



ISSN 2219-1038

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск №1(4), 2012

Учредитель

Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего
профессионального
образования
«Воронежский
государственный
архитектурно-строительный
университет»

Издатель

Строительный факультет

Главный редактор

Сафронов В.С., д.т.н., проф.

Зам. главного редактора

Ефрюшин С.В., к.т.н., доц.

Ответственный секретарь

Габриелян Г.Е., к.т.н., доц.

Технический секретарь

Флавианов В.М., м.н.с.

Члены редколлегии

Борисов Ю.М., д.т.н., проф.
Шитикова М.В., д. ф.-м. н., проф.
Шапиро Д.М., д.т.н., проф.
Орлов А.С., д.т.н., проф.
Свентиков А.А., д.т.н., проф.
Иванов Ю.В., к.т.н., доц.
Андреев А.В., к.т.н., доц.
Рогатнев Ю.Ф., к.т.н., доц.

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

- Ефрюшин С.В., Викулов М.А.** 7
Предельное равновесие жесткопластических сетчатых плит
- Петреня Е.Н., Петранин А.А.** 31
Определение характеристик поперечного сечения тонкостенного и толстостенного стержней методом конечных элементов
- Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.** 72
Определение базовых усилий и напряженно-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

- Сафронов В.С., Доманов Д.И.** 84
Оценка влияния косины пролетных строений железобетонных мостов на риск разрушения нормальных сечений балок с ненапрягаемым армированием от изгибающего момента
- Сафронов В.С., Доманова Ю.А.** 91
Нелинейный статический анализ трубопроводного перехода с вантовой несущей системой
- Сафронов В.С., Антипов А.В.** 98
Динамические характеристики автодорожных мостов с неразрезным металлическим коробчатым пролетным строением

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

Леденев В.В., Чыонг Х.З., Чан Л.В.

Несущая способность моделей стен из фибробетона в условиях двухосного сжатия **108**

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

Гриднев С.Ю., Будковой А.Н.

Динамическое воздействие автоцистерн с отсеками на путь при учете гидроудара **115**

Попечительский совет

ООО «Предприятие
Инвестстройиндустрия»
в лице директора
Ушакова И.И.

ООО «Предприятие
по инженерному и научно-
техническому обслуживанию
строительного комплекса
«СтройНаука»
в лице зам. директора
Глушкова А.В.

Адрес редакции: 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел., факс +7(473) 2715230

По вопросам размещения статей просьба обращаться
по адресу:

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./факс (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф.

Сафронову Владимиру Сергеевичу,

тел./ факс: +7 (473) 2715230

E-mail: vss22@mail.ru

зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц.

Ефрюшину Сергею Владимировичу,

тел./ факс: +7 (473) 2715230

E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

отв. секретарю, канд. техн. наук, доц.

Габриеляну Грайру Египшеевичу

тел./ факс: +7 (473) 2715230

E-mail: grayr2010@rambler.ru

ОАО Воронежский филиал
ГИПРОДОРНИИ
в лице ген. директора
Мажарова А.В.

Редакторы Аграновская Н.Н., Акритова Е.В.

Подп. в печать 18. 06 2012. Формат 60x84 1/8. Усл.-печ. л. 15,1.

Уч.-изд. л. 15,2. Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ №282.

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии
издательства учебной литературы и учебно-методических пособий
Воронежского ГАСУ

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© Воронежский ГАСУ, 2012



Founder

State Educational Institute
of Higher Vocational Education

Voronezh State University
of Architecture
and Civil Engineering

Editor

Constructional Department

Chief Editor

Dr of Sc. Tech. Prof.
V.S. Safronov

Deputy of Chief Editor

PhD S.V. Efrushin

Senior Secretary

PhD G.E. Gabrielyan

Technical Secretary

Sc. associate V.M. Flavianov

Members of editorial board

Dr of Tech. Sc, Prof. Y.M. Borisov

Dr of Math Prof. M.V. Shitikova

Dr of Tech Sc D.M. Shapiro

Dr. of Tech Sc A.S. Orlov

Dr of Tech Sc A.A. Sventikov

PhD Y.V. Ivanov

PhD A.V. Andreev

PhD Y.F. Rogatnev

ISSN 2219-1038

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific-Technical Journal

Issue №1(4), 2012

CONTENTS

STRUCTUREL MTCYANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

Efrushin S.V., Vikulov M.A. Limiting balance of rigid mesh plates	7
Petrenya E.N., Petranin A.A. Definition of characteristics of thin-walled and thick-walled rod cross-section by finite element method	31
Sinozersky A.N., Muhtarov P.A. Definition of Basic Stresses and Deflected Mode Under Eccentric Compression	72

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND STRUCTURES

Safronov V.S., Domanov D I. Assessment of effect of concrete bridge span and road junction angle change on risk of fracture of normal section of beams with nonprestressed reinforcement caused by moment of deflection	84
Safronov V.S., Domanova Y.A. Nonlinear Static Analysis of Pipeline with Bearing Cable-Stayed System	91
Safronov V.S., Antipov A.V. Dynamic characteristics of road bridges with continuous box metal span	98

**EXPERIMENTAL AND NATURAL
INVESTIGATION OF STRUCTURES
AND MATERIALS**

Ledenoyv V.V., Truong H.D., Tran L.V.

Load – carrying Capacity of Fibrous Concrete Wall
Models under Biaxial Compression

108

**MOBILE LOAD EFFECT
ON ELASTIC SYSTEMS**

Gridnev S.Yu., Budkovoï A.N.

Dynamic effect of tankers with compartments
on bridge floor, taking into consideration stress

115

Board of Trustees

Ltd. «Enterprise
Investroyndustriya»
Director **I.I. Ushakov**

Ltd. «Enterprise on Engineer-
ing and Scientific Service of
Building Complex
StroyNauka»
Deputy Director
A.V. Glushkov

Ltd. «Voronezh department of
Giprodornii»
Chief Executive Officer
A.V. Mazharov

Address : 84, 20-letie Oktyabrya st.
394006 Voronezh, Russia
Tel/ fax...: +7 (473) 2715230

**Concerning articles publication
one can address:**

84,20-letie Oktyabrya st. Voronezh 394006, Russia

Chief editor Dr Sc.Tech. Prof.
Vladimir Sergeevich Safronov
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: vss22@mail.ru

Concerning the article placing in the journal one can address:
Deputy of Chief editor PhD, Associate Professor Sergei Vladimirovich Efrushin
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
Senior secretary:

PhD, Associate Professor
Gabrielyan Grayr Egisheevich
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: grayr2010@rambler.ru

Editor N.N. Agranovskaya E.V. Akritova

Printed: office of operated polygraphy of Voronezhsky GASU
84, 20-letie Oktyabrya
394006 Voronezh Russia

© Voronezhsky GASU, 2012



От научного редактора

Уважаемые коллеги!

В ваших руках четвертый номер журнала «Строительная механика и конструкции», содержащий новейшие результаты научных исследований по созданию и апробации современных эффективных методов статического и динамического расчета несущих конструкций зданий и сооружений в линейной и нелинейной постановках на нагрузки, представляемые в детерминированной и вероятностной формах.

Принятые к публикации научные статьи могут представлять интерес для научных сотрудников, практических инженеров, аспирантов, магистрантов и студентов, специализирующихся в области строительства, включая мосты на автомобильных дорогах.

Статья А.А. Петранина и Е. Н. Петрени продолжает начатую в предыдущем номере журнала серию публикаций по усовершенствованию теории сложного сопротивления стержней произвольного поперечного сечения. Методом конечного элемента определяются функции деформации и жесткостные характеристики стержней с тонкостенными и толстостенными поперечными сечениями. Аппроксимация поперечного сечения выполняется отдельными элементами прямоугольной формы. Для полного поперечного сечения сформирована разрешающая система из уравнений равновесия узлов и уравнения совместности перемещений элементов в узлах.

Расширяет представление о возможностях применения линейного программирования для оценки несущей способности выполненных из жесткопластического материала сетчатых плит статья С.В. Ефрюшина и М.А. Викулова. Получила развитие теория внецентренного сжатия бетонных призм с учетом эксцентриситета и скорости нагружения в публикации А.Н. Синозерского и Р. А. Мухтарова.

Несущая способность стен зданий из фибробетона, испытывающих двухосное сжатие, изучается экспериментально на моделях. Результаты опытов в сопоставлении с данными расчетов обсуждаются в статье В.В. Леденева и др.

Развитию теории мостовых сооружений посвящены статьи второго раздела журнала. Оценка влияния косины железобетонных пролетных строений на распределение рисков разрушения нормальных сечений с учетом разброса прочностных характеристик материалов и нагрузок выполнена в статье В.С. Сафронова и Д.И. Доманова. Возможность параметрических колебаний в мостах с неразрезными металлическими пролетными строениями с тонкостенными коробчатыми несущими балками и ортотропной плитой проезжей части рассматривается в статье В.С. Сафронова и А.В. Антипова.

Главный редактор журнала
«Строительная механика и конструкции»
Заслуженный работник высшей школы РФ,
член-корр. АЕ, д-р техн. наук, профессор
В.С. Сафронов



From scientific editor of the journal

My most esteemed colleagues!

You are looking through the forth issue of the journal “Structural Mechanics and Construction”, covering the latest results of scientific research on creation and approbation of modern effective methods of static and dynamic calculation of building bearing structures and constructions in linear and nonlinear position for loadings, presenting both in determinate and probability forms.

The articles in this journal can be interested for scientists, engineers, postgraduates, masters, and students, specializing in the sphere of construction, including road bridges.

The article by Petranin A.A. and Petrenya continues the publication about theory improvement of complicated strength of rod of arbitrary cross-section, which was under studying in the previous issues of journal. Function of deplanation and rigid performances of rods with thin-, thick-walled cross-sections were defined by final element method. Approximation of cross-section is implemented by separate elements of squared shape. For complete cross section there was formed resolving system from equations of equilibrium of units and equation of elements motion compatibility in units.

Article by Efrushin S.V. and Vikulov M.A. expands understanding about possibility of programming application for assessment of bearing capacity of reticular slabs made from rigid plastic material. Theory of eccentric compression of concrete prisms with consideration of eccentricity and loading speed is analyzed in the article by Sinezyorsky A.N. and R. A. Muhtarov.

Bearing capacity of building walls from fibrous concrete under biaxial compression is studied experimentally on models. Experimental results with data of calculation comparison are discussed in article by V.V. Ledenyov and others.

Articles from second part of journal are devoted to development of bridge structure theory. Assessment of effect of concrete bridge span and road junction angle change on distribution of risk of normal section fracture with consideration of material strength property and loading spread is given in the articles by Safronov V.S. and D.I. Domanova. Possibility of parametric wobbles in continuous bridges with thick-walled box bearing beams and orthotropic bridge floor slab is under consideration in article by Safronov V.S. and A.I. Antipov.

Head editor of journal
“Structural Mechanics and Structures”
Honored Science Worker of High School of RF,
Corresponding Member of AE,
Professor V.S. Safronov

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.042+624.072

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
С.В. Ефрюшин
Аспирант кафедры строительной механики
М.А. Викулов
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(950)779-58-85
email: vikulovmiha@mail.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Science Associate Professor of Department
of Structural Mechanics
S.V. Efyushin
Postgraduate of (Sub)department of Structural Mechanics
M.A. Vikulov
Russia, Voronezh, ph.: 8(950)7795885
email: vikulovmiha@mail.ru*

С.В. Ефрюшин, М.А. Викулов

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СЕТЧАТЫХ ПЛИТ

Рассматривается численный метод решения задач грузоподъемности жесткопластических сетчатых плит. Задачи грузоподъемности решаются в статической и кинематической формулировке на основе линейного программирования, что позволяет оценить схему и очередность образования пластических шарниров. Приведено сравнение решений задач грузоподъемности численным и аналитическим методами.

S.V. Efyushin, M.A. Vikulov

LIMITING BALANCE OF RIGID MESH PLATES

The numerical method of the solution of problems of loading capacity of rigid mesh plates is considered. Problems of loading capacity are solved in the static and kinematic formulation on the basis of linear programming that allows to estimate the scheme and sequence of formation of plastic hinges. Comparison of solutions of problems of loading capacity numerical and analytical is given by metho.

При расчётах сложных пространственных сооружений в конечно-элементных комплексах используют расчётные схемы, содержащие несколько типов конечных элементов. Иногда, для упрощения расчёта, заменяют континуальные конечные элементы сеткой стержневых элементов. Этот приём позволяет уменьшить время расчёта, при этом он незначительно влияет на точность результатов. В литературе [1] описываются задачи определения грузоподъемности континуальных систем. Для решения такого рода задач на континуальную систему «наводится» сетка возможных шарниров и определяется грузоподъемность в аналитическом или численном виде. В работе ставится задача определения грузоподъемности континуальных плит с помощью их замены системой перекрёстных стержней, т. е. сетчатой плиты.

Целью данной работы является разработка методики расчета грузоподъемности континуальных систем, аппроксимированных стержневыми элементами, численным методом линейного программирования и сопоставление результатов с аналитическими решениями.

Примем, что плита выполнена из однородного материала с изотропными свойствами. В изгибаемой в двух плоскостях плите основными силовыми факторами, определяющими грузоподъёмность, являются два изгибающих момента M_{xx} и M_{yy} и крутящий момент M_{xy} . При разделении плиты на отдельные стержни в стержневом элементе в качестве таких факторов выступают два момента – изгибающий M_y и крутящий M_x .

Рассмотрим условия пластичности Губера - Мизеса для сечения плиты и сечения сетчатой пластины. Для плиты условия пластичности формулируются для моментов, отнесенных к единице длины сечения плиты, и имеют вид

$$M_{xx}^2 - M_{xx}M_{yy} + M_{yy}^2 + 3M_{xy}^2 = M_{пл}^2, \quad (1)$$

где $M_{пл} = \sigma_T h^2/4$ – пластический момент единицы длины поверхности плиты.

Уравнение (1) является нелинейным и задает поверхность эллипсоида вращения.

Для сетчатой пластины условие пластичности (текучести) сечения имеет вид

$$M_y^2 + 3M_x^2 = M_{пл}^2. \quad (2)$$

Алгоритм решения задачи грузоподъёмности сетчатой пластины численным методом:

- 1) решение задачи линейного программирования для построения гиперповерхности предельных усилий сечений жесткопластических стержней;
- 2) линейризация получившейся поверхности;
- 3) формирование матрицы текучести сетчатой пластины на основе линейризованной поверхности текучести;
- 4) решение задачи грузоподъёмности сетчатой пластины методом линейного программирования.

Решение первой задачи алгоритма описано в [2]. При решении этой задачи применительно к сетчатым пластинам возникает одна особенность. Она заключается в том, что, в отличие от решения задачи для отдельных сечений стержней, сечения сетчатой пластины связаны между собой боковыми гранями. На рис.1, а показано сечение отдельного стержня, в котором действуют касательные и нормальные напряжения. При этом вводится допущение, что основными силовыми факторами, влияющими на грузоподъёмность, являются изгибающий момент M_y и крутящий момент M_x . На рис.1, б показаны траектории касательных напряжений от кручения, которые параллельны контуру сечения. Для сетчатой пластины контур сечения параллелен её срединной плоскости, поэтому принимаем касательные напряжения от кручения в перекрёстных стержнях также параллельными срединной плоскости сетчатой пластины (рис.1, в).

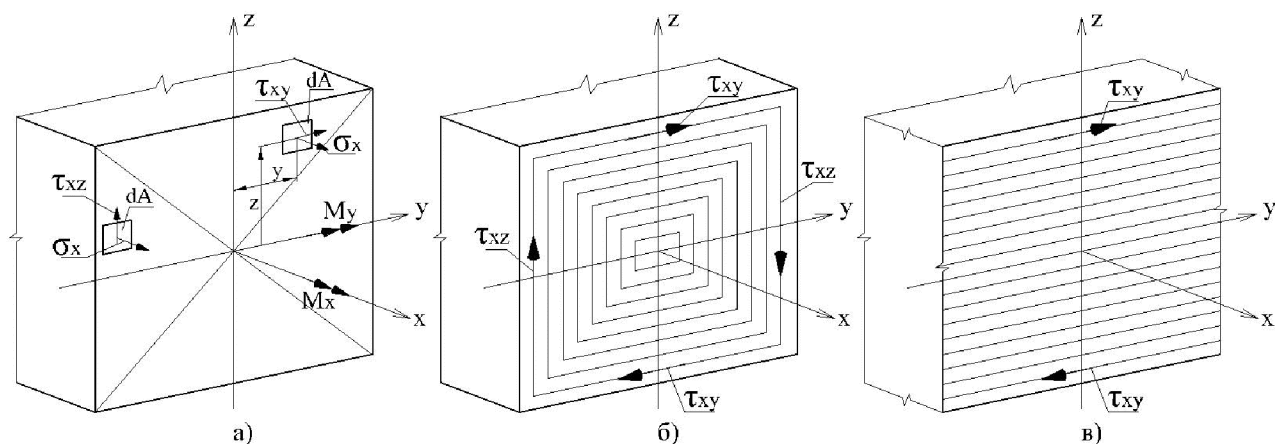


Рис. 1. Траектории касательных напряжений

В результате решения первой задачи получим предельную поверхность для сечения сетчатой пластины, изображенную на рис.2.

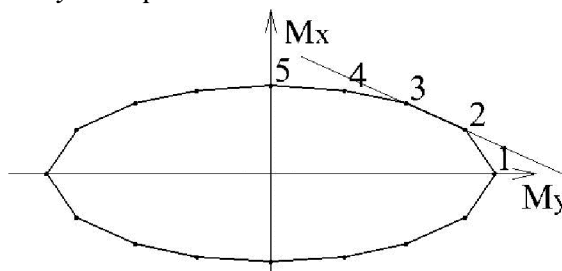


Рис. 2. Предельная поверхность сечения

Линеаризация поверхности текучести выполняется прямыми, которые последовательно соединяют точки на поверхности текучести. Формулы линеаризации имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{a}{-c} M_x + \frac{b}{-c} M_y &= 1; \\ a &= M_{y(i+1)} - M_{y(i)}; \\ b &= M_{x(i+1)} - M_{x(i)}; \\ c &= M_{x(i+1)}M_{y(i)} - M_{x(i)}M_{y(i+1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M_{x(i)}$, $M_{y(i)}$ и $M_{x(i+1)}$, $M_{y(i+1)}$ - координаты соответственно первой и второй точки, через которые проходит линеализирующая прямая.

На основе коэффициентов уравнения (3) формируется матрица текучести сетчатой пластины.

Описание задачи грузоподъемности методом линейного программирования приведено в [3]. Далее приведены примеры решения задач грузоподъемности для сетчатых пластин и сравнение с аналитическим решением.

Пример 1. Квадратная плита, размером 10 x 10 м с равномерно распределенной нагрузкой 1 кН/м². Плита шарнирно оперта по контуру. Предел текучести материала плиты 1 кН/м². «Наведем» на плиту сетку с шагом 1 м в продольном и поперечном направлении. Задачу решаем для нескольких толщин плиты 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2 м двумя способами:

- 1) траектории касательных напряжений в сечении по рис. 1, б;
- 2) траектории касательных напряжений в сечении по рис. 1, в.

При этом поверхность текучести опишем с помощью 4, 8 и 12 точек.

1-й способ. Поверхность текучести сечения толщиной 0,2 м при описании 4-мя точками показана на рис. 3, 8-ю точками - на рис. 4, 12-ю точками - на рис. 5.

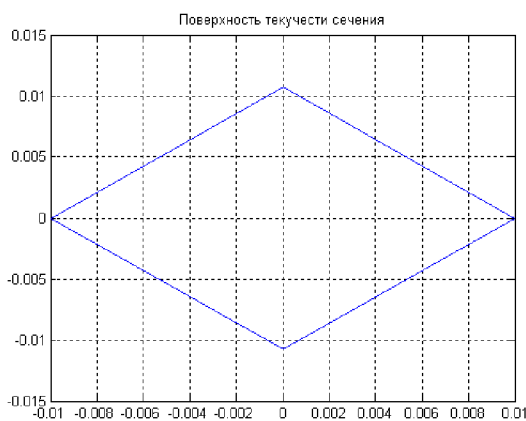


Рис. 3. Предельная поверхность сечения, описанного 4-мя точками

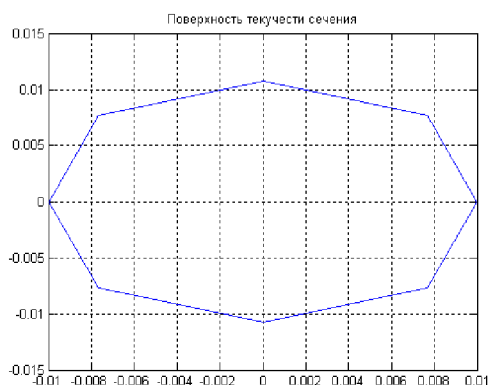


Рис. 4. Предельная поверхность, сечения описанного 8-ю точками

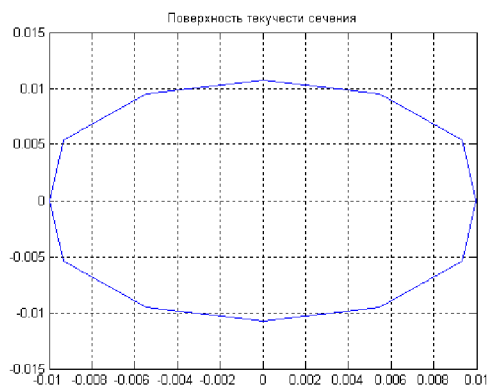


Рис. 5. Предельная поверхность сечения, описанного 12-ю точками

В табл. 1 приведено решение задачи грузоподъемности при первом способе распределения касательных напряжений в сечении. Обозначения в таблице: $M_{пр} = \sigma_T h^2 / 4$ - предельный момент сечения; $K_{гр} = 24 M_{пр} / a^2$ - аналитический коэффициент грузоподъемности, где a - сторона квадратной плиты; $\Delta, \%$ - разница в процентах аналитического и численного решения задачи; графы 4 точки, 8 точек и 12 точек содержат численные решения задачи грузоподъемности соответствующих описанию поверхности текучести.

Таблица 1

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	$\Delta, \%$	8 точек	$\Delta, \%$	12 точек	$\Delta, \%$
0,1	0,0025	0,0006	0,00064	-6,8	0,00079	-31,6	0,0008094	-34,9
0,2	0,01	0,0024	0,0025	-4,2	0,0031	-28,6	0,0032	-31,6
0,4	0,04	0,0096	0,0097	-1,0	0,0119	-23,7	0,0120	-25,3
0,6	0,09	0,0216	0,0215	0,5	0,0259	-19,8	0,0259	-19,7
0,8	0,16	0,0384	0,0376	2,1	0,0444	-15,6	0,0440	-14,7
1	0,25	0,06	0,0575	4,2	0,0662	-10,4	0,0661	-10,2
1,2	0,36	0,0864	0,0809	6,4	0,0904	-4,6	0,0919	-6,4
1,4	0,49	0,1176	0,1078	8,3	0,1168	0,7	0,1215	-3,3
1,6	0,64	0,1536	0,1381	10,1	0,1467	4,5	0,1541	-0,3
1,8	0,81	0,1944	0,1717	11,7	0,1811	6,9	0,1886	3,0
2	1	0,24	0,2088	13,0	0,2189	8,8	0,2249	6,3

По результатам табл. 1 можно сделать вывод, что решение задачи первым способом не имеет сходимости при увеличении числа точек предельной поверхности сечения. При изменении толщины плиты изменяется разница аналитического и численного решения.

На рис. 6 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке [3] при толщине плиты 0,2 м и 4-х точек описания предельной поверхности сечения. На рис. 7 соответственно для 12-ти точек описания предельной поверхности сечения.

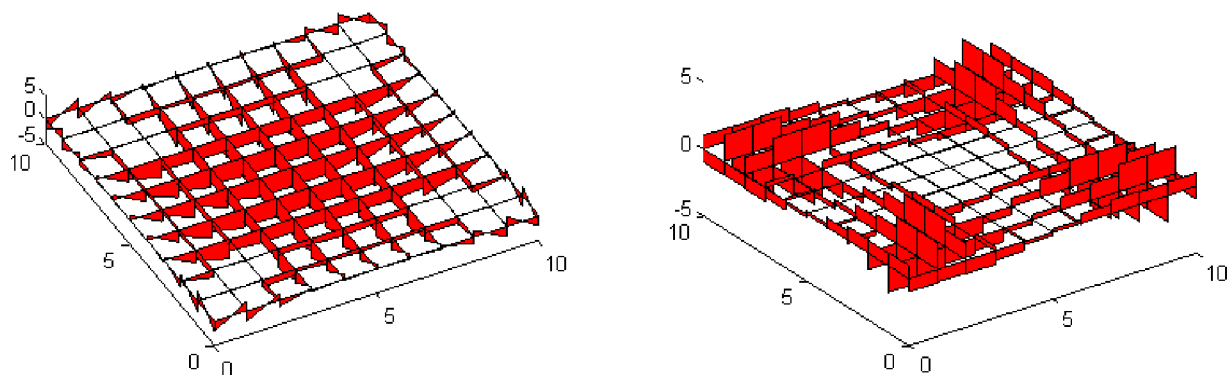


Рис. 6. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 4-х точках описания предельной поверхности сечения

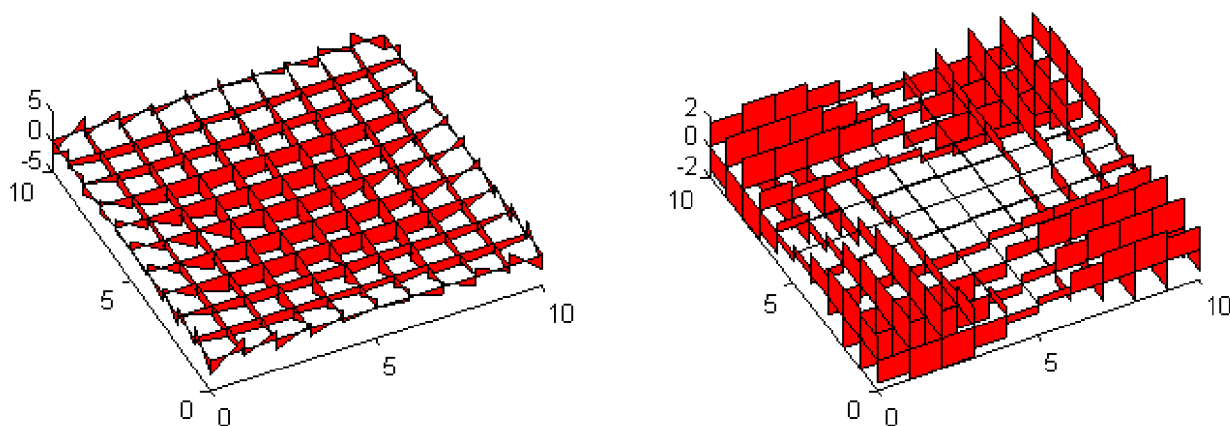


Рис. 7. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 8, 9 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке [3] соответственно при 4-х и 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

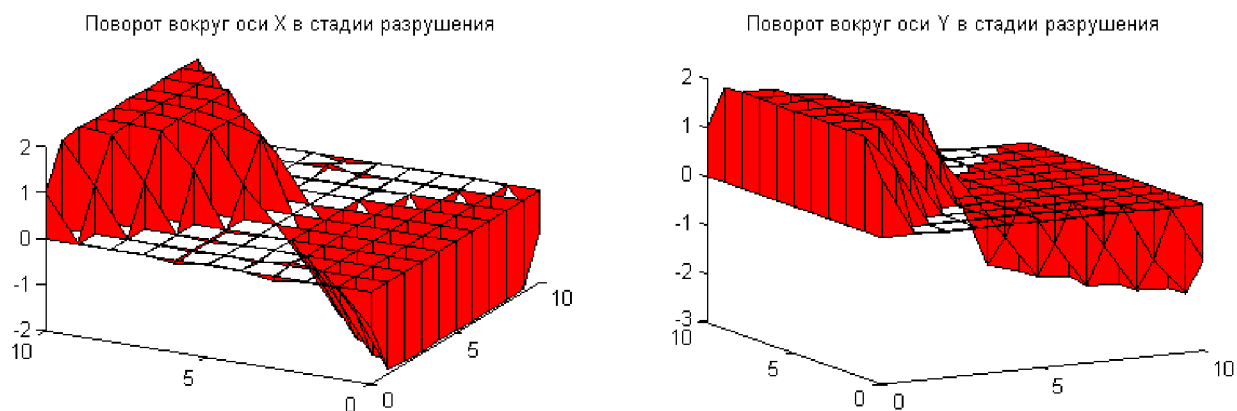


Рис. 8. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 4-х точках описания предельной поверхности сечения

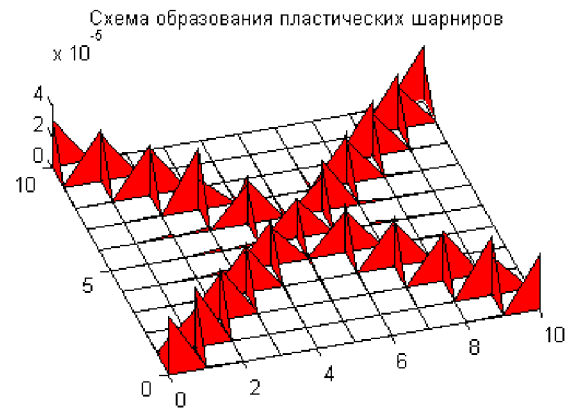
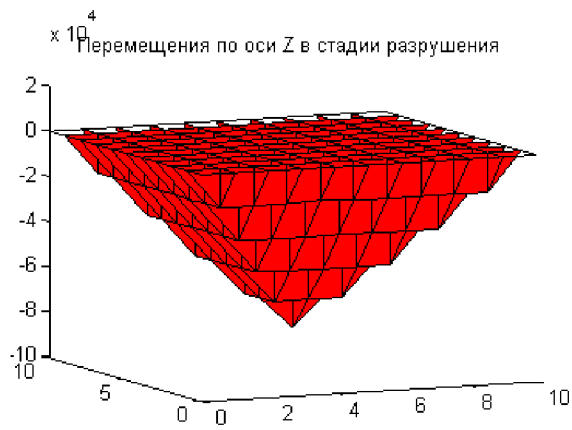


Рис. 8 (окончание). Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 4-х точках описания предельной поверхности сечения

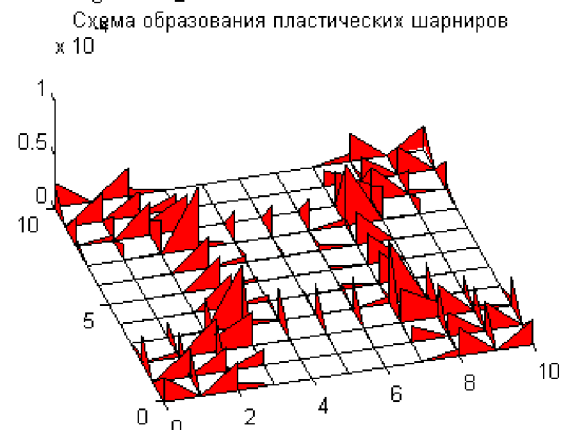
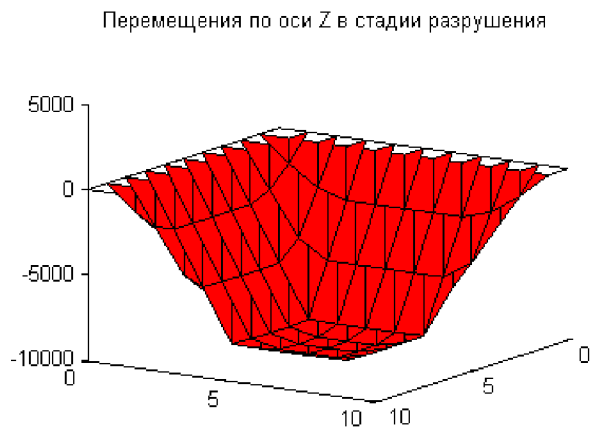
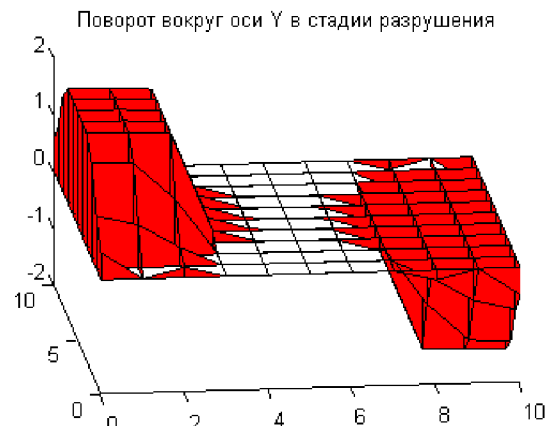
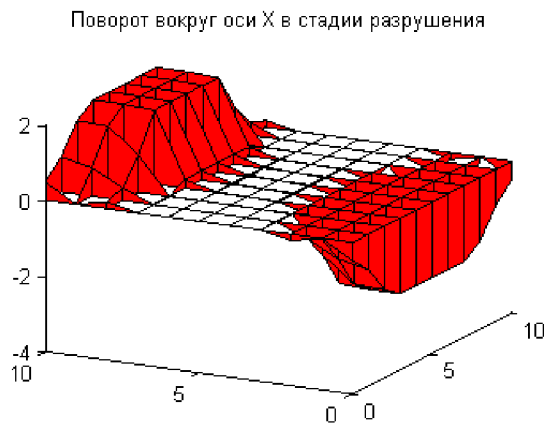


Рис. 9. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Решение задачи при 4-х точках аппроксимации поверхности текучести сечения дает разницу в -4,2 % с аналитическим решением, и схема образования пластических шарниров совпадает со схемой аналитического решения [1]. При 12-ти точках разница достигает -31,6 % и на схеме образования пластических шарниров появляется квадратная площадка в центре, внутри которой не образуются пластические шарниры, то есть она не разрушается.

2-й способ. Поверхность текучести сечения толщиной 0,2 м при описании 4-мя точками показана на рис. 10, 8-ю точками - на рис. 11, 12-ю точками - на рис. 12.

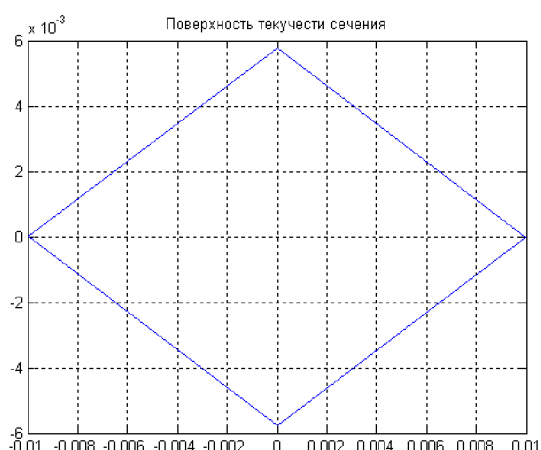


Рис. 10. Предельная поверхность сечения, описанного 4-мя точками

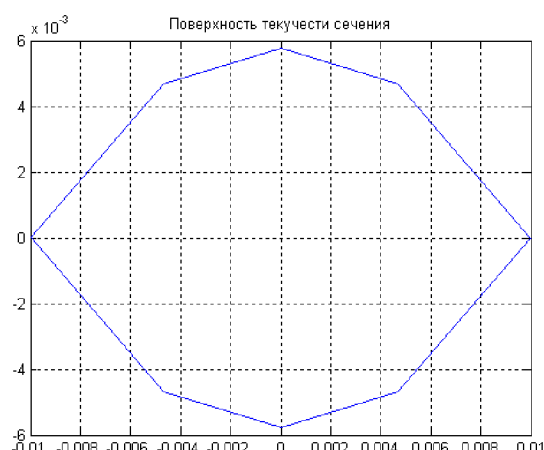


Рис. 11. Предельная поверхность сечения, описанного 8-ю точками

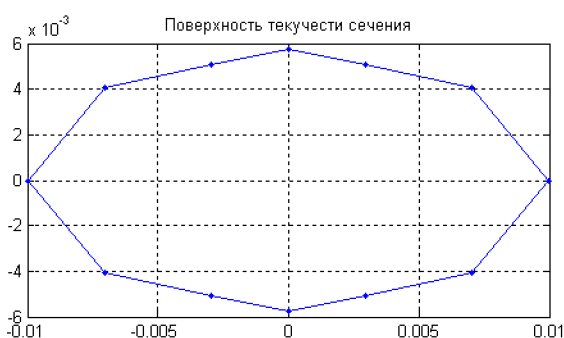


Рис. 12. Предельная поверхность сечения, описанного 12-ю точками

На предельных поверхностях текучести, найденных по второму способу решения, значения максимального крутящего момента (крайние точки по оси абсцисс) меньше, чем при первом способе решения. В табл. 2 приведено решение задачи грузоподъемности при втором способе распределения касательных напряжений в сечении. Обозначения в табл. 2 аналогичны обозначениям в табл. 1.

Таблица 2

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,00060	0,00054	9,9	0,00057	5,2	0,00060	0,5
0,2	0,01	0,0024	0,0022	9,9	0,0023	5,2	0,0024	0,5
0,4	0,04	0,0096	0,0086	9,9	0,0091	5,2	0,0096	0,5
0,6	0,09	0,0216	0,0195	9,9	0,0205	5,2	0,0215	0,5
0,8	0,16	0,038	0,035	9,9	0,036	5,2	0,038	0,5
1	0,25	0,060	0,054	9,9	0,057	5,2	0,060	0,5
1,2	0,36	0,086	0,078	9,9	0,082	5,2	0,086	0,5
1,4	0,49	0,118	0,106	9,9	0,111	5,2	0,117	0,5
1,6	0,64	0,154	0,138	9,9	0,146	5,2	0,153	0,5
1,8	0,81	0,194	0,175	9,9	0,184	5,2	0,193	0,5
2	1	0,240	0,216	9,9	0,227	5,2	0,239	0,5

Решение задачи вторым способом дает сходимость результатов при увеличении числа точек предельной поверхности сечения. При изменении толщины плиты не изменяется разница аналитического и численного решения.

На рис. 13 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и 4-х точек описания предельной поверхности сечения. На рис. 14 соответственно для 12-ти точек описания предельной поверхности сечения.

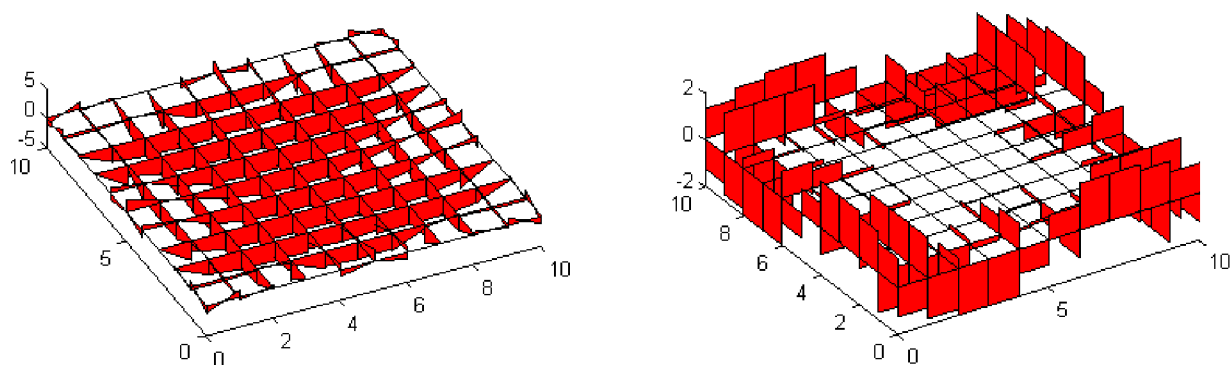


Рис. 13. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 4-х точках описания предельной поверхности сечения

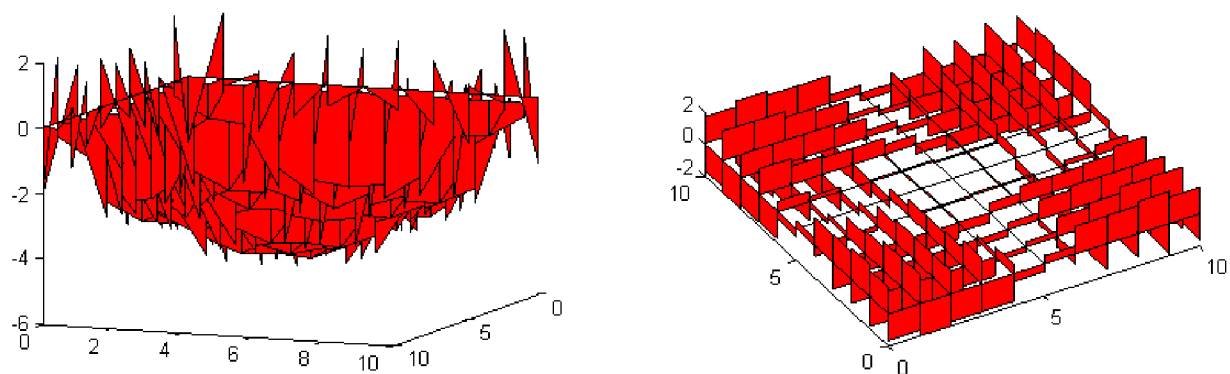


Рис. 14. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 15, 16 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке соответственно при 4-х и 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 4-х и 12-ти точках описания предельной поверхности сечения дают похожие картины образования пластических шарниров.

Из результатов табл. 1 и 2, соответствующих первому и второму способу решения, можно сделать вывод, что при равномерно распределенной нагрузке даёт более точные и стабильные результаты второй способ решения.

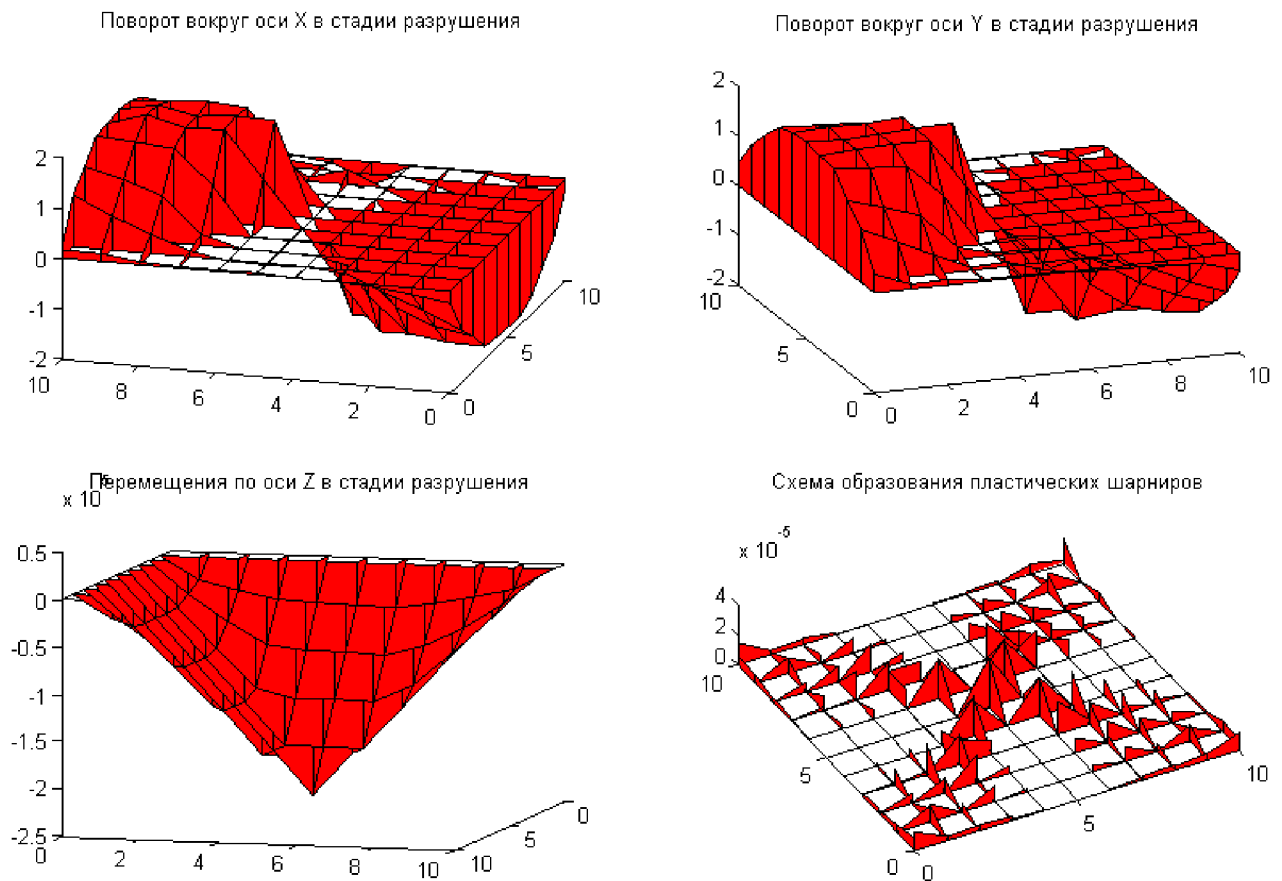


Рис. 15. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 4-х точках описания предельной поверхности сечения

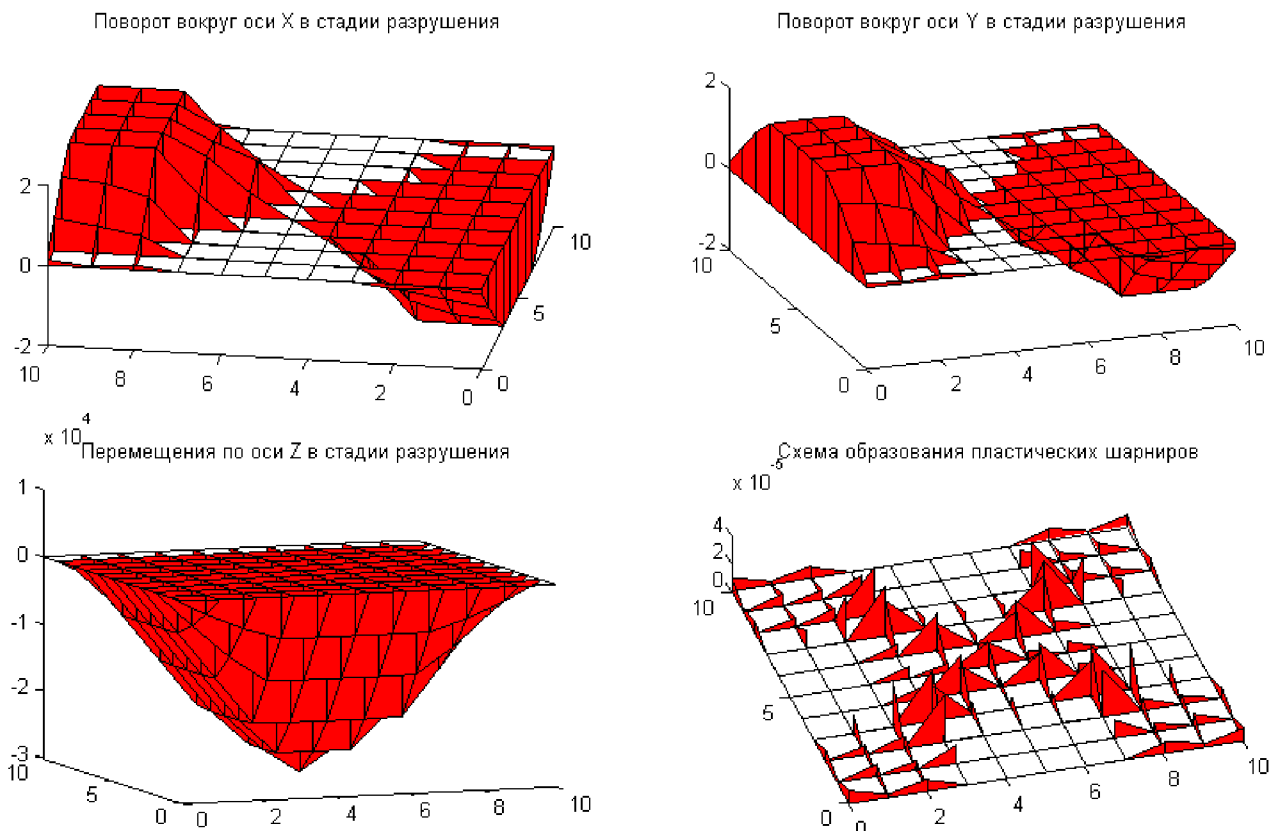


Рис. 16. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Пример 2. Квадратная плита, размером 10 x 10 м, нагруженная сосредоточенной нагрузкой 1 кН в центре плиты. Остальные условия задачи соответствуют примеру 1.

1-й способ. В табл. 3 приведено решение задачи грузоподъемности при первом способе распределения касательных напряжений в сечении. $K_{гр} = 8M_{пр}$ – аналитический коэффициент грузоподъемности при загрузке сосредоточенной нагрузкой в центре плиты [1].

Таблица 3

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,02	0,02	0,0	0,02	0,0	0,02	0,0
0,2	0,01	0,08	0,08	0,0	0,08	0,0	0,08	0,0
0,4	0,04	0,32	0,32	0,0	0,32	0,0	0,32	0,0
0,6	0,09	0,72	0,67	6,4	0,72	0,0	0,72	0,0
0,8	0,16	1,28	1,12	12,6	1,28	0,0	1,28	0,0
1	0,25	2	1,64	17,9	2	0,0	1,99	0,3
1,2	0,36	2,88	2,27	21,1	2,69	6,5	2,73	5,3
1,4	0,49	3,92	3,01	23,2	3,44	12,4	3,56	9,3
1,6	0,64	5,12	3,84	25,0	4,25	17,0	4,46	12,9
1,8	0,81	6,48	4,76	26,6	5,14	20,6	5,40	16,6
2	1	8	5,75	28,1	6,16	23,1	6,43	19,6

При небольших толщинах плиты аналитическое и численное решения совпадают. Это связано с образованием частного пластического механизма [3], о чем свидетельствует кинематическое решение задачи, изображенное на рис. 18.

На рис. 17 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

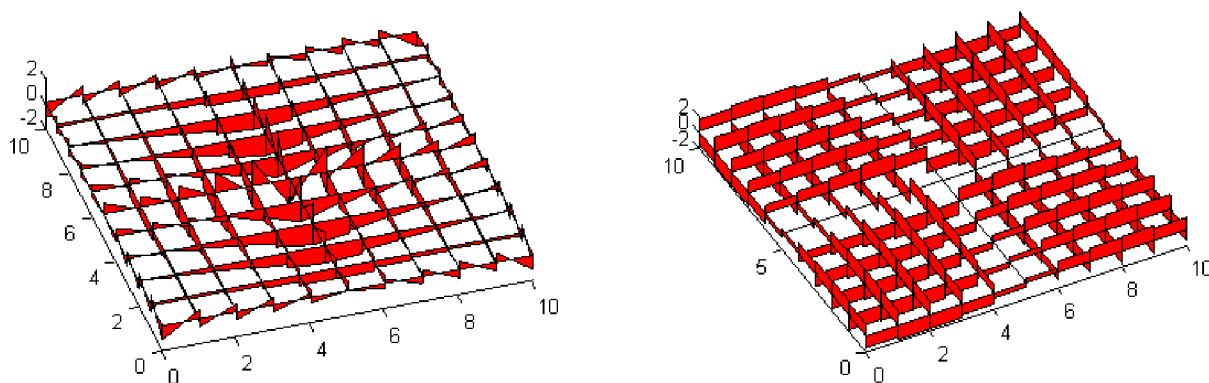


Рис. 17. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 18 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

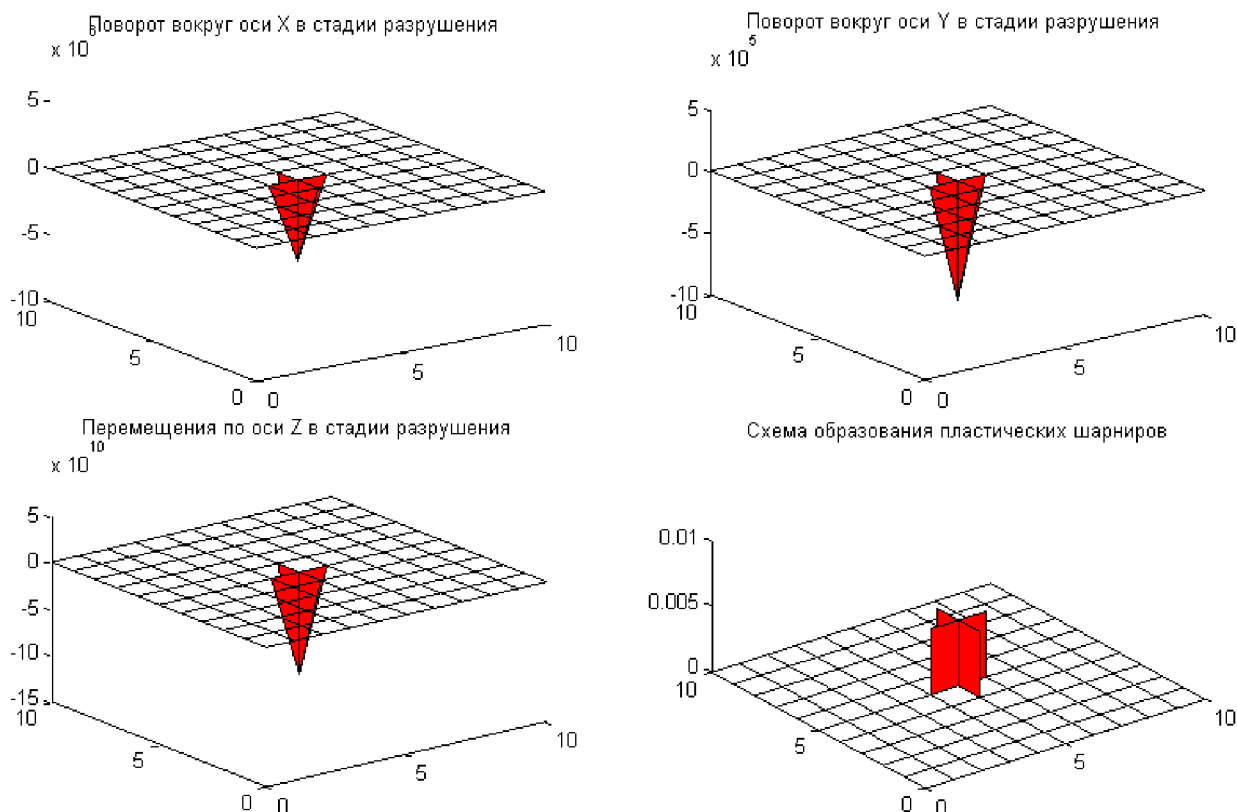


Рис. 18. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

2-й способ. В табл. 4 приведено решение задачи грузоподъемности при втором способе распределения касательных напряжений в сечении. Обозначения в табл. 4 аналогичны обозначениям в табл. 3.

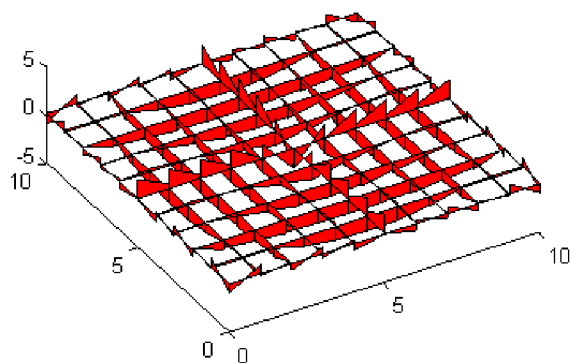
Таблица 4

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,02	0,02	24,8	0,02	18,2	0,02	13,8
0,2	0,01	0,08	0,06	24,8	0,07	18,2	0,07	13,8
0,4	0,04	0,32	0,24	24,8	0,26	18,2	0,28	13,8
0,6	0,09	0,72	0,54	24,8	0,59	18,2	0,62	13,8
0,8	0,16	1,28	0,96	24,8	1,05	18,2	1,10	13,8
1	0,25	2	1,50	24,8	1,64	18,2	1,72	13,8
1,2	0,36	2,88	2,17	24,8	2,36	18,2	2,48	13,8
1,4	0,49	3,92	2,95	24,8	3,21	18,2	3,38	13,8
1,6	0,64	5,12	3,85	24,8	4,19	18,2	4,42	13,8
1,8	0,81	6,48	4,87	24,8	5,30	18,2	5,59	13,8
2	1	8	6,02	24,8	6,54	18,2	6,90	13,8

При решении задачи вторым способом во всех случаях образуется полный пластический механизм [3]. Разница с аналитическим решением больше 10 %. Это связано с характером прикладываемой нагрузки.

На рис. 19 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

Эпюра изгибающих моментов M_y в стадии разрушения



Эпюра крутящих моментов M_x в стадии разрушения

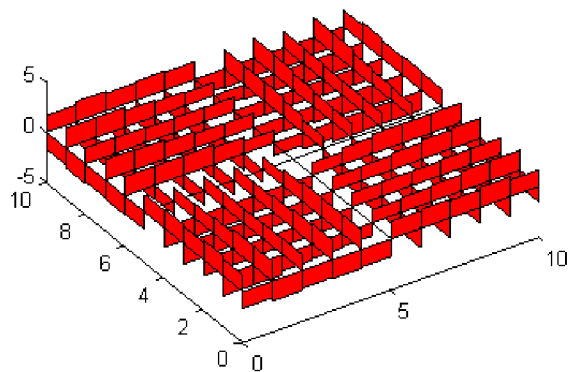
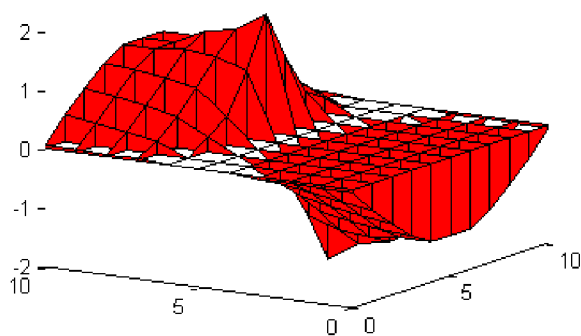


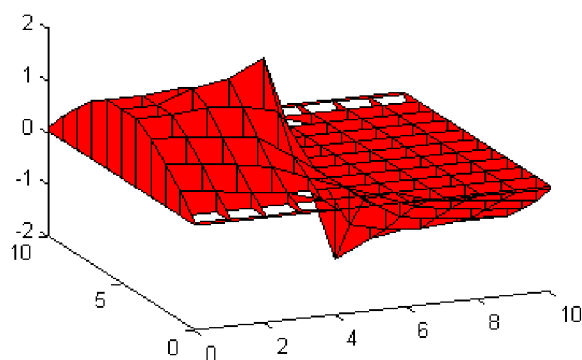
Рис. 19. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 20 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

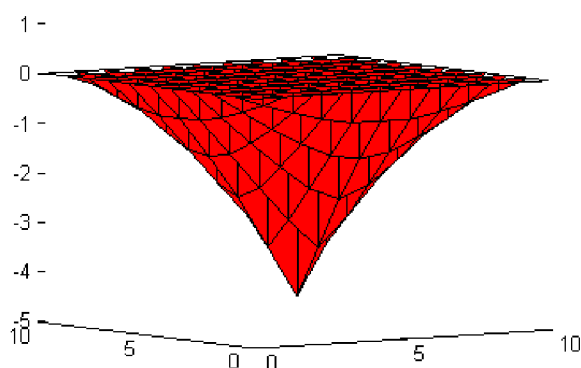
Поворот вокруг оси X в стадии разрушения



Поворот вокруг оси Y в стадии разрушения



$\times 10^{12}$
Перемещения по оси Z в стадии разрушения



$\times 10$
Схема образования пластических шарниров

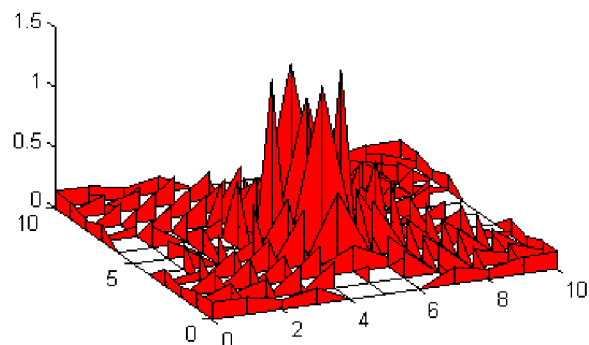


Рис. 20. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Пример 3. Квадратная плита размером 10 x 10 м, нагруженная сосредоточенной нагрузкой 1 кН/м². Схема нагружения показана на рис. 21. Остальные условия задачи соответствуют примеру 1.

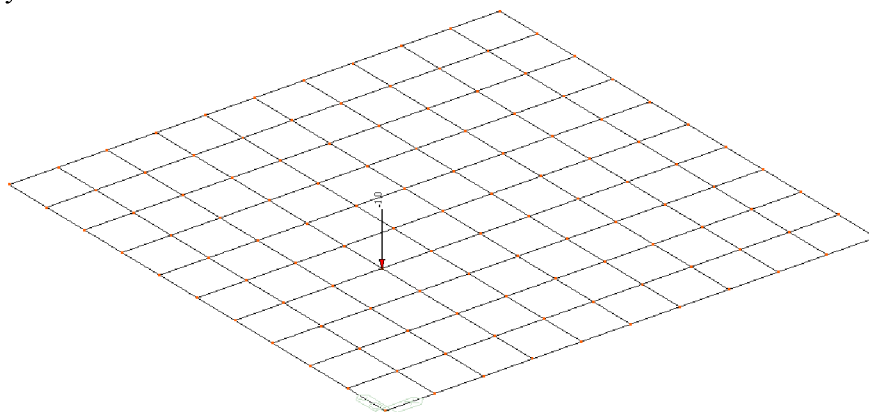


Рис. 21. Схема нагружения сетчатой пластины

1-й способ. В табл. 5 приведено решение задачи грузоподъемности при первом способе распределения касательных напряжений в сечении. $K_{гр}$ – аналитический коэффициент грузоподъемности при нагружении плиты сосредоточенной нагрузкой [1], имеет вид

$$K_{гр} = M_{пр} \left(\frac{a}{b\zeta(1-\zeta)} + \frac{b}{a\eta(1-\eta)} \right), \quad (4)$$

где $a = b = 10$ – стороны квадратной плиты, $\zeta = 0,3$, $\eta = 0,4$ – коэффициенты, определяющие положение нагрузки относительно длин сторон плиты в плане.

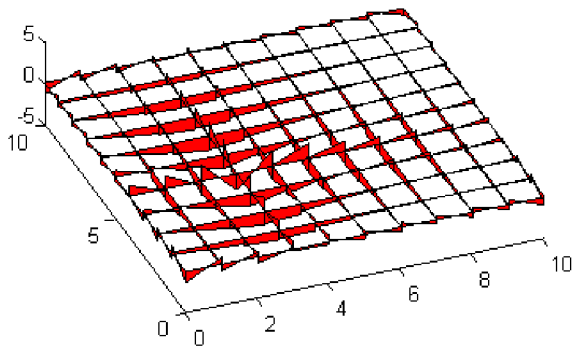
Таблица 5

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,022	0,020	10,4	0,020	10,4	0,020	10,4
0,2	0,01	0,089	0,080	10,4	0,080	10,4	0,080	10,4
0,4	0,04	0,357	0,320	10,4	0,320	10,4	0,320	10,4
0,6	0,09	0,804	0,700	12,9	0,720	10,4	0,720	10,4
0,8	0,16	1,429	1,199	16,1	1,280	10,4	1,280	10,4
1	0,25	2,232	1,806	19,1	2,000	10,4	2,000	10,4
1,2	0,36	3,214	2,507	22,0	2,836	11,8	2,871	10,7
1,4	0,49	4,375	3,307	24,4	3,667	16,2	3,760	14,1
1,6	0,64	5,714	4,212	26,3	4,588	19,7	4,742	17,0
1,8	0,81	7,232	5,216	27,9	5,605	22,5	5,796	19,9
2	1	8,929	6,315	29,3	6,724	24,7	6,924	22,5

При малых толщинах плиты, так же как и при первом способе в **примере 1**, наблюдается образование частного пластического механизма рис. 23 с $K_{гр} = 8M_{пр}$.

На рис. 22 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

Эпюра изгибающих моментов M_y в стадии разрушения



Эпюра крутящих моментов M_x в стадии разрушения

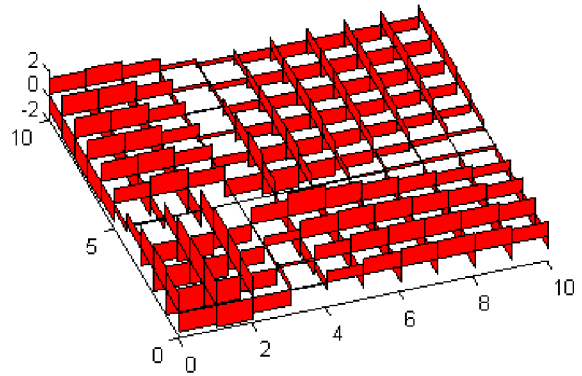
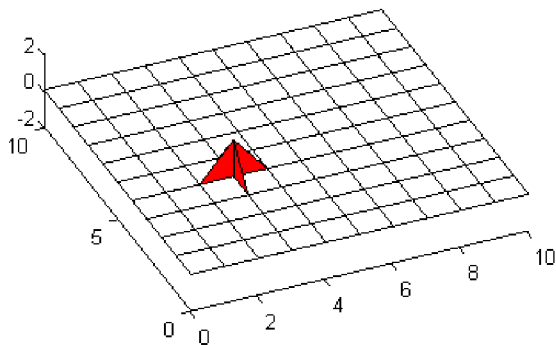


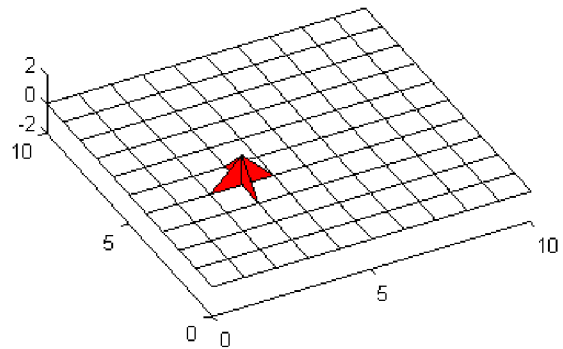
Рис. 22. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 23 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

Поворот вокруг оси X в стадии разрушения



Поворот вокруг оси Y в стадии разрушения



Перемещения по оси Z в стадии разрушения

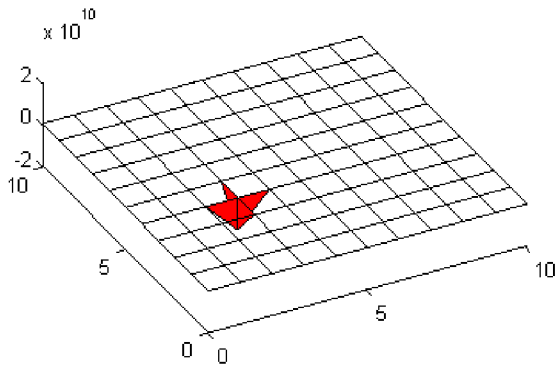


Схема образования пластических шарниров

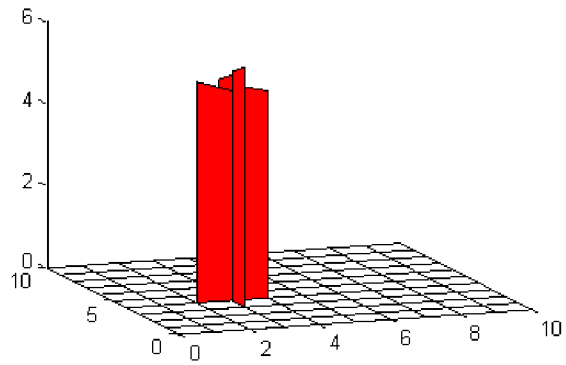


Рис. 23. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На схеме образования пластических шарниров рис. 23 можно проследить порядок образования пластических шарниров в стержнях. Этот порядок на рисунке обусловлен высотой вершин трапеций. У сечения стержня с самой высокой вершиной, пластический шарнир образуется в первую очередь.

2-й способ. В табл. 6 приведено решение задачи грузоподъемности при втором способе распределения касательных напряжений в сечении. Обозначения в табл. 6 аналогичны обозначениям в табл. 5.

Таблица 6

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	$\Delta, \%$	8 точек	$\Delta, \%$	12 точек	$\Delta, \%$
0,1	0,0025	0,022	0,016	26,1	0,018	20,6	0,018	17,7
0,2	0,01	0,089	0,066	26,1	0,071	20,6	0,073	17,7
0,4	0,04	0,357	0,264	26,1	0,284	20,6	0,294	17,7
0,6	0,09	0,804	0,594	26,1	0,638	20,6	0,661	17,7
0,8	0,16	1,429	1,056	26,1	1,135	20,6	1,176	17,7
1	0,25	2,232	1,649	26,1	1,773	20,6	1,837	17,7
1,2	0,36	3,214	2,375	26,1	2,554	20,6	2,646	17,7
1,4	0,49	4,375	3,233	26,1	3,476	20,6	3,601	17,7
1,6	0,64	5,714	4,223	26,1	4,540	20,6	4,704	17,7
1,8	0,81	7,232	5,344	26,1	5,745	20,6	5,953	17,7
2	1	8,929	6,598	26,1	7,093	20,6	7,350	17,7

Решение задачи вторым способом дает сходимость результатов при увеличении числа точек предельной поверхности сечения. При изменении толщины плиты не изменяется разница аналитического и численного решения. При решении задачи вторым способом во всех случаях образуется полный пластический механизм. Разница с аналитическим решением больше 17 %. Это связано с характером прикладываемой нагрузки.

На рис. 24 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

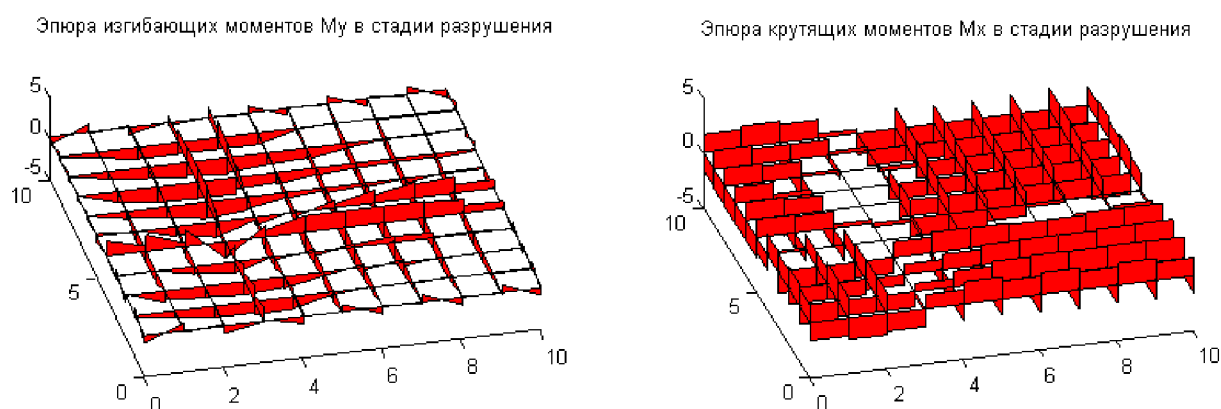


Рис. 24. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 25 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

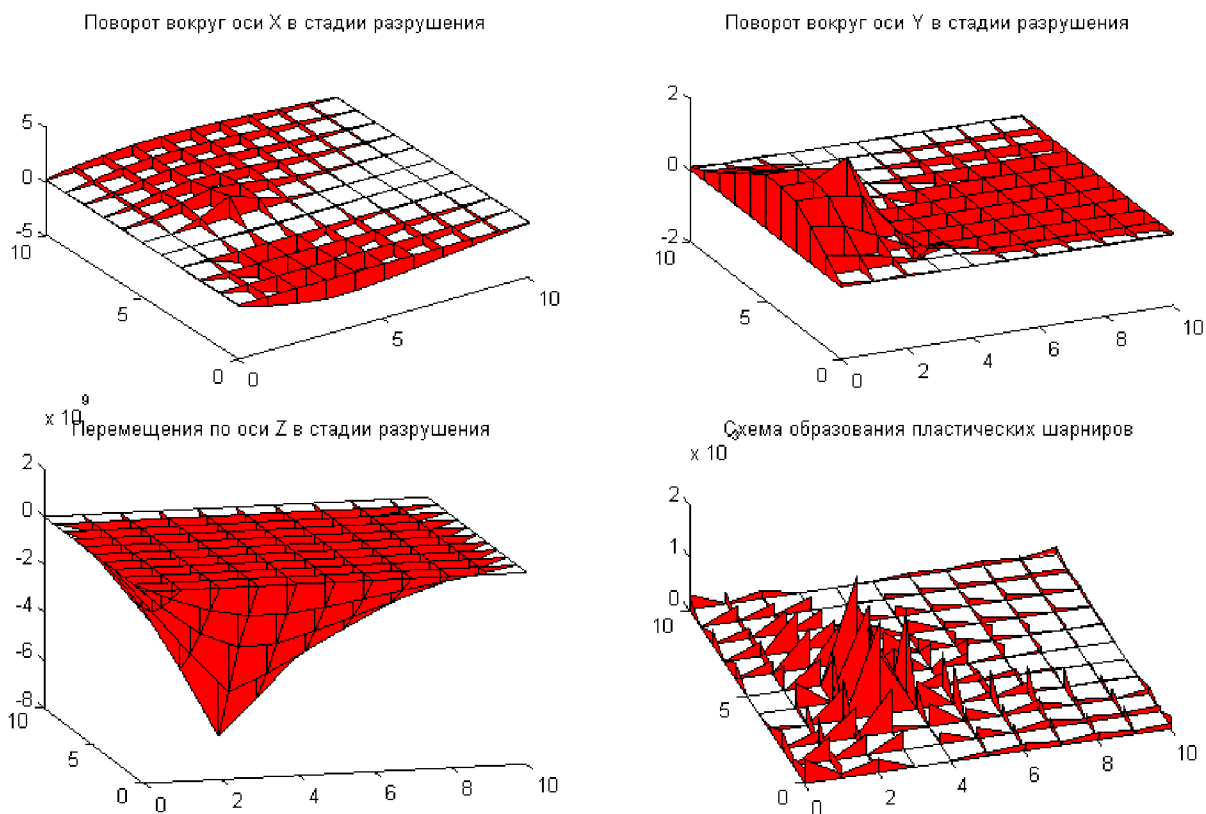


Рис. 25. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Кинематическое решение задачи дает полный пластический механизм разрушения плиты, показанный на схеме образования пластических шарниров рис. 25.

Пример 3. Прямоугольная плита размером 24 x 6 м, нагруженная сосредоточенной нагрузкой 1 кН в центре плиты. Плита шарнирно опёрта по двум длинным сторонам. Остальные условия задачи соответствуют **примеру 1**.

1-й способ. В табл. 7 приведено решение задачи грузоподъемности при первом способе распределения касательных напряжений в сечении. $K_{гр}$ – аналитический коэффициент грузоподъемности [1], при данной расчетной схеме имеет вид

$$K_{гр} = 10,28M_{пр} . \quad (5)$$

Таблица 7

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,026	0,020	22,2	0,020	22,2	0,020	22,2
0,2	0,01	0,103	0,080	22,2	0,080	22,2	0,080	22,2
0,4	0,04	0,411	0,320	22,2	0,320	22,2	0,320	22,2
0,6	0,09	0,925	0,710	23,3	0,720	22,2	0,720	22,2
0,8	0,16	1,645	1,234	25,0	1,280	22,2	1,280	22,2
1	0,25	2,570	1,885	26,6	2,000	22,2	2,000	22,2
1,2	0,36	3,701	2,644	28,5	2,880	22,2	2,880	22,2
1,4	0,49	5,037	3,520	30,1	3,846	23,6	3,920	22,2
1,6	0,64	6,579	4,525	31,2	4,859	26,1	5,036	23,5
1,8	0,81	8,327	5,646	32,2	5,986	28,1	6,201	25,5
2	1	10,280	6,884	33,0	7,233	29,6	7,436	27,7

При малых толщинах плиты, так же как и при первом способе в **примерах 1 и 3**, наблюдается образование частного пластического механизма рис. 28 с $K_{гр} = 8M_{пр}$.

На рис. 26 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в упругой стадии. На рис. 27 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

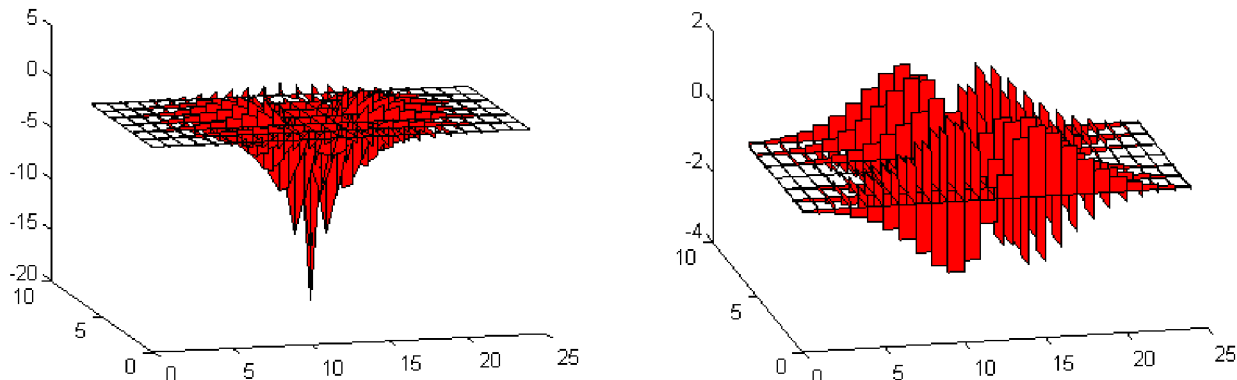


Рис. 26. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в упругой стадии

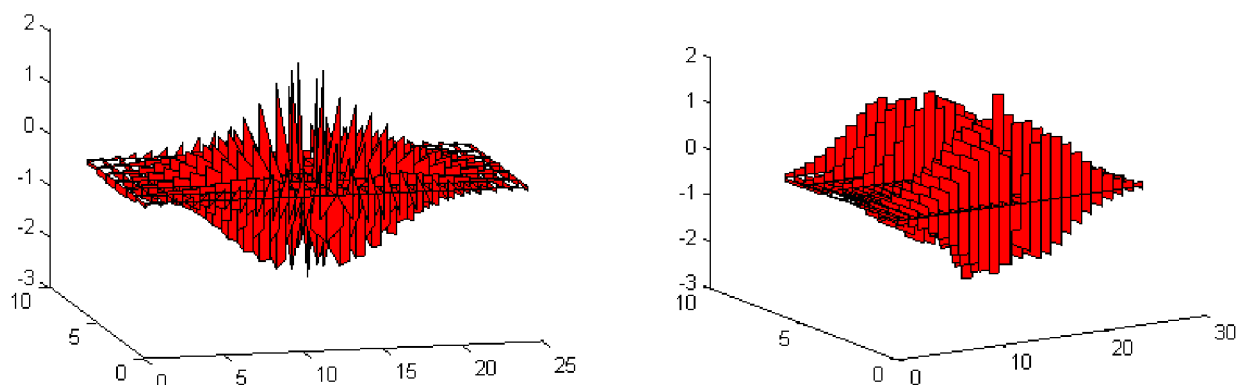


Рис. 27. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 28 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

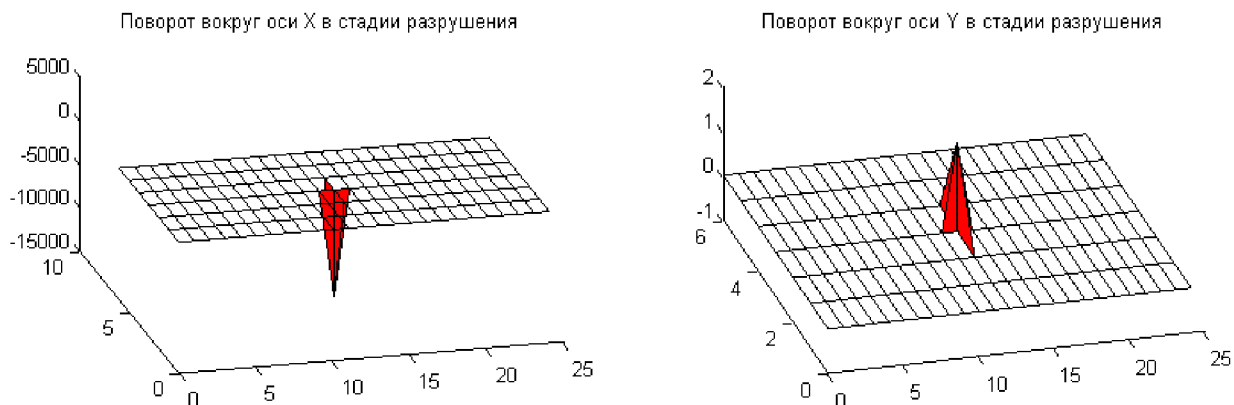


Рис. 28. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

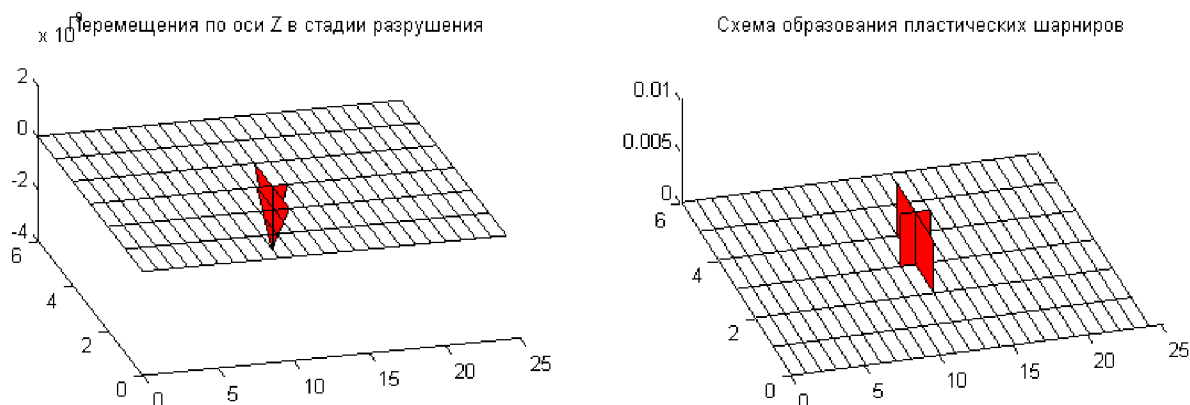


Рис. 28 (окончание). Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Кинематическое решение задачи дает частный пластический механизм разрушения плиты, с образованием пластических шарниров на концах четырех стержней расположенных в середине сетчатой пластины.

2-й способ. В табл. 8 приведено решение задачи грузоподъемности при втором способе распределения касательных напряжений в сечении. Обозначения в табл. 8 аналогичны обозначениям в табл. 7.

Таблица 8

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,026	0,018	31,1	0,0188	26,7	0,0196	23,9
0,2	0,01	0,103	0,071	31,1	0,0753	26,7	0,0782	23,9
0,4	0,04	0,411	0,283	31,1	0,301	26,7	0,313	23,9
0,6	0,09	0,925	0,637	31,1	0,678	26,7	0,704	23,9
0,8	0,16	1,645	1,133	31,1	1,205	26,7	1,252	23,9
1	0,25	2,570	1,771	31,1	1,883	26,7	1,956	23,9
1,2	0,36	3,701	2,550	31,1	2,711	26,7	2,816	23,9
1,4	0,49	5,037	3,471	31,1	3,690	26,7	3,833	23,9
1,6	0,64	6,579	4,533	31,1	4,820	26,7	5,007	23,9
1,8	0,81	8,327	5,737	31,1	6,100	26,7	6,337	23,9
2	1	10,280	7,083	31,1	7,531	26,7	7,823	23,9

Решение задачи вторым способом дает сходимость результатов при увеличении числа точек предельной поверхности сечения. При изменении толщины плиты не изменяется разница аналитического и численного решения. При решении задачи вторым способом во всех случаях образуется полный пластический механизм. Разница с аналитическим решением больше 23 %.

На рис. 29 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

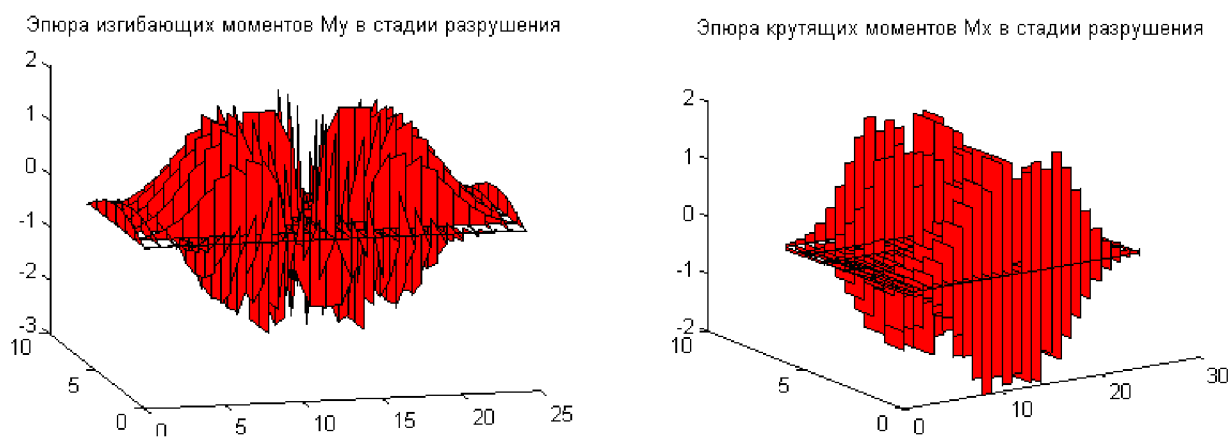


Рис. 29. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 30 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

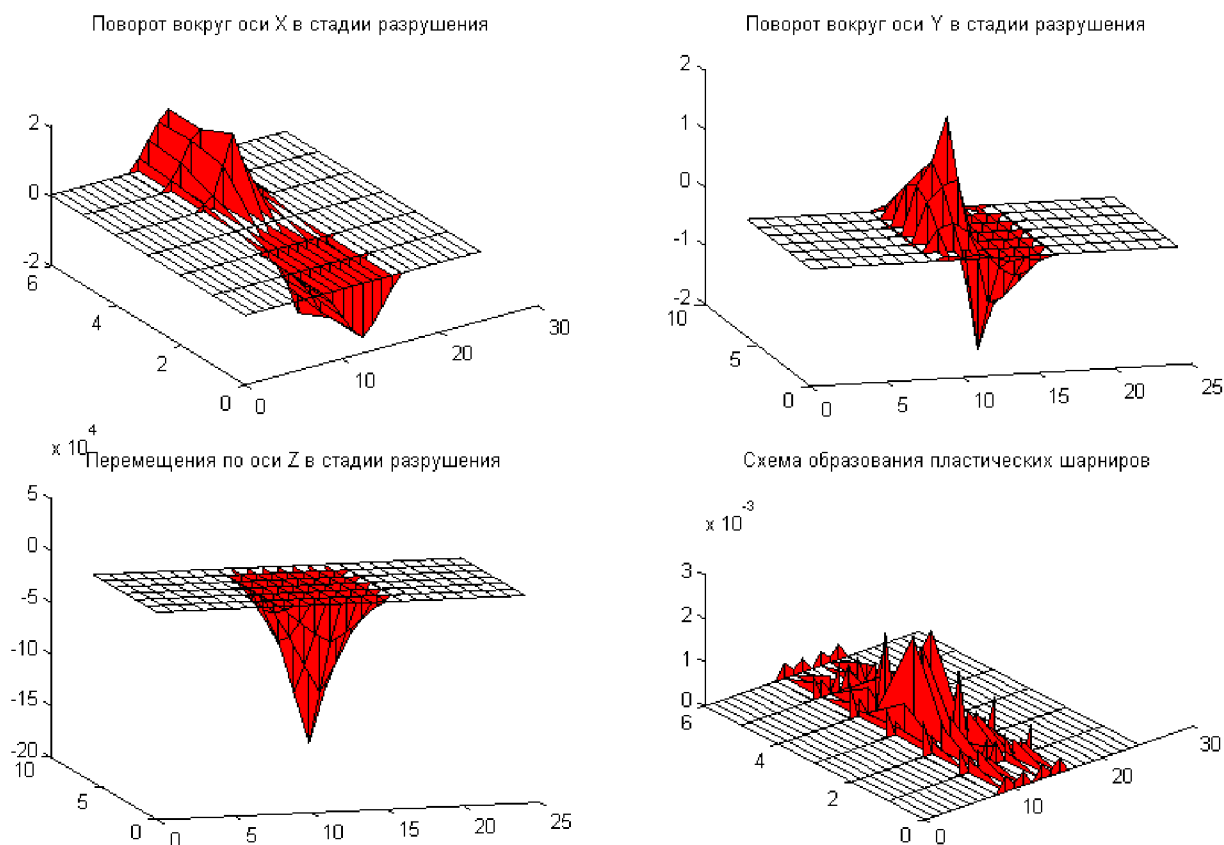


Рис. 30. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Кинематическое решение задачи дает частный пластический механизм разрушения плиты, что соответствует схеме разрушения аналитического решения [1].

Пример 4. Прямоугольная плита, размером 10 x 6 м с равномерно распределенной нагрузкой 1 кН/м². Остальные условия задачи соответствуют примеру 1. Задачу решим вторым способом.

В табл. 9 приведено решение задачи грузоподъемности при втором способе распределения касательных напряжений в сечении. $K_{гр}$ – аналитический коэффициент грузоподъемности при загрузении плиты сосредоточенной нагрузкой [1], имеет вид

$$K_{гр} = \frac{24M_{пр}}{b^2(\sqrt{\xi^2 + 3} - \xi)^2}, \quad (6)$$

где $\xi = b/a$ – отношение большей стороны плиты к меньшей.

Таблица 9

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,0011	0,0010	8,1	0,0011	2,7	0,0011	-0,5
0,2	0,01	0,0044	0,0040	8,1	0,0043	2,7	0,0044	-0,5
0,4	0,04	0,0175	0,0161	8,1	0,0171	2,7	0,0176	-0,5
0,6	0,09	0,0395	0,0363	8,1	0,0384	2,7	0,0397	-0,5
0,8	0,16	0,0702	0,0645	8,1	0,0683	2,7	0,0705	-0,5
1	0,25	0,1096	0,101	8,1	0,107	2,7	0,110	-0,5
1,2	0,36	0,1579	0,145	8,1	0,154	2,7	0,159	-0,5
1,4	0,49	0,2149	0,197	8,1	0,209	2,7	0,216	-0,5
1,6	0,64	0,2806	0,258	8,1	0,273	2,7	0,282	-0,5
1,8	0,81	0,3552	0,326	8,1	0,346	2,7	0,357	-0,5
2	1	0,4385	0,403	8,1	0,427	2,7	0,441	-0,5

Решение задачи дает сходимость результатов при увеличении числа точек предельной поверхности сечения. При изменении толщины плиты не изменяется разница аналитического и численного решения. При решении задачи во всех случаях образуется полный пластический механизм. Разница с аналитическим решением составляет 0,5 %.

На рис. 31 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в упругой стадии. Значения изгибающих моментов в балках, параллельных короткой стороне, преобладают над значениями моментов в балках, расположенных вдоль длинной стороны сетчатой пластины. На рис. 32 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

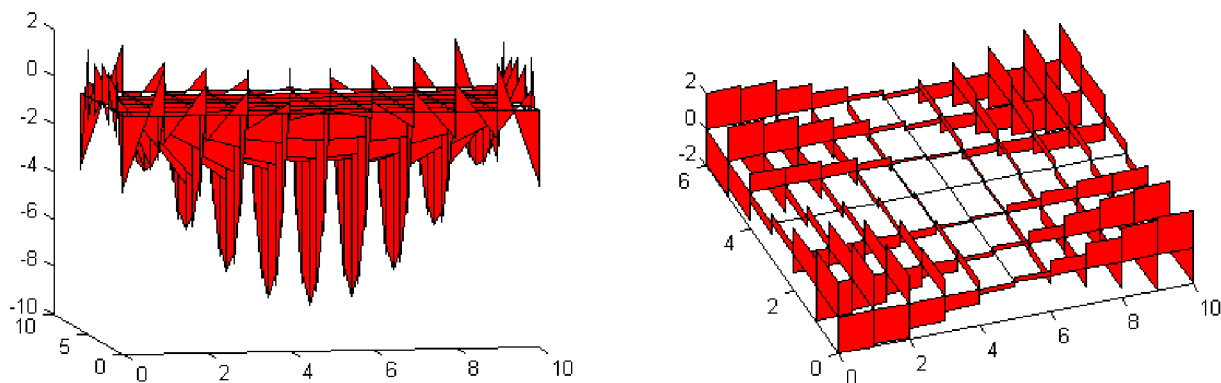


Рис. 31. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в упругой стадии

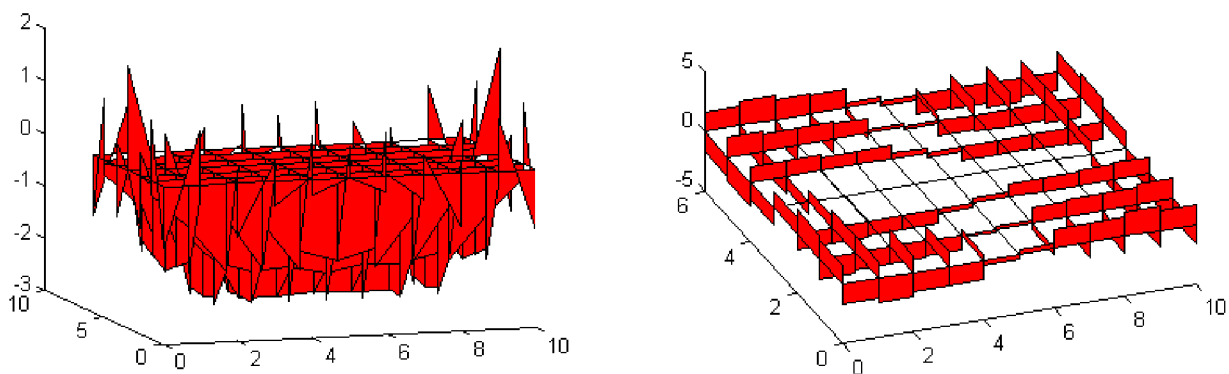


Рис. 32. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 32 видно, что значения моментов в стержнях вдоль длинной и короткой стороны выровнялись, при этом они достигают предельного значения.

На рис. 33 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

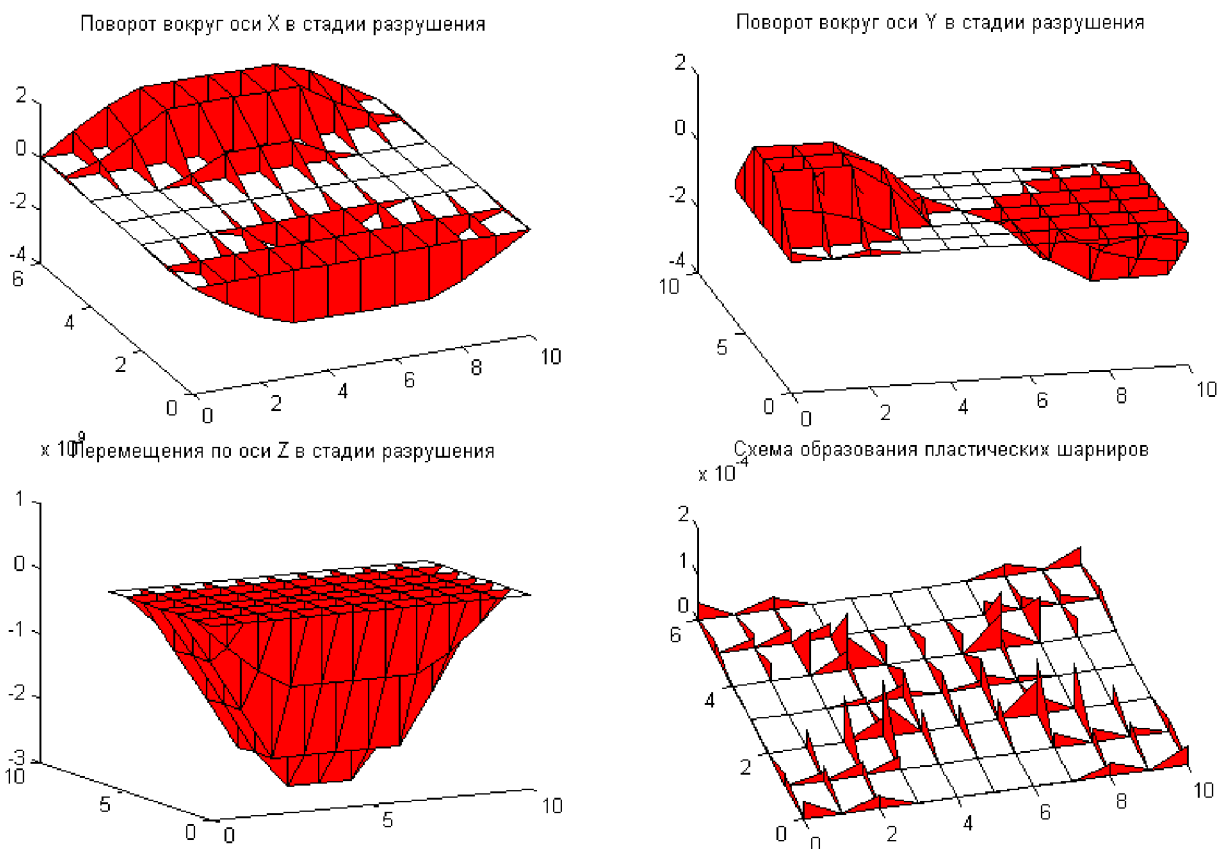


Рис. 33. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Кинематическое решение задачи дает полный пластический механизм разрушения плиты. Схема образования пластических шарниров на рис. 33 повторяет схему разрушения, полученную в аналитическом решении в виде конверта [1].

Пример 5. Квадратная плита размером 10 x 10 м с равномерно распределенной нагрузкой 1 кН/м² и отверстием размером 3 x 3 м в центре. Остальные условия задачи соответствуют примеру 1. Задачу решим вторым способом.

В табл. 10 приведено решение задачи грузоподъемности при втором способе распределения касательных напряжений в сечении. $K_{гр}$ – аналитический коэффициент грузоподъемности при загрузке плиты сосредоточенной нагрузкой [1], имеет вид

$$K_{гр} = \frac{24M_{пр}}{a^2(1 + 2\zeta)(1 - \zeta)}, \quad (7)$$

где $\zeta = c/a$ – отношение размера отверстия к размеру стороны плиты.

Таблица 10

Толщина плиты, м	$M_{пр}$	$K_{гр}$	4 точки	Δ , %	8 точек	Δ , %	12 точек	Δ , %
0,1	0,0025	0,00054	0,00045	15,3	0,00049	7,9	0,00054	0,1
0,2	0,01	0,00214	0,00182	15,3	0,00197	7,9	0,00214	0,1
0,4	0,04	0,00857	0,00726	15,3	0,00790	7,9	0,00856	0,1
0,6	0,09	0,0193	0,0163	15,3	0,0178	7,9	0,0193	0,1
0,8	0,16	0,0343	0,0290	15,3	0,0316	7,9	0,0342	0,1
1	0,25	0,054	0,045	15,3	0,049	7,9	0,054	0,1
1,2	0,36	0,077	0,065	15,3	0,071	7,9	0,077	0,1
1,4	0,49	0,105	0,089	15,3	0,097	7,9	0,105	0,1
1,6	0,64	0,137	0,116	15,3	0,126	7,9	0,137	0,1
1,8	0,81	0,174	0,147	15,3	0,160	7,9	0,173	0,1
2	1	0,214	0,182	15,3	0,197	7,9	0,214	0,1

Решение задачи дает сходимость результатов при увеличении числа точек предельной поверхности сечения. При изменении толщины плиты не изменяется разница аналитического и численного решения. При решении задачи во всех случаях образуется полный пластический механизм. Разница с аналитическим решением составляет 0,1 %.

На рис. 34 изображены эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения для решения задачи грузоподъемности в статической формулировке при толщине плиты 0,2 м и 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

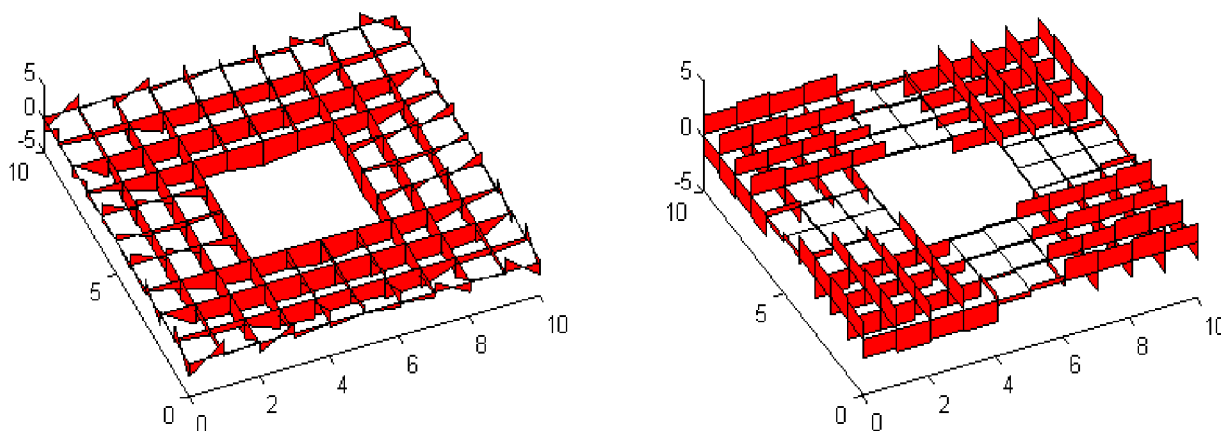


Рис. 34. Эпюры изгибающих моментов (слева) и крутящих моментов (справа) в стадии разрушения при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

На рис. 35 изображены результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения.

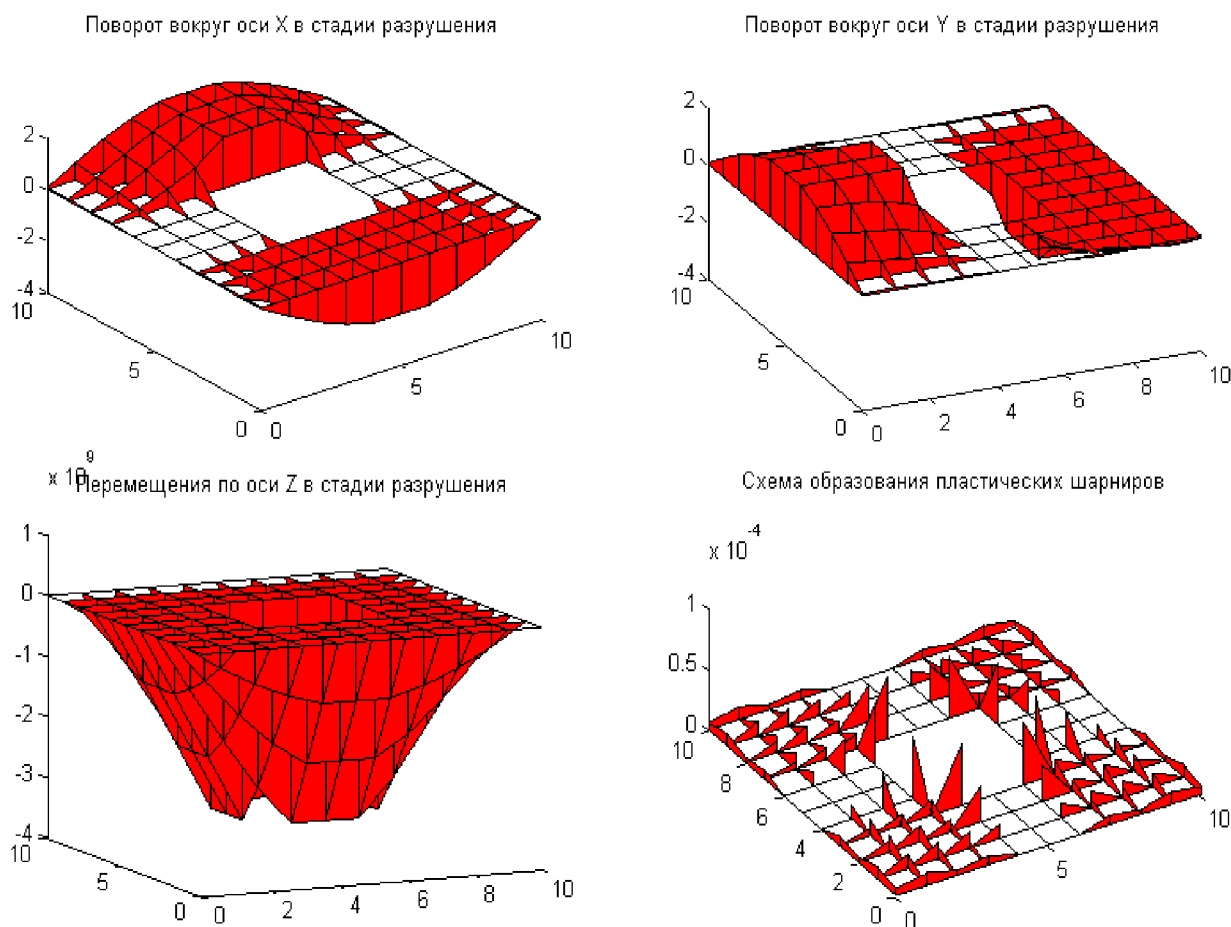


Рис. 35. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12-ти точках описания предельной поверхности сечения

Кинематическое решение задачи дает полный пластический механизм разрушения плиты. Разрушение пластины начинается с углов отверстия.

Выводы

Решения задач грузоподъемности сетчатых пластин методом линейного программирования показали близкие к аналитическим результатам результаты. Наиболее близкие к аналитическим результатам являются результаты решения задач с равномерно распределенной нагрузкой и распределением касательных напряжений параллельно контуру плиты. Задачи показали хорошую сходимость при увеличении числа аппроксимирующих прямых нелинейной поверхности текучести. При втором способе решения задачи разница с аналитическими решениями остается постоянной при изменении толщины сетчатых пластин. Результаты решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке при 12 точках описания предельной поверхности сечения дают схожие схемы образования пластических шарниров со

схемой образования трещин при разрушении плит. Данный метод позволяет решать задачи грузоподъемности для плит, имеющих любую геометрию и условия закрепления.

Библиографический список

1. Ржаницын, А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек/А.Р. Ржаницын. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 288 с.
2. Ефрюшин, С.В. Применение линейного программирования для построения гиперповерхности предельных усилий сечений жесткопластических стержней/ С.В. Ефрюшин, М.А. Викулов, С.В. Черкасов// Строительная механика и конструкции. – 2011. – Вып. №1(2). – С.5-11.
3. Ефрюшин, С.В. Исследование несущей способности стержневых систем, применяемых в мостостроении по методу предельного равновесия/ С.В. Ефрюшин, М.А. Викулов // Строительная механика и конструкции. – 2010. – Вып. №1. – С.7-15.

References

1. Rzhantsyn, A. R. Limiting balance of plates and covers. – M: Science. Main edition of physical and mathematical literature, 1983. – 288 p.
2. Efyushin, S.V. Application of linear programming for construction of hypersurface of rigid-plastic rod section limited efforts / S.V. Efyushin, M.A. Vikulov, S.V. Chercasov // Structural mechanics and structures. – 2010. – Issue. №1. – P. 7-15.
3. Efyushin, S.V. Research of rod systems bearing capacity applied in bridgeconstruction by method of limiting balance / S.V. Efyushin, M.A. Vikulov // Structural mechanics and structures. – 2010. – Issue. №1. – P. 7-1

Ключевые слова: грузоподъемность, сетчатая плита, пластический шарнир, линейное программирование.

Keywords: load-carrying capacity, mesh plate, plastic joint, linear programming.

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
Е.Н. Петреня
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
А.А. Петранин
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail: petranin.san@yandex.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Science, Associate Professor
of Department of Structural Mechanics
E.N. Petrenya
PhD of Tech. Science, Associate Professor
of Department of Structural Mechanics
A.A. Petranin
Voronezh, Russia, tel.: 8(473)2715230
e-mail: petranin.san@yandex.ru*

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО И ТОЛСТОСТЕННОГО СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Работа посвящена определению функций деформации и жесткостных характеристик для поперечного сечения тонкостенного и толстостенного стержней методом конечных элементов. Сечение стержня составляется из отдельных элементов прямоугольной формы, которые соединяются друг с другом в заданных узлах. Для отдельных простых состояний элемента сечения получены точные решения, учитывающие деформации деформации при сдвигах, кручении и наличии граничных сил и моментов. Для полного поперечного сечения сформированы системы разрешающих уравнений из уравнений равновесия узлов сечения и уравнений совместности перемещений элементов в узлах.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

DEFINITION OF CHARACTERISTICS OF THIN-WALLED AND THICK-WALLED ROD CROSS-SECTION BY FINITE ELEMENT METHOD

The work is devoted to definition of deformation functions and rigid characteristics for cross-section of thin - and thick-walled bar by finite - element method. The bar cross-section is composed of separate elements of rectangular form, which connected with each other at specified nodes. For some simple conditions of cross-section element there are obtained exact solutions which take into account the deformation of deformation while shifting, cabling, and presence of the boundary forces and moments. For complete cross-section there were formed the systems of resolving equations from equations of cross-section nodes equilibrium and the equations of compatibility of elements displacement in nodes.

В работах [1, 2] была сформирована система исходных дифференциальных уравнений стержня с учетом деформации при сдвигах и кручении, получены формулы, необходимые для определения функций деформации, и разработана методика поиска этих функций аналитическим методом для поперечных сечений произвольной формы с определением зависящих от них характеристик сечения, входящих в матрицу жесткости. Однако для тонкостенных стержней аналитический метод требует удержания большого количества членов ряда в аппроксимации функций деформации и приводит к плохо обусловленной системе уравнений относительно коэффициентов аппроксимации. Поэтому данная работа, являющаяся продолжением этой тематики, посвящена определению функций деформации и жесткостных характеристик для тонкостенного и толстостенного поперечного сечения методом конечных элементов, формирующим хорошо обусловленную систему разрешающих уравнений.

Будем полагать, что поперечное сечение стержня составлено из отдельных элементов прямоугольной формы, которые соединяются друг с другом в произвольных узлах подобно стержневым элементам в плоской рамной системе, образуя сечение открытого, закрытого или комбинированного профиля. При этом для отдельных прямоугольных элементов зададим локальные функции деформации, для которых будем искать точное решение на основе теории [1], что принципиально отличает его от приближенного решения по теории Власова для тонкостенных стержней открытого профиля [3], пренебрегающей сдвиговыми деформациями срединной поверхности элементов сечения. В теории Власова для тонкостенных стержней закрытого профиля [3], учитывающей сдвиговые деформации, приближенность решения обусловлена линейным законом распределения продольных перемещений в пределах элемента сечения и обеспечением совместности в соединительных узлах только для этих перемещений, что не позволяет применять ее для толстостенных поперечных сечений.

Для упрощения задачи общее напряженно-деформированное состояние (НДС) прямоугольного элемента стержня разобьем на отдельные элементарные состояния: растяжение-сжатие, изгибы в плоскостях xOz , xOy и кручение. В каждом состоянии учтем граничные силы на вертикальных кромках, являющиеся реакциями отброшенных частей полного поперечного сечения и внешними воздействиями для рассматриваемого прямоугольного сечения.

1. Отдельные напряженно-деформированные состояния стержня с прямоугольным поперечным сечением при учете граничных сил

Представим граничные силы g_x , действующие на боковой поверхности стержня, в виде суммы:

$$g_x = g'_x + g''_x, \quad (1)$$

где g'_x – граничные силы на вертикальных кромках, являющиеся внешними воздействиями для элемента сечения; g''_x – граничные силы, обусловленные появлением полуразностных касательных напряжений в соответствии с допущением 3* и формулой (56)*. Здесь и далее звездочками отмечены ссылки на допущения и формулы, приведенные в работе [1], двумя звездочками – в работе [2].

Тогда общие граничные условия (см. (55)*) с учетом (1)

$$(\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) \frac{dz}{ds} - (\tau'_{xz} - \tau''_{xz}) \frac{dy}{ds} = g'_x + g''_x, \quad y, z \in B \quad (2)$$

после группировки слагаемых принимают вид (см. (57)*, (56)*):

$$\begin{cases} \tau'_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau'_{xz} \frac{dy}{ds} = g'_x; \\ -\tau''_{xy} \frac{dz}{ds} + \tau''_{xz} \frac{dy}{ds} = g''_x, \end{cases} \quad y, z \in B. \quad (3)$$

Подставим в (3) соотношения дифференциалов на вертикальных кромках: $dz = 0$, $dy = -ds$ при $z = b/2$ для левой кромки и $dy = ds$ при $z = -b/2$ для правой кромки; на горизонтальных кромках: $dy = 0$, $dz = ds$ при $y = h/2$ для верхней кромки и $dz = -ds$ при $y = -h/2$ для нижней кромки. В результате получим выражения для полусуммарных касательных напряжений вблизи границ прямоугольного сечения и для граничных сил g''_x :

$$\begin{cases} \tau'_{xz} = g'_x, & z = b/2; \\ \tau'_{xz} = -g'_x, & z = -b/2; \\ \tau'_{xy} = 0, & y = \pm h/2; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} g_x'' = -\tau_{xz}'' = -h_y/2, & z = b/2; \\ g_x'' = \tau_{xz}'' = h_y/2, & z = -b/2; \\ g_x'' = -\tau_{xy}'' = -h_z/2, & y = h/2; \\ g_x'' = \tau_{xy}'' = h_z/2, & y = -h/2. \end{cases} \quad (5)$$

1.1. НДС растяжения - сжатия

В данном НДС напряжения, действующие в поперечном сечении, приводятся только к продольной силе N , а граничные силы g_x' на вертикальных кромках равномерно распределены по толщине h стержня и направлены в одну сторону (рис. 1):

$$g_x' = g_{xa}, \quad z = \pm b/2. \quad (1a)$$

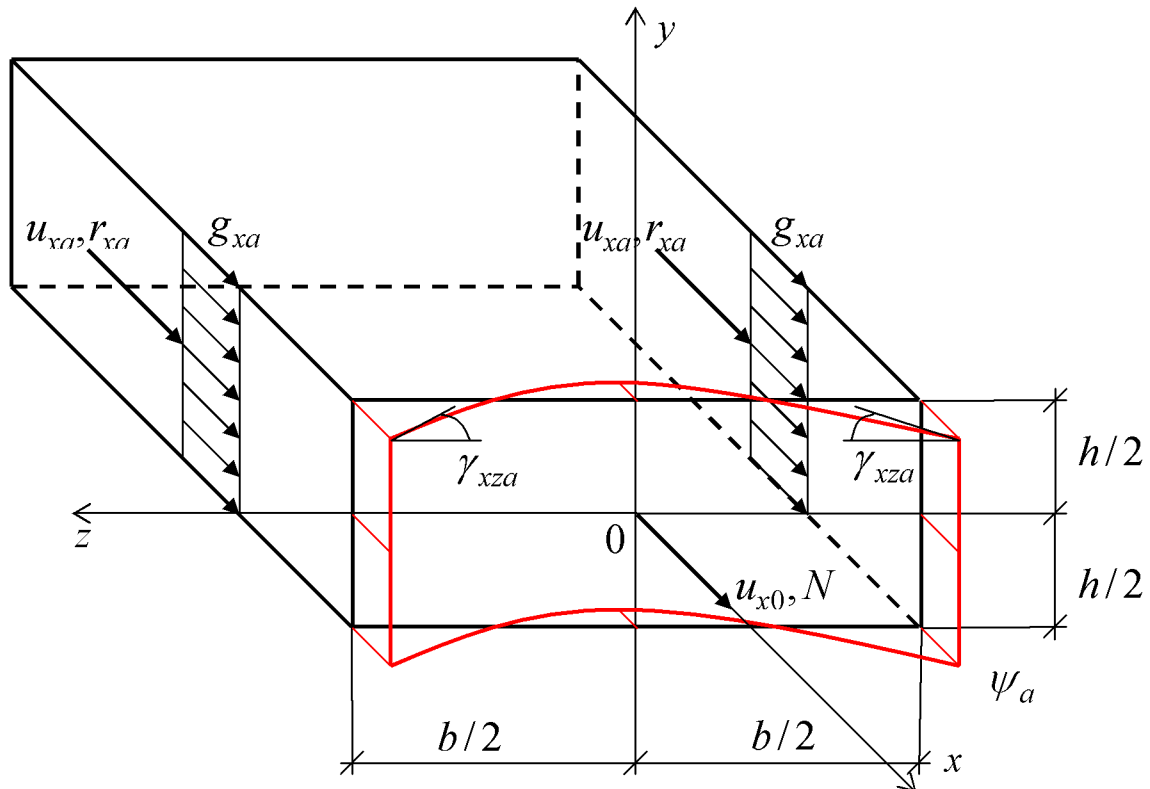


Рис. 1. Перемещения и усилия в НДС растяжения – сжатия

Здесь и далее в индексах базовых величин и функций, связанных с действием граничных сил, будем добавлять буквы «а», «b», «с» или «d» в зависимости от рассматриваемого НДС. Эти же буквы будем добавлять к номерам формул, имеющих аналоги для всех НДС, а для всех остальных формул сохраняем сквозную нумерацию, не зависящую от оговоренной выше.

Равнодействующие граничных сил на вертикальных кромках с учетом (1a):

$$r_{xa} = \int_{-h/2}^{h/2} g_x' dy = h g_{xa}. \quad (2a)$$

Деформации сдвига на вертикальных кромках с учетом (2a):

$$\gamma_{xza} = \frac{g_{xa}}{G} = \frac{r_{xa}}{hG}. \quad (3a)$$

Последующий ход решения задачи практически совпадает с уже описанным в работе [1] порядком решения для поперечного сечения произвольной формы, поэтому дальнейшее изложение для элементарных НДС сопровождается только краткими комментариями и ссылками на аналогичные формулы, приведенные в данной работе.

Функции перемещений в произвольной точке сечения с учетом (3а) (см. (22)*):

$$\begin{cases} u_x = u_{x0} + \psi_a \gamma_{xza} = u_{x0} + \frac{\psi_a}{hG} r_{xa} ; \\ u_y = u_z = 0 , \end{cases} \quad (4a)$$

где ψ_a – функция депланации, которую вызывают граничные силы g_{xa} . Перемещения поперечного сечения за счет депланации, график которых подобен данной функции, показаны на рис. 1 красным цветом.

Деформации в произвольной точке при $\psi_a^y = 0$ (см. (25)*):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_x^x = \varepsilon_{x0} + \frac{\psi_a}{hG} r_{xa}^x ; \\ \gamma_{xy} = u_x^y + u_y^x = 0 ; \\ \gamma_{xz} = u_x^z + u_z^x = \frac{\psi_a^z}{hG} r_{xa} . \end{cases} \quad (5a)$$

Геометрические уравнения (см. (31)*, (32)*):

$$[\varepsilon_{x0}] = [\partial^x] \cdot [u_{x0}] . \quad (6a)$$

Ненулевые напряжения в произвольной точке с учетом (5а) (см. (33)*):

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x = E(\varepsilon_{x0} + \frac{\psi_a}{hG} r_{xa}^x) ; \\ \tau'_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{\psi_a^z}{h} r_{xa} ; \\ \tau''_{xz} = \frac{h_y}{2} . \end{cases} \quad (7a)$$

Уравнения связи между внутренними усилиями и напряжениями (см. (35)*, (36)*):

$$\begin{cases} N = \int_F \sigma_x dF = E(F\varepsilon_{x0} + \frac{I_{\psi_a}}{hG} r_{xa}^x) ; \\ M_y = \int_F z \sigma_x dF = \frac{EI_z \psi_a}{hG} r_{xa}^x = 0 ; \\ Q'_z = \int_F \tau'_{xz} dF = \frac{I_{\psi_a^z}}{h} r_{xa} = 0 ; \\ Q''_z = \int_F \tau''_{xz} dF = \frac{1}{2} \int_F h_y dF = 0 , \end{cases} \quad (8a)$$

где интегралы от функций депланации имеют обозначение (см. (44)*)

$$\begin{cases} I_{\psi_a} = \int_F \psi_a dF = 0 ; \\ I_{z\psi_a} = \int_F z \psi_a dF = 0 ; \end{cases} \quad (9a)$$

$$\begin{cases} I_{\psi_a^z} = \int_F \psi_a^z dF = 0 \end{cases} \quad (10a)$$

и должны быть равны нулю для обеспечения независимости усилия N от граничных сил и отсутствия остальных усилий согласно (8а-2,3).

Физические уравнения из (8а-1) с учетом (9а-1) (см. (38)* – (40)*):

$$[N] = E[F] \cdot [\varepsilon_{x0}]. \quad (11a)$$

Подставив напряжения (7а-2) и граничные силы (1а) с учетом (2а) в (4-1,2), получим граничные условия для функции деформации (см. (58)*):

$$\begin{cases} \psi_a^z = 1, & z = b/2; \\ \psi_a^z = -1, & z = -b/2. \end{cases} \quad (12a)$$

Погонные нагрузки при $p_x^y = p_y = p_z^y = h_y^y = h_z = 0$ (см. (67)*, (68)*):

$$\begin{cases} q'_x = \int_F p_x dF; \\ m'_y = \int_F z p_x dF = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} q''_x = 0; \\ m''_y = \int_F h_y dF = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} q_z = \int_F p_z dF = 0; \\ m_x = \int_F y p_z dF = 0. \end{cases} \quad (13a)$$

Совокупности объемных сил и моментов (см. (72)*):

$$\begin{cases} p_x^* = p_x - \frac{1}{2} h_y^z = -\sigma_x^x - \tau'_{xz}; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2} h_y^x = -\tau'_{xz}. \end{cases} \quad (14a)$$

Уравнения равновесия элемента стержня (см. (73)*, (76)*):

$$[-\partial^x] [N] = [q'_x] + 2[r_{xa}]. \quad (15a)$$

Подстановка (7а) в (14а) (см. (81)*):

$$\begin{cases} p_x^* = -E\varepsilon_{x0}^x - \frac{E\psi_a}{hG} r_{xa}^{xx} - \frac{\psi_a^{zz}}{h} r_{xa}; \\ p_z^* = -\frac{\psi_a^z}{h} r_{xa}^x. \end{cases} \quad (16a)$$

Выражение деформации из (11а) (см. (82)*):

$$\varepsilon_{x0} = \frac{N}{EF}. \quad (17a)$$

Подстановка (17а) в (16а) (см. (83)*):

$$\begin{cases} p_x^* = -\frac{N^x}{F} - \frac{E\psi_a}{hG} r_{xa}^{xx} - \frac{\psi_a^{zz}}{h} r_{xa}; \\ p_z^* = -\frac{\psi_a^z}{h} r_{xa}^x. \end{cases} \quad (18a)$$

Из (15а) находим производную по координате x от усилия (см. (82)*):

$$N^x = -q'_x - 2r_{xa}. \quad (19a)$$

Подстановка (19а) в (18а) (см. (85)*):

$$\begin{cases} p_x^* = \frac{q'_x}{F} + \left(\frac{2}{F} - \frac{\psi_a^{zz}}{h}\right)r_{xa} - \frac{E\psi_a}{hG}r_{xa}^{xx}; \\ p_z^* = -\frac{\psi_a^z}{h}r_{xa}^x. \end{cases} \quad (20a)$$

Приравнивая выражение при r_{xa} нулю в (20а), получим дифференциальное уравнение для функции депланации ψ_a (см. (86)*, (88)*)

$$\psi_a^{zz} = \frac{2h}{F} = \frac{2}{b}. \quad (21a)$$

Задаемся функцией ψ_a в виде (см. (13)**, (14)**)

$$\psi_a = U_{a00} + z^2 U_{a02}. \quad (22a)$$

Подчиняя решение (22а) дифференциальному уравнению (21а), интегральным условиям (9а), (10а) и граничным условиям (12а), получим коэффициенты

$$U_{a00} = -\frac{b}{12}, \quad U_{a02} = \frac{1}{b}, \quad (23a)$$

с учетом которых выражение (22а) принимает вид

$$\psi_a = -\frac{b}{12}\left(1 - \frac{12z^2}{b^2}\right). \quad (24a)$$

Подстановка (21а) в (20а) (см. (90)*):

$$\begin{cases} p_x^* = p_x - \frac{1}{2}h_y^z = \frac{q'_x}{F} - \frac{E\psi_a}{hG}r_{xa}^{xx}; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2}h_y^x = -\frac{\psi_a^z}{h}r_{xa}^x. \end{cases} \quad (25a)$$

Допущение. Граничные силы, действующие на кромках элемента сечения, не вызывают объемных моментов. Из (25а-2) согласно допущению объемный момент для данного НДС равен

$$h_y = 0. \quad (26a)$$

Тогда из (25а) с учетом (26а) получим выражения для объемных сил:

$$\begin{cases} p_x = \frac{q'_x}{F} - \frac{E\psi_a}{hG}r_{xa}^{xx}; \\ p_z = -\frac{\psi_a^z}{h}r_{xa}^x. \end{cases} \quad (27a)$$

Подставляя (17а) в (7а) и учитывая (26а), найдем аналогичные выражения для напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{E\psi_a}{hG}r_{xa}^x; \\ \tau'_{xz} = \frac{\psi_a^z}{h}r_{xa}; \end{cases} \quad (28a)$$

$$\tau''_{xz} = 0. \quad (29a)$$

Задавая значение координаты $z = b/2$ для левой кромки в (4а-1) с учетом (24а), получим перемещение кромок:

$$u_{xa} = \left(u_{x0} + \frac{\psi_a}{hG} r_{xa} \right) \Big|_{z=b/2} = u_{x0} + \frac{b}{6hG} r_{xa}. \quad (30a)$$

Характеристики жесткости сечения, зависящие от функции деформации:

$$\begin{cases} I_{z\psi a}^z = \int_F z \psi_a^z dF = \frac{b^2 h}{6}; \\ I_{\psi aa} = \int_F \psi_a^2 dF = \frac{b^3 h}{180}. \end{cases} \quad (31a)$$

1.2. НДС изгиба в плоскости xOz

В данном НДС напряжения, действующие в поперечном сечении, приводятся к изгибающему моменту M_y и поперечной силе Q_z , а граничные силы g'_x на вертикальных кромках равномерно распределены по толщине h стержня и направлены в разные стороны (рис. 2):

$$\begin{cases} g'_x = g_{xb}, & z = b/2; \\ g'_x = -g_{xb}, & z = -b/2. \end{cases} \quad (1b)$$

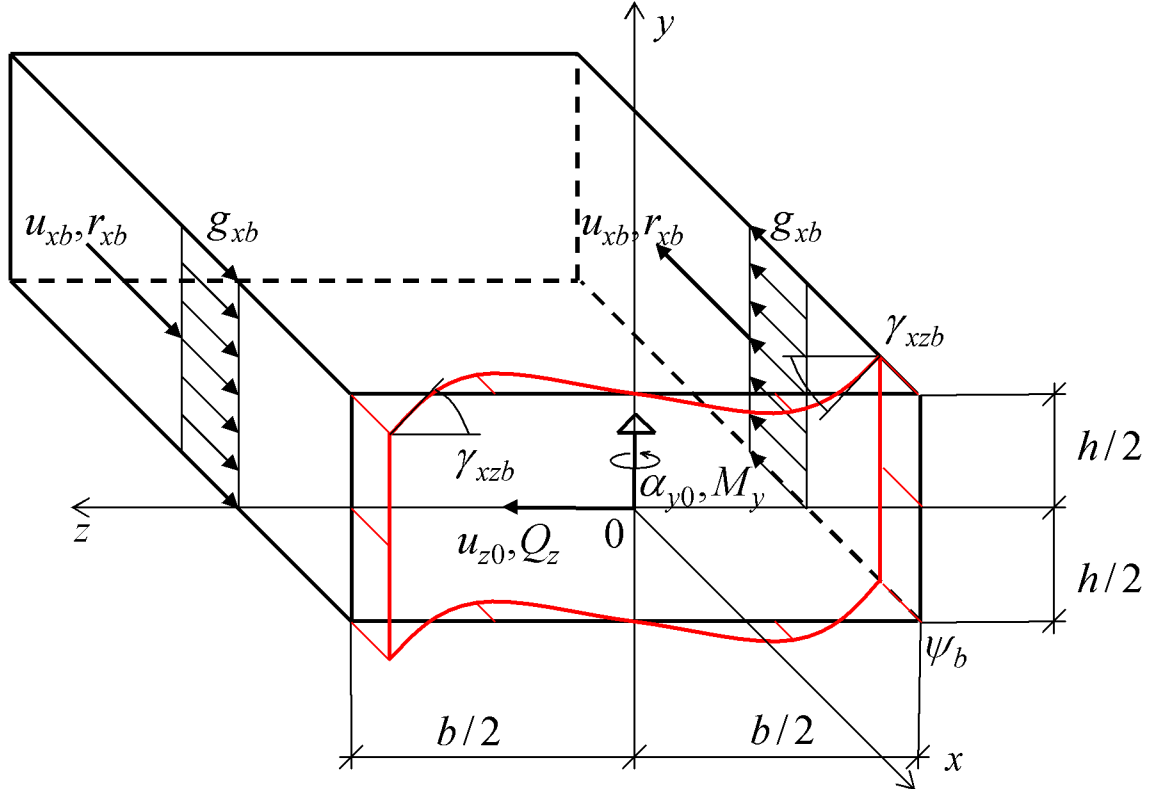


Рис. 2. Перемещения и усилия в НДС изгиба в плоскости xOz

Равнодействующие граничных сил на вертикальных краях с учетом (1b):

$$r_{xb} = \int_{-h/2}^{h/2} g'_x dy = hg_{xb}, \quad z = \pm b/2. \quad (2b)$$

Деформации сдвига на вертикальных краях с учетом (2b):

$$\gamma_{xzb} = \frac{g_{xb}}{G} = \frac{r_{xb}}{hG}. \quad (3b)$$

Функции перемещений в произвольной точке сечения с учетом (3b) (см. (22)*):

$$\begin{cases} u_x = z\alpha_{y0} + \psi_z \gamma_{xz0} + \psi_b \gamma_{xzb} = z\alpha_{y0} + \psi_z \gamma_{xz0} + \frac{\psi_b}{hG} r_{xb}; \\ u_y = 0; \\ u_z = u_{z0}, \end{cases} \quad (4b)$$

где ψ_b – функция депланации, которую вызывают граничные силы g_{xb} .

Перемещения поперечного сечения за счет депланации, график которых подобен данной функции, показаны на рис. 2 красным цветом.

Деформации в произвольной точке при $\psi_z^y = \psi_b^y = 0$ (см. (25)*):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_x^x = z\mu_{y0} + \psi_z \lambda_{xz0} + \frac{\psi_b}{hG} r_{xb}^x; \\ \gamma_{xy} = u_x^y + u_y^x = 0; \\ \gamma_{xz} = u_x^z + u_z^x = (1 + \psi_z^z) \gamma_{xz0} + \frac{\psi_b^z}{hG} r_{xb}. \end{cases} \quad (5b)$$

Геометрические уравнения (см. (31)*, (32)*):

$$\begin{bmatrix} \mu_{y0} \\ \gamma_{xz0} \\ \lambda_{xz0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^x & \\ 1 & \partial^x \\ \partial^x & \partial^{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{y0} \\ u_{z0} \end{bmatrix}. \quad (6b)$$

Ненулевые напряжения в произвольной точке с учетом (5b) (см. (33)*):

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x = E(z\mu_{y0} + \psi_z \lambda_{xz0} + \frac{\psi_b}{hG} r_{xb}^x); \\ \tau'_{xz} = G\gamma_{xz} = G(1 + \psi_z^z) \gamma_{xz0} + \frac{\psi_b^z}{h} r_{xb}; \\ \tau''_{xz} = \frac{h_y}{2}. \end{cases} \quad (7b)$$

Уравнения связи между внутренними усилиями и напряжениями (см. (35)*, (36)*):

$$\begin{cases} N = \int_F \sigma_x dF = EI_{\psi z} \lambda_{xz0} + \frac{EI_{\psi b}}{hG} r_{xb}^x = 0; \\ M_y = \int_F z \sigma_x dF = EJ_y \mu_{y0} + EI_{z\psi z} \lambda_{xz0} + \frac{EI_{z\psi b}}{hG} r_{xb}^x; \\ Q'_z = \int_F \tau'_{xz} dF = GF_z \gamma_{xz0} + \frac{I_{\psi b}^z}{h} r_{xb}^x; \\ L_{xz} = \int_F \psi_z \sigma_x dF = EI_{z\psi z} \mu_{y0} + EI_{\psi zz} \lambda_{xz0} + \frac{EI_{\psi zb}}{hG} r_{xb}^x; \\ Q''_z = \int_F \tau''_{xz} dF = \frac{1}{2} \int_F h_y dF, \end{cases} \quad (8b)$$

где интегралы от функций депланации имеют обозначение (см. (44)*):

$$\begin{cases} I_{\psi z} = \int_F \psi_z dF = 0; & I_{\psi b} = \int_F \psi_b dF = 0; \\ I_{z\psi z} = \int_F z \psi_z dF = 0; & I_{z\psi b} = \int_F z \psi_b dF = 0; \end{cases} \quad (9b)$$

$$\begin{cases} F_z = F + I_{\psi z}^z = F + \int_F \psi_z^z dF; & I_{\psi b}^z = \int_F \psi_b^z dF; \\ I_{\psi zz} = \int_F \psi_z^2 dF; & I_{\psi zb} = \int_F \psi_z \psi_b dF. \end{cases} \quad (10b)$$

Здесь равенство нулю интегралов в (9b) обеспечивает независимость изгибающего момента M_y от деформации депланации и граничных сил, а также отсутствие усилия N .

Физические уравнения из (8b-2,3,4) с учетом (9b) (см. (38)* – (40)*):

$$\begin{bmatrix} M_y \\ Q'_z \\ L_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EJ_y & & \\ & GF_z & \\ & & EI_{\psi zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{y0} \\ \gamma_{xz0} \\ \lambda_{xz0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{h} I_{\psi b}^z & \\ & \frac{E}{hG} I_{\psi zb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{xb}^x \\ r_{xb}^x \end{bmatrix}. \quad (11b)$$

Подставив напряжения (7b-2) и граничные силы (1b) с учетом (2b) в (4-1,2), получим граничные условия для функций депланации (см. (58)*):

$$\left\{ \psi_z^z = -1, \quad z = \pm b/2; \quad \left\{ \psi_b^z = 1, \quad z = \pm b/2. \right. \right. \quad (12b)$$

Погонные нагрузки при $p_x^y = p_y = p_z^y = h_y^y = h_z = 0$ (см. (67)*, (68)*):

$$\begin{cases} q'_x = \int_F p_x dF = 0; & \left\{ q''_x = 0; \right. & \left\{ q_z = \int_F p_z dF; \right. \\ m'_y = \int_F z p_x dF; & \left\{ m''_y = \int_F h_y dF; \right. & \left\{ m_x = \int_F y p_z dF = 0; \right. \end{cases} \quad (13b)$$

Совокупности объемных сил и моментов (см. (72)*):

$$\begin{cases} p_x^* = p_x - \frac{1}{2} h_y^z = -\sigma_x^x - \tau_{xz}'^z ; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2} h_y^x = -\tau_{xz}'^x . \end{cases} \quad (14b)$$

Уравнения равновесия элемента стержня (см. (73)*, (76)*) и связь между усилиями (см. (79)*):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\partial^x & 1 & -\partial^x \\ & -\partial^x & \partial^{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_y \\ Q_z' \\ L_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_y' + m_y'' \\ q_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [r_{xb}] ; \\ Q_z'' = -L_{xz}^x . \end{cases} \quad (15b)$$

Подстановка (7b) в (14b) (см. (81)*):

$$\begin{cases} p_x^* = -E(z\mu_{y0}^x + \psi_z \lambda_{xz0}^x + \frac{\psi_b}{hG} r_{xb}^{xx}) - G\psi_z^{zz} \gamma_{xz0} - \frac{\psi_b^{zz}}{h} r_{xb}^{zz} ; \\ p_z^* = -G(1 + \psi_z^z) \gamma_{xz0}^x - \frac{\psi_b^z}{h} r_{xb}^x . \end{cases} \quad (16b)$$

Выражение деформаций из (11b) (см. (82)*):

$$\begin{cases} \mu_{y0} = \frac{M_y}{EJ_y} ; \\ \gamma_{xz0} = \frac{Q_z'}{GF_z} - \frac{I_{\psi b}^z}{hGF_z} r_{xb} ; \\ \lambda_{xz0} = \frac{L_{xz}}{EI_{\psi zz}} - \frac{I_{\psi zb}}{hGI_{\psi zz}} r_{xb}^x . \end{cases} \quad (17b)$$

Подстановка (17b) в (16b) (см. (83)*):

$$\begin{cases} p_x^* = -\frac{zM_y^x}{J_y} - \frac{\psi_z L_{xz}^x}{I_{\psi zz}} + \frac{E}{hG} \left(\frac{\psi_z I_{\psi zb}}{I_{\psi zz}} - \psi_b \right) r_{xb}^{xx} - \\ - \frac{\psi_z^{zz} Q_z'}{F_z} + \frac{1}{h} \left(\frac{\psi_z^{zz} I_{\psi b}^z}{F_z} - \psi_b^{zz} \right) r_{xb} ; \\ p_z^* = -\frac{(1 + \psi_z^z) Q_z'^x}{F_z} + \frac{1}{h} \left[\frac{(1 + \psi_z^z) I_{\psi b}^z}{F_z} - \psi_b^z \right] r_{xb}^x . \end{cases} \quad (18b)$$

Из (15b) находим производные по координате x от усилий (см. (82)*):

$$\begin{cases} M_y^x = -m_y' - m_y'' + Q_z' + Q_z'' - b r_{xb} ; \\ Q_z'^x = -q_z - Q_z''^x ; \\ L_{xz}^x = -Q_z'' . \end{cases} \quad (19b)$$

Подстановка (19b) в (18b) (см. (85)*):

$$\left\{ \begin{aligned} p_x^* &= \frac{z(m'_y + m''_y)}{J_y} - \left(\frac{\psi_z^{zz}}{F_z} + \frac{z}{J_y} \right) Q'_z + \left(\frac{\psi_z}{I_{\psi zz}} - \frac{z}{J_y} \right) Q''_z + \\ &+ \left(\frac{\psi_z^{zz} I_{\psi b}^z}{h F_z} - \frac{\psi_b^{zz}}{h} + \frac{z b}{J_y} \right) r_{xb} + \frac{E}{h G} \left(\frac{\psi_z I_{\psi zb}}{I_{\psi zz}} - \psi_b \right) r_{xb}^{xx}; \\ p_z^* &= \frac{1 + \psi_z^z}{F_z} (q_z + Q_z^{n,x}) + \frac{1}{h} \left[\frac{(1 + \psi_z^z) I_{\psi b}^z}{F_z} - \psi_b^z \right] r_{xb}^x. \end{aligned} \right. \quad (20b)$$

Приравнявая выражения при Q'_z , r_{xb} нулю в (20b-1), получим дифференциальные уравнения для функций деформации ψ_z , ψ_b (см. (86)*, (88)*)

$$\psi_z^{zz} = -\frac{F_z}{J_y} z; \quad \psi_b^{zz} = -\frac{I_{\psi b}^z}{F_z} \psi_z^{zz} + \frac{b h}{J_y} z = \frac{-I_{\psi b}^z + b h}{J_y} z. \quad (21b)$$

Задаемся функциями ψ_z и ψ_b в виде (см. (13)**, (14)**)

$$\psi_z = z U_{z01} + z^3 U_{z03}; \quad \psi_b = z U_{b01} + z^3 U_{b03}. \quad (22b)$$

Подчиняя решения (22b) дифференциальным уравнениям (21b), интегральным условиям (9b), (10b) и граничным условиям (12b), получим коэффициенты

$$U_{z01} = -U_{b01} = \frac{1}{4}, \quad U_{z03} = -U_{b03} = -\frac{5}{3b^2}, \quad (23b)$$

с учетом которых выражения (22b) принимают вид

$$\psi_z = -\psi_b = \frac{z}{4} \left(1 - \frac{20z^2}{3b^2} \right). \quad (24b)$$

Подстановка (21b) в (20b) (см. (90)*):

$$\left\{ \begin{aligned} p_x^* &= p_x - \frac{1}{2} h_y^z = \frac{z(m'_y + m''_y)}{J_y} + \left(\frac{\psi_z}{I_{\psi zz}} - \frac{z}{J_y} \right) Q''_z; \\ p_z^* &= p_z + \frac{1}{2} h_y^x = \frac{1 + \psi_z^z}{F_z} (q_z + Q_z^{n,x}) + \frac{-I_{\psi z}^z + F \psi_z^z}{h F_z} r_{xb}^x. \end{aligned} \right. \quad (25b)$$

Из (25b-2) согласно допущению объемный момент для данного НДС равен

$$h_y = \frac{2(1 + \psi_z^z)}{F_z} Q''_z. \quad (26b)$$

Тогда из (25b) с учетом (26b) получим выражения для объемных сил:

$$\begin{cases} p_x = \frac{z}{J_y} m'_y + \frac{\psi_z}{I_{\psi zz}} Q_z''; \\ p_z = \frac{1 + \psi_z^z}{F_z} q_z + \frac{-I_{\psi z}^z + F \psi_z^z}{h F_z} r_{xb}^x. \end{cases} \quad (27b)$$

Подставляя (17b) в (7b) и учитывая (26b), найдем аналогичные выражения для напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{z}{J_y} M_y + \frac{\psi_z}{I_{\psi zz}} L_{xz}; \\ \tau'_{xz} = \frac{1 + \psi_z^z}{F_z} Q_z' - \frac{-I_{\psi z}^z + F \psi_z^z}{h F_z} r_{xb}^x; \end{cases} \quad (28b)$$

$$\tau''_{xz} = \frac{1 + \psi_z^z}{F_z} Q_z''. \quad (29b)$$

Задавая значение координаты $z = b/2$ для левой кромки в (4b-1) с учетом (24b), получим перемещение кромок:

$$u_{xb} = (z \alpha_{y0} + \psi_z \gamma_{xz0} + \frac{\psi_b}{hG} r_{xb}^x) \Big|_{z=b/2} = \frac{b}{2} \alpha_{y0} - \frac{b}{12} \gamma_{xz0} + \frac{b}{12hG} r_{xb}^x. \quad (30b)$$

Характеристики жесткости сечения, зависящие от функции деформации:

$$\begin{cases} I_{\psi z}^z = -I_{\psi b}^z = -\frac{bh}{6}; \\ F_z = F + I_{\psi z}^z = \frac{5bh}{6}; \\ I_{\psi zz} = -I_{\psi zb} = I_{\psi bb} = \frac{b^3 h}{1008}. \end{cases} \quad (31b)$$

Отметим, что формула в (31b) для определения приведенной площади при сдвиге F_z совпадает с известным выражением κF , в котором коэффициент формы κ для прямоугольного сечения равен $5/6$.

1.3. НДС изгиба в плоскости xOy

В данном НДС напряжения, действующие в поперечном сечении, приводятся к изгибающему моменту M_z и поперечной силе Q_y , а граничные силы g'_x на вертикальных кромках линейно распределены по толщине h стержня, равнодействующие моменты которых направлены в одну сторону (рис. 3):

$$g'_x = \frac{2y}{h} g_{xc}, \quad z = \pm b/2. \quad (1c)$$

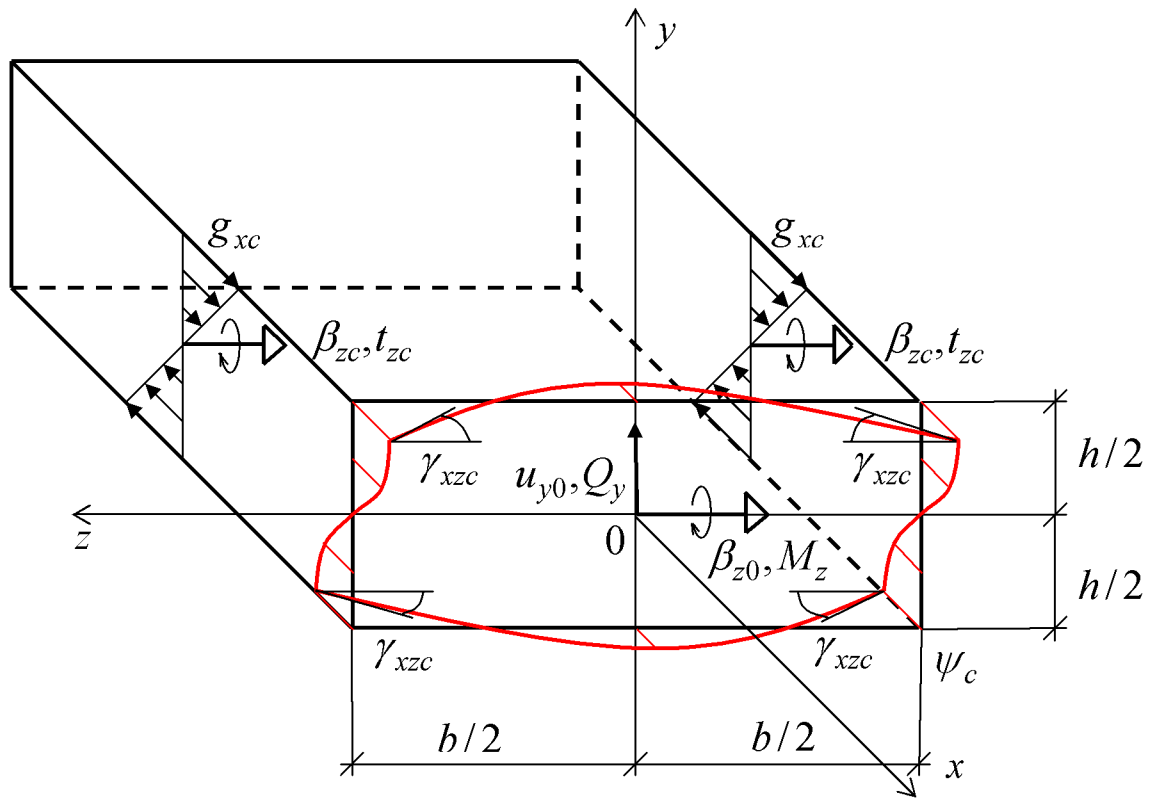


Рис. 3. Перемещения и усилия в НДС изгиба в плоскости xOy

Равнодействующие граничных сил на вертикальных кромках с учетом (1с):

$$t_{zc} = \int_{-h/2}^{h/2} y g'_x dy = \frac{h^2}{6} g_{xc}, \quad z = \pm b/2. \quad (2c)$$

Деформации сдвига на вертикальных кромках с учетом (2с):

$$\gamma_{xzc} = \frac{g_{xc}}{G} = \frac{6t_{zc}}{h^2 G}. \quad (3c)$$

Функции перемещений в произвольной точке сечения с учетом (3с) (см. (22)*):

$$\begin{cases} u_x = y\beta_{z0} + \psi_y \gamma_{xy0} + \psi_{zc} \gamma_{xzc} = y\beta_{z0} + \psi_y \gamma_{xy0} + \frac{6\psi_c}{h^2 G} t_{zc}; \\ u_y = u_{y0}; \\ u_z = 0. \end{cases} \quad (4c)$$

где ψ_c – функция депланации, которую вызывают граничные силы g_{xc} .

Перемещения поперечного сечения за счет депланации, график которых подобен данной функции, показаны на рис.3 красным цветом.

Деформации в произвольной точке (см. (25)*):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_x^x = y\mu_{z0} + \psi_y \lambda_{xy0} + \frac{6\psi_c}{h^2 G} t_{zc}^x; \\ \gamma_{xy} = u_x^y + u_y^x = (1 + \psi_y^y) \gamma_{xy0} + \frac{6\psi_c^y}{h^2 G} t_{zc}; \\ \gamma_{xz} = u_x^z + u_z^x = \psi_y^z \gamma_{xy0} + \frac{6\psi_c^z}{h^2 G} t_{zc}. \end{cases} \quad (5c)$$

Геометрические уравнения (см. (31)*, (32)*):

$$\begin{bmatrix} \mu_{z0} \\ \gamma_{xy0} \\ \lambda_{xy0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^x & \\ 1 & \partial^x \\ \partial^x & \partial^{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{z0} \\ u_{y0} \end{bmatrix}. \quad (6c)$$

Напряжения в произвольной точке с учетом (5c) (см. (33)*):

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x = E(y\mu_{z0} + \psi_y\lambda_{xy0} + \frac{6\psi_c}{h^2G}t_{zc}^x); \\ \tau'_{xy} = G\gamma_{xy} = G(1 + \psi_y^y)\gamma_{xy0} + \frac{6\psi_c^y}{h^2}t_{zc}; \\ \tau'_{xz} = G\gamma_{xz} = G\psi_y^z\gamma_{xy0} + \frac{6\psi_c^z}{h^2}t_{zc}; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau''_{xy} = \frac{1}{2}h_z; \\ \tau''_{xz} = \frac{1}{2}h_y. \end{cases} \quad (7c)$$

Уравнения связи между внутренними усилиями и напряжениями с учетом (7c) (см. (35)*, (36)*):

$$\begin{cases} N = \int_F \sigma_x dF = EI_{\psi_y}\lambda_{xy0} + \frac{6EI_{\psi_c}}{h^2G}t_{zc}^x = 0; \\ M_z = \int_F y\sigma_x dF = EJ_z\mu_{z0} + EI_{y\psi_y}\lambda_{xy0} + \frac{6EI_{y\psi_c}}{h^2G}t_{zc}^x; \\ Q'_y = \int_F \tau'_{xy} dF = GF_y\gamma_{xy0} + \frac{6I_{\psi_c}^y}{h^2}t_{zc}; \\ L_{xy} = \int_F \psi_y\sigma_x dF = EI_{y\psi_y}\mu_{z0} + EI_{\psi_yy}\lambda_{xy0} + \frac{6EI_{\psi_{yc}}}{h^2G}t_{zc}^x; \\ Q''_y = \int_F \tau''_{xy} dF = \frac{1}{2} \int_F h_z dF, \end{cases} \quad (8c)$$

где интегралы от функций деформации имеют обозначение (см. (44)*)

$$\begin{cases} I_{\psi_y} = \int_F \psi_y dF = 0; & I_{\psi_c} = \int_F \psi_c dF = 0; \\ I_{y\psi_y} = \int_F y\psi_y dF = 0; & I_{y\psi_c} = \int_F y\psi_c dF = 0; \end{cases} \quad (9c)$$

$$\begin{cases} F_y = F + I_{\psi_y}^y = F + \int_F \psi_y^y dF; & I_{\psi_c}^y = \int_F \psi_c^y dF; \\ I_{\psi_{yy}} = \int_F \psi_y^2 dF; & I_{\psi_{yc}} = \int_F \psi_y\psi_c dF. \end{cases} \quad (10c)$$

Здесь равенство нулю интегралов в (9c) обеспечивает независимость изгибающего момента M_z от деформации деформации и граничных сил, а также отсутствие продольного усилия N согласно (8c-1).

Физические уравнения из (8b-2,3,4) с учетом (9c) (см. (38)* – (40)*):

$$\begin{bmatrix} M_z \\ Q'_y \\ L_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EJ_z & & \\ & GF_y & \\ & & EI_{\psi_{yy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{z0} \\ \gamma_{xy0} \\ \lambda_{xy0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{h^2} I_{\psi_c}^y & & \\ & \frac{6E}{h^2G} I_{\psi_{yc}} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{zc} \\ t_{zc}^x \end{bmatrix}. \quad (11c)$$

Подставив напряжения (7с-2) и граничные силы (1с) с учетом (2с) в (4-1,2), получим граничные условия для функций деформации (см. (58)*):

$$\begin{cases} \psi_y^z = 0, & z = b/2; \\ \psi_y^z = 0, & z = -b/2; \\ \psi_y^y = -1, & y = \pm h/2; \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_c^z = \frac{2y}{h}, & z = b/2; \\ \psi_c^z = -\frac{2y}{h}, & z = -b/2; \\ \psi_c^y = 0, & y = \pm h/2. \end{cases} \quad (12c)$$

Погонные нагрузки (см. (67)*, (68)*):

$$\begin{cases} q'_x = \int_F p_x dF = 0; \\ m'_z = \int_F y p_x dF; \end{cases} \quad \begin{cases} q''_x = 0; \\ m''_z = \int_F h_z dF; \end{cases} \quad \begin{cases} q_y = \int_F p_y dF; \\ m_x = \int_F (-z p_y + y p_z) dF = 0. \end{cases} \quad (13c)$$

Совокупности объемных сил и моментов (см. (72)*):

$$\begin{cases} p_x^* = p_x - \frac{1}{2}(h_z^y + h_y^z) = -\sigma_x^x - \tau_{xy}^y - \tau_{xz}^z; \\ p_y^* = p_y + \frac{1}{2}h_z^x = -\tau_{xy}^x; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2}h_y^x = -\tau_{xz}^x. \end{cases} \quad (14c)$$

Уравнения равновесия элемента стержня (см. (73)*, (76)*) и связь между усилиями (см. (79)*):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\partial^x & 1 & -\partial^x \\ & -\partial^x & \partial^{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_z \\ Q'_y \\ L_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m'_z + m''_z \\ q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [t_{zc}]; \\ Q''_y = -L_{xy}^x. \end{cases} \quad (15c)$$

Подстановка (7с) в (14с) (см. (81)*)

$$\begin{cases} p_x^* = -E(y\mu_{z0}^x + \psi_y \lambda_{xy0}^x + \frac{6\psi_c}{h^2 G} t_{zc}^{xx}) - G\psi_y^\Delta \gamma_{xy0} - \frac{6\psi_c^\Delta}{h^2} t_{zc}; \\ p_y^* = -G(1 + \psi_y^y) \gamma_{xy0}^x - \frac{6\psi_c^y}{h^2} t_{zc}^x; \\ p_z^* = -G\psi_y^z \gamma_{xy0}^x - \frac{6\psi_c^z}{h^2} t_{zc}^x. \end{cases} \quad (16c)$$

Выражение деформаций из (11с) (см. (82)*):

$$\begin{cases} \mu_{z0} = \frac{M_z}{EJ_z}; \\ \gamma_{xy0} = \frac{Q'_y}{GF_y} - \frac{6I_{\psi_c}^y}{h^2 GF_y} t_{zc}; \\ \lambda_{xy0} = \frac{L_{xy}}{EI_{\psi_{yy}}} - \frac{6I_{\psi_{yc}}}{h^2 GI_{\psi_{yy}}} t_{zc}^x. \end{cases} \quad (17c)$$

Подстановка (17с) в (16с) (см. (83)*):

$$\left\{ \begin{aligned} p_x^* &= -\frac{yM_z^x}{J_z} - \frac{\psi_y L_{xy}^x}{I_{\psi yy}} + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_y I_{\psi yc}}{I_{\psi yy}} - \psi_c \right) t_{zc}^{xx} - \\ &\quad - \frac{\psi_y^\Delta Q_y'}{F_y} + \frac{6}{h^2} \left(\frac{\psi_y^\Delta I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^\Delta \right) t_{zc}; \\ p_y^* &= -\frac{(1+\psi_y^y) Q_y'^x}{F_y} + \frac{6}{h^2} \left[\frac{(1+\psi_y^y) I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^y \right] t_{zc}^x; \\ p_z^* &= -\frac{\psi_y^z Q_y'^x}{F_y} + \frac{6}{h^2} \left[\frac{\psi_y^z I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^z \right] t_{zc}^x. \end{aligned} \right. \quad (18c)$$

Из (15с) находим производные по координате x от усилий (см. (82)*):

$$\left\{ \begin{aligned} M_z^x &= -m_z' - m_z'' + Q_y' + Q_y'' - 2t_{zc}; \\ Q_y'^x &= -q_y - Q_y''^x; \\ L_{xy}^x &= -Q_y''. \end{aligned} \right. \quad (19c)$$

Подстановка (19с) в (18с) (см. (85)*):

$$\left\{ \begin{aligned} p_x^* &= \frac{y(m_z' + m_z'')}{J_z} - \left(\frac{\psi_y^\Delta}{F_y} + \frac{y}{J_z} \right) Q_y' + \left(\frac{\psi_y}{I_{\psi yy}} - \frac{y}{J_z} \right) Q_y'' + \\ &\quad + \frac{6}{h^2} \left(\frac{\psi_y^\Delta I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^\Delta + \frac{h^2 y}{3J_z} \right) t_{zc} + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_y I_{\psi yc}}{I_{\psi yy}} - \psi_c \right) t_{zc}^{xx}; \\ p_y^* &= \frac{1+\psi_y^y}{F_y} (q_y + Q_y''^x) + \frac{6}{h^2} \left[\frac{(1+\psi_y^y) I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^y \right] t_{zc}^x; \\ p_z^* &= \frac{\psi_y^z}{F_y} (q_y + Q_y''^x) + \frac{6}{h^2} \left[\frac{\psi_y^z I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^z \right] t_{zc}^x. \end{aligned} \right. \quad (20c)$$

Приравнявая выражения при Q_y' , t_{zc} нулю в (20с-1), получим дифференциальные уравнения для функций деформации ψ_y , ψ_c (см. (86)*, (88)*):

$$\psi_y^\Delta = -\frac{F_y}{J_z} y; \quad \psi_c^\Delta = -\frac{I_{\psi c}^y}{F_y} \psi_y^\Delta + \frac{h^2}{3J_z} y = \frac{-I_{\psi c}^y + \frac{h^2}{3}}{J_z} y. \quad (21c)$$

Задаемся функциями ψ_y и ψ_c в виде (см. (13)**, (14)**)

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_y &= yU_{y10} + y^3 U_{y30}; \\ \psi_c &= yU_{c10} + y^3 U_{c30} + \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \sin \frac{l\pi y}{h} \cosh \frac{l\pi z}{h} V_{cl}. \end{aligned} \right. \quad (22c)$$

Подчиняя решение (22с) дифференциальным уравнениям (21с), интегральным условиям (9с), (10с) и граничным условиям (12с), получим коэффициенты

$$\begin{cases} U_{y10} = \frac{1}{4}; & U_{y30} = -\frac{5}{3h^2}; \\ U_{c10} = -\frac{h}{2b}; & U_{c30} = \frac{2}{3bh}; & V_{cl} = \frac{(-1)^{(l-1)/2} 8h}{l^3 \pi^3 \sinh \frac{l\pi b}{2h}}, \end{cases} \quad (23с)$$

с учетом которых выражения (22с) принимают вид

$$\begin{cases} \psi_y = \frac{y}{4} \left(1 - \frac{20y^2}{3h^2}\right); \\ \psi_c = -\frac{hy}{2b} \left(1 - \frac{4y^2}{3h^2}\right) + \frac{8h}{\pi^3} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)/2}}{l^3 \sinh \frac{l\pi b}{2h}} \sin \frac{l\pi y}{h} \cosh \frac{l\pi z}{h}. \end{cases} \quad (24с)$$

Подстановка (21с) в (20с) с учетом следствия $\psi_y^z = 0$ из (24с) (см. (90)*):

$$\begin{cases} p_x^* = p_x - \frac{1}{2}(h_z^y + h_y^z) = \frac{y(m'_z + m''_z)}{J_z} + \left(\frac{\psi_y}{I_{\psi yy}} - \frac{y}{J_z}\right) Q_y'' + \\ \quad + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_y I_{\psi yc}}{I_{\psi yy}} - \psi_c\right) t_{zc}^{xx}; \\ p_y^* = p_y + \frac{1}{2} h_z^x = \frac{1 + \psi_y^y}{F_y} (q_y + Q_y^{''x}) + \frac{6}{h^2} \left[\frac{(1 + \psi_y^y) I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^y\right] t_{zc}^x; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2} h_y^x = -\frac{6}{h^2} \psi_c^z t_{zc}^x. \end{cases} \quad (25с)$$

Из (25с-2,3) согласно допущению объемные моменты для данного НДС равны:

$$\begin{cases} h_y = 0; \\ h_z = \frac{2(1 + \psi_y^y)}{F_y} Q_y''. \end{cases} \quad (26с)$$

Тогда из (25с) с учетом (26с) получим выражения для объемных сил:

$$\begin{cases} p_x = \frac{y}{J_z} m'_z + \frac{\psi_y}{I_{\psi yy}} Q_y'' + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_y I_{\psi yc}}{I_{\psi yy}} - \psi_c\right) t_{zc}^{xx}; \\ p_y = \frac{1 + \psi_y^y}{F_y} q_y + \frac{6}{h^2} \left[\frac{(1 + \psi_y^y) I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^y\right] t_{zc}^x; \\ p_z = -\frac{6\psi_c^z}{h^2} t_{zc}^x. \end{cases} \quad (27с)$$

Подставляя (17с) в (7с) и учитывая (26с), найдем аналогичные выражения для напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{y}{J_z} M_z + \frac{\psi_y}{I_{\psi yy}} L_{xy} - \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_y I_{\psi yc}}{I_{\psi yy}} - \psi_c \right) t_{zc}^x ; \\ \tau'_{xy} = \frac{1 + \psi_y^y}{F_y} Q'_y - \frac{6}{h^2} \left[\frac{(1 + \psi_y^y) I_{\psi c}^y}{F_y} - \psi_c^y \right] t_{zc} ; \\ \tau'_{xz} = \frac{6\psi_c^z}{h^2} t_{zc} ; \end{cases} \quad (28с)$$

$$\begin{cases} \tau''_{xy} = \frac{1 + \psi_y^y}{F_y} Q''_y ; \\ \tau''_{xz} = 0 . \end{cases} \quad (29с)$$

Вычислим угловое перемещение кромок β_{zc} (см. рис.3) через линейное перемещение u_{xc} , задавая значение координат $y = h/2$, $z = b/2$ в (4с-1) и учитывая (24с):

$$\begin{aligned} \beta_{zc} &= \frac{2}{h} u_{xc} = \frac{2}{h} \left(y\beta_{z0} + \psi_y \gamma_{xy0} + \frac{6\psi_c}{h^2 G} t_{zc} \right) \Big|_{\substack{y=h/2 \\ z=b/2}} = \\ &= \beta_{z0} - \frac{1}{6} \gamma_{xy0} + \frac{6}{h^2 G} \left(-\frac{h}{3b} + C'_3 \right) t_{zc} . \end{aligned} \quad (30с)$$

Характеристики жесткости сечения, зависящие от функции деформации:

$$\begin{cases} I_{\psi y}^y = -\frac{bh}{6} ; & I_{\psi c}^y = 0 ; & \begin{cases} I_{\psi yc} = 0 ; \\ I_{\psi cc} = -\frac{17h^5}{1260b} - \frac{bh^3}{60} + 2h^4 C'_7 + bh^3 C''_6 . \end{cases} \\ I_{\psi yy} = \frac{bh^3}{1008} . \end{cases} \quad (31с)$$

В формулах (30с), (31с) введены обозначения:

$$C'_n = \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{16}{l^n \pi^n} \coth \frac{l\pi b}{2h} ; \quad C''_n = \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{16}{l^n \pi^n} \coth^2 \frac{l\pi b}{2h} . \quad (32с)$$

1.4. НДС кручения

В данном НДС напряжения, действующие в поперечном сечении, приводятся к крутящему моменту M_x , а граничные силы g'_x на вертикальных кромках линейно распределены по толщине h стержня, равнодействующие моменты которых направлены в разные стороны (рис. 4):

$$\begin{cases} g'_x = \frac{2y}{h} g_{xd} , & z = b/2 ; \\ g'_x = -\frac{2y}{h} g_{xd} , & z = -b/2 . \end{cases} \quad (1d)$$

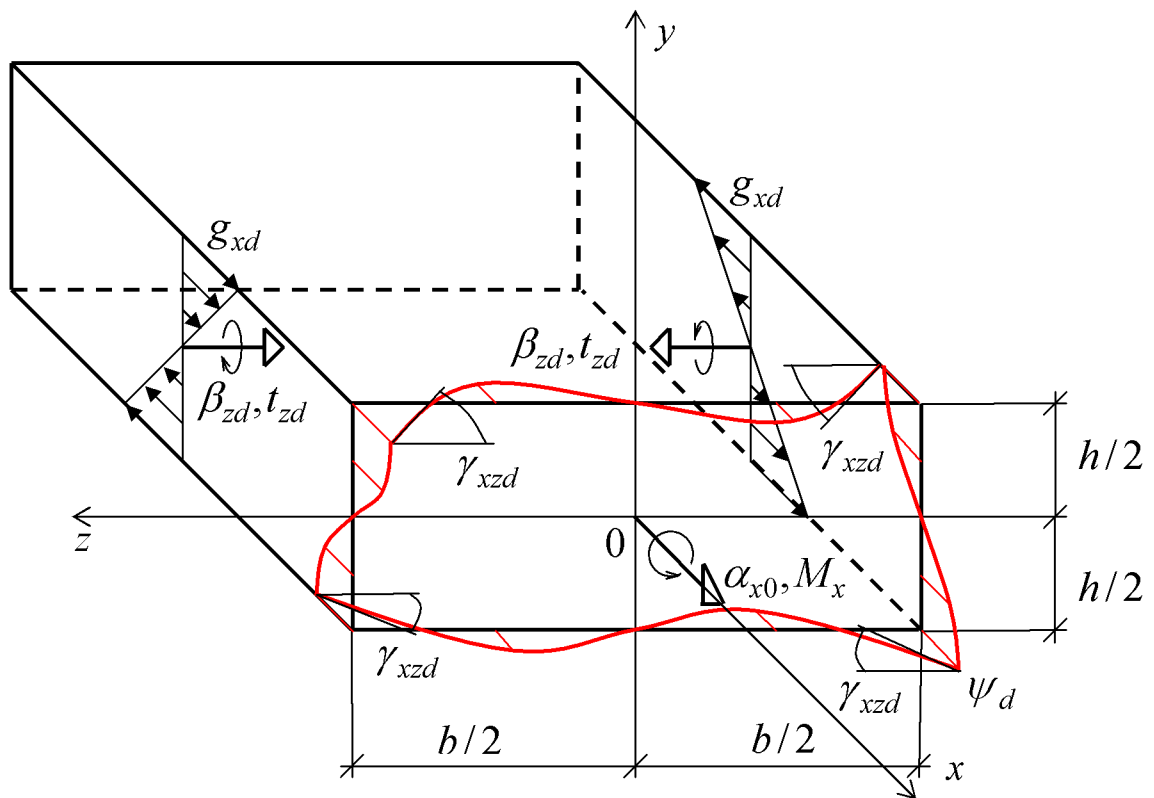


Рис. 4. Перемещения и усилия в НДС кручения

Равнодействующие граничных сил на вертикальных краях с учетом (1d):

$$t_{zd} = \int_{-h/2}^{h/2} y g'_x dy = \frac{h^2}{6} g_{xd}, \quad z = \pm b/2. \quad (2d)$$

Деформации сдвига на вертикальных краях с учетом (2d):

$$\gamma_{xzd} = \frac{g_{xd}}{G} = \frac{6t_{zd}}{h^2 G}. \quad (3d)$$

Функции перемещений в произвольной точке сечения с учетом (3d) (см. (22)*):

$$\begin{cases} u_x = \psi_x \mu_{x0} + \psi_{zd} \gamma_{xzd} = \psi_x \mu_{x0} + \frac{6\psi_d}{h^2 G} t_{zd}; \\ u_y = -z \alpha_{x0}; \\ u_z = y \alpha_{x0}, \end{cases} \quad (4d)$$

где ψ_d – функция депланации, которую вызывают граничные силы g_{xd} . Перемещения поперечного сечения за счет депланации, график которых подобен данной функции, показаны на рис. 4 красным цветом.

Деформации в произвольной точке (см. (25)*):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u'_x = \psi'_x \mu_{x0} + \frac{6\psi'_d}{h^2 G} t_{zd}; \\ \gamma_{xy} = u'_y + u'_x = (\psi'_y - z) \mu_{x0} + \frac{6\psi'_d}{h^2 G} t_{zd}; \\ \gamma_{xz} = u'_z + u'_x = (\psi'_z + y) \mu_{x0} + \frac{6\psi'_d}{h^2 G} t_{zd}. \end{cases} \quad (5d)$$

Геометрические уравнения (см. (31)*, (32)*):

$$\begin{bmatrix} \mu_{x0} \\ \kappa_{x0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^x \\ \partial^{xx} \end{bmatrix} \cdot [\alpha_{x0}] . \quad (6d)$$

Напряжения в произвольной точке с учетом (5d) (см. (33)*):

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x = E(\psi_x \kappa_{x0} + \frac{6\psi_d}{h^2 G} t_{zd}^x); \\ \tau'_{xy} = G\gamma_{xy} = G(\psi_x^y - z)\mu_{x0} + \frac{6\psi_d^y}{h^2} t_{zd}; \\ \tau'_{xz} = G\gamma_{xz} = G(\psi_x^z + y)\mu_{x0} + \frac{6\psi_d^z}{h^2} t_{zd}; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau''_{xy} = \frac{1}{2} h_z; \\ \tau''_{xz} = \frac{1}{2} h_y. \end{cases} \quad (7d)$$

Уравнения связи между внутренними усилиями и напряжениями (см. (35)*, (36)*):

$$\begin{cases} N = \int_F \sigma_x dF = EI_{\psi_x} \kappa_{x0} + \frac{6EI_{\psi_d}}{h^2 G} t_{zd}^x = 0; \\ M_z = \int_F y \sigma_x dF = EI_{y\psi_x} \kappa_{x0} + \frac{6EI_{y\psi_d}}{h^2 G} t_{zd}^x = 0; \\ M_y = \int_F z \sigma_x dF = EI_{z\psi_x} \kappa_{x0} + \frac{6EI_{z\psi_d}}{h^2 G} t_{zd}^x = 0; \\ Q'_y = \int_F \tau'_{xy} dF = GI_{\psi_x^y} \mu_{x0} + \frac{6I_{\psi_d^y}}{h^2} t_{zd} = 0; \\ Q'_z = \int_F \tau'_{xz} dF = GI_{\psi_x^z} \mu_{x0} + \frac{6I_{\psi_d^z}}{h^2} t_{zd} = 0; \\ M'_x = \int_F (-z\tau'_{xy} + y\tau'_{xz}) dF = GJ_k \mu_{x0} + J_t t_{zd}; \\ K_x = \int_F \psi_x \sigma_x dF = EI_{\psi_{xx}} \kappa_{x0} + \frac{6EI_{\psi_{xd}}}{h^2 G} t_{zd}^x; \\ Q''_y = \frac{1}{2} \int_F h_z dF = 0; \\ Q''_z = \frac{1}{2} \int_F h_y dF = 0; \\ M''_x = \frac{1}{2} \int_F (-zh_z + yh_y) dF, \end{cases} \quad (8d)$$

где интегралы от функций деформации имеют обозначение (см. (44)*):

$$\begin{cases} I_{\psi_x} = \int_F \psi_x dF = 0; \\ I_{y\psi_x} = \int_F y\psi_x dF = 0; \\ I_{z\psi_x} = \int_F z\psi_x dF = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} I_{\psi_d} = \int_F \psi_d dF = 0; \\ I_{y\psi_d} = \int_F y\psi_d dF = 0; \\ I_{z\psi_d} = \int_F z\psi_d dF = 0; \end{cases} \quad (9d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\psi_x^y}^y = \int_F \psi_x^y dF = 0; \\ I_{\psi_x^z}^z = \int_F \psi_x^z dF = 0; \\ J_k = J_x - I_{z\psi_x}^y + I_{y\psi_x}^z; \\ I_{\psi_{xx}} = \int_F \psi_x^2 dF; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} I_{\psi_d}^y = \int_F \psi_d^y dF = 0; \\ I_{\psi_d}^z = \int_F \psi_d^z dF = 0; \\ J_t = \frac{6}{h^2} (-I_{z\psi_d}^y + I_{y\psi_d}^z); \\ I_{\psi_{xd}} = \int_F \psi_x \psi_d dF. \end{array} \right. \quad (10d)$$

Здесь равенство нулю интегралов в (9d), (10d) обеспечивает отсутствие всех усилий кроме крутящего момента M_x и бимоента K_x согласно (8d).

Физические уравнения из (8d) с учетом (9d) (см. (38)* – (40)*):

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ K_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ_k & \\ & EI_{\psi_{xx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{x0} \\ \kappa_{x0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_t & \\ & \frac{6E}{h^2G} I_{\psi_{xd}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{zd} \\ t_{zd}^x \end{bmatrix}. \quad (11d)$$

Подставив напряжения (7d-2) и граничные силы (1d) с учетом (2d) в (4-1,2), получим граничные условия для функций деформации (см. (58)*):

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_x^z = -y, \quad z = \pm b/2; \\ \psi_x^y = z, \quad y = \pm h/2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \psi_{zd}^z = \frac{2y}{h}, \quad z = \pm b/2; \\ \psi_{zd}^y = 0, \quad y = \pm h/2. \end{array} \right. \quad (12d)$$

Погонные нагрузки (см. (67)*, (68)*):

$$\left\{ \begin{array}{l} q'_x = \int_F p_x dF = 0; \\ m'_z = \int_F y p_x dF = 0; \\ m'_y = \int_F z p_x dF = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} q''_x = 0; \\ m''_z = \int_F h_z dF = 0; \\ m''_y = \int_F h_y dF = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} q_y = \int_F p_y dF = 0; \\ q_z = \int_F p_z dF = 0; \\ m_x = \int_F (-z p_y + y p_z) dF. \end{array} \right. \quad (13d)$$

Совокупности объемных сил и моментов (см. (72)*):

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x^* = p_x - \frac{1}{2}(h_z^y + h_y^z) = -\sigma_x^x - \tau'_{xy} - \tau'_{xz}; \\ p_y^* = p_y + \frac{1}{2}h_z^x = -\tau'_{xy}; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2}h_y^x = -\tau'_{xz}. \end{array} \right. \quad (14d)$$

Уравнения равновесия элемента стержня (см. (73)*, (76)*) и связь между усилиями (см. (79)*):

$$\left\{ \begin{array}{l} [-\partial^x \quad \partial^{xx}] \cdot \begin{bmatrix} M'_x \\ K_x \end{bmatrix} = [m_x]; \\ M''_x = -K_x^x. \end{array} \right. \quad (15d)$$

Подстановка (7d) в (14d) (см. (81)*):

$$\begin{cases} p_x^* = -E(\psi_x K_{x0}^x + \frac{6\psi_d}{h^2 G} t_{zd}^{xx}) - G\psi_x^\Delta \mu_{x0} - \frac{6\psi_d^\Delta}{h^2} t_{zd}^x; \\ p_y^* = -G(\psi_x^y - z)\mu_{x0}^x - \frac{6\psi_d^y}{h^2} t_{zd}^x; \\ p_z^* = -G(\psi_x^z + y)\mu_{x0}^x - \frac{6\psi_d^z}{h^2} t_{zd}^x. \end{cases} \quad (16d)$$

Выражение деформаций из (11d) (см. (82)*):

$$\begin{cases} \mu_{x0} = \frac{M'_x}{GJ_k} - \frac{J_t}{GJ_k} t_{zd}; \\ K_{x0} = \frac{K_x}{EI_{\psi xx}} - \frac{6I_{\psi xd}}{h^2 GI_{\psi xx}} t_{zd}^x. \end{cases} \quad (17d)$$

Подстановка (17d) в (16d) (см. (83)*):

$$\begin{cases} p_x^* = -\frac{\psi_x K_x^x}{I_{\psi xx}} + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_x I_{\psi xd}}{I_{\psi xx}} - \psi_d \right) t_{zd}^{xx} - \\ - \frac{\psi_x^\Delta M'_x}{J_k} + \left(\frac{\psi_x^\Delta J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^\Delta}{h^2} \right) t_{zd}^x; \\ p_y^* = -\frac{(\psi_x^y - z)M_x'^x}{J_k} + \left[\frac{(\psi_x^y - z)J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^y}{h^2} \right] t_{zd}^x; \\ p_z^* = -\frac{(\psi_x^z + y)M_x'^x}{J_k} + \left[\frac{(\psi_x^z + y)J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^z}{h^2} \right] t_{zd}^x. \end{cases} \quad (18d)$$

Из (15d) находим производные по координате x от усилий (см. (82)*):

$$\begin{cases} M_x'^x = -m_x - M_x''^x; \\ K_x^x = -M_x''^x. \end{cases} \quad (19d)$$

Подстановка (19d) в (18d) (см. (85)*):

$$\begin{cases} p_x^* = \frac{\psi_x M_x''^x}{I_{\psi xx}} + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_x I_{\psi xd}}{I_{\psi xx}} - \psi_d \right) t_{zd}^{xx} - \\ - \frac{\psi_x^\Delta M_x'}{J_k} + \left(\frac{\psi_x^\Delta J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^\Delta}{h^2} \right) t_{zd}^x; \\ p_y^* = \frac{\psi_x^y - z}{J_k} (m_x + M_x''^x) + \left[\frac{(\psi_x^y - z)J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^y}{h^2} \right] t_{zd}^x; \\ p_z^* = \frac{\psi_x^z + y}{J_k} (m_x + M_x''^x) + \left[\frac{(\psi_x^z + y)J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^z}{h^2} \right] t_{zd}^x. \end{cases} \quad (20d)$$

Приравнивая выражения при M'_x , t_{zd} нулю в (20d-1), получим дифференциальные уравнения для функций деформации ψ_x , ψ_d (см. (86)*, (88)*):

$$\psi_x^\Delta = 0; \quad \psi_{zd}^\Delta = 0. \quad (21d)$$

Задаемся функциями ψ_x и ψ_d в виде (см. (13)**, (14)**)

$$\begin{cases} \psi_x = yzU_{x11} + \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \sin \frac{l\pi y}{h} \sinh \frac{l\pi z}{h} V_{xl}; \\ \psi_d = yzU_{d11} + \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \sin \frac{l\pi y}{h} \sinh \frac{l\pi z}{h} V_{dl}. \end{cases} \quad (22d)$$

Подчиняя решение (22d) дифференциальным уравнениям (21d), интегральным условиям (9d), (10d) и граничным условиям (12d), получим коэффициенты

$$\begin{cases} U_{x11} = 1; \quad V_{xl} = -\frac{(-1)^{(l-1)/2} 8h^2}{l^3 \pi^3 \cosh \frac{l\pi b}{2h}}; \\ U_{d11} = 0; \quad V_{dl} = \frac{(-1)^{(l-1)/2} 8h}{l^3 \pi^3 \cosh \frac{l\pi b}{2h}}, \end{cases} \quad (23d)$$

с учетом которых выражения (22d) принимают вид

$$\begin{cases} \psi_x = yz - \frac{8h^2}{\pi^3} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)/2}}{l^3 \cosh \frac{l\pi b}{2h}} \sin \frac{l\pi y}{h} \sinh \frac{l\pi z}{h}; \\ \psi_d = \frac{8h}{\pi^3} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)/2}}{l^3 \cosh \frac{l\pi b}{2h}} \sin \frac{l\pi y}{h} \sinh \frac{l\pi z}{h} = \frac{1}{h}(yz - \psi_x). \end{cases} \quad (24d)$$

Подстановка (21d) в (20d) (см. (90)*):

$$\begin{cases} p_x^* = p_x - \frac{1}{2}(h_z^y + h_y^z) = \frac{\psi_x M_x''}{I_{\psi_{xx}}} + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_x I_{\psi_{xd}}}{I_{\psi_{xx}}} - \psi_d \right) t_{zd}^x; \\ p_y^* = p_y + \frac{1}{2} h_z^x = \frac{\psi_x^y - z}{J_k} (m_x + M_x^{''x}) + \left[\frac{(\psi_x^y - z) J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^y}{h^2} \right] t_{zd}^x; \\ p_z^* = p_z + \frac{1}{2} h_y^x = \frac{\psi_x^z + y}{J_k} (m_x + M_x^{''x}) + \left[\frac{(\psi_x^z + y) J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^z}{h^2} \right] t_{zd}^x. \end{cases} \quad (25d)$$

Из (25d-2,3) согласно допущению объемные моменты для данного НДС равны:

$$\begin{cases} h_y = \frac{2(\psi_x^z + y)}{J_k} M_x''; \\ h_z = \frac{2(\psi_x^y - z)}{J_k} M_x''. \end{cases} \quad (26d)$$

Тогда из (25d) с учетом (26d) получим выражения для объемных сил:

$$\begin{cases} p_x = \frac{\psi_x M''_x}{I_{\psi xx}} + \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_x I_{\psi xd}}{I_{\psi xx}} - \psi_d \right) t_{zd}^{xx}; \\ p_y = \frac{\psi_x^y - z}{J_k} m_x + \left[\frac{(\psi_x^y - z) J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^y}{h^2} \right] t_{zd}^x; \\ p_z = \frac{\psi_x^z + y}{J_k} m_x + \left[\frac{(\psi_x^z + y) J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^z}{h^2} \right] t_{zd}^x. \end{cases} \quad (27d)$$

Подставляя (17d) в (7d) и учитывая (26d), найдем аналогичные выражения для напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\psi_x K_x}{I_{\psi xx}} - \frac{6E}{h^2 G} \left(\frac{\psi_x I_{\psi xd}}{I_{\psi xx}} - \psi_d \right) t_{zd}^x; \\ \tau'_{xy} = \frac{\psi_x^y - z}{J_k} M'_x - \left[\frac{(\psi_x^y - z) J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^y}{h^2} \right] t_{zd}; \\ \tau'_{xz} = \frac{\psi_x^z + y}{J_k} M'_x - \left[\frac{(\psi_x^z + y) J_t}{J_k} - \frac{6\psi_d^z}{h^2} \right] t_{zd}; \end{cases} \quad (28d)$$

$$\begin{cases} \tau''_{xy} = \frac{\psi_x^y - z}{J_k} M''_x; \\ \tau''_{xz} = \frac{\psi_x^z + y}{J_k} M''_x. \end{cases} \quad (29d)$$

Вычислим угловое перемещение кромок β_{zd} (см. рис. 4) через линейное перемещение u_{xd} , задавая значение координат $y = h/2$, $z = b/2$ в (4d-1) и учитывая (24d):

$$\begin{aligned} \beta_{zd} &= \frac{2}{h} u_{xd} = \frac{2}{h} \left(\psi_x \mu_{x0} + \frac{6\psi_d}{h^2 G} t_{zd} \right) \Big|_{\substack{y=h/2 \\ z=b/2}} = \\ &= \left(\frac{b}{2} - hT'_3 \right) \mu_{x0} + \frac{6T'_3}{h^2 G} t_{zd}. \end{aligned} \quad (30d)$$

Характеристики жесткости сечения, зависящие от функции деформации:

$$\begin{cases} I_{z\psi x}^y = \frac{b^3 h}{12} - \frac{bh^3}{6} + 2h^4 T'_5; \\ I_{y\psi x}^z = \frac{bh^3}{12} - 2h^4 T'_5; \\ I_{\psi xx} = \frac{b^3 h^3}{144} - \frac{bh^5}{20} + 6h^6 T'_7 + bh^5 T''_6; \\ I_{\psi xd} = \frac{bh^4}{30} - 4h^5 T'_7 - bh^4 T''_6; \\ I_{\psi dd} = -\frac{bh^3}{60} + 2h^4 T'_7 + bh^3 T''_6; \end{cases} \quad \begin{cases} I_{z\psi d}^y = \frac{bh^2}{6} - 2h^3 T'_5; \\ I_{y\psi d}^z = 2h^3 T'_5; \\ \left\{ \begin{aligned} J_k &= \frac{bh^3}{3} - 4h^4 T'_5; \\ J_t &= -b + 24hT'_5. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (31d)$$

В формулах (30d), (31d) введены обозначения:

$$T'_n = \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{16}{l^n \pi^n} \tanh \frac{l\pi b}{2h}; \quad T''_n = \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{16}{l^n \pi^n} \tanh^2 \frac{l\pi b}{2h}. \quad (32d)$$

Отметим, что формула в (31d) для определения момента инерции при кручении J_k совпадает с известным аналитическим решением (см. (61)**).

2. Определение характеристик полного поперечного сечения, составленного из прямоугольных элементов

Из совокупности элементов поперечного сечения рассмотрим отдельный прямоугольный элемент, отнесенный к локальной системе координат (ЛСК) $O_s \xi_s \eta_s \zeta_s$ (рис. 5), где s – номер элемента. Положение ЛСК элемента в глобальной системе координат (ГСК) $Oxyz$ полного поперечного сечения определяется координатами центра элемента y_{0s}, z_{0s} и углом поворота осей θ_s .

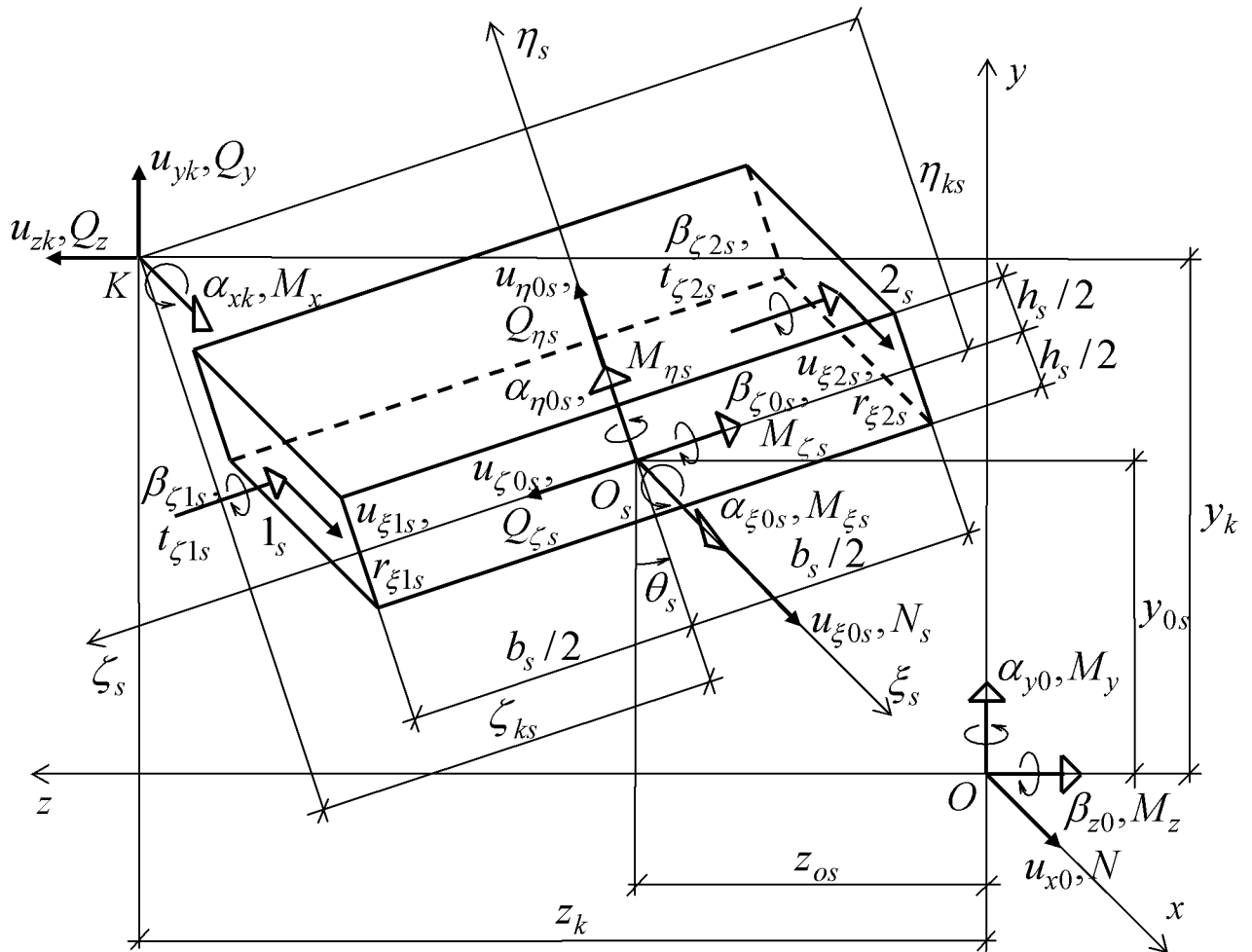


Рис. 5. Перемещения и усилия в ГСК поперечного сечения и ЛСК элемента

Полагаем, что оси ГСК являются главными центральными осями поперечного сечения, а базовые перемещения и усилия стержня, согласно [1], приведены к центру тяжести O и центру кручения (изгиба) K (см. рис.5, 3*, 4*).

Замечание 1. Полученные в предыдущем разделе формулы для отдельных НДС будут использоваться в дальнейшем с заменой символов в индексных выражениях

$$x \rightarrow \xi, \quad y \rightarrow \eta, \quad z \rightarrow \zeta \quad (6)$$

и с добавлением в конце номера элемента s .

2.1. Перемещения и деформации в ЛСК и ГСК

Полное НДС элемента стержня соответствует сумме рассмотренных выше отдельных НДС. Выразим суммарные равнодействующие силы и моменты граничных сил в соединительных узлах 1_s и 2_s элемента (см. рис. 5) с учетом замечания 1:

$$\begin{cases} r_{\xi 1s} = r_{\xi as} + r_{\xi bs} ; & t_{\zeta 1s} = t_{\zeta cs} + t_{\zeta ds} ; \\ r_{\xi 2s} = r_{\xi as} - r_{\xi bs} ; & t_{\zeta 2s} = t_{\zeta cs} - t_{\zeta ds} , \end{cases} \quad (7)$$

откуда равнодействующие силы и моменты отдельных НДС равны:

$$\begin{cases} r_{\xi as} = \frac{1}{2}(r_{\xi 1s} + r_{\xi 2s}) ; & t_{\zeta cs} = \frac{1}{2}(t_{\zeta 1s} + t_{\zeta 2s}) ; \\ r_{\xi bs} = \frac{1}{2}(r_{\xi 1s} - r_{\xi 2s}) ; & t_{\zeta ds} = \frac{1}{2}(t_{\zeta 1s} - t_{\zeta 2s}) . \end{cases} \quad (8)$$

Найдем функцию продольных перемещений в произвольной точке сечения путем суммирования формул (4a-d):

$$\begin{aligned} u_{\xi s} = & u_{\xi 0s} + \frac{\psi_{as}}{h_s G_s} r_{\xi as} + \zeta_s \alpha_{\eta 0s} + \psi_{\zeta s} \gamma_{\xi \zeta 0s} + \frac{\psi_{bs}}{h_s G_s} r_{\xi bs} + \\ & + \eta_s \beta_{\zeta 0s} + \psi_{\eta s} \gamma_{\xi \eta 0s} + \frac{6\psi_{cs}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta cs} + \psi_{\xi s} \mu_{\xi 0s} + \frac{6\psi_{ds}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta ds} . \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) и группируя слагаемые с учетом обозначений

$$\begin{cases} \psi_{\xi 1s} = \frac{1}{2}(\psi_{as} + \psi_{bs}) ; & \psi_{\zeta 1s} = \frac{1}{2}(\psi_{cs} + \psi_{ds}) ; \\ \psi_{\xi 2s} = \frac{1}{2}(\psi_{as} - \psi_{bs}) ; & \psi_{\zeta 2s} = \frac{1}{2}(\psi_{cs} - \psi_{ds}) , \end{cases} \quad (10)$$

а также добавляя поперечные перемещения по аналогии с (9), получим перемещения элемента в произвольной точке в ЛСК:

$$\begin{cases} u_{\xi s} = u_{\xi 0s} + \eta_s \beta_{\zeta 0s} + \zeta_s \alpha_{\eta 0s} + \psi_{\eta s} \gamma_{\xi \eta 0s} + \psi_{\zeta s} \gamma_{\xi \zeta 0s} + \psi_{\xi s} \mu_{\xi 0s} + \\ + \sum_{i=1,2} \left(\frac{\psi_{\xi is}}{h_s G_s} r_{\xi is} + \frac{6\psi_{\zeta is}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta is} \right) ; \\ u_{\eta s} = u_{\eta 0s} - \zeta_s \alpha_{\xi 0s} ; \\ u_{\zeta s} = u_{\zeta 0s} + \eta_s \alpha_{\xi 0s} , \end{cases} \quad (11)$$

где базовые деформации равны:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi 0s} = u_{\xi 0s} ; & \gamma_{\xi \eta 0s} = u_{\eta 0s} + \beta_{\zeta 0s} ; & \lambda_{\xi \eta 0s} = \gamma_{\xi \eta 0s} = u_{\eta 0s} + \beta_{\zeta 0s} ; \\ \mu_{\zeta 0s} = \beta_{\zeta 0s} ; & \gamma_{\xi \zeta 0s} = u_{\zeta 0s} + \alpha_{\eta 0s} ; & \lambda_{\xi \zeta 0s} = \gamma_{\xi \zeta 0s} = u_{\zeta 0s} + \alpha_{\eta 0s} ; \\ \mu_{\eta 0s} = \alpha_{\eta 0s} ; & \mu_{\xi 0s} = \alpha_{\xi 0s} . & \kappa_{\xi 0s} = \mu_{\xi 0s} = \alpha_{\xi 0s} . \end{cases} \quad (12)$$

Аналогичные перемещения в произвольной точке в ГСК и соответствующие базовые деформации принимаем согласно теории [1] (см. (22*), (28*)):

$$\begin{cases} u_{xs} = u_{x0} + y\beta_{z0} + z\alpha_{y0} + \psi_{ys}\gamma_{xyk} + \psi_{zs}\gamma_{zsk} + \psi_{xs}\mu_{xk} ; \\ u_y = u_{yk} - (z - z_k)\alpha_{xk} ; \\ u_z = u_{zk} + (y - y_k)\alpha_{xk} ; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x0} = u_{x0}^x; \\ \mu_{z0} = \beta_{z0}^x; \\ \mu_{y0} = \alpha_{y0}^x; \end{cases} \begin{cases} \gamma_{xyk} = u_{yk}^x + \beta_{z0}; \\ \gamma_{xzk} = u_{zk}^x + \alpha_{y0}; \\ \mu_{xk} = \alpha_{xk}^x; \end{cases} \begin{cases} \lambda_{xyk} = \gamma_{xyk}^x = u_{yk}^{xx} + \beta_{z0}^x; \\ \lambda_{xzk} = \gamma_{xzk}^x = u_{zk}^{xx} + \alpha_{y0}^x; \\ \kappa_{xk} = \mu_{xk}^x = \alpha_{xk}^{xx}. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнения связи между координатами в ЛСК и ГСК, а также между перемещениями в произвольной точке сечения имеют вид:

$$\begin{cases} x = \xi_s; \\ y - y_{0s} = c_s \eta_s - s_s \zeta_s; \\ z - z_{0s} = s_s \eta_s + c_s \zeta_s; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} u_{xs} = u_{\xi_s}; \\ u_y = c_s u_{\eta_s} - s_s u_{\zeta_s}; \\ u_z = s_s u_{\eta_s} + c_s u_{\zeta_s}, \end{cases} \quad (16)$$

где для краткости записи обозначено:

$$c_s = \cos \theta_s; \quad s_s = \sin \theta_s. \quad (17)$$

Подстановка (11)-(15) в (16-2,3) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} u_{yk} - (-z_k + z_{0s} + s_s \eta_s + c_s \zeta_s) \alpha_{xk} = c_s (u_{\eta_{0s}} - \zeta_s \alpha_{\xi_{0s}}) - s_s (u_{\zeta_{0s}} + \eta_s \alpha_{\xi_{0s}}); \\ u_{zk} + (-y_k + y_{0s} + c_s \eta_s - s_s \zeta_s) \alpha_{xk} = s_s (u_{\eta_{0s}} - \zeta_s \alpha_{\xi_{0s}}) + c_s (u_{\zeta_{0s}} + \eta_s \alpha_{\xi_{0s}}). \end{cases} \quad (18)$$

Группируя и приравнявая нулю в (18) свободные члены и выражения при координатах, получим соотношения

$$\begin{cases} u_{yk} + (z_k - z_{0s}) \alpha_{xk} = c_s u_{\eta_{0s}} - s_s u_{\zeta_{0s}}; \\ u_{zk} - (y_k - y_{0s}) \alpha_{xk} = s_s u_{\eta_{0s}} + c_s u_{\zeta_{0s}}; \\ \alpha_{xk} = \alpha_{\xi_{0s}}, \end{cases} \quad (19)$$

из которых выразим базовые перемещения в ЛСК:

$$\begin{cases} u_{\eta_{0s}} = c_s [u_{yk} + (z_k - z_{0s}) \alpha_{xk}] + s_s [u_{zk} - (y_k - y_{0s}) \alpha_{xk}]; \\ u_{\zeta_{0s}} = -s_s [u_{yk} + (z_k - z_{0s}) \alpha_{xk}] + c_s [u_{zk} - (y_k - y_{0s}) \alpha_{xk}]; \\ \alpha_{\xi_{0s}} = \alpha_{xk}. \end{cases} \quad (20)$$

Следующая подстановка (11)-(15) в (16-1) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & u_{x0} + (y_{0s} + c_s \eta_s - s_s \zeta_s) \beta_{z0} + (z_{0s} + s_s \eta_s + c_s \zeta_s) \alpha_{y0} + \psi_{ys} (u_{yk}^x + \beta_{z0}) + \\ & + \psi_{zs} (u_{zk}^x + \alpha_{y0}) + \psi_{xs} \alpha_{xk}^x = u_{\xi_{0s}} + \eta_s \beta_{\zeta_{0s}} + \zeta_s \alpha_{\eta_{0s}} + \psi_{\eta_s} (u_{\eta_{0s}}^x + \beta_{\zeta_{0s}}) + \\ & + \psi_{\zeta_s} (u_{\zeta_{0s}}^x + \alpha_{\eta_{0s}}) + \psi_{\xi_s} \alpha_{\xi_{0s}}^x + \sum_{i=1,2} \left(\frac{\psi_{\xi_{is}}}{h_s G_s} r_{\xi_{is}} + \frac{6\psi_{\zeta_{is}}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta_{is}} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

из которого путем аналогичной группировки и приравнявая нулю выражается вторая часть базовых перемещений в ЛСК:

$$\begin{cases} u_{\xi_{0s}} = u_{x0} + y_{0s} \beta_{z0} + z_{0s} \alpha_{y0}; \\ \beta_{\zeta_{0s}} = c_s \beta_{z0} + s_s \alpha_{y0}; \\ \alpha_{\eta_{0s}} = -s_s \beta_{z0} + c_s \alpha_{y0}. \end{cases} \quad (22)$$

2.2. Функции деформации в ЛСК и ГСК

После вычленения (22) из (21) в последнем уравнении остаются слагаемые, содержащие функции деформации. Подставляя в полученный остаток (20), (22), получим

$$\begin{aligned} & \psi_{ys}(u_{yk}^x + \beta_{z0}) + \psi_{zs}(u_{zk}^x + \alpha_{y0}) + \psi_{xs}\alpha_{xk}^x = \\ & = \psi_{\eta s} \{ c_s [u_{yk}^x + (z_k - z_{0s})\alpha_{xk}^x + \beta_{z0}] + s_s [u_{zk}^x - (y_k - y_{0s})\alpha_{xk}^x + \alpha_{y0}] \} + \\ & + \psi_{\zeta s} \{ -s_s [u_{yk}^x + (z_k - z_{0s})\alpha_{xk}^x + \beta_{z0}] + c_s [u_{zk}^x - (y_k - y_{0s})\alpha_{xk}^x + \alpha_{y0}] \} + \\ & + \psi_{\xi s}\alpha_{xk}^x + \sum_{i=1,2} \left(\frac{\psi_{\xi is}}{h_s G_s} r_{\xi is} + \frac{6\psi_{\zeta is}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta is} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Выполнив группировку слагаемых в (23) с учетом (14), будем иметь

$$\begin{aligned} & [\psi_{ys} - (c_s \psi_{\eta s} - s_s \psi_{\zeta s})] \gamma_{xyk} + [\psi_{zs} - (s_s \psi_{\eta s} + c_s \psi_{\zeta s})] \gamma_{xzk} + \\ & + [\psi_{xs} - (\zeta_{ks} \psi_{\eta s} - \eta_{ks} \psi_{\zeta s})] \mu_{xk} = \sum_{i=1,2} \left(\frac{r_{\xi is}}{h_s G_s} \psi_{\xi is} + \frac{6t_{\zeta is}}{h_s^2 G_s} \psi_{\zeta is} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где η_{ks} , ζ_{ks} – координаты центра кручения (изгиба) в ЛСК элемента (см. рис.5), равные

$$\begin{cases} \eta_{ks} = c_s (y_k - y_{0s}) + s_s (z_k - z_{0s}); \\ \zeta_{ks} = -s_s (y_k - y_{0s}) + c_s (z_k - z_{0s}). \end{cases} \quad (25)$$

Левая часть (24) содержит линейную комбинацию независимых друг от друга деформаций при сдвигах и кручении. Отсюда следует вывод, что аналогичная комбинация должна быть и в правой части (24), то есть выражения для равнодействующих сил и моментов в соединительных узлах представимы в виде

$$\begin{cases} r_{\xi is} = h_s G_s (A_{yis} \gamma_{xyk} + A_{zis} \gamma_{xzk} + A_{xis} \mu_{xk}); \\ t_{\zeta is} = \frac{h_s^2 G_s}{6} (B_{yis} \gamma_{xyk} + B_{zis} \gamma_{xzk} + B_{xis} \mu_{xk}), \end{cases} \quad i=1, 2, \quad (26)$$

где A_{qis} , B_{qis} , $q = y, z, x$ – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (26) в (24) и приравнявая нулю выражения при каждой из трех деформаций, найдем формулы для определения функций деформации в ГСК по известным функциям в ЛСК:

$$\begin{cases} \psi_{ys} = c_s \psi_{\eta s} - s_s \psi_{\zeta s} + \sum_{i=1,2} (A_{yis} \psi_{\xi is} + B_{yis} \psi_{\zeta is}); \\ \psi_{zs} = s_s \psi_{\eta s} + c_s \psi_{\zeta s} + \sum_{i=1,2} (A_{zis} \psi_{\xi is} + B_{zis} \psi_{\zeta is}); \\ \psi_{xs} = \zeta_{ks} \psi_{\eta s} - \eta_{ks} \psi_{\zeta s} + \psi_{\xi s} + \sum_{i=1,2} (A_{xis} \psi_{\xi is} + B_{xis} \psi_{\zeta is}). \end{cases} \quad (27)$$

В дальнейшем формулы (27) удобнее использовать в матричной форме:

$$\psi_{qs} = \tilde{\psi}_{Ls}^T \tilde{v}_{qs}, \quad q = y, z, x, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad (28)$$

где

$$\tilde{\psi}_{Ls} = \begin{bmatrix} \psi_{\eta s} \\ \psi_{\zeta s} \\ \psi_{\xi s} \\ \psi_{\xi 1s} \\ \psi_{\xi 2s} \\ \psi_{\zeta 1s} \\ \psi_{\zeta 2s} \end{bmatrix}; \quad \tilde{v}_{ys} = \begin{bmatrix} c_s \\ -s_s \\ 0 \\ A_{y1s} \\ A_{y2s} \\ B_{y1s} \\ B_{y2s} \end{bmatrix}; \quad \tilde{v}_{zs} = \begin{bmatrix} s_s \\ c_s \\ 0 \\ A_{z1s} \\ A_{z2s} \\ B_{z1s} \\ B_{z2s} \end{bmatrix}; \quad \tilde{v}_{xs} = \begin{bmatrix} \zeta_{ks} \\ -\eta_{ks} \\ 1 \\ A_{x1s} \\ A_{x2s} \\ B_{x1s} \\ B_{x2s} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Функции деplanationи в (29) имеют более сложные выражения, чем функции с индексами «а», «b», «с», «d» для отдельных НДС, поэтому рационально перейти к последним с помощью соотношения (10), которое в матричной форме имеет вид

$$\tilde{\psi}_{Ls} = \tilde{H} \tilde{\psi}_{Hs}, \quad (30)$$

где

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & -1 & & \end{bmatrix}; \quad \tilde{\psi}_{Hs} = \begin{bmatrix} \psi_{\eta s} \\ \psi_{\zeta s} \\ \psi_{\xi s} \\ \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \\ \psi_{ds} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Подставляя (30) в (28) с учетом симметрии матрицы \tilde{H} , получим

$$\psi_{qs} = \tilde{\psi}_{Hs}^T \tilde{H} \tilde{v}_{qs}, \quad q = y, z, x, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad (32)$$

где входящие в вектор $\tilde{\psi}_{Hs}$ функции деplanationи согласно формулам (24a-d) и замечанию 1 равны:

$$\begin{cases} \psi_{\eta s} = \frac{\eta_s}{4} \left(1 - \frac{20\eta_s^2}{3h_s^2} \right); \\ \psi_{\zeta s} = \frac{\zeta_s}{4} \left(1 - \frac{20\zeta_s^2}{3b_s^2} \right); \\ \psi_{\xi s} = \eta_s \zeta_s - \frac{8h_s^2}{\pi^3} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)/2}}{l^3 \cosh \frac{l\pi b_s}{2h_s}} \sin \frac{l\pi \eta_s}{h_s} \sinh \frac{l\pi \zeta_s}{h_s}; \end{cases} \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{as} = -\frac{b_s}{12} \left(1 - \frac{12\zeta_s^2}{b_s^2}\right); \\ \psi_{bs} = -\psi_{\zeta s} = -\frac{\zeta_s}{4} \left(1 - \frac{20\zeta_s^2}{3b_s^2}\right); \\ \psi_{cs} = -\frac{h_s \eta_s}{2b_s} \left(1 - \frac{4\eta_s^2}{3h_s^2}\right) + \frac{8h_s}{\pi^3} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)/2}}{l^3 \sinh \frac{l\pi b_s}{2h_s}} \sin \frac{l\pi \eta_s}{h_s} \cosh \frac{l\pi \zeta_s}{h_s}; \\ \psi_{ds} = \frac{1}{h_s} (\eta_s \zeta_s - \psi_{\xi s}) = \frac{8h_s}{\pi^3} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{(l-1)/2}}{l^3 \cosh \frac{l\pi b_s}{2h_s}} \sin \frac{l\pi \eta_s}{h_s} \sinh \frac{l\pi \zeta_s}{h_s}. \end{array} \right. \quad (34)$$

2.3. Уравнения равновесия узлов и совместности перемещений элементов

Для определения функций деформации в ГСК по (27) или (32) необходимо найти неизвестные коэффициенты, введенные в (26). С этой целью рассмотрим уравнения равновесия узлов поперечного сечения и уравнения совместности перемещений в данных узлах.

Уравнения равновесия сил и моментов для u -го узла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{s,i \in u} r_{\xi is} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} c_s t_{\zeta is} = 0; \quad u=1, \dots, k_u. \\ \sum_{s,i \in u} s_s t_{\zeta is} = 0, \end{array} \right. \quad (35)$$

Уравнения совместности линейных и угловых перемещений s -го элемента сечения:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\xi is} = u_{xu}; \\ \beta_{\zeta is} = c_s \beta_{zu} + s_s \alpha_{yu}, \end{array} \quad u \in s, i, \quad s=1, \dots, k_s, \quad i=1, 2, \right. \quad (36)$$

где u_{xu} , β_{zu} , α_{yu} – линейные и угловые перемещения узла в ГСК.

По аналогии с (7) выразим суммарные перемещения соединительных узлов 1_s и 2_s элемента (см. рис. 5) с учетом замечания 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\xi 1s} = u_{\xi as} + u_{\xi bs}; \\ u_{\xi 2s} = u_{\xi as} - u_{\xi bs}; \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{\zeta 1s} = \beta_{\zeta cs} + \beta_{\zeta ds}; \\ \beta_{\zeta 2s} = \beta_{\zeta cs} - \beta_{\zeta ds}. \end{array} \right. \right. \quad (37)$$

Подставляя (30a-d) с учетом (8) в (37), получим выражения для линейных и угловых перемещений узлов элемента сечения в ЛСК:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\xi 1s} = u_{\xi 0s} + \frac{b_s}{2} \alpha_{\eta 0s} - \frac{b_s}{12} \gamma_{\xi \zeta 0s} + \frac{b_s}{24h_s G_s} (3r_{\xi 1s} + r_{\xi 2s}); \\ u_{\xi 2s} = u_{\xi 0s} - \frac{b_s}{2} \alpha_{\eta 0s} + \frac{b_s}{12} \gamma_{\xi \zeta 0s} + \frac{b_s}{24h_s G_s} (r_{\xi 1s} + 3r_{\xi 2s}); \end{array} \right. \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{\zeta 1s} = \beta_{\zeta 0s} + \left(\frac{b_s}{2} - h_s T_s\right) \mu_{\xi 0s} - \frac{1}{6} \gamma_{\xi \eta 0s} - \\ \quad - \frac{1}{h_s^2 G_s} \left[\left(\frac{h_s}{b_s} - 3S_s\right) t_{\zeta 1s} + \left(\frac{h_s}{b_s} - 3R_s\right) t_{\zeta 2s} \right]; \\ \beta_{\zeta 2s} = \beta_{\zeta 0s} - \left(\frac{b_s}{2} - h_s T_s\right) \mu_{\xi 0s} - \frac{1}{6} \gamma_{\xi \eta 0s} - \\ \quad - \frac{1}{h_s^2 G_s} \left[\left(\frac{h_s}{b_s} - 3R_s\right) t_{\zeta 1s} + \left(\frac{h_s}{b_s} - 3S_s\right) t_{\zeta 2s} \right]; \end{array} \right. \quad (39)$$

где в соответствии с (32с,d) обозначено:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_s = T'_{3s} = \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{16}{l^3 \pi^3} \tanh \frac{l\pi b_s}{2h_s}; \\ C_s = C'_{3s} = \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \frac{16}{l^3 \pi^3} \coth \frac{l\pi b_s}{2h_s}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} S_s = C_s + T_s; \\ R_s = C_s - T_s. \end{array} \right. \quad (40)$$

Подставляя (22), (20) с учетом (25), (14) в (12), найдем уравнения связи между базовыми деформациями в ЛСК и ГСК:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\xi 0s} = \varepsilon_{x0} + y_{0s} \mu_{z0} + z_{0s} \mu_{y0}; \\ \mu_{\zeta 0s} = c_s \mu_{z0} + s_s \mu_{y0}; \\ \mu_{\eta 0s} = -s_s \mu_{z0} + c_s \mu_{y0}; \\ \gamma_{\xi \eta 0s} = c_s \gamma_{xyk} + s_s \gamma_{xzk} + \zeta_{ks} \mu_{xk}; \\ \gamma_{\xi \zeta 0s} = -s_s \gamma_{xyk} + c_s \gamma_{xzk} - \eta_{ks} \mu_{xk}; \\ \mu_{\xi 0s} = \mu_{xk}; \\ \lambda_{\xi \eta 0s} = c_s \lambda_{xyk} + s_s \lambda_{xzk} + \zeta_{ks} \kappa_{xk}; \\ \lambda_{\xi \zeta 0s} = -s_s \lambda_{xyk} + c_s \lambda_{xzk} - \eta_{ks} \kappa_{xk}; \\ \kappa_{\xi 0s} = \kappa_{xk}. \end{array} \right. \quad (41)$$

Подставляя далее (22), (41-2), (26) в (38), (39), получим выражения для линейных и угловых перемещений узлов элемента сечения в ЛСК через базовые перемещения и деформации в ГСК:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\xi 1s} = u_{x0} + y_u \beta_{z0} + z_u \alpha_{y0} + \frac{b_s}{24} \left[(2s_s + 3A_{y1s} + A_{y2s}) \gamma_{xyk} + \right. \\ \quad \left. + (-2c_s + 3A_{z1s} + A_{z2s}) \gamma_{xzk} + (2\eta_{ks} + 3A_{x1s} + A_{x2s}) \mu_{xk} \right], \quad u \in s, i=1; \\ u_{\xi 2s} = u_{x0} + y_u \beta_{z0} + z_u \alpha_{y0} + \frac{b_s}{24} \left[(-2s_s + A_{y1s} + 3A_{y2s}) \gamma_{xyk} + \right. \\ \quad \left. + (2c_s + A_{z1s} + 3A_{z2s}) \gamma_{xzk} + (-2\eta_{ks} + A_{x1s} + 3A_{x2s}) \mu_{xk} \right], \quad u \in s, i=2; \end{array} \right. \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\beta_{\zeta_{1s}} = c_s \beta_{z0} + s_s \alpha_{y0} + \left(\frac{b_s}{2} - h_s T_s\right) \mu_{xk} - \frac{1}{6} [(c_s \gamma_{xyk} + s_s \gamma_{xzk} + \zeta_{ks} \mu_{xk}) + \\
+ \left(\frac{h_s}{b_s} - 3S_s\right) (B_{y1s} \gamma_{xyk} + B_{z1s} \gamma_{xzk} + B_{x1s} \mu_{xk}) + \\
+ \left(\frac{h_s}{b_s} - 3R_s\right) (B_{y2s} \gamma_{xyk} + B_{z2s} \gamma_{xzk} + B_{x2s} \mu_{xk})], \quad u \in s, i = 1; \\
\beta_{\zeta_{2s}} = c_s \beta_{z0} + s_s \alpha_{y0} - \left(\frac{b_s}{2} - h_s T_s\right) \mu_{xk} - \frac{1}{6} [(c_s \gamma_{xyk} + s_s \gamma_{xzk} + \zeta_{ks} \mu_{xk}) + \\
+ \left(\frac{h_s}{b_s} - 3S_s\right) (B_{y2s} \gamma_{xyk} + B_{z2s} \gamma_{xzk} + B_{x2s} \mu_{xk}) + \\
+ \left(\frac{h_s}{b_s} - 3R_s\right) (B_{y1s} \gamma_{xyk} + B_{z1s} \gamma_{xzk} + B_{x1s} \mu_{xk})], \quad u \in s, i = 2,
\end{array} \right. \quad (43)$$

где координаты u -го узла в ГСК равны:

$$\left\{ \begin{array}{l}
y_u = y_{0s} - \frac{b_s}{2} s_s; \\
z_u = z_{0s} + \frac{b_s}{2} c_s,
\end{array} \right. \quad u \in s, i = 1; \quad \left\{ \begin{array}{l}
y_u = y_{0s} + \frac{b_s}{2} s_s; \\
z_u = z_{0s} - \frac{b_s}{2} c_s,
\end{array} \right. \quad u \in s, i = 2. \quad (44)$$

Представим линейные и угловые перемещения узлов поперечного сечения в ГСК в виде

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_{xu} = u_{x0} + y_u \beta_{z0} + z_u \alpha_{y0} + C_{yu} \gamma_{xyk} + C_{zu} \gamma_{xzk} + C_{xu} \mu_{xk}; \\
\beta_{zu} = \beta_{z0} + D_{yu} \gamma_{xyk} + D_{zu} \gamma_{xzk} + D_{xu} \mu_{xk}; \\
\alpha_{yu} = \alpha_{y0} + E_{yu} \gamma_{xyk} + E_{zu} \gamma_{xzk} + E_{xu} \mu_{xk},
\end{array} \right. \quad u = 1, \dots, k_u, \quad (45)$$

где C_{qu} , D_{qu} , E_{qu} , $q = y, z, x$ – дополнительные к (26) неизвестные коэффициенты.

Подставляя (42), (45-1) в (36-1) и приравнивая нулю коэффициенты при деформациях, получим систему уравнений совместности линейных перемещений относительно неизвестных A_{qis} , C_{qu} , $q = y, z, x$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_{yu} = \frac{b_s}{24} (2s_s + 3A_{y1s} + A_{y2s}), \quad u \in s, i, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad i = 1; \\
C_{yu} = \frac{b_s}{24} (-2s_s + A_{y1s} + 3A_{y2s}), \quad u \in s, i, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad i = 2; \\
C_{zu} = \frac{b_s}{24} (-2c_s + 3A_{z1s} + A_{z2s}), \quad u \in s, i, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad i = 1; \\
C_{zu} = \frac{b_s}{24} (2c_s + A_{z1s} + 3A_{z2s}), \quad u \in s, i, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad i = 2; \\
C_{xu} = \frac{b_s}{24} (2\eta_{ks} + 3A_{x1s} + A_{x2s}), \quad u \in s, i, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad i = 1; \\
C_{xu} = \frac{b_s}{24} (-2\eta_{ks} + A_{x1s} + 3A_{x2s}), \quad u \in s, i, \quad s = 1, \dots, k_s, \quad i = 2.
\end{array} \right. \quad (46)$$

Выполняя аналогичную процедуру с (26-1), (35-1), найдем систему уравнений равновесия равнодействующих граничных сил с теми же неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_{s,i \in u} h_s G_s A_{yis} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} h_s G_s A_{zis} = 0; & u=1, \dots, k_u. \\ \sum_{s,i \in u} h_s G_s A_{xis} = 0, \end{cases} \quad (47)$$

Подставляя далее (43), (45-2,3) в (36-2) и приравнявая нулю коэффициенты при деформациях, получим систему уравнений совместности угловых перемещений относительно неизвестных B_{qis} , D_{qu} , E_{qu} , $q = y, z, x$:

$$\begin{cases} c_s D_{yu} + s_s E_{yu} = -\frac{1}{6} [c_s + (\frac{h_s}{b_s} - 3S_s) B_{y1s} + (\frac{h_s}{b_s} - 3R_s) B_{y2s}]; \\ c_s D_{yu} + s_s E_{yu} = -\frac{1}{6} [c_s + (\frac{h_s}{b_s} - 3S_s) B_{y2s} + (\frac{h_s}{b_s} - 3R_s) B_{y1s}]; \\ c_s D_{zu} + s_s E_{zu} = -\frac{1}{6} [c_s + (\frac{h_s}{b_s} - 3S_s) B_{z1s} + (\frac{h_s}{b_s} - 3R_s) B_{z2s}]; \\ c_s D_{zu} + s_s E_{zu} = -\frac{1}{6} [c_s + (\frac{h_s}{b_s} - 3S_s) B_{z2s} + (\frac{h_s}{b_s} - 3R_s) B_{z1s}]; \\ c_s D_{xu} + s_s E_{xu} = \frac{b_s}{2} - h_s T_s - \frac{1}{6} [\zeta_{ks} + (\frac{h_s}{b_s} - 3S_s) B_{x1s} + (\frac{h_s}{b_s} - 3R_s) B_{x2s}]; \\ c_s D_{xu} + s_s E_{xu} = -\frac{b_s}{2} + h_s T_s - \frac{1}{6} [\zeta_{ks} + (\frac{h_s}{b_s} - 3S_s) B_{x2s} + (\frac{h_s}{b_s} - 3R_s) B_{x1s}], \end{cases} \quad (48)$$

где индексы $u \in s, i$, $s = 1, \dots, k_s$, а индекс $i = 1, 2$ соответствует номеру уравнения в каждой группе (48).

Также выполняя аналогичную процедуру с (26-2), (35-2,3), найдем систему уравнений равновесия моментов граничных сил с теми же неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_{s,i \in u} c_s h_s^2 G_s B_{yis} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} s_s h_s^2 G_s B_{yis} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} c_s h_s^2 G_s B_{zis} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} s_s h_s^2 G_s B_{zis} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} c_s h_s^2 G_s B_{xis} = 0; \\ \sum_{s,i \in u} s_s h_s^2 G_s B_{xis} = 0. \end{cases} \quad u=1, \dots, k_u; \quad (49)$$

Количество уравнений в системах (46)+(47) и (48)+(49) равно $6k_s + 3k_u$ и $6k_s + 6k_u$, что совпадает с количеством содержащихся в них неизвестных коэффициентов A_{qis} , C_{qu} и B_{qis} , D_{qu} , E_{qu} , $q = y, z, x$ соответственно. Таким образом, эти две системы уравнений являются замкнутыми и независимыми друг от друга. Причем каждая система распадается на три независимых подсистемы для каждого конкретного индекса $q = y, z, x$. Отметим, что данные подсистемы эффективно решать путем исключения пар неизвестных A_{qis} , B_{qis} , $i = 1, 2$ из (46), (48) с последующей подстановкой их в (47), (49).

Замечание 2. Влияние коэффициентов B_{qis} на функции деформации, определяемые по (27), снижается с увеличением соотношения сторон элемента сечения b_s/h_s и для тонкостенных элементов поперечного сечения становится незначительным, что позволяет отбросить вторую систему уравнений (48)+(49) и пренебречь связанными с ней неизвестными B_{qis} , D_{qu} , E_{qu} . Для толстостенных элементов при соотношении $b_s/h_s < 10$ необходимо учитывать все неизвестные коэффициенты и решать обе системы уравнений.

2.4. Деформационные характеристики поперечного сечения

Согласно полученным в работе формулам порядок определения функций деформации и искомых характеристик поперечного сечения определяется следующей последовательностью операций.

1. Определение центра тяжести поперечного сечения, положения главных центральных осей и приведенных геометрических характеристик сечения, не связанных с неизвестными функциями деформации.

2. Определение A_{yis} , C_{yu} , B_{yis} , D_{yu} , E_{yu} из решения системы уравнений (46-1)-(49-1) и ψ_{ys} по формуле (32).

3. Определение F_{yy} , F_{zy} , b_z из уравнений (см. 5**):

$$\begin{cases} F_{yy} = F + I'_{\psi y}{}^y; \\ F_{zy} = I'_{\psi y}{}^z; \\ b_z = S'_y + I'_{z\psi y}{}^y - I'_{y\psi y}{}^z. \end{cases} \quad (50)$$

4. Определение A_{zis} , C_{zu} , B_{zis} , D_{zu} , E_{zu} из решения системы уравнений (46-2)-(49-2) и ψ_{zs} по формуле (32).

5. Определение F_{yz} , F_{zz} , b_y из уравнений (см. 6**):

$$\begin{cases} F_{yz} = I'_{\psi z}{}^y; \\ F_{zz} = F + I'_{\psi z}{}^z; \\ b_y = S'_z - I'_{z\psi z}{}^y + I'_{y\psi z}{}^z. \end{cases} \quad (51)$$

6. Определение y_k, z_k из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} F_{yy}z_k - F_{zy}y_k = b_z; \\ -F_{yz}z_k + F_{zz}y_k = b_y. \end{cases} \quad (52)$$

7. Определение $A_{xis}, C_{xu}, B_{xis}, D_{xu}, E_{xu}$ из решения системы уравнений (46-3)-(49-3) и ψ_{xs} по формуле (32).

8. Выполнение проверок, следующих из симметрии матрицы жесткости (см. 8**):

$$\begin{cases} F_{zy} = F_{yz}; \\ z_k = \frac{1}{F}(S'_y - I'_{\psi x}); \\ y_k = \frac{1}{F}(S'_z + I'_{\psi x}); \end{cases} \quad (53)$$

9. Определение оставшихся неизвестными характеристик (см. 9**):

$$\begin{cases} J_k = J'_x - z_k S'_y - y_k S'_z - I'_{z\psi x} + I'_{y\psi x}; \\ I'_{\psi pq} = \sum_s e_s \int_{F_s} \psi_{ps} \psi_{qs} dF_s, \quad p, q = y, z, x. \end{cases} \quad (54)$$

Отметим, что пункт 7 данной последовательности операций может быть выполнен только после определения координат центра кручения в ГСК по пункту 6 и в ЛСК по формуле (25), входящих в разрешающие уравнения (46-3), (48-3).

Депланационные характеристики поперечного сечения в (50)-(54) вычисляются в зависимости от вида по следующим формулам.

1. Интегралы вида $I'_{\psi q} = \sum_s g_s \int_{F_s} \psi_{qs}^p dF_s$, $p = y, z$, $q = y, z, x$. Предварительно ус-

тановим соотношения между производными от функций депланации в ГСК и ЛСК:

$$\begin{bmatrix} \psi_{qs}^y \\ \psi_{qs}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{qs}^\eta \eta_s^y + \psi_{qs}^\zeta \zeta_s^y \\ \psi_{qs}^\eta \eta_s^z + \psi_{qs}^\zeta \zeta_s^z \end{bmatrix} = \tilde{K}_{1s} \begin{bmatrix} \psi_{qs}^\eta \\ \psi_{qs}^\zeta \end{bmatrix}, \quad (55)$$

где согласно (15) имеем

$$\tilde{K}_{1s} = \begin{bmatrix} \eta_s^y & \zeta_s^y \\ \eta_s^z & \zeta_s^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_s & -s_s \\ s_s & c_s \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Интегралы данного вида с использованием соотношений (55), (32) равны

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I'_{\psi q}^y \\ I'_{\psi q}^z \end{bmatrix} &= \sum_s \begin{bmatrix} I'_{\psi qs}^y \\ I'_{\psi qs}^z \end{bmatrix} = \sum_s g_s \int_{F_s} \begin{bmatrix} \psi_{qs}^y \\ \psi_{qs}^z \end{bmatrix} dF_s = \sum_s g_s \tilde{K}_{1s} \int_{F_s} \begin{bmatrix} \psi_{qs}^\eta \\ \psi_{qs}^\zeta \end{bmatrix} dF_s = \\ &= \sum_s g_s \tilde{K}_{1s} \int_{F_s} \begin{bmatrix} \partial^\eta \\ \partial^\zeta \end{bmatrix} \tilde{\psi}_{Hs}^T dF_s \tilde{H} \tilde{v}_{qs} \end{aligned} \quad (57)$$

или

$$\begin{bmatrix} I'_{\psi q}^y \\ I'_{\psi q}^z \end{bmatrix} = \sum_s \begin{bmatrix} I'_{\psi qs}^y \\ I'_{\psi qs}^z \end{bmatrix} = \sum_s g_s \tilde{K}_{1s} \tilde{I}_s^* \tilde{H} \tilde{v}_{qs}, \quad (58)$$

где с учетом (31b,c) и замечания 1 имеем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s^* &= \int_{F_s} \begin{bmatrix} \partial^\eta \\ \partial^\zeta \end{bmatrix} \tilde{\psi}_{Hs}^T dF_s = \begin{bmatrix} I_{\psi\eta s}^\eta & \circ & \circ & \circ & \circ & I_{\psi cs}^\eta & \circ \\ \circ & I_{\psi\zeta s}^\zeta & \circ & \circ & I_{\psi bs}^\zeta & \circ & \circ \end{bmatrix} = \\ &= \frac{b_s h_s}{6} \begin{bmatrix} -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & 0 & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь и далее символом « \circ » обозначены интегралы, заведомо равные нулю в силу того, что хотя бы один из сомножителей подынтегрального выражения является нечетной функцией от аргумента η_s или ζ_s . Это приводит к четной первообразной функции, а после подстановки различающихся только знаками пределов интегрирования – к нулевому значению.

2. Интегралы вида $I'_{r\psi q} = \sum_s g_s \int_{F_s} r \psi_{qs}^p dF_s$, $p \neq r = y, z$, $q = y, z, x$.

Аналогично используя (55), (15), (32), (57), получим:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I'_{z\psi q} \\ I'_{y\psi q} \end{bmatrix} &= \sum_s g_s \int_{F_s} \begin{bmatrix} z \psi_{qs}^y \\ y \psi_{qs}^z \end{bmatrix} dF_s = \\ &= \sum_s \left\{ \begin{bmatrix} z_{0s} I'_{\psi qs}^y \\ y_{0s} I'_{\psi qs}^z \end{bmatrix} + g_s \int_{F_s} (\tilde{K}_{1s}^T \begin{bmatrix} \zeta_s \\ \eta_s \end{bmatrix}) * (\tilde{K}_{1s} \begin{bmatrix} \psi_{qs}^\eta \\ \psi_{qs}^\zeta \end{bmatrix}) dF_s \right\} = \\ &= \sum_s \left\{ \begin{bmatrix} z_{0s} I'_{\psi qs}^y \\ y_{0s} I'_{\psi qs}^z \end{bmatrix} + g_s \int_{F_s} (\tilde{K}_{1s}^T \begin{bmatrix} \zeta_s \\ \eta_s \end{bmatrix}) * (\tilde{K}_{1s} \begin{bmatrix} \partial^\eta \\ \partial^\zeta \end{bmatrix} \tilde{\psi}_{Hs}^T dF_s) \tilde{H} \tilde{v}_{qs} \right\}, \end{aligned} \quad (60)$$

где символом «*» обозначена операция почленного умножения. После выполнения данной операции получим:

$$\begin{bmatrix} I'_{z\psi q} \\ I'_{y\psi q} \end{bmatrix} = \sum_s \left\{ \begin{bmatrix} z_{0s} I'_{\psi qs}^y \\ y_{0s} I'_{\psi qs}^z \end{bmatrix} + g_s \tilde{K}_{2s} \tilde{I}_{*s}^* \tilde{H} \tilde{v}_{qs} \right\}, \quad (61)$$

где

$$\tilde{K}_{2s} = \begin{bmatrix} s_s c_s & c_s^2 & -s_s^2 & -s_s c_s \\ s_s c_s & -s_s^2 & c_s^2 & -s_s c_s \end{bmatrix}; \quad (62)$$

$$\tilde{I}_{*s}^* = \int_{F_s} \begin{bmatrix} \eta_s \partial^\eta \\ \zeta_s \partial^\eta \\ \eta_s \partial^\zeta \\ \zeta_s \partial^\zeta \end{bmatrix} \tilde{\psi}_{Hs}^T dF_s = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & 0 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & I_{\zeta\psi\zeta s}^\eta & \circ & \circ & \circ & I_{\zeta\psi ds}^\eta \\ \circ & \circ & I_{\eta\psi\zeta s}^\zeta & \circ & \circ & \circ & I_{\eta\psi ds}^\zeta \\ \circ & \circ & \circ & I_{\zeta\psi as}^\zeta & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Интегралы в (63) приведены в (31a-1), (31d-1,2) с учетом замечания 1.

3. Интегралы вида $I_{\psi pq} = \sum_s e_s \int_{F_s} \psi_{ps} \psi_{qs} dF_s$, $p, q = y, z, x$.

С использованием (32) получим

$$I_{\psi pq} = \sum_s e_s \tilde{v}_{ps}^T \tilde{H} \tilde{I}_{\psi \psi Hs} \tilde{H} \tilde{v}_{qs}, \quad (64)$$

где

$$\tilde{I}_{\psi \psi Hs} = \int_{F_s} \tilde{\psi}_{Hs} \tilde{\psi}_{Hs}^T dF_s = \begin{bmatrix} I_{\psi \eta \eta s} & \circ & \circ & \circ & \circ & \mathbf{0} & \circ \\ \circ & I_{\psi \zeta \zeta s} & \circ & \circ & I_{\psi \zeta bs} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & I_{\psi \xi \xi s} & \circ & \circ & \circ & I_{\psi \xi ds} \\ \circ & \circ & \circ & I_{\psi aas} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & I_{\psi \zeta bs} & \circ & \circ & I_{\psi bbs} & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \circ & \circ & \circ & \circ & I_{\psi ccs} & \circ \\ \circ & \circ & I_{\psi \xi ds} & \circ & \circ & \circ & I_{\psi dds} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Интегралы в (65) приведены в (31a-2), (31b-3), (31c-2), (31d-3) с учетом замечания 1.

3. Усилия и напряжения в ГСК и ЛСК

В практических расчетах напряжения в произвольных точках тонкостенного или толстостенного поперечного сечения целесообразно определять в ЛСК. В рамках предложенной теории возможны два варианта решения этой задачи.

В первом варианте исходя из известных в ходе расчета усилий $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2', \tilde{s}_2'', \tilde{s}_3$ в ГСК по полученным в [1] формулам определяются напряжения в заданной точке s -го элемента сечения в ГСК (см. (97^{*}) с учетом (95^{*}), (27^{*})):

$$\begin{cases} \sigma_{xs} = E_s (\tilde{f}_x^T \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{s}_1 + \tilde{\psi}_s^T \tilde{C}_{33}^{-1} \tilde{s}_3); \\ \tau'_{xys} = G_s (\tilde{f}_y^T + \tilde{\psi}_s^{yT}) \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{s}_2'; \\ \tau'_{xzs} = G_s (\tilde{f}_z^T + \tilde{\psi}_s^{zT}) \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{s}_2'; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau''_{xys} = G_s (\tilde{f}_y^T + \tilde{\psi}_s^{yT}) \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{s}_2''; \\ \tau''_{xzs} = G_s (\tilde{f}_z^T + \tilde{\psi}_s^{zT}) \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{s}_2'', \end{cases} \quad (66)$$

где (см. (24^{*}))

$$\tilde{f}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -z + z_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y - y_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{\psi}_s = \begin{bmatrix} \psi_{ys} \\ \psi_{zs} \\ \psi_{xs} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Затем осуществляется перевод напряжений (66) из ГСК в ЛСК по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_{\xi s} = \sigma_{xs}; \\ \tau'_{\xi \eta s} = c_s \tau'_{xys} + s_s \tau'_{xzs}; \\ \tau'_{\xi \zeta s} = -s_s \tau'_{xys} + c_s \tau'_{xzs}; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau''_{\xi \eta s} = c_s \tau''_{xys} + s_s \tau''_{xzs}; \\ \tau''_{\xi \zeta s} = -s_s \tau''_{xys} + c_s \tau''_{xzs}. \end{cases} \quad (68)$$

Во втором варианте предварительно находятся базовые деформации $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ в ГСК (см. (82*)):

$$\tilde{e}_1 = \tilde{C}_{11}^{-1} \tilde{s}_1; \quad \tilde{e}_2 = \tilde{C}_{22}^{-1} \tilde{s}_2; \quad \tilde{e}_3 = \tilde{C}_{33}^{-1} \tilde{s}_3, \quad (69)$$

равнодействующие сил и моментов в соединительных узлах по (26) и для отдельных НДС по (8). Затем найденные деформации преобразуются в ЛСК по формулам (41) и определяются усилия в ЛСК из физических уравнений (11a-d), приходящиеся на s -й элемент:

$$\begin{cases} N_s = E_s F_s \varepsilon_{\xi 0s}; \\ M_{\zeta s} = E_s J_{\zeta s} \mu_{\zeta 0s}; \\ M_{\eta s} = E_s J_{\eta s} \mu_{\eta 0s}; \\ Q'_{\eta s} = G_s F_{\eta s} \gamma_{\xi \eta 0s}; \\ Q'_{\zeta s} = G_s F_{\zeta s} \gamma_{\xi \zeta 0s} + \frac{I_{\psi bs}^{\zeta}}{h_s} r_{\xi bs}^{\zeta}; \\ M'_{\xi s} = G_s J_{ks} \mu_{\xi 0s} + J_{ts} t_{\zeta ds}; \\ L_{\xi \eta s} = E_s I_{\psi \eta \eta s} \lambda_{\xi \eta 0s}; \\ L_{\xi \zeta s} = E_s I_{\psi \zeta \zeta s} (\lambda_{\xi \zeta 0s} - \frac{1}{h_s G_s} r_{\xi bs}^{\xi}); \\ K_{\xi s} = E_s (I_{\psi \xi \xi s} \kappa_{\xi 0s} + \frac{6 I_{\psi \xi ds}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta ds}^{\xi}). \end{cases} \quad (70)$$

Поперечные силы и крутящий момент с двумя штрихами, приходящиеся на s -й элемент, находятся через производные по ξ от депланационных моментов и бимоента по формулам (15b-d) и с учетом (70-3) равны

$$\begin{cases} Q''_{\eta s} = -L'_{\xi \eta s} = -E_s I_{\psi \eta \eta s} \lambda'_{\xi \eta 0s}; \\ Q''_{\zeta s} = -L'_{\xi \zeta s} = -E_s I_{\psi \zeta \zeta s} (\lambda'_{\xi \zeta 0s} - \frac{1}{h_s G_s} r_{\xi bs}^{\xi}); \\ M''_{\xi s} = -K'_{\xi s} = -E_s (I_{\psi \xi \xi s} \kappa'_{\xi 0s} + \frac{6 I_{\psi \xi ds}}{h_s^2 G_s} t_{\zeta ds}^{\xi}). \end{cases} \quad (71)$$

Вычисление напряжений в ЛСК осуществляется для полного НДС согласно (28,29a-d) и замечанию 1:

$$\left\{ \begin{aligned}
\sigma_{\xi s} &= \frac{N_s}{F_s} + \frac{\eta_s M_{\zeta s}}{J_{\zeta s}} + \frac{\zeta_s M_{\eta s}}{J_{\eta s}} + \frac{\psi_{\eta s} L_{\xi \eta s}}{I_{\psi \eta \eta s}} + \frac{\psi_{\zeta s} L_{\xi \zeta s}}{I_{\psi \zeta \zeta s}} + \frac{\psi_{\xi s} K_{\xi s}}{I_{\psi \xi \xi s}} + \\
&+ \frac{E_s \psi_{as} r_{\xi as}^{\xi}}{h_s G_s} + \frac{6E_s \psi_{cs} t_{\xi cs}^{\xi}}{h_s^2 G_s} - \frac{6E_s}{h_s^2 G_s} \left(\frac{\psi_{\xi s} I_{\psi \xi ds}}{I_{\psi \xi \xi s}} - \psi_{ds} \right) t_{\xi ds}^{\xi}; \\
\tau'_{\xi \eta s} &= \frac{(1 + \psi_{\eta s}^{\eta}) Q'_{\eta s}}{F_{\eta s}} + \frac{(\psi_{\xi s}^{\eta} - \zeta_s) M'_{\xi s}}{J_{ks}} + \frac{6\psi_{cs}^{\eta} t_{\xi cs}^{\eta}}{h_s^2} - \\
&- \left[\frac{(\psi_{\xi s}^{\eta} - \zeta_s) J_{ts}}{J_{ks}} - \frac{6\psi_{ds}^{\eta}}{h_s^2} \right] t_{\xi ds}^{\eta}; \\
\tau'_{\xi \zeta s} &= \frac{(1 + \psi_{\zeta s}^{\zeta}) Q'_{\zeta s}}{F_{\zeta s}} + \frac{(\psi_{\xi s}^{\zeta} + \eta_s) M'_{\xi s}}{J_{ks}} - \frac{(-I_{\psi \zeta s}^{\zeta} + F_s \psi_{\zeta s}^{\zeta}) r_{\xi bs}^{\zeta}}{h_s F_{\zeta s}} + \\
&+ \frac{6\psi_{cs}^{\zeta} t_{\xi cs}^{\zeta}}{h_s^2} - \left[\frac{(\psi_{\xi s}^{\zeta} + \eta_s) J_{ts}}{J_{ks}} - \frac{6\psi_{ds}^{\zeta}}{h_s^2} \right] t_{\xi ds}^{\zeta}; \\
\tau''_{\xi \eta s} &= \frac{(1 + \psi_{\eta s}^{\eta}) Q''_{\eta s}}{F_{\eta s}} + \frac{(\psi_{\xi s}^{\eta} - \zeta_s) M''_{\xi s}}{J_{ks}}; \\
\tau''_{\xi \zeta s} &= \frac{(1 + \psi_{\zeta s}^{\zeta}) Q''_{\zeta s}}{F_{\zeta s}} + \frac{(\psi_{\xi s}^{\zeta} + \eta_s) M''_{\xi s}}{J_{ks}}.
\end{aligned} \right. \quad (72)$$

$$\left. \begin{aligned}
\tau''_{\xi \eta s} &= \frac{(1 + \psi_{\eta s}^{\eta}) Q''_{\eta s}}{F_{\eta s}} + \frac{(\psi_{\xi s}^{\eta} - \zeta_s) M''_{\xi s}}{J_{ks}}; \\
\tau''_{\xi \zeta s} &= \frac{(1 + \psi_{\zeta s}^{\zeta}) Q''_{\zeta s}}{F_{\zeta s}} + \frac{(\psi_{\xi s}^{\zeta} + \eta_s) M''_{\xi s}}{J_{ks}}.
\end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Сопоставления выражений напряжений по (68) и (72), (73) после выполнения указанных выше подстановок и преобразований показали, что оба варианта определения напряжений дают тождественные результаты.

Дополнительным контролем при вычислении напряжений по второму варианту может служить сверка с исходными усилиями в ГСК этих же усилий, но определенных через усилия в ЛСК (70), (71) путем суммирования по всем элементам сечения по формулам:

$$\left\{ \begin{aligned}
N &= \sum_s N_s; \\
M_z &= \sum_s (y_{0s} N_s + c_s M_{\zeta s} - s_s M_{\eta s}); \\
M_y &= \sum_s (z_{0s} N_s + s_s M_{\zeta s} + c_s M_{\eta s});
\end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned}
Q'_y &= \sum_s (c_s Q'_{\eta s} - s_s Q'_{\zeta s}); \\
Q'_z &= \sum_s (s_s Q'_{\eta s} + c_s Q'_{\zeta s}); \\
M'_x &= \sum_s (\zeta_{ks} Q'_{\eta s} - \eta_{ks} Q'_{\zeta s} + M'_{\xi s});
\end{aligned} \right. \quad (74)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
L_{xy} &= \sum_s (c_s L_{\xi \eta s} - s_s L_{\xi \zeta s}); \\
L_{xz} &= \sum_s (s_s L_{\xi \eta s} + c_s L_{\xi \zeta s}); \\
K_x &= \sum_s (\zeta_{ks} L_{\xi \eta s} - \eta_{ks} L_{\xi \zeta s} + K_{\xi s});
\end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned}
Q''_y &= \sum_s (c_s Q''_{\eta s} - s_s Q''_{\zeta s}); \\
Q''_z &= \sum_s (s_s Q''_{\eta s} + c_s Q''_{\zeta s}); \\
M''_x &= \sum_s (\zeta_{ks} Q''_{\eta s} - \eta_{ks} Q''_{\zeta s} + M''_{\xi s}).
\end{aligned} \right. \quad (75)$$

Подстановка (70), (71) в (74), (75) после соответствующих преобразований приводит к тождествам, что также свидетельствует о корректности предложенного решения и его согласованности с общей теорией [1].

Аналогичные приведенным в данном разделе формулам выражения могут быть получены для погонных нагрузок, приходящихся на s -й элемент, и объемных сил и моментов, но в статье они не приводятся, поскольку указанные факторы несущественны в практических расчетах.

Выводы

В данной работе рассмотрены отдельные элементарные состояния стержня с прямоугольным поперечным сечением с учетом граничных сил: растяжение-сжатие, изгибы во взаимно перпендикулярных плоскостях и кручение. В каждом состоянии получена система исходных дифференциальных уравнений стержня с учетом деформации при сдвигах и кручении: геометрические уравнения (6a-d), физические уравнения (11a-d) и уравнения равновесия (15a-d). Получены также формулы, определяющие функции деформации (24a-d), объемные силы и моменты (27a-d), (26a-d), напряжения (28a-d), (29a-d) и деформационные характеристики жесткости (31a-d).

Полное поперечное сечение стержня составляется из отдельных прямоугольных элементов, которые соединяются друг с другом в произвольно заданных узлах, образуя сечение открытого, закрытого или комбинированного профиля. Установлены соотношения между базовыми перемещениями (20), (22), деформациями (41) и функциями деформации (27)-(32), заданными в ГСК полного сечения и ЛСК отдельного элемента. Определены выражения для равнодействующих граничных сил и моментов (26) и для линейных и угловых перемещений узлов поперечного сечения (45), в которых используются неизвестные коэффициенты при деформациях сдвигов и кручения в ГСК.

Данные коэффициенты находятся путем решения системы уравнений, формируемой из уравнений равновесия сил (47) и моментов (49) в узлах поперечного сечения и уравнений совместности линейных (46) и угловых (48) перемещений элементов сечения в этих узлах. Составление этих уравнений только для граничных сил и линейных перемещений достаточно при определении функций деформации для тонкостенного поперечного сечения, состоящего из прямоугольных элементов с соотношением сторон $b/h > 10$. Привлечение дополнительных уравнений равновесия и совместности для граничных моментов и угловых перемещений позволяет рассчитывать толстостенные сечения с соотношением $b/h < 10$.

Найден порядок (50)-(54) определения функций деформации и получены формулы (55)-(65) для вычисления искомых деформационных характеристик жесткости полного сечения. Предложены два варианта определения усилий и напряжений в ГСК и ЛСК по (66)-(75), которые позволяют проконтролировать процесс вычислений.

Таким образом, предлагаемая теория позволит находить функции деформации и жесткостные характеристики для тонкостенных и толстостенных стержней и разрабатывать уточненные конечные элементы с учетом деформации для численных исследований. Перспективным направлением использования таких конечных элементов является расчет большепролетных стальных, сталежелезобетонных и железобетонных пролетных строений автодорожных мостов, поперечное сечение которых бывает открытого, закрытого (коробчатого) и комбинированного типа. При этом стальные элементы сечения являются тонкостенными, железобетонные элементы – толстостенными.

Библиографический список

1. Петреня, Е.Н. Исходные дифференциальные уравнения пространственного стержня с многоконтурным поперечным сечением произвольной формы/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. – Воронеж. - №2. – 2011. – С. 7-28.
2. Петреня, Е.Н. Определение характеристик произвольного поперечного сечения стержня аналитическим методом/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. – Воронеж. - №2. – 2011. – С. 29-52.
3. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни/ В.З. Власов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. - С. 9-66, 253-299.

References

1. Petrenya, E.N. Initial Differential Equations of Spatial Bar with the Multicontour Cross-section of Arbitrary Shape / E.N. Petrenya, A.A. Petranin // Structural Mechanics and Constructions. – Voronezh. - №2. - 2011. - P. 7-28.
2. Petrenya, E.N. Definition of Characteristics of Arbitrary Cross-section Bar by Analytic Method / E.N. Petrenya A.A Petranin //Structural Mechanics and Constructions. – Voronezh. - №2. - 2011. - P. 29-52.
3. Vlasov, V.Z. Thin-wall elastic rods/ V.Z. Vlasov. – M.: State pub. Of phys.-math. Literature, 1959. – P. 9-66, 253-299.

Ключевые слова: стержневая теория, депланация, дифференциальные уравнения, характеристики поперечного сечения, центр кручения, центр изгиба

Keywords: theory of rods, deplanation, differential equations, parameters of cross-section, center of torsion, center of bend

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
А.Н. Синозерский
Ст. преподаватель
кафедры строительной механики
Р.А. Мухтаров
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30
e-mail: rinat196111@rambler.ru

The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Sc, Prof. of Department
of Structural Mechanics
A. N. Sinozersky
Lecturer of Department of Structural Mechanics
R. A. Muhtarov
Voronezh, Russia tel.: 8(473)2715230
e-mail: rinat19611 @rambler.ru

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БАЗОВЫХ УСИЛИЙ И НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ

На основании закона деформирования, установленного в опытах на центральное сжатие призм из мелкозернистого бетона, предложена методика определения при заданных относительных эксцентриситете \bar{e} и скорости нагружения $\dot{\theta}$, максимального значения равнодействующей $N_b(e, \dot{\theta})$ внутренних сил, называемой базовой, и соответствующего базового напряжённно-деформированного состояния (б.н.-д.с.). Б.н.-д.с. характеризуется деформациями $\tilde{\varepsilon}$ и наибольшей $\tilde{\varepsilon}_{rb}$, параметром $\tilde{B}_{rb}(e, \dot{\theta})$ эпюры $\tilde{\varepsilon}$ и коэффициентом увеличения $\tilde{r}_b(e, \dot{\theta}) > 1$ деформации $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$, соответствующей призмному пределу прочности $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta})$.

A.N. Sinozersky, P.A. Muhtarov

DEFINITION OF BASIC STRESSES AND DEFLECTED MODE UNDER ECCENTRIC COMPRESSION

Based on law of distortion, determined during experiments on centric compression of prisms from fine concrete, there was proposed the method of definition of deflected mode at specified relational eccentricities and loading speed θ , maximal value of resultant of internal forces $N_b(e, \dot{\theta})$, called underlying, and appropriate underlying deflected mode. Underlying deflected mode is characterized by deformation $\tilde{\varepsilon}$ and the biggest $\tilde{\varepsilon}_{rb}$, parameter $\tilde{B}_{rb}(e, \dot{\theta})$ diagram $\tilde{\varepsilon}$, and coefficient of increase $\tilde{r}_b(e, \dot{\theta}) > 1$ of deformation $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$, corresponding to prism strength limit $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta})$.

1. Постановка задачи

Рассматривается стержень (рис. 1) длиной L прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h из мелкозернистого бетона в возрасте 28 суток. Равнодействующая внешних сжимающих сил p приложена в точке f с координатами $y_f, z_f = 0$ и возрастает с постоянной относительной скоростью $\dot{\theta}$ от нуля до F_b .

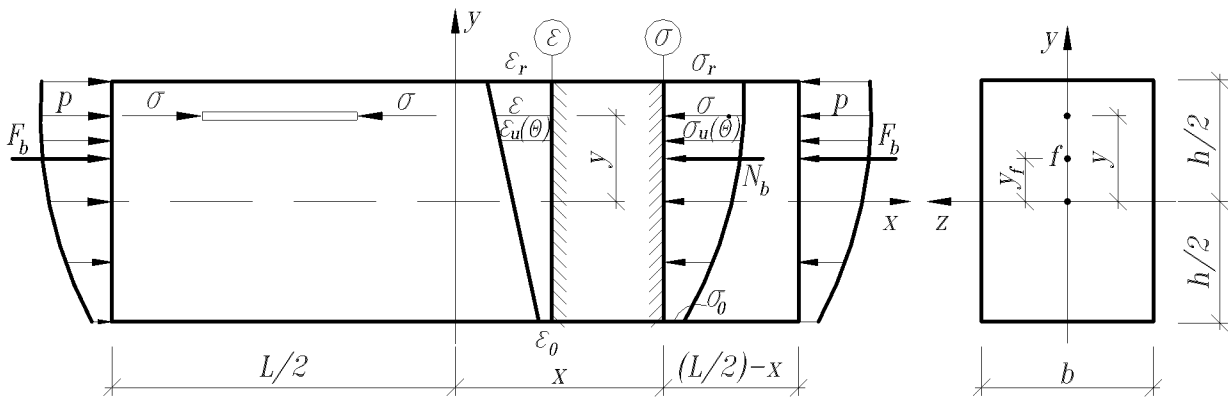


Рис. 1. Стержень из мелкозернистого бетона

Элемент короткий, что исключает влияние гибкости на результаты расчёта. Сжимающие деформации ε , нормальные напряжения σ , равнодействующие внешних F_b и внутренних N_b сил принимаются по модулю.

Все компоненты тензора напряжений кроме $\sigma_x = \sigma$ равны нулю.

При центральном сжатии [1] с заданной скоростью $\dot{\theta} = const$ установлен закон деформирования

$$\tilde{\sigma}(\dot{\theta}) = E \cdot \varepsilon - \tilde{\alpha}(\dot{\theta}) \cdot (\varepsilon)^{\tilde{\beta}(\dot{\theta})}, \quad (1)$$

параметры которого $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ являются функцией $\dot{\theta}$. График « $\sigma - \varepsilon$ » представлен на рис. 2.

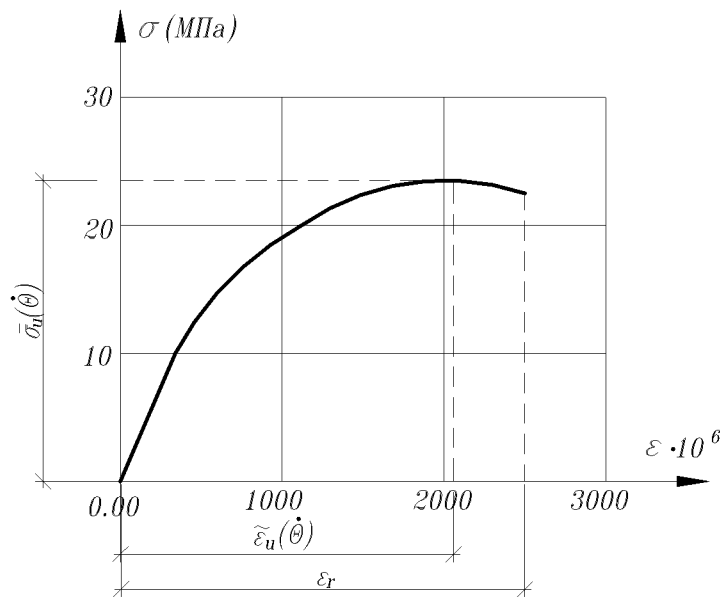


Рис. 2. Зависимость « $\sigma - \varepsilon$ » при центральном сжатии

Полагаем, что при внецентренном воздействии с заданным эксцентриситетом $e = y_f/h$ и скоростью $\dot{\theta} = const$:

-на уровне координаты “у” деформация

$$\varepsilon = B \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_r \quad (2)$$

с наибольшей

$$\varepsilon_r = \varepsilon_u(\dot{\theta}) \cdot r, \quad (3)$$

где B, m^{-1} – параметр эпюры ε ;

- $r > 1$ – коэффициент увеличения $\varepsilon_u(\dot{\theta})$, зависящий от e и $\dot{\theta}$, по причине возникающего неоднородного состояния σ и ε в отличие от центрального нагружения с $\sigma = const$ и $\varepsilon = const$ во всём сечении;
 - напряжения распределяются по закону (1).

Найдём максимальное при заданных $e, \dot{\theta}$ значение равнодействующей N_b внутренних сил, называемой в дальнейшем **базовой**, и соответствующее **базовое н.-д.с.**

2. Вывод расчётных формул

Для левой (см. рис.1) отделённой части длиной $x + (L/2)$ записываем уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum x = 0 \dots F_b - b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot dy &= 0 ; \\ \sum m_z = 0 \dots F_b \cdot y_f - b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot dy \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

или с учётом (1), (2) и $\alpha(\dot{\theta}) = \alpha, \beta(\dot{\theta}) = \beta$ (здесь и в дальнейшем)

$$\left. \begin{aligned} F_b &= b \cdot \left[E \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (B_b \cdot y - 0,5 \cdot B_b \cdot h + \varepsilon_r) \cdot dy - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (B_b \cdot y - 0,5 \cdot B_b \cdot h + \varepsilon_r)^\beta \cdot dy \right]; \\ F_b \cdot y_f &= b \cdot \left[E \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (B_b \cdot y - 0,5 \cdot B_b \cdot h + \varepsilon_r) \cdot dy \cdot y - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (B_b \cdot y - 0,5 \cdot B_b \cdot h + \varepsilon_r)^\beta \cdot dy \cdot y \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

После преобразований получаем

$$F_b = b \cdot h \cdot E \cdot (\varepsilon_r - 0,5 \cdot B_b \cdot h) - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+1}}{B_b}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_b \cdot y_f &= \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B_b - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+1}}{B_b} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_r}{B_b} \right) - \\ &\quad - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 2} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+2} - (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+2}}{(B_b)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножая (5) на $(-y_f)$ и складывая с (6), будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(B_b) &= \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B_b - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+1}}{B_b} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_r}{B_b} \right) - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 2} \\ &\quad \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+2} - (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+2}}{(B_b)^2} + y_f \cdot b \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+1}}{B_b} - \right. \\ &\quad \left. - h \cdot E \cdot \left(\varepsilon_r - \frac{B_b \cdot h}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Если} \quad B_b \cdot h > \varepsilon_r, \quad (8)$$

то в сечении эпюра ε двух знаков. В связи с этим вводим допущение, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Зависимость « $\sigma - \varepsilon$ » в случае растяжения

$$\sigma(\dot{\theta}) = E \cdot \varepsilon + \alpha(\dot{\theta}) \cdot (\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta})}, \quad (9)$$

где $\alpha(\dot{\theta}), \beta(\dot{\theta})$ – коэффициенты, те же, что и в (1), с заданной скоростью $\dot{\theta}$;

деформации ε – относительные ($\varepsilon < 0$) и при вычислении $(\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta})}$ берутся по модулю.

Здесь в уравнениях (5), (6), (7) выражения

$$(\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+1} \text{ и } (\varepsilon_r - B_b \cdot h)^{\beta+2} \quad (10)$$

следует заменить соответственно на

$$(B_b \cdot h - \varepsilon_r)^{\beta+1} \text{ и } (B_b \cdot h - \varepsilon_r)^{\beta+2}. \quad (11)$$

Когда $B_b \cdot h = \varepsilon_r$, (12)

вместо (10) и (11) вводятся нули.

Определение параметра B_b и силы $F_b = N_b$ проводим численными способами.

Назначаем коэффициент $r_0 = 1$ и шаг $\Delta = 0,05$. Выполняем расчёты при r_0 ,

$$r_1 = r_0 + 1 \cdot \Delta, r_2 = r_0 + 2 \cdot \Delta, \dots, r_k = r_0 + k \cdot \Delta. \quad (13)$$

Вычисление $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k$ начинаем с отделения корня уравнения (7). Например, в случае r_0 , имея при B_{0c} и B_{0m}

$$\Phi(B_{0c}) > 0 \text{ и } \Phi(B_{0p}) < 0, \quad (14)$$

находим методом хорд [2] с точностью до 6÷7-значущих цифр:

$$B_{0p+1} = \frac{B_{0c} \cdot (\Phi(B_{0p})) - B_{0p} \cdot (\Phi(B_{0c}))}{\Phi(B_{0p}) - \Phi(B_{0c})}, \quad (15)$$

где «р» и «р+1» - приближения параметра B_0 .

Затем из выражения (5) определяем усилие F_0 . Продолжаем расчёт до достижения условия

$$F_{k-2} < F_{k-1} > F_k. \quad (16)$$

После чего для вычисления $\max F = N_b$ применяем квадратичную интерполяцию [3], полагая

$$F_r = A_0 + A_1 \cdot u + A_2 \cdot u^2, \quad (17)$$

$$u = \frac{r - r_{k-2}}{\Delta} \quad (18)$$

с узловыми значениями $u = 0, u = 1, u = 2$ и коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= F_{k-2}, \\ A_1 &= 0,5 \cdot (-3 \cdot F_{k-2} + 4 \cdot F_{k-1} - F_k), \\ A_2 &= 0,5 \cdot (F_{k-2} + 2 \cdot F_{k-1} + F_k). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Далее устанавливаем

$$\text{положение экстремума } u_3 = -A_1/2 \cdot A_2 \quad (20)$$

и соответствующие:

➤ базовое усилие $\max F = N_b = A_0 + A_1 \cdot u_3 + A_2 \cdot u_3^2$, (21)

➤ коэффициент увеличения $r_b = r_{k-2} + \Delta \cdot u_3$, (22)

➤ деформацию ε_{r_b} по (3).

В случае $\varepsilon_r = \varepsilon_{r_b}$ можно найти параметр B_{r_b} и усилие $N_{r_b} = F_{r_b}$.

При необходимости повторяем расчёт, уменьшив шаг Δ .

3. Вычисление показателей базовых состояний по данным испытаний на центральное сжатие

3.1. Партия 1

Общие сведения:

- призмы $b \cdot h \cdot L = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$ м;
- относительная скорость нагружения $\bar{\theta}_1 = 0,3923$;
- зависимость « $\sigma - \varepsilon$ »

$$\bar{\sigma}(\bar{\theta}_1) = 31390 \cdot \varepsilon - 15885000 \cdot (\varepsilon)^{2,0810} \quad (23)$$
 при $\bar{\sigma}_u = 26,09$ МПа и $\bar{\varepsilon}_u = 1600 \cdot 10^{-6}$;
- шаг $\Delta = 0,05$.

3.1. а. Определение $\tilde{F}_b(e_a, \theta_1)$ при $\bar{y}_{fa} = 0,005$ м и $e_a = \bar{y}_{fa}/h = 0,05$

Случай $r_0 = 1$, $\varepsilon_{r_0} = 1,6 \cdot 10^{-3}$.

Задаёмся $B_{0c} = 1,125 \cdot 10^{-2}$ м⁻¹ и $B_{0p=0} = 1,120 \cdot 10^{-2}$ м⁻¹, получаем по (7)

$$\Phi(B_{0c}) = 1,06428 \cdot 10^{-5} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0 \text{ и } \Phi(B_{00}) = -8,81700 \cdot 10^{-7} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0.$$

Далее по формуле (15), а затем по (7) будем иметь

$$B_{0p=1} = \frac{1,125 \cdot 10^{-2} \cdot (-8,817 \cdot 10^{-7}) - 1,120 \cdot 10^{-2} \cdot 1,06428 \cdot 10^{-5}}{-8,817 \cdot 10^{-7} - 1,06428 \cdot 10^{-5}} =$$

$$= 1,1203824 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$$

$$\text{и } \Phi(B_{01}) = |-3 \cdot 10^{-10}| \text{ МН} \cdot \text{м} < 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Здесь и в дальнейшем расчёт заканчиваем в случае

$$|B_{0p+1}| \text{ МН} \cdot \text{м} \leq 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}. \quad (24)$$

Принимаем параметр $B_0 = 1,1203824 \cdot 10^{-2}$ м⁻¹, при котором из (5) находим усилие

$$F_0 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 31390 \cdot (1,6 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 1,1203824 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1) - \frac{0,1 \cdot 15885000}{3,081}.$$

$$\cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-3})^{3,081} - (1,6 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 1,1203824 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1)^{3,081}}{1,1203824 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 2,17232 \cdot 10^{-1} \text{ МН} = 217,232 \text{ кН}.$$

Случай $r_1 = 1,05$, $\varepsilon_{r_1} = 1,68 \cdot 10^{-3}$.

При $B_{1c} = 1,210 \cdot 10^{-2}$ м⁻¹ и $B_{1p=0} = 1,208 \cdot 10^{-2}$ м⁻¹ по формуле (7) получим

$$\Phi(B_{1c}) = 2,5195 \cdot 10^{-6} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0 \text{ и } \Phi(B_{10}) = -2,0897 \cdot 10^{-6} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0.$$

Продолжая вычисления, будем иметь:

$$B_{1p=1} = \frac{1,210 \cdot 10^{-2} \cdot (-2,0897 \cdot 10^{-6}) - 1,208 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5195 \cdot 10^{-6}}{-2,0897 \cdot 10^{-6} - 2,5195 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 1,2089067 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$$

$$\text{и } |\Phi(B_{11}) = -2 \cdot 10^{-10} \text{ МН} \cdot \text{м}| < 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Так как условие (24) выполняется, то назначаем параметр $B_1 = 1,208907 \cdot 10^{-2}$, при котором $\Phi(B_1) = 0$, а усилие $F_1 = 2,19486 \cdot 10^{-1}$ МН = 219,486 кН.

Полученные сведения и результаты расчётов представлены в табл. 1, и на рис. 3, а построен график $F_m - r_m$.

Таблица 1

$\dot{\theta}_1$	e_a	m	r_m	$\varepsilon_{rm} \cdot 10^6$	$B_m \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$F_m, \text{ кН}$
0,3923	0,050	0	1,00	1600	1,1203824	217,232
		1	1,05	1680	1,2089067	219,486
		2	1,10	1760	1,3013655	221,048
		3	1,15	1840	1,3977300	221,942
		4	1,20	1920	1,4979084	222,193
		k=5	1,25	2000	1,6017872	221,822
		6	1,30	2080	1,7092173	220,853
		7	1,1952	1312,3	1,4881064	222,196

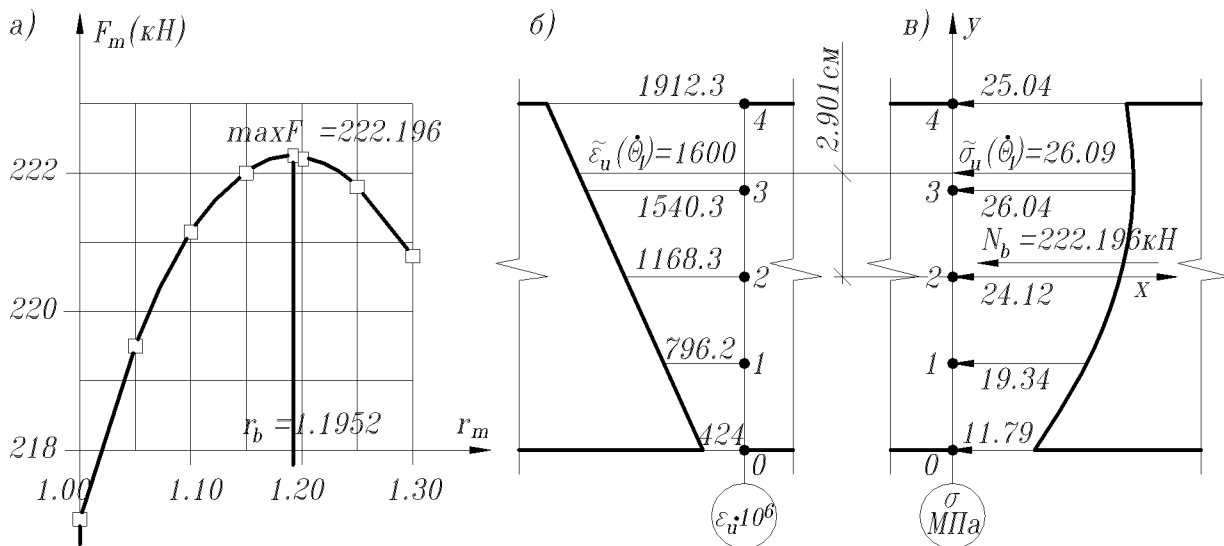


Рис. 3. $e_a = 0,05, \dot{\theta}_1$

При $k=5$ критерий (16) удовлетворяется

$$F_3 < F_4 > F_5.$$

В соответствии с (19) вычисляем постоянные:

$$A_0 = 221,942 \text{ кН},$$

$$A_1 = 0,5 \cdot (-3 \cdot 221,942 + 4 \cdot 222,193 - 221,822) = 0,562 \text{ кН},$$

$$A_2 = 0,5 \cdot (221,942 - 2 \cdot 222,193 - 221,822) = -0,311 \text{ кН}.$$

Находим по формулам:

$$(20) - \text{положение экстремума } \tilde{y}_3 = -(0,562)/2 \cdot (-0,311) = 0,9035;$$

(21) – базовое усилие

$$\max F = \tilde{N}_b(0,05, \dot{\theta}_1) = 221,942 + 0,562 \cdot 0,9035 + (-0,311) \cdot (0,9035)^2 = 222,196 \text{ кН};$$

(22) – коэффициент увеличения

$$\tilde{r}_b(0,05, \dot{\theta}) = 1,15 + 0,9035 \cdot 0,05 = 1,1952;$$

(3) – деформацию $\tilde{\varepsilon}_b(0,05, \dot{\theta}) = 1600 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1952 = 1912,3 \cdot 10^{-6}$, при которой для проверки определены параметр $\tilde{B}_b = 1,4881064 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ и равнодействующая $F_b = 222,196 \text{ кН}$ (см. строку $m=b$ в табл.1).

Значения условных деформаций $\tilde{\varepsilon}_{cb}$ и напряжений $\tilde{\sigma}_{cb}$ по (2) и (23) записываем в табл.2, а соответствующие эпюры изображаем на рис.3, б и 3, в.

Таблица 2

$\dot{\theta}_1$	e_a	Точки	0	1	2	3	4
0,3923	0,050	Координаты e_a , м	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050
		Деформации $\tilde{\varepsilon}_{cb} \cdot 10^6$ по (2)	424,194	796,220	1168,25	1540,27	1312,30
		Напряжения $\tilde{\sigma}_{cb}$, МПа по (23)	11,7916	19,3435	24,1247	26,0455	25,0402

В точках с координатой $y = 2,901 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ имеем $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_1) = 1,6 \cdot 10^{-3}$ и $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_1) = 26,09 \text{ МПа}$.

3.1.б. $\tilde{F}_b(0.10, \dot{\theta}_1)$ при $\bar{y}_{fB} = 0,01 \text{ м}$

Представим здесь только вычисления для $k - 2 = 1, k - 1 = 2, k = 3$ и $m = b$.

Принимаем коэффициент $B_1 = 1,854488 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ с $\Phi(B_0) = 5 \cdot 10^{-10} \text{ МН} \cdot \text{м}$ и усилие $F_1 = 1,9307395 \cdot 10^{-1} \text{ МН} \approx 193,074 \text{ кН}$.

В табл. 3 приведены результаты выполненного расчёта.

Таблица 3

$\dot{\theta}_1$	e_B	m	r_m	$\varepsilon_{rm} \cdot 10^6$	$B_m \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$F_m, \text{ кН}$
0,3923	0,10	1	1,20	1920	1,854488	193,074
		2	1,25	2000	1,955028	193,428
		$k = 3$	1,30	2080	2,0575542	193,238
		b	1,2575	2012	1,970278	193,434

3.1. в. $\tilde{F}_b(0.15, \dot{\theta}_1)$ и базовые н.-д.с. при $\bar{y}_{fB} = 0,015 \text{ м}$

Случай $r_1 = 1,10, \varepsilon_{r1} = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,1 = 1,76 \cdot 10^{-3}$.

Задаваясь $B_{1c} = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}, B_{1m=0} = 1,88 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, получим $B_{1c} \cdot h = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1} > \varepsilon_{r1}, B_{1p=0} \cdot h = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1} > \varepsilon_{r1}$

и в силу (8) – эпюру деформаций ε двух знаков. Для растягивающих ε зависимость (9) имеет вид

$$\bar{\sigma}(\dot{\theta}_1) = 31390 \cdot \varepsilon + 15885000 \cdot |\varepsilon|^{2,0810} \quad (25)$$

с $\varepsilon < 0$ или принимаемой по модулю при вычислении $|\varepsilon|^{2,0810}$.

Теперь, заменяя в уравнении (7) выражения (10) на (11), найдём $\Phi(B_{1c}) = 2,11147 \cdot 10^{-5} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0, \Phi(B_{10}) = -2,31854 \cdot 10^{-5} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0,$

а затем по формуле (15) – параметр

$$B_{1p=1} = 1,8852337 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1},$$

при котором из (7)

$$\Phi(B_{11}) = -1,64 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0.$$

Продолжая расчёт, по (15) и из (7) определяем

$$B_{1p=2} = 1,8852373 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ и } |\Phi(B_{12}) = -6 \cdot 10^{-10} \text{ МН} \cdot \text{м}| < 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Так как условие (24) удовлетворяется, то назначаем параметр $B_1 = 1,8852375 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ с $\Phi(B_1) = 3 \cdot 10^{-10} \text{ МН} \cdot \text{м}$ и усилие $F_1 = 1,67404 \cdot 10^{-1} \text{ МН} = 167,404 \text{ кН}$.

Результаты вычислений B_m и F_m для случаев представлены в табл.4, а на рис.4,а построен график $F_m - r_m$.

Таблица 4

$\dot{\theta}_1$	e_B	m	r_m	$\varepsilon_{rm} \cdot 10^6$	$B_m \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$F_m, \text{ кН}$
0,3923	0,15	1	1,10	1760	1,8852375	167,404
		2	1,15	1840	1,9835617	169,074
		3	1,20	1920	2,0831404	170,249
		4	1,25	2000	2,1839905	170,935
		5	1,30	2080	2,2861258	171,135
		$k = 6$	1,35	2160	2,3895609	170,855
		b	1,2958	2073.3	2,2775228	171,137

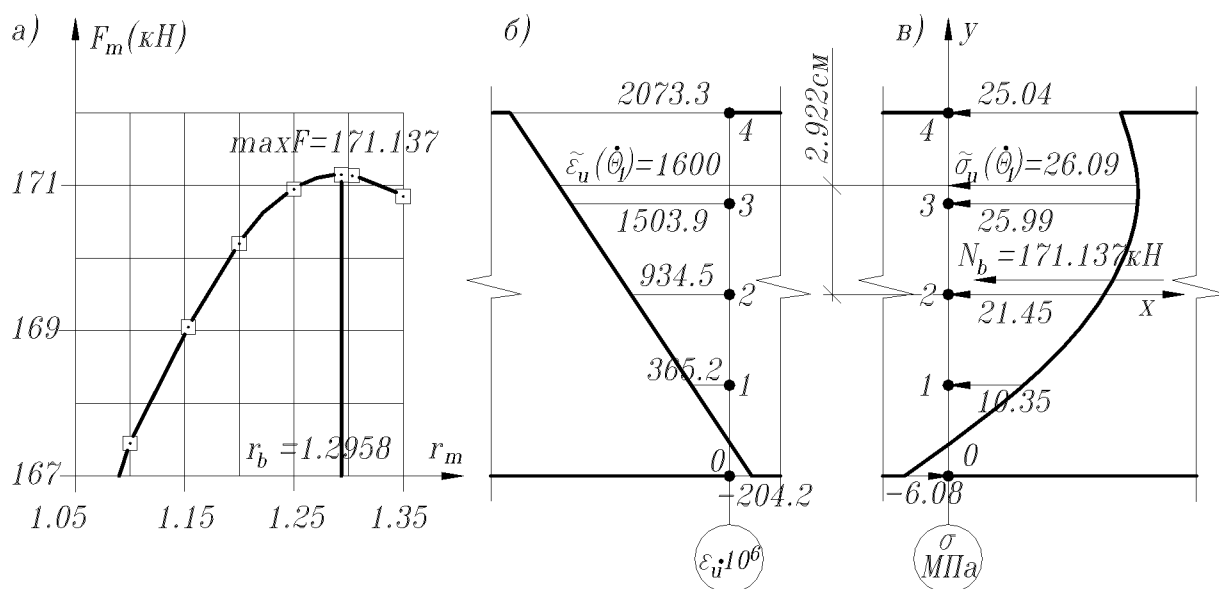


Рис. 4. $e_b = 0,15, \dot{\theta}_1$

Вычисленные по формулам (2) и (23) или (25) условные деформации $\tilde{\varepsilon}_{cb}$ и напряжения $\tilde{\sigma}_{cb}$ приведены в табл. 5, а соответствующие эпюры изображены на рис. 4, б и 4, в.

Таблица 5

$\dot{\theta}_1$	e_B	Точки с	0	1	2	3	4
0,3923	0,150	Координаты $y_c, \text{ м}$	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050
		Деформации $\tilde{\varepsilon}_{cb} \cdot 10^6$ по (4.2)	-204,223	365,158	934,539	1503,92	2073,3
		Напряжения $\tilde{\sigma}_{cb}, \text{ МПа}$ по (4.23) или (4.25)	-6,0777	10,3467	21,4502	25,9858	23,6846

В точках с координатами $\tilde{y} = 2,922 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и деформация $\tilde{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_1) = 1600 \cdot 10^{-6}$ и напряжения $\tilde{\sigma} = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}) \approx 26,09 \text{ МПа}$.

3.2. Партия 2

Общие сведения:

- призмы $b \cdot h \cdot L = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$ м;
- относительная скорость нагружения $\bar{\theta}_2 = 39,23 \cdot 10^{-3}$;
- зависимость « $\sigma - \varepsilon$ »

$$\tilde{\sigma}(\dot{\theta}_2) = 31390 \cdot \varepsilon - 2764700 \cdot (\varepsilon)^{1,80358} \quad (26)$$

при $\bar{\sigma}_u = 25,51$ МПа и $\bar{\varepsilon}_u = 1824 \cdot 10^{-6}$, а для растягивающих σ и ε

$$\tilde{\sigma}(\dot{\theta}_2) = 31390 \cdot \varepsilon + 2764700 \cdot |\varepsilon|^{1,80358} \quad (27)$$

с деформациями $\varepsilon < 0$ или принимаемыми по модулю при вычислении $|\varepsilon|^{1,80358}$.

- шаг $\Delta = 0,05$;
- относительные эксцентриситеты $e_a = 0,05$, $e_b = 0,10$ и $e_B = 0,15$.

3.2, а. Определение базовых усилий $\tilde{F}_b(e, \dot{\theta}_2)$ при $\bar{y}_{fa} = 0,005$ м, $\bar{y}_{fb} = 0,010$ м и $\bar{y}_{fB} = 0,015$ м

В табл. 6 представлены только результаты выполненных в соответствии с методикой п. 3.1 вычислений для $m = k - 2 = 1$, $m = k - 1 = 2$, $m = k = 3$ и $m = b$.

Таблица 6

$\dot{\theta}_2 \cdot 10^3$	Серия	e	m	r_m	$\varepsilon_{rm} \cdot 10^6$	$B_m \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$F_m, \text{ кН}$
39,23	а	0,05	1	1,15	2097,6	1,6386557	217,381
			2	1,20	2188,8	1,7511557	217,740
			$k = 3$	1,25	2280,0	1,8672091	217,574
			б	1,2092	2205,6	1,7722802	217,748
39,23	б	0,10	1	1,25	2280,0	2,2601136	190,138
			2	1,30	2371,2*	2,3744786*	190,144
			$k = 3$	1,35	2462,4*	2,4905153*	189,704
			б	1,2757	2326,9	2,3187210	190,197
	в	0,15	1	1,25	2280,0*	2,5057749*	168,564
			2	1,30	2371,2*	2,6201916*	168,896
			$k = 3$	1,35	2462,2*	2,7357423*	168,826
			б	1,3163	2400,9*	2,6576956*	168,917

* - $B_{rm} \cdot h > \varepsilon_{rm}$ и двухзначная эпора деформаций $\varepsilon = B_{rm} \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{rm}$ в сечении.

3.3. Партия 3

Общие сведения:

- призмы $b \cdot h \cdot L = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$ м;
- относительная скорость нагружения $\bar{\theta}_3 = 3,923 \cdot 10^{-3}$;
- зависимость « $\sigma - \varepsilon$ » в соответствии с (3.61)

$$\tilde{\sigma}(\dot{\theta}_3) = 31390 \cdot \varepsilon - 733160 \cdot (\varepsilon)^{1,58300} \quad (28)$$

при $\bar{\sigma}_u = 23,64$ МПа и $\tilde{\varepsilon}_u = 2045 \cdot 10^{-6}$, а для растягивающих σ и ε

$$\tilde{\sigma}(\dot{\theta}_3) = 31390 \cdot \varepsilon + 733160 \cdot |\varepsilon|^{1,58300} \quad (29)$$

с деформациями $\varepsilon < 0$ или принимаемыми по модулю при вычислении $|\varepsilon|^{1,58300}$;

- шаг $\Delta = 0,05$;
- относительные эксцентриситеты $e_a = 0,045$, $e_b = 0,090$ и $e_B = 0,135$.

3.3, а. Определение усилий $\tilde{F}_b(e, \dot{\theta}_3)$ при $\bar{y}_{fa} = 0,0045$ м, $\bar{y}_{fb} = 0,0090$ м и $\bar{y}_{fB} = 0,0135$ м

В табл. 7 приведены результаты вычислений, установленных по методике п. 3.1 для $m = k - 2 = 1$, $m = k - 1 = 2$, $m = k = 3$ и $m = b$.

Таблица 7

$\dot{\theta}_3 \cdot 10^3$	Серия	e	m	r_m	$\varepsilon_{rm} \cdot 10^6$	$B_m \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$F_m, \text{ кН}$
3,923	а	0,045	1	1,15	2351,8	1,8231443	204,750
			2	1,20	2454,0	1,9482932	205,072
			$k = 3$	1,25	2556,2	2,0770938	204,967
			b	1,2127	2480,0	1,9807194	205,085
3,923	б	0,090	1	1,25	2556,2	2,4998053	181,506
			2	1,30	2658,5	2,6263323	181,556
			$k = 3$	1,35	2760,8	2,7544522	181,239
			b	1,2818	2621,3	2,5801315	181,581
	в	0,135	1	1,25	2556,2*	2,7555549*	162,852
			2	1,30	2658,5*	2,8815207*	163,186
			$k = 3$	1,35	2760,8*	3,0086222*	163,184
			b	1,3247	2709,0*	2,9441210*	163,226

* - $B_{rm} \cdot h > \varepsilon_{rm}$ и двухзначная эпюра деформаций $\varepsilon = B_{rm} \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{rm}$ в сечении.

3.4. Оценка полученных сведений

Характеристики базовых состояний представлены в табл. 8.

Таблица 8

Партия j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	$\sigma_{u\theta j}, \text{ МПа}$	$\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_j) \cdot 10^6$	e	$\tilde{r}_b(e, \dot{\theta}_j) \cdot 10^6$	$\tilde{\varepsilon}_{rb}(e, \dot{\theta}_j) \cdot 10^6$	$B_{rbe, \theta j} \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	Усилие, кН	
								$\tilde{N}_b(e, \dot{\theta}_j)$	$\tilde{F}_u(e, \dot{\theta}_j) \pm \Delta \tilde{F}_u(e, \dot{\theta}_j)$
1	392,3	26,09	1600	0,050	1,1952	1912,3	1,4881064	222,196	236,3±17,7
				0,100	1,2575	2012,0	1,9702780	193,434	207,9±14,7
				0,150	1,2958	2073,3	2,2775228	171,137	185,3±13,7
2	39,23	25,51	1824	0,050	1,2092	2205,6	1,7722802	217,748	234,4±18,6
				0,100	1,2757	2326,9	2,3187210	190,197	207,9±10,8
				0,150	1,3163	2400,9	2,6576956	168,917	180,4±10,8
3	3,923	23,64	2045	0,045	1,2127	2480,0	1,9807194	205,085	222,6±15,7
				0,090	1,2818	2621,3	2,5801315	181,581	204,0±13,7
				0,135	1,3247	2709,0	2,9441210	163,226	186,3±7,8

Сравнение базовых усилий $\tilde{N}_b(e, \dot{\theta}_j)$ с опытными разрушающими $\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j) \pm \Delta\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j)$ представлено на рис. 5.

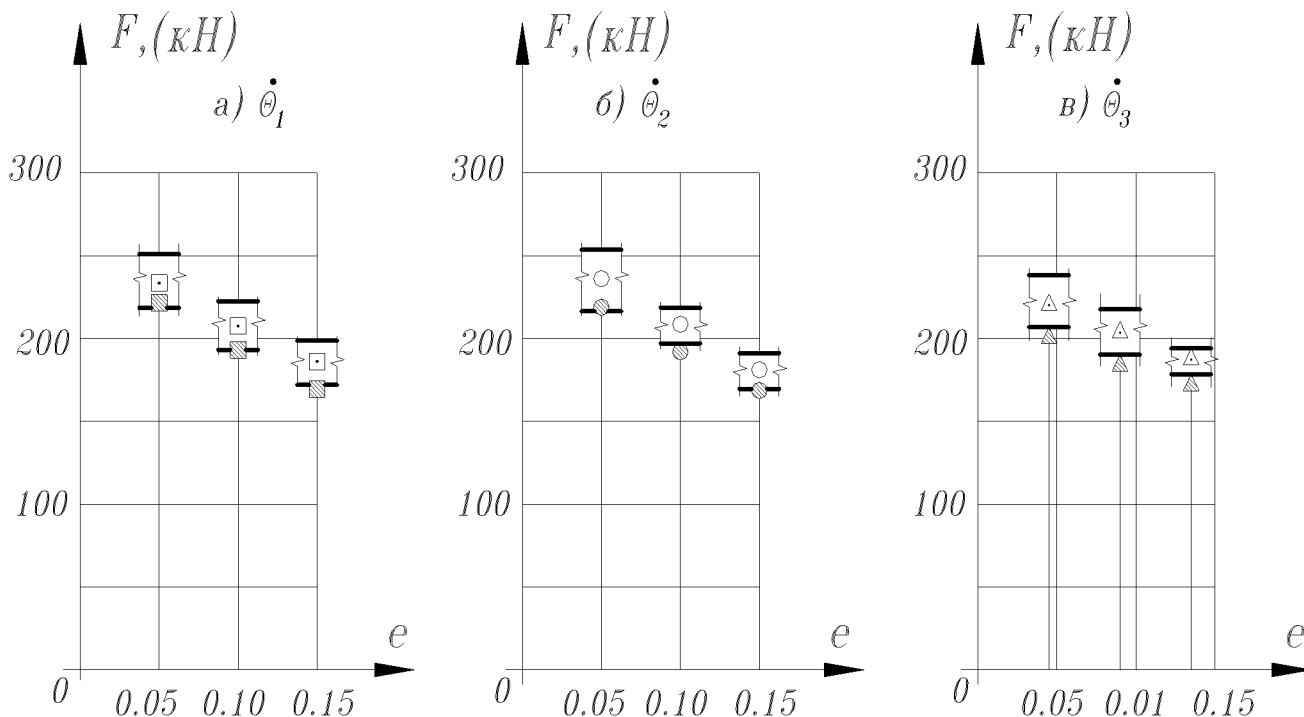


Рис. 5. $\square, \circ, \triangle$ - средние опытные разрушающие силы $\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j)$;
 $\blacksquare, \ominus, \blacktriangle$ - базовые усилия $\tilde{F}_b(e, \dot{\theta}_j)$;
 $\square, \circ, \triangle$ - границы доверительных интервалов $\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j)$ при вероятности $p = 0,95$

Выводы

Коэффициент увеличения \tilde{r}_b и наибольшая деформация $\tilde{\epsilon}_{r,b}$ являются нелинейными функциями относительных эксцентриситетов e и скоростей нагружения $\dot{\theta}$, возрастая при увеличении e и уменьшении $\dot{\theta}$.

Базовые усилия $\tilde{N}_b(e, \dot{\theta}_j)$ не превосходят 0,940 от опытных средних разрушающих $\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j)$ нагрузок и составляют $0,915 \div 1,016$ от характеризующих с вероятностью 0,95 нижнюю границу разрушения нагрузок $\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j) \pm \Delta\bar{F}_u(e, \dot{\theta}_j)$.

При расположении равнодействующей внутренних сил $\tilde{N}_b(e, \dot{\theta}_j)$ в границах упругого ядра сечения **напряжённо – деформированное состояние** может характеризоваться не только сжимающими σ и ϵ , но и растягивающими (см.рис. 4, б и рис. 4, в).

Библиографический список

1. Синозерский, А.Н. Определение усилий соответствующих началу микротрещинообразования, при внецентренных нагружениях призм из мелкозернистого бетона 28 – дневного возраста по методике условных деформации / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – 2011. – Вып. №1 (2). – С. 24-27.
2. Лапчик, М.П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. - 384 с.
3. Фильчаков, П.Ф. Справочник по высшей математике / П.Ф. Фильчаков. – Киев: Изд-во «Наукова думка», 1973. – 744 с.

Referencess

1. Sinezersky, A.N. Definition of Forces Corresponding to Microcracks Forming, during Off-center Loading of Prisms from Fine Concrete of 28 – days age according to Method of Deflected Mode/ A.N. Sinesersky, R.A. Muhtarov // Science-technic journal of VGASU. Construction Mechanics and Structures. – 2011. - Issue № 1(2). - P. 24-27.
2. Lapchic, M.P. Numerical Methods: Teaching aid for students / M.P.Lapchic, M.I. Ragulina, E.K. Hecker, under reduction of M.P. Lapchic. – M.: Public Center “Academy”, 2004. - 384 p.
3. Filchikov, P.F. Referencess book on Math/ P.F. Filchikov. – Kiev: Pub.”Naukova Dumka”. 1973. - 744 p.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, равнодействующая (базовая) внутренних сил, базовое напряжённо-деформированное состояние.

Keywords: eccentric compression, fine concrete, resultant of internal forces, base deflected mode.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.271: 625.745.12 +624.046.5

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
В.С. Сафронов
Аспирант кафедры строительной механики
Д.И. Доманов
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)263-07-57
e-mail: vss22@mail.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
Dr. of Tech. Sc., Professor of Department of Structural Mechanics
V.S. Safronov
The postgraduate student of Department Structural of Mechanics
D.I. Domanov
Voronezh , Russia , tel.: 8 (473)2 630757
e-mail: vss22@mail.ru*

В.С. Сафронов, Д.И. Доманов

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КОСИНЫ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МОСТОВ НА РИСК РАЗРУШЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛОК С НЕНАПРЯГАЕМЫМ АРМИРОВАНИЕМ ОТ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Исследуется распределение рисков разрушения нормальных сечений в железобетонных балочных пролетных строениях с ненапрягаемым армированием в зависимости от косины пролетного строения. Учитывается разброс прочностных характеристик материалов и действующих нагрузок. Для определения предельных значений изгибающих моментов используется нелинейный деформационный расчет. Приводятся результаты численных исследований на конкретных примерах.

V.S. Safronov, D I. Domanov

ASSESSMENT OF EFFECT OF CONCRETE BRIDGE SPAN AND ROAD JUNCTION ANGLE CHANGE ON RISK OF FRACTURE OF NORMAL SECTION OF BEAMS WITH NONPRE- STRESSED REINFORCEMENT CAUSED BY MOMENT OF DEFLECTION

Normal section failure risk distribution in concrete beam spans with nonprestressed reinforcement depending on change of road and span junction angle is under consideration. Spread of strength properties of materials and acting loads is taken into account. Nonlinear deformative computation is used for definition of limit value of moments of deflection. The results of numerical researches based on concrete examples are presented.

При существующей тенденции роста интенсивности движения и самих нагрузок, а также моральном и физическом старении существующих конструкций становится актуальной задача оценки вероятности появления катастрофических состояний несущих конструкций мостовых сооружений с учетом флуктуаций прочностных характеристик материалов и нагрузок. Данная проблема для сооружений, расположенных в условиях пересечения препятствия под прямым углом, уже была исследована в некоторых работах [1,2], однако в современных

условиях наблюдается увеличение доли мостовых сооружений (в основном путепроводов) с косым опиранием пролетных строений, вызванное ростом плотности застройки и экономической неэффективностью изменения траектории трассы или увеличения пролета для достижения прямого пересечения препятствия.

В данной работе исследовалось влияние косины на распределение рисков разрушения в нормальных сечениях балок пролетных строений от изгибающего момента. Вероятностные характеристики материалов были взяты из опытных данных [3], а флуктуации нагрузок приняты исходя из соотношений нормативных и расчетных значений постоянных и временных нагрузок.

В качестве объекта исследования использовались пролетные строения габаритом Г 15,25 + 0,75, без диафрагм из железобетонных балок с шагом 1,73 м таврового сечения с ненапрягаемой арматурой длиной 12 и 18 м в опалубке балок серии 3.503.1-73, рассчитанные под нагрузки А-11 и НК-80. Поперечное сечение пролетного строения, балок и конфигурация арматуры в балках приведены на рис. 1-2. Было рассмотрено 4 варианта угла косины пролетного строения: 45° , 60° , 75° и 90° .

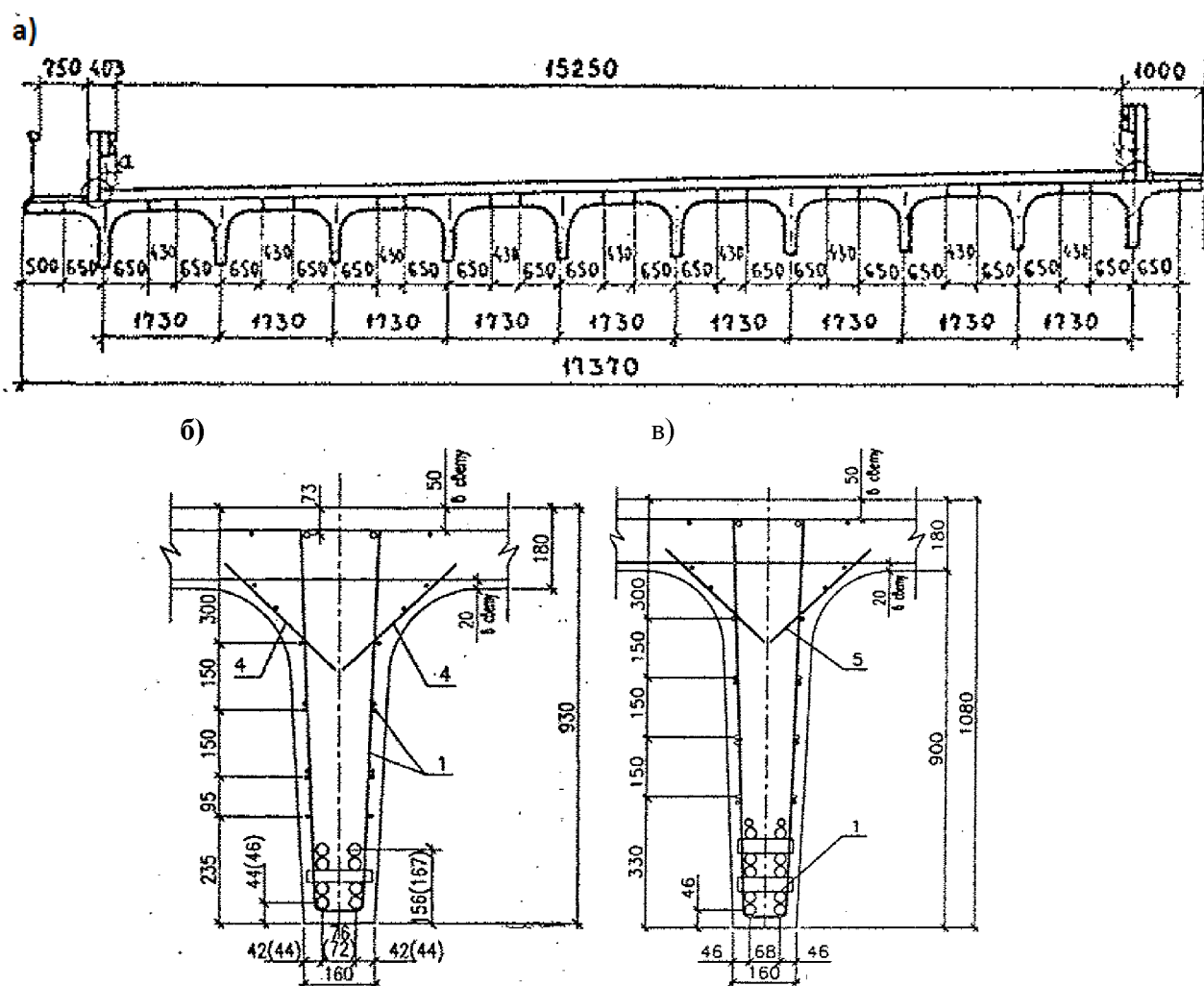


Рис. 1. Поперечное сечение исследуемых:

- а) пролетных строений,
- б) балки длиной 18 м,
- в) балки длиной 12 м

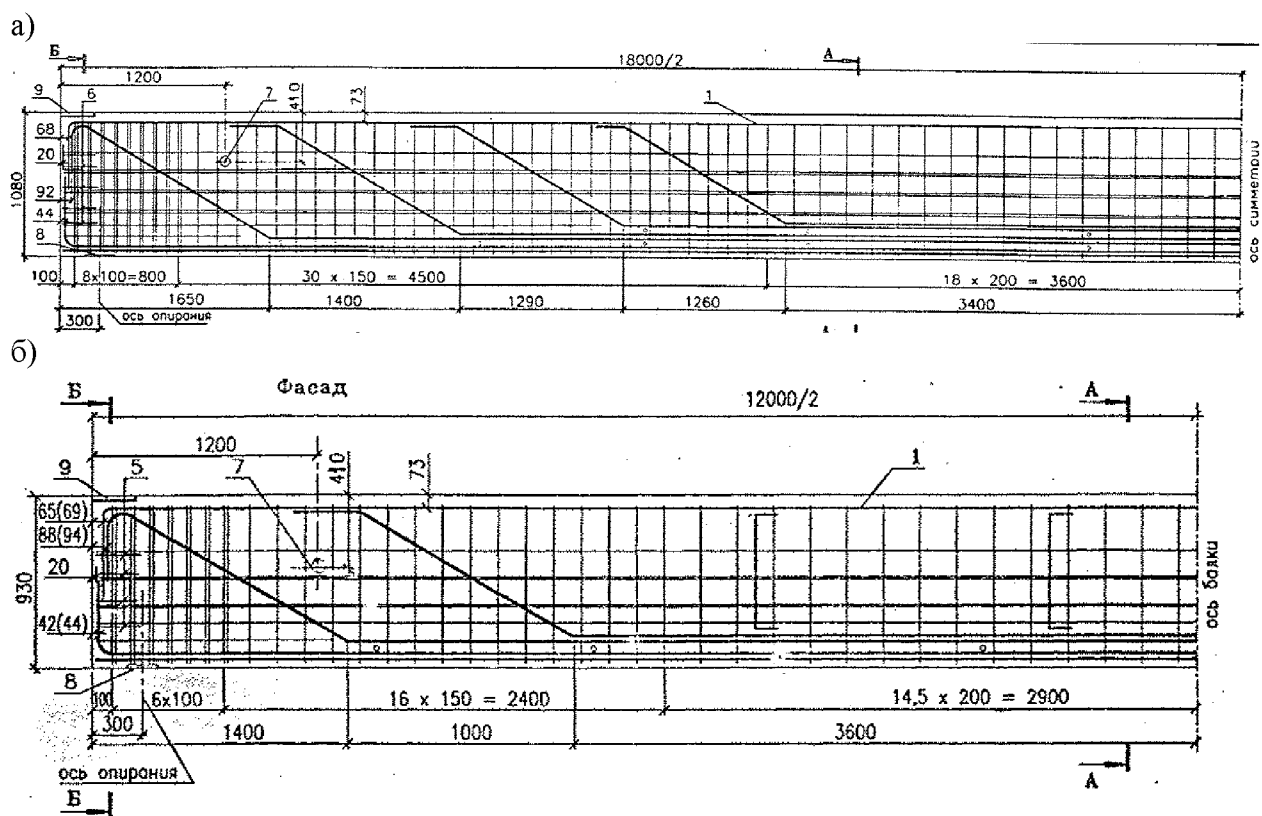


Рис. 2. Конфигурация арматуры в балках длиной:

- а) 18 м,
- б) 12 м

Исследование велось на проектные для данных балок временные нагрузки А-11 и НК-80, при этом рассматривались все возможные комбинации и варианты расположения нагрузки как по ширине, так и по длине проезжей части согласно [4].

После ввода исходных данных проводился анализ напряженно-деформированного состояния в программе SERIAL-MGBD, затем в MathCAD генерировались массивы случайных величин нагрузок и прочностных характеристик материалов балки и оценивался риск разрушения с использованием алгоритма нелинейного деформационного расчета [5], после чего в MS Excel строились эпюры и псевдоповерхности рисков, приведенные ниже.

Анализ напряженно-деформированного состояния выявил следующие особенности:

- максимальные (по модулю) значения моментов незначительно уменьшаются с увеличением косины пролетного строения (<10 %);
- при увеличении косины пролетного строения экстремум эпюры изгибающих моментов смещается в сторону тупого угла пролетного строения (чем дальше балка от оси пролетного строения, тем больше это смещение). Таким образом, в близких к краю пролетного строения балках значения изгибающих моментов в сечениях, приближенных к тупому углу, увеличиваются с увеличением косины, а в сечениях, близких к острому углу, – уменьшаются (рис. 3).

Отсюда следует вывод о том, что при анализе косых пролетных строений необходимо использовать методики и программы, которые позволяют осуществлять расчет на подвижную нагрузку по множеству сечений балки. В то время как в большинстве типовых проектов расчет ведётся для сечений в 1/2 и 1/4 пролета с нагрузкой, приложенной в наиболее невыгодном для данного сечения положении. Пример распределения изгибающих моментов в пролетном строении показан на рис. 3.

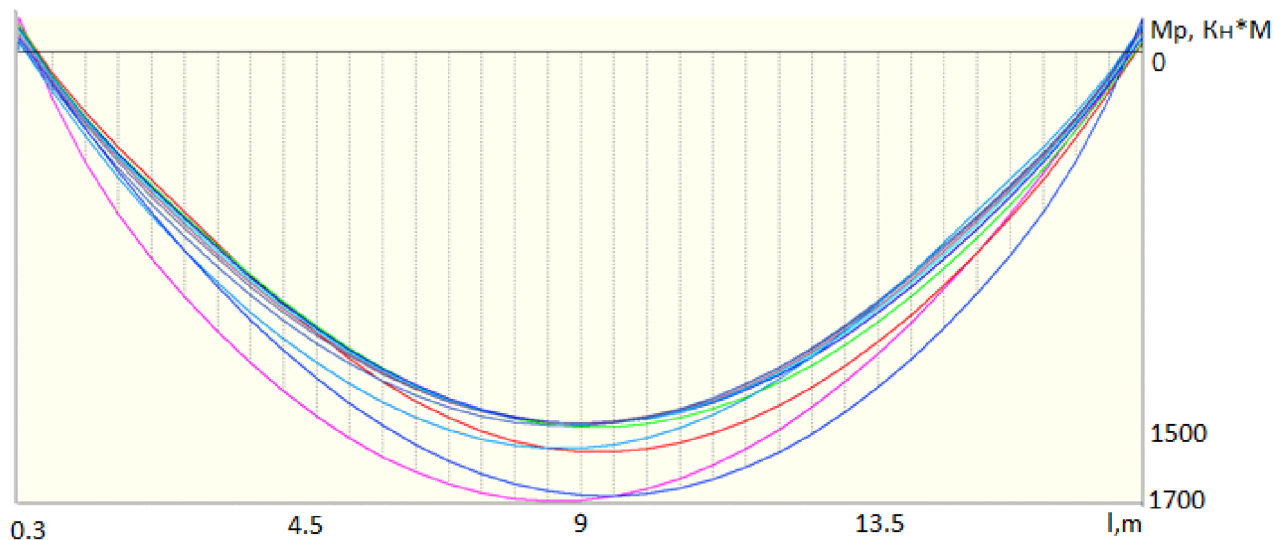


Рис. 3. Распределение изгибающих моментов по длине балок косого пролетного строения (разным цветом показаны разные балки)

Анализ, результатом которого являются эпюры (рис. 5) и псевдоповерхности (рис. 4) логарифмического показателя риска (P_f), показал, что в целом типовые пролетные строения удовлетворяют требованиям по надежности, однако запас прочности довольно мал: значения логарифмического показателя риска для строительных конструкций лежат в интервале $\{3;4\}$, при этом для данного типа конструкций это обычно число, близкое к 4, в данном исследовании же получили значения около 3,5.

Однако необходимо отметить, что низкие значения логарифмического показателя риска наблюдаются как в середине пролета, так и в местах отгибов рабочей арматуры. При увеличении косины пролетных строений экстремальные значения рисков в удаленных от оси сооружения балках длиной 18 м наблюдаются не в середине, а в местах отгибов рабочей арматуры (рис. 5), в то же время этого не наблюдается в балках длиной 12 м ввиду относительной удаленности отгибов от середины пролетного строения. Также необходимо сказать, что в крайних балках (1-3) наблюдаются довольно высокие показатели P_f , что связано с конфигурацией данного пролетного строения, при котором тротуар расположен с одной стороны.

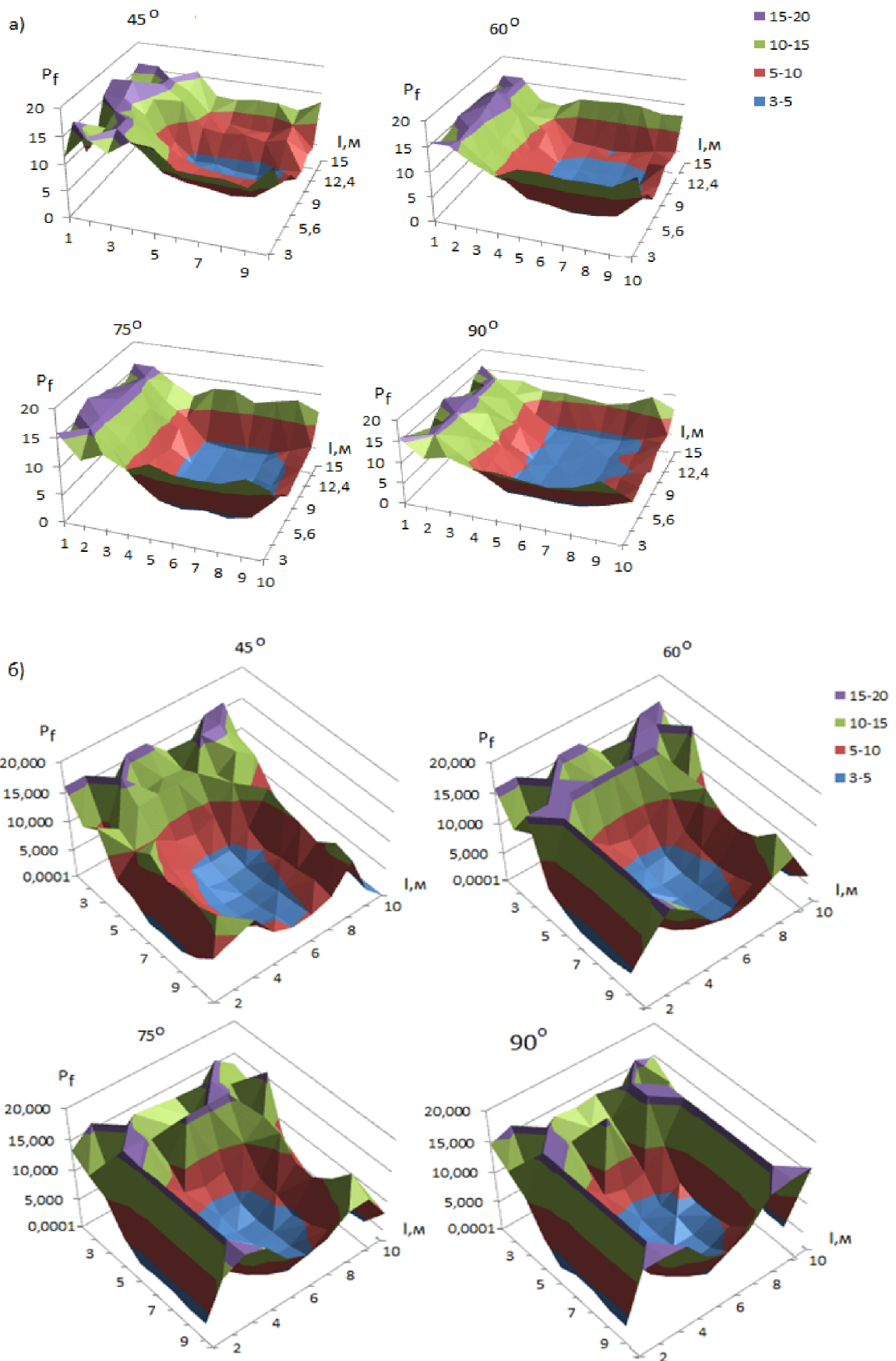


Рис. 4. Псевдоповерхности распределения логарифмического показателя риска при различной косине пролетных строений длиной:

- а) 18 м,
- б) 12 м

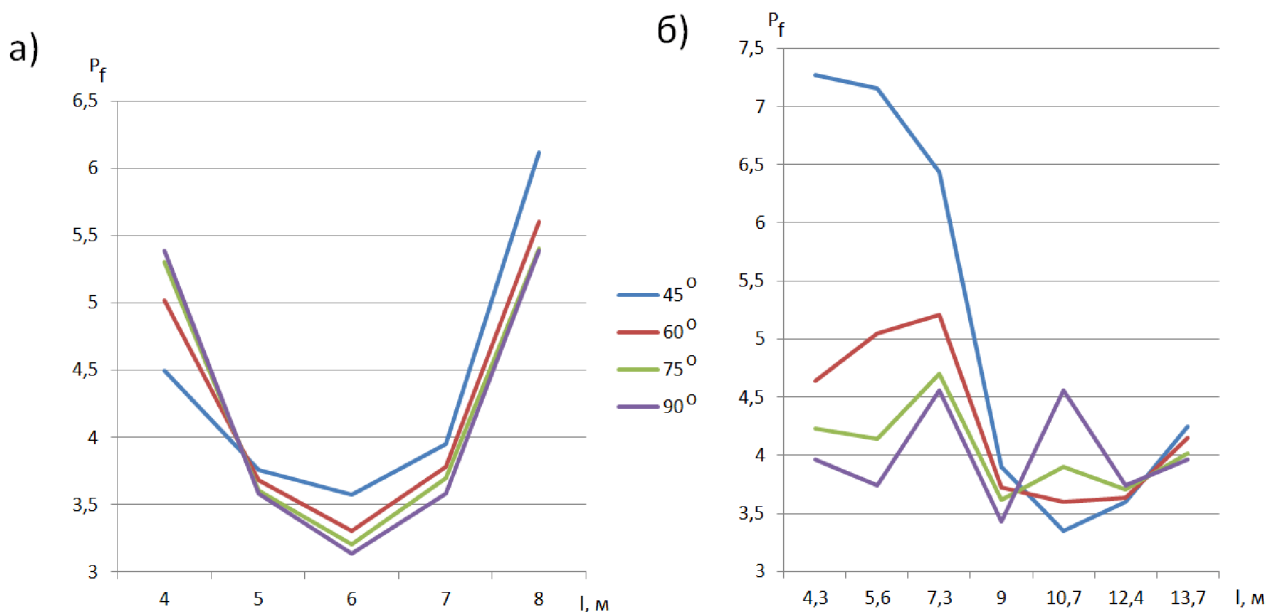


Рис. 5. Эпюра логарифмического показателя риска для наиболее загруженной балки пролетного строения длиной:
 а) 12 м,
 б) 18 м

Выводы

Анализ наглядно продемонстрировал, что для косых плитно-ребристых пролетных строений использование вариационного подхода к расчету, в отличие от традиционного детерминистического, позволяет выявить специфические для данных конструкций «слабые» места. Необходимо дальнейшее изучение конструкций такого типа именно с позиций вариационного подхода.

Библиографический список

1. Нгуен, Д. Х. Применение теории риска для вероятностной оценки работоспособности балочных систем из железобетона, используемых в мостостроении: дис. ... канд. техн. наук; защищена 25.06. 2010, утверждена 19. 11. 2010/ Д. Х. Нгуен. – Воронеж. – 2010. – 161 с.
2. Косенко, М.В. Нелинейный деформационный расчет прочности и живучести применяемых в мостостроении железобетонных плитно-балочных систем с дефектами и повреждениями: дис. ... канд. техн. наук; защищена 26. 02. 2007, утверждена 08. 06. 2007 / М.В. Косенко. – Воронеж, 2006. – 143 с.
3. Лычев, А.С. Вероятностные методы расчета строительных элементов и систем: учеб пособие/ А. С. Лычев. – М.:АСВ, 2008. – 184 с.
4. СНиП 2.05.03-84*. Мосты и трубы /Минстрой России. - М.: ГП ЦПП, 1996. - 214 с.
5. Сафронов, В.С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы / В.С. Сафронов, Д.И. Доманов // Строительная механика и конструкции. – Вып. №1(2), 2011. – С. 46-51.

References

1. Nguyen, Dinh Hoa. Application of Probabilistic Risk Assessment Theory of Working Capacity of Reinforced Concrete Beam Systems, used in Bridge Construction: Thesis for the degree of candidate of Technical Sciences: defended 25.06. 2010, certified 19.11. 2010/ Nguyen Dinh Hoa. - Voronezh, 2010. - 161 p.
2. Kosenko, M.V. Nonlinear Deformation Calculation of Strength and Viability of Concrete Slab-beam Systems with Defects and Injuries, Used in Bridge Construction: Thesis for the degree of candidate of technical sciences: defended 26. 02. 2007, certified 08. 06. 2007 / M.V. Kosenko. - Voronezh, 2006. - 143 p.
3. Lychev, A.S. Building Elements and Systems Probabilistic Calculation Methods: teaching aid / A. S. Lychev. – M.: ASV, 2008. – 184 p.
4. State Standard 2.05.03-84*. Bridges and Pipes/ Ministry of Russia. – M.: GP TCPP, 1996. - 214 p.
5. Safronov, V.S. Risk Assessment of Failure of Normal Section of Reinforced Beams of Arbitrary Shaped/ V.S. Safronov, D.I. Domanov // Construction Mechanics and Structures. Issue number 1 (2), 2011. - P. 46-51

Ключевые слова: теория риска, косые пролетные строения, железобетонные конструкции, деформационный расчет, влияние вариации характеристик материалов.

Keywords: risk theory, skew spans, concrete structures, deformation calculation method, effect of variations in material characteristics.

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
В.С. Сафронов
Аспирантка, кафедры
строительной механики
Ю.А. Доманова
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(919)2408774
e-mail: jas13@mail.ru

The Voronezh State University of Architecture and Civil Engineer-
ing
Dr. of Tech. Sc., Professor of Department
of Structural Mechanics
V.S. Safronov
The Structural postgraduate student
of Department of Structural Mechanics
Y.A. Domanova
Voronezh, Russia, tel.: +7(919)2408774
e-mail: jas13@mail.ru

В.С. Сафронов, Ю.А. Доманова

НЕЛИНЕЙНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРУБОПРОВОДНОГО ПЕРЕХОДА С ВАНТОВОЙ НЕСУЩЕЙ СИСТЕМОЙ

Представлены численные исследования напряженно-деформированного состояния вантового трубопроводного перехода с различными типами несущих систем, запроектированного для пропуска воды с одного на другой берег реки. С использованием конечно-элементных расчётных схем с помощью вычислительного комплекса CSI SAP 2000 проводится нелинейный статический расчет для оптимального подбора площадей поперечных сечений несущих вант. Сопоставляется материалоемкость несущих систем при разном числе несущих вант.

V.S. Safronov, Y.A. Domanova

NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF PIPELINE WITH BEARING CABLE-STAYED SYSTEM

Numerical researches of deflected mode of cable-stayed pipeline with various types of bearing systems designed for water transportation from one river bank onto another are analyzed in the article. Nonlinear static calculation for optimal choice of bearing cable cross – section areas is carried out with the help of computing hardware CSI SAP 2000 and with application of finite-element design diagram. Material capacity of bearing systems with different number of bearing bracing wares is compared.

В настоящей работе выполняется анализ НДС трубопровода с вантовыми несущими системами разных конфигураций при действии статических вертикальных нагрузок: постоянной нагрузки от собственного веса конструкций и временной нагрузки от веса воды. Схемы вантового трубопровода моделировались на основе конструкций висячего трубопроводного перехода через реку Ока в г. Орел, который ранее нами описывался в работе [2].

Трубопровод через р. Ока в г. Орел представляет собой трехпролетную комбинированную конструкцию (рис. 1), в которой для транспортирования воды используется стальная труба диаметром 820 мм со стенкой толщиной 10 мм. Средний пролет трубопровода подвешен к стальным кабелям диаметром 70 мм, крайние пролеты шарнирно опираются на железобетонные устои пилонов и анкерные фундаменты. Концы кабелей жестко заделываются в стойки анкерных фундаментов, высота которых от ростверка равна 5 м. Величина среднего пролета - 76 м, крайних – 15 м.

Кабели несущей системы поддерживаются пилонами, которые представляют собой железобетонные стойки, соединенные распорками. Пилоны сопряжены с устоями шарнирно.

К трубопроводу в среднем пролете при помощи поперечных швеллеров крепятся конструкции технологических мостиков для передвижения обслуживающего персонала. К этим же швеллерам приварены петли для крепления подвесок.

Величина временной равномерно распределенной по длине трубопровода нагрузки от веса воды - 5 кН/м.

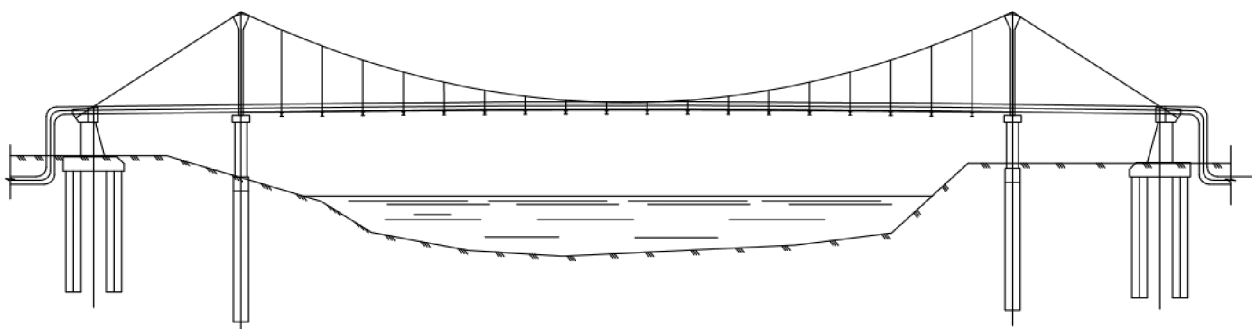


Рис. 1. Общий вид трубопровода в г. Орел через р. Ока

Для выполнения нелинейного статического расчета планировалось использование одного из следующих расчетных комплексов: MIDAS Civil и CSI SAP 2000. Была осуществлена апробация этих расчетных комплексов: решены две модельные задачи о поэтапном нагружении гибкой шарнирно опертой трубки, сосредоточенной симметричной и несимметричной нагрузкой. Загружение производилось в пять этапов. Схемы задач приведены на рис. 2.

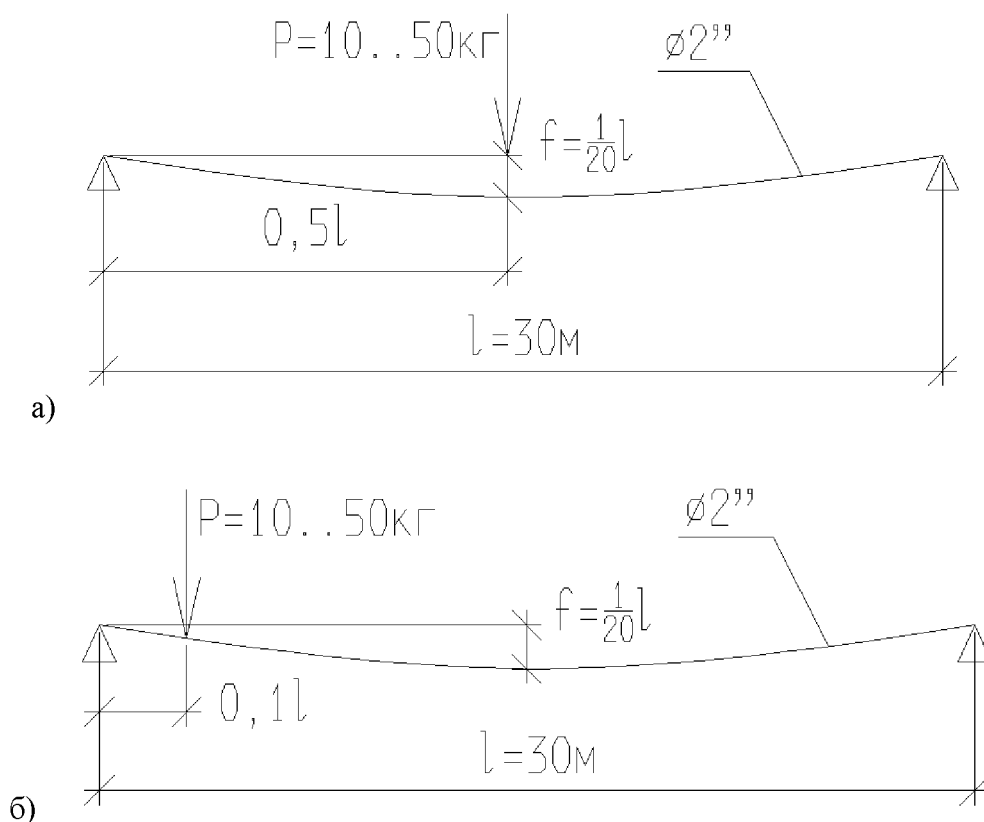


Рис. 2. Модельные задачи:

а) симметричное нагружение; б) несимметричное нагружение

По результатам нелинейного статического расчета были построены эпюры вертикальных перемещений оси гибкой трубки. На рис. 3 представлены графики сравнения перемещений, полученных с помощью программ MIDAS Civil и CSI SAP 2000, с экспериментальными данными, приведенными в работе [1]. Максимальная невязка для программы MIDAS Civil составила: при симметричном нагружении - 19,8 %, при асимметричном нагружении - 6,9 %;

для программы CSi SAP 2000: при симметричном нагружении – 14,8 %, при асимметричном нагружении – 7,7 %. Было принято решение об использовании для дальнейших расчетов программного комплекса CSi SAP 2000.

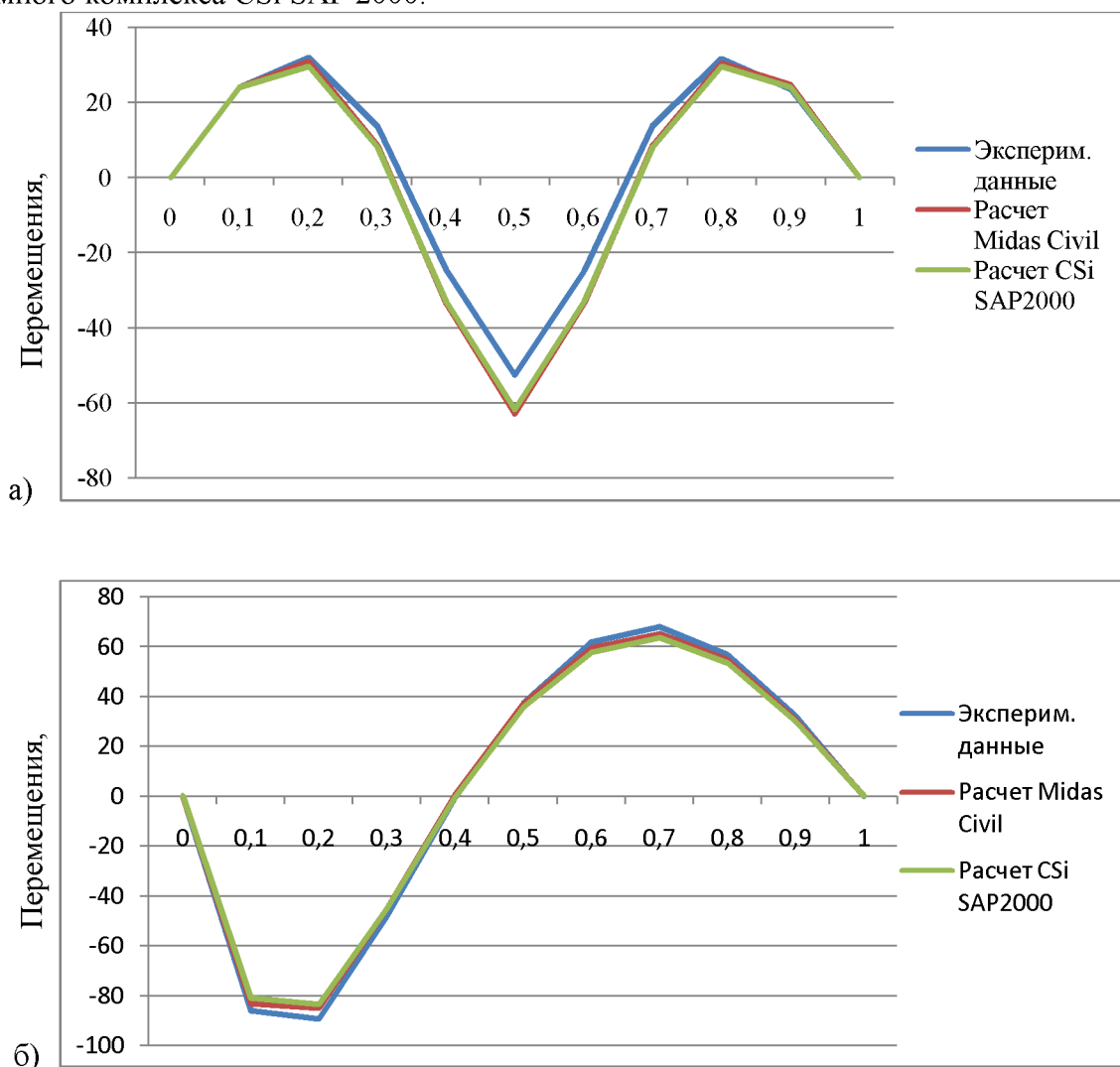


Рис. 3. Графики сравнения результатов перемещений, полученных с помощью программ MIDAS Civil и CSi SAP 2000, с экспериментальными данными:
а) при симметричном нагружении; б) при несимметричном нагружении

Для изучения особенностей деформирования при действии постоянных и временных нагрузок выполнялся нелинейный статический расчет трубопроводного перехода с разными типами вантовой несущей системы. В исходном объекте висячая несущая система была заменена на вантовые с одной, двумя и тремя поддерживающими вантами с каждой стороны пролета (расчетные схемы представлены на рис. 4). Каждая из расчетных схем загружалась постоянной нагрузкой от собственного веса конструкций и временной нагрузкой от веса воды в трубопроводе. Загружение временной нагрузкой в расчетах осуществлялось следующим образом: трубопровод разбивался на 54 отрезка равной длины, к отрезкам последовательно справа налево прикладывалась равномерно распределенная временная нагрузка. Каждый этап, в свою очередь, осуществлялся в десять итераций. После каждого этапа приложения проводился нелинейный статический расчет. По результатам всех 54 этапов строилась объемлющая эпюра изгибающих моментов балки жесткости, определялись максимальные усилия в вантах, проверялись условия прочности балки и вант. В случае невыполнения хотя бы одного из условий прочности площади поперечных сечений кабелей увеличивались и расчет

повторялся. Схема расчета приведена на рис. 5. Площади вант несущих систем, полученные в результате подбора, приведены в табл. 1.

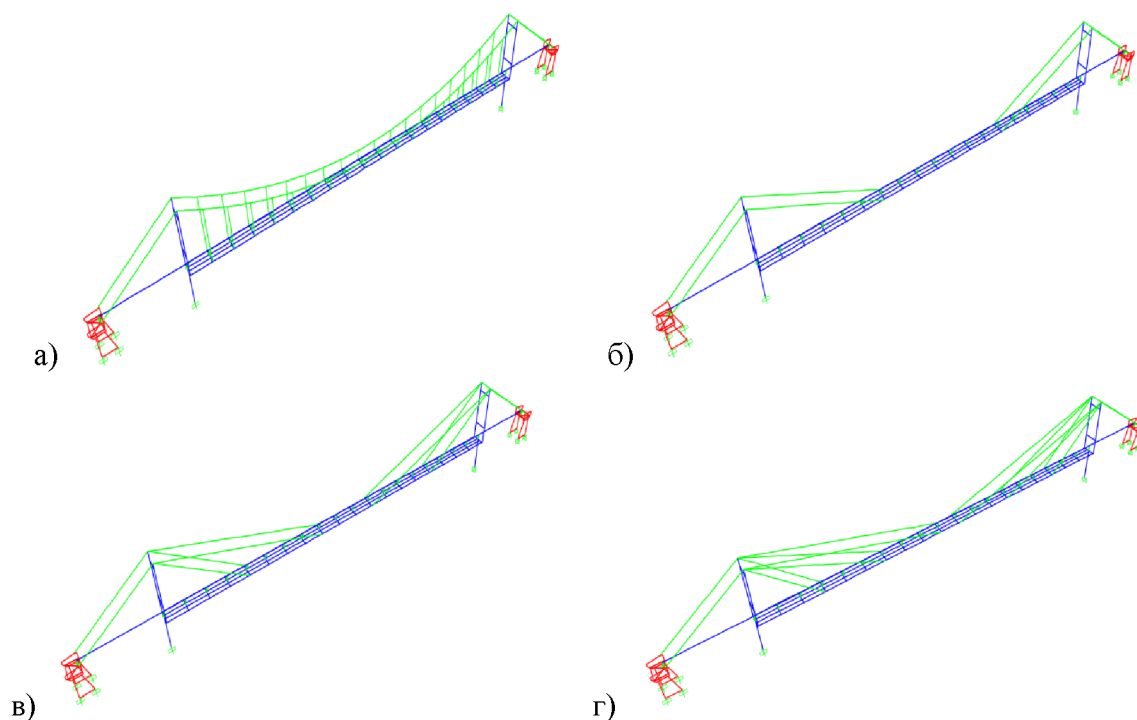


Рис. 4. Расчетные схемы трубопровода с различными типами несущих систем:
 а) висячей; б) вантовой с одной несущей вантой; в) вантовой с двумя несущими вантами;
 г) вантовой с тремя несущими вантами

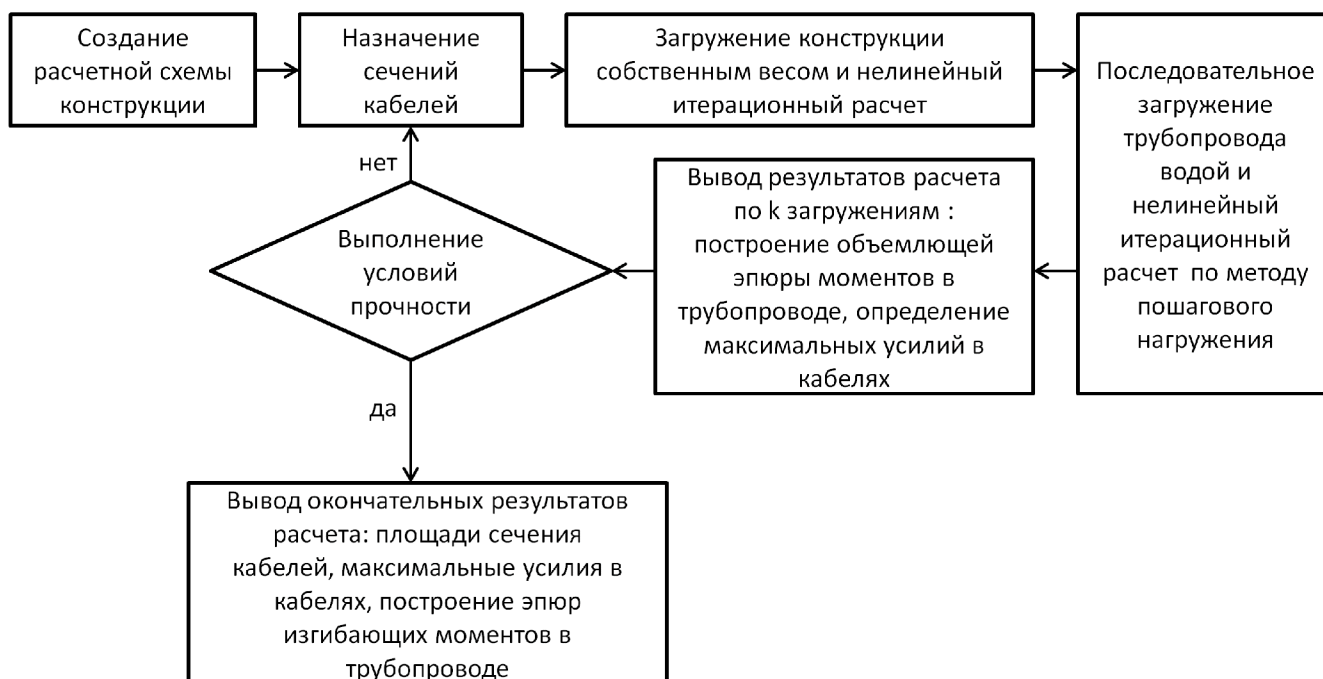


Рис. 5. Схема выполнения нелинейного расчета конструкций с подбором площадей кабелей несущей системы

Результаты подбора площадей сечений кабелей
для разных типов несущих систем

Тип несущей системы	Требуемая площадь сечения кабелей, мм ²
Висячая несущая система	4,98
Схема с одной несущей вантой	9,76
Схема с двумя несущими вантами	31,18
Схема с тремя несущими вантами	36,66

Финальным этапом анализа служит сопоставление материалоемкости кабельных систем. Для возможности теоретического сравнения материалоемкости без назначения конкретных сечений кабелей по ГОСТ была введена характеристика, названная условной материалоемкостью. Условная материалоемкость вычисляется по следующей формуле:

$$MU = \sum N_k \cdot L_k,$$

где N_k – усилие, возникающее в кабеле, L_k – длина соответствующего кабеля.

Значения условной материалоемкости для разных несущих систем приведены в табл. 2. На их основе можно сделать вывод о том, что вантовые несущие системы в исследуемом случае являются менее эффективными, чем оригинальная висячая система. При этом с увеличением числа вант эффективность их только уменьшается.

Таблица 2

Условная материалоемкость различных несущих систем
при полном загрузении вертикальными статическими нагрузками

Тип несущей системы	Условная материалоемкость, кНм
Висячая несущая система	942
Схема с одной несущей вантой	1836
Схема с двумя несущими вантами	5823
Схема с тремя несущими вантами	7055

При проведении нелинейного анализа осуществлялось также изучение влияния асимметрии загрузки на характер распределения изгибающих моментов. При этом рассматривались два типа загрузений временной нагрузкой от веса воды в трубопроводе: симметричное (с загрузением всего трубопровода) и асимметричное (с загрузением половины трубопровода). Результаты этого исследования представлены на рис. 6-8.

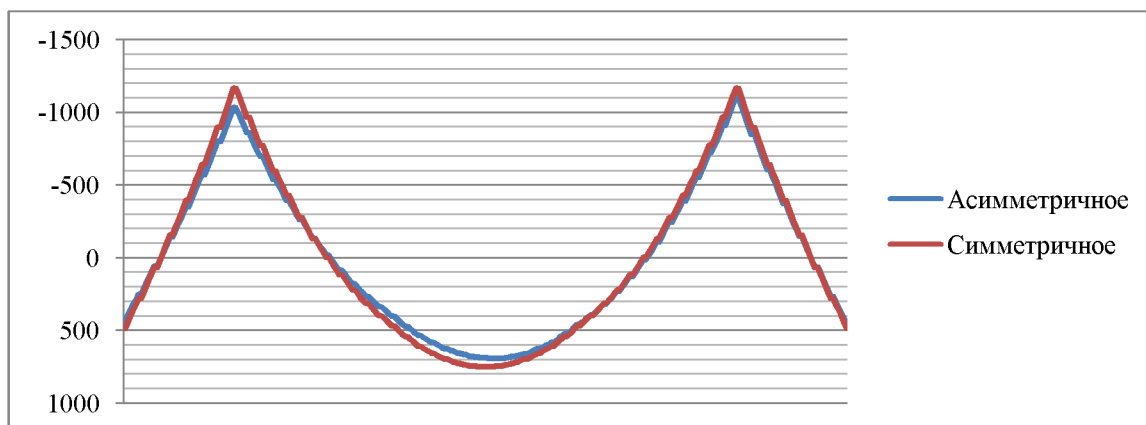


Рис. 6. Сравнение эпюр изгибающих моментов (кН)
от симметричного и асимметричного загрузения для системы с одной несущей вантой

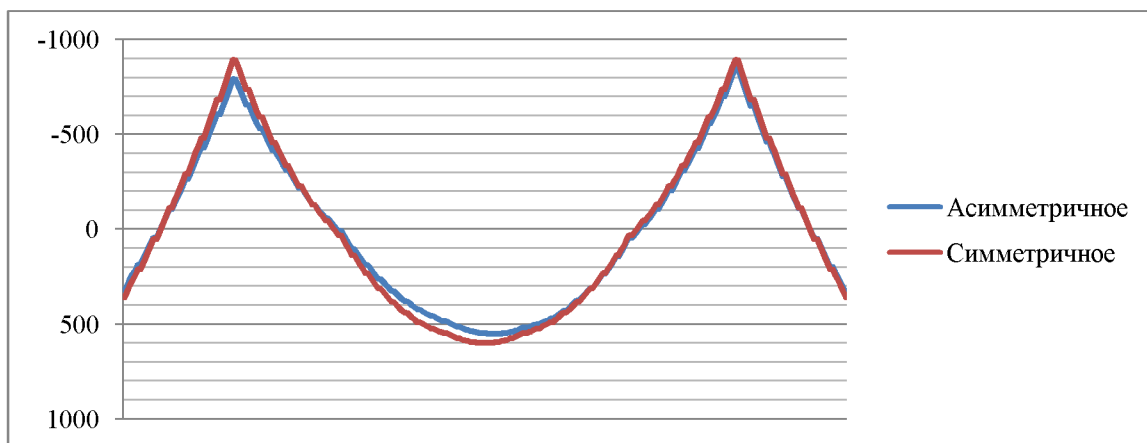


Рис. 7. Сравнение эпюр изгибающих моментов (кН) от симметричного и асимметричного нагружения для системы с двумя несущими вантами

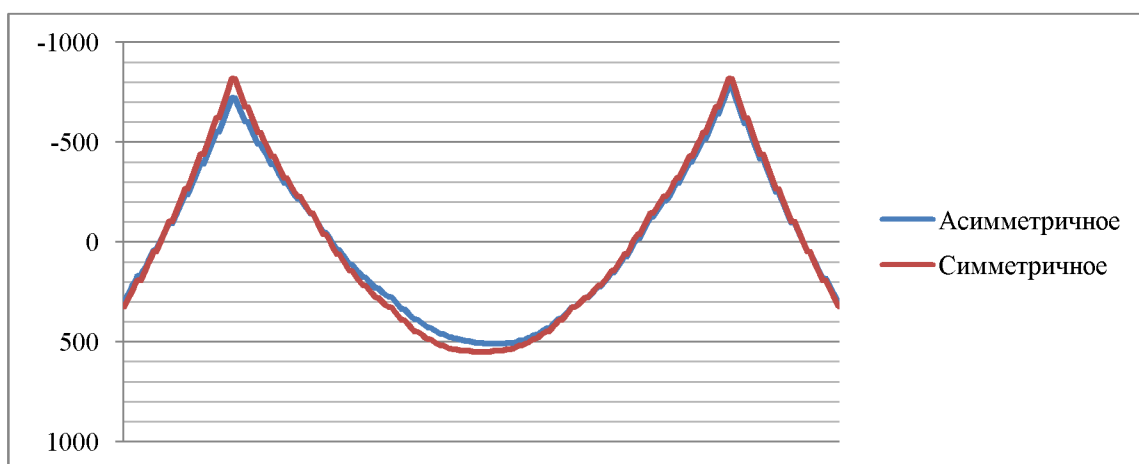


Рис. 8. Сравнение эпюр изгибающих моментов (кН) от симметричного и асимметричного нагружения для системы с тремя несущими вантами

Из рисунков видно, что разница в очертаниях эпюр изгибающих моментов от симметричного и несимметричного нагружений во всех случаях является незначительной. По-видимому, это происходит из-за малости пролета и существенных жесткостных параметров трубопровода. При этом эпюра моментов близка к очертаниям эпюр для балочных систем без вант.

Выводы

Выполненные исследования приводят к следующим выводам.

1. Наиболее экономичной при рассматриваемом соотношении длины пролета и жесткости трубопровода и при заданной величине временной нагрузки является висячая несущая система.
2. Разница в очертаниях эпюр изгибающих моментов от симметричного и несимметричного нагружений при рассматриваемом соотношении длины пролета и диаметре трубопровода и при заданной величине временной нагрузки незначительна. Эпюры моментов близки к балочным.

3. При подборе размеров несущих вантовых систем трубопроводов наряду с рассмотренными в настоящей работе постоянными и временными нагрузками следует рассмотреть следующие типы загружений: ветровая нагрузка (статическая и динамическая составляющие), резонансное вихревое возбуждение, динамическая нагрузка от действия гидравлического удара (с учетом изменения давления в трубопроводе и воздействия инерционных сил). Также подлежит исследованию влияние на НДС конструкции соотношения длины пролета и диаметра трубопровода.

Библиографический список

1. Шимановский, В.Н. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости) / В.Н. Шимановский, Ю.В. Смирнов, Р.Б. Харченко. - Киев: «Будівельник», 1973. - 198 с.
2. Сафронов, В.С. Прочностной анализ несущих конструкций висячего трубопровода через реку Ока в г. Орел / В.С. Сафронов, Ю.А. Суханова// Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2010. - Вып. 1. - С. 59-65.
3. СНиП 2.05.03-84*. Мосты и трубы / Минстрой России. - М.: ГП ЦПП, 1996. - 214 с.
4. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия. – М.: Госстрой России, 2003. – 44 с.
5. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 96 с.

References

1. Shimanovsky, V.N. Analysis of Suspension Structures (threads of finite stiffness)/ V.N. Shimanovsky, J.V. Smirnov, R.B. Khartschenko. – Kiev: «Budivelnik», 1973. - 198 p.
2. Safronov, V.S. Strength Analysis of Bearing Structures of Suspension Pipeline Across the Oka River in the city of Orel/ V.S. Safronov, J.A. Sukhanova //Constructionl Mechanics and Constructions. - Voronezh, issue.1, 2010. - P.59-65
3. State Standard 2.05.03-84*. Bridges and Pipes/ Minstroy of Russia. – М.: GP TCPP, 1996. – 214 p.
4. State Standard 2.03.01-84*. Concrete and Reinforced Concrete Structures. – М.: Gosstroy of USSR, 1996. – 75 p.
5. State Standard 2.01.07-85*. Loads and Effects. – М.: Gosstroy of Russia, 2003. – 44p.
6. State Standard II-23-81*. Steel Structures/ Gosstroy of USSR. – М.: TCITP Gosstroy of USSR, 1988. – 96 p.

Ключевые слова: вантовый трубопровод, расчет, вертикальные нагрузки, напряженно-деформированное состояние, геометрическая нелинейность, перемещения, изгибающие моменты, прочность.

Keywords: cable-stayed pipeline, analysis, vertical loads, stress-strain state, geometrical nonlinearity, displacement, bending moment, strength.

УДК 624.04+624.6

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф.
кафедры строительной механики
В.С. Сафронов
Аспирант кафедры строительной механики
А.В. Антипов
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473) 237-97-36
e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
Dr. of Tech. Sc., Professor
of the Department of Structural Mechanics
V.S. Safronov
The graduate student of the Department of Structural Mechanics
A.V. Antipov
Russia, Voronezh, tel.: 8(473) 2379736
e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru*

В.С. Сафронов, А.В. Антипов

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ С НЕРАЗРЕЗНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ КОРОБЧАТЫМ ПРОЛЕТНЫМ СТРОЕНИЕМ

Изучаются спектры собственных частот и соответствующих им форм свободных колебаний с использованием конечно-элементных динамических расчетных схем неразрезных металлических пролетных строений с тонкостенными коробчатыми несущими балками и ортотропной плитой проезжей части.

V.S. Safronov, A.V. Antipov

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ROAD BRIDGES WITH CONTINUOUS BOX METAL SPAN

Spectrum of natural frequencies and corresponding free motion forms of continuous metal spans with thin-walled box supporting girders and orthotropic bridge floor slab is studied with application of finite element of dynamic design model.

В последнее годы на автомобильных дорогах в нашей стране и за рубежом широкое распространение получили мостовые сооружения с тонкостенными коробчатыми пролетными строениями и ортотропной плитой проезжей части вследствие их экономичности, отлаженных технологий и ограниченных сроков возведения [1]. Однако после ставшего известным случая резонансных колебаний моста через р. Волгу в Волгограде проектировщики стали осторожнее применять такие конструктивные решения, так как, несмотря на проведенные исследования, полной ясности в определении причин возникшего явления не получено. В настоящей работе рассматривается основанная на предложенной В.В. Болотиным [2] теории динамической устойчивости сооружений версия параметрических колебаний пролетных строений, которая апробируется на двух вновь построенных автодорожных мостах с коробчатыми металлическим пролетными строениями.

В качестве одного из объектов исследования принята выполненная по проекту Санкт-Петербургского проектного института ЗАО «Институт «Гипростроймост СПб» русловая часть моста через р. Москва (рис. 1) на подъезде к г. Жуковский от а/д М-5 «УРАЛ» в Московской обл.

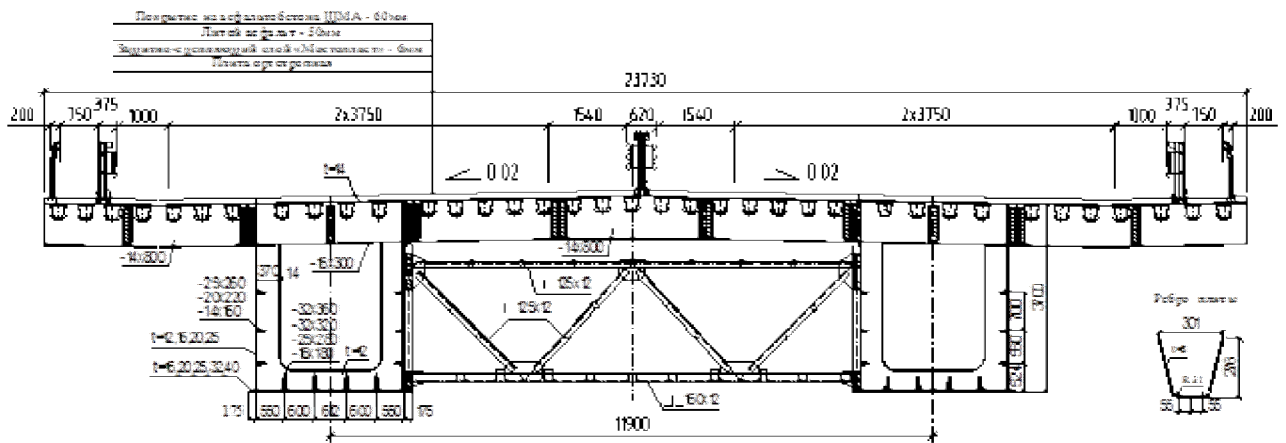


Рис. 1. Поперечное сечение руслового пролетного строения моста

Металлическое пролетное строение выполнено по неразрезной статической схеме 86,5+145+86,5 м и состоит из двух коробчатых балок. Поверху главные балки объединены металлической ортотропной плитой, состоящей из покрывающего листа и системы поперечных балок и стрингеров коробчатого сечения. Горизонтальные связи по нижним поясам главных коробчатых балок не предусмотрены. Подробное описание конструкции пролетного строения и расположения опорных частей можно найти в нашей публикации [3].

Принятая в динамических расчетах конечно-элементная схема пролетного строения мостового сооружения представлена на рис. 2. Металлические коробчатые главные балки и плита проезжей части моделировались прямоугольными оболочечными конечными элементами (КЭ), представляющими собой комбинацию конечных элементов плоского и изгибного напряженных состояний. Поперечные и продольные ребра ортотропных плит, а также поперечные вертикальные связи между балками задавались стержневыми КЭ. Для сопряжения стержневых и оболочечных КЭ использовались абсолютно жесткие вставки, которые позволяют прикрепить стержень ребра с необходимым эксцентриситетом к узлам на срединной поверхности плиты. Шаровые сферические опорные части моделировались упругими КЭ и связями конечной жесткости в соответствии со смонтированными на мосту ограничениями на перемещения точек прикрепления пролетного строения к опорам. В расчетах не учитывалась деформативность массивных опор моста. Учет изменения жесткости коробчатых балок вдоль пролетного строения в расчетной схеме выполнен путем введения 15 типов сечений.

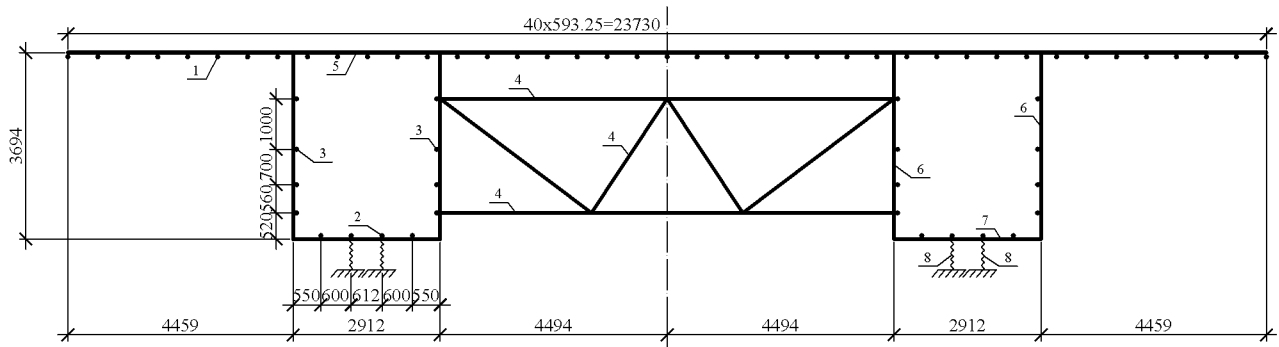


Рис. 2. Конечно-элементная динамическая расчетная схема пролетного строения

Второй объект для исследований в настоящей статье – автомобильный мостовой переход через Белгородское водохранилище на р. Северный Донец (рис. 3) из двух предназначенных для движения в одном направлении одинаковых сооружений с неразрезными металлическими пролетными строениями. Габарит каждого моста Г-9+1,5 по схеме

63,4+5×84+63,4 м. Мост запроектирован ООО «Центр-Дорсервис», г. Воронеж. Автор проекта – д-р техн. наук, проф. Д.М. Шапиро.



Рис. 3. Общий вид мостового перехода через Белгородское водохранилище

Пролетное строение выполнено из следующих основных конструктивных элементов:

- двух главных балок коробчатого сечения с вертикальными стенками высотой 2480 мм, шириной нижнего пояса 2040 мм;
- металлической ортотропной плиты общей шириной 12140 мм, состоящей из покрывного листа толщиной 14 мм, продольных рёбер сечением 14×200 мм с шагом 300 мм и поперечных балок с высотой стенки 650 мм с шагом 3 м;
- поперечных вертикальных связей, состоящих из раскосов из уголков 125×10;
- продольных горизонтальных связей по нижнему поясу из сварных элементов таврового сечения 100×160 мм.

Принятая в расчетах конечно-элементная схема пролетного строения мостового сооружения представлена на рис. 4. Металлические главные балки и поперечные связи моделировались стержневыми конечными элементами (КЭ), а металлическая ортотропная плита – прямоугольными оболочечными КЭ, представляющими собой комбинацию конечных элементов плоского и изгибного напряженных состояний. Поперечные рёбра ортотропной плиты моделировались стержневыми непризматическими элементами. Продольные рёбра учитывались путём эквивалентного увеличения толщины плиты. Оболочечные элементы плиты связывались со стержневыми элементами главных балок посредством жестких вставок. Шаровые сферические опорные части моделировались упругими элементами в соответствии со смонтированными на мосту ограничениями на перемещения точек прикрепления пролетного строения к опорам.

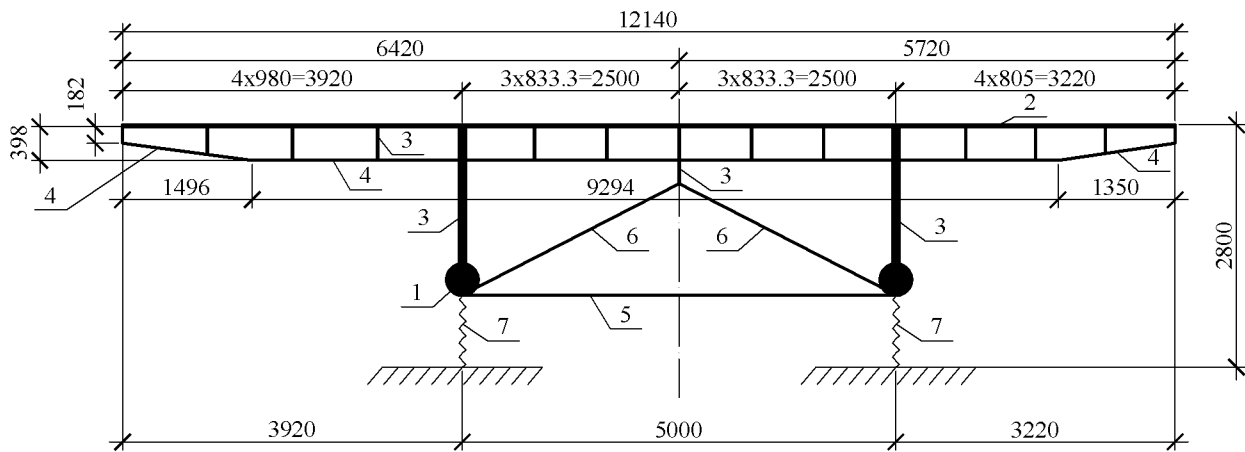


Рис. 4. Конечно-элементная пространственная модель пролетного строения:

- 1 – стержневые КЭ главных балок; 2 – оболочечные КЭ плиты; 3 – жесткие вставки;
 4 – стержневые КЭ поперечных ребер плиты; 5 – стержневые КЭ поперечных горизонтальных связей;
 6 – стержневые КЭ поперечных вертикальных связей; 7 – упругие элементы

Для оценки динамических качеств рассматриваемых в статье мостов выполнен анализ спектров собственных частот и форм свободных колебаний их пролетных строений с помощью конечно-элементного комплекса SAP2000 [4] по описанным выше динамическим расчетным схемам пролетных строений.

Для руслового металлического пролетного строения моста через реку Москва частоты для низших 12 собственных форм свободных колебаний с их кратким описанием представлены в табл. 1, а на рис. 5 и 6 показаны аксонометрические изображения деформированного состояния пролетного строения по четырем низшим собственным формам пролетного строения и графики вертикальных перемещений главных балок при свободных колебаниях.

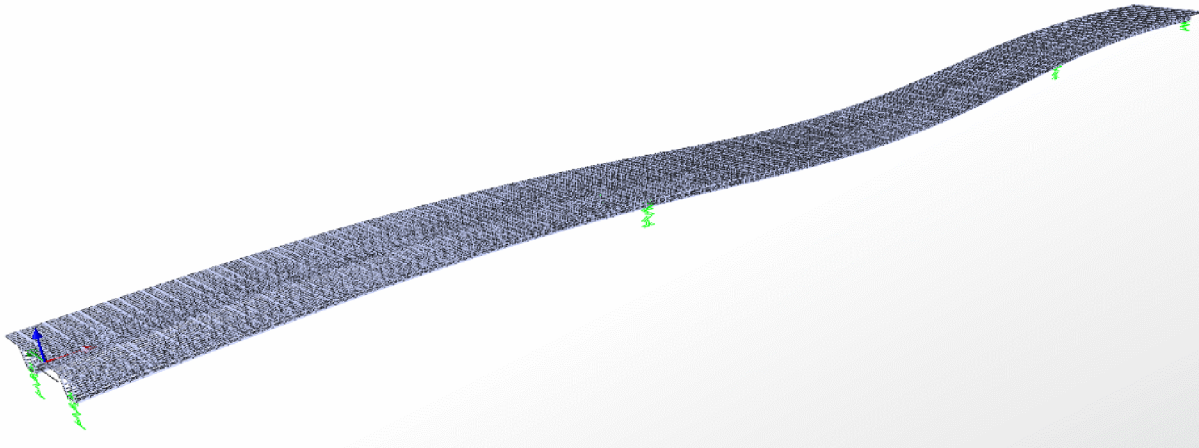
Таблица 1

Собственные частоты и формы свободных колебаний руслового пролетного строения моста через реку Москва

Номер тона	Техническая частота, Гц	Период, с	Описание собственной формы
1	0,598	1,671	Изгибные колебания
2	1,211	0,826	Изгибные колебания
3	1,272	0,786	Изгибно-крутильные колебания
4	1,455	0,738	Изгибные колебания
5	1,556	0,643	Изгибно-крутильные колебания
6	1,771	0,565	Изгибно-крутильные колебания
7	1,881	0,532	Изгибные колебания
8	2,102	0,476	Изгибно-крутильные колебания
9	2,397	0,417	Изгибные колебания
10	2,565	0,390	Изгибно-крутильные колебания
11	2,871	0,348	Изгибно-крутильные колебания
12	3,234	0,309	Изгибно-крутильные колебания

1-я собственная изгибная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 0,598$ Гц. Период – 1,671 с.



1-я балка (ближняя в изометрии)

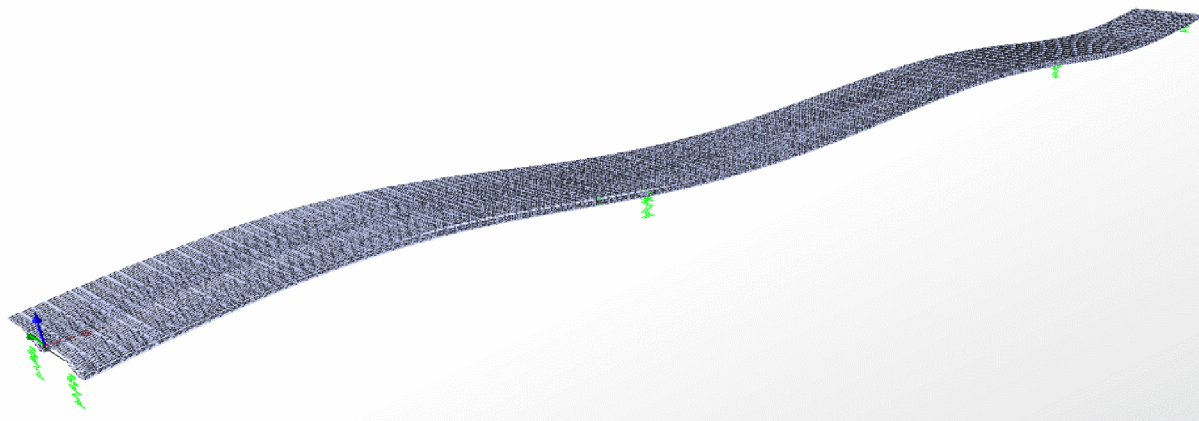


2-я балка (дальняя в изометрии)



2-я собственная изгибная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 1,211$ Гц. Период – 0,826 с.



1-я балка (ближняя в изометрии)



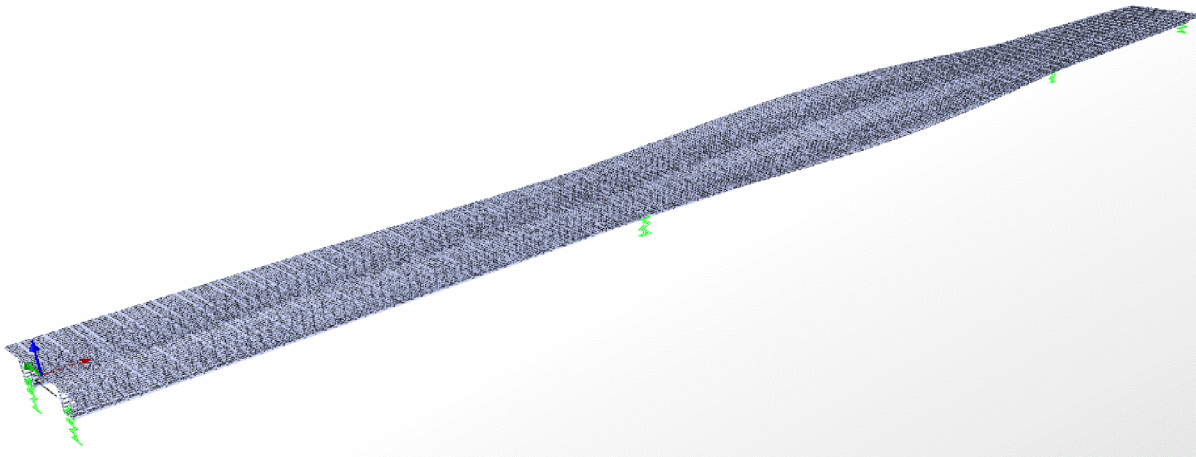
2-я балка (дальняя в изометрии)



Рис. 5. Аксонометрические изображения 1-й и 2-й собственных форм пролётного строения и графики вертикальных перемещений главных балок при свободных колебаниях

3-я собственная изгибно-крутильная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 1,272$ Гц. Период – $0,786$ с.



1-я балка (ближняя в изометрии)

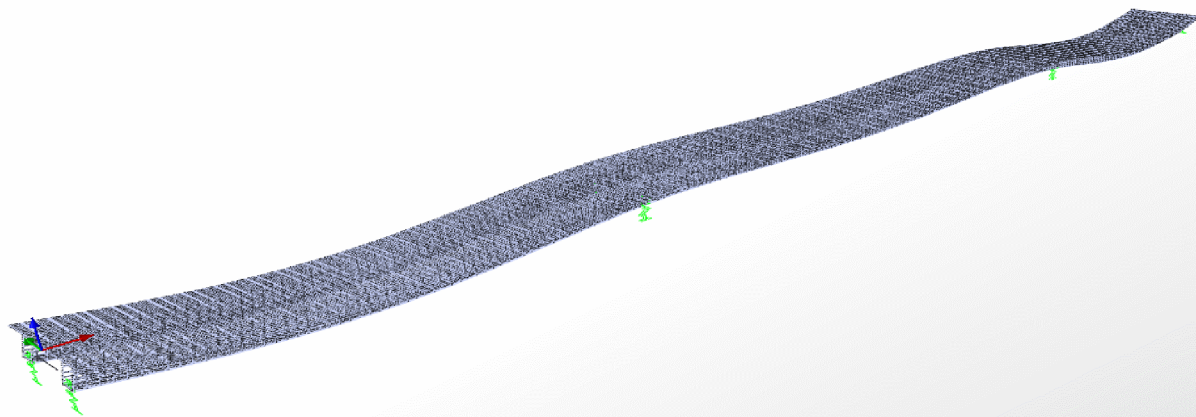


2-я балка (дальняя в изометрии)



4-я собственная изгибно-крутильная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 1,355$ Гц. Период – $0,738$ с.



1-я балка (ближняя в изометрии)



2-я балка (дальняя в изометрии)



Рис. 6. Аксонометрические изображения 3-й и 4-й собственных форм пролетного строения и графики вертикальных перемещений главных балок при свободных колебаниях

Анализ данных, приведенных в табл.1, иллюстрирует выявленную при динамических расчётах особенность спектра собственных частот пролетного строения руслового пролетного строения моста через реку Москва. Она заключается в том, что 2, 3 и 4-я собственные частоты являются близкими к кратным. Они отличаются менее чем на 5 %. Из теории динамической устойчивости [2] известно, что в упругих системах с близкими к кратным собственными частотами возможно возникновение параметрических колебаний, когда движение по одной собственной форме может возбуждать колебания по другой. На данном мостовом сооружении при изгибных колебаниях по 2-й собственной форме возможно возникновение изгибно-крутильных колебаний пролетного строения. При этом амплитуды колебаний могут возрастать, так как каждая из балок колеблется самостоятельно.

Обнаруженная особенность динамических характеристик руслового пролетного строения объясняется принятым конструктивным решением из двух коробчатых балок, которые объединены без горизонтальных связей по нижнему поясу, которые могли бы существенно увеличить крутильную жесткость пролетного строения в целом. Выполненные нами расчеты показали, что частоты изгибной и изгибно-крутильной собственных форм при установке горизонтальных связей будут отличаться более чем на 10 % и вероятность параметрических колебаний моста существенно снизится.

Для пролетного строения моста через Белгородское водохранилище частоты для низших 12-ти собственных форм свободных колебаний с их кратким описанием представлены в табл. 2, а на рис. 7 и 8 показаны аксонометрические изображения деформированного состояния пролетного строения по четырем низшим собственным формам пролетного строения и графики вертикальных перемещений главных балок при свободных колебаниях.

Таблица 2

Собственные частоты и формы свободных колебаний пролетного строения моста через Белгородское водохранилище

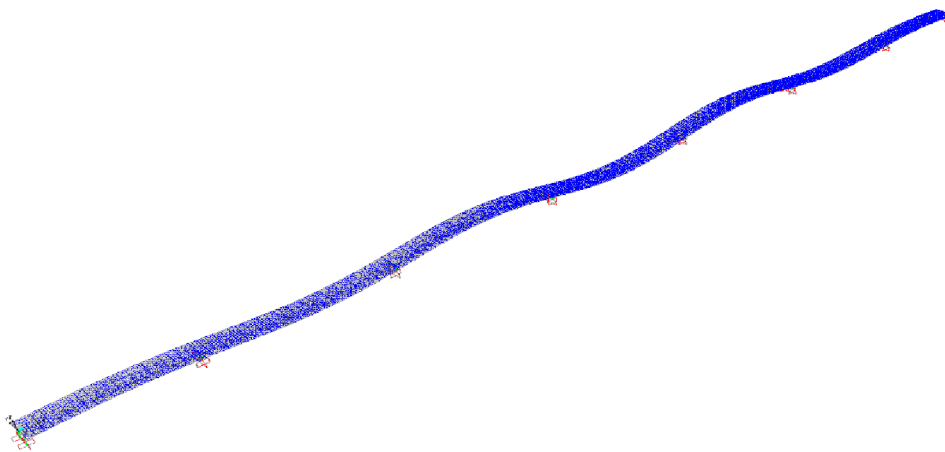
Номер тона	Техническая частота, 1/с	Период, с	Описание собственной формы
1	0,873	1,146	Изгибные колебания
2	1,020	0,981	Изгибные колебания
3	1,219	0,821	Изгибные колебания
4	1,455	0,687	Изгибные колебания
5	1,712	0,584	Изгибные колебания
6	1,999	0,500	Изгибные колебания
7	2,073	0,482	Изгибные колебания
8	2,608	0,383	Изгибно-крутильные колебания
9	2,774	0,360	Изгибно-крутильные колебания
10	2,821	0,354	Изгибно-крутильные колебания
11	3,142	0,318	Изгибные колебания
12	3,164	0,316	Изгибные колебания

Анализ полученных при численных исследованиях динамических характеристик пролетного строения показывает следующее:

- семь низших собственных форм пролетного строения являются изгибными. Их частоты заметно отличаются друг от друга ($f_1 = 0,873$ Гц; $f_2 = 1,020$ Гц; $f_3 = 1,219$ Гц; $f_4 = 1,455$ Гц; $f_5 = 1,712$ Гц; $f_6 = 1,999$ Гц; $f_7 = 2,073$ Гц) и не являются кратными;

1-я собственная изгибная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 0,873$ Гц. Период – $1,146$ с.



1-я балка (ближняя в изометрии)

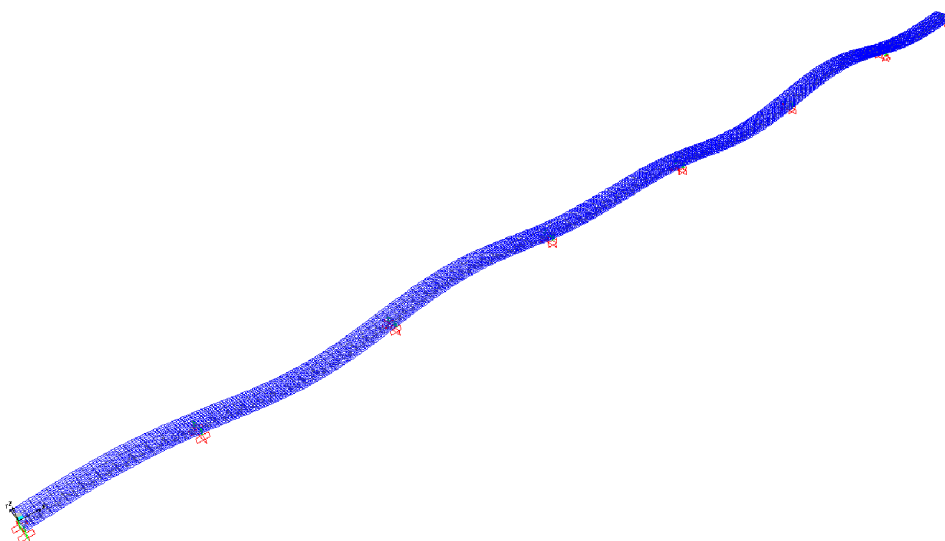


2-я балка (дальняя в изометрии)



2-я собственная изгибная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 1,020$ Гц. Период - $0,981$ с.



1-я балка (ближняя в изометрии)



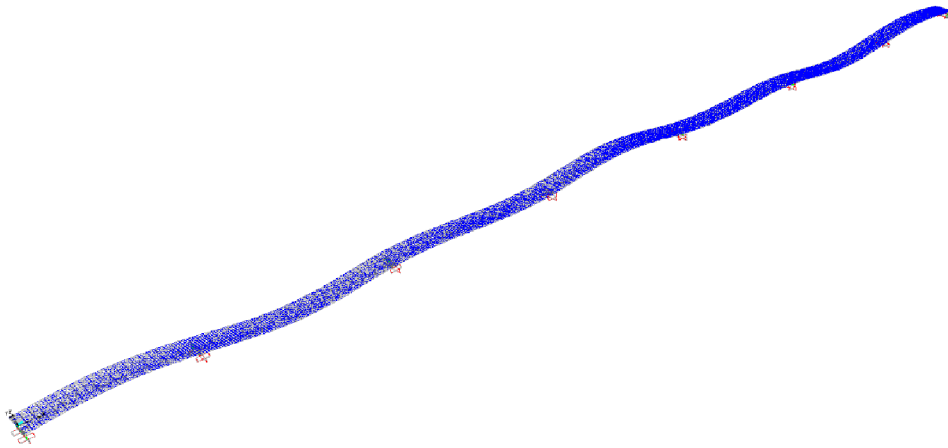
2-я балка (дальняя в изометрии)



Рис. 7. Аксонометрическое изображение 1-й и 2-й собственных форм свободных колебаний пролётного строения и графики вертикальных перемещений главных балок

3-я собственная изгибная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 1,219$ Гц. Период - 0,821 с.



1-я балка (ближняя в изометрии)

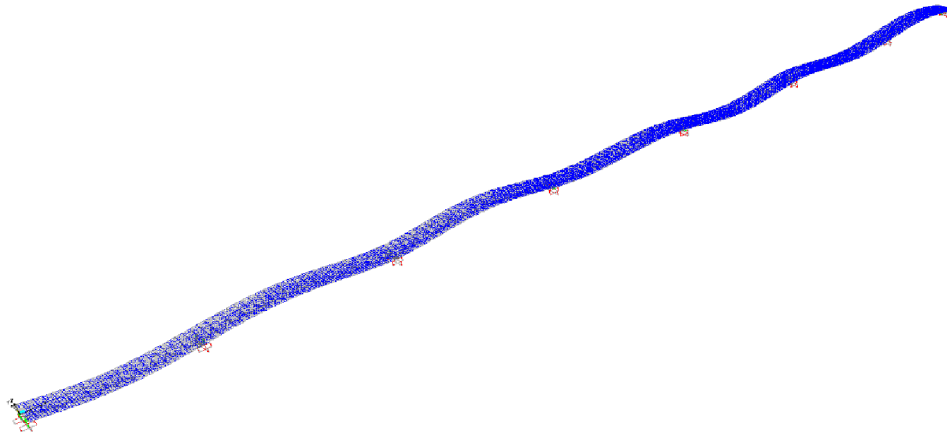


2-я балка (дальняя в изометрии)



4-я собственная изгибная форма колебаний пролётного строения

Частота $f = 1,455$ Гц. Период - 0,687 с.



1-я балка (ближняя в изометрии)



2-я балка (дальняя в изометрии)



Рис. 8. Аксонометрическое изображение 3-й и 4-й собственных форм свободных колебаний пролетного строения и графики вертикальных перемещений главных балок

- среди достаточно большого числа низших собственных форм нет изгибно-крутильных собственных форм, что объясняется удачным конструктивным решением пролетного строения, составленного из двух связанных вертикальными и горизонтальными связями коробчатых главных балок;

- первая из низших собственных изгибно-крутильных форм находится в спектре собственных частот пролетного строения только на восьмом месте с периодом, составляющим $T_8 = 0,383$ с и частотой $f_8 = 2,608$ Гц. Она не является кратной частоте следующей изгибной собственной форме с периодом, составляющим $T_9 = 0,360$ с и частотой $f_9 = 2,778$ Гц. Это также является благоприятным фактором;

- три последующие собственные формы (№10-12) являются изгибно-крутильными со следующими частотами и периодами: $f_{10} = 2,821$ Гц, $T_{10} = 0,354$ с; $f_{11} = 3,142$ Гц, $T_{11} = 0,318$ с; $f_{12} = 3,164$ Гц, $T_{12} = 0,316$ с, где десятая и одиннадцатая собственные формы также не являются кратными. Отметим, что частоты одиннадцатой и двенадцатой собственных форм близки между собой.

Выводы

1. Сопоставление спектров собственных частот пролетных строений двух мостовых сооружений показало, что динамические качества конструкции целиком зависят от принятой конструкции объединения главных балок.

2. Возможность возникновения параметрических колебаний определяется наличием кратных частот среди низших тонов спектра и наличием среди низших собственных форм изгибно-крутильных деформаций пролетных строений.

Библиографический список

1. Саламахин, П.М. Проектирование мостовых и строительных конструкций: учеб. пособие/ П.М. Саламахин. - М.: КНОРУС, 2011. – 408 с.
2. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем/ В.В. Болотин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
3. Сафронов, В.С. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния металлического коробчатого пролетного строения: автодорожного моста / В.С. Сафронов, А.В. Антипов // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2011. – Вып. №2(3). – С. 62-72.
4. Справочное руководство SAP2000. Беркли, Калифорния, США: 2009. – 470 с.

References

1. Salamahin, P.M. Bridge and building structures: teaching aid / P.M. Salamahin, - M.: KHORUS, 2011. - 40 p.
2. Bolotin, V.V. Dynamic stability of elastic systems / V.V Bolotin, - M.: Gostechizdat, 1956. – 600 p.
3. Safronov, V.S. Experiment-calculated research of deflected mode of road bridge continuous box metal span / V.S. Safronov, A.V. Antipov // Construction Mechanics and Structures. – Voronezh, № 2(3). – 2011. – P. 62-72.
4. Reference manual SAP2000. Berkley, California, USA, 2009. – 470 p.

Ключевые слова: металлическое пролетное строение моста, балка коробчатого сечения, динамические характеристики, конечно-элементная динамическая расчетная схема, спектр собственных частот, параметрические колебания

Keywords: metal bridge span, box section beam, dynamic characteristics, finite element dynamic design model, spectrum of natural frequencies, parametric frequencies.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.012.45:69

*Тамбовский государственный
технический университет
Д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой
«Конструкции зданий и сооружений»
В.В. Леденев
Магистрант Х. З. Чьонг
Магистрант Л. В. Чан
Россия, г. Тамбов, тел.: 8(9204)76-39-39
e-mail: kzis@nntu.tstu.ru
e-mail: dunghiep371986@gmail.com*

*The Tambov State Technical University
Dr of Tech. Sc., Professor
of Building and
Structure Construction
V.V. Ledenyov
The Postgraduate H.D. Truong
The Postgraduate L.V. Tran
Tambov, Russia, tel.: 8(9204)763939
e-mail: kzis@nntu.tstu.ru
e-mail: dunghiep371986@gmail.com*

В.В. Леденёв, Х.З. Чьонг, Л.В. Чан

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ МОДЕЛЕЙ СТЕН ИЗ ФИБРОБЕТОНА В УСЛОВИЯХ ДВУХОСНОГО СЖАТИЯ

Приведены результаты экспериментов с моделями фибробетонных стен в условиях двухосного сжатия. Рассмотрено влияние процента армирования на величину бокового обжатия. Получены эмпирические зависимости.

V. V. Ledenoyv, H.D. Truong, L.V. Tran

LOAD – CARRYING CAPACITY OF FIBROUS CONCRETE WALL MODELS UNDER BIAXIAL COMPRESSION

Results of experiments with fibrous concrete walls under biaxial compression are presented. The effect of reinforcement rate on side compression is under consideration. Empirical dependencies have been received.

Фибробетон все чаще применяют для изготовления строительных конструкций. Построено несколько заводов по производству фибр. Требуется нормативная база для проектирования конструкций из фибробетона. Однако стоимость их высока, а производство их незначительно.

На кафедре конструкций зданий и сооружений ТГТУ в течение 10 лет проводится работа по исследованию фибробетона [4, 5]. Материалы технического обследования зданий и сооружений содержат многочисленные данные о характере трещинообразования и разрушения стен [2, 3]. Описаны различные дефекты. По статической работе стены можно рассматривать как пластины [1, 6]. В ранее выполненных исследованиях [4, 5] выявлено влияние дефектов в соединениях по контуру на величину несущей способности и характер раскрытия трещин.

Ниже приведены результаты опытов с пластинами размером $a \times b \times h = 300 \times 300 \times 50$ мм, выполненными из бетона В-15 на гранитном щебне с максимальными размером зёрен 10 мм. Фибры изготовлены из отожженной проволоки ($d_s = 1$ мм, $l_s = 20$ мм, $\sigma_u \approx 95$ МПа), т.е. из стали низкой прочности.

Исследовали влияние процента армирования μ_s и начального бокового обжатия F_{x0} на величину разрушающей нагрузки F_{dis} , нагрузку трещинообразования F_{crc} , характер деформирования боковых поверхностей $u_y = u_y(x, z, F, \mu_s, F_{x0})$ и трещинообразования. Кроме того, следили за изменением усилия бокового обжатия по мере роста вертикальной нагрузки, т.е. $F_{x0} = F_{x0}(F_z)$. Опыты проводили с 2-3-кратной повторностью, а величины разрушающих нагрузок при $\mu_s = const$ осредняли (черта над F_{dis} и F_{crc}).

Опыты приводили на гидравлическом прессе. Модель помещали в специальный кондуктор, устанавливали между плитами пресса, создавали усилия обжатия до принятой величины. Далее передавали вертикальную нагрузку степенями примерно $0,1 F_{dis}$ и выдерживали на каждой по 10 мин для снятия отсчетов и фиксации трещин.

В большинстве опытов F_{x0} принимали равными 0, 3, 6 и 9 кН. В отдельных увеличивали до 20 кН. Процент армирования изменяли от 0 до 0,8. Боковые перемещения измеряли индикаторами ИЧ-10 (рис. 1). Опирали пластины на плиту пресса свободное.

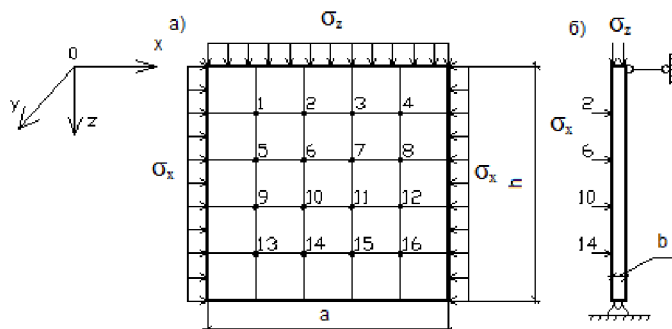


Рис. 1. Схема нагружения пластины в плоскостях X0Z(a) и Y0Z(б).

Цифрами показаны места замера горизонтальных (u_y) перемещений боковой поверхности модели

Результаты экспериментов представлены на рис 2-7. Функции $\overline{F_{dis}} = F_{dis}(\mu_s, F_{x0})$ (рис. 2-4) свидетельствуют о положительном влиянии параметров μ_s и F_{x0} . В процессе роста вертикальной силы F_x усилие бокового обжатия возрастало. На рис. 5 показаны данные опытов при $F_{x0} = 3$ кН. Подобные результаты получены и при других величинах F_{x0} .

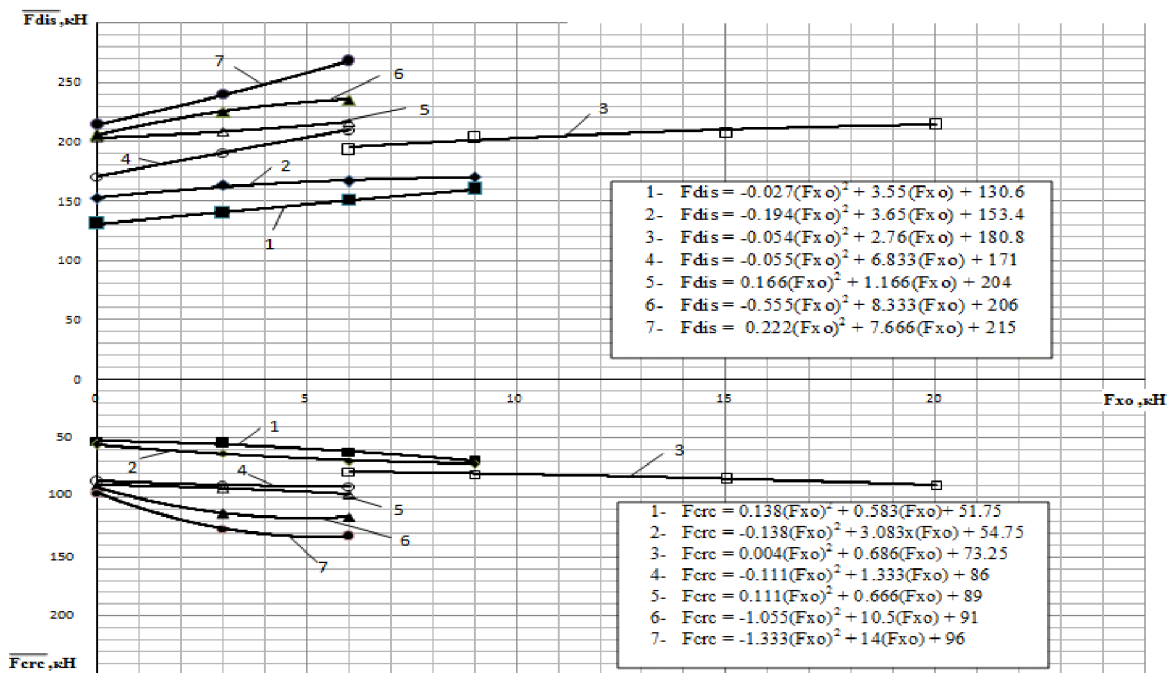
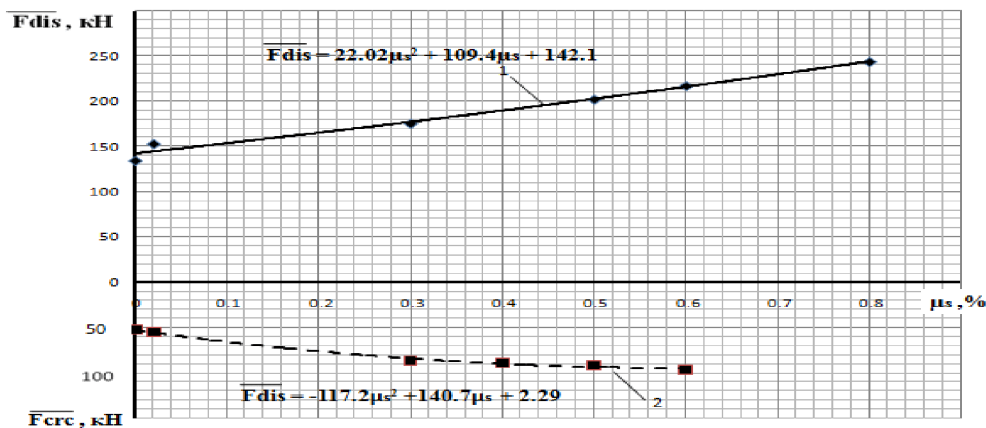


Рис. 2. Зависимость разрушающей нагрузки(a) и нагрузки начала трещинообразования(б)

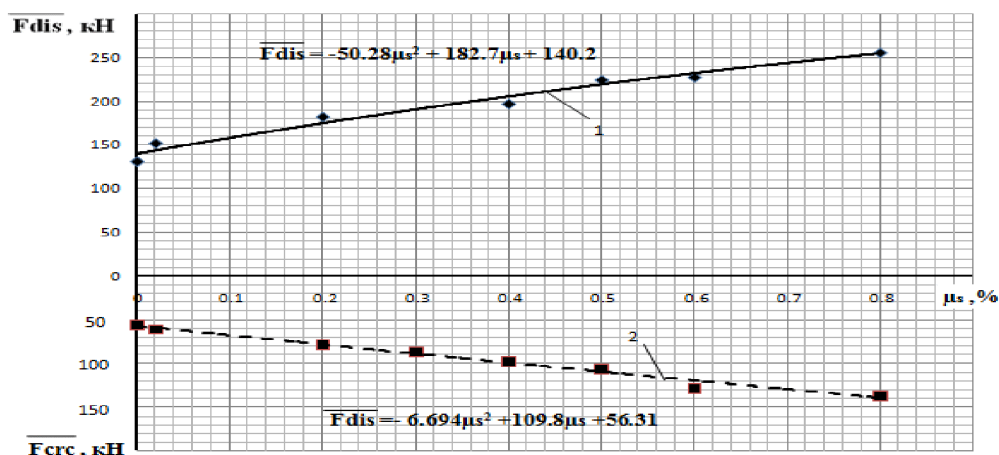
от процента армирования моделей стен при F_{x0} (кН): 1-0; 2-0,02; 3-0,2; 4-0,3; 5-0,4; 6-0,5; 7-0,6

В опытах с $\mu_s = 0$ при увеличении вертикальной силы F_z до 90 кН образуется семейство коротких трещин в верхнем углу панели Т-С (трещины от сжатия) (рис. 6). В месте приложения вертикальной силы зарождается и развивается наклонная трещина Т-Г, исходящая из верхнего и выходящая в нижний противоположный угол. Ширина трещины 0,3...0,4 мм с углом по горизонту 40°. При дальнейшем увеличении силы F_z возникают трещины Т-Р в растянутой зоне шириной 0,5...0,6 мм и длиной (0,1...0,2)б. Перед разрушением откалываются лещадки и образуется серия наклонных прерывистых трещин Т-Г вдоль диагонали модели.

а)



б)



в)

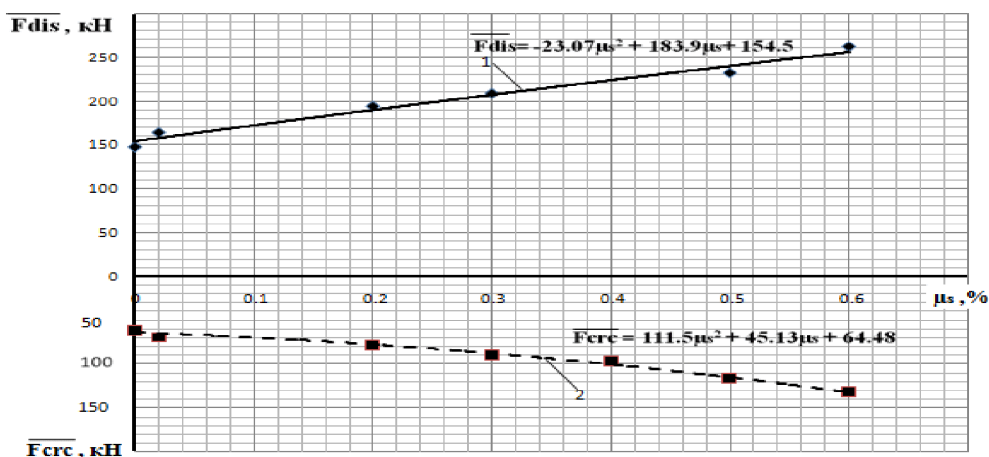


Рис. 3. Зависимость между процентом армирования фибробетона и разрушающей нагрузкой (1), нагрузкой начала трещинообразования (2) при начальных величинах бокового обжатия F_{xo} (кН):

а - 0, б - 3, в - 6

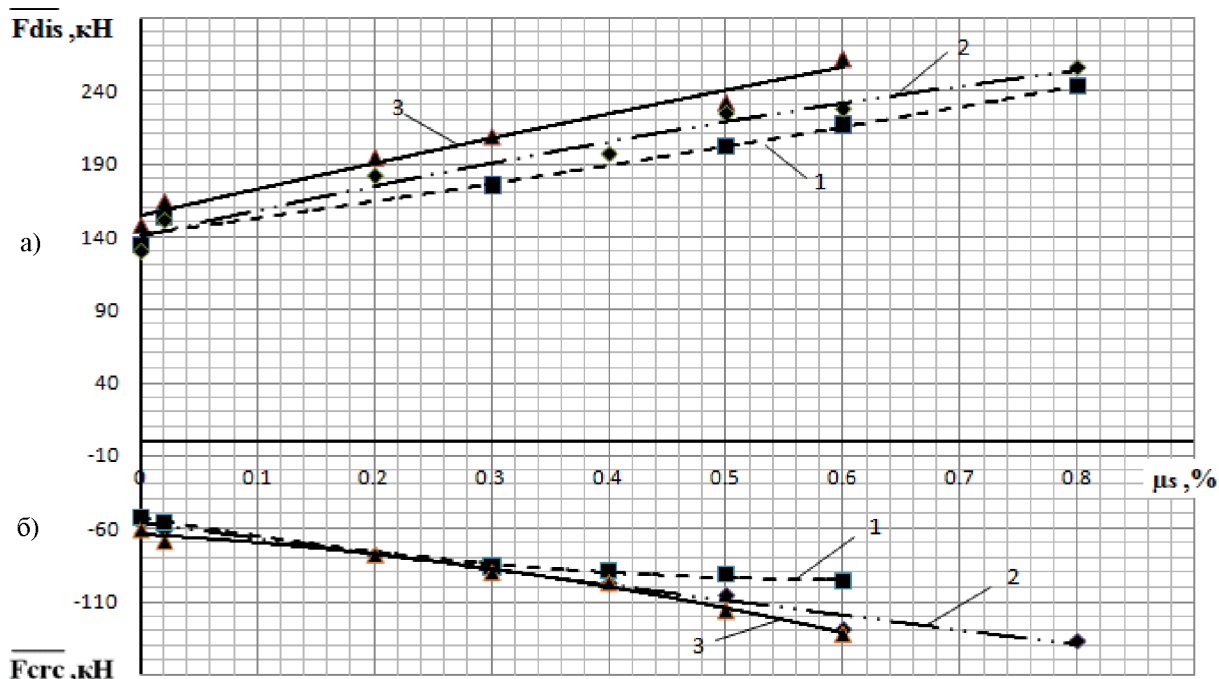


Рис. 4. Сводные графики зависимости разрушающей нагрузки на фибробетонные модели стен (а) и нагрузки трещинообразования (б) от процента содержания фибр при начальном боковом обжатии F_{x0} (кН): 1 - 0, 2 - 3, 3 - 6

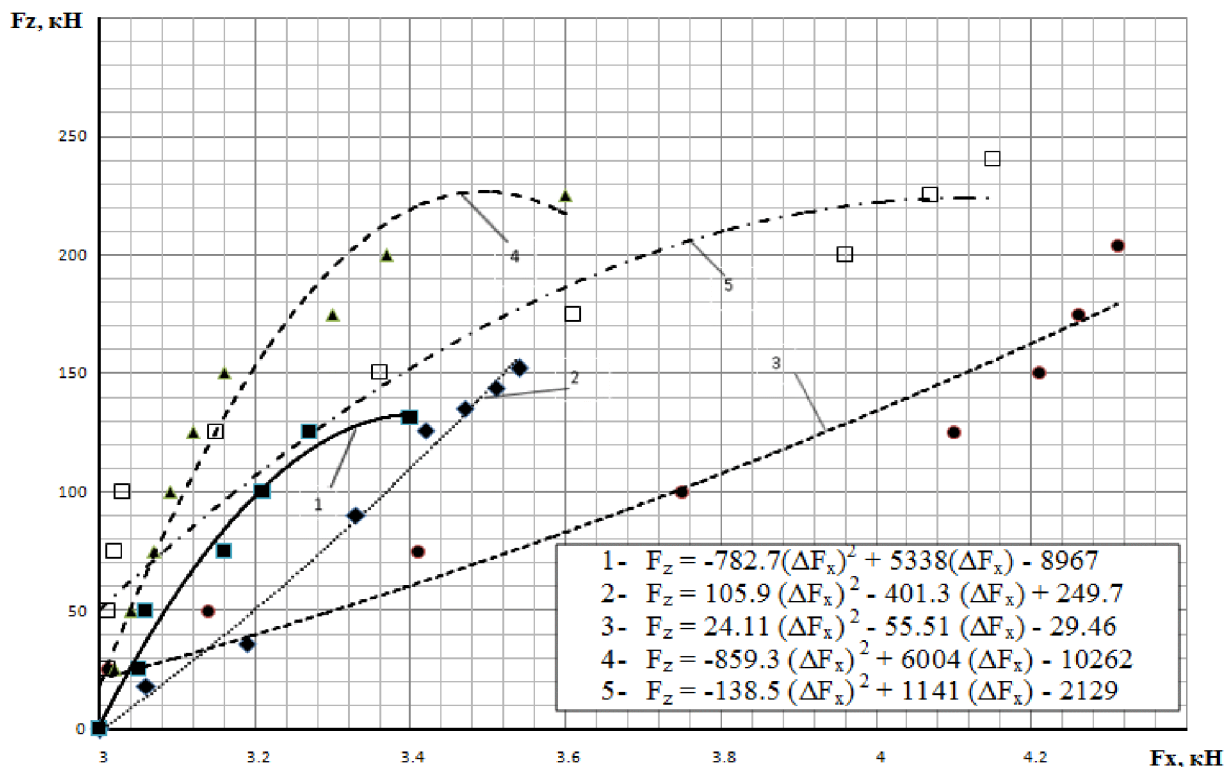


Рис. 5. Изменение величины начального бокового обжатия ($F_{x0}=3$ кН) от вертикальной нагрузки F_z при процентах армирования μ_s : 1-0; 2-0,02; 3-0,4; 4-0,5; 5-0,6

В опытах с фиброармированными моделями ($\mu_s = 0,02$ %) с ростом вертикальной силы образуются две системы трещин Т-Г1 и Т-Г2, расположенных по диагонали шириной раскрытия 1...2 мм. В верхнем и нижнем углах появляются трещины от сжатия Т-С. С ростом F_z ширина раскрытия и длина трещины Т-С и Т-Г возрастают. Прочность фибробетона и про-

цесс образования трещин в этом случае незначительно отличается от неармированного бетона. Причиной этого является небольшой процент содержания фибр.

С увеличением μ_s до 0,5 % при равных нагрузках F_x рост трещин уменьшается, образуется наклонная трещина. Очаг разрушения возникает в одном из углов с возникновением и развитием трещин от сжатия Т-С. Это объясняется тем, что армирование фибрами увеличивает жесткость растворной части бетонной матрицы и прочность на сжатие до образования трещин в структуре бетона. Фибры, расположенные по длине трещины, воспринимают растягивающие усилия и сдерживают её развитие.

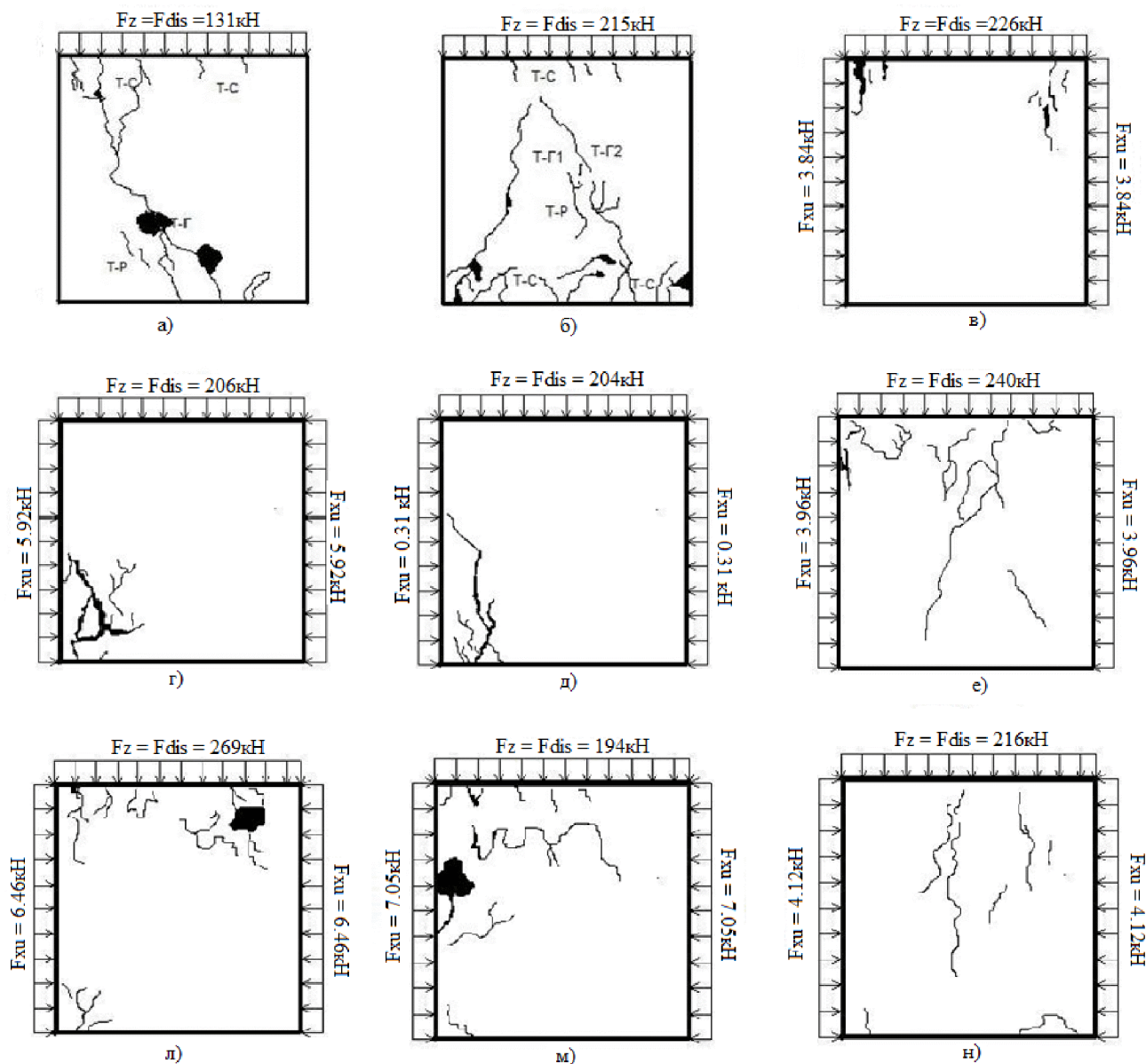


Рис. 6. Картины трещин в фибробетонных моделях стен в зависимости от процентного содержания фибр μ_s , начального бокового усилия обжатия F_{xo} (кН) при величинах разрушающих нагрузок F_{dis} (кН):

- а) $\mu_s=0$; $F_{xo}=0$; $F_{dis}=131$; б) $\mu_s=0,02$; $F_{xo}=0$; $F_{dis}=215$; в) $\mu_s=0,5$; $F_{xo}=3$; $F_{dis}=226$;
 г) $\mu_s=0,5$; $F_{xo}=6$; $F_{dis}=206$; д) $\mu_s=0,6$; $F_{xo}=0$; $F_{dis}=204$; е) $\mu_s=0,6$; $F_{xo}=3$; $F_{dis}=240$;
 л) $\mu_s=0,6$; $F_{xo}=6$; $F_{dis}=269$; м) $\mu_s=0,2$; $F_{xo}=6$; $F_{dis}=194$; н) $\mu_s=0,3$; $F_{xo}=3$; $F_{dis}=216$

При $\mu_s = 0,5 \dots 0,6 \% F_{cr} \approx (0,5 \dots 0,6) F_{zu}$. Прочность бетона возрастает в (1,7...1,8) раза.

Начальное боковое обжатие повышает величину разрушающего усилия. Однако принятое в опытах отношение F_{xo}/F_{dis} не приводит к значительному увеличению несущей способности.

Результаты отдельных опытов по замеру боковых перемещений приведены на рис. 7. Как видно, на характер деформирования влияет ряд факторов, в том числе состояние контактной поверхности по верхней грани.

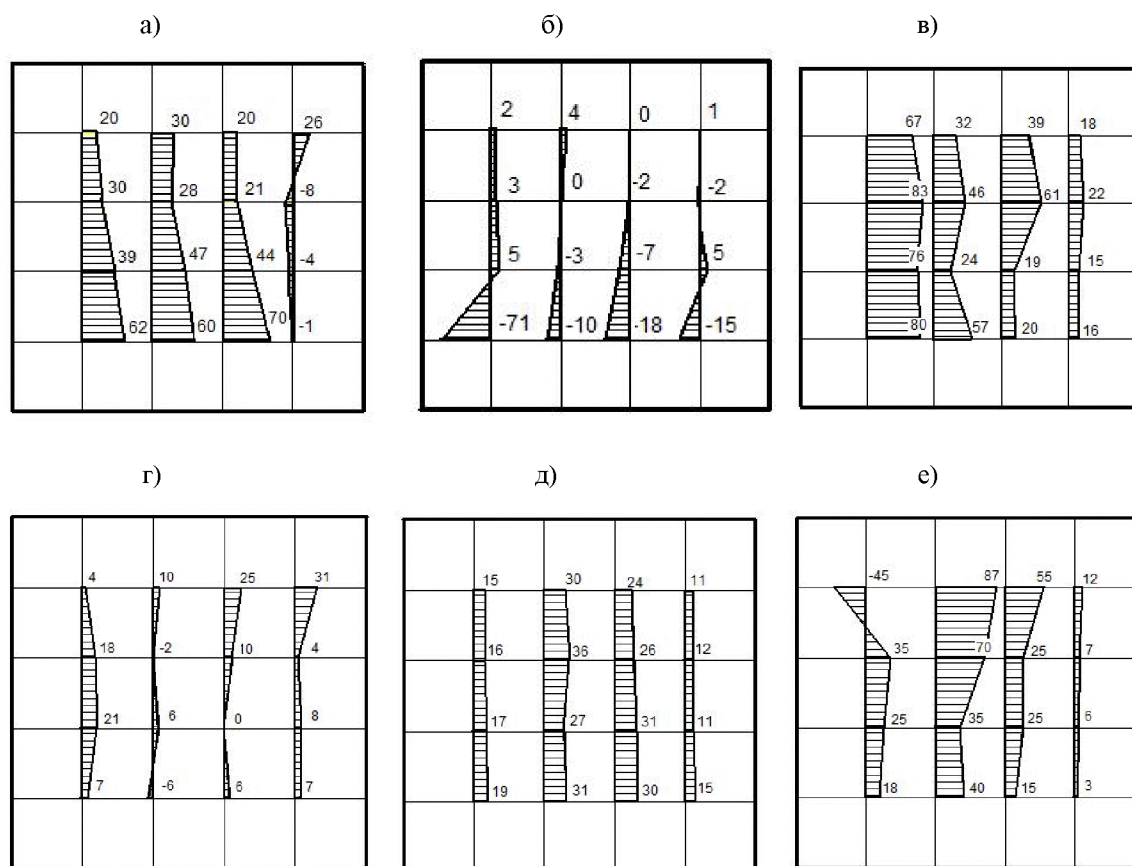


Рис. 7. Эпюры горизонтальных перемещений фибробетонных моделей стен u_y (мм) в зависимости от процентного содержания фибр, начального усилия бокового обжатия F_{xo} (кН) при величинах вертикальных разрушающих нагрузках F_{dis} (кН):

а) $\mu_s=0,5$ $F_{xo}=3$ $F_{dis}=226$; б) $\mu_s=0,5$ $F_{xo}=6$ $F_{dis}=206$; в) $\mu_s=0,6$ $F_{xo}=3$ $F_{dis}=240$;
 г) $\mu_s=0,6$ $F_{xo}=6$ $F_{dis}=269$; д) $\mu_s=0,2$ $F_{xo}=6$ $F_{dis}=194$; е) $\mu_s=0,3$ $F_{xo}=3$ $F_{dis}=216$

Выводы

1. В качестве фибр можно использовать проволоку с более низкими механическими свойствами, чем обычно рекомендуется.
2. Отмечено увеличение несущей способности и нагрузки начала трещинообразования с ростом процента армирования и усилия начального бокового обжатия. В последующем планируется увеличить μ_s до 2 %, а F_{xo} - до $0,5F_{dis}$.
3. Боковые деформации незначительны и в большой степени определяются контактными условиями. Планируется h/b увеличить до 10.

Библиографический список

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести : учебник /Н.И. Безухов. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
2. Гарагаш, Б.А. Аварии и повреждения системы “здание – основание” и регулирование надежности её элементов / Б.А.Гарагаш. – Волгоград: ВолГУ, 2000. – 378 с.
3. Леденёв, В.В. Предупреждение аварий: учеб. пособие / В.В. Леденёв, В.И. Скрылёв. - Тамбов: ТГТУ, 2000. - 278 с.
4. Леденёв, В.В. Прочность и трещиностойкость моделей стен с начальными дефектами / В.В. Леденёв, С.П. Морозов, Я.В. Савинов // Вестник ТГТУ, 2002. – Т.8. – N8. – С. 525-534.
5. Леденёв, В.В. Распространенные виды повреждений стен и методика учёта влияния их на остаточную прочность / В.В. Леденёв, В.В. Емельянов, Я.В. Савинов // Вестник ТГТУ, 2004. – Т.10. - N4Б. - С. 1094-1102.
6. Ржаницын, А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек / А.Р. Ржаницын. – М.: Наука, 1983. - 288 с.

Referencess

1. Bezukhov, N.I. Fundamentals of the Theory of Elasticity, Plasticity and Creep: teaching aid/N.I. Bezukhov.- 2nd issue, edit. and add. – M.: Hig. School., 1968. – 512 p.
2. Garagash, B.A. Accidents and damages of the system "building - base" and the regulation of the reliability of elements. - Volgograd: Vol.TU, 2000. – 378 pages.
3. Ledenev, V.V. Prevention of Accidents: teaching aid / V.V.Ledenev, V.I. Skrylev. - Tambov: TSTU, 2000. – 278 p.
4. Ledenev, V.V. Strength and Walls Fracture Strength with Initial Bracks.
V.V. Ledenev, S.P. Morozov, Y.V. Savinov // Bulletin TGTU.2002. . –№8. . – P. 525-534.
5. Ledenev, V.V. Common types of Walls Damages and Accounting Technique of Their Influence on Residual Strength / V.V. Ledenev, V.V. Emelyanov, Y.V. Savinov // Bulletin TGTU.2004. . – 10. – Tom N4Б. . – P.1094. – 1102.
6. Rzhanitsyn, A.R. Limit Equilibrium of Plates and Shells / Rzhanitsyn A.R. – M: Science, 1983. – 288 p.

Ключевые слова: фибробетон, стена, боковое обжатие, разрушение, трещины, боковое перемещение.

Keywords: fibrous concrete, wall, side compression, failure, cracks, lateral motion.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

ИССЛЕДОВАНИЯ ОНСТРКЦИИ И МАТЕРИАЛОВИИ И МАТЬ-

УДК 624.042.8: 624.872

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц.
кафедры строительной механики
С.Ю. Гриднев
ОАО «Воронежпроект»
Инженер I категории
А.Н. Будковой
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473) 271-52-30
e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Technical Science, Associate Professor
of Department of Structural Mechanics
S.Yu. Gridnev
Public Corporation "Voronezhproject"
(Voronezh) Engineer of I category of Public Corporation
"Voronezhproject"
A.N. Budkovo
Voronezh, Russia, tel.: 8(473) 2715230
e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru*

С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ АВТОЦИСТЕРН С ОТСЕКАМИ НА ПУТЬ ПРИ УЧЕТЕ ГИДРОУДАРА

Разработана динамическая модель автоцистерны с учетом деления котла на отсеки. Для моделирования продольных колебаний жидкости использовался механический аналог, расчет параметров которого был выполнен с учетом возможности появления гидроудара. Для каждого из отсеков определены основные параметры колебаний. Получены уточненные уравнения движения. Выполнены численные исследования влияния деления котла на отсеки на особенности динамического воздействия автоцистерны на проезжую часть во время торможения и разгона. Показано, что это уменьшает эффект дополнительного воздействия на мостовой путь, возникающий при гидроударе.

S.Yu. Gridnev, A.N. Budkovo

DYNAMIC EFFECT OF TANKERS WITH COMPARTMENTS ON BRIDGE FLOOR, TAKING INTO CONSIDERATION STRESS

Tanker dynamic model with kier sections is developed. For simulation of liquid longitudinal wobble there was used mechanical analogue; its parameter was calculated with consideration of possibility of stress appearance. Base parameters were determined for each compartment. Specified acceleration equations of motion were received. Numerical researches of kier division into compartments influence on peculiarities of tanker dynamic effect on bridge floor during acceleration or braking are done. It is shown that it diminishes additional effect, caused by stress, on bridge floor.

Введение

С увеличением общей нагрузки на автомобильные дороги и транспортные сооружения в транспортном потоке увеличилось и число автоцистерн повышенной грузоподъемности. Особенностью автоцистерн с эксплуатационным недоливом является возможность перемещения жидкости относительно кузова автоцистерны и наличие колебания свободной поверхности. Важной с практической стороны является оценка динамического воздействия на автодорожные мосты автоцистерн с различными жидкостями с позиции дополнительного воздействия на пролетное строение, в первую очередь при переходных режимах движения.

© Гриднев С.Ю., Будковой А.Н., 2012

В работе [1] авторами была предложена динамическая модель с использованием механического аналога жидкости и методика моделирования колебаний автоцистерны с учетом продольных колебаний жидкости в котле цистерны с целью определения сверхнормативных нагрузок на пролетные строения автодорожных мостов. Решение задачи получено прямым интегрированием системы дифференциальных уравнений колебаний автоцистерны. Для успокоения колебаний жидкости в котле автоцистерны используется несколько способов. На данном этапе ограничимся только делением цистерны на отсеки.

Модель автоцистерны с использованием механического аналога жидкости была усовершенствована для исследования переходных режимов движения с учетом гидроудара и при делении котла цистерны на отсеки в работе [2]. Ставилась задача оценить особенности динамического давления осей автоцистерны на путь при этом.

Особенности динамической модели при разбиении на отсеки. В общем случае цистерна может состоять из i отсеков, которые могут иметь различные объемы и уровни заполнения. На рис. 1 приведена схема цистерны, состоящей из трех отсеков. Для упрощения задачи и большей наглядности считаем, что отсеки одинакового объема и равнонаполненные.

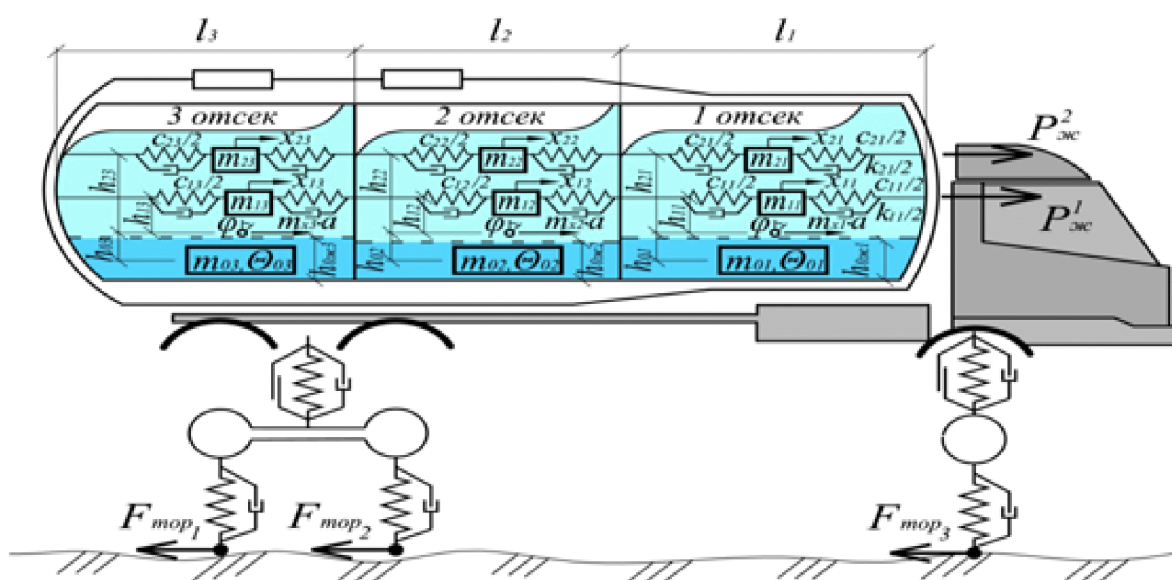


Рис. 1. Схема механической модели продольных колебаний жидкости цистерны с тремя отсеками

Для каждого из отсеков на основе предложенной механической модели жидкости можно получить основные параметры колебаний: массу жидкости m_n , частоту ω_n , соответствующий коэффициент жесткости c_n и расстояние h_n , где n – номер формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости, i – номер отсека.

Масса жидкости в i -м отсеке, не участвующей в колебаниях:

$$m_{0i} = m_{\text{ж}i} - \sum_n m_{ni}. \quad (1)$$

Суммарный момент инерции жидкости в модели в состоянии покоя:

$$\theta_{\text{ж}} = \sum_i \left(\theta_{0i} + m_{0i} (h_{0i}^2 + l_{0i}^2) + \sum_n m_{ni} (h_{ni}^2 + l_{ni}^2) \right), \quad (2)$$

где l_{0i} – горизонтальное расстояние от ц. м. отсека до ц. м. системы;

$$\theta_{0i} = \frac{m_{0i}}{12} (l_i^2 + h_{0жi}^2), \quad h_{0жi} = \frac{m_{0i}}{\rho_{жi} l_i b}.$$

Момент инерции движущейся жидкости:

$$\theta_{жс} = \sum_i \left(\theta_{0i} + m_{0i} (h_{0i}^2 + l_{0i}^2) + \sum_n m_{ni} (h_{ni}^2 + l_{0i}^2 + x_{ni}^2) \right); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \theta_{жс} = \theta_{жс_ном} + \theta_{жс_пер} = \sum_i \left(\theta_{0i} + m_{0i} (h_{0i}^2 + l_{0i}^2) + \sum_n m_{ni} (h_{ni}^2 + l_{0i}^2) \right) + \\ + \sum_{in} \pm m_{ni} x_{ni}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

где x_{ni} – горизонтальная координата центра тяжести жидкости, колеблющейся по n-й форме в i-м отсеке.

По аналогии $\theta_{жс} = \theta_{жс}(t)$ и $x_{ni} = x_{ni}(t)$.

Знаки слагаемых при определении переменной составляющей момента инерции движущейся жидкости назначаются в соответствии с правилом: “–” – если движение жидкости в отсеке происходит в направлении к общему центру тяжести всего объема жидкости, “+” – если от общего центра тяжести.

Внешнюю возмущающую силу также разложим на составляющие, приложенные к соответствующим массам:

$$M_T a = m_T a + m_{жс} a, \quad m_{жс} a = \sum_i \left(m_{0i} a + \sum_n m_{ni} a \right), \quad (5)$$

где M_T – суммарная масса всей системы без учета шин и балансирующей тележки;

m_T – масса механической (твердой) части автоцистерны;

$m_{жс}$ – масса транспортируемой жидкости.

Тогда общее уравнение колебаний n-го груза i-го отсека примет вид

$$m_{ni} (\ddot{x}_{ni} + h_{ni} \ddot{\phi}_T) + k_{ni} \dot{x}_{ni} + c_{ni} x_{ni} - m_{ni} g \phi_T - m_{ni} a = 0, \quad (6)$$

где ϕ_T – угол поворота кузова (механической части) автоцистерны.

На рис. 2 силами P_{1i} обозначены силы давления жидкости, колеблющейся по низшей (первой) собственной форме в i-м отсеке. Если принять отсеки равных объемов, то можно считать $P_{11} = P_{12} = \dots = P_{1i}$ и $m_{01} = m_{02} = \dots = m_{0i}$. В дальнейшем, опустив индексы отсеков, будем оперировать характеристиками объема жидкости, расположенной только в пределах одного отсека.

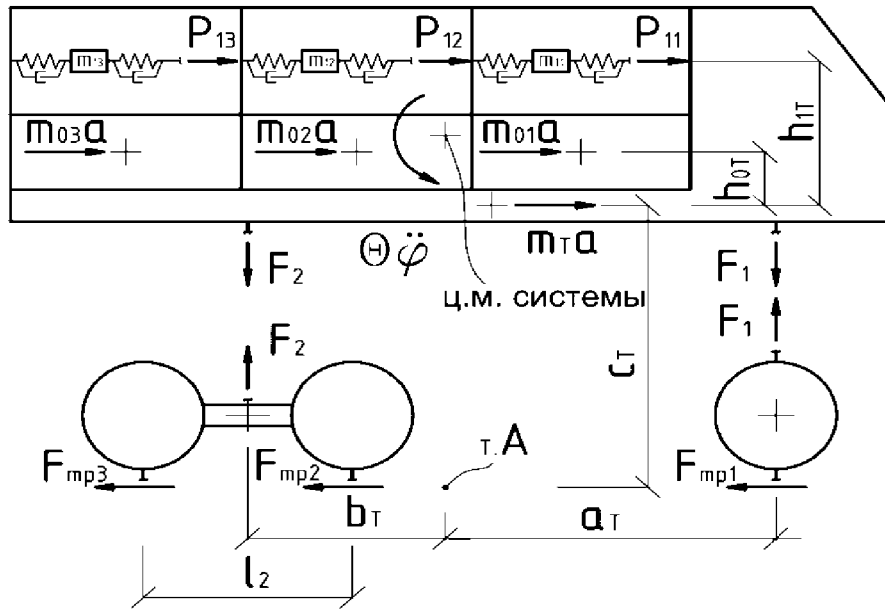


Рис. 2. Схема определения моментов от составляющих горизонтальной силы при делении котла цистерны на равные отсеки

Таким образом, уравнение угловых колебаний кузова принимает вид

$$\sum M_A = 0 \dots$$

$$(\theta_T + \theta_{ж_пер}) \cdot \ddot{\phi}_T(t) + F_1(v_1, \dot{v}_1) \cdot a_T(t) - F_2(v_2, \dot{v}_2) \cdot b_T(t) - m_T \cdot a \cdot c_T -$$

$$-i \cdot m_0 \cdot a \cdot (c_T + h_{0T}) - i \cdot P_1 \cdot (c_T + h_{1T}) = 0, \quad (7)$$

где i – количество одинаковых отсеков цистерны.

При учете одной формы собственных колебаний жидкости

$$X = \frac{\sum_{i=1}^3 m_{1i} \cdot x_{1i}}{m_T + m_0 + \sum_{i=1}^3 m_{1i}} = \frac{i \cdot m_1 \cdot x_1}{M_T} \quad (8)$$

Неизвестные слагаемые в плечах сил находим из геометрических соображений:

$$h_{0T} = h_d + h_{0ж} / 2, \quad h_{1T} = h_d + h / 2 + h_1, \quad (9)$$

где h_d – расстояние по вертикали от центра масс механической части (пустой цистерны) до дна цистерны – считается известной величиной и задается в качестве исходных данных.

При существенных уровнях заполнения (более 90 %) смещение центра тяжести системы при колебаниях жидкости становится незначительным и можно принять $a_T = a_{T0}$, $b_T = b_{T0}$, $\theta_{ж_пер} = 0$.

Анализ численных исследований колебаний автоцистерны при движении с постоянным ускорением. По изложенному алгоритму написана программа в пакете моделирования динамических и событийно управляемых систем Simulink вычислительного комплекса MATLAB [3]. Проиллюстрируем на графиках, как деление котла автоцистерны на отсеки позволяет снизить динамический эффект от колеблющейся жидкости при экстренном торможении (рис. 3) на примере автоцистерны 66052 на базе КамАЗ. Уровень заполнения исследуемой автоцистерны – 95 %, изменение положения центра масс жидкости в процессе колебаний не учитывалось.

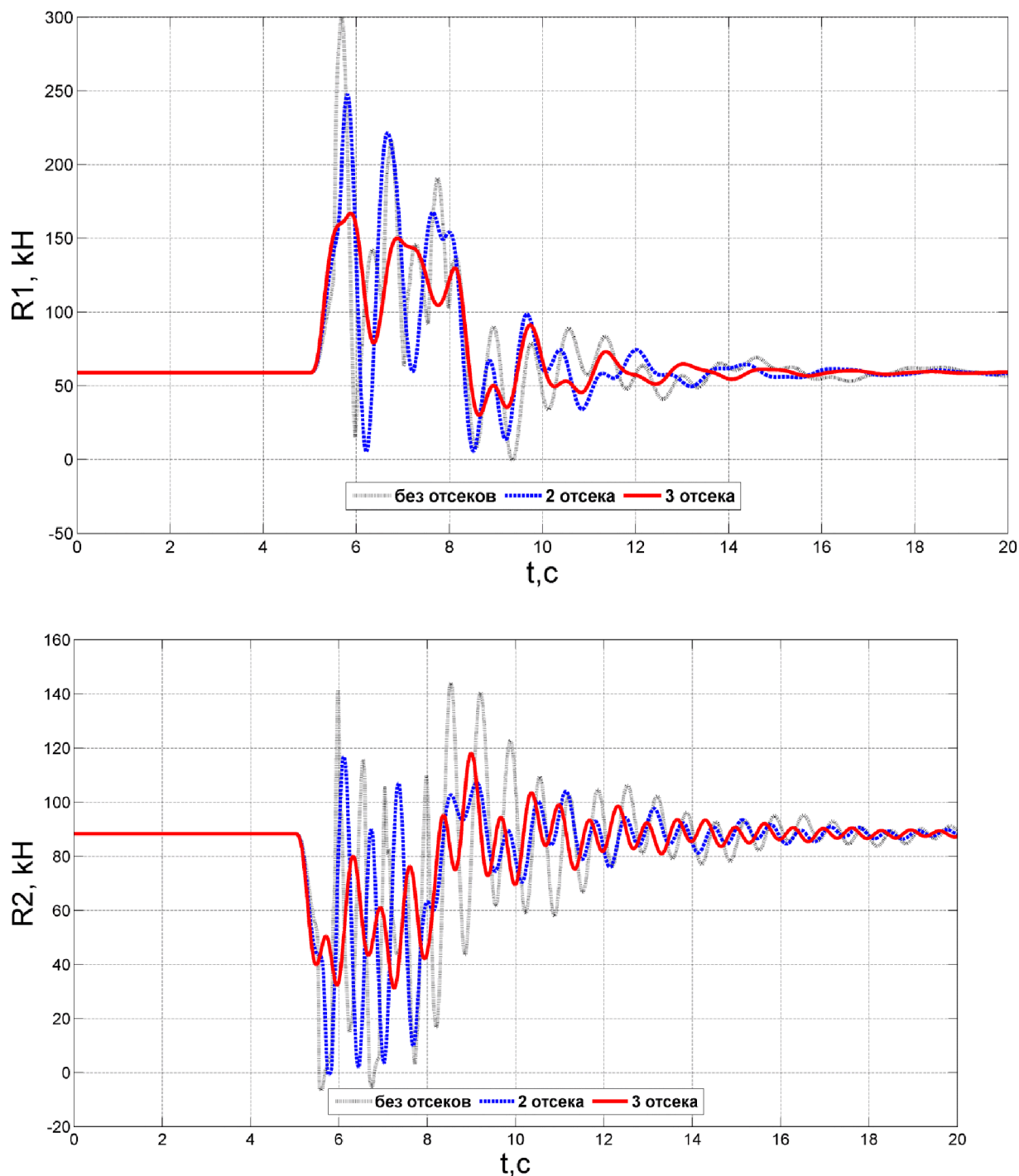


Рис. 3. Графики изменения давлений передней R1 и задней R2 осей автоцистерны при торможении с ускорением 6 м/с^2 с учетом деления цистерны на отсеки

Таким образом, деление рассмотренной цистерны на три равных отсека при ускорении 6 м/с^2 и уровне заполнения 95 % позволяет снизить максимальные давления осей передней – на 46 %, задней – на 16 % и свести в минимуму негативный эффект гидроудара, заключающийся в значительном увеличении динамического давления осей (см. рис. 3). При этом видно существенное отличие частот колебаний во всех трех моделях. Это может стать определяющим при учете неровностей профиля проезжей части и рассмотрении совместных колебаний системы «жидкость – автомобиль – мост».

Выполнена серия вычислительных экспериментов для исследуемой автоцистерны в диапазоне заполнения котла – 50...100 % и ускорений – $1...6 \text{ м/с}^2$. Учитываем изменение массы цистерны в зависимости от уровня заполнения, а также изменение положения центра масс и момента инерции всей системы в процессе колебаний.

Ниже приведена сводная таблица суммарных динамических коэффициентов давлений осей по отношению к статическим значениям. Она обобщает результаты численных исследований влияния подвижности жидкости.

Таблица

Максимальные динамические коэффициенты давлений осей с учетом подвижности жидкости при делении на отсеки

Торможение						
Величина ускорения по модулю, м/с^2	Динамические коэффициенты давлений осей					
	Без отсеков		2 отсека		3 отсека	
	Передняя ось R1	Задняя ось R2	Передняя ось R1	Задняя ось R2	Передняя ось R1	Задняя ось R2
2	2,9	1,49	2,06	1,15	1,78	1,12
4	4,54	1,83	3,14	1,29	2,74	1,3
6	5,88	2,00	4,2	1,5	3,6	1,43
Разгон						
Величина ускорения по модулю, м/с^2	Динамические коэффициенты давлений осей					
	Без отсеков		2 отсека		3 отсека	
	Передняя ось R1	Задняя ось R2	Передняя ось R1	Задняя ось R2	Передняя ось R1	Задняя ось R2
2	1,62	1,92	1,28	1,24	1,12	1,21
4	–	–	3,59	2,27	1,59	1,68

Результаты показали, что с увеличением ускорения наибольший динамический эффект обуславливается меньшим уровнем заполнения. Так, при торможении с ускорением 1 м/с^2 – это 99 % (без отсеков), 99 % (2 отсека) и 100 % (3 отсека); 3 м/с^2 – 91 % (без отсеков), 98 % (2 отсека) и 99 % (3 отсека); 6 м/с^2 – 84 % (без отсеков), 96 % (2 отсека) и 98 % (3 отсека).

Выводы

Анализ результатов указывает на необходимость выделения автоцистерн в особый класс подвижных нагрузок. Их динамические воздействия на транспортные сооружения требуют специального изучения. Наиболее значительными они могут быть при экстремальных случаях переходных режимов движения, таких как экстренное торможение или авария на дороге. Деление котла автоцистерны снижает максимальные давления осей передней и задней осей на проезжую часть пути и, таким образом, уменьшает эффект дополнительного воздействия, возникающий при гидроударе.

Библиографический список

1. Гриднев С.Ю. Использование механического аналога жидкости для моделирования колебаний автоцистерны при разгоне и торможении / С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – Вып. № 1 (21), 2011. – С. 98-106.
2. Гриднев, С.Ю. Совершенствование модели автоцистерны с использованием механического аналога жидкости для исследования переходных режимов движения / С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Актуальные проблемы динамики и прочности материалов и конструкций: модели, методы, решения: Материалы II международной дистанционной научно-технической конференции. – Самара, 2011. – С. 58-61.
3. Расчет колебаний автоцистерны с учетом подвижности жидкости: а.с. о государственной регистрации программ для ЭВМ № 50201250359 (РФ) (ВНТИЦ)/ Воронежский ГАСУ, С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой; опублик. 26.03.2012. – 2 с.

References

1. Gridnev, S.Yu. Application of liquid mechanical analogue for simulation of tanker wobble during acceleration or braking/ S.Yu. Gridnev, A.N. Budkovoi // Scientific Bulletin of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. – Issue № 1 (21), 2011. – P.98-106.
2. Gridnev, S.Yu. Upgrading of tanker model using liquid mechanical analogue for analyzing transitional traffic condition/ S.Yu. Gridnev, A.N. Budkovoi // Actual problems of dynamic and material and structure durability: models, methods, solutions. Documents of II International distance scientific technical conference. Samara. 2011. – P. 58-61.
3. Calculation of tanker wobble with consideration of liquid flowability: Certificate of State registration of software № 50201250359 (RF) (VNTITz) / Voronezh GASU, Gridnev, A.N. Budkovoi; pub. 26.03.2012, – 2p. : ill.1.

Ключевые слова: автоцистерна с отсеками, эксплуатационный недолив, торможение и разгон, гидроудар, динамическое воздействие на путь, динамическая модель, механический аналог жидкости, алгоритм расчета, вычислительный эксперимент, снижение динамического воздействия.

Keywords: tanker with compartments, service underfill, braking and acceleration, stress, dynamic effect on bridge floor, dynamic model, liquid dynamic analogue, calculating algorithm, calculating experiment, diminishing of dynamic effect.