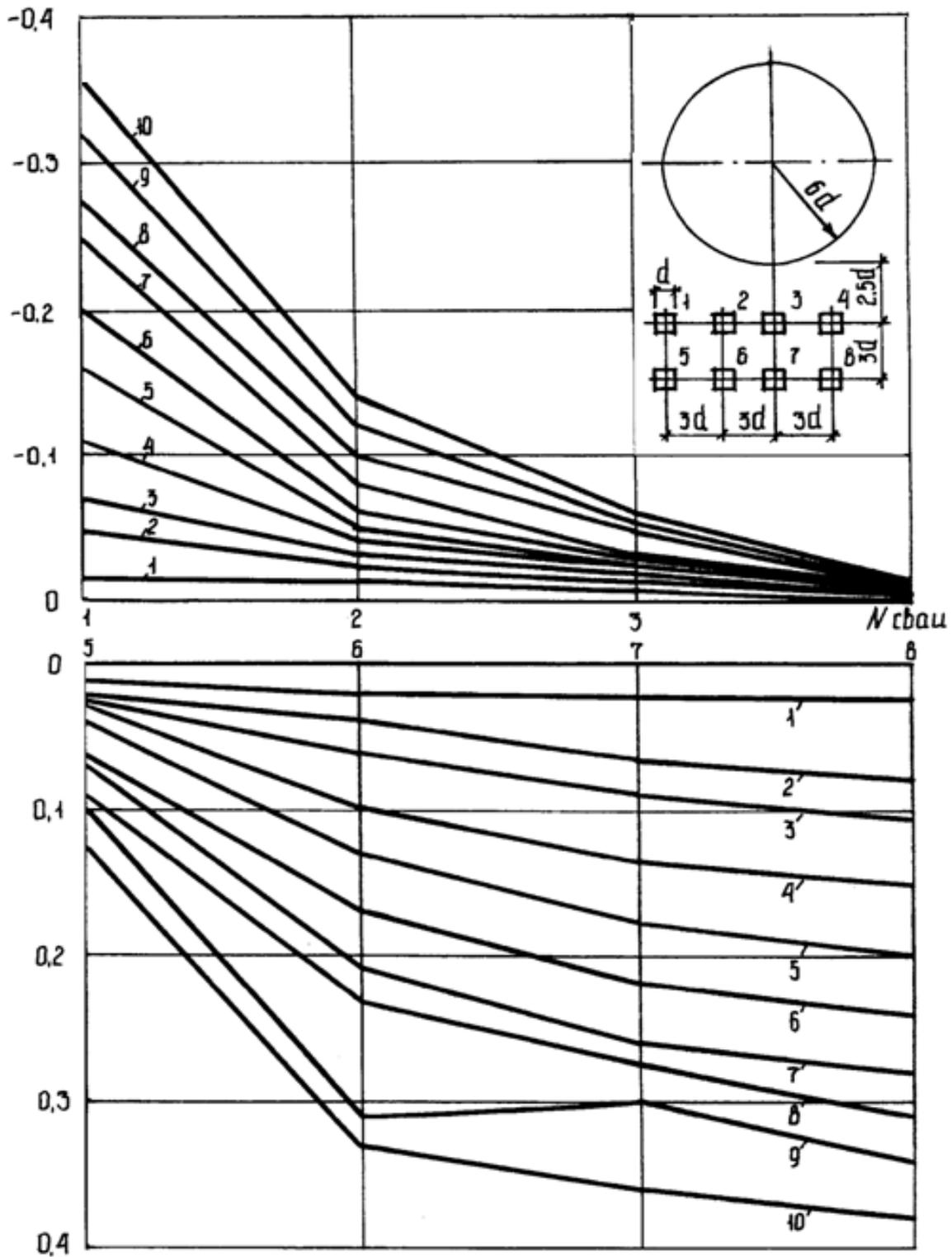
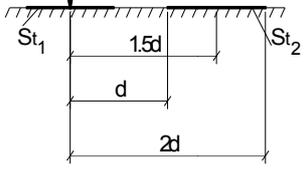


Рис. 5. Зависимость вертикальных перемещений свай от их расположения и вертикальной нагрузки на незаглубленный горизонтальный штамп, кН

3. Нагружение фундамента мелкого заложения создает напряженное состояние в окружающей среде. Это приводит к подъему поверхности основания и фундаментов. В табл. приведены результаты одного из опытов. Удалось замерить усилия, действующие на диаметрально противоположные точки.

Исследование влияния нагруженного незаглубленного штампа St_1
на ненагруженный St_2

Штампы	Эскиз	Нагрузки, Н					
		Нагруженный	400	800	1200	1600	2000
Ненагруженный: край 1	 <p>- нагрузка направлена вниз; + то же, вверх</p>	-5,1	-6,2	-4,4	4,0	0	9,4
край 2		-3,4	-5,4	-6,6	-6,4	-6,0	-3,4
Осадка нагруженного штампа, мм		0,05	0,1	0,25	1,4	2,8	5,9

Обобщение результатов экспериментов. В практике строительства подземные конструкции часто находятся в областях взаимного влияния (рис. 6). Возникают сложные картины силового взаимодействия. Кроме того, отдельные зоны основания находятся в разных стадиях НДС.

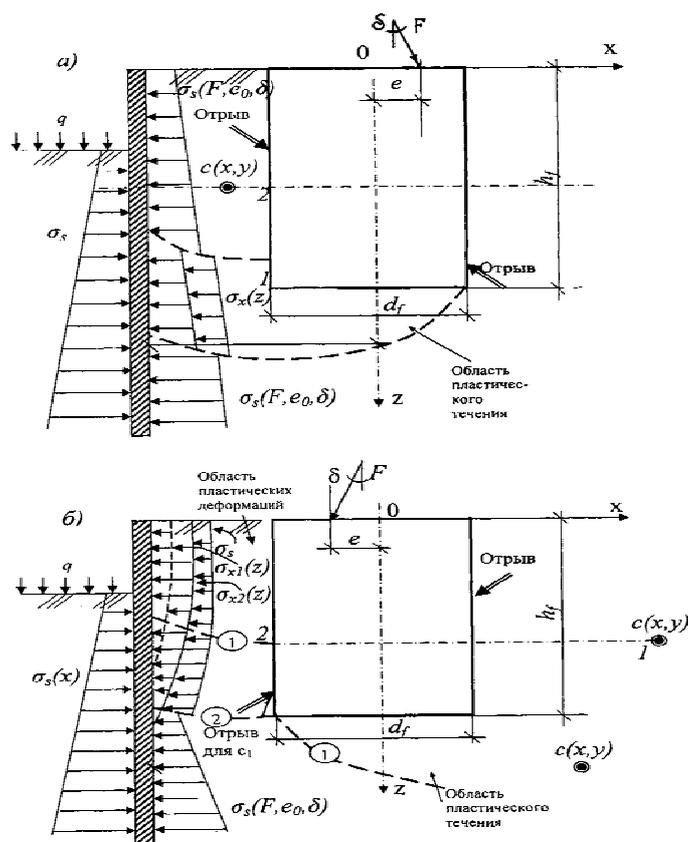


Рис. 6. Схема сил, действующих на стенку при эксцентриситете справа (а) и слева (б)

Выводы

1. Существующие методы прогноза взаимного влияния подземных конструкций несовершенны.
2. Требуется дальнейшее экспериментальное изучение механики силового сопротивления подземных конструкций с учётом их взаимного влияния.

Библиографический список

1. Беллиндир, Е.Н. Расчетные и экспериментальные исследования бокового давления грунта на блочной насосной станции Запорожской АЭС/ Е.Н. Беллиндир, А.А. Гольдин, А.А. Готлиф// Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1993. – №2. – С. 10 – 13.
2. Кофман, В.А. Распределение напряжений и деформаций от действия нагрузки по круглой площадке внутри грунта / В.А. Кофман, М.И. Горбунов-Посадов // Тр. ин-та НИИОСП им.Н.М. Герсеванова. - М., 1977. – Вып. 68. – С. 83-111.
3. Леденев, В.В. Прочность и деформативность оснований заглубленных фундаментов /В.В. Леденев. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1985. – 156 с.
4. Леденев, В.В. Прочность и деформативность оснований заглубленных фундаментов/ В.В. Леденев. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1990. – 224 с.
5. Леденев, В.В. Взаимное влияние рядом расположенных зданий/ В.В. Леденев, Ю.А. Клинков, Я.В. Савинов// Сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых “Строительные конструкции – 2000”. “4.3. Конструкции из дерева и пласт-масс”. Строительная механика. – МГСУ. – М., 2000. С. 54 – 61.
6. Леденев, В.В. Экспериментальные исследования горизонтальных напряжений в песчаном основании/ В.В. Леденев, А.А. Мазов, М.А. Чуканов, В.С. Чуксин; РААСН, ТГТУ// Вестник Центрального регионального отделения Российской академии архитектуры и строительных наук: сб. науч. ст. - Воронеж-Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – С.161-167.
7. Леденёв, В.В. Взаимное влияние рядом расположенных зданий и фундаментов/ В.В. Леденев, Я.В. Савинов// Оценка риска и безопасность строительных конструкций: I международ. науч.-практич. конф.: сб. тезисов докладов. - Воронеж, 2006. –Т. II. – С. 87-91.
8. Леденев, В.В. Экспериментальные исследования несущей способности основания круглых и кольцевых фундаментов в условиях стесненных поперечных деформациях/ В.В. Леденев, В.М. Струлев //Вестник отделения строительных наук. — Белгород, 2008. – Вып. 12. - С. 143 – 150.
9. Леденёв, В.В. Исследование осадки круглых и кольцевых штампов с заглубленной в грунт цилиндрической оболочкой /В.В. Леденев, В.М. Струлев, А.А. Зайцев// IV Международ. науч.-практ. интернет-конференция «Состояние современной строительной науки – 2006»: сб. науч. трудов. – Полтава: Полтавский ЦНТИ. – 2006. – С. 169-172.
10. Надаи, А. Пластичность и разрушение твёрдых тел: монография / А. Надаи. Т.1. - М.: Изд-во. иностр. лит., 1954. – 647 с; Т.2. - М.: Мир, 1968. – 863 с.

References

1. Bellindir, E.N. Computational and experimental studies of lateral earth pressure at the unit pumping station Zaporozhye NPP/ E.N. Bellindir, A.A. Goldin, A. Gotlif / Foundation engineering and soil mechanics. - 1993. - №2. - P. 10 - 13.
2. Coffman, V.A. The distribution of the stress and strain caused by the load on a circular platform inside the ground / V.A. Coffman, M.I. Gorbunov-Posadov // Gersevanov, N.M research, plan-surveying, and design-engineering institute of foundations and underground structures. - M., 1977. – Vol. 68. – P. 83-111.

3. Ledenev, V.V. The strength and deformability of the grounds of deep foundations/. V.V. Ledenev. – Voronezh: VSU publishing house, 1985. – 156 p.
4. Ledenev, V.V. The strength and deformability of the grounds of deep foundations / V.V. Ledenev. – Voronezh: VSU publishing house, 1990. – 224 p.
5. Ledenev, V.V. The cross effect of close buildings / V.V. Ledenev, Yu. A. Klinkov, Ya.V. Savin// Collection of materials of all-Russian scientific-practical. Conf. of young scientists "building construction - 2000". "4.3. Construction of wood and plastics". Structural mechanics. - MSU.of civil engineering. - M., 2000. - P. 54 - 61.
6. Ledenev, V.V. Experimental studies of the horizontal stresses in the sandy bottom/ V.V. Ledenev, A.A. Mazov, M.A. Chukanov, V.S. Chuksin; RAABS, TGTU// Bulletin of the central regional branch of the Russian academy of architecture and building sciences: collection of scientific articles. – Voronezh. - Tambov Publishing House of the TSTU. - 2009. - P. 161-167.
7. Ledenev, V.V. The mutual influence of adjacent buildings and foundations/ V.V. Ledenev, Ya.V. Savinov //Risk assessment and safety of building structures: I int. scientific-practical. conf. Book of abstracts. - Voronezh, 2006. -Т. II. - P. 87-91.
8. Ledenev, V.V. Experimental studies of the bearing capacity of the base circular and annular foundations in confined shear deformations/ V.V. Ledenev, V.M. Strulev // Herald department of building sciences. – Iss. 12. - Belgorod, 2008. - P.143 - 150.
9. Ledenev, V.V. Study of precipitation circular and ring die with recessed into the ground cylindrical shell / V.V. Ledenev, V.M. Strulev, A.A. Zaitsev// IV-th international scientific and practical internet conference "State of the modern science of construction - 2006. Collection of scientific works. - Poltava: Poltava STIC. - 2006. - P. 169-172.
10. Nadai. Plasticity and Fracture of Solids: monograph / A. Nadai. V.1. – M.: Foreign literature publishing house, 1954. – 647 p; Vol.2.-M.: World, 1968. – 863 p.

Ключевые слова: фундамент, основание, нагрузка, напряжения, деформации, перемещения, разрушение, взаимное влияние.

Keywords: foundation, base, load, tense, strains, displacement, destruction, mutual influence.

*В ряде полевых и лабораторных опытов принимал участие к.т.н., доц. С.В. Иконин.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.074.5

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики
В.С. Сафронов
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
Н.А. Барченкова
Магистрант кафедры строительной механики
А.А. Блинова
Россия, г. Воронеж, тел. 89507692962;
e-mail: alina_wblinova@mail.ru*

*The Voronezh State University of Architecture
and Civil Engineering
Dr of Tech. Science, Professor of Department
of Structural Mechanics
V.S. Safronov
PhD of Tech. Science, Associate Professor of
Department of Structural Mechanics
N.A. Barchenkova
The Undergraduate of Department
of Structural Mechanics
A.A. Blinova
Russia, Voronezh, ph. 89507692962;
e-mail: alina_wblinova@mail.ru*

В.С. Сафронов, Н.А. Барченкова, А.А. Блинова

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТРУКТУРНОГО ПОКРЫТИЯ НА ОСНОВЕ ПВК SCAD

С использованием проектно-вычислительного комплекса (ПВК) SCAD выполнен расчет напряженно-деформированного состояния пространственной решетчатой конструкции (ПРК) типа «Кисловодск» с разреженной решеткой под действием постоянной и временной от снега нагрузок. Установлены значения предельных нагрузок для двух вариантов распределения снеговой нагрузки. Для выявленных опасных стержней, потеря несущей способности которых приводит к разрушению всей конструкции, построены поверхности влияния усилий.

V.S. Safronov, N.A. Barchenkova, A.A. Blinova

DEFLECTED MODE ANALYSIS OF STRUCTURAL SURFACE BASED ENGINEERING COMPUTING COMPLEX SCAD

There was done the calculation of deflected mode of space latticed structure of the “Kislovodsk” model with sparse lattice under the influence of constant and temporary snow loadings. The values of limiting loads for two variants of snow loads spreading are determined. The surface of stress effect to reveal the dangerous bars, which loss of bearing capacity leads to structural failure was constructed.

В течение ряда десятилетий ПРК типа «Кисловодск» широко использовались в строительстве. По данным, приведенным в [1], начиная с 1975 г. ежегодный ввод в эксплуатацию зданий с покрытием такого типа составил около $1,5 \cdot 10^6$ м². Причем первые обрушения были зафиксированы уже в 1983 г.

Цель настоящей работы заключается в исследовании напряженно-деформированного состояния ПРК типа «Кисловодск» с построением поверхностей влияния для наиболее напряженных стержней.

К расчету принята конструкция из труб типа «Кисловодск», представляющая собой структурную плиту с размерами в плане 27×27 м, состоящую из стержневых и узловых элементов, опирающуюся на 4 колонны с шагом 18×18 м (см. [2]). Ортогональные сетки поясов образуются из ячеек размером 3×3 м, имеют разреженную решетку, высота плиты по осям поясов 2,12 м (рис. 1).

В зависимости от воспринимаемых усилий в стержнях применяются трубы следующих типоразмеров: 60×3, 76×3, 102×4, 114×4,5, 127×5,5 по ГОСТ 10704-76 и ГОСТ 8732-78. Трубчатые элементы стержней изготовлены из стали марки С20 по ГОСТ 1050-74 с пределом текучести 245 МПа. Проектная нагрузка 3,5 кПа.

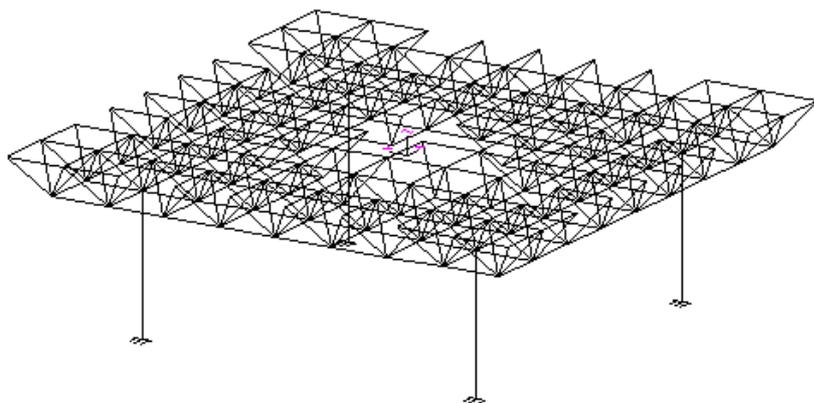


Рис. 1. Пространственная конечно-элементная схема структурной плиты с размерами в плане 27×27 м (изометрия)

Для расчета предельных усилий элементов структурных металлических конструкций по прочности и устойчивости [3] принято:

- расчетное сопротивление стали марки 20 трубчатых элементов $R_y = 230$ МПа;
- коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$;
- расчетные длины элементов поясов $l = 3,000$ м, раскосов – $l = 2,985$ м.

Предельные усилия, вычисленные с учетом гибкости шарнирно закрепленных по концам стержней, представлены в табл. 1, 2, а на рис. 2-4, 5-7 они выделены красным шрифтом.

Таблица 1

Предельные значения усилий для элементов поясов структурной плиты

Сечение трубы, мм	Площадь сечения, см ²	Гибкость λ	Коэффициент продольного изгиба φ	Предельное сжимающее усилие, кН	Предельное растягивающее усилие, кН
60х3	5,372	149	0,2971	36,6	123,3
76х3	6,880	116	0,4631	73,1	157,9
104х4	12,315	87	0,6521	184,3	282,6
114х4,5	15,480	77	0,7265	258,0	355,2
127х5,5	20,994	70	0,7643	368,2	481,7

Таблица 2

Предельные значения усилий для элементов раскосов структурной плиты

Сечение трубы, мм	Площадь сечения, см ²	Гибкость λ	Коэффициент продольного изгиба φ	Предельное сжимающее усилие, кН	Предельное растягивающее усилие, кН
60х3	5,372	148	0,3009	37,1	123,3
76х3	6,880	116	0,4631	73,1	157,9
104х4	12,315	86	0,6594	186,3	282,6
114х4,5	15,480	77	0,7265	258,0	355,2
127х5,5	20,994	69	0,7694	370,6	481,7

Собственный вес трубчатых элементов структурной плиты задавался равномерно распределенным вдоль оси каждого стержня. Расчетная нагрузка от покрытия при его стандартном устройстве составляет 0,84 кПа.

В ПК SCAD [4] производился расчет на указанную выше постоянную нагрузку $q_{\text{пост}}$ (от собственного веса трубчатых элементов и покрытия) и временную $q_{\text{врем}}$ - от снега для III снегового района с учетом зоны повышенного снегоотложения («снеговых мешков» вдоль парапета) [5]. Структурная плита представлялась КЭ-моделью, составленной из стержней пространственной фермы (КЭ тип 4), и пространственным стержнем (КЭ тип 5) для колонн. Все соединения стержней плиты, включая опорные, приняты шарнирными, опирания колонн – заземленными.

В процессе расчетов исследовались два варианта загрузки с поэтапным возрастанием временных снеговых нагрузок:

- I вариант – равномерное без учета зоны повышенного снегоотложения;
- II вариант – неравномерное, т.е. с ее учетом.

Рассмотрим I вариант. Выполнено последовательное нагружение постоянными нагрузками интенсивности $q_{\text{пост}} = q_{\text{св.в.}} + q_{\text{покр}} = 0,14 + 0,84 = 0,98$ кПа и временными снеговыми с их поэтапным возрастанием $q_{\text{врем}} = 0,5; 1,0; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 \dots$ кПа. Установлено характерное значение $q_{\text{врем}} = 1,71$ кПа, при котором в раскосе №1 (рис. 2) возникает недопустимое сжимающее усилие. Исключение стержня №1 из расчетной схемы приводит к исчерпанию несущей способности ряда других стержней №2, 3, 4, 5, 6, 7 (на рис. 2-4 они выделены синим цветом), что порождает геометрическую изменяемость всей конструкции. Таким образом, установлена предельно допустимая нагрузка $q_{\text{врем}} = 1,7$ кПа.

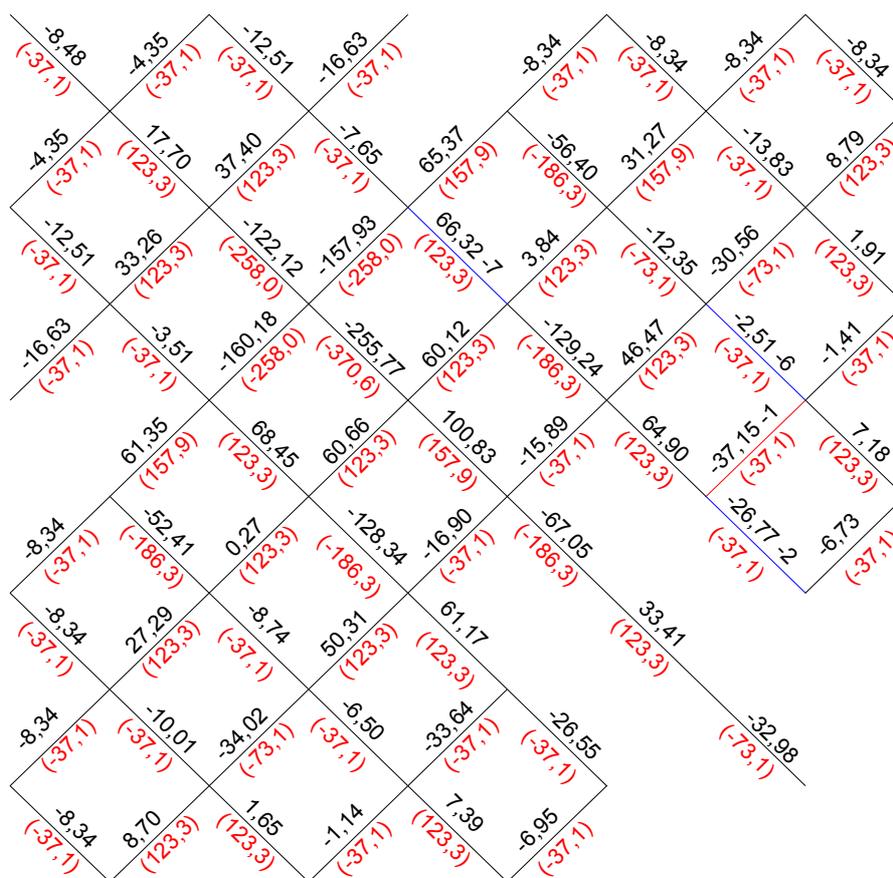


Рис. 2. Продольные усилия (кН) в стержнях раскосов четверти структурной плиты при $q_{\text{пост}} + q_{\text{врем}} = 0,98 + 1,71$ кПа

		4,24		8,33	
		(123,3)		(123,3)	
4,24		8,43	8,43		
		(123,3)	(123,3)		
8,33		80,68	76,52	-72,73	-108,62
		(282,6)	(282,6)	(-73,1)	(-184,3)
		83,32	83,45	-95,36	-224,14
		(282,6)	(282,6)	(-184,3)	(-258,0)
		-66,67 -3	-96,02	-66,19	
		(-73,1)	(-184,3)	(-73,1)	
8,33		-102,17	-224,91 -4	-111,84	-121,91
		(-184,3)	(-258,0)	(-184,3)	(-184,3)
		23,94	33,33	16,54	
		(123,3)	(123,3)	(123,3)	
		-129,39	-248,17	-126,45	
		(-258,0)	(-368,2)	(-184,3)	

Рис. 3. Продольные усилия (кН) в стержнях верхнего пояса четверти структурной плиты при $q_{\text{пост}} + q_{\text{врем}} = 0,98 + 1,71$ кПа

		-13,11	11,56	76,84	99,45
		(-73,1)	(123,3)	(157,9)	(282,6)
-13,11		-29,54	32,38	158,86	192,58 -5
		(-73,1)	(157,9)	(282,6)	(282,6)
7,40		34,44	61,21	-60,69	-13,89
		(123,3)	(123,3)	(-184,3)	(-36,6)
		-8,69	59,78	143,56	208,22
		(-36,6)	(123,3)	(282,6)	(282,6)
66,65		163,61	146,00	-33,31	
		(282,6)	(282,6)	(-73,1)	
		-17,02	-60,47	-33,31	
		(-73,1)	(-184,3)	(-73,1)	
87,35		204,81	206,92		
		(282,6)	(282,6)		
		-17,03	-14,32		
		(-73,1)	(-36,6)		

Рис. 4. Продольные усилия (кН) в стержнях нижнего пояса четверти структурной плиты при $q_{\text{пост}} + q_{\text{врем}} = 0,98 + 1,71$ кПа

В табл. 3 сопоставляются значения расчетных и допускаемых усилий в стержнях №1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 при $q_{\text{пост}} + q_{\text{врем}} = 0,98 + 1,71$ кПа после удаления стержня №1.

Таблица 3

Сопоставление расчетных и предельных усилий в характерных стержнях
для I варианта нагружения

Усилия	Значения для № стержня						
	1	2	3	4	5	6	7
Расчетное значение усилия, кН	-37,15	-50,80	-76,36	-271,75	347,96	-92,78	123,68
Предельное значение усилия, кН	-37,10	-37,10	-73,10	-258,00	282,60	-37,10	123,30

Аналогичные расчеты выполнены для II варианта нагружения. После потери несущей способности стержня № 1* при $q_{\text{врем}}=1,77$ кПа и его исключения из работы последовательно теряют несущую способность стержни № 2* - 12*. Результаты вычислений представлены на рис. 5-7, для стержней № 1* - 7* - в табл. 4.

Таблица 4

Сопоставление расчетных и предельных усилий в характерных стержнях
для II варианта нагружения

Усилия	Значения для № стержня						
	1*	2*	3*	4*	5*	6*	7*
Расчетное значение усилия, кН	-73,18	-291,25	180,22	265,54	315,16	-355,98	-407,55
Предельное значение усилия, кН	-73,10	-258,00	123,30	157,90	282,60	-73,10	-184,30

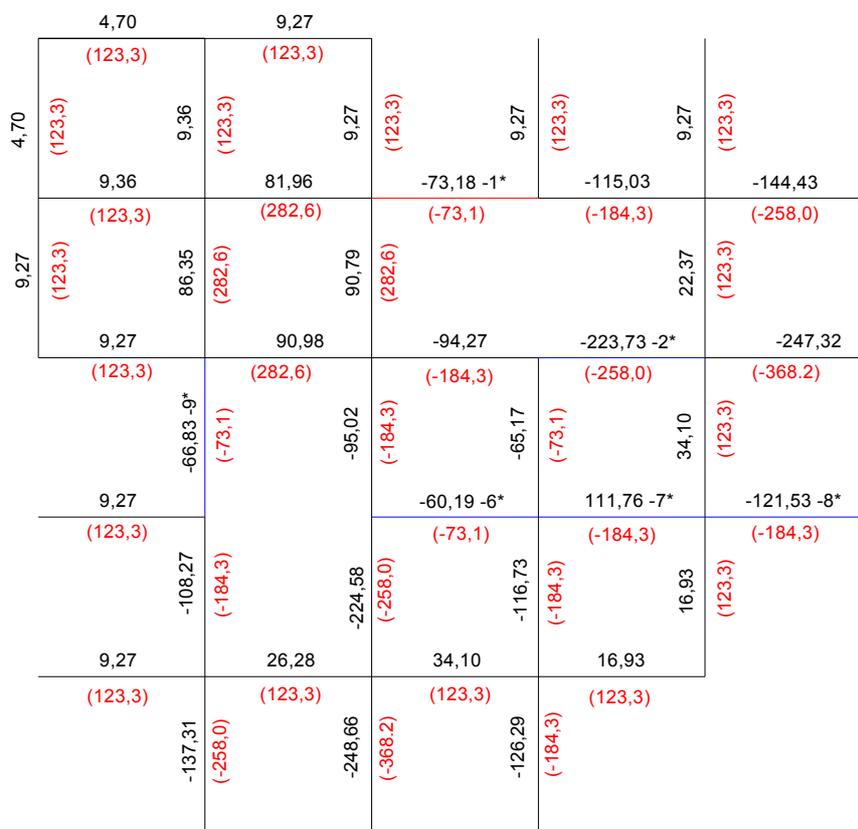


Рис. 5. Продольные усилия (кН) в стержнях верхнего пояса четверти структурной плиты при $q_{\text{пост}} + q_{\text{врем}} = 0,98 + 1,77$ кПа

значение предельной временной нагрузки составляет $q_{\text{врем}} = 1,76$ кПа и отличается от полученной для I варианта - $q_{\text{врем}} = 1,7$ кПа. Это, по-видимому, связано с тем, что дополнительная нагрузка в виде «снеговых мешков» несколько разгружает опасные стержни.

Таким образом, в результате расчетов выявлены наиболее опасные стержни №1, 1*. Для них построены поверхности влияния (рис. 8, 9) с целью получения более полной картины распределения усилий при самых различных вариантах распределения внешней нагрузки. Разнозначность поверхности влияния показывает зоны расположения временной нагрузки при оценке максимальных значений усилий от временной нагрузки.

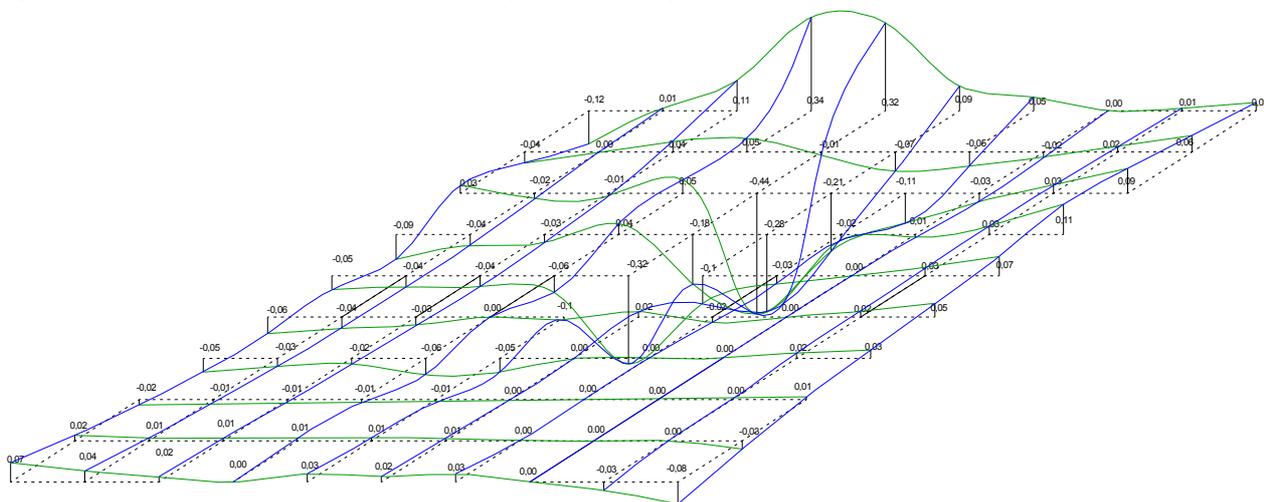


Рис. 8. Поверхность влияния продольного усилия для стержня №1

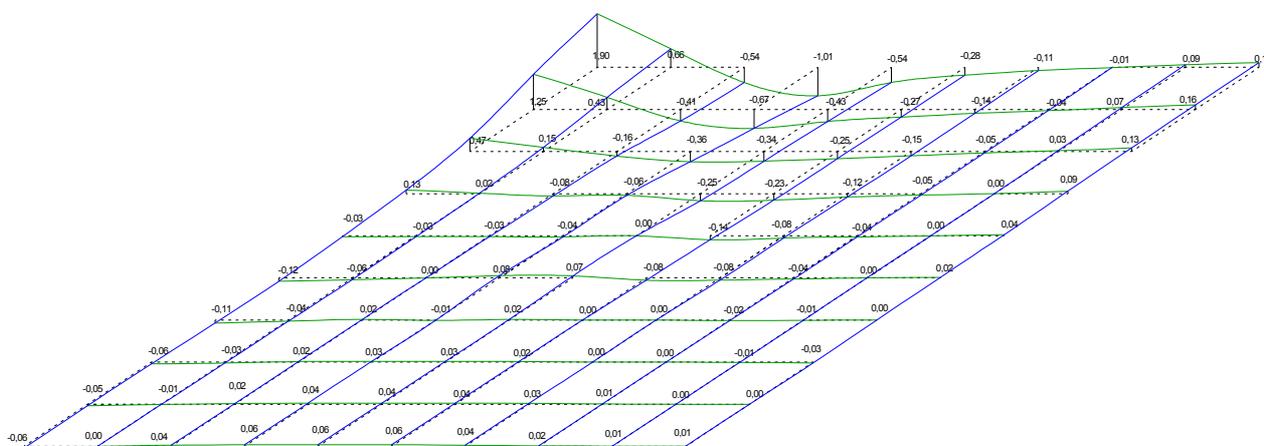


Рис. 9. Поверхность влияния продольного усилия для стержня №1*

Выводы

Для разреженной структурной плиты типа «Кисловодск» выполнен анализ напряженно-деформированного состояния с использованием метода конечных элементов в ПК SCAD.

При разных вариантах нагружения временной снеговой нагрузкой (I – равномерная без учета зоны повышенного снегоотложения, II – неравномерная, т.е. с ее учетом) рассчитаны предельные значения интенсивности снеговой нагрузки: для I варианта – 1,7 кПа, II варианта – 1,76 кПа.

Рассмотренным вариантам загрузки соответствуют различные последовательности исчерпания несущей способности стержней и, как следствие, различные значения интенсивности равномерной временной нагрузки.

Установлено расположение наиболее опасных стержней, потеря несущей способности которых приводит к разрушению всей шарнирно-стержневой конструкции.

Для указанных наиболее опасных стержней построены поверхности влияния продольных усилий, особенностью которых является их разнозначность.

Библиографический список

1. Филипович, С.В. Статистика некоторых результатов обследования зданий с пространственными решетчатыми покрытиями из труб типа «Кисловодск», Анализ напряженно-деформированного состояния с учетом дефектов монтажа/ С.В. Филипович, В.М. Латыпов, С.С. Филипович // Электронный журнал «Предотвращение аварий зданий и сооружений». - 2010.
2. Серия 1.466-3С. Пространственные решетчатые конструкции из труб типа «Кисловодск» для зданий с расчетной сейсмичностью 8 и 9 баллов/ Гипроспецлегкоконструкция.
3. СНиП II-23-88*. Стальные конструкции. – М.: Госстрой СССР, 1988. – 96 с.
4. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений/ А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. - М.: ДМК Пресс. - 2007. – 596 с.
5. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия. – М.: Госстрой России, 2003.

References

1. Philipovich, S.V. Satic of some results of building inspection with sparse lattice surface from tubes of “Kislovodsk” model. The analysis of deflected mode with account of assembling defect/ S.V. Philipovich, V.M. Latipov, S.S. Philipovich // Electronic journal “Accident prevention of building and structures”, 2010.
2. Series 1.466-3C. Space lattice structures from tubes of “Kislovodsk” model for buildings with design seismology of 8 and 9 point earthquake./ Giprospezlegkoconstrucziay.
3. Construction standards and Regulations II -23-88*, Steel structures. – M.: Gosstroj of USSR, 1988. – 96 p.
4. Perelmuter, A.V. Design models of structures/ A.V. Perelmuter, V.I. Slivker. - M.: DMK Pres, 2007. – 596 p.
5. Construction standards and Regulations 2.01.07-85*. Loadings and effects.-M.: Gosstroj Of Russia, 2003

Ключевые слова: структурная плита, конечные элементы, напряженно-деформированное состояние, продольное усилие, предельное усилие, предельные нагрузки. поверхность влияния.

Keywords: structural slab, finite elements, deflected mode, longitudinal stress, limiting force, limiting loads, surface of influence.

УДК 624.5(628.143)+624.042.8:532.5
Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики
В.С. Сафронов
Аспирант кафедры строительной механики
Ю.А. Доманова
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(4732)71-52-30
e-mail: vss22@mail.ru

Voronezh State University of Architecture and
Civil Engineering
Dr. of Tech. Sc., Prof. of Department
of Structural Mechanics V.S. Safronov
Postgraduate Student of Department of
Structural Mechanics J.A. Domanova
Russia, Voronezh. tel.: +7(4732)71-52-30
e-mail: vss22@mail.ru

В.С. Сафронов, Ю.А. Доманова

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВИСЯЧЕГО ТРУБОПРОВОДНОГО ПЕРЕХОДА НА ВОЗДЕЙСТВИЯ ОТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА ПРИ ВНЕЗАПНОЙ ОСТАНОВКЕ НАСОСА

Описывается методика определения сил ударного воздействия при гидравлическом ударе в висячем трубопроводном переходе, запроектированном для пропуска воды с одного на другой берег реки, при внезапной остановке насоса. По разработанным моделям загрузки с использованием конечно-элементной расчетной схемы и вычислительного комплекса MIDAS исследуется НДС трубопровода при действии ударных нагрузок. Учитывается влияние жесткости и положения сильфонных компенсаторов.

V.S. Safronov, Y.A. Domanova

SUSPENSION PIPELINE DYNAMIC CALCULATION OF KNOCKING EFFECT CAUSED BY PUMP HITCH

The method of determining of knocking forces affect inside suspension pipeline, designed as conduit for pumping water from one river side to another at pump hitch. The pipeline VAT under shock load is analyzed according to loading models with application of finite element design scheme and computer system of MIDAS. The influence of rigidity and location of expansion joints are into account.

При эксплуатации большепролетных трубопроводных переходов через реки, овраги и другие препятствия могут возникать динамические процессы, которые определяются продолжительностью закрытия заслонки, что объясняется возникающими силами при гидравлическом ударе [1]. В трубопроводах большого диаметра обычно используются медленно закрывающиеся вентильные стальные или чугунные задвижки, которые при перекрытии воды не приводят к возникновению гидравлического удара. Однако причиной возникновения гидравлического удара, по мнению А.А. Сурина [2], в таких трубопроводах может быть внезапная остановка насоса. В настоящее время методики расчета динамических явлений, возникающих при внезапной остановке или быстром включении насоса, отсутствуют. В настоящей статье предлагается расчетная методика, которая позволила дать объяснения возникшего на эксплуатирующемся трубопроводном переходе через р. Ока в г. Орле с висячей несущей системой непроектного деформированного состояния.

Рассматриваемый трубопроводный переход представляет собой трехпролетную комбинированную конструкцию (рис. 1), в которой для транспортирования воды используется стальная труба диаметром 820 мм со стенкой толщиной 10 мм.

Средний пролет трубопровода опирается на поперечные швеллеры, подвешенные к двум стальным кабелям диаметром 70 мм на подвесках того же диаметра. Также швеллеры

служат опорой для технологических мостиков для передвижения обслуживающего персонала. В узлах опирания трубы на швеллеры проектом предусмотрены прокладки из фторопласта для уменьшения сил трения и обеспечения свободного скольжения трубы в продольном направлении.

Крайние пролеты трубопровода шарнирно опираются на железобетонные устои пилонов и анкерные фундаменты. Концы кабелей жестко заделываются в стойки анкерных фундаментов. Величина среднего пролета - 76 м, крайних – 15 м.

Кабели несущей системы поддерживаются пилонами, которые представляют собой железобетонные стойки, соединенные распорками. Пилоны сопряжены с устоями шарнирно.

За анкерными фундаментами трубопровод изгибается под прямым углом, образуя вертикальные участки, соединяющие его с существующей трубопроводной сетью ниже уровня земли. Длина вертикальных участков (по оси трубы): с правой стороны 5,6 м, с левой – 3,4 м.

На горизонтальном участке трубопровода непосредственно за анкерными фундаментами проектом предусмотрена установка сильфонных компенсаторов для снижения влияния температурных деформаций.

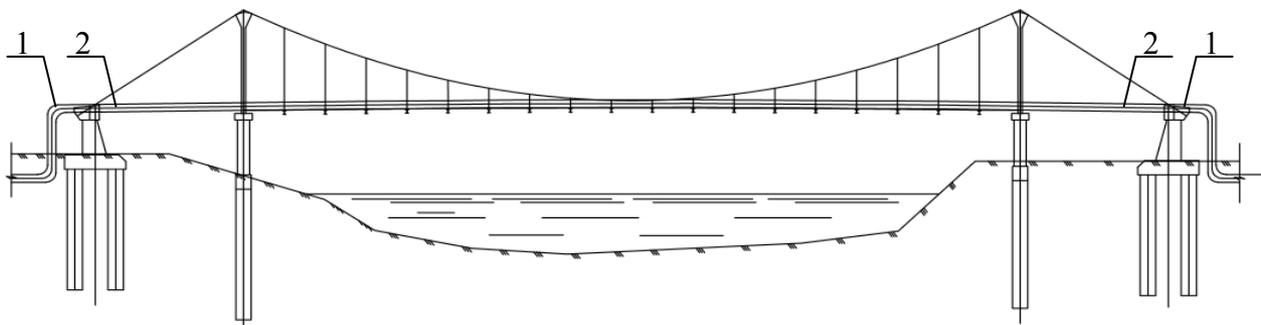


Рис. 1. Общий вид трубопровода в г. Орле через р. Ока: 1 – проектное положение сильфонных компенсаторов; 2 – фактическое положение сильфонных компенсаторов

Фактическая конструкция трубопроводного перехода имеет ряд отличий от проектной. Во-первых, трубопровод в местах его опирания на стойки анкерных фундаментов закреплен от продольных смещений приваркой фиксаторов. Фиксаторы представляют собой восемь ребер толщиной 1 см и длиной шва 10 см (рис. 2, а) с внутренней и внешней сторон диафрагмы, предусмотренной на анкерном фундаменте. Во-вторых, сильфонные компенсаторы установлены не с внешней (согласно проекту), а с внутренней стороны диафрагмы анкерного фундамента.



а)



б)

Рис. 2. Узел закрепления трубопровода в продольном направлении на анкерном фундаменте при помощи ребер: а) в проектное положение (вид с внутренней стороны диафрагмы недеформированного узла), б) после деформации (вид с внешней стороны диафрагмы деформированного узла)

За время эксплуатации водовода его пролетное строение испытало значительные деформации в продольном направлении в результате силовых воздействий невыясненного происхождения. При этом на одной из опор произошел срез фиксаторов с внутренней стороны диафрагмы и смещение узла наружу. На рис. 2, б показаны имеющие место остаточные деформации, которые составили около 20 см.

Кроме того, в результате углового перемещения вертикальной части трубопровода произошла сдвигка одной из частей сборной железобетонной подземной камеры (рис. 3).

Также в трубопроводе образовывалась течь, которая была ликвидирована заваркой образовавшейся в металле трещины. На основании всех данных было выдвинуто предположение о том, что причиной деформаций мог послужить гидравлический удар, вызванный внезапной остановкой насоса при отключении электроэнергии.



Рис. 3. Деформация железобетонной камеры

Гидравлический удар в трубопроводной системе обычно определяется как колебательный процесс, возникающий в упругом трубопроводе с капельной жидкостью при внезапном закрытии крана или заслонки. Однако в действительности его причиной может послужить любой процесс, повлекший изменение скорости движения жидкости. В частности, А.А. Сурин описывает разрушительное воздействие гидравлического удара, вызванного остановкой насоса [2]. Методика определения по формуле Жуковского избыточного давления, возникающего в трубопроводе при гидравлическом ударе, широко известна [2, 3, 4], однако характеристика возникающих при этом ударных воздействий в литературе отсутствует. В статье предлагается энергетическая модель определения величины ударного воздействия на переломные участки профиля трубопровода.

Предполагается, что после внезапной остановки насоса жидкость продолжает некоторое время по инерции двигаться по трубопроводу. В результате от насоса по направлению к условному сливу распространяется зона пониженного давления. После полной остановки жидкость устремляется назад по направлению к насосу, набирая скорость, несколько меньшую начальной скорости движения, а давление в системе вновь повышается. В местах перелома профиля при этом возникают ударные воздействия, схема приложения которых приведена на рис. 4. После достижения жидкостью резервуара цикл повторяется.

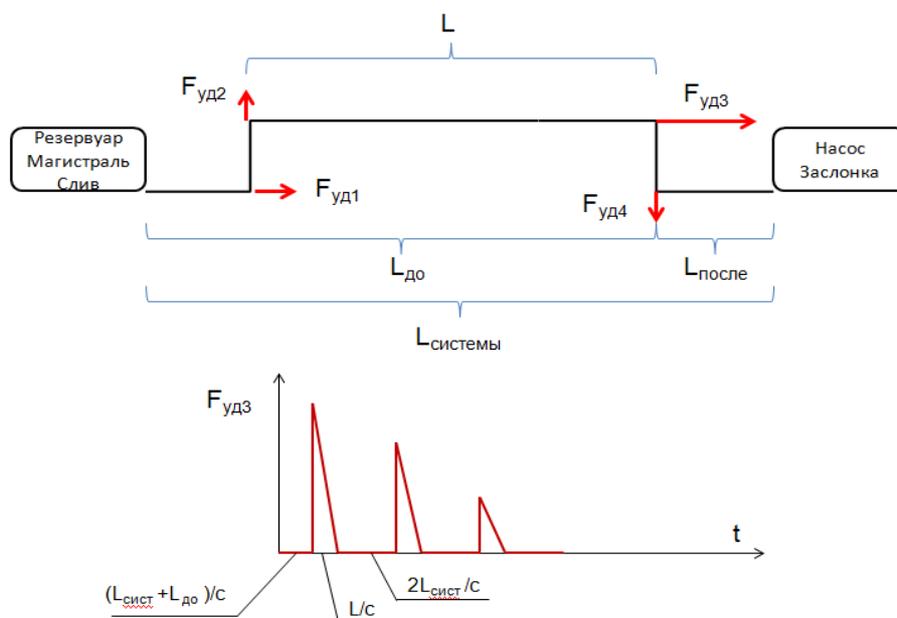


Рис. 4. Схема приложения ударных нагрузок при мгновенной остановке насоса выше по потоку

Для определения величины ударного воздействия использовался закон сохранения энергии:

$$\frac{M \cdot v_0^2}{2} = F_{уд} \cdot f + p_{изб} \cdot \Delta V + \Delta U. \quad (1)$$

В левой части уравнения представлено выражение для кинетической энергии движущейся жидкости на рассматриваемом участке трубопровода. В правой части: первое слагаемое – работа искомой силы по деформированию схемы, второе слагаемое – работа избыточного давления по изменению объема трубы, находящаяся из формулы Жуковского и уравнения Лапласа для цилиндрических оболочек, третье слагаемое – потери энергии (на данном этапе исследования не учитывались).

Зависимость между силой ударного воздействия и вызываемым ею перемещением определяется, исходя из жесткостных характеристик конкретной расчетной схемы. В данном исследовании рассматривались две расчетные схемы: проектная (без закрепления трубопровода на анкерном фундаменте от продольных перемещений) и фактическая (с закреплением трубопровода на анкерном фундаменте и компенсаторами, установленными с его внутренней стороны). Тогда в первом случае рассматривается работа по изгибу вертикальных участков трубопровода и удлинению его пролетного строения; во втором случае работа фактически сводится к изгибу стоек железобетонного анкерного фундамента, так как его жесткость значительно превышает жесткость трубопровода. Для каждой из схем находилась зависимость перемещения точки приложения нагрузки от вызывающей его силы путем построения эпюр от единичной горизонтальной силы и использования интеграла Мора (рис. 5).

Полученные выражения для перемещений подставлялись в уравнение (1), из которого находились интересующие нас величины ударных воздействий. В нашем случае интерес представляет сила $F_{уд3}$ (см. рис. 4). Для схемы «а»: $F_{уд3} = 83,5 \text{ тс}$; для схемы «б»: $F_{уд3} = 375,0 \text{ тс}$. В дальнейшем производился динамический расчет двух схем с использованием конечно-элементных расчетов схем трубопроводного перехода на вычисленные воздействия импульсного типа. Расчеты выполнялись с помощью блока динамических расчетов вычислительного комплекса MIDAS.

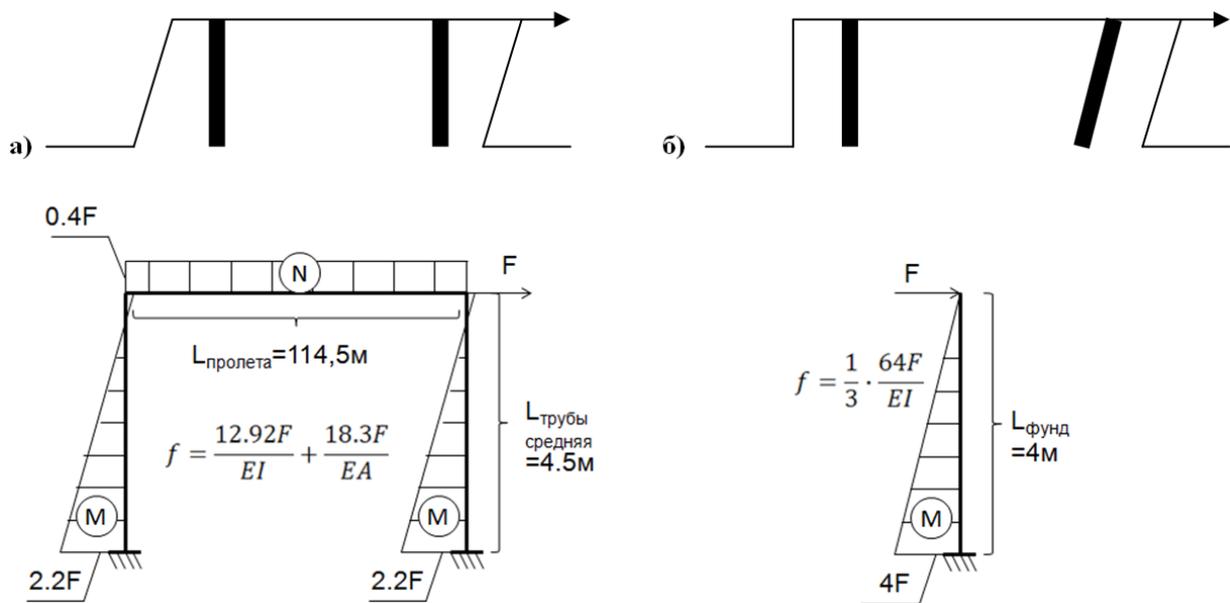


Рис. 5. Схемы деформирования трубопровода и определение зависимостей перемещения точек приложения нагрузки от действующей силы:
 а) при незакрепленном и б) закрепленном пролетном строении

Динамическому расчету предшествовал модальный анализ расчетных схем с учетом сильфонных компенсаторов с целью выяснения особенностей работы конструкции в зависимости от их жесткости. Рассматривались 5 типов компенсаторов:

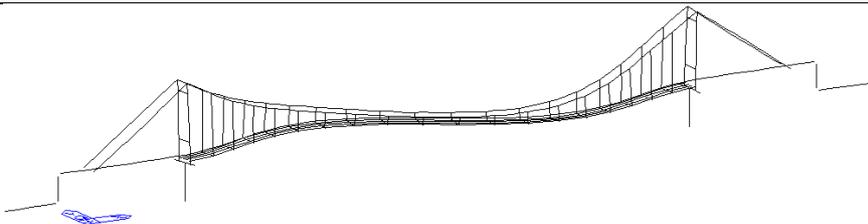
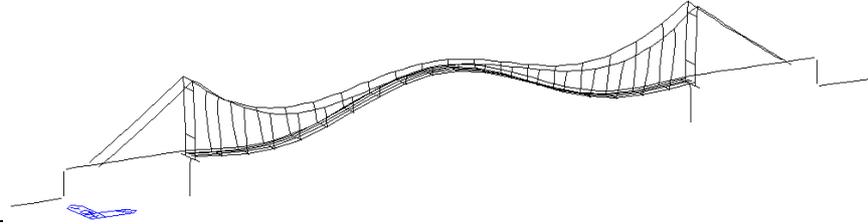
- реальный, жесткость которого вычислялась при помощи МКЭ и равнялась 11 000 кН/мм;
- СКО 800-2,5-200/0+-160/ПП ЗАО «Энергомаш» с жесткостью 1402 Н/мм;
- СКО 800-1,6-200/0+-105/ПП ЗАО «Энергомаш» с жесткостью 866 Н/мм;
- СКО 800-1,6-200/0+-105/ПП ЗАО «Энергомаш» с жесткостью 626 Н/мм;
- 2УКО 800-1,6-280/0+-160/ПП ЗАО «Энергомаш» с жесткостью 328 Н/мм.

Результаты модального анализа приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты модального анализа схем с компенсаторами разной жесткости без закрепления трубопровода в продольном направлении

Эскиз формы	Описание формы	Соб. частота Гц
	Горизонтальные колебания по 1 полуволне	0,1515*
	Вертикальные колебания по 2 полуволнам	0,3759*

Эскиз формы	Описание формы	Соб. частота Гц
	Горизонтальные колебания по 2 полуволнам	0,3895*
	Вертикальные колебания по 1 полуволне	0,4419*
	Продольные колебания трубы	0,6508 0,2888 0,2272 0,1932 0,1399**
* Собственные частоты для схем с различными компенсаторами совпадают ** Собственные частоты приведены в порядке убывания жесткостей компенсаторов		

В дальнейшем производился динамический расчет на действие серии ударных импульсов, приложенных по направлению $F_{удз}$ со схемы на рис. 4. Функция нагрузки от времени приведена на рис. 6. Интервал между импульсами соответствует времени, затрачиваемому на прохождение ударной волны всей водопроводной системы от насоса до слива, и условно принят равным 3 секунды.

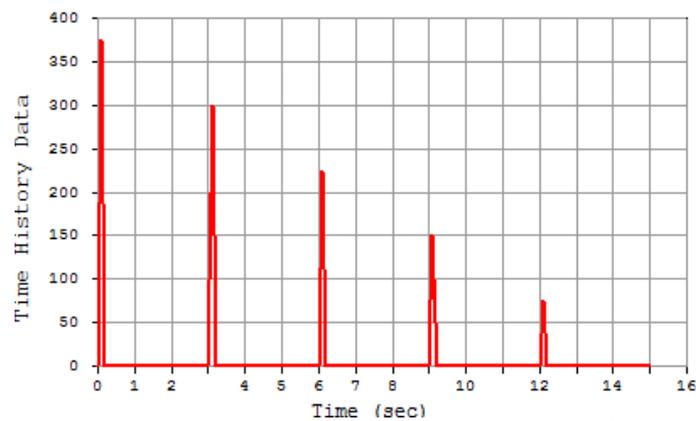


Рис. 6. Функция нагрузки (тс) по времени (с)

Динамический расчет трубопровода производился по двум схемам: проектной без закрепления трубопровода в продольном направлении и фактической с закреплением трубопровода и компенсаторами, установленными с внутренней стороны относительно анкерных фундаментов. Так как ударное воздействие для второй схемы превышает предельное сопротивление срезу фиксаторов, препятствующих смещению трубы в продольном направлении, то при выполнении расчета продольные связи на одной из опор,

ближайшей к точке приложения удара, не накладывались. Таким образом моделировался срез фиксаторов.

По результатам динамического расчета строились объемлющие эпюры изгибающих моментов и продольных сил, определялись максимальные значения усилий и перемещений пролетного строения, также строились графики перемещений точки приложения нагрузки по времени для установления характера деформирования трубопровода (рис. 7). Из графиков следует, что компенсаторы оказывают значительное демпфирующее воздействие на систему. Результаты динамического расчета приведены в табл. 2.

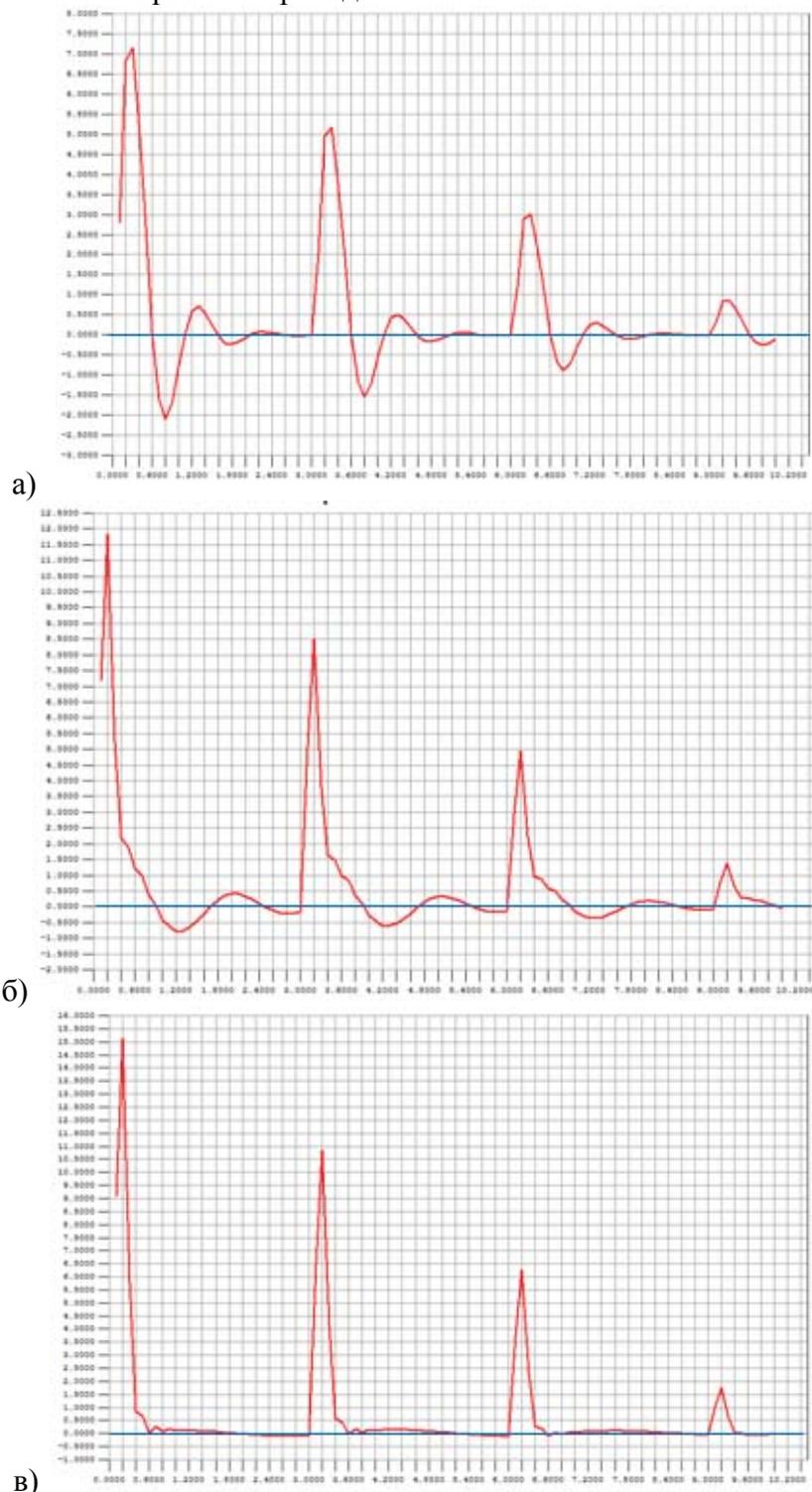
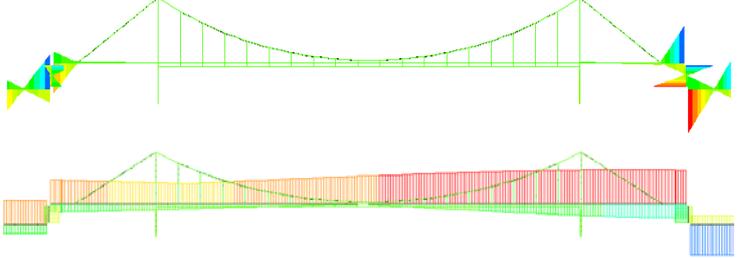
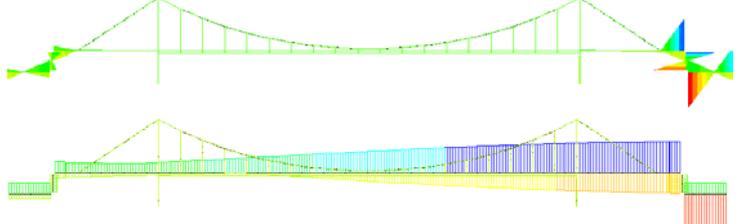
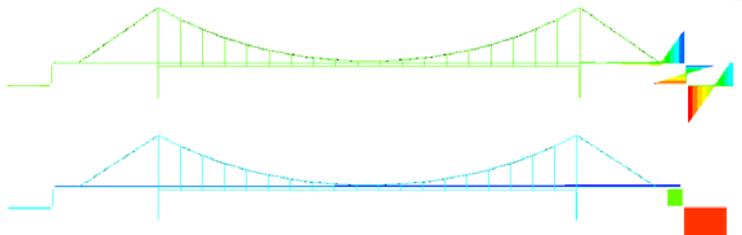
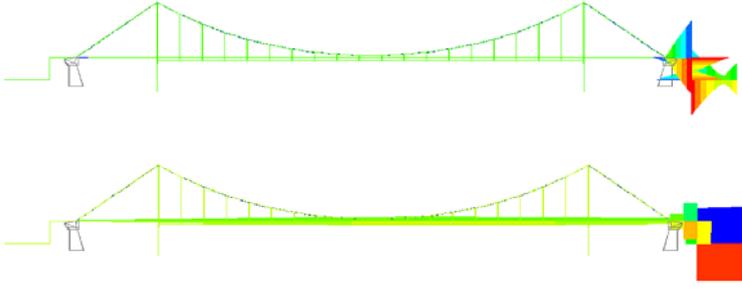


Рис. 7. Графики перемещений точки приложения нагрузки по времени: а) схема без компенсаторов, б) схема с компенсаторами жесткостью 11 кН/мм, в) схема с компенсаторами ЗАО «Энергомаш»

Таблица 2

Результаты динамического расчета различных схем трубопроводного перехода

Объемлющие эпюры моментов и продольных сил	Макс. момент справа, тм	Макс. момент слева, тм	Макс. продольная сила, т	Макс. перемещение справа, мм	Макс. перемещение слева, мм
Схема без продольного закрепления трубы, без компенсаторов					
	36	30	-20,4	7,15	5,73
Схема без продольного закрепления трубы, с компенсаторами жесткостью 11кН/мм					
	52	3,4	-30	12,2	1,53
Схема без продольного закрепления трубы, с компенсаторами ЗАО «Энергомаш»*					
	65,5 66,8 77,7 78,0	0	39,0 39,8 40,24 0,7	15,1 15,4 15,6 15,8	0
* Результаты приведены в порядке уменьшения жесткости компенсаторов					
Схема с продольным закреплением трубы					
	968	0	484	261	0

Выводы

1. В условиях гидравлического удара в трубопроводах большого диаметра со сложным профилем при внезапной остановке насоса могут возникать значительные ударные усилия.

2. Ударные усилия, возникающие в трубопроводе, тем больше, чем больше жесткость системы в продольном направлении.

3. Изменение конструктивной схемы трубопроводного перехода через р. Ока в г. Орел в виде закрепления его от продольных смещений на анкерных фундаментах и переноса компенсаторов на внутреннюю сторону относительно диафрагм фундаментов способствовало более чем четырехкратному возрастанию сил ударного воздействия.

4. Возведение трубопроводного перехода в соответствии с проектом или, по меньшей мере, установка компенсаторов с внешней стороны диафрагм анкерных фундаментов позволили бы избежать разрушительных последствий гидравлического удара.

5. Очевидно, после срезки фиксаторов на одной из опор и деформации опорного узла схема трубопровода приобрела гибкость, достаточную для избежания повторных гидравлических ударов соизмеримой силы в дальнейшем.

Библиографический список

1. Сафронов, В.С. Динамический расчет висячего трубопровода при гидравлическом ударе/ В.С. Сафронов, Ю.А. Суханова// Строительная механика и конструкции. – Вып. 1 (2). - Воронеж, 2011. –С. 91-97.
2. Сурин, А.А. Гидравлический удар в водопроводах и борьба с ним /А.А. Сурин. – М.: Гос. транспорт. железнодорож. изд-во, 1946. – 371 с.
3. Жуковский, Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах /Н.Е. Жуковский – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1949. – 103 с.
4. Башта, Т.М. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов. – М.: Стройиздат, 1982. – 423 с.

References

1. Safronov, V.S.. Dynamic analysis of suspension pipeline experiencing knocking/V.S. Safronov, J.A. Sukhanova// Structural mechanics and constructions. - Voronezh, rel.1(2), 2011 - P. 91-97
2. Surin, A.A. Water hammer in water supply and measures against it. /A.A. Surin – M.: Public transport rail Publishing, 1946. – 371 p.
3. Zhukovsky, N.E. Concerning water hammer in pipelines/ N.E. Zhukovsky. - M.: State publishing of technic-theoretical literature, 1949. - 103 p.
4. Bashta, T.M. Hydraulics, hydraulic machines and drives/ T.M. Bashta, S.S. Rudnev, V.B. Necrasov. - M.: Stroyisdat, 1982. – 423 p.

Ключевые слова: висячий трубопровод, динамический расчет, гидравлический удар, сильфонный компенсатор, кинетическая энергия, напряженно-деформированное состояние, перемещения, изгибающие моменты, жесткость.

Keywords: suspension pipeline, dynamic analysis, hydraulic shock, expansion joint, kinetic energy, stress-strain state, displacement, bending moment, stiffness.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.042.8: 624.872

*Воронежский государственный
архитектурно - строительный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры
строительной механики*

С.Ю. Гриднев

ОАО «Воронежпроект» (г. Воронеж)

Инженер I категории

А.Н. Будковой

Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473) 271-52-30

e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru

*Voronezh State University of Architecture and
Civil Engineering*

*PhD. of Tech. Science, Associate Professor of
the Department of Structural Mechanics S.Yu.
Gridnev*

Open joint company «Voronezhproekt»

Lead engeneer A.N. Budkovoy

Russia, Voronezh, Teli. 8(473) 271-52-30

e – mail : gridnev_s_y@rambler.ru

С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой

КОЛЕБАНИЯ БАЛОЧНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ ОДИНОЧНОГО АВТОМОБИЛЯ

Разработана методика совместных колебаний балочной системы и автомобиля, движущегося в режиме торможения и разгона. Исследовался характер перемещений сечений балочной системы при максимальных значениях усилий, передающихся со стороны автомобиля на проезжую часть. Выполнен анализ результатов численных исследований для оценки влияния различных параметров движения на особенности поведения балочной системы.

S.Yu. Gridnev, A.N. Budkovoi

BEAM SYSTEM FLUCTUATION DURING TRANSIENT STATE OF A SINGLE VEHICLE TRAFFIC

The method of mutual fluctuations of bar system and vehicle, moving in the state of stopping and acceleration is developed. The behavior of beam system crossing displacement under maximal performance of vehicle forces effecting carriageway. The analysis of results of numerous researches for assessment of influence of different parameters of traffic on the behavior of beam system is completed.

Введение. Исследования колебаний балочных систем, являющихся расчетными схемами пролетных строений автодорожных мостов, при подвижной нагрузке выполнялись, как правило, с использованием допущения о движении с постоянной скоростью. Это оправдано в случае незначительного изменения скорости автомобиля при движении по транспортному сооружению. В реальных условиях эксплуатации автомобиль перед въездом на транспортное сооружение, а также во время движения по нему существенно меняет скорость своего движения. Это происходит из-за возросшей плотности транспортного потока, расстройств деформационных швов, неудовлетворительного состояния проезжей части мостового сооружения, психоэмоциональных особенностей поведения водителей в этот момент и ряда других причин. Исследования показывают, что режим движения с переменной скоростью составляет до 75 % всего ездового цикла. При этом значительно увеличиваются амплитуды вертикальных колебаний подрессориваемой части и подвески и угловых колебаний при галопировании

автомобиля, что в свою очередь увеличивает количество «клевков» и пробоев рессор на кузов, отрывов шин от проезжей части с возможностью потери устойчивости.

Появление в потоке обращающихся автомобилей транспортных средств повышенной грузоподъемности требует исследования особенностей поведения балочных систем при их динамическом воздействии даже при равномерном движении, а особенно при разгоне и торможении. Колебания при переходных режимах движения автомобиля приближены к реальным условиям эксплуатации и наиболее опасны с точки зрения возникновения повышенных перемещений от сверхнормативного динамического воздействия на пролетные строения автодорожных мостов, особенно в момент экстренного торможения. Несмотря на наличие достаточно разработанной, особенно с участием сотрудников Воронежского ГАСУ, теории динамического расчета автодорожных мостов, до настоящего времени не выполнялись системные исследования колебаний упругих систем при неравномерном движении автомобилей. Настоящая работа посвящена изучению колебаний балочных систем при таких режимах движения автомобиля с точки зрения возникновения сверхнормативного динамического воздействия на несущие конструкции транспортных сооружений.

В [1-5] авторами была разработана методика расчета динамического давления на путь большегрузных транспортных средств при изменении режима движения. Исследовано и оценено динамическое воздействие автомобилей на пролетные строения мостов при переходных режимах движения, при движении по гладкому пути и с учетом кинематического возмущения. Усовершенствована плоская динамическая модель автомобиля для изучения переходных режимов с целью определения сверхнормативных нагрузок на пролетные строения автодорожных мостов. Решение задачи получено прямым интегрированием системы дифференциальных уравнений колебаний автомобиля. Разработана вычислительная программа.

Постановка задачи и методика моделирования. Рассмотрим совместные колебания балочной системы и движущегося по ней одиночного автомобиля в режиме торможения или разгона (рис. 1).

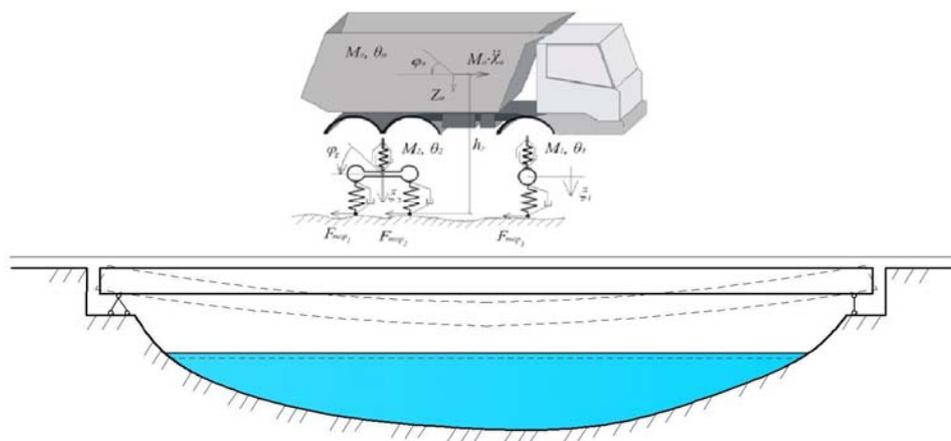


Рис. 1. Расчетная схема колебательной системы «автомобиль

+балочная система» для изучения воздействия переходных режимов движения

Переходными режимами являются режимы, связанные с резким изменением скорости движения. Определяющим параметром неравномерного движения является ускорение. В общем случае скорость автомобиля может меняться линейно, синусоидально или по любому другому более сложному закону. Наиболее распространенным является движение с постоян-

ным во времени ускорением, то есть равноускоренное (разгон) или равнозамедленное (торможение) движение.

Для моделирования воздействия транспортных средств при переходных режимах движения использована плоская нелинейная динамическая модель трехосного автомобиля с пятью степенями свободы. Уравнения ее колебаний получены из пространственной модели отбрасыванием уравнений, соответствующих поперечным кренам подрессоренной части и осей. В уравнении галопирования из общей системы дифференциальных уравнений движения автомобиля при изменении скорости дополнительно учитываются горизонтальные силы инерции, и оно принимает вид

$$\theta_a \ddot{\varphi}_a + F_1 a_T(t) - b_T(t) F_2 = M_a \cdot h_y(t) \cdot \ddot{\chi}(t); \quad (1)$$

где M_a, θ_a - масса и момент инерции подрессоренной части автомобиля; F_1, F_2 - усилия в рессорах; $a_T(t), b_T(t), h_y(t)$ - геометрические величины, определяющие положение центра тяжести подрессоренной части; $\varphi_a, \chi(t)$ - обобщенная координата, определяющая угол поворота подрессоренной части относительно поперечной оси, и ускорение при торможении или разгоне соответственно.

Ограничимся на этом этапе исследования задачей в плоской постановке, полагая выявить основные особенности динамического поведения балочной системы при воздействии автомобиля на путь при движении в режиме торможения. Разработанная методика и алгоритм в дальнейшем позволят без значительных изменений изучить поведение балочной системы при режиме разгона и движения с переменной скоростью, а также решить задачу в пространственной постановке.

В качестве расчетной схемы балочной системы принята шарнирно опертая балка длиной ℓ_σ , которая часто используется как расчетная схема балочного пролетного строения моста. Поведение такой балки описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных:

$$m_\sigma \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \left(1 + k_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) EJ_z \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = \sum_{k=1}^3 R_k \cdot \delta(x - \chi_k), \quad (2)$$

где m_σ, E, J_z - параметры пролетного строения; k_0 - коэффициент внутреннего трения, вычисляемый в соответствии с модернизированной гипотезой Фойгта с поправкой Бока;

$\sum_{k=1}^3 R_k \cdot \delta(x - \chi_k)$ - динамическое давление осей трехосного автомобиля.

Уравнение в частных производных не может быть непосредственно использовано для динамических расчетов. Предварительно выполним преобразование этого уравнения с целью приведения его к виду, удобному для применения ЭВМ. Для этого используем алгоритм Бубнова – Галеркина, в котором в качестве базисных используем собственные функции изолированно шарнирно опертого стержня. Исходное дифференциальное уравнение изгибных колебаний в вертикальной плоскости, используя представление перемещения произвольного сечения пролетного строения с координатой x в виде разложения

$$y(x,t) = \sum_{v=1}^{N_\sigma} f_v(t) \cdot Y_v(x), \quad (3)$$

где $f_v(t)$ - независимые функции времени; N_σ - число удерживаемых в разложении собственных изгибных колебаний; $Y_v(x)$ - собственные функции,

приведем к совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $f_v(t)$:

$$\ddot{f}_v(t) + k_0 \omega_v^2 \dot{f}_v(t) + \omega_v^2 f_v = \frac{1}{m_0 A_v} \cdot \sum_{k=1}^n R_k(t) Y_v(\chi_k), \quad (v=1, 2, \dots, N_0), \quad (4)$$

где $A_v = \int_0^{l_0} m_0 Y_v^2 dx$ - нормирующий множитель v -й собственной изгибной формы шарнирно опертой балки.

Отметим, что предлагаемая схема преобразований уравнений движения является достаточно универсальной и приводит к однотипным уравнениям, легко реализуемым на ЭВМ.

Для эффективного учета динамических качеств подсистем применен способ раздельного интегрирования по подсистемам во временной области.

Построен алгоритм и создана вычислительная программа для ЭВМ. Для исследования решения задачи и анализа полученных результатов использован пакет моделирования динамических и событийно управляемых систем Simulink системы MATLAB, версия 7.8.0.347 (R2009a). Пакет Simulink был разработан специально для исследования поведения динамических систем. Решение системы дифференциальных уравнений колебаний трехосного автомобиля при торможении и разгоне и совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат получено в численном виде методом Рунге-Кутты 4-5 порядков.

Численные исследования. Выполнена серия вычислительных экспериментов с целью исследования колебаний балочной системы в зависимости от величины ускорения и разгона автомобиля, динамического давления колес на путь. Выявлены основные закономерности поведения балочной системы при переходных режимах движения подвижной нагрузки. Получены динамические коэффициенты прогибов середины балочной системы при различных параметрах движения. Для выполнения моделирования использованы геометрические параметры и инерционные характеристики трехосной автоцистерны 66052 на базе КамАЗ.

Характеристики пролетного строения приняты следующими:

$l_0 = 42,5$ м; $EJ_z = 97609500$ кНм²; $m_0 = 8,044$ т/м; $k_0 = 3,24 \cdot 10^{-4}$ с; $\omega_1 = 19,03$ с⁻¹. При определении перемещений балочной системы удерживалось от 1 до 6 собственных форм колебаний. Комплекс проведенных расчетов при всех рассмотренных параметрах переходных режимов движения показал, что для определения прогибов балки достаточно удерживать одну низшую собственной формы колебаний для однопролетной шарнирно опертой балки (рис. 2).

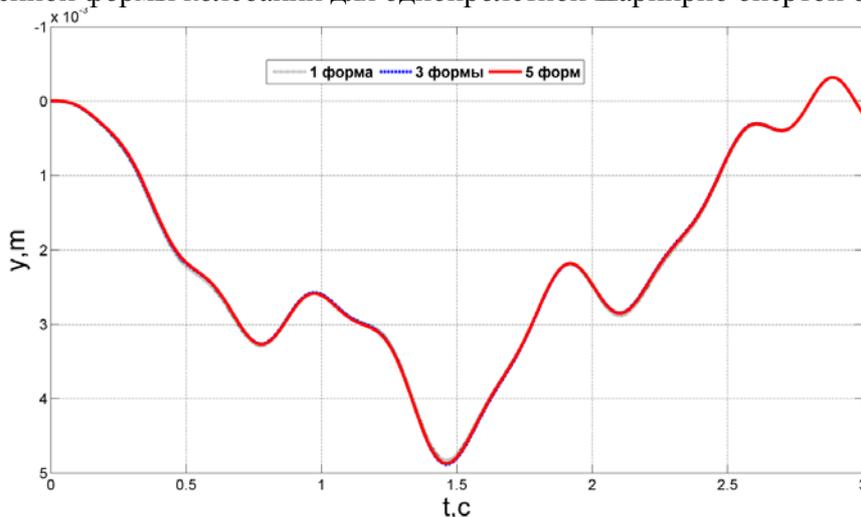


Рис. 2. График прогибов середины пролета при торможении с ускорением 6 м/с² в начале пролета при разном числе удерживаемых форм

В ходе вычислительного эксперимента была установлена незначительность влияния обратной связи на величины и характер изменения динамических давлений осей во всех исследуемых диапазонах ускорений и участках начала торможения или разгона (рис. 3).

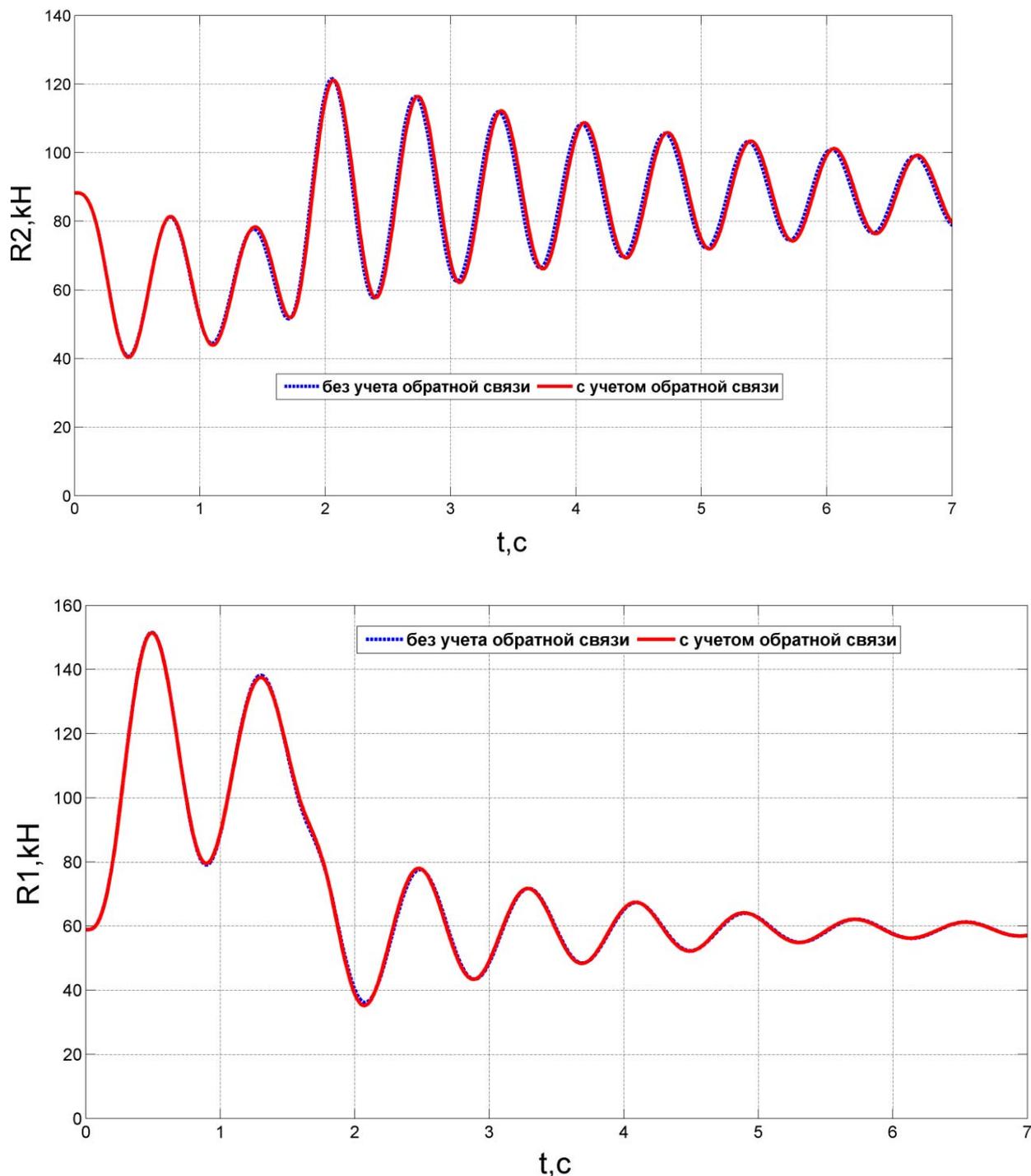
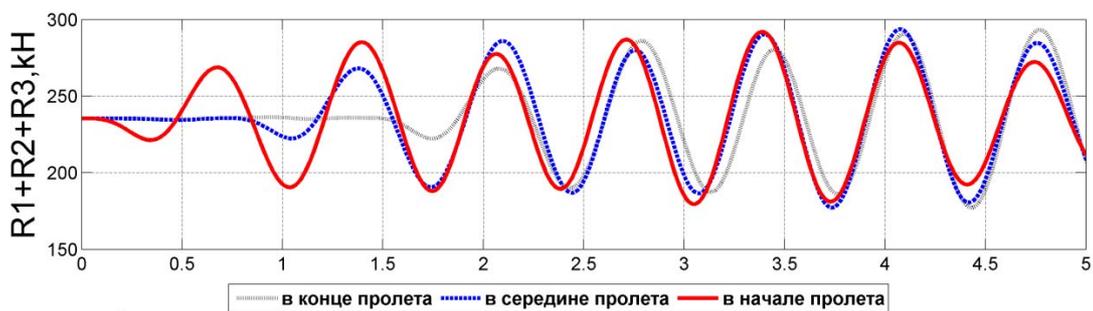


Рис. 3. Графики динамических давлений на путь первой и второй осей при торможении с ускорением 6 м/с^2 с учетом влияния обратной связи и без нее

Результаты расчетов показали, что наиболее опасным с точки зрения сверхнормативных нагрузок на пролетные строения является режим торможения в пределах первой поло-

вины пролета (рис. 4, а). Это вызвано тем, что суммарное динамическое давление от всех осей автомобиля в этом случае достигает максимума ближе к центральному (расчетному) сечению, вызывая наибольшие прогибы и усилия в конструкциях (рис. 4, б).

а)



б)

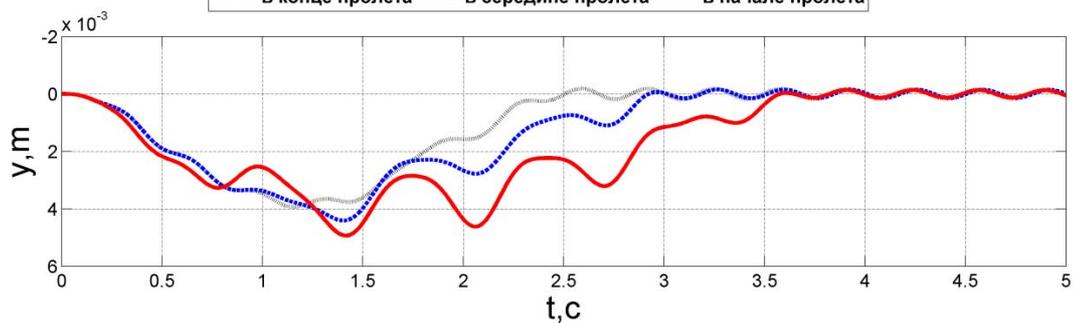


Рис. 4. Графики: а) суммарного динамического давления от всех осей автомобиля в зависимости от положения начала торможения;
б) прогибов середины пролета в зависимости от положения начала торможения

На рис. 5 показаны графики динамических прогибов середины пролета в зависимости от положения начала торможения автомобиля.

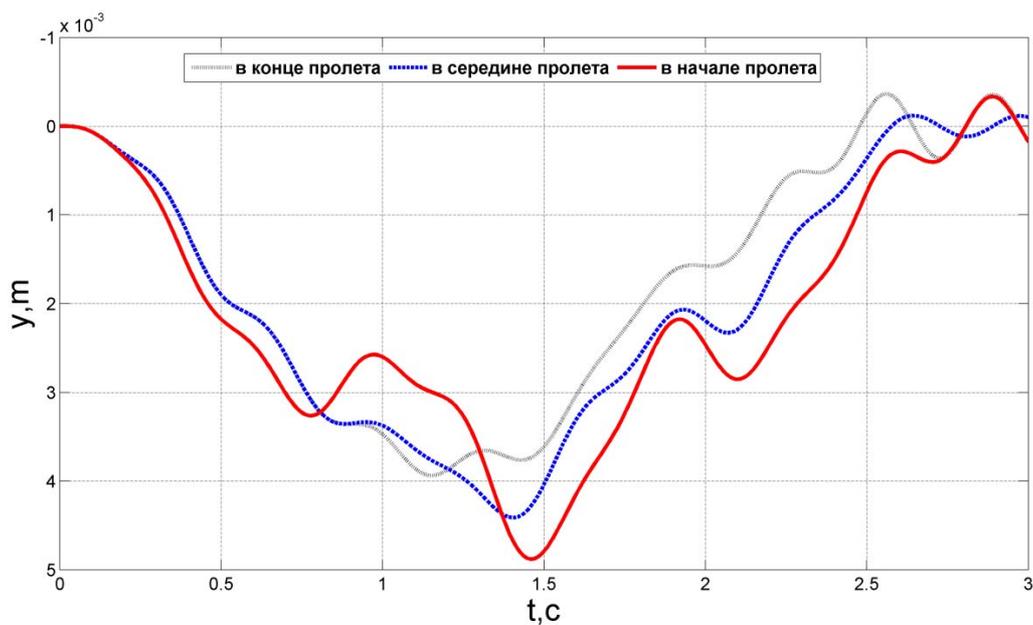


Рис. 5. Графики прогибов середины пролета при торможении с ускорением 6 м/с^2 в зависимости от положения начала торможения

На рис. 6 показаны графики динамических прогибов середины пролета при торможении с различными ускорениями в пределах начала пролета.

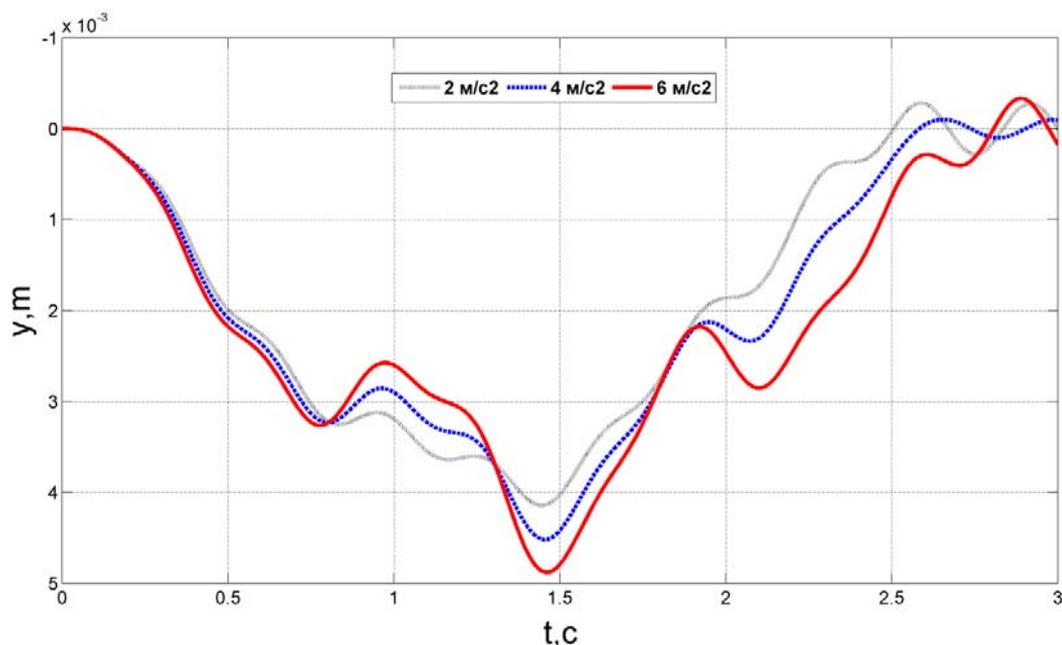


Рис. 6. Графики прогибов середины пролета при торможении с различными ускорениями в пределах начала пролета

Выводы

Анализ результатов численных исследований выявил следующие качественные зависимости:

- при любом фиксированном ускорении прогибы достигают своих максимальных значений при торможении в начале и реже в середине пролета;
- величина динамического коэффициента практически не зависит от начальной скорости торможения и определяется величиной ускорения;
- при исследовании колебаний пролетного строения при переходных режимах движения и отсутствии кинематического возмущения, как и при равномерном движении, достаточно удерживать одну низшую форму собственных колебаний;
- прогибы пролетного строения практически не влияют на величины динамических давлений осей, поэтому “обратной связью” можно пренебречь;
- в рассматриваемом случае максимальные динамические коэффициенты были получены при торможении в начале пролета с ускорением 6 м/с² и составили: по отношению к статическому значению – 1,26; по отношению к движению с постоянной скоростью 20 м/с – 1,24.

Заключение. Переходные режимы движения автомобиля приближены к реальным условиям эксплуатации и наиболее опасны с точки зрения сверхнормативного динамического воздействия на пролетные строения автодорожных мостов. Предложенная методика позволяет исследовать совместные колебания системы мост-автомобиль в плоской постановке при движении одиночных автомобилей повышенной грузоподъемности по пролетному строению с изменяющейся во времени скоростью и с учетом неровностей проезжей части. Анализ результатов указывает на необходимость выделения переходных режимов движения в особый класс воздействия подвижных нагрузок. Динамическое поведение транспортных сооружений при таких воздействиях значительно отличается от их поведения при движении автомобилей с постоянной скоростью и требует специального изучения. Наиболее опасными являются экстремальные случаи переходных режимов движения, таких как экстренное торможение или авария на дороге.

Библиографический список

1. Гриднев, С.Ю. Методика расчета динамического давления большегрузных транспортных средств при изменении режима движения/ С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений.– Воронеж : Научная книга, 2007. – Вып. №4. - С.79-86.
2. Гриднев, С.Ю. Моделирование переходных режимов движения большегрузных транспортных средств / С. Ю. Гриднев, А. Н. Будковой // Современные проблемы механики и прикладной математики : сб. тр. междунар. shk.-сем. – Воронеж : [б. и.], 2007. – С. 86-96.
3. Гриднев, С.Ю. Оценка уровня динамического давления большегрузных транспортных средств при разгоне и торможении на пролетные строения автодорожных мостов/ С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии : сб. мат. VIII междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии». – Тула, 2007. – С. 16-18.
4. Гриднев, С.Ю. Исследование динамического воздействия автотранспортных средств на пролетные строения мостов при переходных режимах движения/ С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. междунар. конф. – Воронеж, 2008. - Ч. №1. – С. 128-135
5. Гриднев, С.Ю. Оценка динамического воздействия автомобиля на путь при торможении и разгоне с учетом кинематического возмущения/ С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Известия Казанского гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и архитектура. – Вып. № 3 (23), 2012. – С. 98-106.

References

1. Gridnev, S.Yu. Method of calculating the dynamic pressure of heavy vehicles when changing modes of motion / S.Yu. Gridnev, A.N Budkova // Modern methods of static and dynamic analysis of structures and buildings. - Voronezh Academic Book, 2007. - Issue. Number 4. - P. 79-86.
2. Gridnev, S.Y. Modelling of the movement of heavy vehicles / S.Yu Gridnev, A.N. Budkova // Modern problems of mechanics and applied mathematics: Fri. tr. Intern. sch-sem. - Voronezh [b. and.], 2007. - P. 86-96.
3. Gridnev, S.Y. Evaluation of the dynamic pressure of heavy vehicles during acceleration and braking on a road bridge superstructures / S.Yu. Gridnev, A.N. Budkova // Actual problems of building and construction industry: Fri. mat. VIII Intern. scientific and engineering. Conf. "Actual problems of building and construction industry." - Tula: [b. and.], 2007. - P. 16-18.
4. Gridnev, S.Y. study of the dynamic effects of vehicles on the bridge spans during transient driving conditions / S. Yu. Gridnev, A.N. Budkova // Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics: Fri. tr. Intern. Conf. - Voronezh [b. and.], 2008. - Part number 1. - P. 128-135
5. Gridnev, S.Y. Evaluation of dynamic influence on the way the car under braking and acceleration, taking into account the kinematic perturbations / S.Yu. Gridnev, A.N. Budkova // Proceedings of the Kazan State Architectural University. Construction and Architecture. - Issue. Number 3 (23), 2012. -. P. 98-106.

Ключевые слова: динамическая модель автомобиля, торможение и разгон, воздействие на путь, балочная система, совместные колебания, алгоритм расчета, колебания сечений, динамические коэффициенты.

Keywords: dynamic model of the vehicle, braking and acceleration, the impact on the way beam system, the joint fluctuations, design algorithm, fluctuations in the cross sections, the dynamic coefficients

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.04+624.6

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики*

В.С. Сафронов

Аспирант кафедры строительной механики

А.В. Антипов

Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)237-97-36;

e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru

*Voronezh State University of Architecture and
Civil Engineering*

*Dr. of Tech. Science, Professor of Department
of Structural Mechanics*

V.S. Safronov

*Postgraduate of Department of Structural
Mechanics*

A.V. Antipov

Russia, Voronezh, tel. 8(473)237-97-36;

e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru

В.С. Сафронов, А.В. Антипов

СОВРЕМЕННЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ БАЛОЧНЫХ БЕЗДИАФРАГМЕННЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

Рассматриваются две конечно-элементные модели балочного разрезного бездиафрагменного железобетонного пролетного строения автодорожных мостов. В первой схеме пролетное строение рассматривается как система перекрестных стержней, в которой продольные стержни моделируют балки пролетного строения, а поперечные стержни – плиту проезжей части. Во второй схеме пролетное строение рассматривается как пластинчато-стержневая система, в которой продольные стержни моделируют балки пролетного строения, а пластинчатые элементы – плиту проезжей части между балками. Дается сопоставление рассчитанных по описанным расчетным схемам поверхностей влияния усилий в несущих балках

V.S. Safronov, AV. Antipov

MORDERN FINITE – ELEMENT MODELS OF BAR AUTO ROAD SPANS WITHOUT CUT-OFF WALLS

Two finite-element models of bar open without cut-off walls reinforced auto road bridge span is under consideration. In the first scheme the span is analyzed as a system of cross bars, in which longitudinal bars are analyzed as a slab of bridge floor. In the second scheme a bridge span is analyzed as sheet – bar system, in which longitudinal bars simulate bridge span bars, but sheet members simulate a slab of bridge floor between bars. The comparison of designed surfaces of stress influence in supporting bars according to design models is given.

С 2012 года Росавтодором в целях повышения эффективности системы управления состоянием искусственных сооружений на федеральной дорожной сети общего пользования взамен устаревшей программы МОНСТР вводится разработанная в Новосибирске автоматизированная система управления и обработки информации по искусственным дорожным сооружениям (АБДМ). В соответствии с ней по результатам периодической диагностики фактического технического состояния сооружений предусматривается подробный расчет их грузоподъемности на основе положений нормативного документа ОДН 218.0.032-2003 [1] с учетом обнаруженных при диагностике дефектов и повреждений несущих конструкций. Кроме того, в составе расчетных параметров транспортного сооружения для каждого представленного в программе АБДМ объекта должен быть рассчитан набор поверхностей влияния

© Сафронов В.С., Антипов А.В., 2013

наиболее важных параметров, которые можно использовать при оценке возможности пропуска по сооружению современных большегрузных транспортных средств. Эта задача может быть эффективно решена только с использованием современных вычислительных конечно-элементных комплексов и обоснованных расчетных моделей.

В настоящей статье сравниваются два варианта расчетных схем для балочных разрезных железобетонных пролетных строений, которые отличаются по применяемым типам конечных элементов при моделировании напряженно-деформированного состояния.

Пролетное строение представляет собой пространственную конструкцию. Ввиду значительной сложности учета действительных условий работы пролетного строения как пространственной конструкции получили широкое распространение приближенные методы учета распределения нагрузки между главными балками, например, с помощью коэффициентов поперечной установки временной нагрузки.

В настоящее время в связи с появлением и активным использованием различных многофункциональных программных комплексов на базе метода конечных элементов (МКЭ) для расчета и проектирования строительных конструкций возникла необходимость в разработке расчетных схем, отражающих действительное напряженно-деформированное состояние под нагрузкой. В частности, для указанных целей разработаны представленные в работе [2] методики и реализованные в программном комплексе SERIAL [3] вычислительные алгоритмы. Однако для решения новых задач требуется совершенствование расчетных схем, которые могли бы быть реализованы с помощью широко распространенных в расчетной практике сертифицированных программных комплексов.

В настоящей статье на примере балочного бездиафрагменного пролетного строения приведен анализ результатов расчета по двум расчетным схемам. В первой схеме пролетное строение рассматривается как система перекрестных стержней, в которой продольные стержни моделируют балки пролетного строения, а поперечные стержни – плиту проезжей части. Во второй схеме пролетное строение рассматривается как пластинчато-стержневая система, в которой продольные стержни моделируют балки пролетного строения, а пластинчатые элементы – плиту проезжей части между балками.

Расчеты выполнялись с использованием сертифицированного программного комплекса «ЛИРА-САПР 2012 PRO» со специализированной расчетно-графической системой ПК «ЛИРА-САПР 2012 Мост» [4, 5].

В качестве объекта исследования выбрано пролетное строение без диафрагм длиной 18 м типовой конструкции по серии 3.503-14 вып. 5 инв. №710/5, Союздорпроект, 1974г. [6], состоящее из семи тавровых балок высотой 1,05 м, расположенных с шагом 1,66 м (рис. 1). Плита сборных балок имеет толщину 0,15 м. Поперечное объединение балок осуществлено по продольным швам омоноличивания в уровне плиты проезжей части.

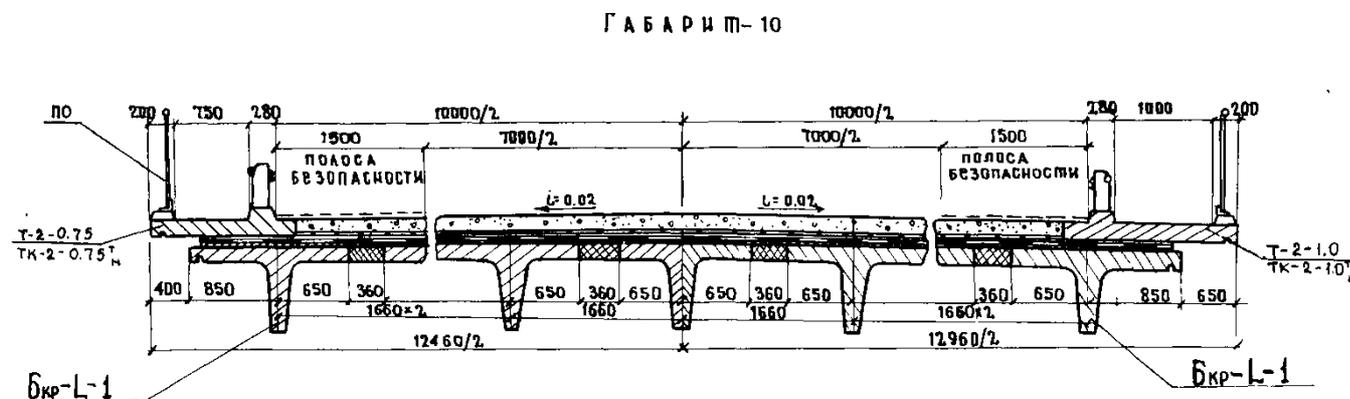


Рис. 1. Поперечный разрез рассчитываемого пролетного строения

При построении конечно-элементных моделей плитно-балочная конструкция рассчитываемого пролетного строения (рис. 2, а) условно разделялась продольными сечениями на отдельные элементы по середине пролетов плиты (рис. 2, б). Для удобства вычисления геометрических характеристик тавровых балок закругленные вуты приведены к треугольной форме (рис. 2, в).

При моделировании несущих элементов рассчитываемого пролетного строения использовались следующие типы конечных элементов (КЭ):

- универсальный стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций (КЭ 10);
- универсальный четырехугольный плоский оболочечный КЭ (КЭ 44).

Универсальный стержневой КЭ представляет собой прямолинейный двухузловой элемент с 12-ю степенями свободы (СС), моделирующий растяжение-сжатие, кручение, поперечный сдвиг и изгиб.

Плоский четырехугольный оболочечный КЭ с 24-ю СС является комбинацией конечных элементов плоского (мембранного) и изгибного напряженных состояний. Этот элемент воспринимает мембранные, сдвиговые, поперечные и изгибные нагрузки.

Поскольку в узлах стержневого и плоского оболочечного КЭ одинаковый набор СС, то возможно их совместное использование в одной КЭ-модели.

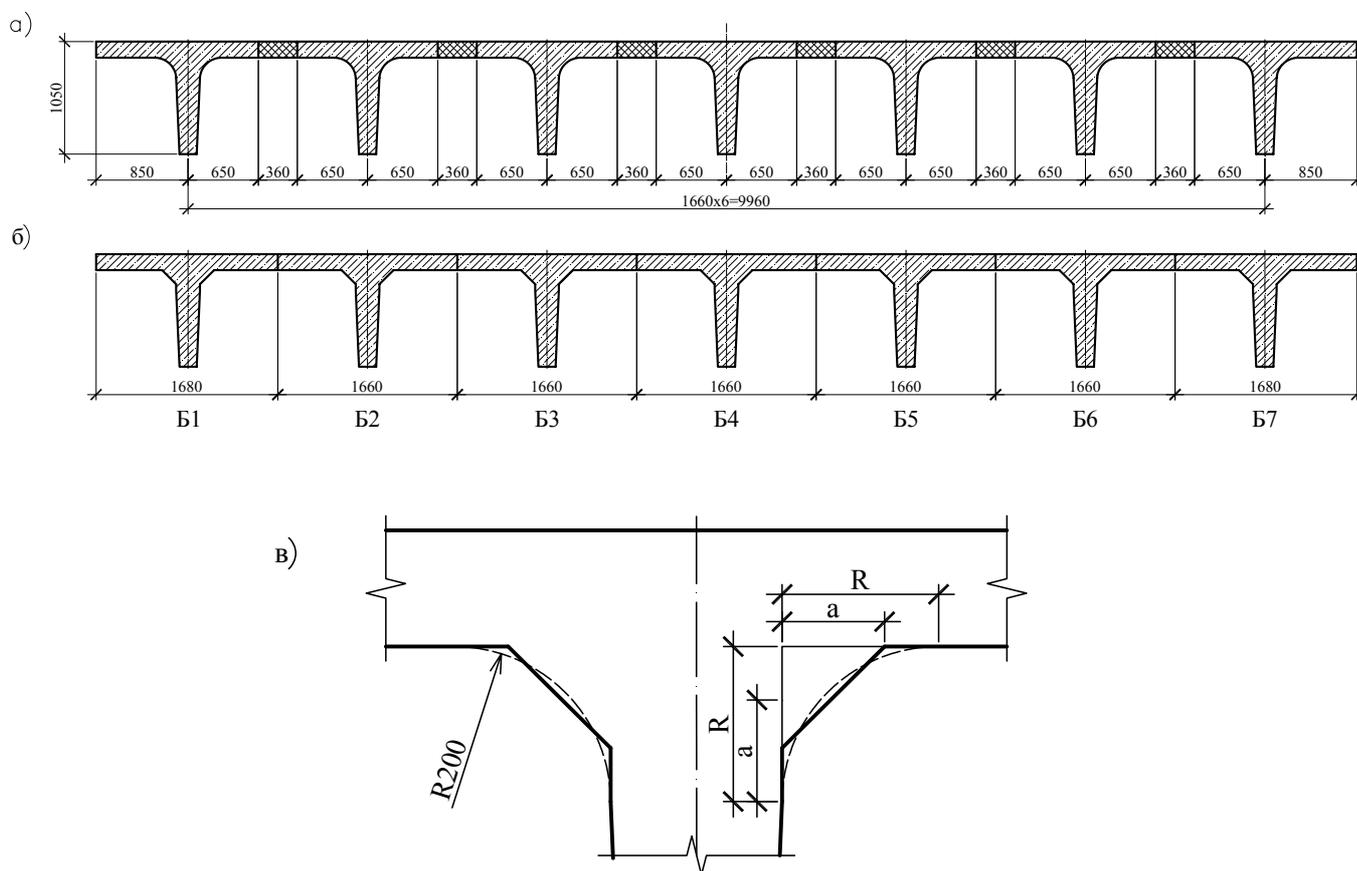


Рис. 2. Фактическое (а) и приведенное для расчетов (б) поперечное сечение пролетного строения

На рис. 3 показана схема дискретизации на конечные элементы рассчитываемого пролетного строения поперек пролета. Дискретизация вдоль пролета осуществлялась с шагом $17,4/20=0,87$ м.

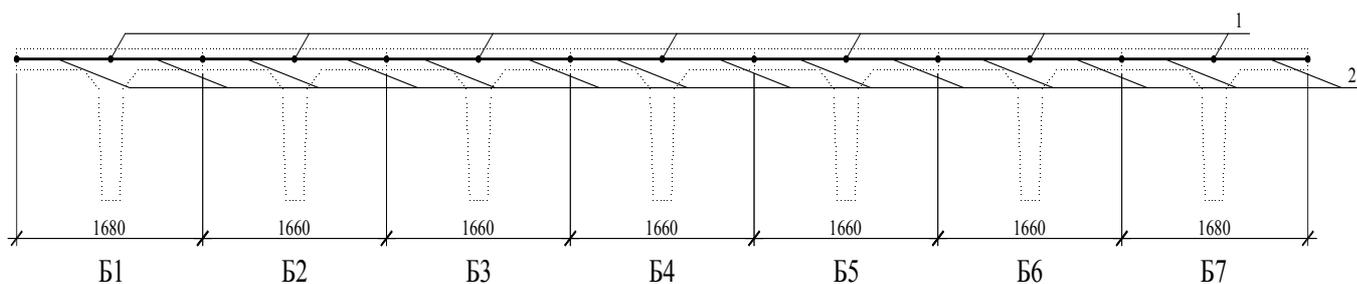


Рис. 3. Схема дискретизации на конечные элементы рассчитываемого пролетного строения

На рис. 3 введены следующие условные обозначения: 1 – узлы стержневых КЭ, моделирующих тавровые балки; 2 – стержневые или пластинчатые КЭ, моделирующие плиту проезжей части.

При аппроксимации плиты проезжей части между балками стержневыми КЭ приближенно учитывается изгиб плиты в поперечном направлении. Однако не учитывается действительная работа плиты на кручение.

При аппроксимации плиты проезжей части между балками пластинчатыми КЭ наиболее полно учитывается работа плиты проезжей части на изгиб в поперечном направлении и на кручение.

Рассматриваемые КЭ-модели пролетного строения ориентированы на вычисление внутренних усилий в главных балках пролетных строений. В этих моделях КЭ плиты проезжей части лишь связывают балки между собой в единую пространственную конструкцию и распределяют внешние силы между балками.

Граничные условия в обоих КЭ-моделях соответствуют шарнирно-подвижному опиранию балок пролетного строения.

Особенность разработанных для расчетов КЭ-моделей заключается в том, что изгибная жесткость стержневых элементов балок задается для полного сечения с учетом полок, а остальные жесткостные характеристики соответствуют поперечному сечению ребра балки. В пластинчато-стержневой расчетной схеме для исключения работы плоских оболочечных КЭ плиты проезжей части на изгиб в продольном направлении жесткостные характеристики плиты задаются как для ортотропного материала с малой по величине жесткостью в продольном направлении.

Расчет жесткостных характеристик балок выполнялся с использованием расчетно-графической системы «Конструктор сечений» комплекса «ЛИРА». Эта программа предоставляет возможность компоновать в графической среде сечение сложной формы. Геометрические характеристики вычисляются численным интегрированием после выполнения процедуры триангуляции.

На рис. 4 представлены результаты триангуляции области поперечного сечения расчетной балки пролетного строения и определенные по программе эллипс инерции и ядро сечения.

В табл. 1, 2 представлены вычисленные для балок рассчитываемого пролетного строения характеристики поперечных сечений.

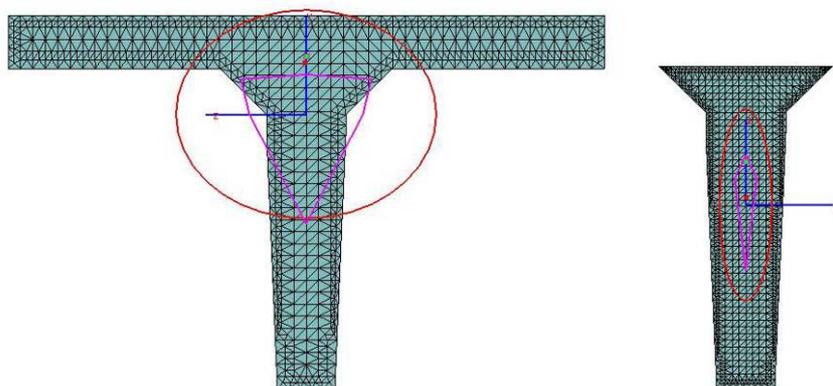


Рис. 4. Триангуляция поперечного сечения балки пролетного строения

Таблица 1

Характеристики сечения ребра балок

Наименование	Обозначение	Значение	Ед. изм.
Площадь	F	1937,65	см ²
Главный момент инерции относительно оси y	I_y	100322	см ⁴
Момент инерции на кручение	I_t	218117	см ⁴
Сдвиговая площадь относительно оси z	F_z	1105,91	см ²
Сдвиговая площадь относительно оси y	F_y	1528,95	см ²
Осевая жесткость	EF	5,81296e+006	кН
Изгибная жесткость относительно оси y	EI_y	30096,5	кН·м ²
Жесткость на кручение	GI_t	27264,6	кН·м ²
Сдвиговая жесткость относительно оси z	GF_z	1,38239e+006	кН
Сдвиговая жесткость относительно оси y	GF_y	1,91119e+006	кН

Примечание: центральная ось z направлена из вертикальной плоскости ребра балки.

Таблица 2

Характеристики приведенных сечений тавровых балок на вертикальный изгиб

Наименование	Обозначение	Значение	Ед. изм.
Средняя тавровая балка с расчетной шириной полки b=166 см			
Главный момент инерции относительно оси z	I_z	3,80557e+006	см ⁴
Изгибная жесткость относительно оси z	EI_z	1,14167e+006	кН·м ²
Крайняя тавровая балка с расчетной шириной полки b=168 см			
Главный момент инерции относительно оси z	I_z	3,81851e+006	см ⁴
Изгибная жесткость относительно оси z	EI_z	1,14555e+006	кН·м ²

В КЭ-модели рассчитываемого пролетного строения модуль упругости и коэффициент Пуассона для пластинчатых КЭ плиты проезжей части с учетом известного соотношения для ортотропного материала $\mu_{xy}E_y = \mu_{yx}E_x$ задавались следующими: $E_x = 30000$ МПа, $E_y = 100$ кПа, $\mu_{xy} = 6,7 \cdot 10^{-7}$, $\mu_{yx} = 0,2$, $G = 12500$ МПа.

Для определения неблагоприятных положений подвижной нагрузки и соответствующих им экстремальных компонентов напряженно-деформированного состояния в расчетно-графической системе ПК «ЛИРА-САПР 2012 Мост» используется аппарат линий и поверхностей влияния.

Поверхность влияния усилия в сечении расчетного элемента конструкции строится от единичного сосредоточенного груза, занимающего произвольное положение на сооружении. Графически поверхность влияния может быть представлена в виде функции, построенной в декартовой системе координат XYZ , где X и Y определяют положение единичной нагрузки в пространстве, а Z – значение искомого фактора от единичной подвижной нагрузки. В расчете пролетного строения ширина поверхности влияния принята равной расстоянию между крайними балками. На рис. 5 показана поверхность влияния изгибающего момента в сечении по середине пролета балки Б4, полученная по расчетной схеме в виде пластинчато-стержневой системы. Аналогичный вид имеет соответствующая поверхность влияния, полученная по перекрестной стержневой схеме.

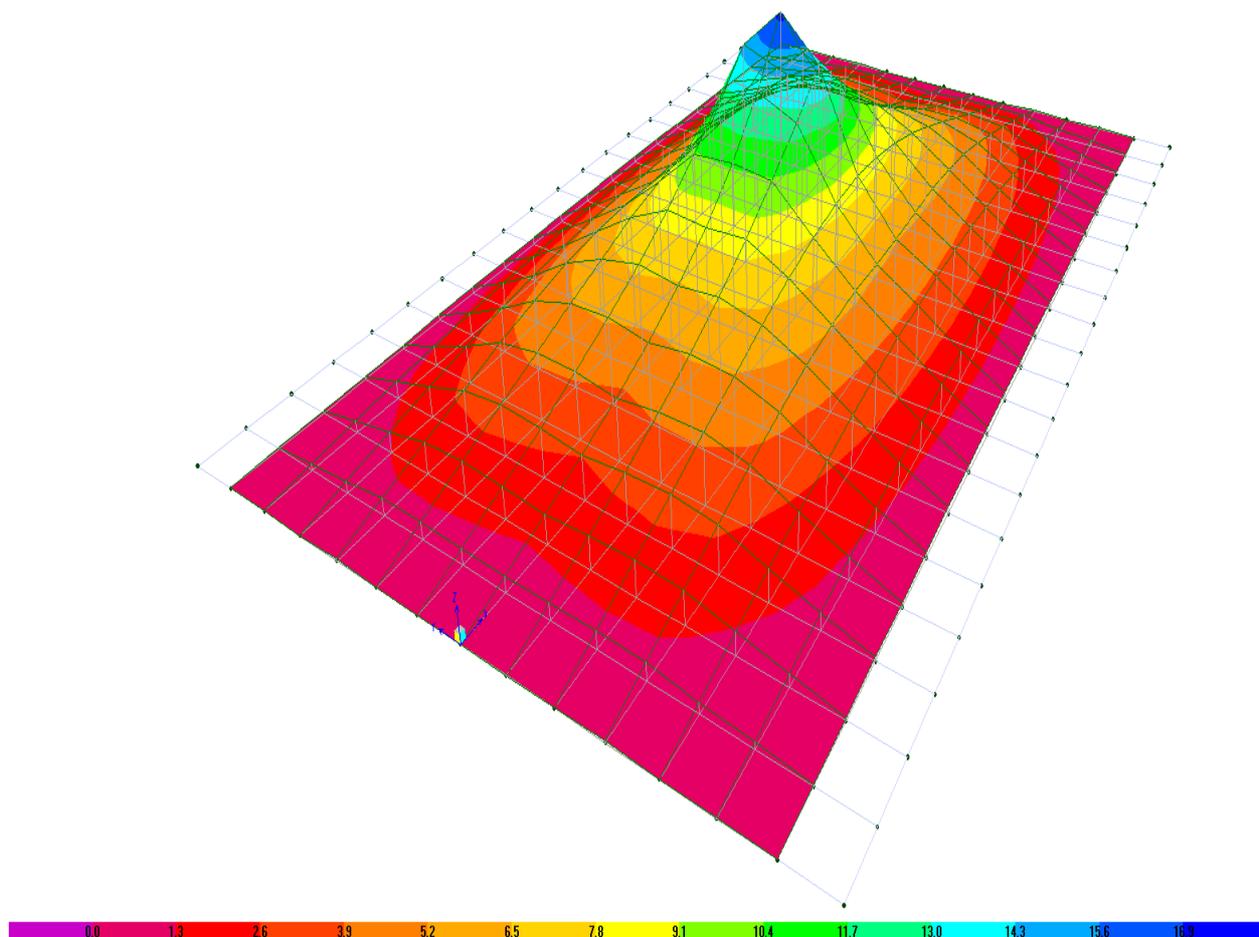


Рис. 5. Поверхность влияния изгибающего момента в середине пролета балки Б4, м⁻¹

Рассчитываемое пролетное строение балочное разрезное с шарнирным опиранием балок. В табл. 3 представлены выделенные из полученных расчетных массивов поверхности влияния

изгибающего момента в среднем сечении балок значения ординат для узлов, расположенных по середине пролета. Сумма моментов в балках пролетного строения равна моменту, получаемому расчетом по плоской схеме (табл. 3).

Поверхности влияния трудно поддаются визуальному анализу. Поэтому на рис. 6 показаны построенные по данным табл. 3 поперечные сечения расчетных поверхностей влияния.

Таблица 3

Координаты узлов поверхности влияния		Ординаты поверхности влияния изгибающего момента для балок пролетного строения							Сумма ординат
		Б1	Б2	Б3	Б4	Б5	Б6	Б7	
Расчетная схема в виде системы перекрестных стержней									
0,00	8,7	2,970	1,157	0,365	0,035	-0,067	-0,068	-0,043	4,35
0,83	8,7	1,976	1,728	0,536	0,198	0,014	-0,045	-0,057	4,35
1,66	8,7	1,150	1,893	0,876	0,382	0,122	-0,006	-0,067	4,35
2,49	8,7	0,571	1,540	1,520	0,531	0,235	0,032	-0,080	4,35
3,32	8,7	0,368	0,872	1,786	0,867	0,401	0,121	-0,065	4,35
4,15	8,7	0,129	0,510	1,509	1,510	0,531	0,214	-0,053	4,35
4,98	8,7	0,038	0,380	0,867	1,781	0,867	0,380	0,038	4,35
5,81	8,7	-0,053	0,214	0,531	1,510	1,509	0,510	0,129	4,35
6,64	8,7	-0,065	0,121	0,401	0,867	1,786	0,872	0,368	4,35
7,47	8,7	-0,080	0,032	0,235	0,531	1,520	1,540	0,571	4,35
8,30	8,7	-0,067	-0,006	0,122	0,382	0,876	1,893	1,150	4,35
9,13	8,7	-0,057	-0,045	0,014	0,198	0,536	1,728	1,976	4,35
9,96	8,7	-0,043	-0,068	-0,067	0,035	0,365	1,157	2,970	4,35
Расчетная схема в виде пластинчато-стержневой системы									
0,00	8,7	2,919	1,169	0,380	0,048	-0,058	-0,064	-0,044	4,35
0,83	8,7	1,984	1,698	0,549	0,200	0,018	-0,043	-0,056	4,35
1,66	8,7	1,158	1,879	0,874	0,383	0,124	-0,004	-0,064	4,35
2,49	8,7	0,594	1,525	1,503	0,537	0,232	0,034	-0,073	4,35
3,32	8,7	0,384	0,869	1,771	0,861	0,399	0,122	-0,056	4,35
4,15	8,7	0,145	0,516	1,491	1,490	0,536	0,212	-0,040	4,35
4,98	8,7	0,052	0,379	0,861	1,765	0,861	0,379	0,052	4,35
5,81	8,7	-0,040	0,212	0,536	1,490	1,491	0,516	0,145	4,35
6,64	8,7	-0,056	0,122	0,399	0,861	1,771	0,869	0,384	4,35
7,47	8,7	-0,073	0,034	0,232	0,537	1,503	1,525	0,594	4,35
8,30	8,7	-0,064	-0,004	0,124	0,383	0,874	1,879	1,158	4,35
9,13	8,7	-0,056	-0,043	0,018	0,200	0,549	1,698	1,984	4,35
9,96	8,7	-0,044	-0,064	-0,058	0,048	0,380	1,169	2,919	4,35

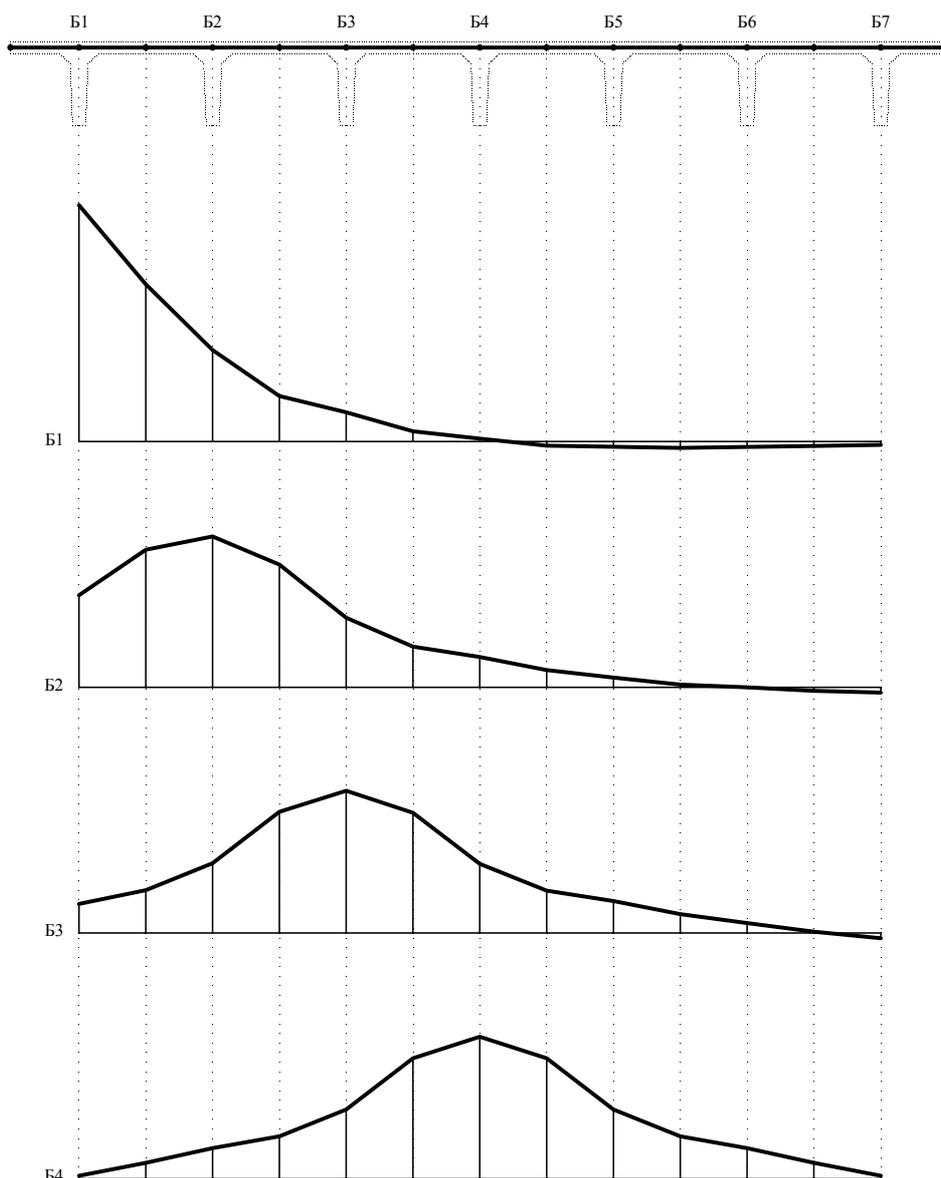


Рис. 6. Поперечные сечения поверхностей влияния изгибающего момента в середине пролета балок пролетного строения

Сопоставление ординат поверхностей влияния изгибающего момента в среднем сечении балок рассчитываемого пролетного строения приводит к выводу, что рассматриваемые КЭ-модели дают близкие между собой результаты, причем ординаты, полученные по пластинчато-стержневой схеме, меньше ординат, полученных по перекрестно-стержневой схеме. Это ожидаемый результат вследствие учета кручения плиты проезжей части в пластинчато-стержневой КЭ-модели пролетного строения.

Расчетный программный комплекс автоматически загружает поверхности влияния подвижной нагрузкой, определяя экстремальные значения компонентов напряженно-деформированного состояния несущих элементов пролетного строения.

На примере загрузки поверхностей влияния рассчитываемого пролетного строения одиночной нормативной нагрузкой НК-80 (рис. 7) и последовательного выбора критического положения нагрузки были получены максимальные значения изгибающего момента в балках пролетного строения. В табл. 4 приведены результаты расчетов.

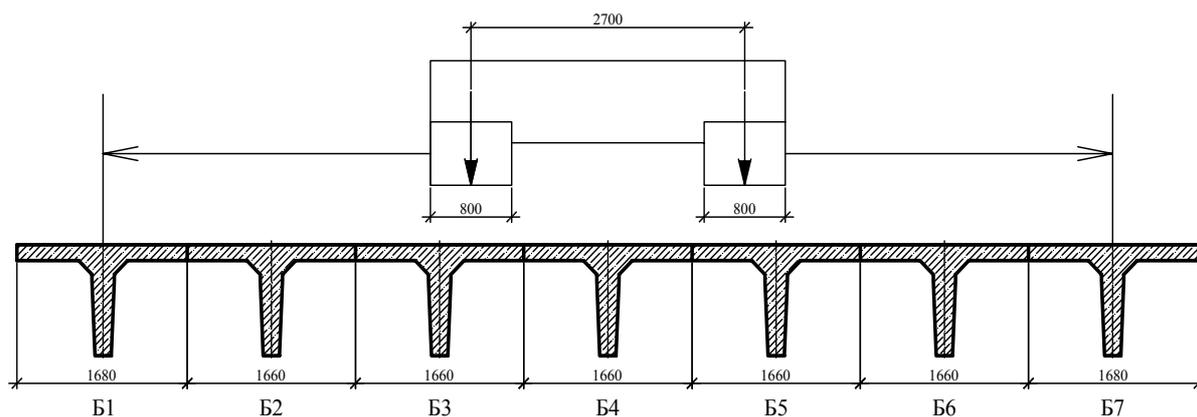


Рис. 7. Загрузка пролетного строения нормативной подвижной нагрузкой НК-80 в пределах ширины построенных поверхностей влияния изгибающего момента

Таблица 4

Номер балки	Максимальные изгибающие моменты (кНм) в среднем сечении балок для модели в виде	
	системы перекрестных стержней	пластинчато-стержневой системы
Б1	1160,6	1148,6
Б2	875,9	876,4
Б3	769,0	763,0
Б4	765,1	758,1
Б5	769,0	763,0
Б6	875,9	876,4
Б7	1160,6	1148,6

Выводы

1. Расчетная схема балочного ростверка, в котором пролетное строение железобетонных мостов рассматривается как система перекрещивающихся балок, давно известна и многими авторами рекомендуется для выполнения пространственных расчетов пролетного строения на временную нагрузку.
2. Предложена эквивалентная пластинчато-стержневая схема балочного бездиафрагменного пролетного строения, которая полнее учитывает совместное сопротивление действующим нагрузкам плиты проезжей части с главными балками.
3. Анализ поверхностей влияния усилий в балках показал, что внешняя вертикальная нагрузка распределяется между балками рассчитываемого пролетного строения как в плоской балочной конструкции с шарнирным закреплением концов, что соответствует статической схеме пролетного строения.
4. Предложенная пластинчато-стержневая конечно-элементная расчетная схема балочного пролетного строения с учетом жесткости плиты проезжей части адекватно распределяет временную нагрузку между балками и может использоваться для определения расчетных усилий от постоянных и временных подвижных нагрузок при анализе НДС пролетных строений транспортных сооружений.

Библиографический список

1. ОДН 218.0.032-2003. Временное руководство по определению грузоподъемности искусственных сооружений на автомобильных дорогах.
2. Сафронов, В.С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных балочных мостов, имеющих дефекты и повреждения / В.С. Сафронов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня // Известия вузов. Строительство. – 1996. - № 6. – С. 103-109.
3. Петранин, А.А. Программа SERIAL – MGBD2. Свидетельство о госрегистрации программы для ЭВМ. Серия Б № 0157-98.10.RUS. Госком РФ по связи и информатике / А.А. Петранин, Е.Н. Петреня // Межотр. НИИ “Интеграл”. - М., 1998.
4. Городецкий, А.С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А.С. Городецкий, В.И. Заворицкий, А.И. Лантух-Лященко, А.О. Рассказов. - М.: Транспорт, 1981.–143 с.
5. Серия 3.503-14. Сборные железобетонные пролетные строения для автодорожных мостов. Вып. 5. Пролетные строения без диафрагм длиной 12, 15 и 18 м, армированные арматурой классов А-II и А-III. Инв. №710/5.-М.: ГПИ Союздорпроект, 1974. –50 с.
6. ЛИРА-САПР 2012 PRO. Программа для расчета, исследований и проектирования конструкций различного назначения. ID: 758923367 (2D3C4067h).

References

1. ODN 218.0.032 -2003. Temporary regulation of determination of carrying capacity of artificial structure on auto roads.
2. Safronov, V.S. Super elemental calculation in mixed placement of reinforced bar bridges having defects and damages/ V.S Safonov, A.A Peranin., E.N Petrenya//Institute news. Building, 1996, № 6.
3. Petranin A.A., Program SERIAL-MGBD 2. Certificate of sate registration for computer program. Series B №0157-98.10.RUS. Goscom of RF on informatics. Mezhothr. Research institute “Integral”,Perenya E.M. – M., 1998.
4. Gorodetski, A.S. Method of finite element in transport structure design/ A.S. Gorodetski, I.V. Zavoritski, A.I. Lantuh-Layschenko, A.O. Rasskazov.- M.: Transport, 1981 - P. 143.
5. Series 3.503-14. Precast reinforced spans for auto road bridges. Issue 5. Spans without cut-off with length of 12,15, and 18m, reinforced with reinforcement of A-II, A-III classes. Inv. № 710/5. - M.: GPI Soyuzdorproect, 1974. – 50 p.
6. LIRA –SAPR 2012 PRO. Program for calculation, research and design of different functions structure, ID: 758923367 (2D3c4067h).

Ключевые слова: разрезные железобетонные пролетные строения, конечно-элементная расчетная схема, стержневая модель, пластинчато-стержневая модель, поверхность влияния изгибающего момента.

Keywords: skew reinforced spans, finite-elemental calculation scheme, bar model, plate – bar model, surface of bending moment effect.

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики
Д.М. Шапиро
Аспирант кафедры строительной механики
А.П. Тютин
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail: davshap@mail.ru*

*Voronezh State University of Architecture
and Civil Engineering
Dr. of Sc. Tech., Professor of Department of
Structural Mechanics
D.M. Shapiro
Postgraduate of Department of Structural
Mechanics A.P. Tyutin
Russia, Voronezh, ph. 8(473)271-52-30
e-mail: davshap@mail.ru*

Д.М. Шапиро, А.П. Тютин

НЕЛИНЕЙНЫЙ ДЕФОРМАЦИОННЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РАСЧЁТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОЛЁТНЫХ СТРОЕНИЙ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

Содержится описание нелинейного деформационного пространственного расчёта железобетонных пролётных строений, состоящего из двух связанных между собой алгоритмов: деформационного расчёта железобетонных балок с любым (обычным, предварительно напряжённым, смешанным) армированием; пространственного расчёта пролётных строений средствами МКЭ.

Итерационная процедура нелинейного расчёта выполняется по методу «переменной жёсткости» с одновременным приложением постоянной и пошаговым приложением временной нагрузки.

D.M. Shapiro, A.P. Tyutin

NONLINEAR DEFORMATIVE DIMENSIONAL DESIGN OF REINFORCED AUTO ROAD SPANS

The description of nonlinear deformative dimensional design of reinforced auto road bridge spans consisting of two connected with each other algorithms: deformative design of reinforced bars with any (ordinary, post-tensioned, or mixed) reinforcement; dimensional design of spans by the means of finite element method.

iterative procedure of nonlinear design is implemented by the method of “variable rigidity” with simultaneous application of fixed load and step-by-step application of superimposed load.

В новом нормативно-методическом документе СП 35.13330-2011 [1] при выполнении расчётов железобетонных конструкций мостовых сооружений допускается применение деформационной модели в соответствии с положениями сводов правил СП 52-101-2003 и СП 52-102-2004 [2, 3]. Как показывают исследования, проводимые на кафедре строительной механики Воронежского ГАСУ [4, 5 и др.], использование деформационной модели железобетонных балок позволяет повысить несущую способность (грузоподъёмность) по моменту, определяемую по пространственному расчёту пролётных строений как плитно-ребристой системы.

Настоящая статья является продолжением ранее выполненных научных работ [4, 5 и др.]. В ней содержится описание нового алгоритма и программного обеспечения, реализующих теоретически строгое и универсальное решение рассматриваемой научно-технической задачи.

Нелинейный деформационный пространственный расчёт железобетонных пролётных строений состоит из двух связанных между собой алгоритмов [5]:

-деформационного расчёта, описывающего развитие напряжённо-деформированного состояния балок таврового и двутаврового сечений (рис. 1) с любым (обычным, предварительно напряжённым, смешанным) армированием;

-пространственного расчёта пролётных строений, выполняемого средствами МКЭ с одновременным приложением постоянной нагрузки и поэтапным (пошаговым) приложением временной нагрузки.

Результаты расчётов позволяют выполнить комплекс проверок по предельным состояниям 1 и 2-й групп согласно [1, 2, 3].

Теоретической основой полученных решений и разработанных алгоритмов являются следующие положения:

-кинематические условия гипотезы плоских сечений;

-допущение о растяжении бетона без сопротивления в расчётах по прочности;

-трёхлинейная диаграмма состояния бетона при сжатии и (в расчётах по образованию трещин) при растяжении, билинейная (трёхлинейная) диаграмма состояния обычной (высокопрочной) арматуры в соответствии с диаграммами и описанием [5], взятым из сводов правил [2, 3].

Задача о распределении напряжений и деформаций в сечении изгибаемых железобетонных балок решается как обратная. В качестве независимого переменного принимается относительная деформация $\varepsilon_{b,z=x}$ сжатой грани сечения (рис. 1), где x – высота сжатой зоны бетона, z – координата, отсчитываемая от нейтральной оси, с положительным направлением в сторону сжатой грани сечения. В соответствии с гипотезой плоских сечений распределение относительных деформаций в бетоне сжатой зоны, в растянутой и сжатой арматуре принимается линейным: $\{\varepsilon_b \ \varepsilon_{bt} \ \varepsilon_s \ \varepsilon_{sc}\} = (\varepsilon_{b,z=x}/x) \times \{z \ z \ x-h_0-a_p+a_s \ x-a'_s\}$, а деформация предварительно напряжённой арматуры определяется по формуле $\varepsilon_p = \sigma_{pn}/E_p + \varepsilon_{b,z=x}(x-h_0)/x$, где σ_{pn} – предварительное напряжение в арматуре с учётом потерь; a_s, a'_s, a_p – расстояния от граней сечения до центров тяжести обычной растянутой, сжатой, предварительно напряжённой арматуры; $h_{0s} = h - a_s, h_0 = h - a_p$ – расчётная высота сечения при обычном и смешанном (предварительно напряжённом) армировании, h – полная высота сечения. В сечениях балок с обычным армированием принимается $a_p = a_s$.

Это позволяет построить (описать аналитически) множество прямых $\varepsilon = f(z)$, для каждой из которых напряжения $\sigma_b, \sigma_{bt}, \sigma_s, \sigma_{sc}, \sigma_p$ определяются (в зависимости от $\varepsilon_b, \varepsilon_{bt}, \varepsilon_s, \varepsilon_{sc}, \varepsilon_p$) в соответствии с упомянутыми диаграммами [5].

В изгибаемых балках со смешанным армированием (и частными случаями обычного и предварительно напряжённого армирования) из множества прямых $\varepsilon = f(z)$ действительной (расчётной) является та, для которой выполняется следующее условие равновесия:

$$F = F_b + F_s + F_{sc} + F_p + F_{bt} = 0. \quad (1)$$

В этом уравнении $F_b, F_{bt}, F_s, F_{sc}, F_p$ – равнодействующие напряжений в сжатой и растянутой зонах бетона, в обычной растянутой, сжатой и предварительно напряжённой арматуре, определяемые по формулам:

$$F_b = \int \sigma_b dA_b, \quad F_s = \sigma_s A_s, \quad F_{sc} = \sigma_{sc} A'_s, \quad F_p = \sigma_p A_p, \quad F_{bt} = \int \sigma_{bt} dA_{bt}, \quad (2)$$

где A_b, dA_b (A_{bt}, dA_{bt}) – площадь бетона сжатой (растянутой) части сечения и её элементарный фрагмент, A_s, A_p, A'_s – площади сечения растянутой (обычной и предварительно напряжённой) и сжатой арматуры.

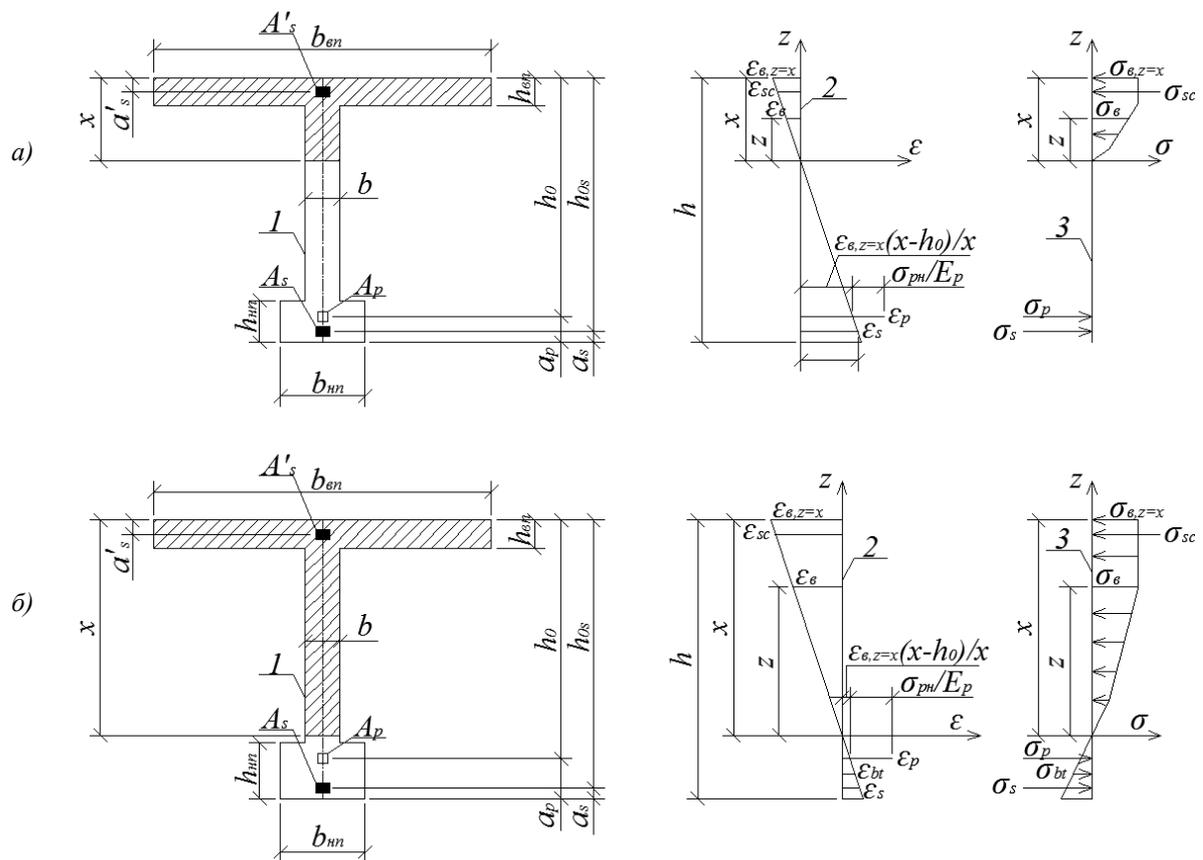


Рис. 1. Схемы к деформационному расчёту по прочности (а) и образованию трещин (б) изгибаемых железобетонных балок со смешанным армированием:
 1 – поперечное сечение балки; 2 – эпюры распределения деформаций по высоте сечения балки;
 3 – эпюры распределения напряжений по высоте сечения балки

В уравнении (1) последнее слагаемое (F_{bt}) учитывается только в расчётах по образованию трещин и не учитывается в расчётах по прочности. Из слагаемых F_s , F_{sc} , F_p учитываются те, которые соответствуют арматуре, имеющейся в сечении.

В соответствии с условием (1) моменты M внутренних сил, соответствующие каждому значению $\epsilon_{b,z=x}$, высоте сжатой зоны x , распределению относительных деформаций ϵ_b , ϵ_s , ϵ_p , ϵ_{sc} , ϵ_{bt} , напряжений σ_b , σ_s , σ_p , σ_{sc} , σ_{bt} , определяются по следующей формуле:

$$M = \Sigma \int [(\sigma_b / (h_0 - x + z)) dA] + \sigma_{sc} / A'_s (h_0 - a'_s) + \sigma_s A_s (a_p - a_s) + \Sigma \int \sigma_{bt} (h_0 - x - z / l) dA = \Sigma \int [(\sigma_b / z) dA] + \sigma_{sc} / A'_s (x - a'_s) + \sigma_s A_s (h_0 - x + a_p - a_s) + \sigma_p A_p (h_0 - x) + \Sigma \int \sigma_{bt} / z dA. \quad (3)$$

Знак «интеграла» (\int) в уравнении (3) означает суммирование элементарных долей геометрических характеристик в пределах частей сечения: верхней, нижней полки и стенки; знак «суммы» (Σ) означает суммирование в пределах высоты x сжатой зоны.

На основании взаимосвязанных значений $\epsilon_{b,z=x}$, x определяются приведенные геометрические характеристики сечения: площадь A_{red} и статический момент $S_{red,0-0}$ относительно нейтральной оси, момент инерции I_{red} . В общем случае (в сечениях с арматурой A_s , A'_s , A_p) центр тяжести сечения смещён относительно нейтральной оси в сторону сжатой грани на величину

$$t = S_{red,0-0} / A_{red}, \quad (4)$$

$$A_{red} = \Sigma \int [(\sigma_b / \epsilon_b E_b) dA] + (\sigma_{sc} / \epsilon_{sc} E_s) n_1 A'_s + (\sigma_s / \epsilon_s E_s) n_1 A_s + (\sigma_p / \epsilon_p E_p) n_2 A_p + \Sigma \int [(\sigma_{bt} / \epsilon_{bt} E_b) dA], \quad (5)$$

$$S_{red,0-0}=\Sigma[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)z dA]+(\sigma_{sc}/\varepsilon_{sc} E_s)(x-a'_s)n_1 A'_s - (\sigma_s/\varepsilon_s E_s)(h_0-x+a_p-a_s)n_1 A_s - (\sigma_p/\varepsilon_p E_p)(h_0-x)n_2 A_p - \Sigma[(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt} E_b)/z/dA], \quad (6)$$

$$I_{red}=\Sigma[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)(z-t)^2 dA]+(\sigma_{sc}/\varepsilon_{sc} E_s)n_1 A'_s (x-t-a'_s)^2 + (\sigma_s/\varepsilon_s E_s)n_1 A_s (h_0-x+a_p-a_s+t)^2 + (\sigma_p/\varepsilon_p E_p)(h_0-x+t)^2 n_2 A_p + \Sigma[(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt} E_b)/(z+t)^2 dA], \quad (7)$$

где E_b – начальный модуль деформации бетона, $n_1=E_s/E_b$, $n_2=E_p/E_b$ – отношения модулей деформации обычной (E_s), предварительно напряжённой (E_p) арматуры и бетона. В сечениях с обычным армированием $t=0$.

В сечениях предварительно напряжённых (в том числе со смешанным армированием) балок действуют расчётный момент $M=M_{\text{вн}}$, от внешних сил, равный полному моменту внутренних сил по формуле (3), и внецентренное сжатие (сила F_n и момент M_n относительно центра тяжести сечения) от натяжения арматуры:

$$F_n = \varepsilon_{b,z=x}(t/x)E_b A_{red}, \quad M_n = F_n(h_0-x+t). \quad (8)$$

Алгебраическая сумма моментов M_Σ в сечении предварительно напряжённой балки определяется по следующей формуле

$$M_\Sigma = M_{\text{вн}}, -/M_n/ = M_{\text{вн}}, -/\varepsilon_{b,z=x}(t/x)E_b A_{red}(h_0-x+t)/. \quad (9)$$

Момент M_Σ , момент инерции I_{red} и кривизна $1/\rho$ балки с предварительно напряжённой арматурой (и смешанным армированием) находятся в соотношении $M_\Sigma = (1/\rho)E_b I_{red}$.

Изложенные выше положения, в том числе формулы, определяющие приведенные геометрические характеристики сечений, сохраняют своё значение и вид при других (любых) диаграммах связи между деформациями и напряжениями при сжатии и растяжении бетона и арматуры.

Представленный алгоритм реализован в программе «Деформационный расчёт железобетонной балки со смешанным армированием», разработанной в математической среде *MathCAD*. Перебор значений x производится с шагом 1 мм, что обеспечивает высокую точность результатов. В результате работы программы определяются следующие параметры сечений балок пролётногo строения (плитно-ребристой системы):

-таблицы (диаграммы) геометрических характеристик A_{red} , I_{red} в зависимости от моментов внешних сил;

-таблицы (диаграммы) зависимостей жёсткостных характеристик $E_b A_{red} = f_1(M)$, $E_b I_{red} = f_2(M)$ и кривизн $1/\rho = f_3(M)$ от момента внешних сил (примеры таких диаграмм показаны на рис. 2);

-предельные моменты по прочности сечений, определяемые по условию достижения предельных относительных деформаций в напрягаемой или обычной арматуре ($\varepsilon_{p2}=0,015$; $\varepsilon_{s2}=0,025$); предельные моменты по образованию трещин, определяемые по условию достижения предельных относительных деформаций в растянутом бетоне ($\varepsilon_{bt2}=0,00015$).

Продолжение нелинейного пространственного расчёта пролётногo строения переходит к программе «Расчёт плитно-ребристой системы», которая решает свою задачу во взаимодействии с одним из сертифицированных программных комплексов, реализующих МКЭ: *LIRA*, *SCAD* и др.

Входная информация включает следующие группы исходных данных:

- описание схемы и конструкций пролётногo строения;
- готовые таблицы (диаграммы) зависимостей $E A_{red} = f_1(M)$, $E I_{red} = f_2(M)$, $1/\rho = f_3(M)$;
- описание постоянных (вес пролётногo строения и мостового полотна) и временных (АК, НК [1]) нагрузок.

Работа программы состоит из следующих процедур:

- представление расчётной схемы пролётного строения, постоянных и временных нагрузок в форме, пригодной для расчёта МКЭ;
- определение (на каждом шаге нагрузки и ступени итерации) и подготовка жёсткостных характеристик EI_{red} и кривизн $1/\rho$ сечений всех балок, соответствующих текущим значениям моментов;
- выполнение пошаговой итерационной процедуры нелинейного расчёта по способу, описываемому ниже.

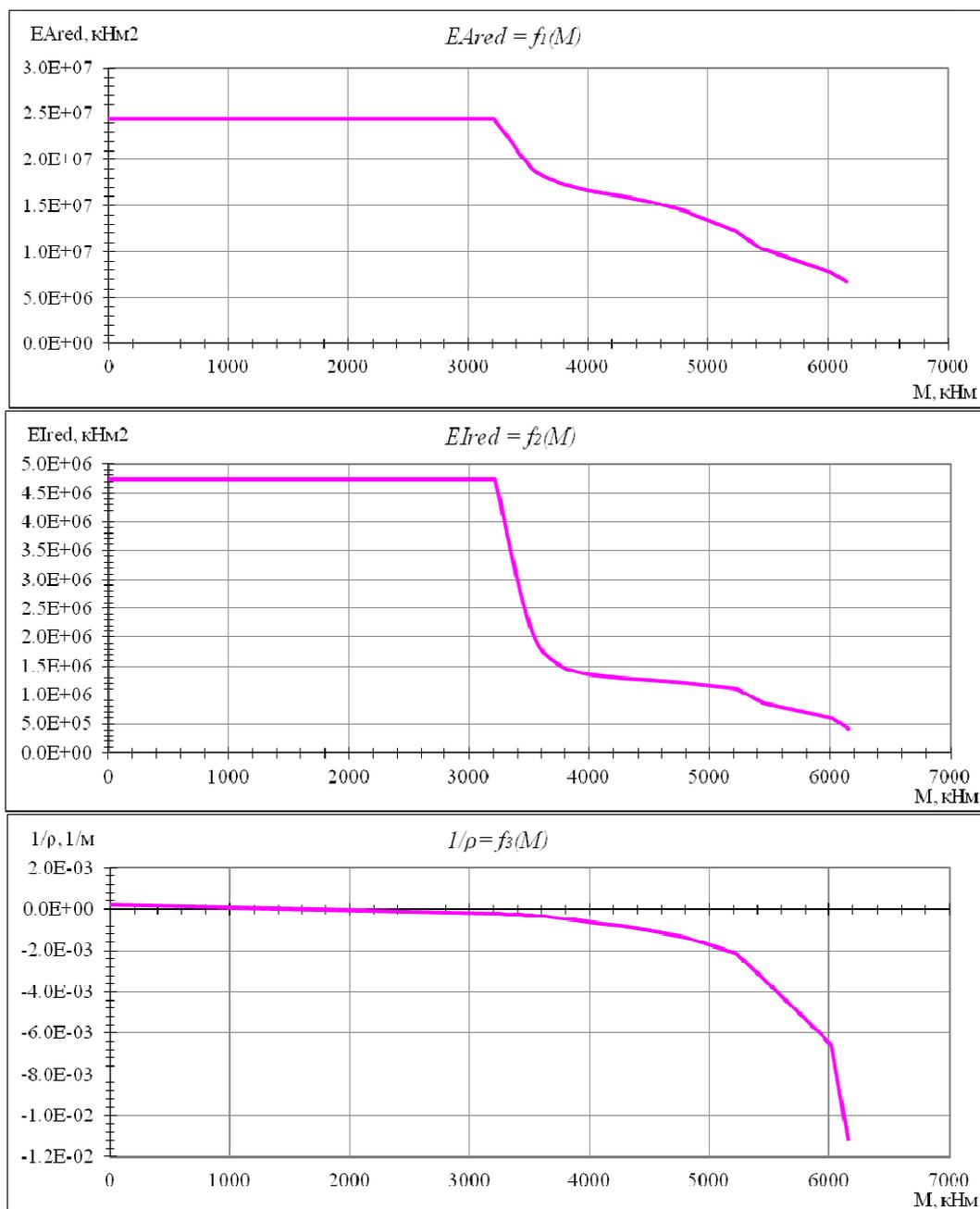


Рис. 2. Диаграммы $E_b A_{red} = f_1(M)$, $E_b I_{red} = f_2(M)$, $1/\rho = f_3(M)$ для предварительно напряжённой балки двутаврового сечения со смешанным армированием длиной 28 м

При выполнении расчёта используется расчётная схема МКЭ в виде плитно-стержневой системы на рис. 3 [4, 5], состоящая из следующих конечных элементов (КЭ):

- прямоугольных плитных КЭ с тремя степенями свободы в узле, моделирующих плиту;

- стержневых КЭ с шестью степенями свободы в узле, моделирующих отрезки балки с переменной жёсткостью, меняющейся в процессе расчёта.

На каждом шаге нагрузки и ступени итерации информация для выполнения пространственного расчёта МКЭ вводится вручную.

Итерационная процедура нелинейного расчёта выполняется с одновременным приложением постоянной и поэтапным (пошаговым) приложением временной нагрузки по методу «переменной жёсткости» [6].

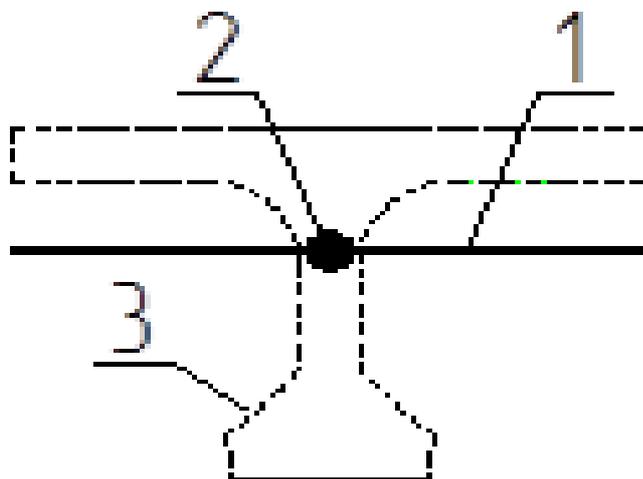


Рис. 3. Плитно-стержневая расчётная схема балки:
1 – КЭ плиты, 2 – стержневой КЭ, моделирующий балку,
3 – контур балки пролётного строения

На каждом (i -м) шаге приложения нагрузки выполняются следующие действия:

- принимаются начальные (полученные на предыдущем ($i-1$)-м шаге нагрузки) значения изгибающего момента M_{i-1} и изгибной жёсткости EI_{red} для каждого КЭ;
- к расчётной схеме пролётного строения прикладывается нагрузка очередного (i -го) шага (например, А1 или Н1);
- выполняется расчёт МКЭ, выводятся полные значения изгибающих моментов M в каждом КЭ после i -го шага нагрузки;
- -при помощи зависимости $EI_{red} = f_2(M)$ определяются жёсткости EI_{red} в каждом КЭ;
- -в расчётной схеме пролётного строения корректируются значения EI_{red} ;
- производится повторный расчёт на нагрузку i -го шага, результаты которого складываются с M_{i-1} .

Итерация на очередном шаге нагрузки заканчивается после того, как жёсткости EI_{red} перестанут меняться; этим достигается строгое соответствие между распределением моментов и жёсткостей (EI_{red}) в системе. После этого делается вывод о достижении пролётным строением предельного состояния по принятому критерию или возможности увеличения нагрузки.

После завершения расчёта выполняется построение диаграмм $EI_{red} = f_4(AK)$, $EI_{red} = f_5(AK)$, $M = f_6(AK)$, $1/\rho = f_7(M)$.

Библиографический список

1. Свод правил по проектированию и строительству. Мосты и трубы. СП 35-13330-2011 (Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*) / ОАО «ППП». - М. – 2011.–340 с.
2. Свод правил по проектированию и строительству. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. СП 52-101-2003/ ФГУП ЦПП. – М. – 2004. – 53с.
3. Свод правил по проектированию и строительству. Предварительно напряжённые железобетонные конструкции. СП 52-102-2004/ ФГУП ЦПП. – М. – 2005.
4. Шапиро, Д.М. Пространственный нелинейный деформационный расчёт пролётных строений автодорожных мостов/ Д.М. Шапиро, А.В. Агарков, Чан Тхи Тхюи Ван // Науч. вестник ВГАСУ. Серия «Строительство и архитектура». – Воронеж, 2008. – Вып. 2. – С. 29–37.
5. Шапиро, Д.М. Деформационный нелинейный расчёт изгибаемых железобетонных балок в составе плитно-ребристых систем/ Д.М. Шапиро, А.П. Тютин // Бетон и железобетон. 2011. - №6. – С. 19–23.
6. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике/ О. Зенкевич. – М.: Мир. 1975.– 375 с.

References

1. Design and building Instruction. Bridges and building. Instruction 35-133300-2011(Actual reduction Building norms and regulations 2.05.03 – 84*) / ОАО “PPP”. – М., 2011. – 340 p.
2. Design and building Instruction. Concrete and reinforced structures witjout prestressed reinforcement. Regulations 52-101-2003/ FGUP ZPP. – М. – 2004. – 53p.
3. Design and building Instruction. Prestressed reinforcement structures. Regulations 52-102- 2004/ FGUP ZPP. – 2005.
4. Shapiro, D.M. Dimentional nonlinear deformative design of auto road spans/D.M Shapiro, A.V. Agarkov, Thain Thi Thyun Van//Buliten of VGASU, Series Building and Arechitecture, - Voronezh, 2008. - Issue 2. - P.29-37.
5. Shapiro, D.M., Defoemative nonlinear design of bending reinforced bars inside slab- ribbed system// D.M. Shapiro, A.P. Tyutin// Concrete and reinforced concrete. – 2011. - №6. – P. 19-23.
6. Zenkevich, O. Method of finite elements in engineering/ O. Zenkevich. – М.: Mir, 1975. – 375 P.

Ключевые слова: нелинейный деформационный пространственный расчёт, железобетонные пролётные строения автодорожных мостов.

Keywords: nonlinear deformative design, reinforced auto road spans.

УДК 624,271: 625,745,12 +624,046,5
Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики
В.С. Сафронов
Аспирант кафедры строительной механики
Д.И. Доманов
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473) 263-07-57;
e-mail: vss22@mail.ru

Voronezh State University of Architecture and
Civil Engineering
Dr. of Tech/ Sc., Professor of Department
of Structural Mechanics V.S. Safronov
Postgraduate of Department
of Structural Mechanics D.I. Domanov
Russia, Voronezh, ph. 8 (473) 263-07-57
e-mail: vss22@mail.ru

В.С. Сафронов, Д.И. Доманов

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПАРАМЕТРЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОСЫХ РАЗРЕЗНЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МОСТОВ

Описываются четыре варианта конечно-элементных расчетных схем для определения собственных частот и форм свободных колебаний разрезных плитно-балочных бездиафрагменных пролетных строений мостовых сооружений с косым опиранием на опоры. На примере типовой конструкции пролетного строения автодорожного моста с двумя полосами движения изучается влияние косины на спектр собственных частот и соответствующих им форм. Сопоставляются результаты, полученные с использованием разных расчетных моделей.

V.S. Safronov, D.I. Domanov

DYNAMIC MODELS AND PARAMETERS OF FREE MOTIONS OF INCLINED ISOLATED SPANS OF RAILWAY BRIDGES

Four variants of finite –elemental design schemes for determination of natural frequency and forms of natural vibration of isolated slab-bar without cut-off spans of bridge structure with inclined abutment on the footing. As an example of span typical structure Normal section failure risk distribution in concrete beam spans with nonprestressed reinforcement depending on change of road and span junction angle is under consideration. Spread of strength properties of materials and acting loads is taken into account. Nonlinear deformative computation is used for definition of limit value of moments of deflection. The results of numerical researches based on concrete examples are presented.

Для обоснованной оценки риска разрушения железобетонных пролетных строений с косым опиранием на опоры от землетрясений в сейсмоопасных регионах или при эксплуатации транспортных сооружений на участках автодорог с интенсивным движением необходимо учитывать динамический характер воздействий [1, 2]. Реакция пролетных строений, не имеющих прямоугольной в плане формы, зависит от косины опирания на опоры и существенно отличается от колебаний железобетонных балочных мостов с опорами, перпендикулярными его продольной оси. Особенности напряженно-деформированного состояния подобных конструкций при случайных статических нагружениях изучались нами в работе [3].

При дальнейшем исследовании динамического поведения пролетных строений при воздействии подвижной нагрузки с использованием корреляционной теории случайных процессов необходимо подробное изучение динамических параметров рассматриваемых косых плитно-балочных пролетных строений: спектров частот и соответствующих им собственных форм [4].

В настоящей статье с использованием различных конечно-элементных расчетных схем исследуется влияние косины опирания на спектры собственных частот и форм свободных колебаний разрезных плитно-балочных бездиафрагменных пролетных строений мостовых сооружений.

© Сафронов В.С., Доманов Д.И., 2013

Динамический анализ проводился методом конечных элементов. Приведены результаты анализа пролетных строений габаритом Г11,5+0,75, без диафрагм из железобетонных балок с шагом 1,73 м таврового сечения с ненапрягаемой арматурой длиной 18 м в опалубке балок серии 3.503.1-73, рассчитанные под нагрузки А-14 и Н-14. Было рассмотрено четыре варианта угла косины опирания пролетного строения: 45^0 , 60^0 , 75^0 и 90^0

Рассматривались следующие четыре варианта динамических конечно-элементных расчетных схем разрезных пролетных строений (рис.1):

а) **оболочечно-стержневая модель**: плита описывается КЭ толстой оболочки, ребро моделируется стержневыми КЭ. Для стержней вводится процедура «жёсткой вставки», учитывающая взаимное высотное положение центра тяжести балки и оси плиты;

б) **оболочечная модель**: плита и ребро описываются КЭ оболочки (с жесткими вставками в месте сопряжения плиты и ребра);

в) **комбинированная модель**: ребро балки описывается объёмными КЭ, плита – совместно сопротивляющимися действующим нагрузкам плитными и стержневыми КЭ;

г) **пространственная модель** из объёмных КЭ.

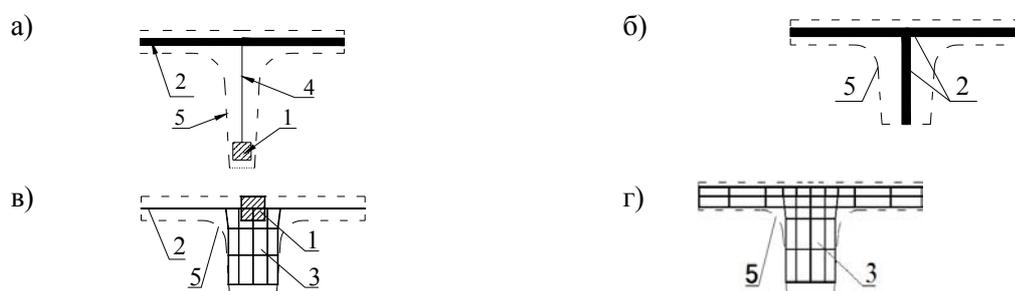


Рис. 1. Варианты расчётных схем (моделей) балок:

а – оболочечно-стержневая; б – оболочечная; в – комбинированная; г – пространственная;

1 – стержневые КЭ; 2 – КЭ толстой оболочки; 3 – объёмные КЭ;

4 – процедура жёсткой вставки;

5 – контуры балок исследуемых пролётных строений типов 1, 2, 3

По результатам выполненных численных исследований было выявлено, что собственные формы и частоты колебаний пролетных строений, полученные в результате расчетов по различным моделям, существенно не различаются. Аксонометрические изображения шести низших собственных формы колебаний на примере оболочечной модели для прямого пролетного строения приведены на рис. 2. Из анализа представленных форм следует отметить следующие особенности:

- низшая собственная форма является симметричной, а следующая – антисимметричной относительно продольной оси мостового сооружения;
- собственные частоты для первых двух собственных форм близки по величине. Их можно считать кратными;
- наблюдается последовательное чередование симметричных и антисимметричных собственных форм.

Численные результаты расчетов частот и собственных форм для различных вариантов конечно-элементных моделей для рассматриваемого пролетного строения прямоугольной формы в плане приведены в табл. 1. Сравнение спектра частот и собственных форм между собой, а также с результатами других исследований [5] показало, что пространственная расчетная схема обладает наибольшей достоверностью результатов, однако результаты по оболочечно-стержневой модели (наиболее простой из рассмотренных) близки к результатам по пространственной расчетной схеме.

Таблица 1

Сравнение динамических параметров для пролетного строения прямоугольной формы в плане, полученных по различным расчетным моделям

Номер собственной формы	Собственные частоты (в Гц) и параметры форм свободных колебаний для конечно-элементной расчетной схемы											
	оболочечно-стержневая			оболочечная			комбинированная			пространственная		
	f	h	v	f	h	v	f	h	v	f	h	v
1	5,01	1	0	5,46	1	0	5,4	1	0	5,45	1	0
2	5,21	1	1	5,5	1	1	5,49	1	1	5,48	1	1
3	6,32	1	2	6,2	1	2	6,57	1	2	6,5	1	2
4	7,94	1	3	7,6	1	3	8,23	1	3	8,13	1	3
5	7,97	2	0	9,97	1	4	8,29	2	0	8,22	2	0
6	9,93	2	1	11,1	2	1	10,8	2	1	10,9	2	1
7	10,7	1	4	12,1	2	0	11,5	1	4	11,5	1	4
8	13,3	2	2	13,4	1	5	13	2	2	12,5	2	2
9	14,2	2	3	13,8	2	1	14,7	2	2	14,5	2	2

Примечание. В таблице введены следующие обозначения:

f – собственная частота;

h – количество полуволн в продольном направлении;

v – количество продольных узловых линий на пролетном строении.

Характерные формы колебания пролетных строений на примере оболочечной модели приведены в аксонометрическом изображении на рис. 2. Цветовая палитра на рисунках соответствует различным значениям вертикальных перемещений плиты. На рисунках также показаны деформации закручивания ребер тавровых балок пролетного строения при колебаниях по соответствующим собственным формам.

В динамических расчетах с использованием описанных выше конечно-элементных расчетных схем варьировались следующие случаи опирания балок пролетного строения на опоры моста:

- а) балки опираются на ригели опор через шарнирно-подвижные недеформируемые устройства на одном конце и через шарнирно-неподвижные жесткие опорные части – на другом;
- б) опорные устройства балок для моделирования резинометаллических опорных частей (РОЧ) принимались упругоподатливыми с жесткостными характеристиками соответствующими распространенным типам РОЧ.

Выявлено, что учет податливости опорных частей не оказывает большого влияния на изменение собственных частот и форм, что объясняется высокими жесткостными характеристиками РОЧ.

Для изучения изменения собственных частот и особенностей деформированного состояния при свободных колебаниях по нижшим шести собственным формам для описанного выше мостового сооружения выполнены численные исследования. Полученные по результатам величины собственных частот f_i в герцах, число полуволн в продольном направлении h и количество узловых линий в продольном направлении в зависимости от косины опирания представлены в табл. 2.

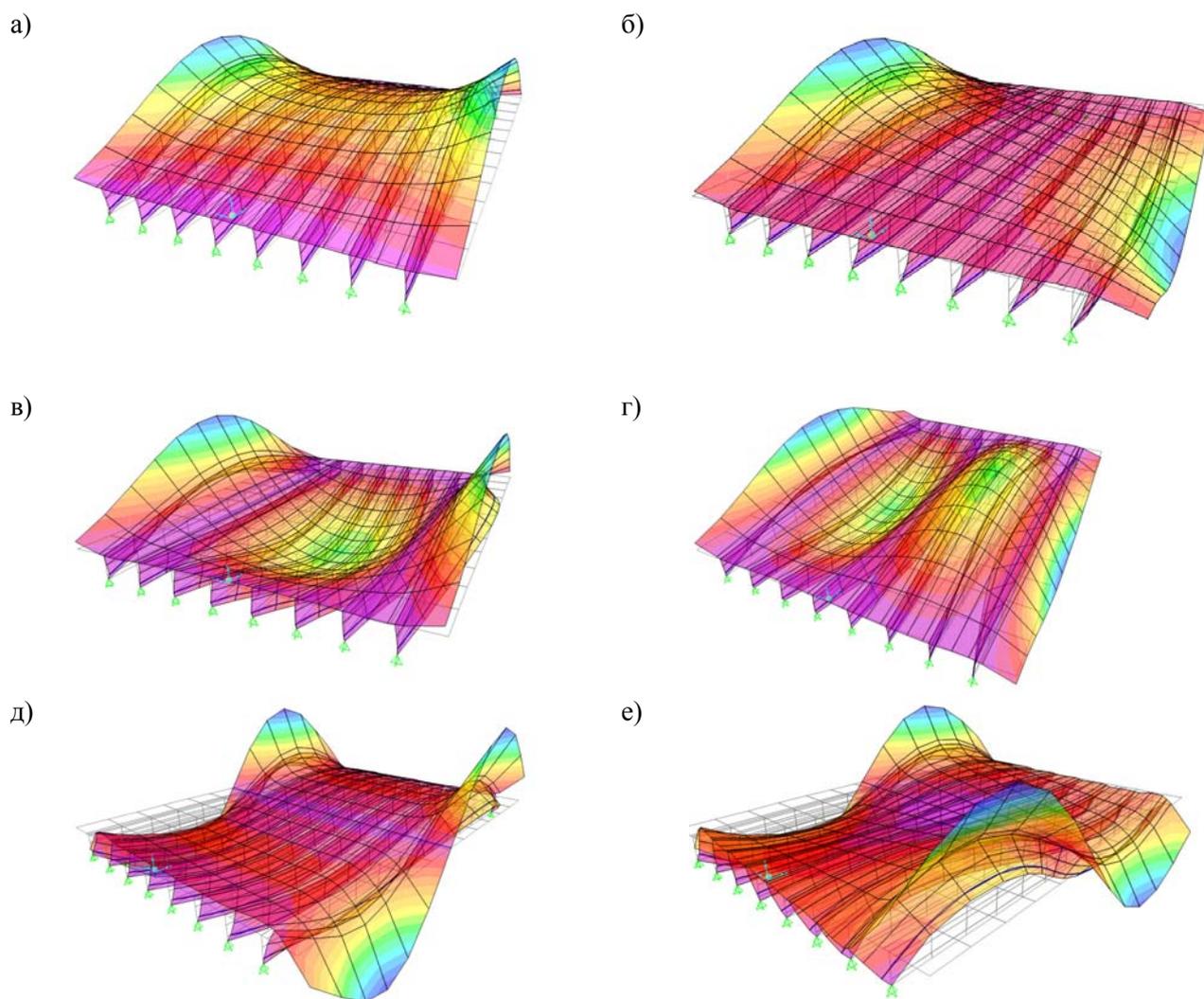


Рис. 2. Собственные формы колебаний с различным количеством полуволн в продольном направлении (h) и продольных узловых линий (v):
 а) первая собственная форма $f_1=5,46$ Гц, $h=1$, $v=0$; б) вторая собственная форма $f_2=5,5$ Гц, $h=1$, $v=1$;
 в) третья собственная форма $f_3=6,2$ Гц, $h=1$, $v=2$; г) четвертая собственная форма $f_4=7,6$ Гц, $h=1$, $v=3$;
 д) пятая собственная форма $f_5=11,1$ Гц, $h=2$, $v=0$;
 е) шестая собственная форма $f_6=12,1$ Гц, $h=2$, $v=1$

Графики изменения собственных частот f по собственным формам с одинаковым количеством полуволн в продольном направлении (h) и продольных узловых линий (v) с ростом косины показаны на рис. 3.

Собственные формы колебания прямых и косых пролетных строений сопоставлены в табл. 3. Цветовая палитра на рисунках соответствует различным значениям вертикальных перемещений плиты. На планах также показаны деформации закручивания ребер тавровых балок пролетного строения при колебаниях.

Исследование изменения собственных частот и форм колебаний с увеличением косины пролетного строения по всем вышеперечисленным моделям показало, что при увеличении косины пролетного строения наблюдаются следующие явления:

- 1) незначительное увеличение собственных частот пролетного строения для двух низших тонов (табл. 2);
- 2) смещение экстремума полуволн колебаний к тупым углам пролетного строения (см. в табл. 3 собственные формы колебаний пролетных строений с различной косиной опирания α);

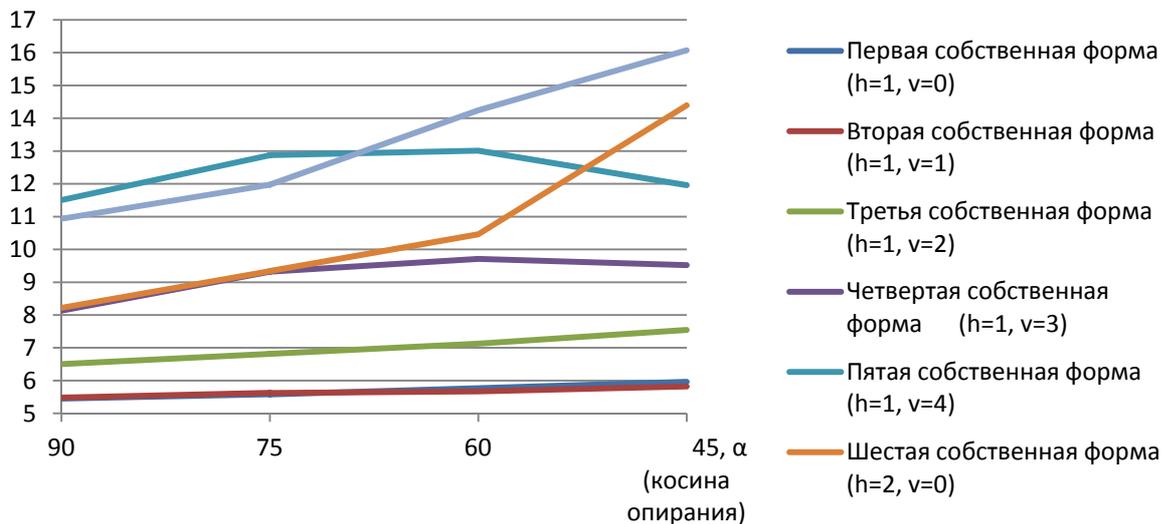
3) изменение порядка следования форм с увеличением косины, а следовательно, наличия случаев совпадения частот по некоторым формам (рис. 3).

Таблица 2

Сопоставление расчетных динамических параметров для пролетных строений с различной косиной опирания

Номер собственной формы	Собственные частоты и параметры собственных форм при косине опирания											
	$\alpha=90^0$			$\alpha=75^0$			$\alpha=60^0$			$\alpha=45^0$		
	f, Гц	h	v	f, Гц	h	v	f, Гц	h	v	f, Гц	h	v
1	5,45	1	1	5,58	1	1	5,67	1	2	5,82	1	2
2	5,48	1	2	5,62	1	2	5,77	1	1	5,96	1	1
3	6,5	1	3	6,81	1	3	7,13	1	3	7,55	1	3
4	8,13	1	4	8,92	1	4	9,71	1	4	10,8	1	4
5	8,22	2	1	9,34	2	1	10,5	2	1	12	1	5
6	10,9	2	2	12	2	2	13	1	5	14,4	2	1
7	11,5	1	5	12,9	1	5	14,2	2	2	16,1	2	2

а) f, Гц



б) f,

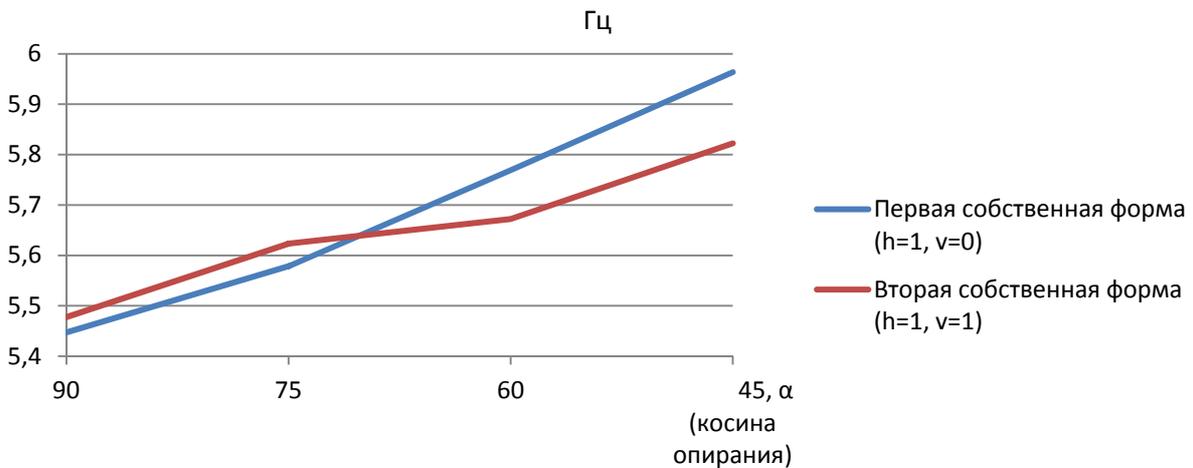
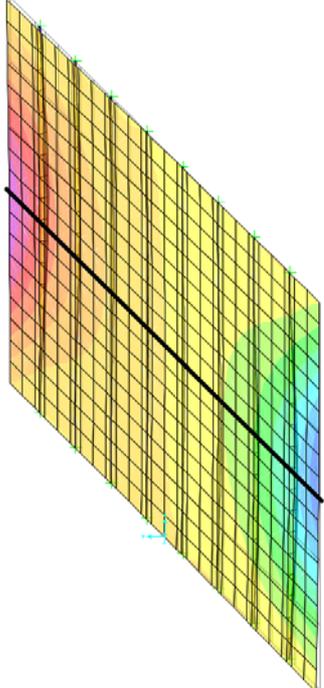
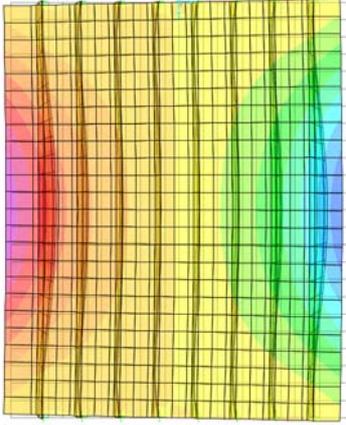
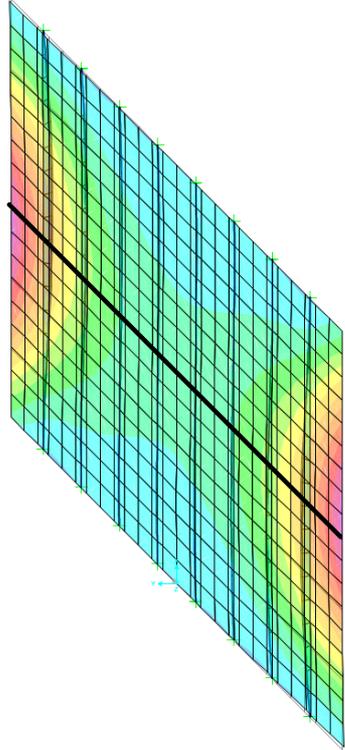
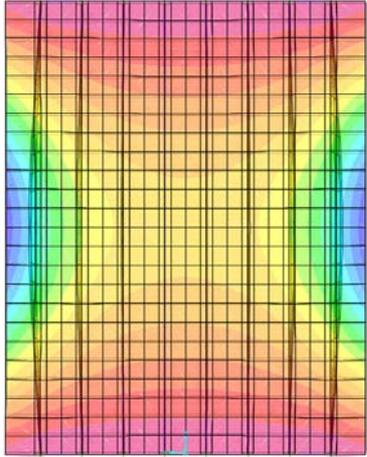
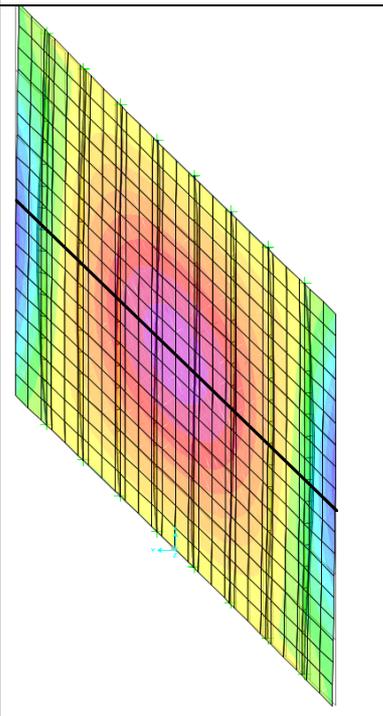
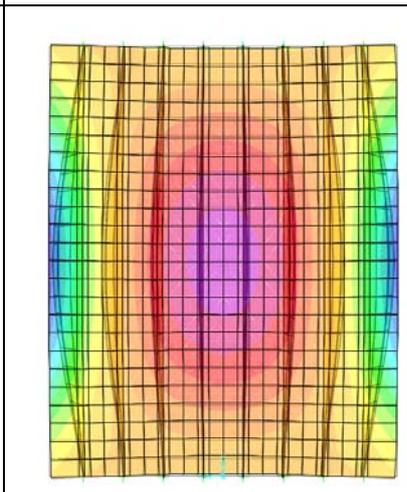
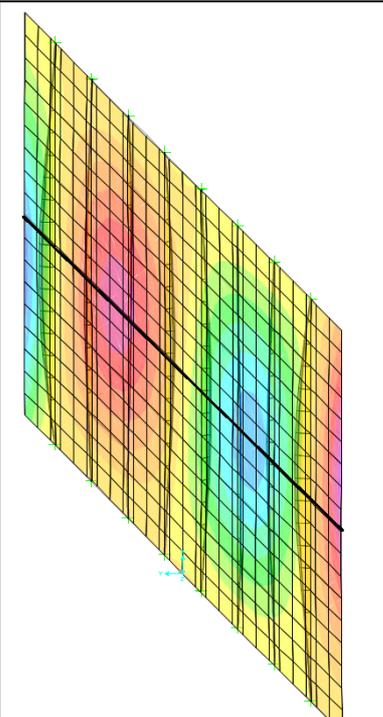
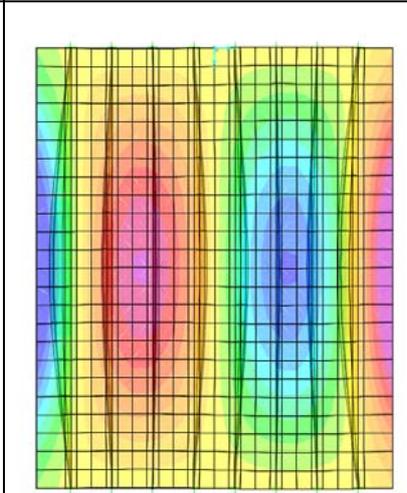


Рис. 3. Графики изменения собственных частот f различных форм с ростом косины опирания α : а) по шести высшим собственным формам; б) по двум высшим собственным формам

Таблица 3

Сопоставление собственных форм прямых и косых пролетных строений
с одинаковым количеством полуволн
в продольном направлении (h) и продольных узловых линий (v)

f	$h=1, v=1, \alpha=45^0$	f	$h=1, v=1, \alpha=90^0$
5,48		5,82	
f	$h=1, v=0, \alpha=45^0$	f	$h=1, v=0, \alpha=90^0$
5,45		5,96	

f	$h=1, v=2, \alpha=45^0$	f	$h=1, v=2, \alpha=90^0$
6,5		7,5	
f	$h=1, v=3, \alpha=45^0$	f	$h=1, v=3, \alpha=90^0$
8,13		9,52	

Вывод

Динамический анализ пролётных строений может достоверно отражать их колебательный режим под действием подвижной нагрузки только в случае учета обозначенных в данной работе специфических факторов влияния косины опирания.

Библиографический список

1. Сафронов, В.С. Сейсмический расчет железобетонных пролетных строений автодорожных мостов с использованием современных конечно-элементных комплексов/ В.С. Сафронов, Нгуен Хыу Куи // Науч. вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та, Сер. «Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений». – Воронеж, 2007. – Вып. 3. – С. 33–42.
2. Барченков, А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов/ А.Г. Барченков. – М.: Транспорт, 1976. - 296с.
3. Доманов, Д.И. Оценка влияния косины пролетных строений железобетонных мостов на риск разрушения нормальных сечений балок с ненапрягаемым армированием от изгибающего момента/В.С. Сафронов, Д.И. Доманов// Строительная механика и конструкции. - Вып. №1(4). - 2012 – С.84-90.
4. Барченков, А.Г. Вынужденные колебания автодорожных мостов как случайный процесс/ А.Г. Барченков, Р.И. Мальцев, В.С. Сафронов //Прикладная механика. – Киев, 1971. - Т. 7, вып. 3. – С.33-42
5. Нгуен Хыу Куи. Расчёт и анализ сейсмического риска применяемых в мостостроении плитно-балочных систем из железобетона: дис. на соиск. ... канд. техн. наук; специальность 05.23.17/ Нгуен Хыу Куи; научный руководитель В.С. Сафронов; ВГАСУ. – Воронеж, 2009. - 150 с.

References

1. Safronov, V.S. Seismic analysis of reinforced concrete road bridge superstructures in advanced finite-element complexes / V.S. Safronov, Nguyen Huu Quy // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Ser. Modern methods of static and dynamic analysis of structures and buildings. - Voronezh, 2007. - Issue. 3. - p. 33-42.
2. Barchenkov, A.G. Dynamic analysis of road bridges/ A.G. Barchenkov. – M.: Transport, 1976/ - 296 p.
3. Safronov, V.S. Risk assessment of fracture of arbitrary shaped reinforced concrete beams of normal sections/ V.S. Safronov, D.I. Domanov // Structural Mechanics and Structures. Issue number 1 (2), 2011 - P. 46-51
4. Barchenkov. A.G. Forced oscillations of highway bridges as a random process / A.G. Barchenkov, R.I. Maltsev, V.S. Safronov // Applied Mechanics. - Kiev, 1971, Volume 7, Issue 3. - P. 33-42.
5. Nguyen Heu Quy. Calculation and analysis of seismic risk used in bridge plate-beam systems of reinforced concrete: the dissertation for the degree of candidate of technical sciences, specialty 05.23.17 / Nguyen Heu Quy, scientific director of VS Safronov; Voronezh State University of Architecture and Structure. - Voronezh, 2009. - 150 p.

Ключевые слова: косые пролетные строения, железобетонные конструкции, динамический анализ, спектры частот, собственные формы колебаний.

Keywords: skew spans, concrete structures, concrete structures, dynamic analysis, frequency spectra, eigenmodes

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 624. 021. 15

Тамбовский государственный технический университет

Д-р тех. наук, проф. кафедры конструкций зданий и сооружений

В.В. Леденев

Магистрант кафедры конструкций зданий и сооружений

З.Х. Нгуен

Россия, г. Тамбов, тел.: +7953-709-29-55;

e-mail: nguyenduyhoa_062012@yahoo.com

Tambov State Technical University

Dr. of Tech. Sc., Prof. of Department of Building Structures

V.V. Ledenov

Master of Department of Building Structures

D.H. Nguyen

Russia, Tambov, tel.: +79537092955;

e-mail: nguyenduyhoa_062012@yahoo.com

В.В. Леденев, З.Х. Нгуен

ПРИМЕРЫ ПОВРЕЖДЕНИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ПРИСТРОЙКОЙ *

Рассмотрены примеры повреждений зданий, сооружений или их частей от влияния близко построенных. Установлены характер и причины появления трещин и выявлен характер смещения конструктивных элементов.

V.V. Ledenov, D.H. Nguyen

EXAMPLES OF BUILDING AND STRUCTURAL DAMAGE CAUSED BY OTHER CONSTRUCTION

The examples of buildings and structural damages and also their parts caused by closely constructed ones. The nature and causes of cracks and displacement of elements of construction is revealed.

Введение. Общеизвестно, что причины повреждений в несущих строительных конструкциях чаще всего возникают вследствие неравномерных осадок фундаментов и особенно недопустимых относительных разностей осадок [1, 2, 3, 6]. На практике допустимые величины последних обеспечить довольно сложно. В ряде случаев разность осадок соседних фундаментов не должна превышать 5...10 мм. Реальные величины значительно больше. Причинами этого являются: естественная неоднородность грунтовых оснований, неровности дна котлована, неравномерная влажность грунтов в разных частях котлована, доуплотнение грунта в местах движения транспорта по дну котлована.

После завершения строительства и при эксплуатации неравномерное распределение поля температур и влажностей приводит к изменению механических свойств оснований и увеличению как разностей осадок, так и их скоростей. Неравномерности осадок возрастают и из-за больших колебаний временных нагрузок, периодических утечек воды и сезонных колебаний влажностей и температур в пределах зоны аэрации. Здания и сооружения постоянно приспособляются к меняющимся условиям. Жесткости их местами уменьшаются [3, 4].

© Леденев В.В., Нгуен З.Х., 2013

Причинами возрастания неравномерных деформаций могут служить и внешние факторы, например, строительство новых зданий вблизи существующих. Наложение силовых полей нарушает равновесное состояние под фундаментами ранее построенных зданий и сооружений. Возникают дополнительные неравномерные по площади осадки. В стенах появляются косые трещины, происходит подвижка плит перекрытий и перемычек.

Устройство осадочных швов не всегда предотвращает эффект взаимного влияния зданий или сооружений. Шпунтовые разделительные стенки, как правило, не устраивают.

Дополнительные напряжения и перемещения от влияния пристраиваемых зданий развиваются по времени с разными скоростями. Достаточно точно спрогнозировать это не представляется возможным. Кроме того, надо иметь в виду повышение влажности грунтов на застроенных территориях, их подтопление и др. Значительный рост транспортной нагрузки усугубляет ситуацию.

В ряде случаев фундаменты примыкающих зданий - разной конструкции, например, свайные и мелкого заложения. Потенциальные деформации их оснований значительно отличаются.

Обобщение данных о недопустимых деформациях зданий и сооружений, на наш взгляд, представляет интерес для совершенствования теории проектирования.

Классическим примером значительных повреждений является **элеватор в г. Курске**. Комплекс состоит из рабочей башни, 3-х силосных корпусов. Между ними вплотную построены более легкие здания. Фундаменты рабочей башни свайные, силосных корпусов - монолитные железобетонные плиты, других зданий – сборные ленточные. По результатам наблюдений осадки плит равномерные и равны 24 см. Осадки ленточных фундаментов по расчетам составили около 2 см. Относительные разности осадок недопустимы. Административное здание и встроенное получили столь значительные повреждения, что их рекомендовано разобрать.

Следовало бы эти здания построить после реализации основной доли осадок тяжелых сооружений или расположить их на рандбалках, опирающихся на выступы плит.

За более чем 15-летний период обследования зданий и сооружений в г. Тамбове выявлен ряд зданий, поврежденных вследствие последующей близко расположенной пристройки.

Жилое здание по ул. Советской, 122. Здание трехэтажное, стены из силикатного кирпича, фундаменты бутовые. К этому зданию осуществлена пристройка без устройства осадочного шва (рис. 1). В результате активизировался процесс развития осадок и трещин части существующего здания. Произошел наклон пристройки в сторону от существующего здания.



Рис. 1. Северный фасад здания

Десятиэтажный дом по Студенецкой набережной, 25. Стены здания выполнены из силикатного кирпича, фундаменты свайные и плитные. Грунты просадочные I типа. Первая очередь строительства здания выполнена на свайном фундаменте. При забивке свай появились

трещины в соседних зданиях. Для их предупреждения вторую очередь строительства решено выполнять с применением монолитной железобетонной плиты (рис. 2, 3).

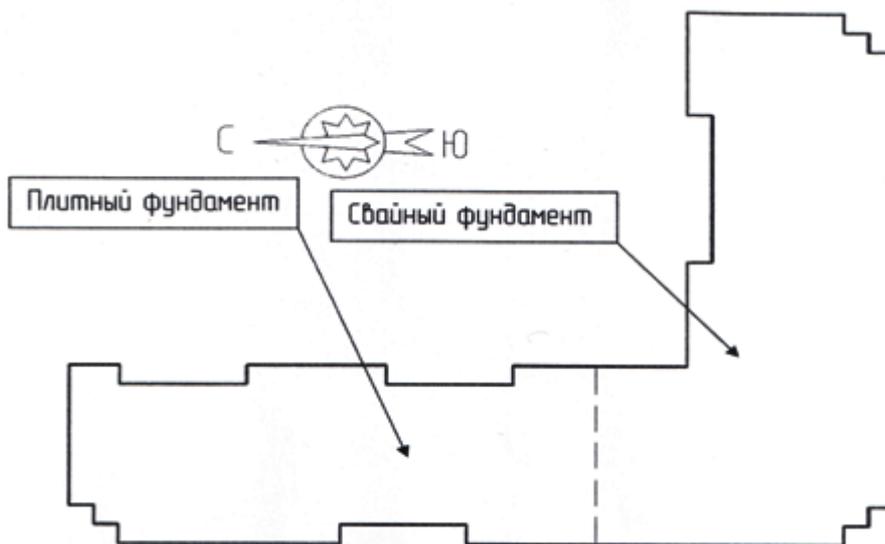


Рис. 2. План схемы фундаментов



Рис. 3. Дворовый фасад

Неправильно запроектированы и выполнены осадочные швы. Вследствие этого, а также недопустимой относительной разности осадок зданий возникли вертикальные трещины.

Пятиэтажные здания по ул. Пионерской, 18. Здания сложены из керамического кирпича, фундаменты ленточные сборные. Здание состоит из трех блоков разной очередности (рис. 4, фото 1). Деформационно-осадочные швы выполнены неправильно.



Рис. 4. Западный фасад здания



Фото 1. Вид трещины западного фасада

Девятиэтажное здание по ул. Рылеева, 70. Здание 70-х годов постройки. Стены сложены из силикатного кирпича, фундаменты сборные ленточные. При строительстве нового здания на расстоянии 100 м от существующего в последнем возникли многочисленные трещины в период забивки свай. Возможно, собственные колебания здания приблизились к амплитуде колебаний грунта.

Пятиэтажный дом по ул. Рылеева, 62, корп. 1. Стены здания сложены из керамического кирпича, фундаменты ленточные сборные. При строительстве нового дома и забивке свай в существующем возникли многочисленные трещины (рис. 5).

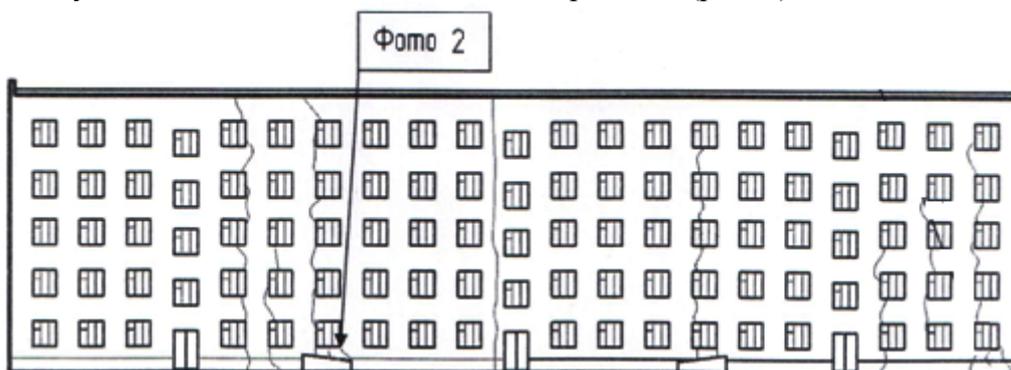


Рис. 5. Главный фасад здания

Ситуация усугубилась тем, что подвал здания был затоплен водой и состояние грунтов основания значительно ухудшилось (фото 2).



Фото 2. Вид трещины на фасаде кирпичного здания

Жилой дом по ул. Полковой, 36. Построен в 1970 г. К нему пристроено здание по ул. Карла Маркса, 225а. Год строительства - 1977. После этого на фасаде ранее построенного здания стали возникать трещины.

Выполнен ремонт здания с оштукатуриванием, но через несколько месяцев трещины снова стали проявляться на штукатурке (рис. 6, 7, фото 3).



Рис. 6. Фасад со стороны двора

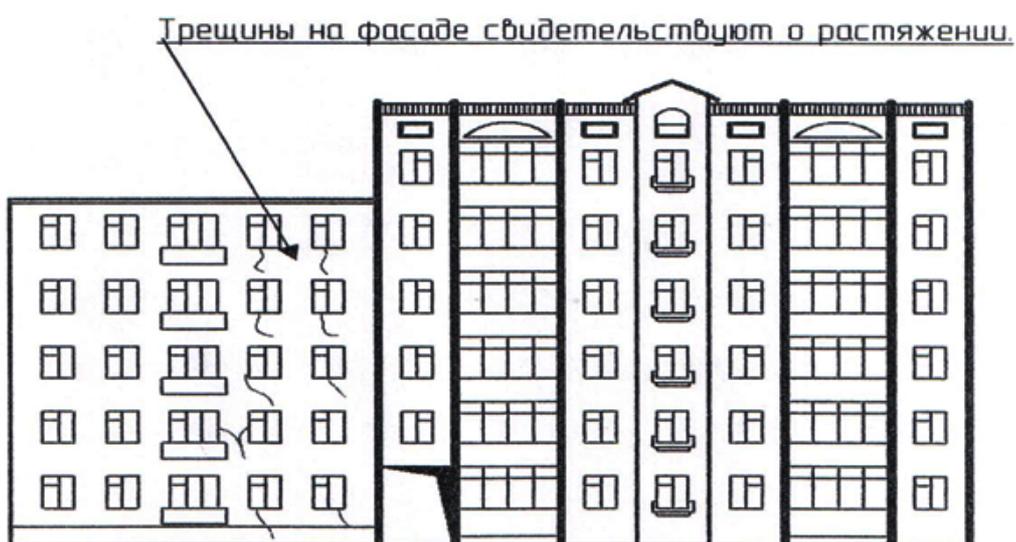


Рис. 7. Фасад с ул. К. Маркса



Фото 3. Фасад со стороны двора

Жилой дом по ул. Советской,158. Здание 5-этажное, кирпичное. Фундаменты – ленточные сборные. Построено в 1963 г. Перпендикулярно к нему расположен 4-этажный дом №156 на пл. Л. Толстого (рис. 8). Стены кирпичные, фундаменты бутовые ленточные.

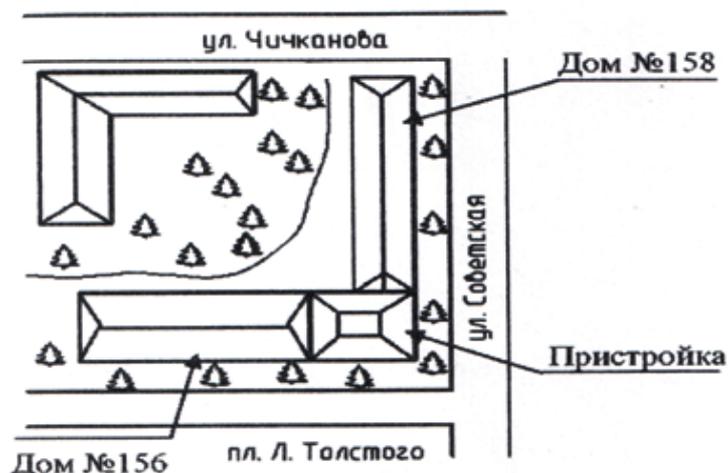


Рис. 8. Ситуационный план

Для завершения архитектурного облика здания выполнена 6-этажная вставка на буронабивных сваях.

На фасаде дома №158 новых трещин не возникло. Имевшиеся старые стабилизированы. В доме №156 образовались новые трещины и увеличились старые (рис. 9).

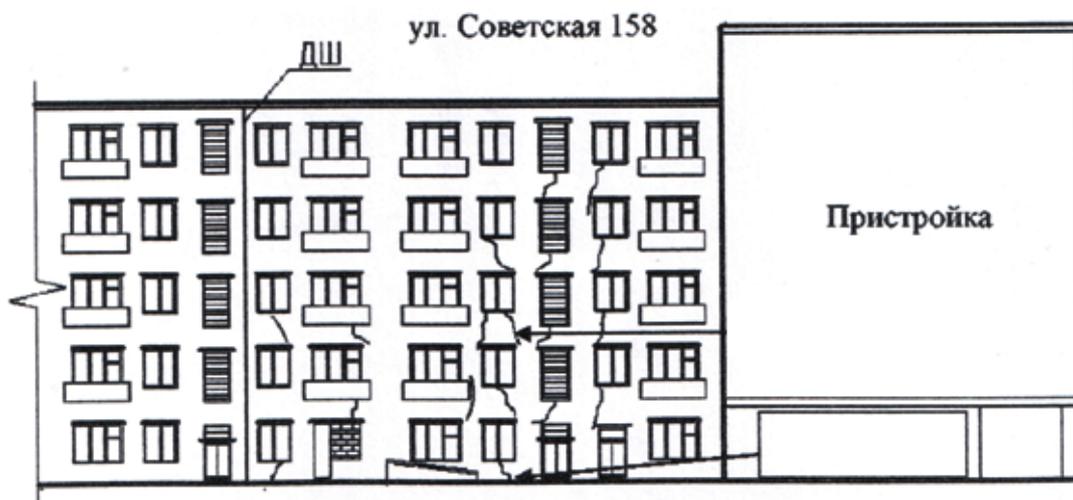


Рис. 9. Фасад здания по ул. Советской, дом №158 со стороны двора

Здание приборостроительного техникума. Четырехэтажное, кирпичное. Фундаменты ленточные сборные. Построено в 1975 г. В 1986 г. впритык построено здание общежития. Вскоре в стенах техникума, примыкающих к общежитию, стали развиваться косые трещины. В верхних соприкасающихся участках кладки произошло смятие кирпича. Со стороны дворового фасада обнаружили вертикальную трещину по всей высоте (рис. 10, 11, фото 4).

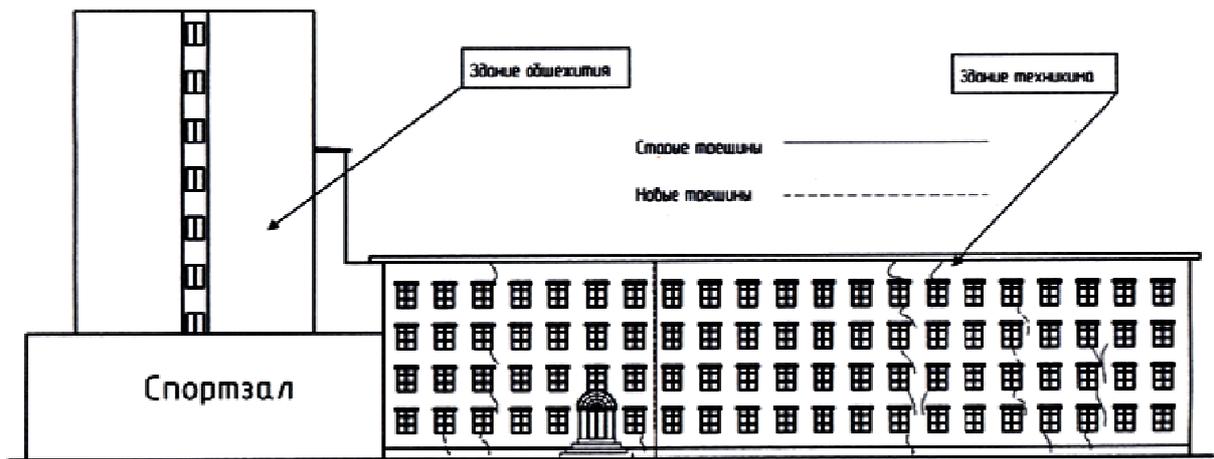


Рис. 10. Уличный фасад здания

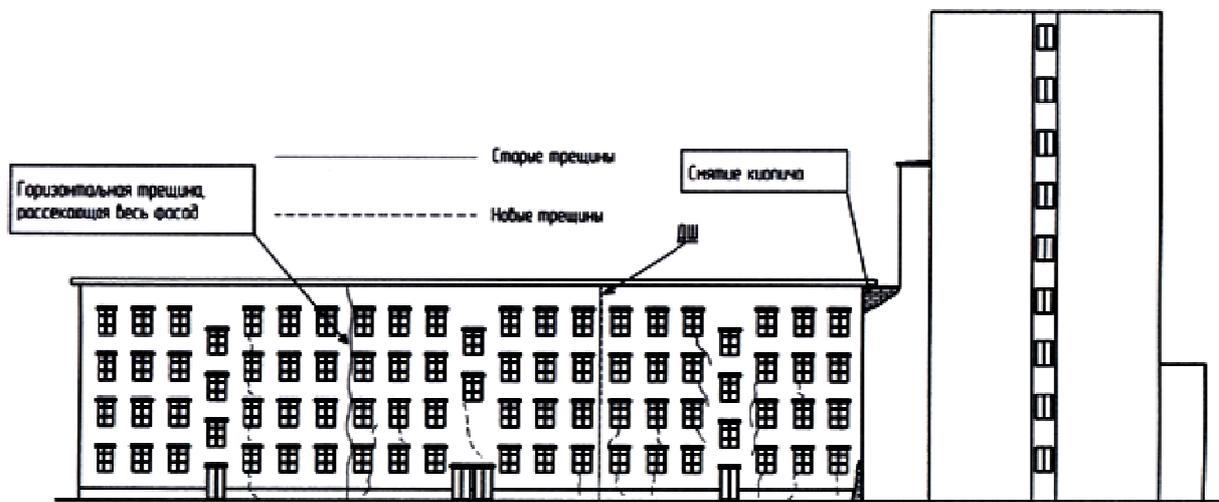


Рис. 11. Дворовый фасад здания

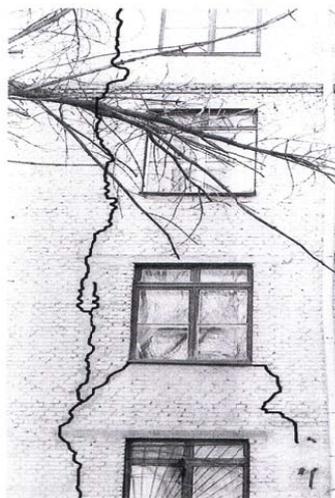


Фото 4. Вид трещины со стороны дворового фасада

Здание ДЮСШ “Спартак” по ул. К. Маркса, 254. Построено в 1964 г., стены выполнены из керамического кирпича, фундаменты ленточные бутовые. В 1976 г. возведена трехэтажная кирпичная пристройка с частичной надстройкой примыкающей части здания. Фундаменты пристройки состоят из 3-х рядов блоков по монолитной фундаментной плите (рис. 12). Через некоторое время деформационный шов между зданиями стал раскрываться, достигнув вверху 80 мм.

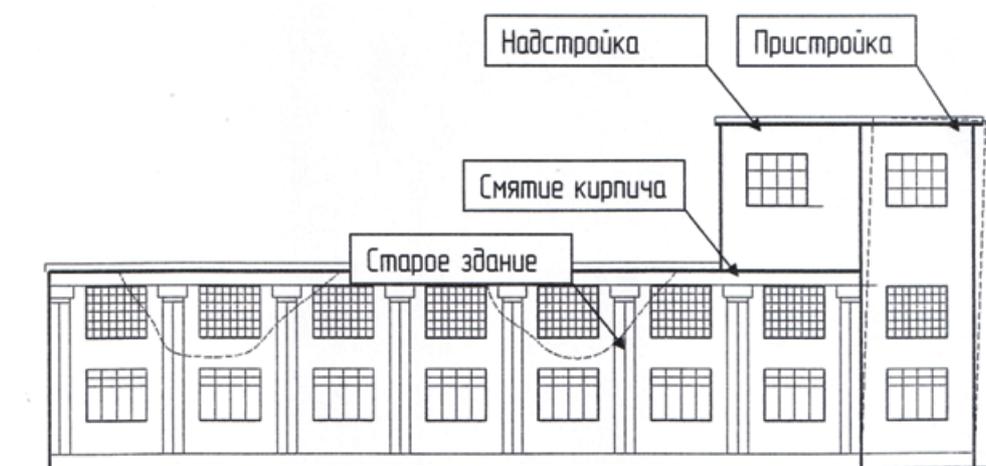


Рис. 12. Западный фасад

На фасаде ранее построенного здания произошло смятие кирпича от давления надстройки. Ситуация осложнилась и тем, что не был предусмотрен осадочный шов между фундаментами пристройки и существующего здания.

Здание ДЮСШ №3 в г. Тамбове по ул. С. Ценского, 2. Построено в 1996 г. Здание трехэтажное, с подвалом. Соединено с рядом стоящим зданием переходной галереей в уровне второго этажа.

В 1980 – 1981 г. с западной стороны школы была выполнена пристройка. После этого в стенах существующего здания появились новые трещины и возросли старые.

Выводы

1. В рассмотренных примерах пристройка новых зданий к существующим вызвала появление трещин в стенах последних. Имеющиеся стабилизированные трещины раскрылись.
2. Во многих случаях не были предусмотрены и выполнены мероприятия по снижению взаимного влияния зданий. Необходимо дальнейшее совершенствование методов расчета и проектирования зданий и сооружений с учётом влияния пристроек.

Библиографический список

1. Гарагаш, Б.А. Надёжность систем «основание - сооружение» при неравномерных деформациях основания: монография в 2-х т. / Б.А. Гарагаш. - Т.1. – М.: АСВ, 2012, – 416 с. Т. 2. – М.: АСВ, 2012. – 472 с.
2. Коновалов, П.А. Основания и фундаменты реконструируемых зданий: монография/ П.А. Коновалов, В.П. Коновалов. – М.: АСВ, 2011. – 384 с.
3. Леденев, В.В. Прочность и деформативность оснований заглубленных фундаментов/В.В. Леденев. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1985. – 156 с.
4. Леденев, В.В. Прочность и деформативность оснований заглубленных фундаментов/ В.В. Леденев. – Воронеж: изд-во ВГУ, 1990. – 224 с.

5. Рекомендации по проектированию и строительству оснований и фундаментов при возведении зданий вблизи существующих в условиях плоской застройки/ Правительство Москвы, Москомархитектуры. – М., 1999. – 55 с.
6. Сотников, С.Н. Проектирование и возведение фундаментов вблизи существующих сооружений/С.Н. Сотников. – М.: Стройиздат, 1986. – 96 с.
7. Указания по устройству фундаментов около существующих зданий и сооружений/ ОНТИ, ЛЕННИИПроект. – Л., 1980. – 56 с.

References

1. Garagash, B.A. The reliability of the "foundation - building" during non-uniform deformation of the base: monograph / B.A. Garagash. In 2 books. V.1. - M: DIA, 2012. – 416 p, .2. - Moscow: DIA, 2012. – 472 p.
2. Konovalov, P.A. Foundations of reconstructed buildings: monograph / P.A. Konovalov, V.P. Konovalov : monograph. - M: DIA, 2011. – 384 p.
3. Ledenev, V.V. The strength and deformability of the grounds of deep footing. – Voronezh: VSU publishing house, 1985. – 156 p.
4. Ledenev, V.V. The strength and deformability of the grounds of deep footings / V.V. Ledenev. – Voronezh: VSU publishing house, 1990. – 224 p.
5. Recommendations for design and construction of bases and footings while constructing buildings closely to existing buildings in condition of flat development/ Government of Moscow, Moscomarchitecture. - M., 1999. – 55 p.
6. Sotnikov, S.N. The design and construction of footings near existing structures / S.N. Sotnikov. - M.: Publishing house of building, 1986. – 96 p.
7. Recommendations on the footings construction closely to existing buildings and structures/ ONTI, LENNIIPProject. - L., 1980. – 56 p.

Ключевые слова: существующие здания, пристройка, трещины, разрушение, стены, фундаменты, основание.

Keywords: existing building, additional building, cracks, fracture, walls, house footing and base.

*В отдельных обследованиях технического состояния зданий и сооружений принимали участие Я.В. Савинов, Д.В. Емельянов, А.В. Колесникова.