



ISSN 2219-1038

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск № 2 (5), 2012

Учредитель

Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего
профессионального
образования
«Воронежский
государственный
архитектурно-строительный
университет»

Издатель

Строительный факультет

Главный редактор

Сафронов В.С., д.т.н., проф.

Зам. главного редактора

Ефрюшин С.В., к.т.н., доц.

Ответственный секретарь

Габриелян Г.Е., к.т.н., доц.

Технический секретарь

Флавианов В.М., м.н.с.

Члены редколлегии

Борисов Ю.М., д.т.н., проф.
Шитикова М.В., д. ф.-м. н., проф.
Шапиро Д.М., д.т.н., проф.
Орлов А.С., д.т.н., проф.
Свентиков А.А., д.т.н., проф.
Иванов Ю.В., к.т.н., доц.
Андреев А.В., к.т.н., доц.
Рогатнев Ю.Ф., к.т.н., доц.

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Петреня Е.Н., Петранин А.А.

Построение конечного элемента пространственного стержня с учетом деформации для решения статических и динамических задач 7

Борисов Ю.М., Панфилов Д.В., Каштанов С.В., Юдин Е.М.

Дисперсно-армированные строительные композиты 31

Суднин В.М.

Движение гибкой нити в потоке воды 37

Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.

Зависимость предельных нагрузок внецентренно сжимаемых элементов из мелкозернистого бетона от призмных пределов прочности при заданных скоростях нагружения 43

Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.

Комбинированный способ расчета разрушающих усилий внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона 49

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Сафронов В.С., Антипов А.В.

Экспериментально-расчетный анализ резонансных колебаний сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста 52

Шапиро Д.М., Тютин А.П.

Расчет и проектирование балочных железобетонных
предварительно напряженных пролетных строений
автодорожных мостов

60

Тарасов А.А.

Проектирование мостовых устоев из армированного
грунта

69

Попечительский совет

ООО «Предприятие
Инвестстройиндустрия»
в лице директора
Ушакова И.И.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Борисов Ю.М. Поликутин А.Э., Чудинов А.С.,
Нгуен Фан Зуй**

Напряженно-деформированное состояние сжатых
полок изгибаемых конструкций из армокартона

76

ООО «Предприятие
по инженерному и научно-
техническому обслуживанию
строительного комплекса
«СтройНаука»
в лице зам. директора
Глушкова А.В.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.

Экспериментально-теоретический способ
определения внецентренно сжимаемых с постоянной
скоростью призм из мелкозернистого бетона

85

ОАО Воронежский филиал
ГИПРОДОРНИИ
в лице ген. директора
Мажарова А.В.

Адрес редакции: 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел., факс +7(473) 2715230

По вопросам размещения статей просьба обращаться
по адресу:

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./факс: +7 (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф.

Сафронову Владимиру Сергеевичу,
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: yss22@mail.ru

зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц.

Ефрюшину Сергею Владимировичу,
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

отв. секретарю, канд. техн. наук, доц.

Габриеляну Грайру Егисеевичу
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: grayr2010@rambler
Тел./факс +7(473) 271-52-30

Редакторы Аграновская Н.Н., Акритова Е.В.

Подп. в печать 12.12. 2012. Формат 60x84 1/8. Усл.-печ. л. 11,1.

Уч.-изд. л. 11,2. Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ № .

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии
издательства учебной литературы и учебно-методических пособий Воронежского ГАСУ
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84



ISSN 2219-1038

STRUCTURAL MECHANICS AND CONSTRUCTIONS

Scientific – Technical Journal

Issue № 2 (5), 2012

Founder

State Educational Institute
of Higher Vocational
Education
Voronezh State University
of Architecture
and Civil Engineering

Editor

Constructional Department

Chief Editor

Dr of Tech.Sc. V.S.Safronov

Deputy of Chief Editor

PhD S.V. Efryushin

Senior Secretary

PhD G.E. Gabrielyan

Technical Secretary

Sc.associate V.M. Flavianov

Members of editorial board

Members of editorial board

Dr of Tech. Sc. Prof.

Y.M. Borisov

Dr of Math Prof. M.V. Shitikova

Dr of Tech. Sc. Prof.D.M. Shapiro

Dr of Tech. Sc. Prof. A.S. Orlov

Dr of Tech. Sc. Prof.

A.A. Sventikov

PhD Y.V. Ivanov

PhD A.V. Andreev

PhD Y.F. Rogatnev

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS and STRENGTH of MATERIALS

Petrenya E.N., Petranin A.A.

Construction of the special bar finite element considering
deplanation to solve static and dynamic problems

7

Borisov Y.M., Panfilov D.V., Kashtanov S.V., Yudin E.M.

Disperse – reinforced composites

31

Sudnin V.M. Flexible string in water flow

37

Sinozersky A.N., Muhtarov R.A.

Eccentric-collapsible elements from fine concrete limit
load dependence on prism strength limit at specified
loading speed

43

Sinozersky A.N., Muhtarov R.A.

Combination computation method of breaking strength
of eccentrically collapsible prisms from fine concrete

49

CALCULATION and DESIGN of BRIDGES and STRUCTURES

Safronov V.S., Antipov A.V.

Experimental – calculation analysis of resonance
vibration of composite road bridge spans

52

Shapiro D.M., Tyutin A.P.

Calculation and design of prestressed
ferroconcrete beam spans of road bridges.

60

Board of Trustees

Tarasov A.A.

Design of abutments from reinforced ground.

69

Ltd. "Enterprise
Investstroyindustriya"
Director
I.I. Ushakov

**CALCULATION and DESIGN of STRUCTURES from
POLYMERIC MATERIAL**

**Borisov Y.M., Policutin A. E., Chudinov A. S.,
Nguen Phan Duy**

Prestressed state of compressed flexible structures
from ferrocauton

76

Ltd. "Enterprise on
Engineering and Scientific
Service of Building Complex
StroyNauka" Deputy Director
A.V. Glushkov

**EXPERIMENTAL and NATURAL INVESTIGATIONS of
STRUCTURES and MATERIALS**

Sinosersky A.N., Muhtarov R.A

Experimental theoretical method of definition of
eccentric-collapsible with constant speed prisms from
fine grained concrete

85

Ltd. "Voronezh department of
Giprodornii" Chief Executive
Officer
A.V. Mazharov

Address: 84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh Russia

Tel/fax: +7(473)2715230

Concerning articles publication one can address:

84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh Russia

Tel./fax: +7(473) 2715230

Chief editor Dr Sc.Tech. Prof.

Vladimir Sergeevich Safronov

Tel/fax: +7(473)2715230 E-mail: vss22@mail.ru

Deputy of Chief editor, PhD, Associate Professor

Sergei Vladimirovich Efryushin

Tel/fax: +7(473)2715230 E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

Senior secretary:

PhD, Associate Professor

Gabrielyan Grayr Egisheevich

E-mail: grayr2010@rambler Tel./fax: +7(473) 2715230

Editors N.N. Agranovskaya, E.V. Akritova

Printed: office of operated polygraphy of Voronezh State University of Architecture and Civil
Engineering

84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh Rus



От научного редактора журнала

Уважаемые коллеги!

В предисловии к находящемуся в Ваших руках пятому номеру журнала «Строительная механика и конструкции» хочется затронуть один важный для достигнутого в настоящее время состояния и перспектив развития теории сооружений вопрос о влиянии на ускоренное развитие фундаментальных основ науки о прочности строительных конструкций зданий и сооружений быстро прогрессирующей электронной вычислительной техники.

Для моих ровесников, начинавших приобщение к научным исследованиям в области строительной механики в конце 60-х годов прошлого столетия, еще яркими являются воспоминания об этом времени. Мне, в частности, пришлось выбирать между только появившимися в эти годы аналоговыми и цифровыми вычислительными машинами. До этого времени главным инструментами при проведении численных расчетов были логарифмическая линейка и арифмометр. Поэтому в строительной механике

преобладали исследования по упрощению расчетных схем, позволяющих получать решения с достаточной для инженерной практики точностью. Достаточно открыть появившийся в 1960 году под редакцией проф. А.А. Уманского расчетно-теоретический справочник проектировщика, где приведен мастерски написанный проф. Воронежского ИСИ д-ром техн. наук Львиным Я.Б. раздел по расчету рам методом последовательных приближений.

Возможности первых производимых тогда в СССР АВМ типа МН-7 и имеющихся только в двух экземплярах в Воронеже ЭВМ Раздан -2 были весьма скромными. Быстродействие оценивалось на уровне $(3-5) \times 10^3$ операций в секунду, а оперативная память не превышала 4 Кб. Вспоминаю почти анекдотический случай, когда вычисления для моих исследований по кандидатской диссертации в вычислительном центре Воронежского авиазавода были прерваны после двух суток непрерывной работы из-за температурных неполадок.

Сейчас можно проследить за взаимосвязанным развитием электронной вычислительной техники и строительной механики. Сначала многие научные работы посвящались построению эффективных алгоритмов, которые были направлены на экономию затрат машинного времени и оперативной памяти ЭЦВМ, способам организации вычислений путем обмена информацией, хранящейся на внутренних и внешних носителях. Появлялись многочисленные публикации по методам хранения и обработки разреженных матриц.

В последние годы благодаря стремительному превращению цифровой вычислительной техники в высокопроизводительные информационные комплексы с практически неограниченными ресурсами для хранения, обработки и обмена информацией давние проблемы реализации прочностных расчетов самых сложных пространственных конструкций устранены. Это привело к появлению во многих странах мира, включая Российскую Федерацию, многочисленных программных комплексов, реализующих получивший давно теоретическое обоснование, но не имевший широкого применения метод конечного элемента. Таким образом, революционный характер изменения вычислительной техники в настоящее время является фундаментом для нового этапа развития строительной механики и теории строительных конструкций. Эти особенности современного состояния исследований отчетливо видны в принятых для опубликования статьях журнала.

*Главный редактор журнала «Строительная механика и конструкции»,
Заслуженный работник высшей школы РФ, член-корр. АЕ, д-р техн. наук,
профессор В.С. Сафронов*



From scientific editor of the journal

My most esteemed colleagues!

In the introduction to the fifth number of the journal “Structural Mechanics and Constructions” I would like to discuss one important question concerning the influence of the fast progressing computer technology on accelerated development of basis of science about structural strength of buildings and constructions.

For the persons of my age who began their scientific research in the sphere of Construction Mechanics in the early 60th of the previous century, the memories of that time are still flashbulb. As for me I had to choose between analog machines (computers) which had just appeared in those years and digital computers.

Before that time the main instruments for conducting numerical calculations were slide rules and adding machines. That is why researches on simplification of design models

allowing receiving solutions with rather accurate for engineering practice are predominated. It is sufficed to open the design - theoretical reference book of projectors edited by professor A.A. Umansky in 1960 where there is given a chapter of frame design with progressive approximation method, ably described by professor of Voronezh Institute of Construction (VISI), Dr of Technical Science YA. Lviniy.

The performances of first analog machines of MN-7 and of analog machines of Rasdan – 2 (there were only two in Voronezh) were very modest. The operation speed was estimated as $(3-5) \times 10^3$ per second, and working memory was not more than 4 kilobyte. I recall the episode when calculations for my PhD research work were interrupted in Voronezh operation center because of the temperature changing.

Nowadays we can observe the relationship between development of electronic technology and structural mechanics. Firstly many scientific works were devoted to construction of effective algorithms, which were directed to safe machine time and working memory of analog machine, technique of calculation arrangement by means of interchange of information on internal and external mediums. There is appeared a lot of publications about methods of storage and processing of sparse matrixes.

Last years the old problems of strength calculation of the most complicated dimensional structures are removed thanks to numerical calculation technique rush transformation into high-capacity information systems with practically unlimited resources for storage, processing, interchange. This caused the appearance of numerous programs of realization of finite element in many countries including Russian Federation. The finite element has been theoretically validated but does not have wide application. So revolutionary character of calculation technique modernization now is a base for a new stage of the development of structural mechanics and building structure theory. These peculiarities of the modern scientific state are demonstrated in the journal articles.

*Editor-in-chief of journal “Structural Mechanics and Constructions”
Honored Scientific Worker of Higher School of Russian Federation,
corresponding member of AN, Doctor of Technical Science, professor
V.S. Safronov.*

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
Е.Н. Петреня
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
А.А. Петранин
Россия, г. Воронеж, тел. 8(473)271-52-30
e-mail: petranin.san@yandex.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Science, Associate Professor
of Department of Structural Mechanics
E.N. Petrenya
PhD of Tech. Science, Associate Professor
of Department of Structural Mechanics
A.A. Petranin
Voronezh, Russia, tel. 8(473)2715230
e-mail: petranin.san@yandex.ru*

УДК 539.3:624.074.5

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ДЕПЛАНАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

На основе уравнений пространственного стержня с учетом депланации при сдвигах и кручении построен конечный элемент (КЭ) при линейном законе изменения погонных нагрузок. При выводе матриц КЭ для решения статических задач применен метод прямого интегрирования исходных уравнений, позволивший найти точное решение. Матрицы КЭ для решения задач динамики получены методом Бубнова-Галеркина с использованием точных статических функций формы.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

CONSTRUCTION OF THE TRIDEMENSIONAL BAR FINITE ELEMENT CONSIDERING DEPLANATION TO SOLVE STATIC AND DYNAMIC PROBLEMS

On the basis of equations of tridimensional bar considering deplanation while shifting and twisting a finite element (FE) was constructed according to linear law of linear load changing. While constructing final element matrix for solution of static problems method of input equations direct integration is applied. It allows finding accurate development. Matrixes of final element for solution of dynamics problems were obtained by method of Bubnov-Galyorkin with application of exact static functions of form.

В работах [1-3] была сформирована система исходных дифференциальных уравнений пространственного стержня с учетом депланации при сдвигах и кручении и получены необходимые формулы для определения функций депланации. Разработана методика поиска этих функций аналитическим методом для поперечных сечений произвольной формы и методом конечных элементов (МКЭ) для тонкостенных и толстостенных сечений с определением зависящих от функций депланации жесткостных характеристик сечения.

Данная работа продолжает эту тематику и посвящена построению конечного элемента (КЭ) пространственного стержня методом прямого интегрирования исходных уравнений при линейном законе изменения погонных нагрузок для решения статических задач и методом Бубнова-Галеркина для задач динамики.

© Петреня Е.Н., Петранин А.А.

1. Построение матриц конечного элемента для задач статики
1.1. Исходные дифференциальные уравнения пространственного стержня
с учетом деформации

Приведенные ниже исходные уравнения получены в работе [1] и сопровождаются ссылками на нее, отмеченными здесь и далее звездочками.

Базовые перемещения поперечного сечения стержня (см. (20)*):

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ \beta_{z0} \\ \alpha_{y0} \end{bmatrix}; \quad \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{yk} \\ u_{zk} \\ \alpha_{xk} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Базовые деформации стержня (см. (21)*):

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \mu_{z0} \\ \mu_{y0} \end{bmatrix}; \quad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{xyk} \\ \gamma_{xzk} \\ \mu_{xk} \end{bmatrix}; \quad \tilde{e}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_{xyk} \\ \lambda_{xzk} \\ \kappa_{xk} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Внутренние усилия, действующие в поперечном сечении стержня (см. (34)*):

$$\tilde{s} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_3 \end{bmatrix} = \tilde{s}' + \tilde{s}''; \quad \tilde{s}_1 = \begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix}; \quad \tilde{s}_2 = \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{bmatrix} = \tilde{s}'_2 + \tilde{s}''_2; \quad \tilde{s}_3 = \begin{bmatrix} L_{xy} \\ L_{xz} \\ K_x \end{bmatrix};$$

$$\tilde{s}' = \begin{bmatrix} \tilde{s}'_1 \\ \tilde{s}'_2 \\ \tilde{s}'_3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{s}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{s}''_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{s}'_2 = \begin{bmatrix} Q'_y \\ Q'_z \\ M'_x \end{bmatrix}; \quad \tilde{s}''_2 = \begin{bmatrix} Q''_y \\ Q''_z \\ M''_x \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь одним или двумя штрихами отмечены усилия, являющиеся равнодействующими полусуммарных или полуразностных касательных напряжений соответственно (см. (35)*, (36)*).

Геометрические уравнения в свернутой матричной форме (см. (31)*):

$$\tilde{e} = \tilde{G}\tilde{u}, \quad (4)$$

или в блочной форме (см. (29)*):

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = \tilde{u}_1^x; \\ \tilde{e}_2 = \tilde{G}_{21}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2^x; \\ \tilde{e}_3 = \tilde{G}_{21}\tilde{u}_1^x + \tilde{u}_2^{xx}, \end{cases} \quad (5)$$

где блок геометрического оператора (см. (30)*):

$$\tilde{G}_{21} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Физические уравнения в свернутой матричной форме (см. (38)*):

$$\tilde{s}' = \tilde{C}\tilde{e}, \quad (7)$$

или в блочной форме (см. (39)*):

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2' \\ \tilde{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & & \\ & \tilde{C}_{22} & \\ & & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в свернутой матричной форме (см. (76)*):

$$\tilde{R}\tilde{s}' = \tilde{q}, \quad (9)$$

или в блочной форме (см. (80)*):

$$\begin{cases} -\tilde{s}_1^x + \tilde{R}_{12}(\tilde{s}_2' - \tilde{s}_3^x) = \tilde{q}_1; \\ -\tilde{s}_2'^x + \tilde{s}_3^{xx} = \tilde{q}_2, \end{cases} \quad (10)$$

где блок оператора равновесия (см. (75)*):

$$\tilde{R}_{12} = \tilde{G}_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Выражение для усилий, являющихся равнодействующими полуразностных касательных напряжений (см. (79)*):

$$\tilde{s}_2'' = -\tilde{s}_3^x. \quad (12)$$

Помимо представленных выше исходных уравнений, в работе [1] приведены важные соотношения, которые можно считать следствиями из исходных уравнений (4)-(12).

1. Следствие из геометрических уравнений (5-2,3) – связь между деформациями (см. (26)*):

$$\tilde{e}_3 = \tilde{e}_2^x. \quad (13)$$

2. Следствие из (13) и физических уравнений (8) – связь между усилиями (см. (54)*):

$$\tilde{s}_3 = \tilde{C}_{33}\tilde{e}_3 = \tilde{C}_{33}\tilde{e}_2^x = \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{s}_2'^x. \quad (14)$$

3. Следствие из (14) и уравнений равновесия (10-2) – уравнение депланационных моментов (см. (108)*):

$$\tilde{s}_3^{xx} - \tilde{C}_{22}\tilde{C}_{33}^{-1}\tilde{s}_3 = \tilde{q}_2. \quad (15)$$

Уравнения равновесия (10) для последующего прямого интегрирования удобнее представить в виде, следующем из (12) и (3) (см. (74)*):

$$\begin{cases} -\tilde{s}_1^x + \tilde{R}_{12}\tilde{s}_2 = \tilde{q}_1; \\ -\tilde{s}_2^x = \tilde{q}_2. \end{cases} \quad (16)$$

1.2. Интегрирование исходных уравнений при линейном законе изменения погонной нагрузки

Построение матриц КЭ для статических задач будем выполнять методом прямого интегрирования исходных уравнений, преимущество которого заключается в получении точного решения в рамках предложенной теории, не зависящего от степени дискретизации стержня.

Зададим закон изменения погонных нагрузок в виде линейной функции:

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = \tilde{q}_{1N} + \xi\tilde{q}_{1R}; \\ \tilde{q}_2 = \tilde{q}_{2N} + \xi\tilde{q}_{2R}; \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{q}_{1R} = \tilde{q}_{1K} - \tilde{q}_{1N}; \\ \tilde{q}_{2R} = \tilde{q}_{2K} - \tilde{q}_{2N}, \end{cases} \quad (17)$$

где $\xi = x/L$ – относительная координата; L – длина КЭ, а индексные символы N, K соответствуют узлам начала и конца элемента стержня, причем начало координат совмещено с узлом N .

1.2.1. Определение функций усилий и деформаций

Интегрируем уравнение равновесия (16-2) с учетом (17) и определением постоянной интегрирования из граничного условия $\tilde{s}_2(\xi = 0) = \tilde{s}_{2N}$:

$$\tilde{s}_2 = -\int \tilde{q}_2 dx = \tilde{s}_{2N} - L(\xi \tilde{q}_{2N} + \frac{\xi^2}{2} \tilde{q}_{2R}). \quad (18)$$

Аналогично интегрируем уравнение (16-1) с учетом (18) и граничного условия $\tilde{s}_1(\xi = 0) = \tilde{s}_{1N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= \tilde{R}_{12} \int \tilde{s}_2 dx - \int \tilde{q}_1 dx = \\ &= \tilde{s}_{1N} + L\tilde{R}_{12}[\xi \tilde{s}_{2N} - L(\frac{\xi^2}{2} \tilde{q}_{2N} + \frac{\xi^3}{6} \tilde{q}_{2R})] - L(\xi \tilde{q}_{1N} + \frac{\xi^2}{2} \tilde{q}_{1R}). \end{aligned} \quad (19)$$

Для усилия \tilde{s}_3 задаемся решением в виде:

$$\tilde{s}_3 = \sum_{i=1}^3 (\cosh \lambda_i \xi \cdot \tilde{a}_i + \sinh \lambda_i \xi \cdot \tilde{b}_i) + \tilde{c} + \xi \tilde{d}, \quad (20)$$

где λ_i – частотные параметры; $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}, \tilde{d}$ – векторы неизвестных констант.

Подставляя решение (20) и нагрузку (17) в уравнение дебалансионных моментов (15), получим:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^3 (\tilde{C}_{22} \tilde{C}_{33}^{-1} - \frac{\lambda_i^2}{L^2} \tilde{I}) (\cosh \lambda_i \xi \cdot \tilde{a}_i + \sinh \lambda_i \xi \cdot \tilde{b}_i) - \\ - \tilde{C}_{22} \tilde{C}_{33}^{-1} (\tilde{c} + \xi \tilde{d}) = \tilde{q}_{2N} + \xi \tilde{q}_{2R}, \end{aligned} \quad (21)$$

где \tilde{I} – единичная матрица.

Группируя и приравнявая нулю в уравнении (21) выражения при каждой функции, найдем неизвестные векторы

$$\begin{cases} \tilde{c} = -\tilde{C}_{33} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{q}_{2N}; \\ \tilde{d} = -\tilde{C}_{33} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{q}_{2R} \end{cases} \quad (22)$$

и уравнение, являющееся классической задачей на собственные значения:

$$(\tilde{C}_{22} \tilde{C}_{33}^{-1} - \frac{\lambda_i^2}{L^2} \tilde{I}) \cdot \tilde{n}_i = \tilde{0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (23)$$

где $\lambda_i^2 / L^2 > 0$ – i -я собственная частота положительно определенной матрицы $\tilde{C}_{22} \tilde{C}_{33}^{-1}$;

\tilde{n}_i – нормированный собственный вектор.

Собственные частоты определяются из решения степенного уравнения:

$$\det(\tilde{C}_{22} \tilde{C}_{33}^{-1} - \frac{\lambda_i^2}{L^2} \tilde{I}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (24)$$

собственные векторы – из решения однородных систем (23) при найденных значениях частот и условий нормирования:

$$\|\tilde{n}_i\|=1, \quad i=1,2,3. \quad (25)$$

Неизвестные векторы \tilde{a}_i, \tilde{b}_i , также являющиеся собственными, пропорциональны нормированному вектору \tilde{n}_i и выражаются через него по формулам

$$\begin{cases} \tilde{a}_i = a_i \tilde{n}_i; \\ \tilde{b}_i = b_i \tilde{n}_i, \end{cases} \quad i=1,2,3, \quad (26)$$

где a_i, b_i – неизвестные коэффициенты.

С помощью соотношений (26) выражение (20) для усилия \tilde{s}_3 преобразуется к виду

$$\tilde{s}_3 = \tilde{N}(\tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{a} + \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{b}) + \tilde{c} + \xi \tilde{d}, \quad (27)$$

где

$$\tilde{N} = [\tilde{n}_1 \tilde{n}_2 \tilde{n}_3]; \quad \tilde{a} = [a_1 a_2 a_3]^T; \quad \tilde{b} = [b_1 b_2 b_3]^T - \quad (28)$$

– матрица собственных векторов и векторы неизвестных коэффициентов;

$$\tilde{\Lambda}_{c\xi} = \text{diag}[\cosh \lambda_i \xi]; \quad \tilde{\Lambda}_{s\xi} = \text{diag}[\sinh \lambda_i \xi] - \quad (29)$$

– диагональные матрицы функций.

Составление матрицы собственных векторов по (28) позволяет представить уравнения (23) в матричном виде:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{22}\tilde{C}_{33}^{-1} = \frac{1}{L^2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}^2 \tilde{N}^{-1}, \\ \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1} = L^2 \tilde{N} \tilde{\Lambda}^{-2} \tilde{N}^{-1}, \end{cases} \quad \text{или} \quad (30)$$

где

$$\tilde{\Lambda}^2 = \text{diag}[\lambda_i^2]. \quad (31)$$

Подчиняем усилие \tilde{s}_3 по (27) граничным условиям при $\xi = 0, 1$:

$$\begin{cases} \tilde{s}_{3N} = \tilde{N} \tilde{a} + \tilde{c}; \\ \tilde{s}_{3K} = \tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c \tilde{a} + \tilde{\Lambda}_s \tilde{b}) + \tilde{c} + \tilde{d}, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_c = \text{diag}[\cosh \lambda_i]; \quad \tilde{\Lambda}_s = \text{diag}[\sinh \lambda_i]. \quad (33)$$

Из решения системы уравнений (32) найдем оставшиеся неизвестными векторы \tilde{a}, \tilde{b} :

$$\begin{cases} \tilde{a} = \tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} - \tilde{c}); \\ \tilde{b} = \tilde{\Lambda}_s^{-1}[\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3K} - \tilde{c} - \tilde{d}) - \tilde{\Lambda}_c \tilde{a}]. \end{cases} \quad (34)$$

Подставляя (22) в (34) и (34-1) в (34-2), окончательно получим:

$$\begin{cases} \tilde{a} = \tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N}); \\ \tilde{b} = \tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3K} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2K}) - \tilde{\Lambda}_t^{-1}\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N}), \end{cases} \quad (35)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_t = \text{diag}[\tanh \lambda_i]. \quad (36)$$

Усилия \tilde{s}_3 по (27) с учетом найденных векторов (22), (35) равны:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_3 = & \tilde{N}(\tilde{\Lambda}_{c\xi} - \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1})\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N}) + \\ & + \tilde{N}\tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3K} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2K}) - \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}(\tilde{q}_{2N} + \xi\tilde{q}_{2R}).\end{aligned}\quad (37)$$

Усилия \tilde{s}_2'' найдем, подставив (37) в (12):

$$\begin{aligned}\tilde{s}_2'' = -\tilde{s}_3^x = & -\frac{1}{L}[\tilde{N}\tilde{\Lambda}(\tilde{\Lambda}_{s\xi} - \tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1})\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N}) + \\ & + \tilde{N}\tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3K} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2K}) - \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2R}].\end{aligned}\quad (38)$$

Выразим усилия \tilde{s}_2' из (3) и с учетом (18), (38) будем иметь:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_2' = \tilde{s}_2 - \tilde{s}_2'' = & \tilde{s}_{2N} - L(\xi\tilde{q}_{2N} + \frac{\xi^2}{2}\tilde{q}_{2R}) + \\ & + \frac{1}{L}[\tilde{N}\tilde{\Lambda}(\tilde{\Lambda}_{s\xi} - \tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1})\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N}) + \\ & + \tilde{N}\tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3K} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2K}) - \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2R}].\end{aligned}\quad (39)$$

Базовые деформации $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ находятся из физических уравнений (8) при тождественном выполнении соотношения (13):

$$\tilde{e}_1 = \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{s}_1; \quad \tilde{e}_2 = \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{s}_2'; \quad \tilde{e}_3 = \tilde{C}_{33}^{-1}\tilde{s}_3 \equiv \tilde{e}_2^x. \quad (40)$$

Выражения для деформаций получаются после подстановки в (40) усилий по (19), (39), (37) и ввиду элементарности этой операции не приводятся.

1.2.2. Определение функций перемещений

Интегрируем геометрическое уравнение (5-1) с учетом (40-1), (19) и определением постоянной интегрирования из граничного условия $\tilde{u}_1(\xi = 0) = \tilde{u}_{1N}$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 = \int \tilde{e}_1 dx = & \tilde{C}_{11}^{-1} \int \tilde{s}_1 dx = \tilde{u}_{1N} + L\tilde{C}_{11}^{-1} \{ \xi \tilde{s}_{1N} + \\ & + L\tilde{R}_{12} [\frac{\xi^2}{2} \tilde{s}_{2N} - L(\frac{\xi^3}{6} \tilde{q}_{2N} + \frac{\xi^4}{24} \tilde{q}_{2R})] - L(\frac{\xi^2}{2} \tilde{q}_{1N} + \frac{\xi^3}{6} \tilde{q}_{1R}) \}.\end{aligned}\quad (41)$$

Аналогично интегрируем (5-2) с учетом (40-2), (39), (41) и граничного условия $\tilde{u}_2(\xi = 0) = \tilde{u}_{2N}$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_2 = \int \tilde{e}_2 dx - \tilde{G}_{21} \int \tilde{u}_1 dx = & \tilde{C}_{22}^{-1} \int \tilde{s}_2' dx - \tilde{G}_{21} \int \tilde{u}_1 dx = \tilde{u}_{2N} + L\tilde{C}_{22}^{-1} \{ \xi \tilde{s}_{2N} - \\ & - L(\frac{\xi^2}{2} \tilde{q}_{2N} + \frac{\xi^3}{6} \tilde{q}_{2R}) + \frac{1}{L} [\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_{c\xi} - \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1} - \tilde{I})\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3N} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N}) + \\ & + \tilde{N}\tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{N}^{-1}(\tilde{s}_{3K} + \tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2K}) - \xi\tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2R}] \} - \xi L\tilde{G}_{21}\tilde{u}_{1N} - L^2\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} \cdot \\ & \cdot \{ \frac{\xi^2}{2} \tilde{s}_{1N} + L\tilde{R}_{12} [\frac{\xi^3}{6} \tilde{s}_{2N} - L(\frac{\xi^4}{24} \tilde{q}_{2N} + \frac{\xi^5}{120} \tilde{q}_{2R})] - L(\frac{\xi^3}{6} \tilde{q}_{1N} + \frac{\xi^4}{24} \tilde{q}_{1R}) \}.\end{aligned}\quad (42)$$

1.3. Уравнения метода начальных параметров

Вывод уравнений метода начальных параметров (МНП) является не целью данной работы, а лишь промежуточным этапом при построении матриц КЭ. Их можно использовать для расчета статически определенного стержня или балки при задании граничных условий на концах. Если определены силовые и кинематические факторы (параметры) в начальном узле стержня, то расчет по МНП сводится к рекуррентному вычислению данных факторов в последующих узлах и не требует использования трудоемких процедур формирования и решения глобальной системы уравнений. При этом разбиение стержня на элементы (участки) осуществляется таким образом, чтобы в пределах элемента поперечное сечение было постоянным, а погонная нагрузка изменялась по линейному закону.

Таким образом, для использования МНП требуется определить выражения силовых и кинематических факторов в конечном узле элемента через аналогичные факторы в начальном узле.

1.3.1. Определение усилий и перемещений в конечном узле элемента

Ставим граничные условия на усилия $\tilde{s}_1(\xi = 1) = \tilde{s}_{1K}$, $\tilde{s}_2(\xi = 1) = \tilde{s}_{2K}$ в выражениях (19), (18):

$$\tilde{s}_{1K} = \tilde{s}_{1N} + L\tilde{R}_{12}\tilde{s}_{2N} - \frac{L}{2}(\tilde{q}_{1N} + \tilde{q}_{1K}) - \frac{L^2}{6}\tilde{R}_{12}(2\tilde{q}_{2N} + \tilde{q}_{2K}); \quad (43)$$

$$\tilde{s}_{2K} = \tilde{s}_{2N} - \frac{L}{2}(\tilde{q}_{2N} + \tilde{q}_{2K}). \quad (44)$$

Усилия \tilde{s}_{3K} находим из (40-2), (39) при граничном условии $\tilde{e}_2(\xi = 0) = \tilde{e}_{2N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{3K} = & L\tilde{N}\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{N}^{-1}\tilde{C}_{22}\tilde{e}_{2N} - L\tilde{N}\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{N}^{-1}\tilde{s}_{2N} + \tilde{N}\tilde{\Lambda}_c\tilde{N}^{-1}\tilde{s}_{3N} + \\ & + \tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1})\tilde{N}^{-1}\tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2N} + \tilde{N}(\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1} - \tilde{I})\tilde{N}^{-1}\tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{q}_{2K}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из граничных условий на перемещения $\tilde{u}_1(\xi = 1) = \tilde{u}_{1K}$, $\tilde{u}_2(\xi = 1) = \tilde{u}_{2K}$ в выражениях (41) и (42) с учетом (45) следует:

$$\tilde{u}_{1K} = \tilde{u}_{1N} + L\tilde{C}_{11}^{-1}[\tilde{s}_{1N} + \frac{L}{2}\tilde{R}_{12}\tilde{s}_{2N} - \frac{L}{6}(2\tilde{q}_{1N} + \tilde{q}_{1K}) - \frac{L^2}{24}\tilde{R}_{12}(3\tilde{q}_{2N} + \tilde{q}_{2K})]; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2K} = & -L\tilde{G}_{21}\tilde{u}_{1N} + \tilde{u}_{2N} + L\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{N}^{-1}\tilde{C}_{22}\tilde{e}_{2N} - \frac{L^2}{2}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{s}_{1N} - \\ & - L[\frac{L^2}{6}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} + \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1} - \tilde{I})\tilde{N}^{-1}]\tilde{s}_{2N} + \\ & + \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I})\tilde{N}^{-1}\tilde{s}_{3N} + \frac{L^3}{24}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}(3\tilde{q}_{1N} + \tilde{q}_{1K}) + \\ & + \{\tilde{C}_{22}^{-1}[\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1})\tilde{N}^{-1}\tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1} - \frac{L^2}{3}\tilde{I}] + \frac{L^4}{30}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12}\}\tilde{q}_{2N} + \\ & + \{\tilde{C}_{22}^{-1}[\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1} - \tilde{I})\tilde{N}^{-1}\tilde{C}_{33}\tilde{C}_{22}^{-1} - \frac{L^2}{6}\tilde{I}] + \frac{L^4}{120}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12}\}\tilde{q}_{2K}. \end{aligned} \quad (47)$$

Дополнительно ставим граничные условия на деформации $\tilde{e}_2(\xi=1) = \tilde{e}_{2K}$ в выражениях (40-2), (39) с учетом (45):

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{2K} = & \tilde{C}_{22}^{-1} \{ \tilde{N} \tilde{\Lambda}_c \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \tilde{e}_{2N} - \tilde{N} (\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I}) \tilde{N}^{-1} \tilde{s}_{2N} + \frac{1}{L} \tilde{N} \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_s \tilde{N}^{-1} \tilde{s}_{3N} + \\ & + [\frac{1}{L} \tilde{N} (\tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_s - \tilde{\Lambda}_c + \tilde{I}) \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{33} \tilde{C}_{22}^{-1} - \frac{L}{2} \tilde{I}] \tilde{q}_{2N} + \\ & + [\frac{1}{L} \tilde{N} (\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I}) \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{33} \tilde{C}_{22}^{-1} - \frac{L}{2} \tilde{I}] \tilde{q}_{2K} \}. \end{aligned} \quad (48)$$

1.3.2. Построение матриц метода начальных параметров

Введем объединенные векторы усилий, перемещений и погонных нагрузок для начального и конечного узлов элемента:

$$\tilde{s}_N = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{1N} \\ \tilde{s}_{2N} \\ \tilde{s}_{3N} \end{bmatrix}; \quad \tilde{s}_K = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{1K} \\ \tilde{s}_{2K} \\ \tilde{s}_{3K} \end{bmatrix}; \quad \tilde{u}_N = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1N} \\ \tilde{u}_{2N} \\ \tilde{e}_{2N} \end{bmatrix}; \quad \tilde{u}_K = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1K} \\ \tilde{u}_{2K} \\ \tilde{e}_{2K} \end{bmatrix}; \quad (49)$$

$$\tilde{q}_N = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{1N} \\ \tilde{q}_{2N} \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_K = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{1K} \\ \tilde{q}_{2K} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Отметим, что в объединенные векторы перемещений в (49) включены векторы деформаций \tilde{e}_{2N} , \tilde{e}_{2K} , поскольку они являются мерой продольных перемещений, вызванных деформацией поперечного сечения (см. (23)*).

Тогда уравнения (43)-(48) представимы в матричном виде:

$$\begin{cases} \tilde{s}_K = \tilde{S}_u \tilde{u}_N + \tilde{S}_s \tilde{s}_N + \tilde{S}_{qN} \tilde{q}_N + \tilde{S}_{qK} \tilde{q}_K; \\ \tilde{u}_K = \tilde{U}_u \tilde{u}_N + \tilde{U}_s \tilde{s}_N + \tilde{U}_{qN} \tilde{q}_N + \tilde{U}_{qK} \tilde{q}_K, \end{cases} \quad (51)$$

где матрицы с учетом замены по (30-2) равны:

$$\tilde{S}_u = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} & \circ \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_s = \begin{bmatrix} \tilde{I} & L \tilde{R}_{12} & \circ \\ \circ & \tilde{I} & \circ \\ \circ & -L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{N}^{-1} & \tilde{N} \tilde{\Lambda}_c \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \quad (52)$$

$$\tilde{U}_u = \begin{bmatrix} \tilde{I} & \circ & \circ \\ -L \tilde{G}_{21} & \tilde{I} & L \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_s \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ \circ & \circ & \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_c \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}; \quad (53)$$

$$\tilde{U}_s = \begin{bmatrix} L\tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{2}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} & \circ \\ -\frac{L^2}{2}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{6}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} - L\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1} - \tilde{I})\tilde{N}^{-1} & \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I})\tilde{N}^{-1} \\ \circ & -\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I})\tilde{N}^{-1} & \frac{1}{L}\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}_s\tilde{N}^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{S}_{qN} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2}\tilde{I} & -\frac{L^2}{3}\tilde{R}_{12} \\ \circ & -\frac{L}{2}\tilde{I} \\ \circ & L^2\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1})\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_{qK} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2}\tilde{I} & -\frac{L^2}{6}\tilde{R}_{12} \\ \circ & -\frac{L}{2}\tilde{I} \\ \circ & L^2\tilde{N}(\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1} - \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2}\tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \quad (54)$$

$$\tilde{U}_{qN} = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{3}\tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{8}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} \\ \frac{L^3}{8}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} & L^2\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}[(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1})\tilde{\Lambda}^{-2} - \frac{1}{3}\tilde{I}]\tilde{N}^{-1} + \frac{L^4}{30}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} \\ \circ & L\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}[(\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}_s - \tilde{\Lambda}_c + \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - \frac{1}{2}\tilde{I}]\tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \quad (55)$$

$$\tilde{U}_{qK} = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{6}\tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{24}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} \\ \frac{L^3}{24}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} & L^2\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}[(\tilde{\Lambda}_s\tilde{\Lambda}^{-1} - \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - \frac{1}{6}\tilde{I}]\tilde{N}^{-1} + \frac{L^4}{120}\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} \\ \circ & L\tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{N}[(\tilde{\Lambda}_c - \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - \frac{1}{2}\tilde{I}]\tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}.$$

1.4. Построение матриц жесткости и приведения нагрузок конечного элемента

Матричное уравнение статического равновесия конечного элемента записывается в виде

$$\bar{C}\bar{u} = \bar{g} + \bar{Q}\bar{q}, \quad (56)$$

где векторы перемещений \bar{u} , граничных сил \bar{g} , погонных нагрузок \bar{q} и матрицы жесткости \bar{C} и приведения нагрузок \bar{Q} для стержневого КЭ представляются в блочной форме:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_N \\ \tilde{u}_K \end{bmatrix}; \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} -\tilde{s}_N \\ \tilde{s}_K \end{bmatrix}; \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_N \\ \tilde{q}_K \end{bmatrix}; \quad (57)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{NN} & \tilde{C}_{NK} \\ \tilde{C}_{KN} & \tilde{C}_{KK} \end{bmatrix}; \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{NN} & \tilde{Q}_{NK} \\ \tilde{Q}_{KN} & \tilde{Q}_{KK} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Выразим из (51-2) вектор усилий \tilde{S}_N , затем, подставив его в (51-1), определим вектор усилий \tilde{S}_K и составим из найденных усилий вектор граничных сил \bar{g} по (57). Группируя полученные выражения при векторе перемещений \bar{u} , найдем блоки матрицы жесткости \bar{C} по (58) с учетом (52), (53):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{NN} &= \tilde{U}_s^{-1} \tilde{U}_u = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} + \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & -\frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ -\frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & \tilde{D}^{-1} & L \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 + \tilde{\Lambda}_2] \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{NK} &= -\tilde{U}_s^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} - \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & \frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ -\frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & -\tilde{D}^{-1} & L \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & -L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{\Lambda}_1] \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{KN} &= \tilde{S}_u - \tilde{S}_s \tilde{U}_s^{-1} \tilde{U}_u = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} - \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & -\frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ \frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & -\tilde{D}^{-1} & -L \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{\Lambda}_1] \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{KK} &= \tilde{S}_s \tilde{U}_s^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} + \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & \frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ \frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & \tilde{D}^{-1} & -L \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & -L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 + \tilde{\Lambda}_2] \tilde{N}^{-1} \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{D} = \frac{L^3}{12} \tilde{G}_{21} \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{R}_{12} + L \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{N} (\tilde{I} - 2\tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^{-1}; \quad (60)$$

$$\tilde{\Lambda}_1 = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_s^{-1}; \quad \tilde{\Lambda}_2 = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_t^{-1}; \quad \tilde{\Lambda}_3 = \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1. \quad (61)$$

Матрица жесткости конечного элемента должна обладать свойством симметрии, условия которой можно записать в блочном виде:

$$\tilde{C}_{NN} = \tilde{C}_{NN}^T; \quad \tilde{C}_{NK} = \tilde{C}_{KN}^T; \quad \tilde{C}_{KK} = \tilde{C}_{KK}^T, \quad (62)$$

однако сравнение ее блоков в (59) не дает явного подтверждения данного свойства для всех компонент матрицы. Доказательство симметрии матрицы жесткости по (62), а также матрицы \tilde{D} по (60) осуществляется с помощью следующего разложения, согласованного с частотным уравнением (30):

$$\begin{cases} \tilde{C}_{22} = \tilde{N} \tilde{J} \tilde{N}^T; \\ \tilde{C}_{33} = L^2 \tilde{N} \tilde{\Lambda}^{-2} \tilde{J} \tilde{N}^T, \end{cases} \quad (63)$$

где \tilde{J} – диагональная матрица.

В дальнейшем для упрощения формул наряду с (63) будет использоваться следующее из (60) с учетом (63) выражение для произведения матриц:

$$\tilde{G}_{21} \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{R}_{12} = \frac{12}{L^3} [\tilde{D} - L \tilde{N}^{-T} \tilde{J}^{-1} (\tilde{I} - 2 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^{-1}]. \quad (64)$$

Заметим, что матрица \tilde{C}_{11} из (64) явно не выражается.

Подставляя разложение (63) в (59), получим окончательные выражения для блоков матрицы жесткости \bar{C} , в которых выполнение условий симметрии по (62) становится очевидным.

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{NN} &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{D}_1 + \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & -\frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ -\frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & \tilde{D}^{-1} & L \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T & L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 + \tilde{\Lambda}_2 \tilde{J}] \tilde{N}^T \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{NK} &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{D}_1 - \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & \frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ -\frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & -\tilde{D}^{-1} & L \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T & -L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{\Lambda}_1 \tilde{J}] \tilde{N}^T \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{KN} &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{D}_1 - \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & -\frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ \frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & -\tilde{D}^{-1} & -L \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T & L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{\Lambda}_1 \tilde{J}] \tilde{N}^T \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (65)$$

$$\tilde{C}_{KK} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} \tilde{D}_1 + \frac{1}{L} \tilde{C}_{11} & \frac{L}{2} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & -\frac{L^2}{2} \tilde{D}_2 \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ \frac{L}{2} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} & \tilde{D}^{-1} & -L \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^T \\ -\frac{L^2}{2} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T & -L \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N} [L \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3 + \tilde{\Lambda}_2 \tilde{J}] \tilde{N}^T \end{bmatrix}.$$

Здесь для сокращения записи выражений обозначено:

$$\tilde{D}_1 = \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21}; \quad \tilde{D}_2 = \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T}; \quad \tilde{D}_3 = \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T}. \quad (66)$$

Блоки матрицы приведения нагрузок \bar{Q} по (58), полученные аналогично матрице жесткости путем группировки выражений при векторе погонных нагрузок \bar{q} , с учетом (52)-(55), (63), (64), (66) равны:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{NN} &= -\tilde{U}_s^{-1} \tilde{U}_{qN} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L}{3} \tilde{I} - \frac{L^4}{48} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^2}{20} \tilde{R}_{12} + \frac{L^3}{120} \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^3}{24} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{7L}{20} \tilde{I} - \frac{L^2}{60} \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^4}{24} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{20} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_5 \tilde{N}^{-1} - \frac{L^3}{60} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \\ \tilde{Q}_{NK} &= -\tilde{U}_s^{-1} \tilde{U}_{qK} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L}{6} \tilde{I} - \frac{L^4}{48} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^2}{30} \tilde{R}_{12} - \frac{L^3}{120} \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^3}{24} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{3L}{20} \tilde{I} + \frac{L^2}{60} \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^4}{24} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{20} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_6 \tilde{N}^{-1} + \frac{L^3}{60} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{KN} &= -\tilde{S}_{qN} + \tilde{S}_s \tilde{U}_s^{-1} \tilde{U}_{qN} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L}{6} \tilde{I} - \frac{L^4}{48} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{30} \tilde{R}_{12} + \frac{L^3}{120} \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ -\frac{L^3}{24} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{3L}{20} \tilde{I} + \frac{L^2}{60} \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^4}{24} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^2}{20} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_6 \tilde{N}^{-1} - \frac{L^3}{60} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{KK} &= -\tilde{S}_{qK} + \tilde{S}_s \tilde{U}_s^{-1} \tilde{U}_{qK} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L}{3} \tilde{I} - \frac{L^4}{48} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{20} \tilde{R}_{12} - \frac{L^3}{120} \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ -\frac{L^3}{24} \tilde{D}^{-1} \tilde{G}_{21} \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{7L}{20} \tilde{I} - \frac{L^2}{60} \tilde{D}^{-1} \tilde{N}^{-T} \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^4}{24} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^2}{20} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_5 \tilde{N}^{-1} + \frac{L^3}{60} \tilde{N} \tilde{\Lambda}_3 \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}_4 = \tilde{I} - 12\tilde{\Lambda}_3 + 60\tilde{\Lambda}^{-2} - 120\tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Lambda}^{-2}; \\ \tilde{\Lambda}_5 = 3\tilde{\Lambda}_1 + 7\tilde{\Lambda}_2 - 20\tilde{\Lambda}^{-2} + 20\tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Lambda}^{-2}; \\ \tilde{\Lambda}_6 = 7\tilde{\Lambda}_1 + 3\tilde{\Lambda}_2 - 20\tilde{\Lambda}_3 \tilde{\Lambda}^{-2}. \end{cases} \quad (68)$$

Отметим, что приведенные в (67) диагональные блоки \tilde{Q}_{NN} , \tilde{Q}_{KK} и побочные блоки \tilde{Q}_{NK} , \tilde{Q}_{KN} матрицы приведения нагрузок имеют одинаковые с точностью до знака компоненты, причем смены знаков осуществляются в шахматном порядке. Это свойство, как и симметрия матрицы жесткости, свидетельствует о корректности найденных матриц.

1.5. Матрицы функций формы конечного элемента

Задачу построения КЭ методом прямого интегрирования завершает определение точных функций формы (ФФ) элемента, задающих функции перемещений в зависимости от векторов \tilde{u} , \tilde{q} .

Введем наряду с используемым ранее вектором функций перемещений \tilde{u} расширенный вектор $\tilde{\tilde{u}}$, дополнительно включающий в себя по аналогии с (49) вектор деформаций $\tilde{\tilde{e}}_2$:

$$\tilde{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{e}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{\tilde{e}}_2 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Тогда найденные функции перемещений \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 по (41), (42) и деформаций $\tilde{\tilde{e}}_2$ по (40-2) с учетом (39) и использованием замен (63), (64) представимы в блочной матричной форме:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{u}} = \tilde{F}_u \tilde{u}_N + \tilde{F}_{sN} \tilde{s}_N + \tilde{F}_{sK} \tilde{s}_K + \tilde{F}_{qN} \tilde{q}_N + \tilde{F}_{qK} \tilde{q}_K; \\ \tilde{\tilde{e}}_2 = \tilde{F}_u \tilde{u}_N + \tilde{F}_{sN} \tilde{s}_N + \tilde{F}_{sK} \tilde{s}_K + \tilde{F}_{qN} \tilde{q}_N + \tilde{F}_{qK} \tilde{q}_K, \end{cases} \quad (70)$$

где обозначены следующие функциональные матрицы от аргумента ξ :

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{sN} &= \left[\begin{array}{ccc} L\xi\tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{2}\xi^2\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} & \circ \\ -\frac{L^2}{2}\xi^2\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} & L\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{1\xi}\tilde{N}^{-1} - 2\xi^3\tilde{D} & \tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{2\xi}\tilde{N}^{-1} \\ \circ & \tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{N}^{-1} & \frac{1}{L}\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{3\xi}\tilde{N}^{-1} \end{array} \right]; \\
\tilde{F}_{sK} &= \left[\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{4\xi}\tilde{N}^{-1} \\ \circ & \circ & \frac{1}{L}\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{5\xi}\tilde{N}^{-1} \end{array} \right]; & \tilde{F}_u = \left[\begin{array}{ccc} \tilde{I} & \circ & \circ \\ -L\xi\tilde{G}_{21} & \tilde{I} & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right]; \tag{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{qN} &= \left[\begin{array}{ccc} -\frac{L^2}{6}(3\xi^2 - \xi^3)\tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{24}(4\xi^3 - \xi^4)\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} & \\ \frac{L^3}{24}(4\xi^3 - \xi^4)\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{30}\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{6\xi}\tilde{N}^{-1} + \frac{L}{10}(5\xi^4 - \xi^5)\tilde{D} & \\ \circ & \frac{L}{2}\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{7\xi}\tilde{N}^{-1} & \end{array} \right]; \\
\tilde{F}_{qK} &= \left[\begin{array}{ccc} -\frac{L^2}{6}\xi^3\tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{24}\xi^4\tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} & \\ \frac{L^3}{24}\xi^4\tilde{G}_{21}\tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^2}{30}\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{8\xi}\tilde{N}^{-1} + \frac{L}{10}\xi^5\tilde{D} & \\ \circ & \frac{L}{2}\tilde{N}^{-T}\tilde{J}^{-1}\tilde{J}_{9\xi}\tilde{N}^{-1} & \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Здесь верхние части матриц, отделенные штриховыми линиями, соответствуют неполным матрицам, отмеченным в (70) одинарными тильдами, а символ аргумента ξ в нижних индексах содержат диагональные матрицы функций $\tilde{J}_{i\xi}$, равные:

$$\begin{cases}
\tilde{J}_{1\xi} = (\xi + 2\xi^3)\tilde{I} - 4\xi^3\tilde{\Lambda}_3; \\
\tilde{J}_{2\xi} = \tilde{\Lambda}_{c\xi} - \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1} - \tilde{I}; \\
\tilde{J}_{3\xi} = (\tilde{\Lambda}_{s\xi} - \tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_t^{-1})\tilde{\Lambda}; \\
\tilde{J}_{4\xi} = \tilde{\Lambda}_{s\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}; \\
\tilde{J}_{5\xi} = \tilde{\Lambda}_{c\xi}\tilde{\Lambda}_s^{-1}\tilde{\Lambda}; \\
\tilde{J}_{6\xi} = 30(\tilde{J}_{2\xi} + \xi\tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - (15\xi^2 - 5\xi^3 + 15\xi^4 - 3\xi^5)\tilde{I} + 6(5\xi^4 - \xi^5)\tilde{\Lambda}_3; \\
\tilde{J}_{7\xi} = 2(\tilde{J}_{3\xi} + \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - (2\xi - \xi^2)\tilde{I}; \\
\tilde{J}_{8\xi} = 30(\tilde{J}_{4\xi} - \xi\tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - (5\xi^3 + 3\xi^5)\tilde{I} + 6\xi^5\tilde{\Lambda}_3; \\
\tilde{J}_{9\xi} = 2(\tilde{J}_{5\xi} - \tilde{I})\tilde{\Lambda}^{-2} - \xi^2\tilde{I}.
\end{cases} \tag{72}$$

Выражая векторы усилий из уравнения равновесия КЭ (56) - (58)

$$\begin{cases} \tilde{s}_N = -\tilde{C}_{NN}\tilde{u}_N - \tilde{C}_{NK}\tilde{u}_K + \tilde{Q}_{NN}\tilde{q}_N + \tilde{Q}_{NK}\tilde{q}_K; \\ \tilde{s}_K = \tilde{C}_{KN}\tilde{u}_N + \tilde{C}_{KK}\tilde{u}_K - \tilde{Q}_{KN}\tilde{q}_N - \tilde{Q}_{KK}\tilde{q}_K \end{cases} \quad (73)$$

и подставляя их в (70), получим точные **функции перемещений**:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{\Phi}^T \tilde{u} + \tilde{\Theta}^T \tilde{q} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_N^T & \tilde{\Phi}_K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_N \\ \tilde{u}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_N^T & \tilde{\Theta}_K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_N \\ \tilde{q}_K \end{bmatrix}; \\ \tilde{\tilde{u}} = \tilde{\tilde{\Phi}}^T \tilde{u} + \tilde{\tilde{\Theta}}^T \tilde{q} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\Phi}}_N^T & \tilde{\tilde{\Phi}}_K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_N \\ \tilde{u}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\Theta}}_N^T & \tilde{\tilde{\Theta}}_K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_N \\ \tilde{q}_K \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (74)$$

где блоки матриц **функций формы** $\tilde{\Phi}^T$ от перемещений и $\tilde{\Theta}^T$ от нагрузки с учетом выражений для матриц (65), (67), (71) равны:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Phi}}_N^T &= \tilde{\tilde{F}}_u - \tilde{\tilde{F}}_{sN}\tilde{C}_{NN} + \tilde{\tilde{F}}_{sK}\tilde{C}_{KN} = \\ &= \begin{bmatrix} \xi_1 \tilde{I} - \frac{L^3}{4} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 & \frac{L^2}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & \frac{L^3}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \\ \frac{L^2}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T - L \xi_3 \tilde{G}_{21} & \xi_4 \tilde{I} - L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{2\xi} - L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \\ \frac{L}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T & -\tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{4\xi} - L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \end{bmatrix}; \\ \tilde{\tilde{\Phi}}_K^T &= -\tilde{\tilde{F}}_{sN}\tilde{C}_{NK} + \tilde{\tilde{F}}_{sK}\tilde{C}_{KK} = \\ &= \begin{bmatrix} \xi_1 \tilde{I} - \frac{L^3}{4} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 & -\frac{L^2}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{R}_{12} \tilde{D}^{-1} & \frac{L^3}{2} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_2 \\ \frac{L^2}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T + L \xi_5 \tilde{G}_{21} & \xi_6 \tilde{I} + L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & L \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{5\xi} - L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \\ \frac{L}{2} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T & \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{N}^{-1} \tilde{D}^{-1} & \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{6\xi} - L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{\Lambda}_3) \tilde{N}^T \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Theta}}_N^T &= \tilde{\tilde{F}}_{qN} + \tilde{\tilde{F}}_{sN}\tilde{Q}_{NN} - \tilde{\tilde{F}}_{sK}\tilde{Q}_{KN} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{6} \xi_7 \tilde{C}_{11}^{-1} - \frac{L^5}{48} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L^3}{120} \tilde{C}_{11}^{-1} (-\xi_8 \tilde{R}_{12} + L \xi_2 \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1}) \\ \frac{L^3}{24} (-\xi_9 \tilde{G}_{21} + L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T) \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{10} \xi_{10} \tilde{D} + \frac{L^2}{60} \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{7\xi} - L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^3}{24} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{60} \tilde{N}^{-T} (3 \tilde{K}_{8\xi} - L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_K^T &= \tilde{F}_{qK} + \tilde{F}_{sN} \tilde{Q}_{NK} - \tilde{F}_{sK} \tilde{Q}_{KK} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L^2}{6} \xi_{11} \tilde{C}_{11}^{-1} - \frac{L^5}{48} \xi_2 \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{D}_1 \tilde{C}_{11}^{-1} & -\frac{L^3}{120} \tilde{C}_{11}^{-1} (\xi_{12} \tilde{R}_{12} + L \xi_2 \tilde{D}_2 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4 \tilde{N}^{-1}) \\ \frac{L^3}{24} (\xi_9 \tilde{G}_{21} + L \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_2^T) \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{10} \xi_{13} \tilde{D} + \frac{L^2}{60} \tilde{N}^{-T} (\tilde{K}_{9\xi} + L \tilde{K}_{1\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \\ \frac{L^3}{24} \tilde{N}^{-T} \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_2^T \tilde{C}_{11}^{-1} & \frac{L}{60} \tilde{N}^{-T} (3 \tilde{K}_{10\xi} + L \tilde{K}_{3\xi} \tilde{D}_3 \tilde{J}^{-1} \tilde{\Lambda}_4) \tilde{N}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь, как и в (71), отделенные штриховыми линиями верхние части матриц соответствуют неполным матрицам ФФ, отмеченным в (74) одинарными тильдами, а диагональные матрицы функций $\tilde{K}_{i\xi}$, аналогичные $\tilde{J}_{i\xi}$ в (72), и полиномы ξ_i от аргумента ξ равны:

$$\begin{cases} \tilde{K}_{1\xi} = \tilde{J}^{-1} [-3\xi^2 \tilde{I} + \tilde{J}_{1\xi} + (6\xi^2 \tilde{I} + \tilde{J}_{2\xi} - \tilde{J}_{4\xi}) \tilde{\Lambda}_3]; \\ \tilde{K}_{2\xi} = -\xi_6 \tilde{\Lambda}_3 - \tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_1; \\ \tilde{K}_{3\xi} = \tilde{J}^{-1} [\tilde{I} + (\tilde{J}_{3\xi} - \tilde{J}_{5\xi}) \tilde{\Lambda}_3]; \\ \tilde{K}_{4\xi} = -\tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_1; \\ \tilde{K}_{5\xi} = -\xi_6 \tilde{\Lambda}_3 + \tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_2; \\ \tilde{K}_{6\xi} = \tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_2; \\ \tilde{K}_{7\xi} = \tilde{J}^{-1} (-18\xi^2 \tilde{I} + 21\tilde{J}_{1\xi} + 36\xi^2 \tilde{\Lambda}_3 - \xi_6 \tilde{\Lambda}_4 + 2\tilde{J}_{6\xi} + 3\tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_5 + 3\tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_6); \\ \tilde{K}_{8\xi} = \tilde{J}^{-1} (7\tilde{I} + 10\tilde{J}_{7\xi} + \tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_5 + \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_6); \\ \tilde{K}_{9\xi} = \tilde{J}^{-1} (-12\xi^2 \tilde{I} + 9\tilde{J}_{1\xi} + 24\xi^2 \tilde{\Lambda}_3 + \xi_6 \tilde{\Lambda}_4 + 2\tilde{J}_{8\xi} + 3\tilde{J}_{2\xi} \tilde{\Lambda}_6 + 3\tilde{J}_{4\xi} \tilde{\Lambda}_5); \\ \tilde{K}_{10\xi} = \tilde{J}^{-1} (3\tilde{I} + 10\tilde{J}_{9\xi} + \tilde{J}_{3\xi} \tilde{\Lambda}_6 + \tilde{J}_{5\xi} \tilde{\Lambda}_5); \end{cases} \quad (76)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - \xi; \\ \xi_2 = \xi - \xi^2; \\ \xi_3 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3; \\ \xi_4 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \\ \xi_5 = \xi^2 - \xi^3; \\ \xi_6 = 3\xi^2 - 2\xi^3; \\ \xi_7 = 2\xi - 3\xi^2 + \xi^3; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_8 = 6\xi - 21\xi^2 + 20\xi^3 - 5\xi^4; \\ \xi_9 = \xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4; \\ \xi_{10} = 3\xi^2 - 7\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5; \\ \xi_{11} = \xi - \xi^3; \\ \xi_{12} = 4\xi - 9\xi^2 + 5\xi^4; \\ \xi_{13} = 2\xi^2 - 3\xi^3 + \xi^5. \end{cases} \quad (77)$$

Полученные блоки матриц ФФ подчиняются следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_N^T|_{\xi=0} = \tilde{\Phi}_K^T|_{\xi=1} = \tilde{I}; \\ \tilde{\Phi}_N^T|_{\xi=1} = \tilde{\Phi}_K^T|_{\xi=0} = \tilde{0}; \\ \tilde{\Theta}_N^T|_{\xi=0} = \tilde{\Theta}_N^T|_{\xi=1} = \tilde{\Theta}_K^T|_{\xi=0} = \tilde{\Theta}_K^T|_{\xi=1} = \tilde{0}. \end{cases} \quad (78)$$

Из последней строки (78) очевидно, что функции $\tilde{\Theta}^T$ описывают местные перемещения стержня от нагрузки, равные нулю на его торцах, т. е. перемещения от нагрузки полностью заземленного по торцам стержня с наложением линейных и угловых опорных связей, а также связей, препятствующих деформации торцов.

Заметим, что функции формы, приведенные в отделенных штриховыми линиями нижних строках матриц (75) и соответствующие деформациям $\tilde{\epsilon}_2$, являются зависимыми от ФФ двух верхних строк, задающих функции перемещений \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 , поскольку указанные векторы связаны геометрическим уравнением (5-2) и эта связь передается на компоненты данных матриц:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_{3jM}^T = \tilde{G}_{21} \tilde{\Phi}_{1jM}^T + \tilde{\Phi}_{2jM}^{xT}, & j=1,2,3, \quad M=N,K; \\ \tilde{\Theta}_{3jM}^T = \tilde{G}_{21} \tilde{\Theta}_{1jM}^T + \tilde{\Theta}_{2jM}^{xT}, & j=1,2, \quad M=N,K. \end{cases} \quad (79)$$

Отметим также, что трудоемкость получения матриц функций формы и последующих выкладок очень велика, как велика и вероятность ошибки при ручном выводе формул, и это побудило авторов разработать компьютерную программу Matrix, специализированную на операциях с простыми и функциональными коэффициентами и матрицами в символьном виде.

2. Построение матриц конечного элемента для задач динамики

Изложенная в работе [1] теория стержня предназначена для решения статических задач. Для распространения ее возможностей на решение задач динамики необходимо добавить в уравнения равновесия инерционные силы. При этом введение деформаций деформации в данную теорию естественно предполагает, что наряду с инерцией линейных и угловых перемещений, учитываемых в классических балочных теориях Релея и Тимошенко, необходимо дополнительно учесть и инерцию деформации.

2.1. Исходные дифференциальные уравнения динамического равновесия пространственного стержня с учетом деформации

В работе [1] дифференциальные уравнения равновесия элемента стержня (10), (16) составлялись непосредственным способом, при котором учесть инерцию деформации затруднительно. Поэтому ниже используется способ интегрирования уравнений равновесия бесконечно малого элемента (БМЭ), выделенного в поперечном сечении.

Добавляем инерционные силы в дифференциальные уравнения равновесия БМЭ для области Ω_s , соответствующей одному материалу с модулем упругости E_s , модулем сдвига G_s и плотностью ρ_s (см. (11)*):

$$\begin{cases} \rho_s \ddot{u}_{xs} - \sigma_{xs}^x - \tau_{yxs}^y - \tau_{zxs}^z = p_{xs}; \\ \rho_s \ddot{u}_{ys} - \tau_{xys}^x = p_{ys}; \\ \rho_s \ddot{u}_{zs} - \tau_{xzs}^x = p_{zs}, \end{cases} \quad y, z \in \Omega_s. \quad (80)$$

Входящие в (80) перемещения выражаются в блочной матричной форме (см. (23)*):

$$\begin{cases} u_{xs} = \tilde{f}_x^T \tilde{u}_1 + \tilde{\psi}_s^T \tilde{e}_2; \\ u_y = \tilde{f}_y^T \tilde{u}_2; \\ u_z = \tilde{f}_z^T \tilde{u}_2, \end{cases} \quad (81)$$

где (см. (24)*)

$$\tilde{f}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -z + z_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y - y_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{\psi}_s = \begin{bmatrix} \psi_{ys} \\ \psi_{zs} \\ \psi_{xs} \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Выполним ряд операций над уравнениями (80). Умножим первое уравнение на вектор \tilde{f}_x , проинтегрируем по площади F_s s -го контура (области) поперечного сечения и просуммируем по всем контурам. Затем умножим второе уравнение на \tilde{f}_y , третье – на \tilde{f}_z , сложим результаты и также проинтегрируем и просуммируем. В конце повторим процедуру с первым уравнением, но с вектором $\tilde{\psi}_s$. В итоге получим три уравнения равновесия для БМЭ стержня:

$$\begin{cases} \sum_s \rho_s \int_{F_s} \tilde{f}_x \ddot{u}_{xs} dF_s - \sum_s \int_{F_s} \tilde{f}_x \sigma_{xs}^x dF_s - \sum_s \int_{F_s} \tilde{f}_x (\tau_{yxs}^y + \tau_{zxs}^z) dF_s = \sum_s \int_{F_s} \tilde{f}_x p_{xs} dF_s; \\ \sum_s \rho_s \int_{F_s} (\tilde{f}_y \ddot{u}_{ys} + \tilde{f}_z \ddot{u}_{zs}) dF_s - \sum_s \int_{F_s} (\tilde{f}_y \tau_{xys}^x + \tilde{f}_z \tau_{xzs}^x) dF_s = \sum_s \int_{F_s} (\tilde{f}_y p_{ys} + \tilde{f}_z p_{zs}) dF_s; \\ \sum_s \rho_s \int_{F_s} \tilde{\psi}_s \ddot{u}_{xs} dF_s - \sum_s \int_{F_s} \tilde{\psi}_s \sigma_{xs}^x dF_s - \sum_s \int_{F_s} \tilde{\psi}_s (\tau_{yxs}^y + \tau_{zxs}^z) dF_s = \sum_s \int_{F_s} \tilde{\psi}_s p_{xs} dF_s. \end{cases} \quad (83)$$

Здесь вторые суммы интегралов каждого уравнения согласно формулам (37)* равны векторам \tilde{s}_1^x , \tilde{s}_2^x , \tilde{s}_3^x соответственно. Третья сумма интегралов первого уравнения после интегрирования по частям, применения формулы Грина (64)* и граничных условий (15)*, а также последовательного использования (3)*, (35)*, (13)*, (69)*, (93)* приводит к выражению $\tilde{R}_{12} \tilde{s}_2 - \tilde{q}_1''$. Третья сумма интегралов третьего уравнения оказалась нулевой, а суммы интегралов правых частей каждого уравнения согласно формулам (69)*, (96)* равны векторам \tilde{q}_1' , \tilde{q}_2 , \tilde{s}_2'' соответственно.

Таким образом, все перечисленные суммы в итоге привели к уравнениям статического равновесия стержня (16) и к выражению для усилия \tilde{s}_2'' (12). При этом первые суммы интегралов каждого уравнения (83), учитывающие инерционные силы, преобразуются подстановкой в них перемещений (81), после чего **уравнения динамического равновесия** стержня принимают вид

$$\begin{cases} \tilde{M}_{11} \ddot{u}_1 + \tilde{M}_{13} \ddot{e}_2 - \tilde{s}_1^x + \tilde{R}_{12} \tilde{s}_2 & = \tilde{q}_1; \\ \tilde{M}_{22} \ddot{u}_2 & - \tilde{s}_2^x & = \tilde{q}_2; \\ \tilde{M}_{31} \ddot{u}_1 + \tilde{M}_{33} \ddot{e}_2 & - \tilde{s}_3^x & = \tilde{s}_2'', \end{cases} \quad (84)$$

или в свернутой матричной форме

$$\tilde{M} \ddot{u} + \tilde{R} \tilde{s} = \tilde{q}, \quad (85)$$

где матрица инерции, расширенный дифференциальный оператор равновесия и вектор нагрузки равны

$$\tilde{\tilde{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{M}}_{11} & & \tilde{\tilde{M}}_{13} \\ & \tilde{\tilde{M}}_{22} & \\ \tilde{\tilde{M}}_{31} & & \tilde{\tilde{M}}_{33} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} -\partial^x \tilde{I} & \tilde{R}_{12} \\ & -\partial^x \tilde{I} \\ & & -\partial^x \tilde{I} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{s}_2'' \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Здесь блоки матрицы инерции определяются по формулам, аналогичным (40)* для блоков матрицы жесткости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\tilde{M}}_{11} = \sum_s \rho_s \int_{F_s} \tilde{f}_x \tilde{f}_x^T dF_s = \rho \begin{bmatrix} F & S_z'' & S_y'' \\ S_z'' & J_z'' & J_{yz}'' \\ S_y'' & J_{yz}'' & J_y'' \end{bmatrix}; \\ \tilde{\tilde{M}}_{13} = \tilde{\tilde{M}}_{31}^T = \sum_s \rho_s \int_{F_s} \tilde{f}_x \tilde{\psi}_s^T dF_s = \rho \begin{bmatrix} I_{\psi y}'' & I_{\psi z}'' & I_{\psi x}'' \\ I_{y\psi y}'' & I_{y\psi z}'' & I_{y\psi x}'' \\ I_{z\psi y}'' & I_{z\psi z}'' & I_{z\psi x}'' \end{bmatrix}; \\ \tilde{\tilde{M}}_{22} = \sum_s \rho_s \int_{F_s} (\tilde{f}_y \tilde{f}_y^T + \tilde{f}_z \tilde{f}_z^T) dF_s = \rho \begin{bmatrix} F & & -S_y'' + z_k F \\ & F & S_z'' - y_k F \\ -S_y'' + z_k F & S_z'' - y_k F & J_k'' \end{bmatrix}; \\ \tilde{\tilde{M}}_{33} = \sum_s \rho_s \int_{F_s} \tilde{\psi}_s \tilde{\psi}_s^T dF_s = \rho \begin{bmatrix} I_{\psi yy}'' & I_{\psi yz}'' & I_{\psi yx}'' \\ I_{\psi yz}'' & I_{\psi zz}'' & I_{\psi zx}'' \\ I_{\psi yx}'' & I_{\psi zx}'' & I_{\psi xx}'' \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (87)$$

Также по аналогии с (41)* - (44)* здесь обозначены приведенная и относительная плотности материалов стержня

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = (\sum_s \rho_s F_s) / F; \\ r_s = \rho_s / \rho \end{array} \right. \quad (88)$$

и дополнительные приведенные геометрические характеристики поперечного сечения, отмеченные двойными штрихами:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum_s \int_{F_s} dF_s; \\ S_z'' = \sum_s r_s \int_{F_s} y dF_s; \\ S_y'' = \sum_s r_s \int_{F_s} z dF_s; \\ J_z'' = \sum_s r_s \int_{F_s} y^2 dF_s; \\ J_y'' = \sum_s r_s \int_{F_s} z^2 dF_s; \\ J_{yz}'' = \sum_s r_s \int_{F_s} yz dF_s; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} J_x'' = J_y'' + J_z''; \\ J_k'' = J_x'' - 2z_k S_y'' - 2y_k S_z'' + (y_k^2 + z_k^2) F; \\ I_{\psi p}'' = \sum_s r_s \int_{F_s} \psi_{ps} dF_s; \\ I_{y\psi p}'' = \sum_s r_s \int_{F_s} y \psi_{ps} dF_s; \\ I_{z\psi p}'' = \sum_s r_s \int_{F_s} z \psi_{ps} dF_s; \\ I_{\psi pq}'' = \sum_s r_s \int_{F_s} \psi_{ps} \psi_{qs} dF_s. \end{array} \right. \quad p, q = y, z, x. \quad (89)$$

Замечание. Выражение для усилия \tilde{s}_2'' (12) было получено в работе [1] (см. (79)*) путем сопоставления оператора равновесия $\tilde{\tilde{R}}$ и геометрического оператора $\tilde{\tilde{G}}$ из условия со-

пряженности этих операторов (77)* в соответствии со статико-геометрической аналогией. Используемый в данном разделе способ интегрирования при выводе уравнений динамического равновесия стержня позволил получить выражение (12) в третьем уравнении (84), дополнив его инерционными слагаемыми. Это показывает, что данное выражение является полноценным уравнением равновесия, а сопряженность операторов \tilde{R} и \tilde{G} лишь следствие из уравнений равновесия и геометрических уравнений.

Введение в (85), (86) расширенного оператора равновесия \tilde{R} требует аналогичной корректировки геометрического оператора \tilde{G} , который в расширенном варианте при сохранении свойства сопряженности с \tilde{R} должен быть равен

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \partial^x \tilde{I} & & \\ \tilde{G}_{21} & \partial^x \tilde{I} & \\ & & \partial^x \tilde{I} \end{bmatrix}. \quad (90)$$

При этом геометрические уравнения (4), (5) принимают вид

$$\tilde{e} = \tilde{G} \tilde{u}, \quad (91)$$

или в блочной форме

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = \tilde{u}_1^x; \\ \tilde{e}_2 = \tilde{G}_{21} \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2^x; \\ \tilde{e}_3 = \tilde{e}_2^x. \end{cases} \quad (92)$$

Отметим, что вектор \tilde{e}_2 входит как в левую, так и в правую часть равенств (92), поскольку одновременно принадлежит и вектору деформаций \tilde{e} , и расширенному вектору перемещений \tilde{u} по (69).

2.2. Терминология жесткостных и инерционных характеристик поперечного сечения стержня

В работе [1] и в данной статье были использованы традиционные и введены новые приведенные жесткостные (см. (42)*-(44)*) и инерционные (89) характеристики поперечного сечения стержня, состоящего из разных материалов. Появление новых характеристик и различие их по коэффициентам приведения потребовало введения соответствующих обозначений и терминов для их наименования.

Различие обозначений по коэффициентам приведения в указанных выше формулах обеспечено разным количеством штрихов: характеристики без штрихов приводятся с помощью относительных модулей упругости e_s , с одинарными штрихами – относительных модулей сдвига g_s , с двойными штрихами – относительных плотностей r_s . Соответствующее различие терминов осуществим добавлением в них слов «упругость», «сдвиг» и «плотность».

Традиционная терминология для геометрических характеристик сечения, взятая из теории моментов инерции плоских фигур, использует наименования «статический», «центробежный», «момент», «инерция», характерные для дисциплин Механики, что может создать непонятные словосочетания при добавлении новых слов. Поэтому, сохраняя в целом привычные термины, заменим словосочетание «момент инерции» на «инерционный момент».

В термины, для вычисления характеристик которых используются функции депланации, будем добавлять вначале слово «депланационный», по аналогии с секториальными характеристиками, введенными Власовым в теории тонкостенных стержней. Традиционные

обозначения и названия характеристик сечения и их предложенные аналоги для данной теории приведены в таблице.

Таблица

Сопоставление традиционной и предложенной терминологий

Традиционная терминология		Предложенная терминология		
Обозначение	Термин	Обозначение	Термин	Номер формулы
S_y, S_z	Статические моменты	S_y, S_z	Статические моменты упругости	(42)*
		S'_y, S'_z	сдвига	(42)*
		S''_y, S''_z	плотности	(89)
J_y, J_z	Моменты инерции	J_y, J_z	Инерционные моменты упругости	(42)*
		J'_y, J'_z	сдвига	(42)*
		J''_y, J''_z	плотности	(89)
J_{yz}	Центробежный момент инерции	J_{yz}	Центробежный момент упругости	(42)*
		J''_{yz}	плотности	(89)
J_x	Полярный момент инерции	J'_x	Полярный момент сдвига	(42)*
		J''_x	плотности	(89)
J_k	Момент инерции при кручении	J'_k	Инерционный момент сдвига	(43)*
		J''_k	плотности при кручении	(89)
S_ω	Секториальный статический момент	$I_{\psi p}$	Депланационный статический момент упругости	(44)*
		$I''_{\psi p}$	плотности	(89)
J_ω	Секториальный момент инерции	$I_{\psi pq}$	Депланационные инерционный ($p = q$) и центробежный ($p \neq q$) моменты упругости	(44)*
		$I''_{\psi pq}$	плотности	(89)
		$I_{y\psi p}, I_{y\psi p}$	Депланационные смешанные моменты упругости	(44)*
		$I''_{y\psi p}, I''_{y\psi p}$	плотности	(89)

2.3. Построение матрицы инерции конечного элемента методом Бубнова-Галеркина

При построении КЭ для решения статических задач был использован метод прямого интегрирования, позволивший получить матрицы элемента на основе точного решения. При построении КЭ для задач динамики данный метод не пригоден, поскольку получить точное решение с использованием ограниченного числа функций формы невозможно, поэтому для динамических задач применим приближенный метод Бубнова-Галеркина.

Зададим приближенную аппроксимацию вектора перемещений аналогично точному статическому решению по (73):

$$\tilde{u}_* = \tilde{\Phi}_*^T \bar{u} + \tilde{\Theta}_*^T \bar{q}, \quad (93)$$

где звездочки указывают на приближенный характер векторов и матриц.

В соответствии с методом Бубнова-Галеркина взвешиваем уравнение динамического равновесия (85) на функциях $\tilde{\Phi}_*$:

$$\int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{M} \ddot{\tilde{u}}_* dx + \int_L \tilde{\Phi}_* (\tilde{R} \tilde{s}_*) dx = \int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{q} dx. \quad (94)$$

Интегрируя второй интеграл в (94) по частям с выделением граничных сил \bar{g} , получим

$$\int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{M} \ddot{\tilde{u}}_* dx + \int_L (\tilde{\Phi}_* \tilde{R}_s) \tilde{s}'_* dx = \bar{g} + \int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{q} dx. \quad (95)$$

Заметим, что при данном интегрировании слагаемые, содержащие вектор \tilde{s}_*'' , сокращаются, если тождественно выполняются соотношения между ФФ (79-1).

Представим закон изменения погонных нагрузок (17) в матричной форме:

$$\tilde{q} = \tilde{\Omega} \bar{q} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_N & \tilde{\Omega}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_N \\ \tilde{q}_K \end{bmatrix}, \quad (96)$$

где блоки матрицы аппроксимации нагрузок равны:

$$\tilde{\Omega}_N = (1 - \xi) \tilde{I}; \quad \tilde{\Omega}_K = \xi \tilde{I}. \quad (97)$$

Последовательно подставляя выражения (7), (91), (74-2), (96) в (95), получим матричное уравнение динамического равновесия конечного элемента в виде

$$\bar{M}_* \ddot{\bar{u}} + \bar{C}_* \dot{\bar{u}} = \bar{g} + \bar{P}_* \bar{q} + \bar{Q}_* \bar{q}, \quad (98)$$

где векторы КЭ оговорены в (57), а матрицы инерции \bar{M}_* , жесткости \bar{C}_* , приведения нагрузок \bar{P}_* и \bar{Q}_* равны:

$$\begin{cases} \bar{M}_* = \int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{M} \tilde{\Phi}_*^T dx; \\ \bar{C}_* = \int_L (\tilde{\Phi}_* \tilde{R}_s) \tilde{C} (\tilde{G} \tilde{\Phi}_*^T) dx; \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{P}_* = \int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{M} \tilde{\Theta}_*^T dx; \\ \bar{Q}_* = \int_L \tilde{\Phi}_* \tilde{\Omega} dx - \int_L (\tilde{\Phi}_* \tilde{R}_s) \tilde{C} (\tilde{G} \tilde{\Theta}_*^T) dx. \end{cases} \quad (99)$$

В качестве функций формы $\tilde{\Phi}_*$, $\tilde{\Theta}_*$ могут быть приняты любые функции, удовлетворяющие граничным условиям (78) и соотношениям (79), например степенные полиномы. Приближенные степенные ФФ могут быть получены из точных статических ФФ $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Theta}$ по (75) путем разложения гиперболических функций (29):

$$\tilde{\Lambda}_{c\xi} = \tilde{I} + \frac{\xi^2}{2} \tilde{\Lambda}^2 + \dots; \quad \tilde{\Lambda}_{s\xi} = \xi \tilde{\Lambda} + \frac{\xi^3}{6} \tilde{\Lambda}^3 + \dots \quad (100)$$

При этом матрицы КЭ, найденные по (99), также будут приближенными.

Наиболее точные матрицы элемента получаются по предложению В.В. Болотина с использованием точных статических ФФ $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Theta}$, однако трудоемкость этих выкладок очень велика, и они были выполнены авторами по упомянутой выше специализированной компьютерной программе Matrix.

Построенные таким образом матрицы жесткости \bar{C}_* и приведения нагрузок \bar{Q}_* тождественно совпали с точными матрицами \bar{C} , \bar{Q} по (65), (67). Найденные выражения для компонент матрицы инерции \bar{M}_* оказались весьма громоздкими и поэтому в данной статье не приводятся.

Альтернативным способом получения матриц КЭ является численное интегрирование выражений (99).

Выводы

Таким образом, в данной работе построен конечный элемент пространственного стержня с учетом деформации при линейном законе изменения погонных нагрузок (17). Матрицы КЭ для статических задач определялись методом прямого интегрирования исходных уравнений (1) – (16), полученных в работе [1]. Последовательно найдены точные функции усилий (18), (19), (37) – (39), деформаций (40) и перемещений (41), (42).

В качестве промежуточного этапа при построении матриц КЭ выведены уравнения (51) и матрицы (52) – (55) метода начальных параметров, который можно использовать для расчета статически определенного стержня или балки. Из уравнений МНП получены матричное уравнение статического равновесия КЭ (56) и входящие в него матрицы жесткости (65) и приведения нагрузок (67). На заключительном этапе определены точные статические функции формы элемента от перемещений и от нагрузки (75) с указанием граничных условий (78) и соотношений между компонентами матриц ФФ (79).

Для решения задач динамики в рамках теории стержня [1] были выведены дифференциальные уравнения динамического равновесия (84), (85) и матрица инерции (86), в которой наряду с инерцией линейных и угловых перемещений учитывается и инерция деформации. Предложена терминология для приведенных геометрических характеристик поперечного сечения (42)* – (44)*, (89), входящих в матрицы жесткости и инерции. Приведена таблица сопоставления данной и традиционной терминологии.

Методом Бубнова-Галеркина выведены матричное уравнение динамического равновесия КЭ (98) и интегральные выражения для матриц инерции, жесткости и приведения нагрузок (99). Построенные по этим выражениям с помощью статических функций формы матрицы жесткости и приведения нагрузок совпали с найденными прямым интегрированием точными матрицами. Аналогично полученная матрица инерции в статье не приводится из-за громоздких выражений.

Библиографический список

1. Петреня, Е.Н. Исходные дифференциальные уравнения пространственного стержня с многоконтурным поперечным сечением произвольной формы/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин// Строительная механика и конструкции. – Воронеж. - № 2. - 2011. – С. 7-28.
2. Петреня, Е.Н. Определение характеристик произвольного поперечного сечения стержня аналитическим методом / Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. – Воронеж. - № 2.-2011. – С. 29-52.

References

1. Petrenya, E.N. Input differential equations of tridimensional bar with the multiloop cross-section of arbitrary form/ E.N. Petrenya, A.A. Petranin// Structural Mechanics and Constructions. - Voronezh, issue 2, 2011. - P. 7-28.
2. Petrenya, E.N. Definition of arbitrary cross-section bar parameters by analytic method/ E.N. Petrenya, A.A. Petranin // Structural Mechanics and Constructions. - Voronezh, issue 2, 2011. - P. 29-52.

Ключевые слова: стержневая теория, теория упругости, депланация, дифференциальные уравнения, характеристики поперечного сечения, конечный элемент, функция формы.

Key words: theory of bar, theory of elasticity, deplanation, differential equations, parameters of cross-section, finite element, functions of form.

УДК 666.981

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р. техн. наук, проф., ректор
Ю.М. Борисов,
Канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой
строительных конструкций, оснований
и фундаментов
Д.В. Панфилов,
Аспирант кафедры строительных конструкций,
оснований и фундаментов
С.В. Каштанов,
Аспирант кафедры строительных конструкций,
оснований и фундаментов
Е.М.Юдин
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-53-84,
e-mail: kashtanov@vgasu.vrn.ru*

*The Voronezh State University of Architecture
and Civil Engineering
Dr. Tech. Sc., prof., rector
Yu. M. Borisov,
Ph D. Head of Department t. of
Constructional Structures, Bases
and Foundations
D.V. Panfilov,
Postgraduate of Constructional Structures,
Bases and Foundations
S.V. Kashtanov,
Postgraduate of Constructional Structures,
Bases and Foundations
Ev. M. Yudin
Russia, Voronezh, tel.: +7(473)2715382;
e-mail: kashtanov@vgasu.vrn.ru*

Ю.М. Борисов, Д.В. Панфилов, С.В. Каштанов, Е.М. Юдин

ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННЫЕ СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОМПОЗИТЫ

Рассмотрены вопросы, связанные с определением оптимального процента армирования. Приведено описание технологии изготовления каутона, армированного различными видами фибр (стальная рубленая L=40 мм, d=0,8 мм, стальная латунированная L=15 мм, d=0,3 мм, полипропиленовая L=12 мм d=12 мкм). Представлены графики зависимости прочности материала от процента армирования. Приведены результаты по определению процентного содержания фибрового волокна в каутоне и графики зависимости прочности каутона на сжатие от процента армирования.

Данные экспериментов и опытов позволяют сделать вывод о положительном влиянии различных видов фибровых волокон на каучуковый бетон (каутон). Получен оптимальный процент армирования каутона.

Yu. M. Borisov, D.V. Panfilov, S.V. Kashtanov, E. M. Yudin

Fibre-reinforced building materials

The problems connecting with optimal reinforcement percentage are under consideration. The description of fabrication method of cauton reinforced with different types of fibre (steel mangled L=40mm, d=0,8, steel glass-bladed L=15mm, d=0,3mm, polypropylene L=12mm, d=12micrometer) were analyzed. Schedules of material strength dependence on reinforcement percentage are performed. The results of definition of fibre percentage in cauton and schedules of cauton compressive strength dependence on reinforcement percentage are given.

The findings allow to make conclusion of positive impact of different types of fibre on caouthouc concrete. Optimal cauton reinforcement percentage is received.

Введение. Строительная индустрия и отрасли промышленности испытывают острый дефицит в современных материалах и конструкциях. Технический прогресс в строительстве существенным образом зависит от уровня развития предприятий промышленности строительных материалов, от их оснащённости современной технологией, позволяющей

© Борисов Ю.М., Панфилов Д.В., Каштанов С.В., Юдин Е.М.

чутко реагировать на возрастающие требования строительного производства, среди которых долговечность сооружений, изделий и материалов занимает ведущее место. Например, основным недостатком традиционных бетонов, применяемых для устройства полов промышленных и сельскохозяйственных зданий, является их недостаточно высокая прочность при воздействии растягивающих, срезающих, истирающих и динамических нагрузок, а также хрупкость разрушения. Помимо полов, имеется ряд других конструкций, подвергающихся аналогичным воздействиям (колонны, фундаменты под оборудование и т.д.). Введение в состав бетонов дисперсной арматуры значительно улучшает их физико-механические свойства, показатели долговечности и технико-экономические характеристики. Использование волокон для дисперсного армирования позволяет в ряде случаев избежать использования продольной и поперечной арматуры, а также увеличить прочность материала, повысить его предельную растяжимость и ремонтпригодность.

В Воронежском ГАСУ разработаны бетоны, вяжущую основу которых составляют жидкие каучуки. Эти бетоны нами названы каучуковыми бетонами или сокращенно каутонами. В этих композитах в качестве связующего использовали олигодиены. Как показывают исследования, границы введения жидкого каучука в композицию находятся в пределах 6...14 % по массе. Следует отметить, что жидкие каучуки выпускаются ведущими отечественными и зарубежными фирмами в постоянно увеличивающихся объемах. Это делает полимеры данного вида перспективными и «бездефицитными» в сравнении с полимербетонами, изготовленными с применением традиционных смол.

Каутонам свойственны благоприятные деформационно-прочностные характеристики, высочайшая стойкость к агрессивным средам, хорошие электроизоляционные и демпфирующие свойства, высокая адгезия к различным видам поверхностей и т.д.

1. **Общие сведения.** Первые исследования каутонов были проведены на составах, в которых в качестве связующего был использован отечественный стереорегулярный полибутиадиеновый каучук марки СКДН-Н. В ходе исследований подобрано количественное содержание компонентов вулканизирующей системы для матрицы композиционного материала, найдено оптимальное содержание вулканизатора, ускорителя и активатора. На уровне каучукового связующего выявлено качественное влияние вида наполнителя на свойства каучукового бетона, а также установлены границы количества наполнителя в составе каутона СКДН-Н и его влияние на физико-механические характеристики каучукового связующего. Доказана возможность применения в качестве наполнителя для каучукового связующего крупнотоннажных техногенных отходов, таких как зола-унос ТЭЦ, при этом отмечено улучшение физико-механических и химических свойств композита. Были проведены исследования химической стойкости, которые показали, что каутон обладает практически универсальной сопротивляемостью к разным агрессивным средам. Определены основные технологические параметры, режимы изготовления изделий и конструкций из каутона.

Следует выделить также повышенную трещиностойкость каутона, которая достигается дисперсным армированием. Армирование фиброволокном повышает не только порог трещиностойкости, но и увеличивает сопротивление материала к ударным воздействиям, а это необходимо для использования на предприятиях с наличием постоянно действующих динамических нагрузок (фундамент под прессовое оборудование и т.д.).

Предыдущие исследования положили начало развитию каутона, армированного отходами металлокорда, и показали хорошие результаты, в частности, увеличение трещиностойкости. У каутона, армированного металлическими фибрами, есть и недостатки: при увеличении процента армирования ($\mu > 2...2,5$ %) наблюдается комкование фибр, которое образует дефекты в структуре материала; в случае возникновения дефектов материала (механические повреждения) металлическая фибра подвергается воздействию окружающей среды (корро-

зии, химическому воздействию и др.). Армирование синтетическими волокнами (полипропиленовым волокном) исключает отрицательное влияние неблагоприятных факторов ввиду исключительной коррозионной и химической стойкости, что весьма незаменимо на предприятиях. Еще одним явным плюсом является эластичность материала и почти полное отсутствие комкование фибры, что делает материал более однородным.

2. Армирующие волокна и процент их добавления в материал. Основной целью проделанной работы являлось создание эффективных при эксплуатации в агрессивных средах дисперсно армированных строительных композиционных материалов с использованием местных ресурсов и крупнотоннажных технологических отходов, а также изучение их физико-механических, химических и технологических свойств.

В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

- изучалось влияние вида и количества волокон на деформационно-прочностные свойства композита, определялся базовый вид волокна для дисперсного армирования каутона;
- исследовалось влияние процента армирования на несущую способность;
- на основе проведенных исследований разрабатывались эффективные составы дисперсно армированного каутона;
- исследовалось поведение дисперсно армированного каутона при длительном действии нагрузки.

Выбор используемых видов фибр производился исходя из доступности и широты применения ее в качестве армирующей добавки в бетоны [1].



Рис. 1. Фибра, используемая для армирования каутона:
 а – стальная рубленая фибра $L = 40$ мм, $d = 0,8$ мм;
 б – стальная латунированная фибра $L = 15$ мм, $d = 0,3$ мм;
 в – полипропиленовая фибра $L = 12$ мм, $d = 12$ мкм

Для определения оптимального процента армирования были изготовлены и испытаны серии образцов с различным процентным содержанием фибровых волокон 1 %, 2 %, 3 % (по объему): стальной рубленой, стальной латунированной и полипропиленовой. Компонентный состав каутона представлен в таблице.

Таблица

Компонентный состав каутона

Наименование компонентов	Содержание компонентов, мас. %
Каучук марки СКДН-Н	9
Сера техническая	4,5
Тиурам-Д	0,45
Оксид цинка	1,62
Оксид кальция	0,45

Наименование компонентов	Содержание компонентов, мас. %
Зола-унос ТЭЦ	8
Кварцевый песок	24
Гранитный щебень	Остальное (51,98)

В данный состав добавлялась фибра путем замены соответствующего объема песка.

Приготовление фиброкаутоновой смеси включало в себя следующие операции: промывку и сушку заполнителя и наполнителя, подготовку компонентов отверждающей группы, дозирование составляющих. Дозирование песка и щебня производили с точностью до 5 г, а каучука – с точностью до 0,5 г.

Перемешивание составляющих осуществляли в скоростном смесителе пропеллерного типа. Полимерное связующее приготавливали путем совмещения жидкого каучука марки СКДН-Н с компонентами серы, тиурама-Д и дисперсным минеральным наполнителем золой-унос ТЭЦ. Затем в приготовленное связующее вводили мелкий и крупный заполнитель. После этого при непрерывном перемешивании композиции добавляли в требуемом количестве армирующие волокна. Здесь следует отметить, что полипропиленовую фибру необходимо добавлять в последнюю очередь, иначе происходит комкование смеси, тогда как последовательность введения металлической фибры в смесь почти никак не влияет на конечную композицию.

3. Технология изготовления образцов и результаты испытаний на действие кратковременного нагружения. Технологический процесс изготовления образцов из фиброкаутоновой композиции включал следующие операции: подготовку форм – образцы изготавливали в стальных формах (4 x 4 x 16 см), рабочую поверхность которых очищали от остатков материала и обклеивали лавсановой пленкой, затем производили укладку фиброкаутоновой смеси и формование изделий. Отформованные образцы уплотняли на стандартной лабораторной виброплощадке в течение 100 ± 30 с. Признаком достаточного уплотнения каутоновой смеси служило выделение связующего и прекращение интенсивного образования пузырьков воздуха. После выполнения всех этих операций форму со смесью помещали в камеру сухого прогрева, где и происходило отверждение каутона при температуре 120 ± 5 °С в течение 8 ч. Разопалубливание производили после полной вулканизации и охлаждения образцов.

Вышеописанная технология полностью подходит для каутона армированного стальными волокнами. Композиция с полипропиленовым волокном получается пластичная, но она менее удобоукладываемая. Укладку и уплотнение смеси необходимо производить вручную, чтобы избежать пористости материала, так как вибрирование не дает однородности композиции.

Следует отметить разность плотностей каутона, фиброкаутона, армированного стальными волокнами и полипропиленовыми, она составляет: для каутона и фиброкаутона, армированного стальными волокнами, $2000 \text{ кг/м}^3 - 2200 \text{ кг/м}^3$, а для каутона, армированного полипропиленовыми волокнами, около $1900 \text{ кг/м}^3 - 2000 \text{ кг/м}^3$ (при 2 %-м содержании волокна). При увеличении процента армирования полипропиленовым волокном плотность материала уменьшается.

Испытание образцов фиброкаутона в условиях кратковременного центрального нагружения проводили на гидравлическом прессе. Средняя скорость нагружения образцов составляла 60 МПа/мин. Результаты испытаний представлены на рис.2. Фотографии разрушенных образцов представлены на рис. 3.

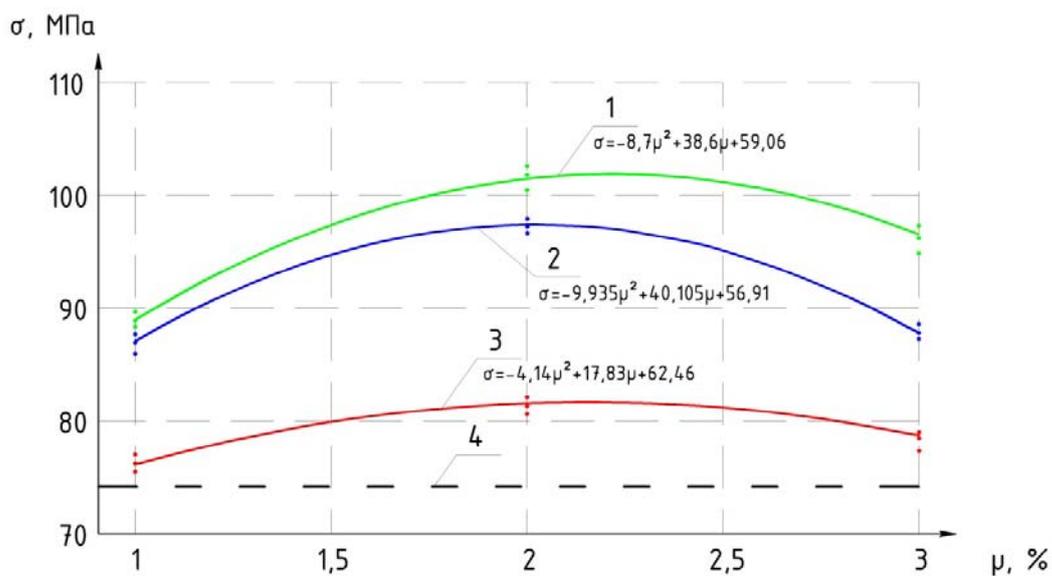


Рис.2. Графики зависимости призмной прочности дисперсно армированных образцов каутона от процента армирования и вида армирующего волокна:

- 1 – образцы, армированные стальной рубленой фиброй $L = 40$ мм, $d = 0,8$ мм;
- 2 – образцы, армированные стальной латунированной фиброй $L = 15$ мм, $d = 0,3$ мм;
- 3 – образцы, армированные полипропиленовой фиброй $L = 12$ мм, $d = 12$ мкм;
- 4 – образцы из каутона



Рис. 3. Фотографии разрушенных образцов

Выводы

При испытаниях было выявлено, что увеличение процента армирования повышает прочность каутона на сжатие. Оптимальная прочность достигается только при 2%-м армировании образца. Дальнейшее увеличение процента армирования ведет к снижению этого показателя. Это можно объяснить тем, что при армировании образцов с $\mu > 2$ % происходит комкование смеси, она становится жесткой и неудобоукладываемой, а также создает дефектные области в материале. Эти выводы подтверждаются данными, полученными в результате предыдущих исследований [2].

В ходе испытания был определен характер разрушения образцов в зависимости от вида применяемой фибры и от её процентного содержания. Для каутона, армированного стальными фибрами, было характерно хрупкое разрушение ввиду относительно небольшого удлинения фибры в момент разрушения образца, тогда как для каутона, армированного полипропиленовым волокном, было характерно пластическое разрушение.

Таким образом, определена технология изготовления образцов в зависимости от вида фибры. Установлено, что порядок введения стальной фибры в смесь не влияет на конечную композицию, не происходит комкования смеси. Однако порядок введения полипропиленовой фибры строго определен и описан выше; определен оптимальный процент армирования.

Библиографический список

1. Рабинович, Ф.Н. Композиты на основе дисперсно армированных бетонов. Вопросы теории и проектирования, технология, конструкции: монография /Ф.Н. Рабинович. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 560 с.
2. Рабинович, Ф.Н. Дисперсно армированные бетоны /Ф.Н. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1989. – 176 с.

References

1. Rabinovich, F.N. Composites based on fibrous concrete. Theory and projecting, technology, design: Monograph/ F.N. Rabinovich. - M.: Izdatelst of DIA, 2004. – 560 p.
2. Rabinovich. F.N. Fibro-reinforced concrete. - F.N. Rabinovich. – M.: Stroyizdat., 1989. – 176 p.

Ключевые слова: каучуковый бетон (каутон), дисперсное армирование, металлическая фибра.

Key words: caouthouc concrete (cauton), dispersed reinforcement, metal fiber.

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
В.М. Суднин
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473) 279-13-09
e-mail:dawidowka432@yahoo.com

The Voronezh State University of Architecture
and Civil Engineering
Dr of Tech. Sc., prof. of Department
of Structural Mechanics
V.M. Sudnin
Voronezh, Russia, tel.:+7(473)2791309
e-mail:dawidovka432@yahoo.com

В.М. Суднин

ДВИЖЕНИЕ ГИБКОЙ НИТИ В ПОТОКЕ ВОДЫ

Исследовано установившееся прямолинейное движение гибкой нити с помощью компьютерной программы Matcad. В результате получена взаимосвязь между углом наклона нити в вертикальной плоскости и её длиной, скоростью потока воды и формой провисания нити.

V.M. Sudnin

FLEXIBLE STRING IN WATER FLOW

Steady linear motion of flexible string is investigated by program of Matcad. As a result we have interrelationship between string inclination in vertical plane and its length, water flow speed and string deflection form.

Задача о движении гибкой связи в потоке воды является достаточно трудоемкой. Решению этой задачи посвящены работы многих авторов. Большинство полученных решений, однако, не обладают достаточной общностью, а их практическое применение затруднено [1,2,3].

На гибкую нить натекает установившийся поток. Бесконечно малый элемент троса ds находится под воздействием следующих сил (рис. 1):

$q_0 ds$ – сила тяжести в воде элемента троса (гибкой нити);

$dX = 0,5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot d \cdot \sin \alpha \cdot ds = k \sin \alpha \cdot ds$ – гидродинамическое сопротивление этого элемента [4];

T – натяжение троса в начальной точке элемента;

dT – изменение натяжения троса в конечной точке;

$d\alpha$ – центральный угол, соответствующий бесконечно малой дуге окружности.

Принимая, что $\cos (d\alpha/2) = 1$, а $\sin (d\alpha/2) = d\alpha/2$, и пренебрегая членами второго порядка малости, уравнения равновесия на естественные оси записываются так:

$$\begin{aligned} F_{kt} &= dT + q_0 ds \sin \beta = 0, \\ \Sigma F_{kn} &= -T d\alpha + q_0 ds \cos \beta - k \sin \alpha \sin \beta ds = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Нагрузку q будем считать равномерно распределенной по длине пролета a . Эта нагрузка состоит из силы тяжести в воде единицы нити (погонного метра) и вертикальной составляющей её гидродинамического сопротивления.

Составим уравнение равновесия в форме:

$$\Sigma M_A(F_k) = G_0 a - X_\Sigma h + q a^2/2 = 0. \quad (2)$$

Из этого уравнения следует:

$$q = 2 (X_\Sigma h - G_0 a) / a^2. \quad (3)$$

Так как нить считается гибкой, то она не оказывает влияния на изгибающий момент в сечении и его можно приравнять 0.

Изгибающий момент в произвольном сечении (рис. 3):

$$M = -q x^2/2 - G_0 x + X_\Sigma (h - y) = 0.$$

Из полученного выражения следует:

$$y = h - \frac{x^2}{a} \left(\frac{h}{a} - \frac{G_0}{X_\Sigma} \right) - \frac{G_0}{X_\Sigma} x. \quad (4)$$

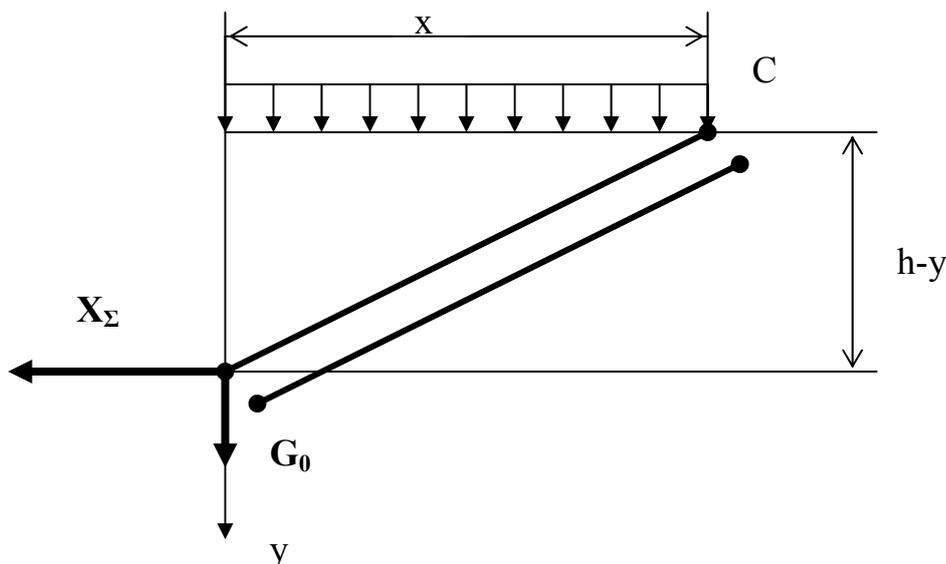


Рис. 3. Произвольное сечение гибкой нити

Горизонт хода буксируемого объекта (глубина погружения) h и горизонтальная проекция гибкой нити a зависят не только от веса этого объекта G и его гидродинамического сопротивления X_Σ , но и от веса одного погонного метра нити q_0 и её гидромеханического сопротивления dX . В первом приближении примем нить прямой (рис. 4).

Уравнение равновесия имеет вид

$$\Sigma M_A(F) = X^* l/2 + X_\Sigma^* l^* \sin \varphi - G_0^* l^* \cos \varphi - q_0^* l/2^* \cos \varphi = 0;$$

$X = 0,5 c_x \rho v^2 d l \sin^2 \varphi = k_B l v^2 \sin^2 \varphi$ – нормальная сила гидродинамического сопротивления движению нити [4];

$c_x = 1,2$ – коэффициент сопротивления бесконечно длинного цилиндра при поперечном обтекании;

v – скорость потока;

d – диаметр поперечного сечения гибкой нити;

$k_B = 0,5 c_x \rho d$ – коэффициент гидродинамического сопротивления одного пог. м гибкой нити.

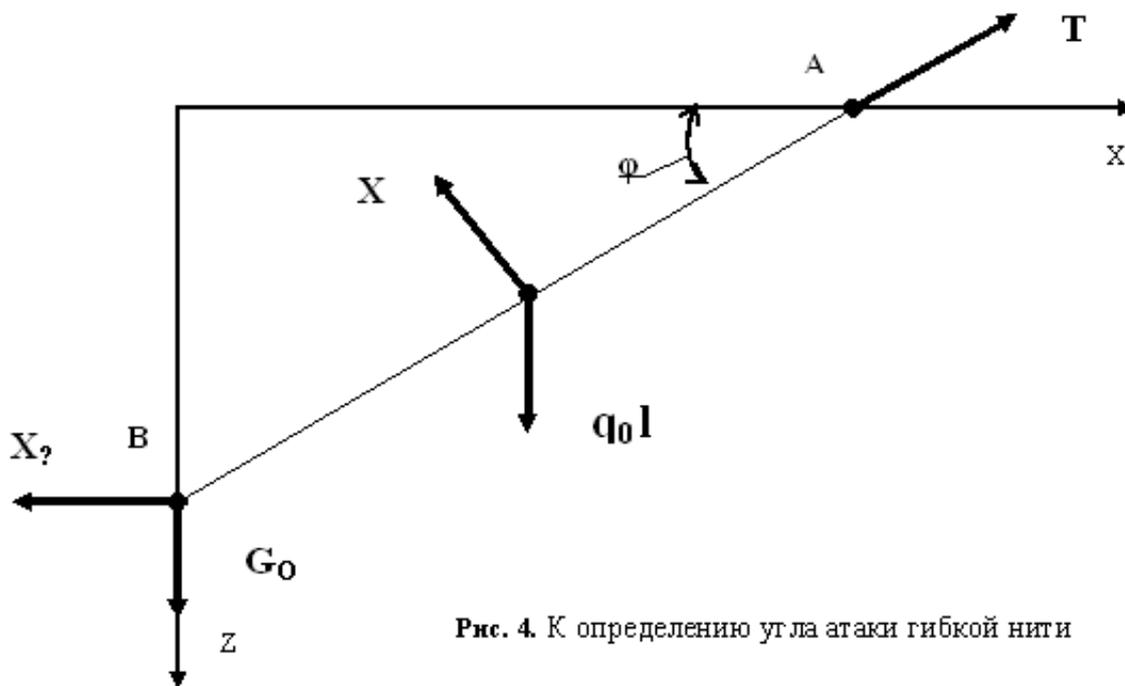


Рис. 4. К определению угла атаки гибкой нити

Рассмотрим пример, приведенный в [5]: гидродинамическое сопротивление канатно-сетной части разноглубинного трала с оснасткой при скорости судна $v = 5$ узл. = 2,575 м/с:

$$X_T = X_\Sigma = k_T v^2 = 100 \text{ кН.}$$

Силы тяжести оснастки трала, траловых досок и ваеров (нити) в воде:

$$G_O = (G_{осн} + 2G_D + q_0 l) = (8,49 + 2 \cdot 12,4 + 21,6 \cdot 10^{-3} \cdot l),$$

где

$d = 26,0 \cdot 10^{-3}$ м – диаметр ваера;

$q_0 = 21,6 \cdot 10^{-3}$ кН – сила тяжести в воде 1 пог. м ваера (гибкой нити).

При $v = 5$ узл. = 2,575 м/с и длине ваеров $l = 250$ м, после подстановки числовых значений и элементарных преобразований, получим следующее уравнение:

$$0,446 \sin^4 \varphi + 4,189 \sin^3 \varphi + 10,814 \sin^2 \varphi - 1 = 0. \quad (5)$$

Для нахождения корней полинома используем функцию polyroots(V), (Matcad 14), которая определяет все корни полинома одновременно. Корни могут быть как вещественными, так и мнимыми. Из вещественных корней физическому смыслу задачи соответствует положительный корень.

В зависимости от длины гибкой нити меняются коэффициенты полинома. Результаты вычислений угла атаки нити в функции её длины при $v = 5$ узл = 2,575 м/с сведены в табл. 1.

Таблица 1

Угол атаки нити в зависимости от её длины

$l, м$	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\sin \varphi$	0,292	0,300	0,306	0,313	0,319	0,324	0,326	0,333

Как видно из табл. 1, длина гибкой нити не оказывает существенного влияния на угол атаки нити. Поэтому в расчетах его можно принять постоянным.

В зависимости от скорости потока меняются коэффициенты полинома. Результаты вычислений угла атаки нити в функции скорости при $l=250$ м приведены в табл. 2.

Таблица 2

Угол атаки нити в зависимости от скорости потока

$v, м/с$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
$\sin \varphi$	0,783	0,686	0,592	0,508	0,436	0,375	0,325	0,283

Скорость движения гибкой нити существенно влияет на горизонт хода буксируемого объекта.

Из уравнения (4) следует, что нить под действием собственного веса прогибается по параболе. На сколько кривая провисания нити отличается от прямой, видно из следующих рисунков.

На рис. 5 показана кривая провисания нити при $l=1000$ м ; $v= 3,5$ узла (1,8 м/с); $G_0=33,29$ кН; $X_{\Sigma} = 43,6$ кН; $\sin \varphi = 0,632$.

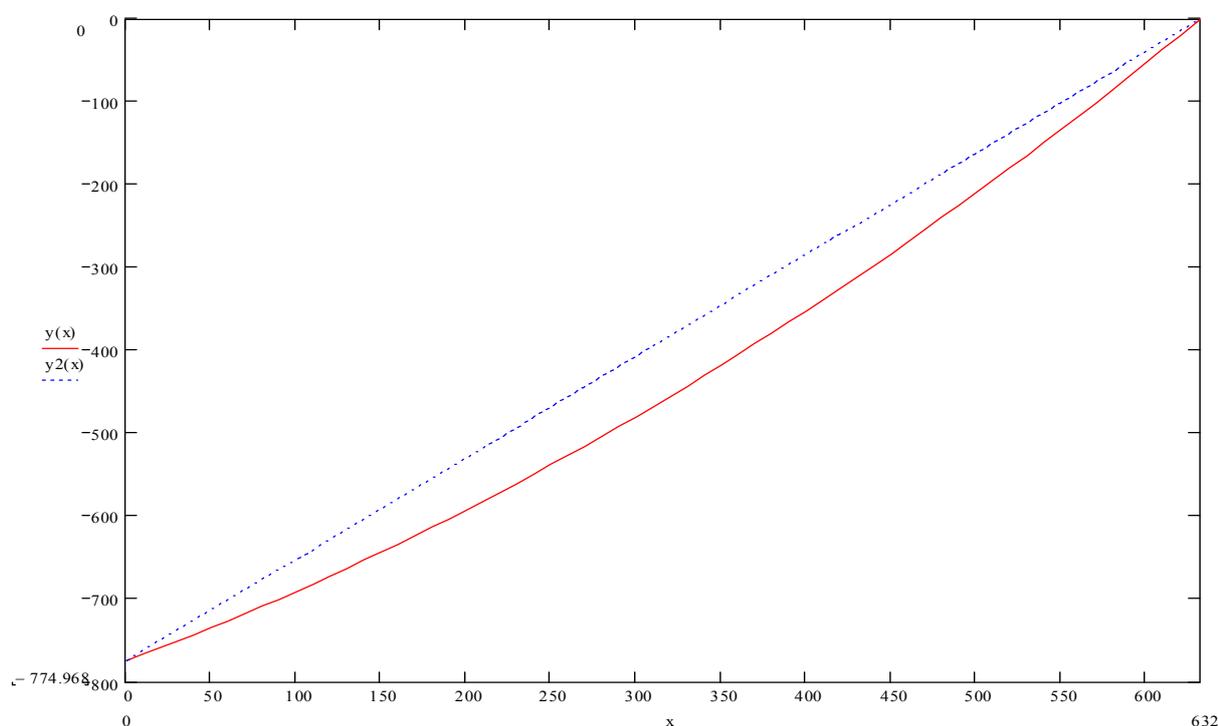
Рис. 5. Кривая провисания нити при $l=1000$ м ; $v = 1,8$ м/с

Рис. 6 иллюстрирует результаты вычисления уравнения (4) для $l = 1000$ м; $v= 5,0$ узл. (2,575 м/с); $G_0 / X_{\Sigma} = 0,274$; $\sin \varphi = 0,292$.

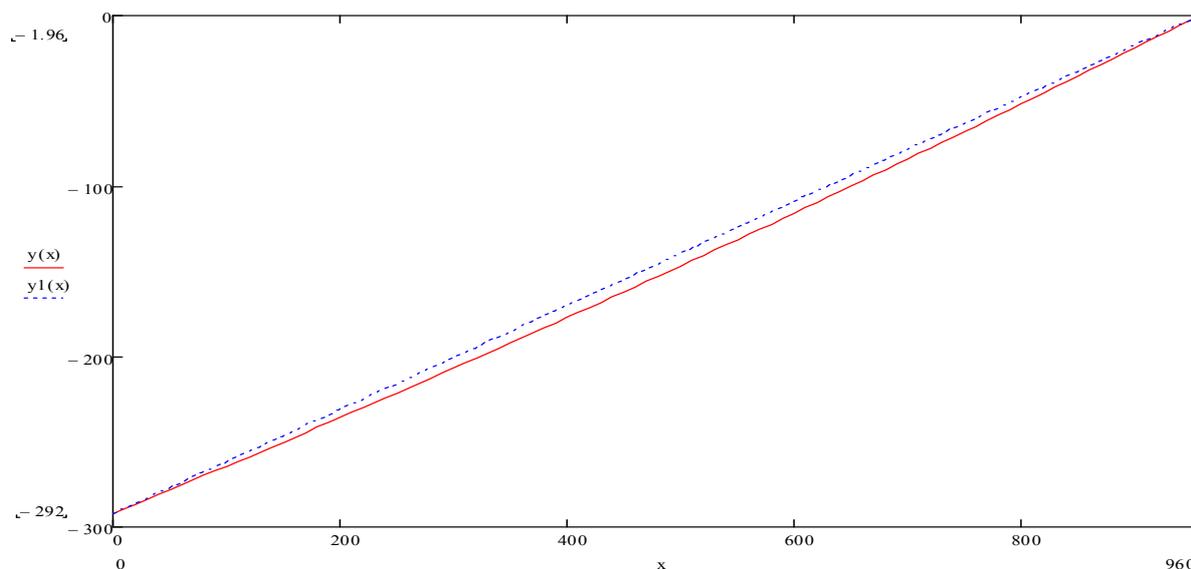


Рис. 6. Кривая провисания нити при $l = 1000$ м ; $v = 2,575$ м/с

Выводы

1. Длина гибкой нити не оказывает существенного влияния на угол атаки нити.
2. Нить под действием собственного веса прогибается по параболе.
3. С увеличением скорости потока воды кривая провисания нити практически не отличается от прямой.

Библиографический список

1. Шимановский, В.Н. Висячие системы/ В.Н. Шимановский. - Киев: Будівельник, 1984. – 208 с.
2. Светлицкий, В.А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха/ В.А. Светлицкий. - М.: Машиностроение, 1982. – 280 с.
3. Бугаенко, Б.А. Специальные судовые устройства/ Б.А. Бугаенко, В.Э. Магула. - Л.: Судостроение, 1988. – 392 с.
4. Фонарев, А.Л. Гидромеханика/ А.Л. Фонарев. – М.: Колос, 1996. – 192 с.
5. Суднин, В.М. Исследование стационарного режима движения системы судно-трал: материалы междунар. науч.-техн. конф. / В.М. Суднин. - Мурманск, 2009. - С. 990-997.

References

1. Shimanovsky, V.N. Suspended systems/ V.N. Shimanovsky. - Kiev: Budivelnic, 1984. – 208 p.
2. Svetlitsky, V.A. Mechanics of pipelines and water hoses: Problems of interactions of rods and liquid or air flow/ V.A.Svetlitsky. - M.: Engine building, 1982. – 280 p.
3. Bugaenko, B.A.. Ship job-dedicated machinery/ B.A Bugaenko., V.E. Magula - L.: Shipbuilding, 1988. – 392 p.
4. Fonaryov, A.L. Hydromechanics/ Fonaryov A.L.– M.: Kolos, 1996. – 192 p.
5. Sudnin, V.M. Investigation of steady-state condition of motion of ship – travelling system: materials of international scientific – technical conference/ V.M. Sudnin - Murmansk, 2009. - P. 990-997.

Ключевые слова: гибкая нить, уравнения равновесия, гидродинамическое сопротивление, скорость потока воды.

Key words: flexible string, equilibrium equation, hydrodynamic resistance, water flow speed.

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
А.Н. Синозерский
Ст. преподаватель
кафедры строительной механики
Р.А. Мухтаров
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail:rinat196111@rambler.ru

The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Sc, prof. of Department
of Structural Mechanics
A.N. Sinozersky
Lecturer of Department of Structural Mechanics
R.A. Muhtarov
Voronezh, Russia tel.: 8(473)2715230
e-mail: rinat19611 @rambler.ru

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

ЗАВИСИМОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА ОТ ПРИЗМЕННЫХ ПРЕДЕЛОВ ПРОЧНОСТИ ПРИ ЗАДАННЫХ СКОРОСТЯХ НАГРУЖЕНИЯ

Определяется предельная нагрузка $\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$ при напряжениях, равных призмному пределу прочности $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$ для внецентренно сжимаемых элементов при произвольных скоростях нагружения $\dot{\theta}_j$ и эксцентриситете e , параметре напряжённого состояния $\tilde{p}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$.

A. N. Sinozersky, R. A. Muhtarov

DEPENDENCE OF LIMIT LOADINGS OF ECCENTRICALLY COMPRESSED MEMBERS FROM FINE GRAINED ON PRISM STRENGTH LIMIT AT GIVEN LOADING SPEED

Limit loading $\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$ under stress equal prism strength limit $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$ for eccentrically compressed members at arbitrary loading speed $\dot{\theta}_j$ and eccentricity e , stress state parameter $\tilde{p}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$.

В [1] производится расчёт внецентренно сжимаемых элементов прямоугольного сечения (рис.1) без учёта сопротивления бетона растянутой части при малых эксцентриситетах y_f продольной силы \tilde{F}_l .

Предельное состояние характеризуется разрушением бетона с напряжениями, условно равными расчётному сопротивлению материала R_b и равномерно распределёнными по части площади (на рис.1 заштрихованной):

$$A_l = b \cdot h_l = b \cdot (h - 2 \cdot y_f) = b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e), \quad (1)$$

с равнодействующей (продольным усилием)

$$\tilde{N}_l^* = \alpha \cdot R_b \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e) \cdot p_l^*, \quad (2)$$

где коэффициент $\alpha = 1$ – для тяжёлого, мелкозернистого и поризованного бетонов; $e = y_f/h$ - относительный эксцентриситет; p_l^* - **показатель (параметр) напряжённого состояния (н.с.)**, при котором удовлетворяются уравнения равновесия ($\sum x = 0, \sum m_z = 0$) между внешними \tilde{F}_l и внутренними \tilde{N}_l^* силами, то есть

$$\tilde{p}_l^* = \frac{\tilde{F}_l}{\alpha \cdot R_b \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e)} \quad (3)$$

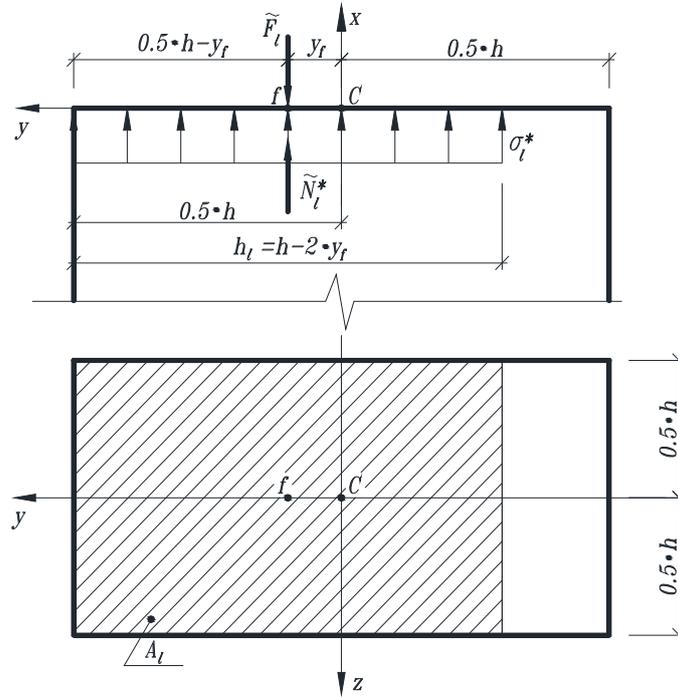


Рис. 1

Нагрузки $\tilde{N}_l^*(\theta_j, e)$ при условных напряжениях $\tilde{\sigma}_l^*(\theta_j, e)$ равны призменному пределу прочности $\bar{\sigma}_u(\theta_j)$.

Приняв по СНиП (1) коэффициент $\alpha = 1$, параметр н.с. $\tilde{p}_l^* = 1$ и заменив расчётное сопротивление R_b на $\bar{\sigma}_u(\theta_j)$ в (2), будем иметь

$$\tilde{N}_l^*(\theta_j, e) = \bar{\sigma}_u(\theta_j) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e). \quad (4)$$

При заданных размерах элементов $b \cdot h \cdot l = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$ м [2] будем иметь (табл.1):

- расчётные $\tilde{N}_l^*(\theta_j, e)$ и средние опытные разрушающие $\bar{F}_u(\theta_j, e)$ усилия;
- абсолютные $\tilde{\Delta}_l^*(\theta_j, e)$ и относительные $\tilde{\delta}_l^*(\theta_j, e)$ отклонения

$$\tilde{\Delta}_l^*(\theta_j, e) = \tilde{N}_l^*(\theta_j, e) - \bar{F}_u(\theta_j, e), \quad (5)$$

$$\tilde{\delta}_l^*(\theta_j, e) = \frac{\tilde{\Delta}_l^*(\theta_j, e)}{\bar{F}_u(\theta_j, e)} \cdot 100\%; \quad (6)$$

- параметры н.с.

$$\tilde{p}_l^*(\theta_j, e) = \frac{\bar{F}_u(\theta_j, e)}{\bar{\sigma}_u(\theta_j) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e)}, \quad (7)$$

где в (3) вместо \bar{F}_l , α , R_b приняты соответственно $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$, 1, $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$.

Таблица 1

Партия j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$, МПа по [2]	$e = \frac{y_f}{h}$	Усилия, кН		Отклонения		Параметры $\tilde{p}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$ по (7)
				$Nl^*\theta_j, e$ по (4)	$\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm$ $\Delta\bar{F}_u$ по [2]	$\tilde{\Delta}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$, кН по (5)	$\tilde{\delta}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$, % по (6)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 1$	392,3	26,09	0,050	234,8	236,3±17,7	-1,5	-0,63	1,006
			0,100	208,7	207,9±14,7	0,8	0,38	0,996
			0,150	182,6	185,3±13,7	-2,7	-1,46	1,015
2	39,23	25,51	0,050	229,6	234,4±18,6	-4,8	-2,05	1,021
			0,100	204,1	207,9±10,8	-3,8	-1,83	1,019
			0,150	178,6	180,4±10,8	-1,8	-1,00	1,010
3	3,923	23,64	0,045	215,1	222,6±15,7	-7,5	-3,37	1,035
			0,090	193,8	204,0±13,7	-10,2	-5,00	1,052
			0,135	172,6	186,3±7,8	-13,7	-7,35	1,080

Только для называемой в дальнейшем стандартной скорости $\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 = 0,3923$ (иначе $F/(b \cdot h \cdot t) = 0,3923$ МПа \cdot с $^{-1}$ [3], близкой к 0,4 МПа \cdot с $^{-1}$ по ГОСТ [4]) получен параметр н.с.

$$\tilde{p}_l^*(\dot{\theta}_1) = (1,006 + 0,996 + 1,015)/3 = 1,006 \approx 1,000,$$

и, следовательно, можно применять формулу (4).

Усилия $\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*)$ при произвольных скоростях нагружения $\dot{\theta}_j \neq \dot{\theta}_s$.

$$\text{В случаях } e \geq 0,050 \quad (8)$$

выполняем исследования, задаваясь показателем н.с.

$$\tilde{p}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*) = \frac{1 + [\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)/\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)]}{2} \quad (9)$$

и принимая расчётную нагрузку

$$\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*) = \tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e) \cdot \tilde{p}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*),$$

или с учётом (4) и (9)

$$\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*) = \tilde{\sigma}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \bar{\sigma}_u) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e), \quad (10)$$

где условное напряжение

$$\tilde{\sigma}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \bar{\sigma}_u) = \frac{\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) + \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)}{2}. \quad (11)$$

$$\text{В границах } 0,000 \leq e_m \leq 0,050 \quad (12)$$

$$\text{назначаем } \tilde{\sigma}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m, \bar{\sigma}_u) = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) + 10 \cdot \Delta\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) \cdot e_m \quad (13)$$

$$\text{и вычисляем } \tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m, \tilde{\sigma}_l^*) = \tilde{\sigma}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m, \bar{\sigma}_u) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e_m), \quad (14)$$

$$\text{где } \Delta\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s) - \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j), \quad (15)$$

а постоянные $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$, $10 \cdot \Delta\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$ определяются из условий (см. рис.2)

$$\tilde{\sigma}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m = 0, \bar{\sigma}_u) = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j), \quad (16)$$

$$\tilde{\sigma}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m = 0,050, \bar{\sigma}_u) = 0,5 \cdot [\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) + \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)]. \quad (17)$$

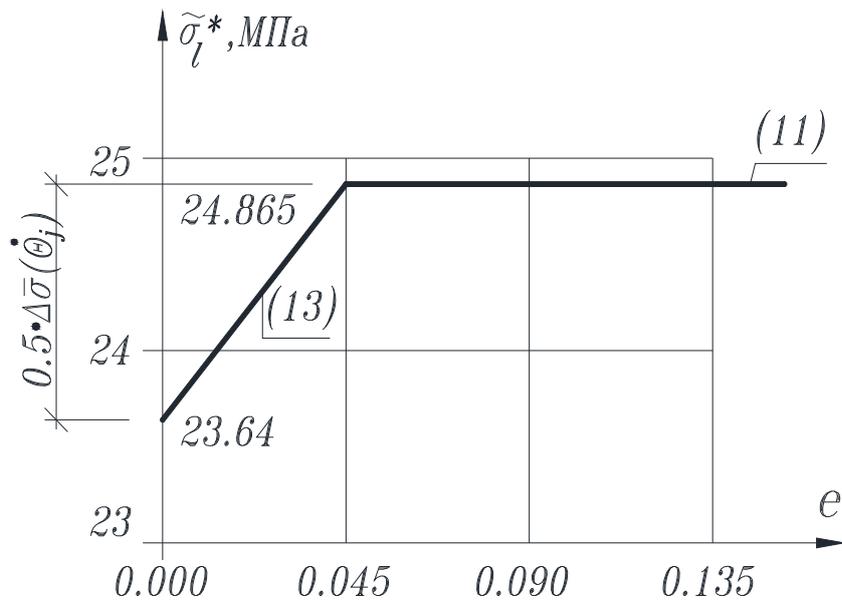


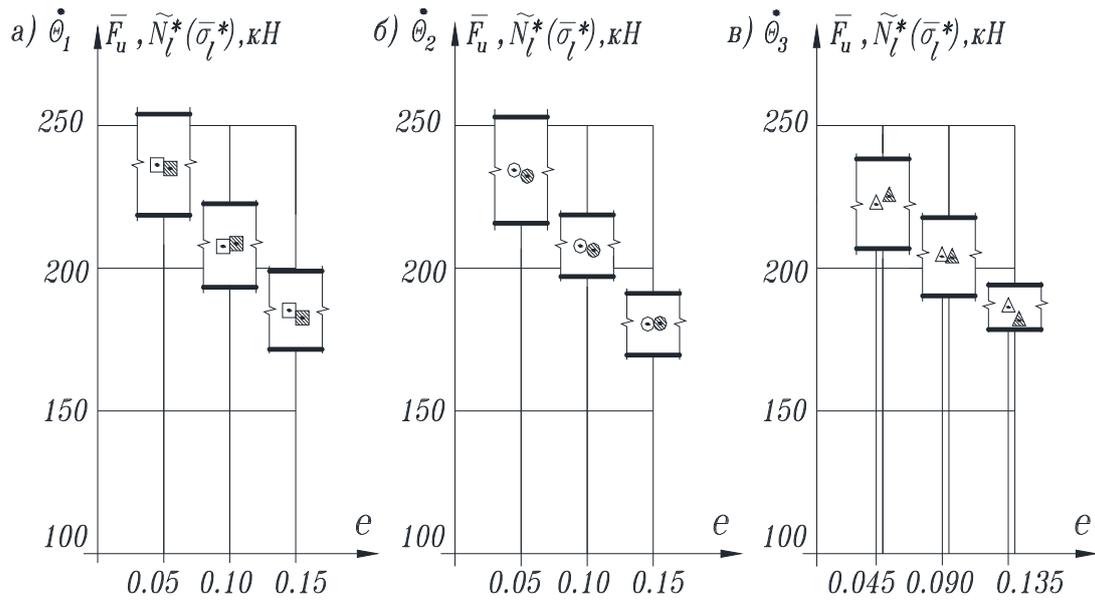
Рис. 2. Условные напряжения при $\dot{\theta}_j = 3,923 \cdot 10^{-3}$,
 $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) = 23,64$ МПа и $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s) = 26,09$ МПа

Расчётные силовые показатели $\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*)$, $\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m, \tilde{\sigma}_l^*)$ приводятся в табл. 2, а сравнение их с опытными разрушающими нагрузками $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta \bar{F}_u$ [2] – в табл. 2 и на рис. 3.

Таблица 2

Партия j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	Напряжения, МПа		$e \geq 0,05$ или $e_m < 0,05$	Усилия, кН		Отклонения		
		$\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$ по [2]	Условные по (11), (13)		$\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_l^*)$ и $\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e_m, \tilde{\sigma}_l^*)$	$F_u \theta_j, e \pm \Delta \bar{F}_u$ по [2]	$\tilde{\Delta}_l^*$, кН по (5)	$\tilde{\delta}_l^*$, % по (6)	$(\tilde{\Delta}_l^*)^2$ кН ²
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s = 1$	392,3	26,09	26,09	0,050	234,8	236,3±17,7	-1,5	-0,63	2,25
				0,100	208,7	207,9±14,7	0,8	0,38	0,64
				0,150	182,6	185,3±13,7	-2,7	-1,46	7,29
2	39,23	25,51	25,80	0,050	232,2	234,4±18,6	-2,2	-0,94	4,84
				0,100	206,4	207,9±10,8	-1,5	-0,72	2,25
				0,150	180,6	180,4±10,8	0,2	0,11	0,04
3	3,923	23,64	24,85	0,045	225,1 ^Δ	222,6±15,7	2,5	1,12	6,25
			24,865	0,090	203,9	204,0±13,7	-0,1	-0,05	0,01
				0,135	181,5	186,3±7,8	-4,8	-2,58	23,04
$\Sigma =$							-9,3	$\Sigma =$	46,61

Δ - при $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_3) = 23,64$ МПа, $\Delta \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_3) = 2,45$ МПа и $e_m = 0,045$ по (13).



Условные обозначения:

- , ○, Δ – средние опытные разрушающие силы $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$;
- , ●, ▲ – расчётные усилия $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_i^*)$, $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e_m, \tilde{\sigma}_i^*)$ по (10), (14);
- , ○, Δ – границы доверительных интервалов $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ при вероятности $p=0,95$

Рис. 3

Выводы

Определяемые по формулам (10), (14) усилия $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_i^*)$, $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e_m, \tilde{\sigma}_i^*)$ располагаются в границах доверительных интервалов $[\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) - \Delta\bar{F}_u, \bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) + \Delta\bar{F}_u]$ средних экспериментальных разрушающих нагрузок $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$.

Абсолютные $\tilde{\Delta}_i^*$ (5) и относительные $\tilde{\delta}_i^*$ (6) отклонения составляют соответственно $-4,8...+2,5$ кН и $-2,58...+1,12\%$, а сумма квадратов отклонения - всего $46,61$ кН².

Применение формулы (11) приводит к $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_i^*)$, достаточно близким к опытным средним $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$, при всех заданных скоростях $\dot{\theta}_j$ в интервале эксцентриситетов

$e = [0,100; 0,090]$, и, следовательно, напряжения $\tilde{\sigma}_i^*$ являются функцией не только $\dot{\theta}$, но и e .

Методика вычисления предельных сил $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\sigma}_i^*)$, $\tilde{N}_i^*(\dot{\theta}_j, e_m, \tilde{\sigma}_i^*)$ легко реализуется, приводит к адекватным с опытом результатам и может найти применение в практических приложениях.

Библиографический список

1. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции/ Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2000. – 76 с.
2. Синозерский, А.Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии/ А.Н. Синозерский., Р.А. Мухтаров// Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. № 1(4). – С. 72–83.
3. Синозерский, А.Н. Определение условных деформаций при внецентренном сжатии с постоянной скоростью нагружения призм из мелкозернистого бетона/ А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2011. – Вып.№1(2). – С. 18-23.
4. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам/Госстрой СССР. – М.:1990. – С. 8–9.

References

1. Building Regulation 2.03.01-84*.Concrete and ferroconcrete structures/ Gosstroy of Russia. – M.: GUPCPP, 2000. – 76 p.
2. Sinozersky, A.N.Definition of basic forces and deflected mode of prisms from fine grained concrete under eccentric compression/ A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov// Building Mechanics and Structures. – Voronezh, 2012. – Issue .№ 1 (4). – С. 72–83.
3. Sinozersky, A.N. Definition of conditional deformations under eccentric compression with constant loading speed of prisms from fine grained concrete./A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov// Building Mechanics and Structures. – Voronezh, 2011. – Issue.№1 (2). – P. 18-23.
4. State standard specification 10180-90. Methods of strength definition according to check samples/Gosstroy of USSR. – M., 1990. – P.8–9.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, предельная нагрузка, призмный предел прочности.

Key words: eccentric compression, fine grained concrete, limit loading, prism strength limit.

УДК 620.10:620.17

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
канд. техн. наук., проф. кафедры
строительной механики
А.Н. Синозерский
Ст. преподаватель кафедры
строительной механики
Р.А. Мухтаров
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail: rinat19611 @rambler.ru

The Voronezh State University of Architecture
And Civil Engineering
PhD of Tech. Sc , prof. of Department
of Structural Mechanics
A.N. Sinozersky
Lecturer of Department
of Structural Mechanics
R.A. Muhtarov
Voronezh, Russia tel.: 8(473)2715230
e-mail: rinat19611 @rambler.ru

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

КОМБИНИРОВАННЫЙ СПОСОБ РАСЧЁТА РАЗРУШАЮЩИХ УСИЛИЙ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

Определяются равнодействующие внутренних сил в момент разрушения с привлечением методики СНиП 2.03.03- 84* “Бетонные и железобетонные конструкции” и использованием параметра напряжённого состояния и базовых характеристик $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e)$, $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$ при произвольных $\dot{\theta}_j$ и стандартной $\dot{\theta}_s$ скоростях с заданным эксцентриситетом. Полученные значения сопоставляются с опытными разрушающими нагрузками.

A. N. Sinozersky, R. A. Muhtarov

COMBINATION COMPUTATION METHOD OF BREAKING STRENGTH OF ECCENTRICALLY COLLAPSIBLE PRISMS FROM FINE CONCRETE

There were determined the resultants of internal forces during breaking time are controlled by Building Regulation 03.03- 84* “Concrete and ferroconcrete structure” and with application of parameter of deflected mode and basic characteristics at arbitrary $\dot{\theta}_j$ and standard $\dot{\theta}_s$ speeds with prescribed eccentricity. The received values and experimental breaking loads are compared.

В [1] предельное состояние внецентренно сжимаемого элемента прямоугольного сечения определяется усилием

$$\tilde{N}_l^* = \tilde{\sigma}_l^* \cdot A_l,$$

где условное напряжение $\tilde{\sigma}_l^* = 0,5 \cdot [\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) + \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)]$ равномерно распределяется по части площади [2]:

$$A_l = b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e); \quad (1)$$

$\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$ и $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)$, кПа, – опытные призмные пределы прочности при заданной $\dot{\theta}_j$ и стандартной $\dot{\theta}_s = 0,3923$ [3] относительных скоростях нагружения; $b = h = 0,1$ м – ширина поперечного сечения; $e = y_f/h$ – относительный эксцентриситет; y_f , м, – координата точки f ($z_f = 0$) приложения \tilde{N}_l^* и при этом $0,05 \leq e \leq 0,15$.

© Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.

В настоящем исследовании предлагается, привлекая методику СНИП [2] и базовые показатели [4], находить равнодействующие внутренних сил в момент разрушения по формуле

$$\tilde{N}_l(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\rho}) = \tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e) \cdot \tilde{\rho}_l(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\rho}), \quad (2)$$

где усилие

$$\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e) = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) \cdot A_l \quad (3)$$

и параметр напряжённого состояния (н.с)

$$\tilde{\rho}_l(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\rho}) = 2 \cdot \tilde{\rho}_l(\dot{\theta}_j, e) - 1 \quad (4)$$

с относительным коэффициентом увеличения деформаций при внецентренных воздействиях

$$\tilde{\rho}_l(\dot{\theta}_j, e) = \tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e) / \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e), \quad (5)$$

где $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e)$ и $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$ – базовые характеристики при скоростях $\dot{\theta}_j$ и $\dot{\theta}_s$ с заданным эксцентриситетом e .

Результаты выполненных расчётов базовых состояний представлены в [4], [5], а необходимые для вычисления предельных нагрузок $\tilde{N}_l(\dot{\theta}_j, e, \rho)$ сведения – в табл. 1.

Таблица 1

Партия j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	e	Коэффициенты увеличения			Параметры н.с. $\tilde{\rho}_l(\dot{\theta}_j, e, \tilde{\rho})$ по (4)	Усилия, кН	
			$\tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e)$ по [4]	$\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$ по (4) или (5)	относительные $\tilde{\rho}_l(\dot{\theta}_j, e)$ по (5)		$\tilde{N}_l^*(\dot{\theta}_j, e)$ по (4)	$\tilde{N}_l(\dot{\theta}_j, e, \rho)$ по (2)
$s = 1$	392,3	0,050	1,1952	1,1952	1	1	234,8	234,8
		0,100	1,2575	1,2575	1	1	208,7	208,7
		0,150	1,2958	1,2958	1	1	182,6	182,6
2	39,23	0,050	1,2092	1,1952	1,012	1,023	229,6	234,9
		0,100	1,2757	1,2575	1,014	1,029	204,1	210,0
		0,150	1,3163	1,2958	1,016	1,032	178,6	184,3
3	3,923	0,045	1,2127	1,1865	1,022	1,044	215,1	224,6
		0,090	1,2848	1,2476	1,027	1,055	193,8	204,5
		0,135	1,3247	1,2858	1,030	1,061	172,6	183,1

Примечание: призмные пределы прочности [4] - $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_1) = 260,9$ кПа, $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_2) = 255,1$ кПа и $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_3) = 236,4$ кПа.

Составление расчётных $\tilde{N}_l(\dot{\theta}_j, e, \rho_j)$ и опытных разрушающих $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta \bar{F}_u$ усилий приведено в табл. 2.

Таблица 2

Партия j	Скорость $\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	$e = \frac{y_f}{h}$	Нагрузки, кН		Отклонения			
			$\tilde{N}_l(\dot{\theta}_j, e, \rho)$ по (2)	$\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta \bar{F}_u$ по [4]	$\tilde{\Delta}_l = \tilde{N}_l - \bar{F}_u$, кН	$\tilde{\delta}_l = (\tilde{\Delta}_l / \bar{F}_u) \cdot 100$, %	$(\tilde{\Delta}_l)^2$, кН ²	
$s = 1$	392,3	0,050	234,8	236,3±17,7	-1,5	-0,63	2,25	
		0,100	208,7	207,9±14,7	0,8	0,38	0,64	
		0,150	182,6	185,3±13,7	-2,7	-1,46	7,29	
2	39,23	0,050	234,9	234,4±18,6	0,5	0,21	0,25	
		0,100	210,0	207,9±10,8	2,1	1,01	4,41	
		0,150	184,3	180,4±10,8	3,9	2,16	15,21	
3	3,923	0,045	224,6	222,6±15,7	2,0	0,90	4,00	
		0,090	204,5	204,0±13,7	0,5	0,25	0,25	
		0,135	183,1	186,3±7,8	-3,2	-1,72	10,24	
$\Sigma =$					+	2,4	$\Sigma =$	44,64

Выводы

Имеем наименьшую сумму квадратов отклонений $\sum(\tilde{\Delta}_l)^2 = 44,54 \text{ кН}^2$ по сравнению с $\sum(\tilde{\Delta}_l^*)^2 = 52,61 \text{ кН}^2$ и $\sum(\tilde{\Delta}_{et})^2 = 64,36 \text{ кН}^2$, полученными в [1] и [5].

Расчётные нагрузки $\tilde{N}_l(\dot{\theta}_j, e, \rho)$ близки к средним разрушающим $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ при относительных отклонениях $\tilde{\delta}_l$ от -1,72 % до +2,16 %.

Предлагаемый способ представляет комбинацию методик СНиП 2.03.01-84* [2] и базовых состояний [4] при условии $0 \leq e \leq 0,150$ и не требует, как в [1], выполнения дополнительных исследований для случаев $0 \leq e_m \leq 0,05$.

Библиографический список

1. Синозерский, А.Н. Зависимость предельных нагрузок внецентренно сжимаемых элементов из мелкозернистого бетона от призмных пределов прочности при заданных скоростях нагружения/ А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. № 1(4). – 5 с.
2. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой России. М.: ГУП ЦПП, 2000. – 76 с.
3. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам/ Госстрой СССР. – М., 1990. - С. 8-9.
4. Синозерский, А.Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии/ А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. № 1 (4). – С. 72-83.
5. Синозерский, А.Н. Экспериментально-теоретический расчёт разрушающих усилий внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона/ А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров //Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. № 1 (4). – 4 с.

References

1. Sinozersky, A.N. Limit loads of eccentrically compressed components from fine concrete dependence on prism strength limits at given speed of loading/ A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov // Constructional Mechanics and Structures. – Voronezh, 2012. – Issue № 1 (4). – 5 p.
2. Building Regulations 2.03.01-84*. Concrete and ferroconcrete structures / Gosstroy of Russia. - M.: UP. CPP, 2000. – 76 p.
3. Building Regulations 10180-90. Methods of strength definition according to check samples/ Gostroy of USSR. – M., 1990. - P.8-9.
4. Sinozersky, A.N. Definition of basic strengths and deflected mode of prisms from fine grained concrete at eccentric compression/ A.N. Sinozersky. R.A. Muhtarov // Constructional Mechanics and structures. – Voronezh, 2012. – Issue №1 (4). – P.72-83.
5. Sinozersky, A.N. Experimental – technical calculation of breaking strength of eccentrically compressed prisms from fine grained concrete/ A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov // Constructional Mechanics and Structures. – Voronezh, 2012. – Issue № 1 (5). – 4 p.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, разрушающие усилия.

Key words: eccentric compression, fine-grained concrete, breaking strength.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.04+624.6

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной
механики*

В.С. Сафронов

Аспирант кафедры строительной механики

А.В. Антипов

Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)237-97-36

e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru

*The Voronezh State University of Architecture
and Civil Engineering*

*Dr of Tech. Sc., prof. of Department of Structural
Mechanics*

V.S. Safronov

Postgraduate of Structural Mechanics

A.V. Antipov

Russia, Voronezh, tel. 8(4732)379736;

e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru

В.С. Сафронов, А.В. Антипов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ПРОЛЕТНОГО СТРОЕНИЯ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА

Описывается методика и результаты инструментальных измерений резонансных колебаний сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста при движении тяжелых автомобилей. По записанным виброграммам прогибов главных балок для периодов проезда автомобиля по мосту и после съезда с него выполняется спектральный анализ. Характерные гармоники сопоставляются с собственными частотами пролетного строения, полученными на ЭВМ с использованием конечно-элементной модели.

V.S. Safronov. A.V. Antipov

PILOT-DESIGN INVESTIGATION OF RESONANT VIBRATION OF ROAD METAL BOX SPAN

Technique and results of instrumental measurement of resonant vibrations of bridge ferroconcrete spans under heavy traffic movement is described. According to record of main beam deflection for the time of car movement onto bridge and after exit from it the spectrum analysis is carried out. Specific harmonics are compared with self span frequency received with computer with application of finite-member model.

Во время обследования автодорожного моста через реку Колва со сталежелезобетонным пролетным строением в республике Коми при изучении динамической реакции на проезд по мосту тяжелых автомобилей обнаружены резонансные колебания пролетных строений с быстро нарастающими амплитудами. После съезда автомобилей с моста колебания пролетного строения происходили с характерными для биения изменениями амплитуд, которые могут быть опасными для прочности и особенно усталостной прочности сталежелезобетонных пролетных строений. В настоящей статье для анализа причин резонансных колебаний балочного моста используется апробированная нами в публикации [1] и основанная на предложенной В.В. Болотиним [2] теории динамической устойчивости сооружений версия параметрических колебаний пролетных строений.

© Сафронов В.С., Антипов А.В.

Рассматриваемый автодорожный мост построен в 1980 году по проекту Ленгипротрансместоотрядом №19 треста Мостострой 6 Минтрансстроя СССР под временные нагрузки Н-30 и НК-80. Мост пятипролетный по схеме 5х63,0 м и габаритом Г-8,46+2х0,90 м. Пролетные строения моста во всех пролетах моста - разрезные, сталежелезобетонные с монолитной железобетонной плитой по типовому проекту серия 3.503-18, инв.№767/2 Ленгипротрансмест, 1970 г. в «северном» исполнении.

Поперечное сечение пролетного строения моста с геометрическими размерами основных конструктивных элементов представлено на рис. 2. В каждом пролете установлено по две сварные сплошностенчатые двутавровые балки из стали 15ХСНД постоянной по длине высоты 3206 мм, объединенные между собой системой продольных и поперечных связей (рис. 1). Расстояние между главными стальными балками равно 7600мм. Толщина стенки - 12мм. Ширина верхнего и нижнего поясов соответственно равна 410 и 560мм. Между главными балками смонтирован металлический прогон с параллельными поясами высотой 400мм. Монолитная железобетонная плита проезжей части толщиной 16см и шириной 11,0 м опирается на главные балки пролетного строения и средний прогон. Совместное сопротивление действующим нагрузкам стальных балок и железобетонной плиты проезжей части обеспечивается сварными упорами П-образной формы.



Рис. 1. Общий вид пролетного строения моста

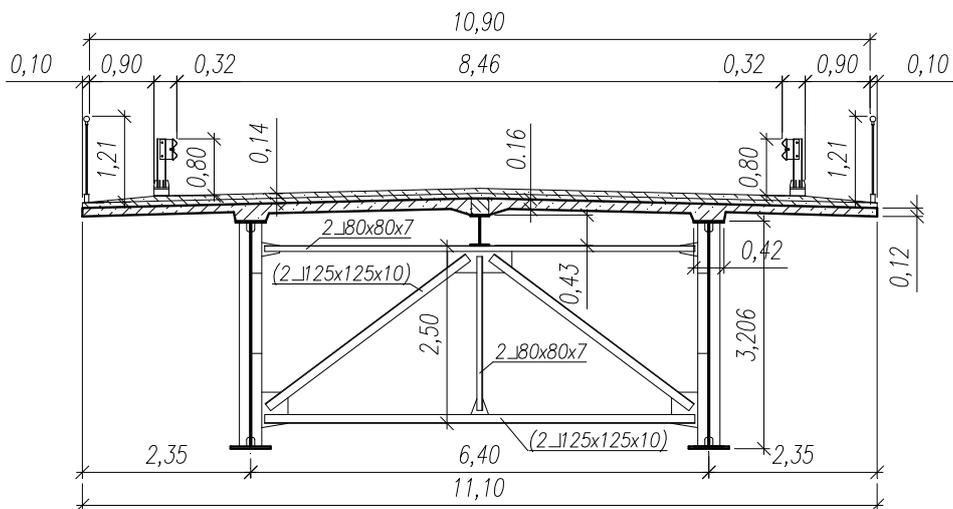


Рис. 2. Поперечное сечение пролётного строения моста

Для изучения реакции моста через реку Колва-2 на проезд автомобилей в эксплуатационном режиме (рис. 3) измерялись прогибы главных балок в среднем сечении.

Регистрация параметров колебаний осуществлялась с помощью электронного измерительного комплекса с использованием



Рис. 3. Проезд по мосту автоцистерны при регистрации колебаний пролетного строения

триангуляционного лазерного датчика серии РФ603 производства ООО «РИФ-РЕК» Республики Беларусь, используемого по схеме прогибографа (рис. 3). Максимальные перемещения, которые могут быть зарегистрированы используемым при измерениях перемещений датчиком, ограничивались величиной 50 мм с погрешностью, не превышающей 0,01 мм.

В процессе измерений цифровые значения прогибов балки с частотой опроса датчика 200 Гц фиксировались и сохранялись в файловом формате программы Microsoft Excel.



Рис. 4. Комплект аппаратуры для регистрации колебаний пролетного строения

Из данных инструментальных измерений получено, что в большинстве случаев колебания пролетных строений моста не имеют резонансного характера. В этих заездах реакция моста является обычной для сталежелезобетонных пролетных строений, так как полученный при натурных измерениях коэффициент динамичности близок к принятому в соответствии с рекомендациями СНиП 2.05.03-84* при проектировании моста нормативному значению $1+\mu=1,15$. Вычисленные с помощью преобразования Фурье спектральные плотности колебаний пролетного строения также имеют типовую форму. Одна из таких спектральных плотностей, полученная для одной из типовых виброграмм, показана на рис. 5. Из графика видно: колебания пролетного строения имеют повышенные амплитуды в четырех частотных диапазонах: 1,6-1,9 Гц; 2,1-2,3 Гц; 2,5-1,7 Гц; 3,6 Гц.

грамм, показана на рис. 5. Из графика видно: колебания пролетного строения имеют повышенные амплитуды в четырех частотных диапазонах: 1,6-1,9 Гц; 2,1-2,3 Гц; 2,5-1,7 Гц; 3,6 Гц.

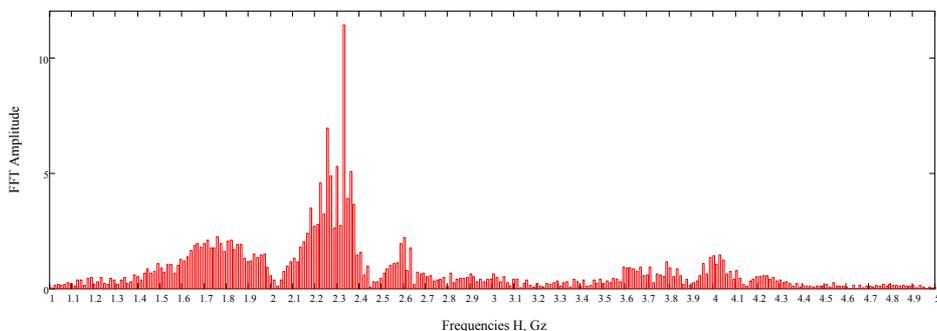


Рис. 5. Спектральная плотность колебаний пролетного строения

В отдельных проездах автомобилей с повышенными скоростями наблюдается резонансный режим колебаний пролетных строений с быстро нарастающими амплитудами. Одна из виброграмм, полученная при движении по мосту загруженной автоцистерны СКАНИЯ Р340 со скоростью $v=45$ км/ч, приведена на рис. 6. Динамический коэффициент при этом существенно превышает нормативное значение и достигает величины $1+\mu=1,96$. Отметим, что после съезда автомобилей с моста колебания пролетного строения происходят с характерными для *биения* изменениями амплитуд, которые могут быть опасными для прочности и особенно усталостной прочности сталежелезобетонных пролетных строений.

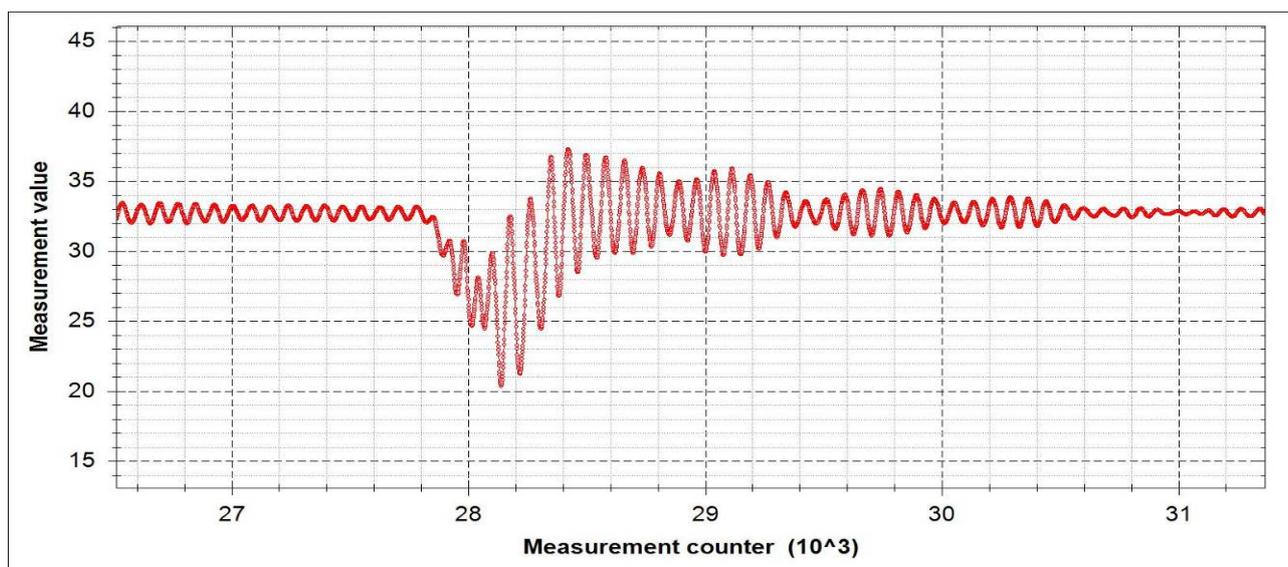


Рис. 6. Виброграмма прогибов главной балки пролетного строения при проезде загруженной автоцистерны СКАНИЯ Р340 со скоростью $v=45$ км/ч

Более детально рассмотрим эти свободные колебания пролетного строения после съезда автомобилей с моста колебания пролетного строения с целью выявления характерных частот. С этой целью для диапазона колебаний, представленного на рис. 7, выполнены расчеты спектральной плотности с использованием оператора преобразования Фурье в вычислительной математической программе Mathcad. График спектральной плотности для свободных колебаний пролетного строения приведен на рис. 8.

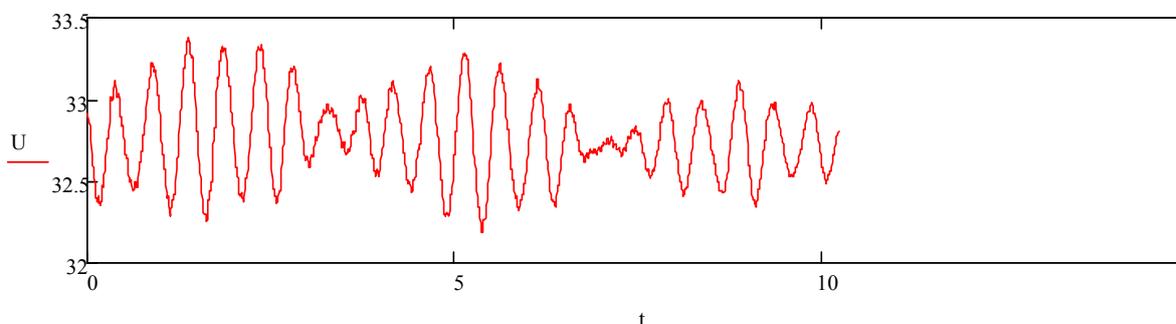


Рис. 7. Свободные колебания пролетного строения после съезда автомобилей

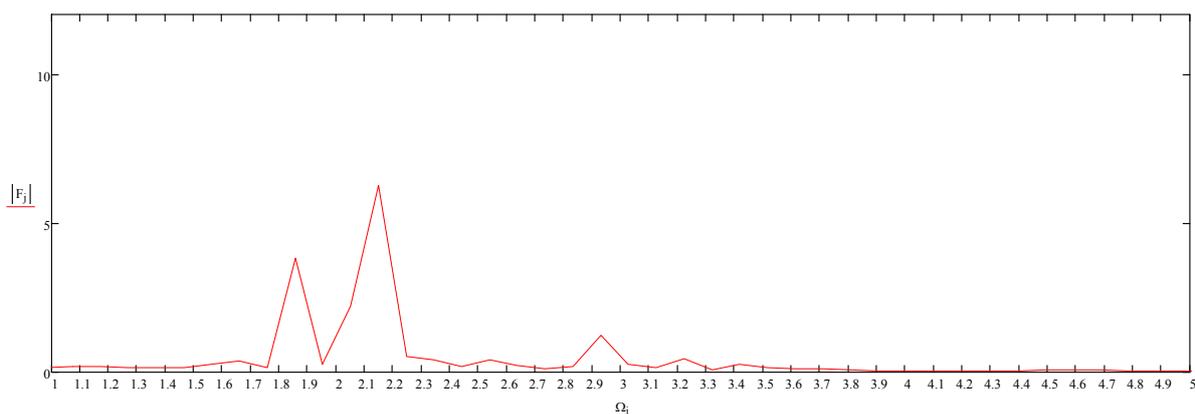


Рис. 8. Спектральная плотность свободных колебаний пролетного строения

Из анализа приведенных графиков следует, что свободные колебания являются суммой двух гармоник, которые имеют частоты $f_1 = 1,85$ Гц и $f_2 = 2,15$ Гц (периоды $T_1 = 0,54$ с и $T_2 = 0,46$ с).

Для выявления соответствия возбуждаемых при проезде автомобилей собственных частот и вида соответствующих им собственных форм свободных колебаний моста выполнялся модальный анализ пролетного строения моста с использованием представленной на рис. 9 пространственной динамической КЭ-модели.

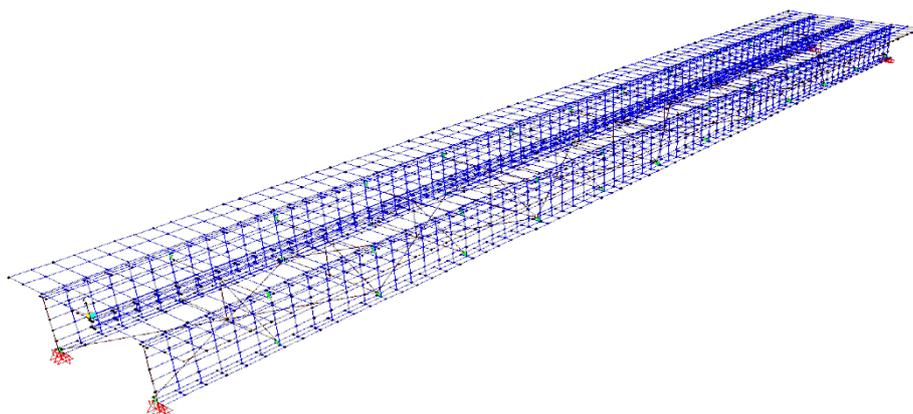


Рис. 9. Пространственная динамическая конечно-элементная модель сталежелезобетонного пролетного строения

При моделировании пространственной системы пролетного строения моста использовались следующие типы конечных элементов (КЭ) из библиотеки SAP2000 [3]:

- пространственный (3D) стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций;
- плоский оболочечный КЭ;
- упругий (пружинный) элемент Link;
- элемент жесткой связи Rigid.

Пространственный стержневой КЭ использовался в расчетах для моделирования элементов поперечных связей между главными стальными балками и ребер жесткости стальных балок.

Плоский оболочечный КЭ является комбинацией конечных элементов плоского (мембранного) и изгибного напряженных состояний. Этот элемент использовался для моделирования элементов поясов и стенки стальных двутавровых главных балок и железобетонной

плиты проезжей части пролетного строения моста. Поскольку в узлах стержневого и плоского оболочечного КЭ имеется одинаковый набор степеней свободы, то возможно их совместное использование в одной КЭ модели. Упругий элемент Link представляет собой связь двух СС с заданной жесткостью. Упругие КЭ использовались в расчете для моделирования сопряжений стальных главных балок с железобетонной плитой проезжей части моста и для моделирования узлов опирания главных балок на массивные опоры

Полученные с использованием вычислительного комплекса SAP2000 [3] получены данные о спектре собственных частот и соответствующих им собственных форм сталежелезобетонного пролетного строения рассматриваемого моста.

Численные значения выделенных из всего рассмотренного спектра наиболее важных для эксплуатации рассматриваемого моста собственных частот и краткое описание соответствующих собственных форм приводится ниже в таблице.

Таблица

Расчетные собственные частоты и описание соответствующих им собственных форм свободных колебаний пролетного строения

Номер	Количественные параметры			Краткое описание собственной формы
	Период, с	Техническая частота, Гц	Частота, рад/с	
1	0,6065	1,6488	10,360	Изгибные колебания главных балок по одной полуволне (рис. 10)
2	0,4384	2,2811	14,333	Изгибно-крутильные колебания главных балок (рис. 11)
3	0,2329	4,2934	26,976	Изгибно-крутильные колебания главных балок с изгибом консолей плиты проезжей части (рис. 12)
4	0,1920	5,2073	32,719	Изгибные колебания главных балок по двум полуволнам (рис. 13)

Изображение первых четырех собственных форм свободных колебаний пролетного строения рассматриваемого моста представлено на рис. 10-13. На каждом из этих рисунков приведены аксонометрии деформированных состояний пролетного строения и схемы поступательных или поворотных перемещений поперечного сечения в середине пролета при максимальных отклонениях от положения статического равновесия. В первом случае это соответствует изгибным деформациям пролетного строения, а во втором – соответственно колебаниям с изгибно-крутильными деформациями, когда главные балки изгибаются с противоположными фазами движения.

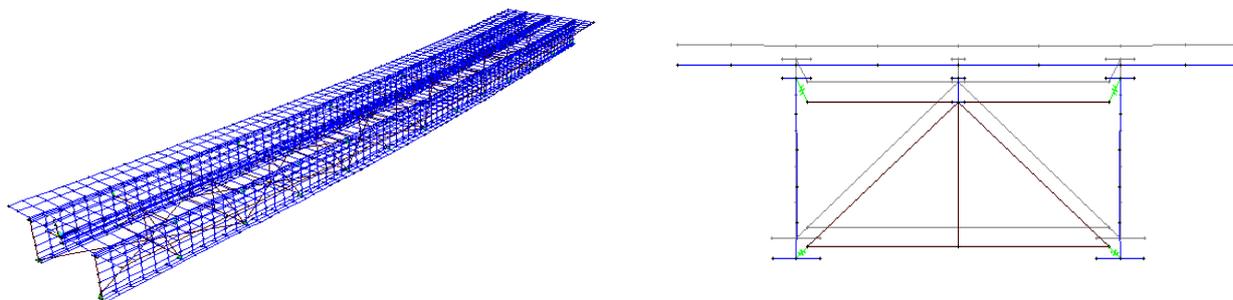


Рис. 10. Аксонометрическое изображение и перемещения поперечного сечения для первой собственной формы с частотой 1,65 Гц

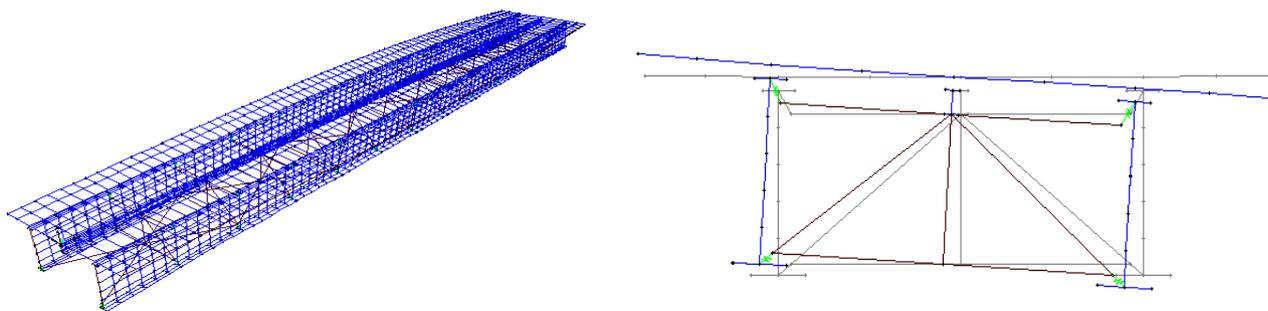


Рис. 11. Аксонометрическое изображение и перемещения поперечного сечения для второй собственной формы с частотой 2,28 Гц

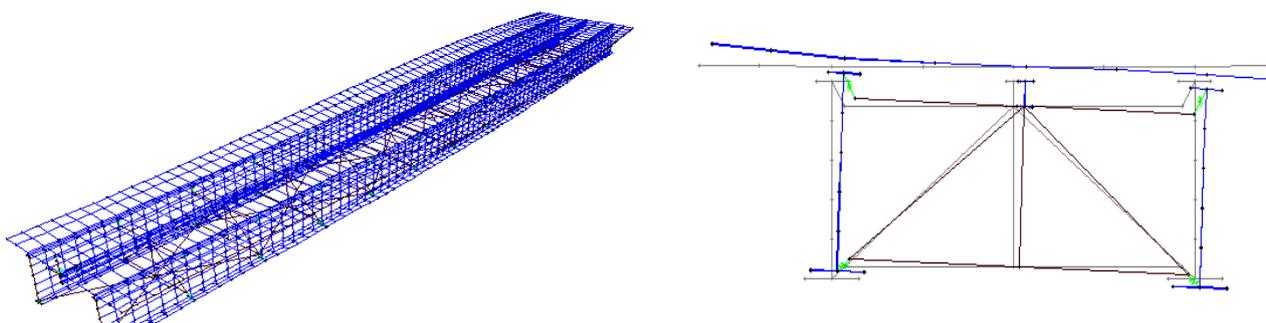


Рис. 12. Аксонометрическое изображение и перемещения поперечного сечения для третьей собственной формы с частотой 4,29 Гц

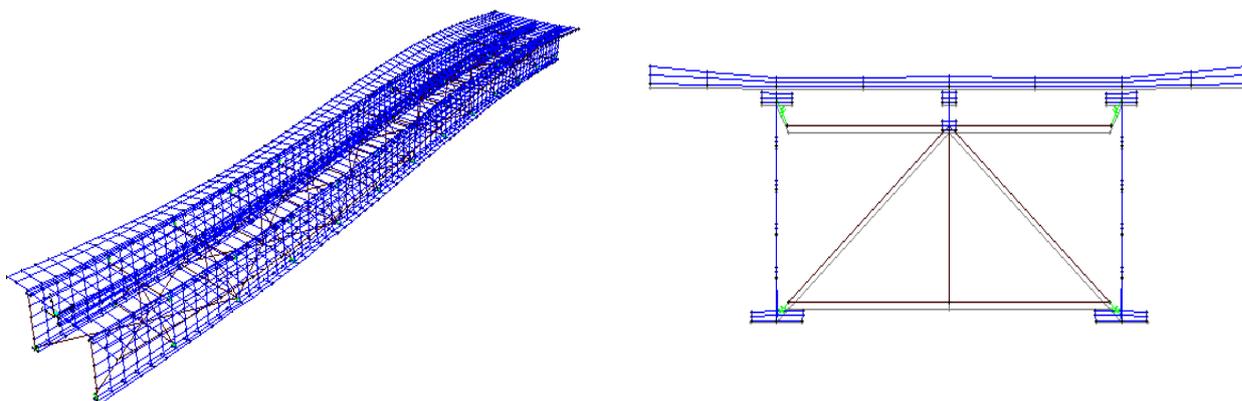


Рис. 13. Аксонометрическое изображение и перемещения поперечного сечения для четвертой собственной формы с частотой 5,20 Гц

Таким образом, с помощью выполненного на основе динамической конечно-элементной расчетной схемы сталежелезобетонного пролетного строения модального анализа, учитывающего полученные при обследовании и натурных обмерах жесткостные и инерционные параметры конструкций, получены данные о спектре собственных частот и соот-

ветствующих им собственных форм сталежелезобетонного пролетного строения рассматриваемого моста. Двум расчетным низшим частотам пролетного строения с достаточно близкими частотами 1,65 и 2,28 ГЦ отвечают изгибные и изгибно-крутильные собственные формы свободных колебаний пролетного строения. По-видимому, именно эти собственные формы являются составляющими свободных колебаний в режимах биения. Поэтому динамические параметры пролетного строения эксплуатируемого моста следует считать неблагоприятными.

Выводы

1. Выявленные при натурных измерениях резонансные колебания разрезного сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста при движении тяжелых автомобилей вызваны неблагоприятными динамическими параметрами несущей конструкции, у которой близкими являются частоты низших изгибной и изгибно-крутильной собственных форм.

2. Устранение опасных для прочности пролетных строений их резонансных колебаний можно выполнить путем направленного изменения инерционных и жесткостных параметров пролетного строения, приводящих к отдалению частоты изгибно-крутильных собственной формы от частоты изгибных колебаний.

Библиографический список

1. Сафронов, В.С. Динамические характеристики автодорожных мостов с неразрезным металлическим коробчатым пролетным строением/ В.С. Сафронов, А.В. Антипов// Строительная механика и конструкции. – Воронеж: Транспорт, 1984. – С. 98-107.
2. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем/ В.В. Болотин. – М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.
3. Справочное руководство SAP2000. - Калифорния, Беркли. США, 2009. – 470 с.

References

1. Safronov, V.S. Dynamic parameters of road bridges with continuous box span / V.S. Safronov, A.V. Antipov//Structural Mechanics and Construction. – Voronezh: Transport, 1984. – P. 98-107.
2. Bolotin, V.V. Dynamic stability of elastic systems/ V.V. Bolotin – M.: Gostechisdat, 1956. - 600 p.
3. Reference manual SAP2000. – California, Berkley. USA, 2009. – 470 p.

Ключевые слова: автодорожный мост, сталежелезобетонное пролетное строение, сплошно-стенчатая балка двутаврового сечения, резонансные колебания, спектральный анализ, конечно-элементная динамическая модель.

Key words: road bridge, composite span, solid web beam of I-shaped cross-section, resonant vibrations, spectrum analysis, finite discontinuous dynamic model.

УДК 624.046:624.21

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
Д.М. Шапиро
Аспирант кафедры строительной механики
А. П. Тютин
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail: davshap@mail.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
Dr. of Tech. Sc., prof. of Department
of Structural Mechanics
D.M. Shapiro
Post-graduate of Department of Structural Mechanics
A.P. Tyutin
Voronezh Russia, tel+7 (473) 2715230
e-mail: davshap@mail.ru*

Д.М. Шапиро, А.П. Тютин

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОЧНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

Содержится описание проекта (рабочих чертежей) пролётных строений длиной от 11.9 до 33 м из железобетонных предварительно напряжённых балок двутаврового сечения. При проектировании выполнены пространственные расчёты пролётных строений по плитно-стержневой расчётной схеме МКЭ и комплексы проверок по предельным состояниям в соответствии с действующими нормами проектирования. Расчёты предельных значений изгибающих моментов в балках по прочности и образованию трещин выполнены двумя способами: по обычным расчётным схемам и с использованием деформационной нелинейной модели железобетонных конструкций. Получены формулы геометрических характеристик сечений железобетонных балок со смешанным армированием для расчётов с использованием деформационной нелинейной модели.

D.M. Shapiro, A. P. Tyutin

CALCULATION AND DESIGN OF PRESTRESSED FERROCONCRETE BEAM SPANS OF ROAD BRIDGES

There is a description of project (working plans) of spans from ferroconcrete prestressed beams of I-shaped cross-section and 11.9-33m length. While designing spans there were done both spatial calculations according to slabby – beam design model and complex of limit states test according to operative standard of designing. Calculations of limit values of deflection moments in beams on strength and cracks forming are fulfilled in two ways: with normal design models with application of deformation nonlinear models of ferroconcrete structures. For designing with application of nonlinear model there were received formulas of geometric parameters of sections of ferroconcrete beam with mixed reinforcement.

В 2012 г. дорожным проектным предприятием ООО «Центр-Дорсервис» разработан проект (рабочие чертежи) пролётных строений длиной 11.9, 18, 21, 28, 33 м из железобетонных предварительно напряжённых балок двутаврового сечения. По опалубочным формам и способам армирования железобетонные балки близки к типовым конструкциям серии 3.503.81 (Союздорпроект, 1988 г. по настоящее время) [1]. Пролётные строения предназначены для применения при строительстве мостовых сооружениях на территории Белгородской области. Конструкции запроектированных балок рассчитаны на изготовление на заводе железобетонных конструкций ОАО «Белгородстройдеталь», отражают технологические условия этого предприятия.

© Шапиро Д.М., Тютин А.П.

При проектировании пролётных строений приняты технические нормативы современного нормативного документа СП 35.13330.2011 (актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*) [2]. Расчётные нагрузки А14 и Н14 в соответствии с ГОСТ Р 52748-2007. Всего в проекте разработаны балки восьми типоразмеров в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Технические характеристики запроектированных балок

Длина балок, м расчётный пролёт, м	Высота сечения, м	Тип армирования шаг балок, м	Схема армирования, ○ – пучок 24Ø5В1400 ● – стержень Ø25А400	Армирование верхних и нижних сеток плиты	Класс бетона
$\frac{11.9}{11.3}$	1.23	$\frac{1}{1.70 \div 2.00}$		Ø12А400, шаг 10 см	В35
		$\frac{2}{2.0 \div 2.40}$		Ø14А400, шаг 10 см	В35
$\frac{18}{17.4}$	1.23	$\frac{1}{1.70 \div 2.00}$		Ø12А400, шаг 10 см	В40
		$\frac{2}{2.0 \div 2.40}$		Ø14А400, шаг 10 см	В40
$\frac{21}{20.4}$	1.23	$\frac{1}{1.70 \div 2.00}$		Ø12А400, шаг 10 см	В40
		$\frac{2}{2.0 \div 2.40}$		Ø14А400, шаг 10 см	В40
$\frac{28}{27.4}$	1.23	$\frac{=}{1.70 \div 1.90}$		Ø14А400, шаг 10 см	В45
$\frac{33}{32.2}$	1.53	$\frac{=}{1.70 \div 2.00}$		Ø14А400, шаг 10 см	В45

В проекте предусмотрено деление балок на крайние и средние. Крайние балки отличаются от средних шириной, армированием плиты и отсутствием выпусков арматуры из полки с внешней стороны пролётного строения. Ширина плиты средних балок 140 см, крайних балок 174 см (рис. 1, а).

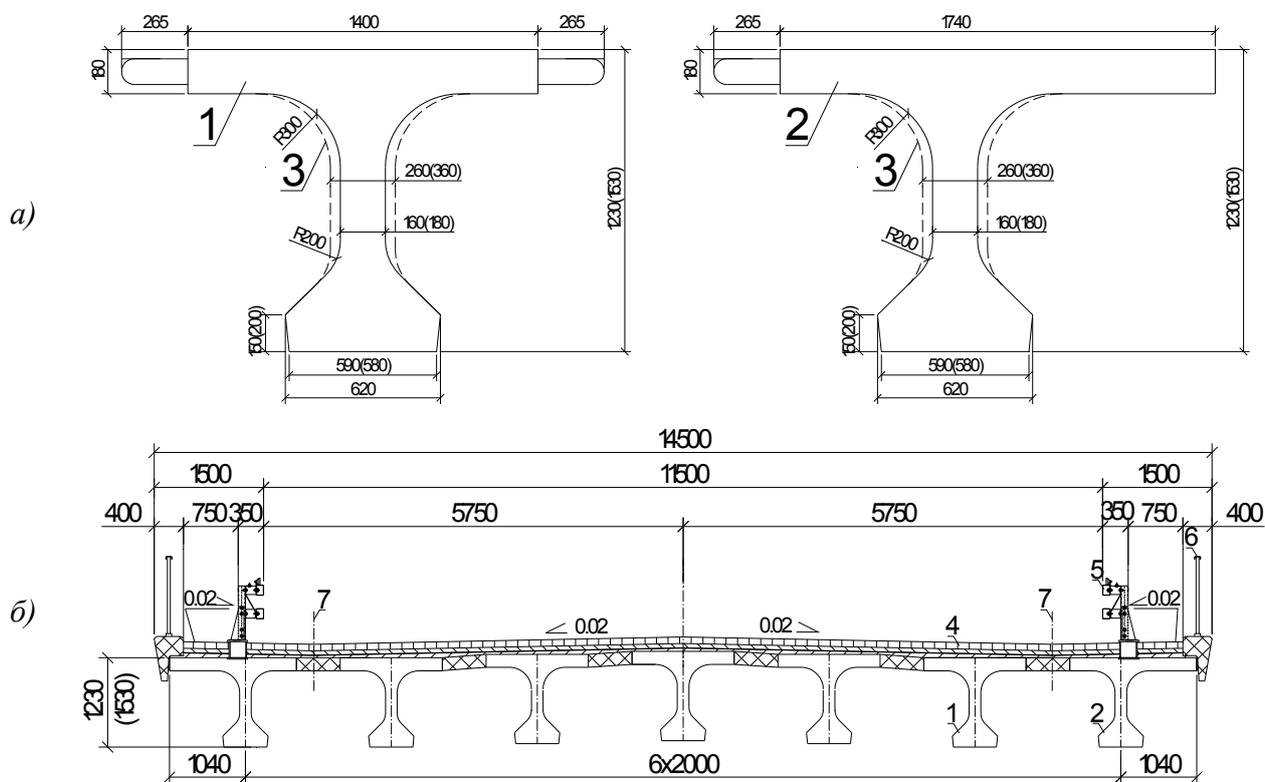


Рис. 1. Поперечные сечения средней и крайней балки (а) и пример схемы пролётного строения (б); 1 – средняя балка, 2 – крайняя балка, 3 – контур концевого уширения, 4 – многослойная дорожная одежда, 5 – металлические барьерные ограждения, 6 – металлические перила и железобетонные карнизные блоки, 7 – оси водоотводных трубок

Армирование продольной и поперечной рабочей арматурой нижних поясов и рёбер крайних и средних балок одинаковое. Предварительно напряжённая арматура – горизонтальные пучки из 24 гладких проволок диаметром 5 мм класса В1400 по ГОСТ 7348-81*(см. табл. 1).

Защитный слой бетона со стороны всех внешних поверхностей 3 см.

Балки длиной 18, 21, 33 м запроектированы с толщиной ребра 16 см, концевыми уширениями толщиной 26 см длиной 1,5 м и переходными участками от 26 до 16 см длиной 1,5–3,0 м. Балки длиной 28 м запроектированы с толщиной ребра 18 см, концевыми уширениями толщиной 36 см длиной 5,0 м и переходными участками от 36 до 18 см длиной 1,5 м. В связи с особенностями изготовления балки длиной 11,90 м несимметричны относительно своего среднего сечения. Один из концевых участков запроектирован с толщиной стенки 26 см на длине 1,5 м, переходным участком с толщиной стенки от 26 до 16 см длиной 3,0 м, другой концевой участок не имеет уширения и сохраняет ширину стенки остальной части балки 16 см.

Балки рассчитаны на применение при габаритах, предусмотренных СП 35.13330.2011, расстановку с шагом в соответствии с табл. 1 и положение крайней балки за пределами проезжей части на удалении не менее 10 см от внутренней грани барьерного ограждения и не менее 110 см от внешней кромки полос движения (см. рис. 2). Допускается косое расположение балок в пролётных строениях с углом косины (между осями опор и пролётных строений) не менее 60° .

При проектировании пролётных строений выполнены пространственные расчёты и комплексы проверок по предельным состояниям в соответствии с [2]. В расчётах главных балок рассмотрены три схемы расположения временных нагрузок на проезжей части (рис. 2). Временные нагрузки по каждой схеме устанавливались с максимальным приближением к внешней границе проезжей части (1-й случай воздействия нагрузки А14; нагрузка Н14) и к внутренним граням барьерных ограждений (2-й случай воздействия нагрузки А14). Кроме того, рассмотрены варианты положения нагрузок А14 и Н14, при которых одна колея располагалась над балкой, ближайшей к внешней границе проезжей части.

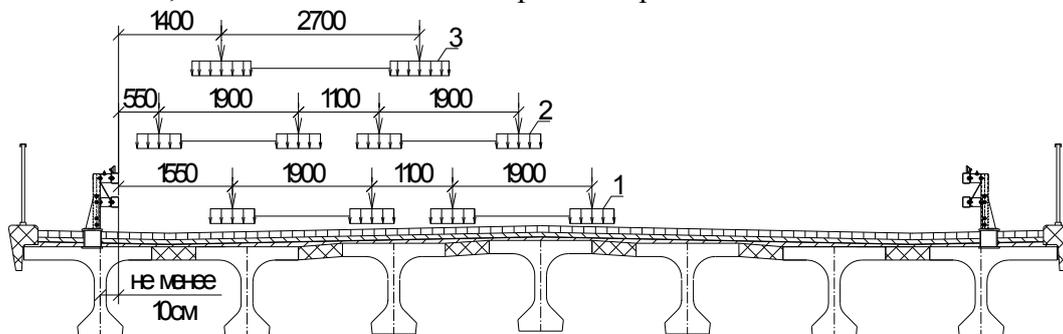


Рис. 2. Схемы установки временных нагрузок:
1 – нагрузка А14, 1-й случай, 2 – нагрузка А14, 2-й случай, 3 – нагрузка Н14

Пространственные расчёты выполнены методом конечных элементов (МКЭ) с использованием плитно-стержневой расчётной схемы (рис. 3), ранее предложенной в статьях [3, 4]. В расчётах принимались схемы пролётных строений, состоящие из пяти балок, установленных с шагом, указанным в табл. 1. Путём численного исследования доказано, что такие схемы по величинам расчётных (максимальных) моментов и поперечных сил в средней и крайней балках перекрывают все современные варианты габаритов пролётных строений автодорожных и городских мостов.

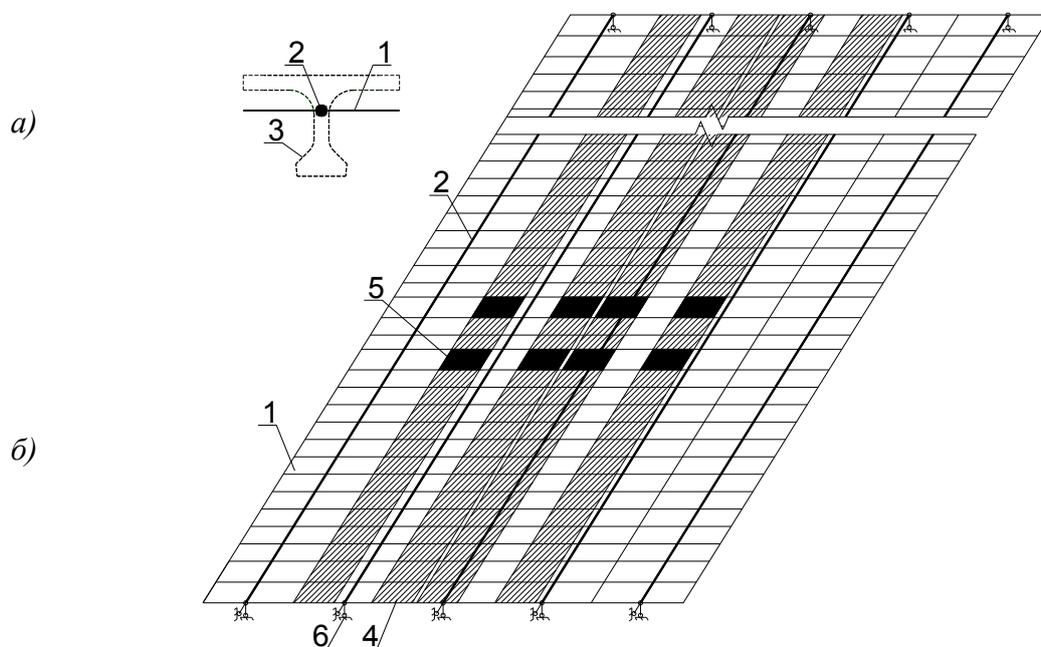


Рис. 3. Плитно-стержневая расчётная схема МКЭ:

a – расчётная схема балки; *б* – расчётная схема пролётного строения с двумя полосами нагрузки А14;
1 – КЭ плиты, 2 – стержневой КЭ, моделирующий балку, 3 – контур балки пролётного строения,
4 – колея нагрузки А14, 5 – площадки давления колёс тележки А14, 6 – узлы опирания балок на опоры

На рис. 4, *а*, *б*, *в* показано распределение долей моментов при принятых в проекте вариантах расстановки балок. Полученные диаграммы показывают, что с увеличением длины пролётов доля момента, передаваемая на наиболее нагруженную балку, снижается, т. е. имеет место увеличение распределительной способности плиты.

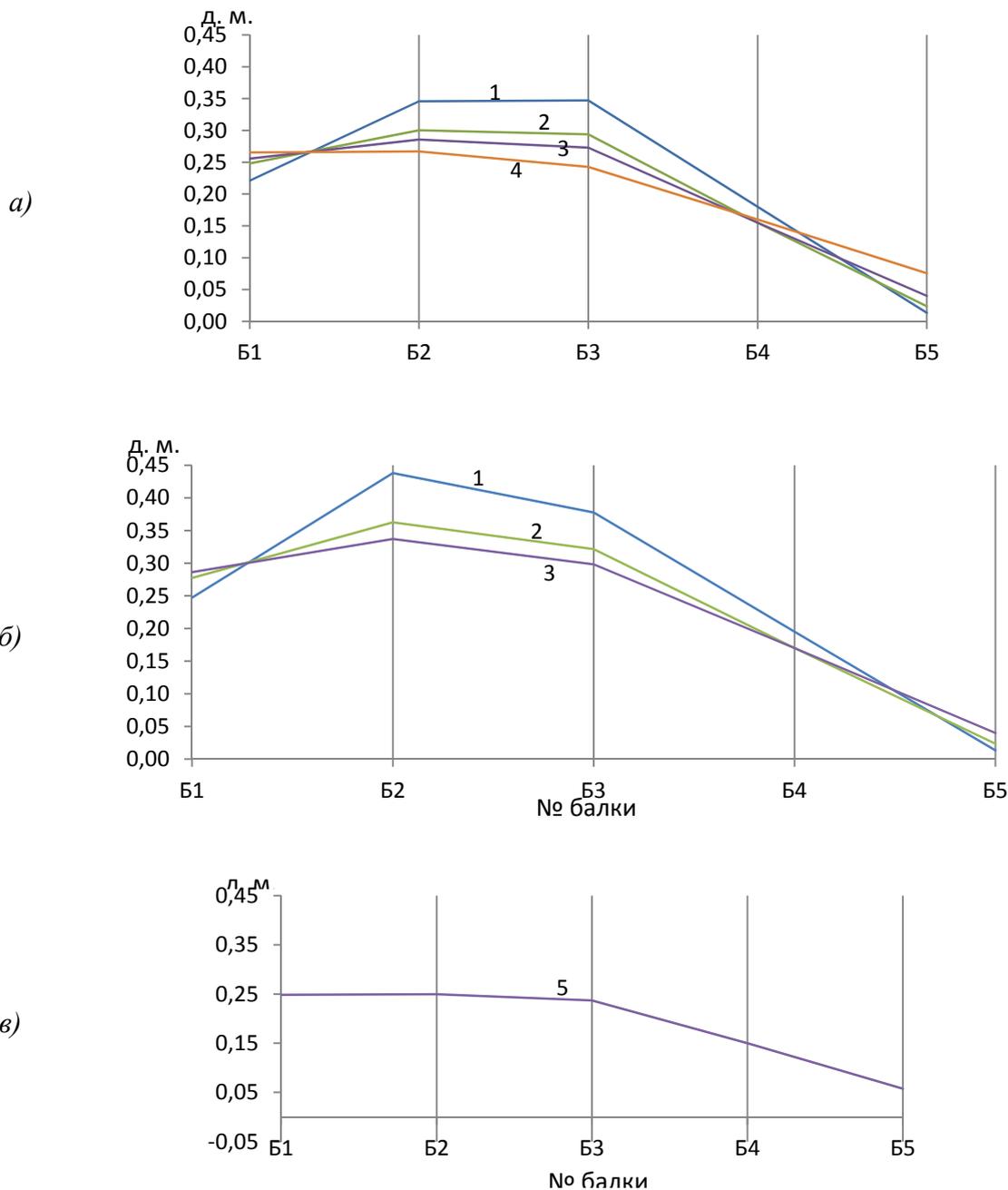


Рис. 4. Распределение долей моментов при принятых в проекте вариантах расстановки балок (нагрузка А14, 2-й случай):
а – шаг балок 2.0 м; *б* – шаг балок 2.4 м; *в* – шаг балок 1.9 м;
 1 – балка длиной 11,9 м; 2 – балка длиной 18 м; 3 – балка длиной 21 м; 4 – балка длиной 28 м;
 5 – балка длиной 28 м

Запроектированные балки удовлетворили комплексу проверок по предельным состояниям (ПС) 1-й (по прочности) и 2-й (по образованию, раскрытию трещин и прогибам) групп в соответствии с табл. 2.

Проверки балок (плиты) по предельным состояниям (ПС)

Группа ПС	Наименование проверок по ГОСТ 27751-88	Расчёт балок	Расчёт плиты
ПС 1 группы, ведущие к непригодности к эксплуатации	Разрушение любого характера (пластическое, хрупкое, усталостное)	Проверка прочности нормальных сечений по изгибающему моменту: $M_{расч.} \leq M_{пред.}$ (п. 7.63 СП 35.13330.2011)	
		Проверка наклонных сечений по поперечной силе: $Q_{расч.} \leq Q_{пред.}$ (п. 7.78 СП 35.13330.2011)	
			Проверка сечений плиты на выносливость: $\sigma_b \leq R_{bf}$; $\sigma_s \leq R_{sf}$ (п. 7.91, 7.94, табл. 7.23 СП 35.13330.2011)
ПС 2 группы, ведущие к затруднению нормальной эксплуатации	Достижение предельных деформаций (прогибов, поворотов)	Проверка прогибов пролётных строений и углов перелома продольного профиля в местах сопряжения пролётных строений: $f \leq (1/400) l$; $\beta_1 \leq 8\text{‰}$ при отсутствии временной нагрузки; $\beta_2 \leq 24\text{‰}$ при загрузении временной нагрузкой А14; $\beta_3 \leq 24\text{‰}$ при загрузении временной нагрузкой Н14 (п. 5.45, табл. 5.4 СП 35.13330.2011)	
		Проверка образования продольных трещин (ограничение сжимающих напряжений в бетоне): $\sigma_{bx} \leq R_{b,mc2}(R_{b,mc1})$ (п. 7.100 СП 35.13330.2011)	
		Проверка ограничения растягивающих напряжений в бетоне: $\sigma_{bt} \leq 1.4 R_{bt,ser}$ (п. 7.95, 7.96, табл. 7.24 СП 35.13330.2011)	
	Расчёт по образованию трещин	Проверка наибольших главных и касательных напряжений в центрах тяжести сечений: $\sigma_{1(mt)} \leq 0.85 R_{bt,ser}$ $\sigma_{2(mc)} \leq R_{b,mc2}$ $\tau_{макс} = (\sigma_{1(mt)} - \sigma_{2(mc)})/2 \leq R_{b,sh}$	
		Проверка ширины раскрытия трещин, нормальных к оси балки: $a_{cr} = (\Delta\sigma_p / E_p) \psi \leq 0.015$ см (п. 7.105, 7.106, табл. 7.24 СП 35.13330.2011)	Проверка ширины раскрытия трещин: $a_{cr} = (\sigma_s / E_s) \psi \leq 0.02$ см (п. 7.105, табл. 39 СП 35.13330.2011)
	Достижение предельного раскрытия трещин	Проверка минимальных сжимающих напряжений в нижнем поясе при отсутствии временной нагрузки: $\sigma_{вост.,min} \geq 0.5$ МПа (п. 7.102, табл. 7.24 СП 35.13330.2011)	

Определение предельных значений изгибающих моментов в балках по прочности и образованию трещин выполнено двумя способами: 1) по обычным расчётным схемам свода правил [2] и норм проектирования предыдущих лет; 2) с использованием деформационной нелинейной модели железобетонных конструкций в соответствии с положениями свода правил СП 52-102-2004 [5]. Расчёты по деформационной модели были выполнены при помощи формул для геометрических характеристик сечений (приведенных площади A_{red} , статического момента относительно нейтральной оси S_{red} , момента инерции I_{red}) предварительно напряжённых балок, приведенных авторами в статье [4].

В дополнение к формулам статьи [4] для расчётов балок длиной 28 и 33 м получены формулы геометрических характеристик сечений железобетонных балок со смешанным армированием.

Для расчётов по прочности:

$$A_{red} = \int [(\sigma_b/\varepsilon_b E_b) dA] + (\sigma_p/\varepsilon_p E_b) A_p + (\sigma_s/\varepsilon_s E_b) A_s, \quad (1)$$

$$S_{red,0-0} = \int [(\sigma_b/\varepsilon_b E_b) z dA] - (\sigma_p/\varepsilon_p E_b)(h_{0p} - x) A_p - (\sigma_s/\varepsilon_s E_b)(h_{0s} - x) A_s, \quad (2)$$

$$I_{red} = \int [(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)(z-t)^2 dA] + [(\sigma_p/\varepsilon_p E_b)(h_{0p} - x + t)^2] A_p + [(\sigma_s/\varepsilon_s E_b)(h_{0s} - x + t)^2] A_s, \quad (3)$$

где $t = S_{red,0-0}/A_{red}$, остальные обозначения - на рис. 5, а.

Для расчётов по образованию трещин:

$$A_{red} = \int [(\sigma_b/\varepsilon_b E_b) dA] + \int [(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt} E_b) dA] + (\sigma_p/\varepsilon_p E_b) A_p + (\sigma_s/\varepsilon_s E_b) A_s, \quad (4)$$

$$S_{red,0-0} = \int [(\sigma_b/\varepsilon_b E_b) z dA] - \int [(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt} E_b) /z/ dA] - (\sigma_p/\varepsilon_p E_b)(h_{0p} - x) A_p - (\sigma_s/\varepsilon_s E_b)(h_{0s} - x) A_s, \quad (5)$$

$$I_{red} = \int [(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)(z-t)^2 dA] + \int [(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt} E_b)(/z/+t)^2 dA] + [(\sigma_p/\varepsilon_p E_b)(h_{0p} - x + t)^2] A_p + [(\sigma_s/\varepsilon_s E_b)(h_{0s} - x + t)^2] A_s, \quad (6)$$

где $t = S_{red,0-0}/A_{red}$, остальные обозначения - на рис. 5, б.

В уравнениях (1)-(6) знак интеграла (\int) означает суммирование элементарных долей геометрических характеристик в пределах частей сечения: верхней, нижней полки и стенки; знак «суммы» (\sum) означает суммирование в пределах высоты x сжатой зоны; E_b , E_p , E_s - модули упругости бетона, предварительно напряжённой и обычной арматуры; σ_{ph} - предварительное напряжение в напрягаемой арматуре с учётом потерь.

При выполнении деформационных расчётов в качестве критерия исчерпания несущей способности (ПС по прочности) получены предельные относительные деформации напрягаемой арматуры ($\varepsilon_{p2} = 0,015$). Предельный момент по ограничению растягивающих напряжений (ПС по образованию трещин) получен из условия предельных относительных деформаций растянутого бетона ($\varepsilon_{bt2} = 0,00015$).

Сравнение предельных изгибающих моментов на примере балок длиной 18 и 28 м на рис. 6 показывает, что при использовании деформационной модели получены более высокие показатели по несущей способности (на 7-10 %). При использовании деформационной модели для расчёта по образованию трещин предельные моменты для балок с напрягаемой арматуры больше на 3-4 % по сравнению с обычным расчётом, для балок со смешанным армированием меньше на 2-8 % по сравнению с обычным расчётом.

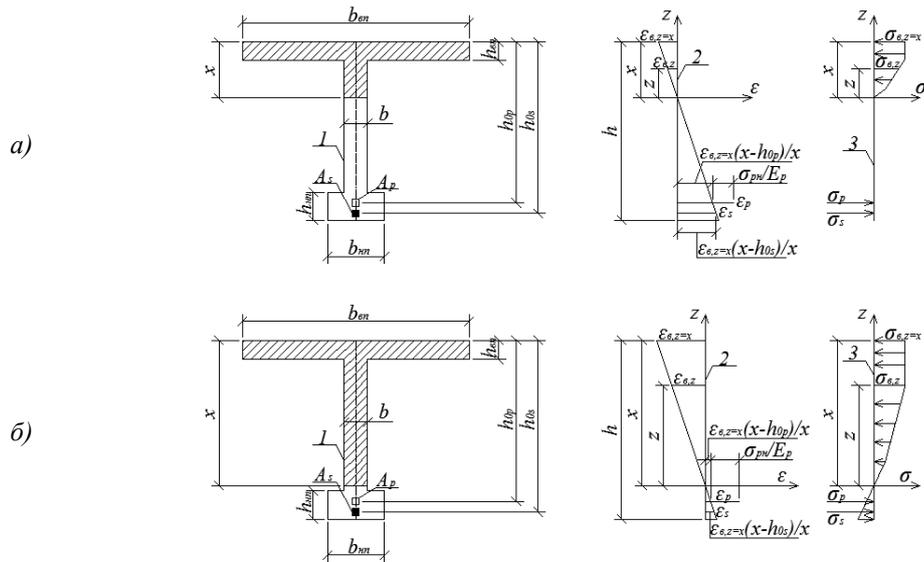


Рис. 5. Схемы к деформационному расчёту по прочности (а) и образованию трещин (б) изгибаемых железобетонных балок со смешанным армированием:
 1 – поперечное сечение балки; 2 – эпюры распределения деформаций по высоте сечения балки;
 3 – эпюры распределения напряжений по высоте сечения балки

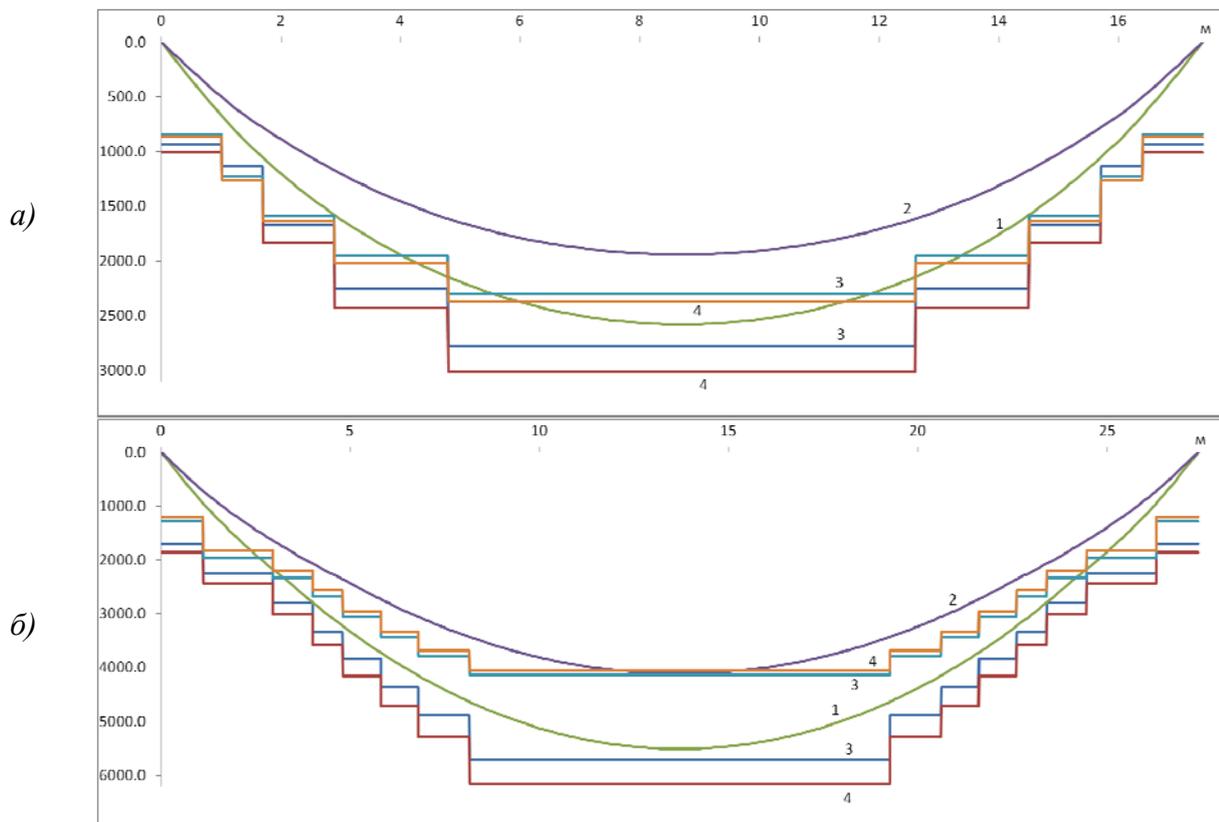


Рис. 6. Сравнение предельных изгибающих моментов $M_{пред1}$ (по прочности) и $M_{пред2}$ (по образованию трещин) на примере балок длиной 18 и 28 м:
 а – длина балок 18 м, б – длина балок 28 м; 1 – объёмлющая эпюра моментов по прочности, 2 – объёмлющая эпюра моментов по образованию трещин, 3 – предельные изгибающие моменты по обычному расчёту, 4 – предельные изгибающие моменты с использованием деформационной модели

Библиографический список

1. Типовые конструкции, изделия и узлы зданий и сооружений. Серия 3.503.1-81. Пролётные строения сборные железобетонные длиной 12, 15, 18, 21, 24, 33 м из балок двутаврового сечения с предварительно напрягаемой арматурой для мостов и путепроводов, расположенных на автомобильных дорогах общего пользования, улицах и дорогах в городах. - М.: Союздорпроект, 1981. – 2012.
2. Свод правил по проектированию и строительству СП 35.13330.2011. Мосты и трубы (актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*) / ОАО «ППП». - М., 2011.
3. Шапиро, Д.М. Пространственный нелинейный деформационный расчёт пролётных строений автодорожных мостов/ Д.М. Шапиро, А.В. Агарков, Чан Тхи Тхюн Ван// Строительство и архитектура. – Воронеж, 2008. – Вып. 2. – С.29-37.
4. Шапиро, Д.М. Нелинейные методы расчёта в современном проектировании (на примерах объектов геотехники и мостовых сооружений)/ Д.М. Шапиро, А.В. Агарков, Н.Н. Мельничук, Чан Тхи Тхюи Ван // Строительство и архитектура. – Воронеж, 2009. – Вып. 3 (15). – С. 85-94.
5. Свод правил по проектированию и строительству. СП 52-102-2004 Предварительно напряжённые железобетонные конструкции/ ФГУП ЦПП. - М. – 2005.
6. Шапиро, Д.М. Деформационный нелинейный расчёт изгибаемых железобетонных балок в составе плитно-ребристых систем/ Д.М. Шапиро, А.П. Тюнин // Бетон и железобетон, 2011. - № 6. – С. 19 – 23.

References

1. Standard construction, products and blocks of buildings and structures Series 3.503.1-81. Precast ferroconcrete spans of 12,15,18,21,14,33m length from I-shaped cross-section beams with prestressed reinforcement for bridges and overpasses, located on public roads , streets and city roads // M.: Soyuzdorproject, 1981. – 2012.
2. A set of rules on designing and building SP 35.13330.2011. Bridges and pipelines (updating reduction Building Regulations 2.05.03-84*) / ОАО «PPP». - M., 2011.
3. Shapiro, D.M. Spatial nonlinear deformational design of spans/ D.M. Shapiro., A.V. Agarkov, Trun Thi Van// «Building and Architecture». – Voronezh, 2008. – Issue 2. – С. 29-37.
4. Shapiro, D.M. Nonlinear design methods in modern designing (as examples objects of geotechnics and bridge constructions)// «Building and Architecture»/ D.M. Shapiro, A.V. Agarkov, N.N. Melchuk, Trun Thi Van. – Voronezh, 2009. – Issue 3 (15). – P. 85-94.
5. A set of rules on designing and building 52-102-2004 SP. Posttensioned ferroconcrete constructions. FGUP CPP.-M.-2005
6. Shapiro, D.M. Deformation nonlinear design of inflexible ferroconcrete beams in slabby ribbed systemm/ D.M. Shapiro, A.P. Tyunin // Concrete and ferroconcrete, 2011,- № 6. – P. 19 – 23.

Ключевые слова: пролётные строения мостов, предварительно напряжённые балки, деформационная расчётная модель.

Key words: spans, prestressed beams, deformational assumption model.

s.

УДК 624.16:624.131.54

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Аспирант кафедры
строительной механики
А.А. Тарасов
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(904)210-76-81
e-mail: taralal@rambler.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
Post-graduate of Department
of Structural Mechanics
A.A. Tarasov
Russia, Voronezh, ph.: 8(904)2107681
e-mail: taralal@rambler.ru*

А.А. Тарасов

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВЫХ УСТОЕВ ИЗ АРМИРОВАННОГО ГРУНТА

Рассматриваются конструктивные решения мостовых устоев в виде подпорных стенок из армированного грунта. Приводится описание двух групп расчётов армогрунтовых систем, выполняемых по формулам нормативно-методических документов и с использованием численных методов: устойчивости при сдвиге по составной пространственной поверхности скольжения и упругопластического расчёта на основе МКЭ.

А.А. Tarasov

DESIGN OF ABUTMENTS FROM REINFORCED GROUND

Constructive designing of bridge abutment as retaining walls from reinforced ground is analyzed. There is given a description of two groups of designing of reinforced ground systems completed according to formulas of normative – methodological documents with application of numerical techniques: shift stability along composite of spatial sliding surface and elastoplastic designing based on finite element method.

В последнее десятилетие расширяется применение ограждающих сооружений и устоев автодорожных мостов из армированного грунта. Устои этого типа применяются как варианты, конкурирующие с обычными обсыпными устоями с конусами в крайних пролётах мостов. Возможны две разновидности устоев в виде армогрунтовых систем: с опорой, поддерживающей крайнее пролётное строение, за пределами засыпки («устои с отдельными функциями» [1]) и внутри засыпки. На практике чаще применяется вариант «устоев с отдельными функциями».

Проектным предприятием ООО «Мостдорпроект» разработано несколько проектов путепроводных мостовых сооружений с устоями из армированного грунта (рис. 1, а, б), намеченных к строительству на территории Московской области. Засыпки за устоями запроектированы из мелкого и среднезернистого песка с нормативным углом внутреннего трения $\varphi=30-35^{\circ}$. Передние стенки запроектированных устоев представляют собой железобетонные конструкции толщиной 25 см, удерживаемые армирующими элементами. В качестве армирующих элементов применяется тканый высокопрочный геотекстиль «Стабиленка» (Stabilenka), изготавливаемый из высокомолекулярного полиэстера, способного выдерживать большие растягивающие нагрузки с незначительным относительным удлинением.

Главным преимуществом устоев из армированного грунта является завершение подходной насыпи вертикальной гранью, что позволяет сократить длину моста на пролёт (или часть пролёта), перекрывающий конус. С этим же связана основная проблема этого типа устоев: нагрузка от веса насыпи распределяется на дневной поверхности не плавно (как в случае с обсыпными устоями), а с резким перепадом, что ведёт к развитию формоизменяющих (касательных) напряжений в верхних слоях основания. По этой причине область применения

© Тарасов А.А.

устоев из армированного грунта являются мостовые сооружения с подходными насыпями высотой до 8–9 м и основания, сложенные прочными и среднепрочными грунтами.

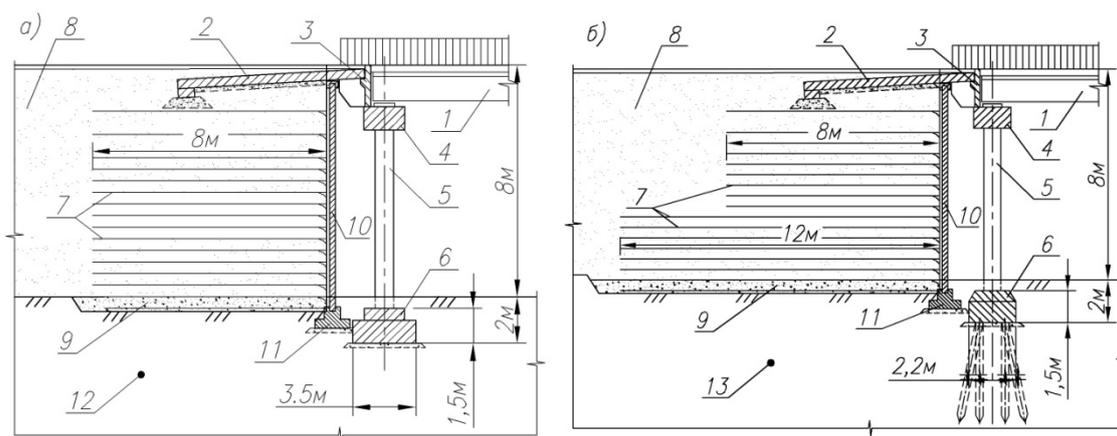


Рис. 1. Примеры запроектированных «устоев с отдельными функциями»:

а – устой с фундаментом мелкого заложения, *б* – устой со свайным фундаментом;

1 - пролетное строение, 2 - переходные плиты, 3 - шкафная стенка,

4 - ригель, 5 - ряд стоек диаметром 80 см, 6 - фундамент крайней опоры,

7 - армирующие элементы из высокопрочного геотекстиля «Стабиленка»,

8 – подходная насыпь, 9 - щебеночное основание, 10 – лицевая стенка,

11 – фундамент лицевой стенки,

12 – песок средней крупности с углом внутреннего трения $\varphi=32^\circ$,

13 – глина тугопластичная $\varphi=17^\circ$, $c=32$ кПА

Сравнение технико-экономических показателей путепроводов с устоями из армированного грунта и классических обсыпных устоев показывает экономическую целесообразность первых. В большей мере это проявляется в мостах малой и средней длины. Так, для устройства путепровода через местную дорогу было рассмотрено два варианта конструктивных схем путепровода: однопролетный путепровод с длиной пролета 24 м и устоями с отдельными функциями и трехпролетный путепровод со схемой сооружения 12+24+12 и обсыпными устоями. Сопоставительная стоимость устройства путепровода с устоями из армированного грунта оказалась на 22 % ниже стоимости устройства путепровода с обсыпными устоями, также время строительства первого варианта путепровода на 30 % (3 месяца) меньше, чем второго.

При проектировании устоев из армированного грунта выполняются две группы расчётов:

- расчёты и проверки, выполняемые по формулам нормативно-методических документов [2, 3];
- расчёты, выполняемые по численным методам.

Описание первой группы расчётов содержится в таблице. На рис. 2 показана расчётная схема и эпюры распределения давлений на переднюю стенку (напорную грань) армогрунтовой системы.

Вторая группа включает следующие численные расчёты:

- пространственный расчёт устойчивости при сдвиге по составной поверхности скольжения;
- упругопластический расчёт армогрунтовой системы.

Описание расчётов устоев по формулам нормативных документов

Наименование расчетов	Формулы расчетов, проверяемые условия	Примечания, пояснения
<p>Определение интенсивности давления грунта на подпорную стенку</p>	$P_{\gamma} = \gamma h \lambda_{\alpha} \gamma_f = \gamma h t g^2 (45^{\circ} - \varphi/2) \times \gamma_f$ $P_q = \lambda_{\alpha} q_{1,2,3}$ $P_t = t \times t g \theta$ $P_{sum} = P_{\gamma} + P_q + P_t$	<p>P_{γ} - интенсивность давления грунта на подпорную стенку от собственного веса; γ - удельный вес грунта насыпи; h - координата высоты, отсчитываемая от верхней грани засыпки; $\lambda_{\alpha} = t g^2 (45^{\circ} - \varphi/2)$ - коэффициент активного давления грунта; φ - угол внутреннего трения грунта насыпи; $\gamma_f = 1,4$ - коэффициент надёжности по нагрузке бокового давления грунта; P_q - интенсивность активного давления от вертикальных нагрузок на поверхности насыпи; $q_{1,2,3}$ - интенсивности нагрузок на поверхности насыпи (см. рис. 2); P_t - интенсивность активного давления от горизонтальной нагрузки на поверхности насыпи; t - интенсивность горизонтальной нагрузки на поверхности насыпи; θ - угол наклона линии скольжения к горизонтали; P_{sum} - суммарная интенсивность активного давления.</p>
<p>Проверка армоэлементов на прочность и выдергивание</p>	$N_{max} = P_{max} \Delta h$ $F_d = F_k / A_1 A_2 A_3 A_4 \gamma_B$ $N_{max} \leq F_d$ $l = F_d / 2 \times 0,8 t g \varphi \times (\gamma \Delta h + q)$ $L = (H / t g \theta) + l$	<p>N_{max} - наибольшее усилие в армирующих элементах; P_{max} - наибольшая ордината в суммарной эпюре активного давления; Δh - расстояние между слоями армирующих элементов; F_k, F_d - нормативная и расчётная долговременная прочность армирующих элементов; A_1, A_2, A_3, A_4 - коэффициенты, большие 1,0, учитывающие ползучесть материала; потерю прочности при транспортировке, укладке и уплотнении грунта; стыки и нахлёсты армоэлементов, наличие швов в них; потери прочности от внешних воздействий (микроорганизмов, УФО, химической среды), перепада температур; γ_B - коэффициент запаса; l - длина заземления армирующих элементов; L - требуемая длина армирующих элементов, считая от внутренней грани железобетонной стенки; H - высота засыпки</p>

Наименование расчетов	Формулы расчетов, проверяемые условия	Примечания, пояснения
Расчёт устойчивости положения армогрунтовой конструкции против плоского сдвига и опрокидывания вокруг переднего ребра	$Q_{сд.} \leq (m/\gamma_n) Q_{уд}$ $M_{опр.} \leq (m/\gamma_n) M_{уд}$	$Q_{сд.}$ – равнодействующая сдвигающих сил, включающих сумму сил горизонтального активного давления грунта на устой; $Q_{уд.}$ – равнодействующая удерживающих сил трения, действующих по поверхности контакта подпорной стенки из армированного грунта с основанием; $M_{опр.}$ – опрокидывающий момент относительно нижнего ребра передней грани устоя; $M_{уд.}$ – момент удерживающих сил от собственного веса армогрунтовой системы и вертикальной нагрузки на её поверхности; $m=0,8$ – коэффициент условий работы; $\gamma_n=1,1$ – коэффициент надёжности по назначению (ответственности) сооружения

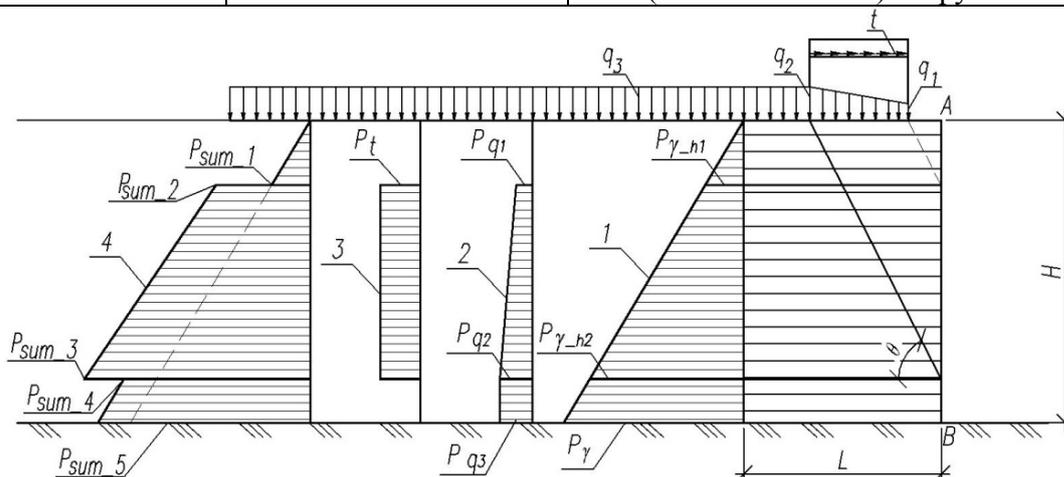


Рис. 2. Расчётная схема и эпюры распределения давлений на переднюю стенку (напорную грань АВ) армогрунтовой системы:

- 1 – от давления грунта, 2 – от вертикальной нагрузки на поверхности насыпи, 3 – от горизонтальной нагрузки на поверхности насыпи, 4- суммарная эпюра давления на переднюю стенку, 5 – линия скольжения, 6 – армированная часть засыпки за устоем

Пространственные расчёты устойчивости армогрунтовых устоев совместно с основаниями выполняются с использованием программы РУСТ [4]. Основное уравнение расчёта выражает равновесие горизонтальных составляющих сил, действующих по поверхности скольжения (применительно к методу Г.М. Шахунянца [5]). Продольное (след на вертикальной плоскости, проходящей через ось моста) и поперечное сечения поверхности скольжения показаны на рис. 3, а, б. Расчёт выполняется в два этапа: 1) определение (путём перебора) невыгоднейшей кривой скольжения – следа поверхности скольжения на плоскости симметрии мостового сооружения и подходной насыпи; 2) перебор вариантов и определение невыгоднейшего наклона (угла $\beta = \arctg n$) бортов поверхности скольжения.

В статье [4] показано, что для устоев с вертикальной передней стенкой невыгоднейшая (расчётная) форма продольного сечения поверхности скольжения представляет собой линию

(рис. 3, а), состоящую из прямого отрезка KL и двух кривых LM и MN , описываемых уравнениями следующего вида:

$$z_{LM(MN)} = A_{1(2)} \cdot x^3 + B_{1(2)} \cdot x^2 + C_{1(2)} \cdot x + D_{1(2)}, \quad (1)$$

$$dz_{LM(MN)}/dx = 3A_{1(2)}x^2 + 2B_{1(2)}x + C_{1(2)}, \quad (2)$$

где z и x – вертикальные и горизонтальные координаты кривых; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$ – коэффициенты, подлежащие определению на основании граничных условий.

Прямой отрезок KL является аналогом линии скольжения за подпорной стенкой. Его положение определяется углом $\omega = 45^\circ + \varphi_n/2$ к горизонтали. Направление криволинейного участка LM в начальной точке L может быть принято по двум вариантам: сопряжение с прямой KL под углом $\omega = 45^\circ + \varphi_n/2$ к горизонтали или параллельно или под некоторым фиксированным углом к дневной поверхности. Касательная к кривым LM и MN в точке M горизонтальна. Кривая MN пересекает дневную поверхность под углом $45^\circ - \varphi_n/2$ к горизонтали. Уравнения (1), (2) позволяют осуществить генерацию кривых скольжения составной формы путём перебора сочетаний точек L, M, N .

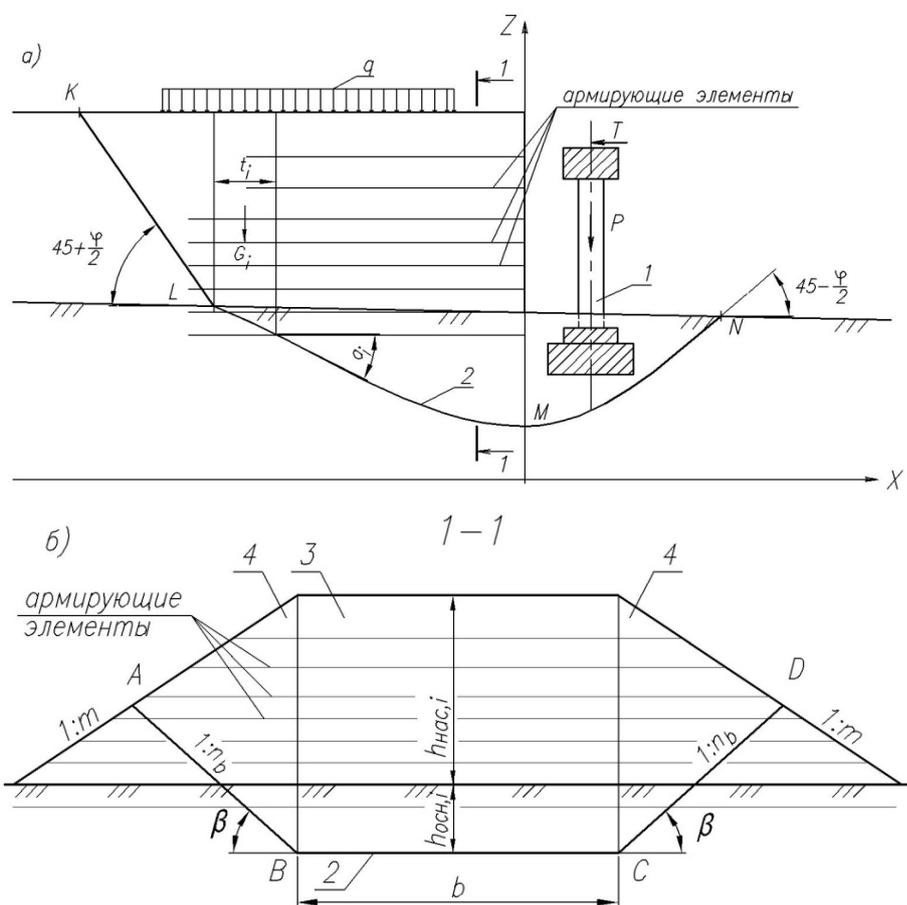


Рис. 3. Схема расчёта устойчивости подпорной стенки из армированного грунта совместно с устоем, подходной насыпью и основанием против сдвига по пространственной поверхности скольжения:

a – разрез по продольной оси; b – сечение 1-1; 1 – устой моста; 2 – след поверхности скольжения;

3 – средние части сечений; 4 – бортовые части сечений; 5 – армирующие элементы,

G_i – вес отсека с вертикальными нагрузками, действующими внутри и на его поверхности

Упругопластический расчёт армогрунтовой системы выполняется путём использования программы *PLAXIS 2D* на математической основе МКЭ. Модель грунта предполагает существование в расчётной области (засыпке и основании) зон допредельного и предельного напряжённого состояния с фиксируемыми расчётом границами. В зонах предельного напряжённого состояния общие деформации включают линейную и пластическую части. Пластическая составляющая деформаций возникает при достижении напряжённым состоянием предела прочности в соответствии с условием Мора-Кулона.

Армирующие конструкции моделируются на расчётной схеме стержневыми конечными элементами. В расчёте принимаются нормативные значения нагрузок, удельного веса и прочностных характеристик грунтов насыпи и основания.

На рис. 4, а, б показана расчётная область и визуализация результатов упругопластического расчёта «устоя с отдельными функциями» от нормативных нагрузок. На рисунке представлены горизонтальные составляющие перемещений контура армогрунтовой системы и пластические зоны (зоны предельного напряжённого состояния грунта) в основании.

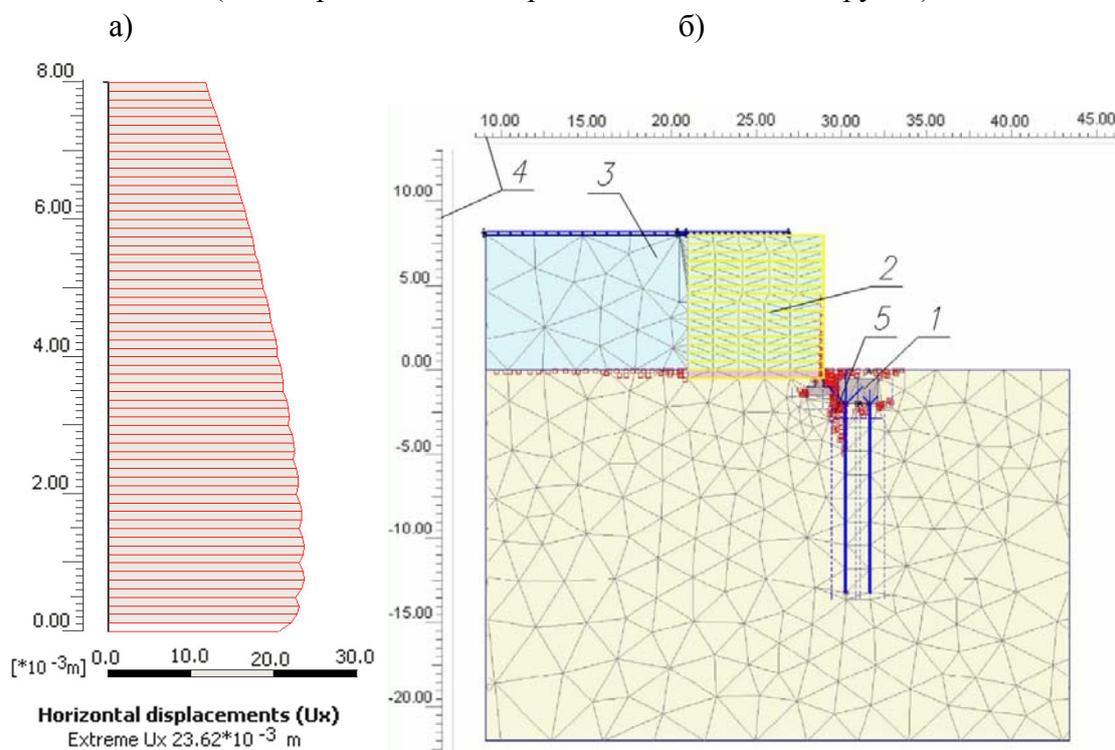


Рис. 4. Пример результатов упругопластического расчёта армогрунтовой системы совместно с основанием:

- а - эпюра горизонтальных составляющих перемещений передней стенки;
- б - области предельного напряжённого состояния грунта; 1 - свайный фундамент крайней опоры, 2 - армированная часть засыпки, 3 - грунт подходной насыпи, 4 - масштабная линейка, 5 - области предельного напряжённого состояния

Вопросы о допустимых размерах и анализе деформаций в зонах предельного напряжённого состояния требуют дальнейшего исследования. Направлениями такого исследования могут быть оценка пластических долей в составе общих деформаций и/или степени прогрессирующего размера пластических зон и пластических составляющих деформаций внут-

ри этих зон при увеличении (на 10 –15 %) нагрузки или снижении (до расчётных значений) прочностных характеристик грунтов расчётной области.

Библиографический список

1. Соколов, А.Д. Устои с отдельными функциями/ А.Д. Соколов // Дорожная держава.- 2007. - № 3. – С. 84-87.
2. ОДМ 218.5.003-2010 Рекомендации по применению геосинтетических материалов при строительстве и ремонте автомобильных дорог.
3. Британский стандарт BS 8006:1995. Свод правил по армированию грунтов естественного залегания и засыпных грунтов.
4. Шапиро, Д.М. Расчет устойчивости устоев и конусов мостовых сооружений/ Д.М. Шапиро, А.А. Тарасов // Научный вестник ВГАСУ. – Вып. № 2 (26), 2012.
5. Шахунянц, Г.М. Железнодорожный путь / Г.М. Шахунянц. - М.: Транспорт. 1969. - 532 с.

References

1. Sokolov, A.D. Abutments with separate functions/ A.D. Sokolov// Road State. - 2007. – № 3. – P. 84-87.
2. SRT 218.5.003-2010 Recommendations on geosynthetic materials application during motor road building and repair.
3. British Standard BS 8006:1995. Code of regulations on reinforcement ground of natural bedding and backfill ground.
4. Shapiro, D.M. Calculation of bridge abutments and cones stability / D.M. Shapiro, A.A. Tarasov // Scientific bulletin of VGASU. – Issue. № 2 (26), 2012.
5. Shahunyanz, G.M. Railway/ G.M. Shahunyanz. - M.: Transport, 1969. - 532 p.

Ключевые слова: устойчивость мостовых устоев, устои с отдельными функциями, армогрунтовые системы.

Key words: stability of bridge abutment, abutments with separate functions, reinforced soil.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.011.78

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф., ректор
Ю.М. Борисов
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительных
конструкций оснований и фундаментов
А.Э. Поликутин
Аспирант кафедры строительных конструкций
оснований и фундаментов
А.С. Чудинов
Канд. техн. наук, зам. начальника Департамента
науки и международного сотрудничества,
Центральный строительный университет
(Вьетнам),
Нгуен Фан Зуй
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-53-84,
e-mail: chudinov@vgasu.vrn.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
Dr. of Tech.Sc., prof., rector
Yu. M. Borisov
Ph. D. of Tech. Sc., Assoc. prof. of Dept. of
Constructional Structures, Bases and Foundations,
A.E. Polikutin
Postgraduate of Constructional Structures,
Bases and Foundations
A.S. Chudinov
Deputy Chief of Department of science and
international cooperation of the Central University
of Civil Engineering (Vietnam),
Nguen Phan Duy
Russia, Voronezh, tel.: +7(473)2715382
e-mail: chudinov@vgasu.vrn.ru*

Ю.М. Борисов, А.Э. Поликутин, А.С. Чудинов, Нгуен Фан Зуй

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЖАТЫХ ПОЛОК ИЗГИБАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ АРМОКАУТОНА

Приведены данные о характере распределения сжимающих деформаций в полках изгибаемых элементов таврового поперечного профиля, выполненных из железобетона, представлены рекомендации по учету в расчетах свесов сжатых полок тавровых железобетонных элементов согласно СНиП 2.03.01-84* и СП 52-101-2003.

Получены сведения о распределении деформаций по ширине полок в элементах, выполненных из каутона. Приведены результаты экспериментальных исследований распределения деформаций в сжатых полках армокаутонных конструкций, подверженных чистому изгибу.

Yu.M. Borisov, A.E. Polikutin, A.S. Chudinov, Nguen Phan Duy

DEFLECTED MODE OF COMPRESSED WEBS OF FLEXIBLE STRUCTURES FROM REINFORSED CAUTON

Information about behavior of spreading of compressed deformation in webs of flexible structures of T-shape crossed members made from ferroconcrete; the recommendations on record of calculation of cantilevers of T-shape ferroconcrete members according to Building Code 2.03.01-84* и СП 52-101-2003.

The information about deformation spreading in webs width in members, made from cauton. In the article there are given the results of experimental researches of deformation spreading of compressed webs in reinforced cauton structures pone pure bending.

© Борисов Ю.М., Поликутин А.Э., Чудинов А.С., Нгуен Фан Зуй

Введение. В современной строительной отрасли широкое применение получили конструкции из таких материалов, как железобетон, сталь, керамика и др. В большинстве случаев физико-механические, химические свойства этих материалов вполне удовлетворяют требованиям, предъявляемым к ним. Однако в некоторых случаях строительным конструкциям приходится работать в условиях, когда традиционные материалы не в состоянии обеспечить приемлемых эксплуатационных показателей (коррозионной стойкости, повышенной несущей способности, высокой трещиностойкости и т.д.). Возникающие проблемы можно решить путем применения конструкций из новых строительных композитов. Одним из таких композитов является каучуковый полимербетон (или сокращенно - каутон).

Полученный на основе жидких каучуков в Воронежском ГАСУ материал обладает благоприятными физико-механическими характеристиками, высокой, практически универсальной химической стойкостью (табл. 1 [9]) и может занять своё место в ряду других полимербетонных при решении проблемы защиты от коррозии различных изделий и конструкций, эксплуатируемых в условиях воздействия агрессивных сред [1].

Таблица 1

Коэффициенты химической стойкости каутона на каучуке марки СКДН-Н

Вид агрессивной среды	Коэффициент химической стойкости	
	через 1 год экспонирования	через 10 лет экспонирования
20%-й раствор серной кислоты	0,95	0,95
3%-й раствор азотной кислоты	0,8	0,7
10%-й раствор лимонной кислоты	0,9	0,8
20%-й раствор едкого натрия	0,95	0,95
10%-й раствор едкого калия	0,8	0,65
Насыщенный раствор хлористого натрия	0,9	0,8
Дизельное топливо	0,95	0,95
Вода	1	0,99

Анализ проведенных ранее исследований показывает, что на основе каутонов возможно создание высокоэффективных армированных строительных конструкций [3, 4, 5, 6]. Однако их внедрению в производство должны предшествовать исследования, направленные на изучение работы каутона при разных эксплуатационных режимах. Создание надежных и эффективно работающих строительных конструкций невозможно без изучения физико-механических свойств материалов, на основе которых они изготовлены, а также напряженно-деформированного состояния, возникающего при воздействии усилий различного рода. К сожалению, данный материал довольно дорог в изготовлении, и, исходя из этого, каутоновые конструкции должны быть максимально эффективного сечения при наименьшей материалоемкости. В изгибаемых конструкциях таким сечением является тавровое, т.к. из растянутой зоны, плохо сопротивляющейся растяжению, удалена часть каутона, практически не участвующая в работе.

1. Характер распределения деформаций в сжатых полках изгибаемых железобетонных элементах таврового профиля. Ограничения, накладываемые на учет свесов полков при расчете изгибаемых железобетонных элементов существующими нормативными документами. С целью разработки методики прочностного расчета нормальных сечений армокаутоновых изгибаемых элементов необходимо получить сведения о расположении равнодействующей сжимающих усилий в каутоне. Для этого требуются сведения о характере распределения деформаций в сжатых полках такого изгибаемого элемента. Решение поставленной задачи позволит разработать методы расчета изгибаемых элементов таврового попе-

речного профиля из каутона по нормальным сечениям, повысить эффективность и надежность коррозионностойких строительных конструкций.

Как показывают опыты, проведенные в ходе выполнения работы по изучению деформаций железобетонных изгибаемых элементов таврового профиля [2], сжимающие деформации в полках таких элементов, изготовленных из обычного железобетона, распределяются неравномерно, что оказывает существенное влияние на положение центра тяжести сжатой зоны и соответственно на величину момента внутренней пары сил (рис. 1).

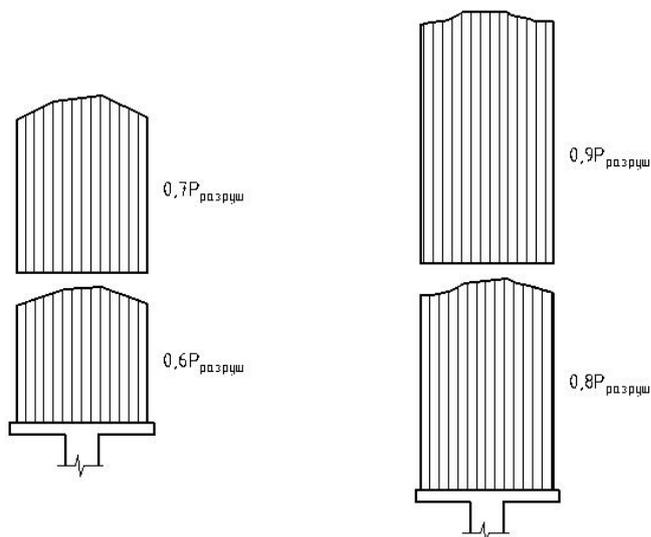


Рис. 1. Распределение деформаций по ширине полки в железобетонном элементе:

$P_{\text{разруш}}$ – усилие на прессе, при котором в рабочей арматуре достигается предел текучести

СНиП 2.03.01-84* «Бетонные и железобетонные конструкции», СП 52-101-2003 «Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры» ограничивают величину свесов полок, участвующих в расчете, при условии отсутствия в элементе поперечных ребер, следующими величинами:

- не более $b'_f < \frac{1}{6}l_0$ и не более;
 - при $h'_f \geq 0,1h$ $6h'_f$;
 - при $0,05h \leq h'_f < 0,1h$ $3h'_f$;
 - при $h'_f < 0,05h$ свесы не учитываются,
- здесь b'_f – ширина сжатой полки;
 h'_f – высота сжатой полки;
 h – полная высота балки;
 l_0 – рабочий пролет балки.

2. Методика экспериментального исследования распределения сжимающих деформаций в полке изгибаемых армокаптоновых элементов. Сравнивая модули упругости каутона, изготовленного на основе каучуков различных марок, с модулями упругости цементных бетонов различных классов (табл. 2), можно предположить, что в кауто-не как в более пластичном материале сжимающие деформации должны распределяться менее равномерно, а затухать более интенсивно, что автоматически уменьшает величину свесов сжатых полок, участвующих в расчете изгибаемых элементов.

Сравнение модулей упругости каутона и бетона

Начальный модуль упругости каутона, ГПа, на основе каучука марки		Начальный модуль упругости бетона, ГПа, для классов					
ПБН	СКДН-Н	B15	B20	B25	B30	B35	B40
20...35	15...18	23	27	30	32,5	34,5	36

Исходя из описанных выше рассуждений, была предложена следующая методика: балки испытывали на изгиб двумя силами, приложенными в третях пролета, возрастающими вплоть до разрушения. Расчетный пролет образцов составлял 1200 мм, длина образцов – 1400 мм, что обеспечивало надежную анкеровку арматуры. Размеры полки назначали из следующих соображений: высота полки ($h'_f = 35$ мм) выбрана таким образом, чтобы обеспечить, в случае необходимости, возможность размещения в ней арматуры. Ширина свеса полки в каждую сторону от ребра не должна превышать $1/6$ пролета элемента (в нашем случае $b'_f = 240 < 460$ мм) и не более $6h'_f < 480$ мм. Схема опыта представлена на рис. 2.

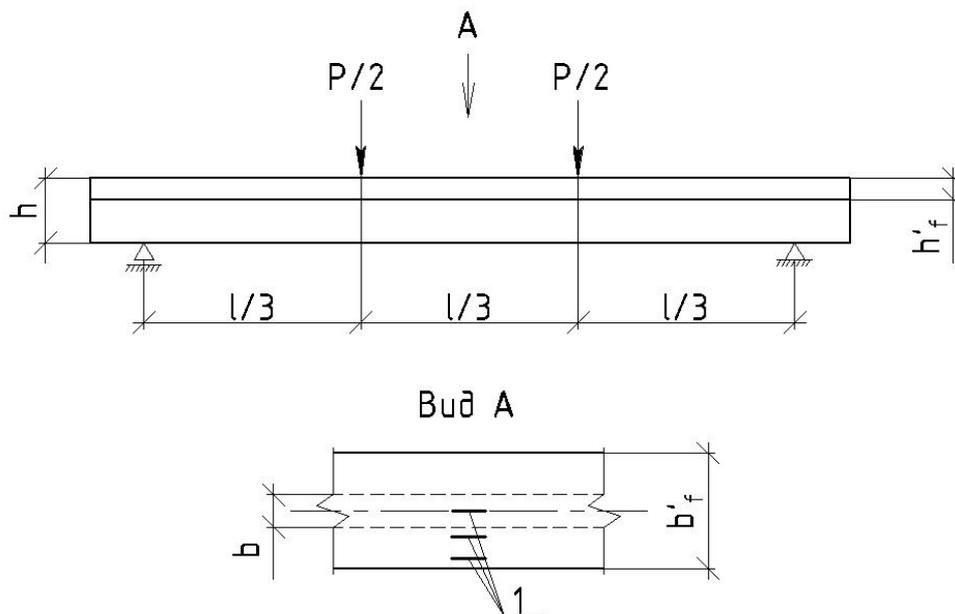


Рис. 2. Схема опыта:
 $P/2$ – нагрузка, передаваемая прессом на испытываемый образец;
 L – расчетный пролет

Тензорезисторы (1) размещены на верхней грани полки таким образом, чтобы один из них располагался вдоль оси стенки.

При испытании использовали следующие приборы: тензометрический интерфейс PCD-300A – для снятия показания тензорезисторов; индикатор часового типа с ценой деления 0,01 мм - для определения прогиба балок и ценой деления 0,001 мм - для определения деформации при испытании контрольных образцов, лупа с 4-кратным увеличением - для определения ширины раскрытия трещин и ноутбук - для подключения тензометрического интерфейса PCD-300A.

В результате испытания опытных балок получили кривые изменения деформаций в сжатой полке изгибаемого армокаптонового элемента (рис. 3-6).

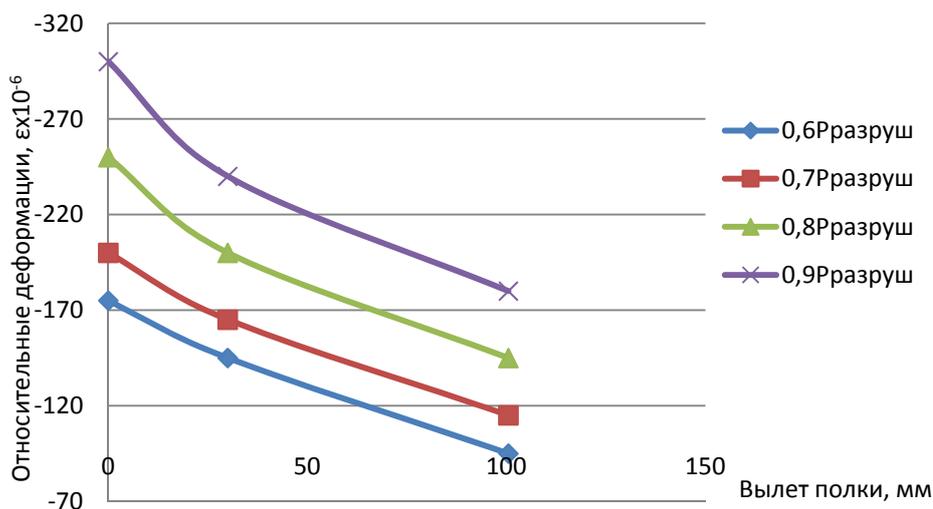


Рис. 3. Распределение деформаций по ширине полки армокаптонового элемента $\mu = 0,697\%$

Здесь и далее μ - процент продольного армирования.

Распределение деформаций в полке носит практически линейный характер в начальной стадии работы, постепенно искривляясь по мере истощения несущей способности.

Максимальные относительные деформации стенки изменяются с $-175 \cdot 10^{-6}$ в начальной стадии работы до $-300 \cdot 10^{-6}$ в стадии работы конструкции близкой к критической. Прирост деформаций от стадии к стадии носит плавный характер и колеблется в пределах 20 %.

В сечении полки, наиболее удаленном от стенки, относительные деформации изменяются с $-95 \cdot 10^{-6}$ до $-180 \cdot 10^{-6}$ в соответствующих стадиях работы. Изменение деформаций также колеблется в пределах 20 %. Полка включается в работу, однако остается недогруженной, т.к. арматура достигает предела текучести раньше, чем деформации между полкой и стенкой перераспределяются более равномерно.

Уменьшение жесткости изгибаемого элемента, связанное с раскрытием трещин, не оказывает существенного влияния на распределение напряжений между стенкой и полкой, о чем свидетельствует отношение деформаций стенки к деформациям наиболее удаленной части полки, которые составляют 1,842; 1,73913; 1,724; 1,667 для стадий работы, рассматриваемых в эксперименте.

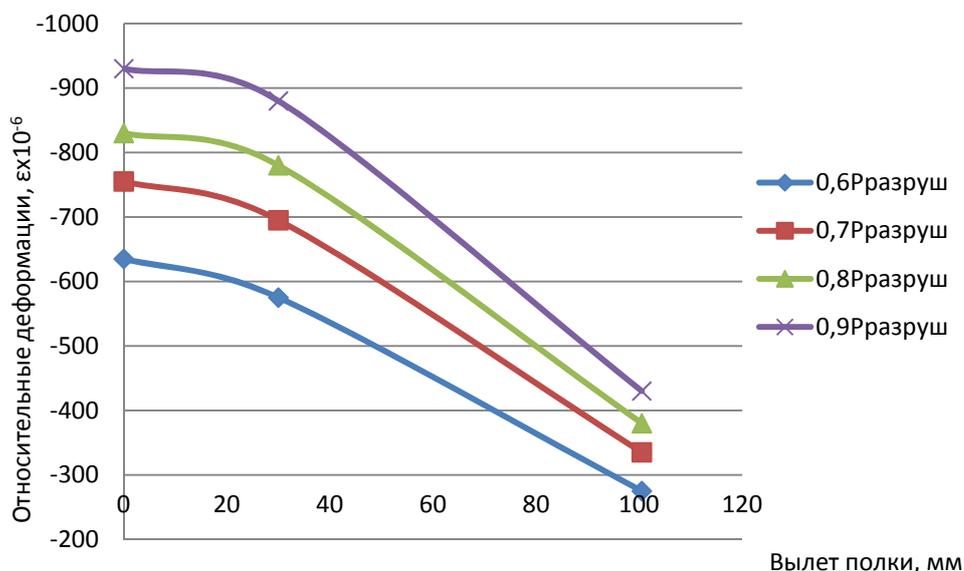


Рис. 4. Распределение деформаций по ширине полки армокаптонового элемента при $\mu = 0,785 \%$

Характер распределения деформаций в полке во всех стадиях работы – криволинейный.

Максимальные относительные деформации стенки изменяются с $-635 \cdot 10^{-6}$ в начальной стадии работы до $-930 \cdot 10^{-6}$ в стадии работы конструкции близкой к критической. Наибольший прирост деформаций составил 15,9 % в промежутке, когда усилия изменялись от $0,6P_{\text{разруш}}$ до $0,7P_{\text{разруш}}$, что связано с образованием первых трещин, дальнейший прирост деформаций в среднем составил 10 % для каждой стадии.

В сечении полки, наиболее удаленном от стенки, относительные деформации изменяются с $-275 \cdot 10^{-6}$ в начальной стадии работы до $-430 \cdot 10^{-6}$ в стадии работы конструкции близкой к критической. Максимальный прирост деформаций 17,9 % наблюдался в той же стадии, что и в стенке. Дальнейший рост деформаций стабилизировался и составил в среднем 11,6 %. Полка включается в работу активнее, чем в элементе с меньшим процентом продольного армирования, однако также остается недогруженной.

Отношения деформаций стенки к деформациям наиболее удаленной части полки составили 2,309091; 2,253731; 2,184211; 2,162791.

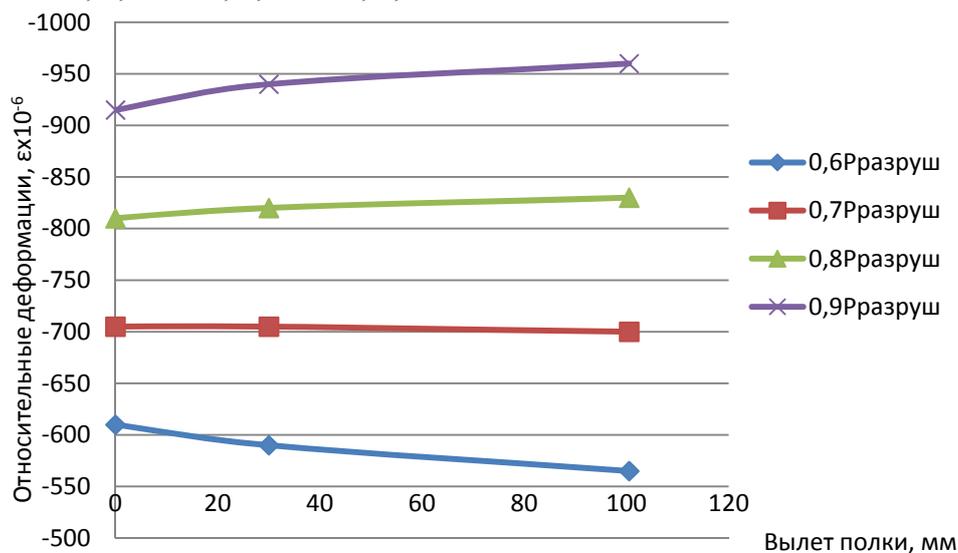


Рис. 5. Распределение деформаций по ширине полки армокаптонового элемента при $\mu = 1,57 \%$

Распределение деформаций по ширине полки носит характер близкий к линейному. В начальной стадии работы деформации в стенке превосходят деформации в наиболее удаленной части полки, однако по мере роста нагрузки перераспределяются таким образом, что начинают выравниваться, а в стадии близкой к предельной деформации в полке начинают несколько превышать деформации в стенке.

Максимальные относительные деформации стенки изменяются с $-610 \cdot 10^{-6}$ в начальной стадии работы до $-915 \cdot 10^{-6}$ в стадии работы конструкции близкой к критической. Прирост деформаций от стадии к стадии носит плавный характер и колеблется в пределах 12 %.

В сечении полки, наиболее удаленном от стенки, относительные деформации изменяются с $-565 \cdot 10^{-6}$ до $-960 \cdot 10^{-6}$ в соответствующих стадиях работы. Наибольший прирост деформаций составил 19 % в промежутке, когда усилия изменялись от $0,6P_{\text{разруш}}$ до $0,7P_{\text{разруш}}$. В последующих стадиях работы рост деформаций постепенно замедлялся, составляя 15,6 и 13,54 % соответственно.

При данном проценте продольного армирования полка активно включается в работу на всех этапах загрузки. Отношение деформаций стенки к деформациям наиболее удаленной части полки составили 1,079646; 1,007143; 0,975904; 0,953125.

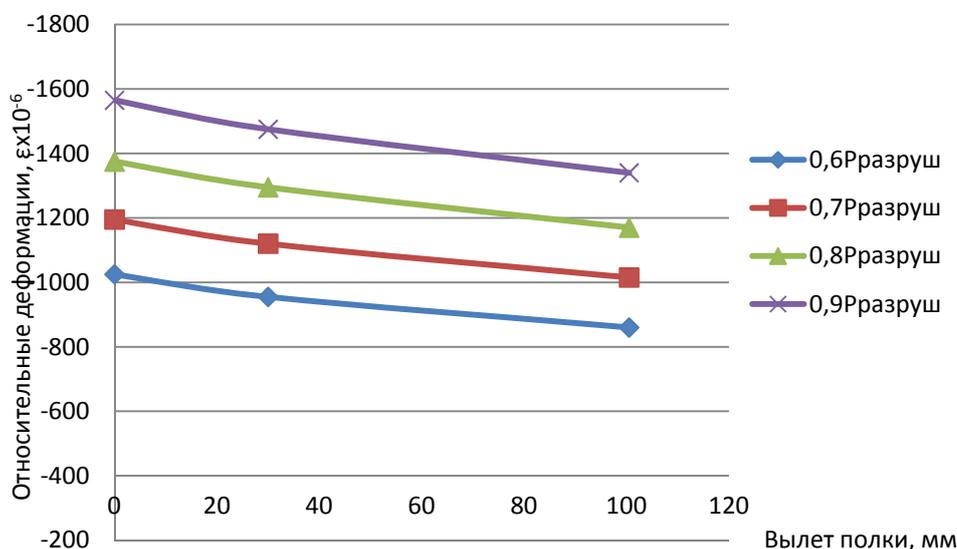


Рис. 6. Распределение деформаций по ширине полки армокаптонового элемента при $\mu = 2,79 \%$

Распределение деформаций в полке носит линейный характер во всех стадиях работы.

Максимальные относительные деформации стенки изменяются с $-1025 \cdot 10^{-6}$ в начальной стадии работы до $-1565 \cdot 10^{-6}$ в стадии работы конструкции близкой к критической. Прирост деформаций носит плавный характер и составляет в среднем 13 %.

В сечении полки, наиболее удаленном от стенки, относительные деформации изменяются с $-860 \cdot 10^{-6}$ до $-1340 \cdot 10^{-6}$ в соответствующих стадиях работы. Изменение деформаций колеблется в пределах 15 %. Полка включается в работу, однако стенка имеет жесткость, превышающую жесткость полки; даже с учетом развития трещин, как следствие, в ней развиваются большие деформации.

Отношение деформаций стенки к деформациям наиболее удаленной части полки составили 1,19186; 1,17734; 1,175214; 1,16791.

Выводы

В изгибаемых армокаутонных элементах с $\mu = 0,697\%$ и $\mu = 0,785\%$ соотношение жесткостей полки и стенки таково, что стенка берет на себя большую часть напряжений, однако недостаточна для того, чтобы эффективно вовлечь в работу полку (напряжения в арматуре достигают предела текучести раньше, чем включится в работу основная масса материала полки).

В элементах с $\mu = 1,57\%$ соотношение жесткостей стенки и полки достаточно для того, чтобы полка активно включилась в работу, и распределение напряжений между стенкой и полкой носит более равномерный характер.

В элементах с $\mu = 2,79\%$ жесткость ребра выше жесткости полки настолько, что большая часть напряжений воспринимается ребром и даже при активном включении в работу полки не происходит существенного перераспределения напряжений между полкой и стенкой (напряжения в арматуре достигают предела текучести позже, чем напряжения в полке достигают предельных значений).

Анализ экспериментальных данных показал, что картина распределения деформаций в армокаутонных изгибаемых элементах отличается от характера распределения деформаций в железобетонных элементах. Из-за более низкого значения модуля упругости на распределение деформаций в полках армокаутонных элементов существенно оказывает влияние процент продольного армирования. Вовлечение в работу сжатых полок происходит более интенсивно в элементах с достаточно большим содержанием продольной арматуры, однако даже в балках с процентом армирования равным $\mu = 2,79\%$ величина максимальных деформаций полки колебалась в пределах $1445 \cdot 10^{-6} \div 1340 \cdot 10^{-6}$. Наиболее равномерное распределение деформаций в стенке и полке наблюдается в балках с $\mu = 1,57\%$. Отношение максимальных деформаций стенки и полки у таких балок наиболее близко к единице. Следовательно, при данном вылете и толщине полки оптимальным является процент армирования балок $\mu = 1,57\%$.

Библиографический список

1. Борисов, Ю.М. Эффективные композиционные материалы на основе низкомолекулярного полибутадиенового олигомера смешанной микроструктуры ПБН: дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.05 / Ю.М. Борисов. – Воронеж, 1998. – 230 с.
2. Дроздова, В.А. Исследование деформаций железобетонных изгибаемых элементов таврового сечения : дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.01. [Текст] / В.А. Дроздова. – Л., 1969. – 154 с.
3. Макарова, Т.В. Исследование параметров режима отверждения каучукобетонной смеси / Т.В. Макарова // Сб. материалов 52-й науч.-техн. конференции / ВГАСА. – Воронеж, 2000. – С. 57-59.
4. Нгуен Фан Зуй. Двухслойные каутоно-бетонные изгибаемые элементы строительных конструкций : дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Нгуен Фан Зуй. – Воронеж, 2010 – 185 с.
5. Пинаев, С.А. Короткие сжатые элементы строительных конструкций из эффективного композита на основе бутадиенового полимера : дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / С. А. Пинаев – Воронеж, 2001. – 191 с.
6. Поликутин, А.Э. Прочность и трещиностойкость наклонных сечений изгибаемых элементов строительных конструкций из армокаутонна : дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / А. Э. Поликутин. – Воронеж, 2002. – 235 с.

7. СНиП 2.03.01-84* Бетонные и железобетонные конструкции. - М.: Госстрой СССР, 1989. - 86 с.
8. СП 52-101-2003 Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: Госстрой России, 2003. – 72 с.
9. Чмыхов, В. А. Сопротивление каучукового бетона действию агрессивных сред : дисс. ... канд. техн. наук : 05.23.05 / В.А.Чмыхов. – Воронеж, 2002. – 224 с.

References

1. Borisov, Yu.M. Effective composite materials based on low-molecular polibutadien oligomer of mix microstructure ПБН: diss. ... PhD of Tech. Sc. : 05.23.05/ Yu.M. Borisov. – Voronezh, 1998. – 230 p.
2. Drosdova, V.A. Research of deformation of ferroconcrete bending members of T-shape section : diss. ... PhD : 05.23.01/ V.A. Drosdova – L., 1969. – 154 p.
3. Makarova, T.V. Research of parameter of rubber concrete mix hardening regime / T.V. Makarova // Collection of materials of 52 scientific –technical conference / VGASA. – Voronezh, 2000. – P. 57-59.
4. Nguen Phan Duy. Diploblastic cauton – concrete flexible members of building structures :diss. ... PhD: 05.23.01 [Text] / Nguen Phan Duy. – Voronezh, 2010 – 185 p.
5. Pinaev, S.A. Short compressional members of structural constructions from effective composite based on butadiene polimer: diss. ... PhD of Tech. Sc : 05.23.01 / S.A. Pinaev. – Voronezh, 2001. – 191 p.
6. Polikutin, A.E. Strength and fracture strength of bending members oblique plane of structural constructions from reinforced cauton: diss. ... PhD of Tech. Sc.: 05.23.01/ A.E. Polikutin/ – Voronezh, 2002. – 235 p.
7. Building Code 2.03.01-84* Concrete and ferroconcrete structures. - М.: Gosstroy of USSR. 1989. - 86 p.
8. Building Code 52-101-2003. Concrete and Ferroconcrete structures without prestressed reinforcement. – М.: Gosstroy of Russia, 2003. – 72 p.
9. Chmihov, V.A., Resistance of rubber concrete against corrosion medium : diss. ... PhD of Tech.Sc.: 05.23.05 / V.A.Chmihov. – Voronezh, 2002. – 224 p.

Ключевые слова: композит, каучуковый бетон (каутон), изгибаемый элемент, тавровое сечение, распределение деформаций в сжатых полках.

Key words: composite, cauthonic concrete (cauton), bending member, T-shape section, deformation spreading in compressed webs.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 620.10:620.17

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
А.Н. Синозерский
Ст. преподаватель
кафедры строительной механики
Р.А. Мухтаров
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail: rinat196111@rambler.ru

The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Sc, prof. of Department
of Structural Mechanics
A.N. Sinozersky
Lecturer of Department
of Structural Mechanics
R. A. Muhtarov
Voronezh, Russia tel.: 8(473)2715230
e-mail: rinat19611 @rambler.ru

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ РАЗРУШАЮЩИХ УСИЛИЙ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

Определяются предельные расчётные усилия $\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$ и сравниваются с опытными разрушающими нагрузками $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta\bar{F}_u$ при произвольных скорости нагружения $\dot{\theta}_j$ и эксцентриситете e .

A.N. Sinozersky, P.A. Muhtarov

EXPERIMENTAL THEORETICAL METHOD OF DEFINITION OF ECCENTRIC-COLLAPSIBLE WITH CONSTANT SPEED PRISMS FROM FINE GRAINED CONCRETE

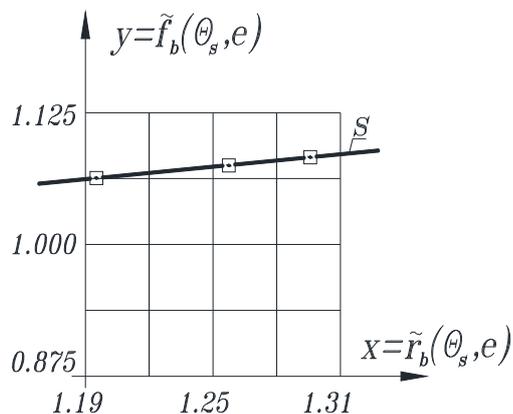
Limit design forces $\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$ are determined and they are compared with pilot breaking loads $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta\bar{F}_u$ at arbitrary loading speed $\dot{\theta}_j$ and eccentricity e .

При стандартной [1] относительной скорости нагружения $\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 = 0,3923$ [2] в табл. 1 представлены [3]:

- установленные в опытах разрушающие нагрузки $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e) \pm \Delta\bar{F}_u$;
 - базовые усилия $\tilde{N}_b(\dot{\theta}_s, e)$ и коэффициенты увеличения $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$;
 - показатели $\tilde{f}(\dot{\theta}_s, e) = \bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e) / \tilde{N}_b(\dot{\theta}_s, e)$.
- (1)

Таблица 1

Партия j	$\dot{\theta}_3 \cdot 10^3$	$e = \frac{y_f}{h}$	Нагрузка $\bar{F}_u(\dot{\theta}_3, e)$ $\pm \Delta \bar{F}_u$	Базовые		Показатели		Усилия $\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_s, e)$ по (6)
				усиления $\tilde{N}_b(\dot{\theta}_s, e)$, кН	коэффициенты $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$	$\tilde{f}(\dot{\theta}_s, e)$ по (1)	$\tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_s, e)$ по (5)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 1$	392,3	0,050	236,3±17,7	222,2	1,1952	1,063	1,059	235,3
		0,100	207,9±14,7	193,4	1,2575	1,075	1,077	208,3
		0,150	185,3±13,7	171,1	1,2958	1,083	1,089	186,3



□ – показатели $\tilde{f}(\dot{\theta}_s, e)$ по (1)

Рис. 1

По координатам $x = \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$,
 $y = \tilde{f}(\dot{\theta}_s, e)$ на рис.1 нанесены точки, расположенные вблизи некоторой прямой s . Поэтому полагаем, что существует линейная зависимость

$$\tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_s, e) = a_{et} + b_{et} \cdot \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e). \quad (2)$$

Так как при $e \rightarrow 0$ коэффициент $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$ стремится к 1, то параметры

$$a_{et} + b_{et} = 1 \quad (3)$$

и, следовательно,

$$a_{et} = 1 - b_{et}. \quad (4)$$

Условное обозначение:

Таким образом,

$$\tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_s, e) = 1 + [\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e) - 1] \cdot b_{et}$$

или $Y(e) = b_{et} \cdot X(e)$, где $Y(e) = \tilde{f}(\dot{\theta}_s, e) - 1$,

$$X(e) = \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e) - 1 = \Delta \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e),$$

для которых $Y(e = 0,05) = 0,063$, $X(e = 0,05) = 0,1952$;

$$Y(e = 0,10) = 0,075, X(e = 0,10) = 0,2575;$$

$$Y(e = 0,15) = 0,083, X(e = 0,15) = 0,2958.$$

$$Y(e = 0,10) = 0,075, X(e = 0,10) = 0,2575;$$

Пользуясь методом наименьших квадратов [4], будем иметь $b_{et} = 0$ и с учётом (4) $a_{et} = 0,707$. Тогда, приняв показатель

$$\tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_s, e) = 0,7 + 0,3 \cdot \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e) \quad (5)$$

и заменив в (1) нагрузку $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e)$ на $\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_s, e)$, можно получить представленные в столбце 9 табл.1 усилия:

$$\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_s, e) = \tilde{N}_b(\dot{\theta}_s, e) \cdot \tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_s, e). \quad (6)$$

При произвольных скорости нагружения $\dot{\theta}_j$ и эксцентриситете e определяют:

- по методике [3] базовые характеристики $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$ и $\tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e)$, $\tilde{N}_b(\dot{\theta}_j, e)$;

- относительный коэффициент увеличения

$$\tilde{\rho}(\dot{\theta}_j, e) = \tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e) / \tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e); \quad (7)$$

- показатель

$$\tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_j, e) = [0,7 + 0,3 \cdot \tilde{r}_b(\dot{\theta}_j, e)] \cdot \tilde{\rho}(\dot{\theta}_j, e); \quad (8)$$

- предельное расчётное усилие

$$\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_s, e) = \tilde{N}_b(\dot{\theta}_j, e) \cdot \tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_j, e). \quad (9)$$

Результаты соответствующих вычислений для случаев

$$\dot{\theta}_2 \cdot 10^3 = 39,23 \text{ и } e = 0,050; 0,100; 0,150,$$

$$\dot{\theta}_3 \cdot 10^3 = 3,923 \text{ и } e = 0,045; 0,090; 0,135$$

приводятся в [3] и табл. 2, 3.

Таблица 2

К определению базовых характеристик при относительной скорости нагружения $\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 \cdot 10^3 = 392,3$, зависимости $\ll \sigma - \varepsilon \gg$
 $\bar{\sigma}(\dot{\theta}_1) = 31390 \cdot \varepsilon - 15885000 \cdot (\varepsilon)^{2,0810}$, $\bar{\sigma}_u = 26,09$ МПа и $\tilde{\varepsilon}_u = 1600 \cdot 10^{-6}$

$\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 \cdot 10^3$	$e = \frac{y_f}{h}$	m	r_m	$\varepsilon_{rm} \cdot 10^6$	$B_m \cdot 10^2, \text{ М}^{-1}$	$N_m, \text{ кН}$
392,3	0,045	1	1,15	1840	1,3484839	225,375
		2	1,20	1920	1,4492245	225,519
		$k = 3$	1,25	2000	1,5539400	225,037
		b	1,18650	1898,4	1,4216275	225,543
	0,090	1	1,20	1920	1,7969521	198,330
		2	1,25	2000	1,8977510	198,582
		$k = 3$	1,30	2080	2,0007645	198,276
		b	1,24758	1996,1	1,8927819	198,583
	0,135	1	1,25	2000	2,1230878	177,167
		2	1,30	2080	2,2250841	177,275
		$k = 3$	1,35	2160	2,3285579	176,884
		b	1,28582	2057,3	2,1459922	177,295

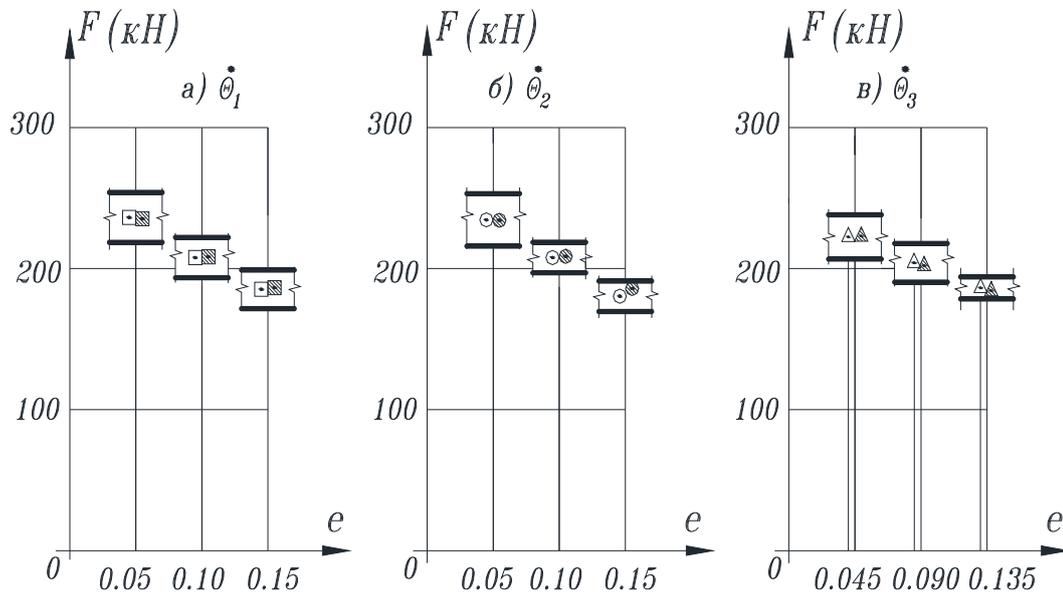
Таблица 3

Партия j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	$e = \frac{y_f}{h}$	Коэффициенты увеличения			Показатели $\tilde{f}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$ по (8)	Усилия, кН	
			$rb\theta_j, e$ по [3]	$\tilde{r}_b(\dot{\theta}_s, e)$ по табл.1 и 2	относительные $\tilde{\rho}(\dot{\theta}_j, e)$ по (7)		$\tilde{N}_b(\dot{\theta}_j, e)$ по [3]	$\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$ по (9)
2	39,23	0,050	1,2092	1,1952	1,012	1,076	217,7	234,2
		0,100	1,2757	1,2575	1,014	1,098	190,2	208,8
		0,150	1,3163	1,2958	1,016	1,112	168,9	187,8
3	3,923	0,045	1,2127	1,1865	1,022	1,087	205,1	222,9
		0,090	1,2818	1,2476	1,027	1,114	181,6	202,3
		0,135	1,3247	1,2858	1,030	1,130	163,2	184,4

В табл. 4 и на рис. 2 выполнено сравнение расчётных $\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$ с опытными разрушающими нагрузками $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta \bar{F}_u$ при вероятности $p = 0,95$.

Таблица 4

Партия j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	$e = \frac{y_f}{h}$	Нагрузки, кН		Отклонения		
			$\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$, по (9)	$\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta\bar{F}_u$ по [3]	$\tilde{\Delta}_{et} = \tilde{N}_{et} - \bar{F}_u$, кН	$\tilde{\delta}_{et} = \frac{\tilde{\Delta}_{et}}{\bar{F}_u} \cdot 100\%$	$(\tilde{\Delta}_{et})^2$, кН ²
$s = 1$	392,3	0,050	235,3	236,3±17,7	-1,0	-0,42	1,00
		0,100	208,3	207,9±14,7	0,4	0,19	0,16
		0,150	186,3	185,3±13,7	1,0	0,54	1,00
2	39,23	0,050	234,2	234,4±18,6	-0,2	-0,09	0,04
		0,100	208,8	207,9±10,8	0,9	0,43	0,81
		0,150	187,8	180,4±10,8	7,4	4,10	54,76
3	3,923	0,045	222,9	222,6±15,7	0,3	0,13	0,09
		0,090	202,3	204,0±13,7	-1,7	-0,83	2,89
		0,135	184,4	186,3±7,8	-1,9	-1,02	3,61
$\Sigma =$					+5,2	$\Sigma =$	64,36



Условные обозначения:

□, ○, Δ - средние опытные разрушающие силы $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$;

■, ●, ▲ - предельные усилия $\tilde{N}_{et}^*(\dot{\theta}_j, e)$ по (9);



- границы доверительных интервалов $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ при вероятности $p=0,95$.

Рис. 2

Выводы

Расчётные нагрузки $\tilde{N}_{et}(\dot{\theta}_j, e)$ располагаются в границах доверительных интервалов $[\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) - \Delta\bar{F}_u, \bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) + \Delta\bar{F}_u]$ опытных разрушающих сил $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$.

Только в одном случае ($\dot{\theta}_2, e = 0,150$) имеем относительное отклонение $\tilde{\delta}_{et} = 4,1\%$ с абсолютным расхождением $\tilde{\Delta}_{et} = 7,4$ кН и $(\tilde{\Delta}_{et})^2 = 54,8$ кН², для остальных восьми серий $\tilde{\delta}_{et} = -1,0\% \dots + 0,5\%$ с $\tilde{\Delta}_{et} = -1,9 \dots + 1,0$ кН и $(\tilde{\Delta}_{et})^2 = 9,6$ кН².

Предлагаемый способ приводит к результатам, близким к экспериментальным для призм $b \cdot h \cdot l = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$ м из мелкозернистого бетона.

Библиографический список

1. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам/ Госстрой СССР. - М., 1990. - С. 8-9.
2. Синозерский, А.Н. Определение условных деформаций при внецентренном сжатии с постоянной скоростью нагружения призм из мелкозернистого бетона / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. - Воронеж, 2011. – Вып. № 1 (2). – С. 18–23.
3. Синозерский, А.Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. № 1 (4). – С. 72–83.
4. Лапчик, М.П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов/ М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 384 с.

References

1. State standard specification 10180-90. Method of definition of strength according to check samples / Gosstroy of USSR. - M., 1990. -P. 8-9.
2. Sinozersky, A.N. Definition of conditional deformation under eccentric compression with constant loading speed of prisms from fine grained concrete / A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov // Constructional Mechanics and Structures. – Voronezh, 2011. – Issue № 1 (2). – P. 18-23.
3. Sinozersky, A.N. Definition of basic strengths and deflected mode of prisms from fine grained concrete at eccentric compression/ A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov // Constructional Mechanics and Structures. – Voronezh, 2012.– Issue № 1 (4). – P. 72-83.
4. Lapchik, M.P. Numerical methods: teaching aid for university students/ M.P. Lapchik, M.I. Ragulina, E.K. Henner; under edit. of M.P. Lapchik. – M.: Issue. Center “Academiya”, 2004. – 384 p.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, разрушающие усилия.

Key words: eccentric compression, fine grained concrete, breaking forces