ISSN 2219-1038

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск №2(3), 2011

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»

Издатель
Строительный факультет

СОДЕРЖАНИЕ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Адрес редакции:
394006 Воронеж,
ул. 20-летия Октября, 84
Тел., факс +7(473) 2715230

По вопросам размещения статей просьба обращаться по адресу**:**
394006 Воронеж,
ул. 20-летия Октября, 84
Тел./факс (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф.

Сафронову Владимиру Сергеевичу,
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: vss22@mail.ru

зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц.
Ефрюшину Сергею Владимировичу,
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

отв. секретарю, канд. техн. наук, доц.
Габриеляну Грайру Егишеевичу
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: grayr2010@rambler.ru

Редакторы Аграновская Н.Н., Акритова Е.В.
Подп. в печать 06.06. 2011. Формат 60x84 1/8. Усл.-печ. л. 14,7.
Уч.-изд. л. 14,8. Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ № 587.

.

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий Воронежского ГАСУ
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

ISSN 2219-1038

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific-Technical Journal

Issue №2(3), 2011

CONTENTS

Address :
84, 20-letie Oktyabrya st. 394006
Voronezh, Russia
Tel/ fax..: +7 (473) 2715230

Concerning articles publication one can address:
84,20-letie Oktyabrya st. Voronezh 394006, Russia
Chief editor Dr Sc.Tech. Prof.
Vladimir Sergeevich Safronov
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: vss22@mail.ru
Concerning the article placing in the journal one can address:
Deputy of Chief editor PhD, Associate Professor Sergei Vladimirovich Efryushin
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
Senior secretary:
PhD, Associate Professor
Gabrielyan Grayr Egisheevich
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: grayr2010@rambler.ru

Editor
N.N. Agranovskaya
E.V. Akritova

Printed: office of operated polygraphy
of Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering
84, 20-letie Oktyabrya
394006 Voronezh Russia

От научного редактора журнала
Уважаемые коллеги!

В третий номер журнала «Строительная механика и конструкции», который может представлять интерес для студентов, магистрантов, научных сотрудников и инженеров - конструкторов, занимающихся проектированием объектов строительства, включены научные статьи по актуальным вопросам теории сооружений. В них приводятся результаты экспериментальных и теоретических исследований как по фундаментальным проблемам, так и задачам, имеющим прикладное значение.

В помещенных в журнале двух статьях А.А. Петранина и Е.Н. Петрени получила развитие классическая теория сложного сопротивления стержней произвольного поперечного сечения, основанная на приближенных решениях Сен-Венана, С. П. Тимошенко, В.З. Власова. В рамках полумоментной теории упругости, учитывающей действие погонных нагрузок на стержень через объемные силы, моменты и граничные силы, получены отражающие более точно особенности деформирования стержней уравнения равновесия. Разработана методика определения функций депланации при сдвигах и кручении, которые используются для нахождения геометрических характеристик сечения, входящих в физические уравнения. Методика апробирована на примерах расчета, в которых полученные результаты сопоставлялись с известными аналитическими решениями.

Новый оригинальный вариант геометрического метода изучения деформирования разнообразных по формке и условиям закрепления пластинок равной площади предлагается в статье В. И. Коробко и А. А. Черняева.

Теоретичесий и практический интерес представляют статьи, помещенные в разделе, посвященном теории мостовых сооружений. В публикации Д.М. Шапиро и А. П. Тютина описывается обобщённый алгоритм дёформационного расчёта железобетонных пролётных строений с обычной и предварительно напряжённой арматурой, учитывающий кусочно-линейные диаграммы деформирования материалов. В статье В. С. Сафронова и А. В.Антипова с использованием уточненной пространственной конечно-элементной расчетной модели анализируются результаты натурных испытаний металлического моста с коробчатыми несущими балками и ортотропной плитой проезжей части.

Учет особенностей нелинейного деформирования материалов при прочностных расчетах строительных конструкций широко представлен в настоящем номере журнала. Публикация С.В. Ефрюшина и М.А. Викулова посвящена применению линейного программирования для оценки несущей способности железобетонных ребристых плит с дефектами. Поведение внецентренно сжатых бетонных призм исследуется в статье А. Н. Синозерского и Р. А. Мухтарова. Методика определения несущей способности металлического плоского каркаса по критерию предельного равновесия, предлагается в статье В.С. Варнавского и А. С. Поворина.

Главный редактор журнала
«Строительная механика и конструкции»
Заслуженный работник высшей школы РФ,
член – корр. АЕ, д-р техн. наук, профессор
В.С. Сафронов

УДК 539.3:624.074.5

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики
Е.Н. Петреня
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики
А.А. Петранин
Россия, г. Воронеж, тел. 8(473)271-52-30
e-mail: petranin.san@yandex.ru

Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Science, Associate Professor Of Department of Structural Mechanics
E.N. Petrenya
PhD of Tech. Science, Associate Professor Of Department of Structural Mechanics
A.A. Petranin
Voronezh, Russia, tel. 8(473)2715230
e-mail: petranin.san@yandex.ru

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

ИСХОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТЕРЖНЯ С МНОГОКОНТУРНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

На основе уравнений теории упругости построена система исходных дифференциальных уравнений пространственного стержня с произвольным поперечным сечением с учетом депланации при сдвигах и кручении. Получены дифференциальные уравнения, интегральные и граничные условия, которые необходимы для определения функций депланации. Выведены формулы для определения характеристик поперечного сечения и напряжений.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

REFERENCE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIMENSIONAL BAR WITH MULTILOOP CROSS SECTION OF ARBITRARY SHAPE

Based on equations of elasticity theory there was built a system of reference differential equations of dimensional bar with random cross section, taking into consideration deplanation during slipping and torsion. There were obtained differential quotations, integral and boundary conditions, which are necessary for definition of deplanation function. There were derived formulas for definition of cross section and strain.

Составление исходных дифференциальных уравнений для стержня сплошного сечения является классической задачей строительной механики, которая решалась в широком диапазоне постановок от приближенных технических теорий сопротивления материалов [1, 2] до поиска точных решений методами теории упругости (ТУ) [2-4]. В рамках технических теорий, базирующихся на применении гипотезы плоских сечений, практически точно определяется закон распределения нормальных напряжений σ_x в поперечном сечении (x– продольная ось стержня), но остается открытым вопрос о распределении касательных напряжений τ_{xy}, τ_{xz}, который решается для сечений произвольной формы только методами ТУ. Кроме этого, в технических теориях, как правило, пренебрегают деформациями в плоскости поперечного сечения и деформациями депланации, что оправдано лишь для стержней с большой гибкостью.

Классическим примером использования математического аппарата ТУ является постановка и решение задачи Сен-Венана для стержня с произвольной нагрузкой, приложенной к его торцам [3]. Но, несмотря на то, что все отмеченные выше нюансы напряженно-деформированного состояния (НДС) стержня отражены в решении данной задачи, непосредственно использовать его для составления дифференциальных уравнений стержня затруднительно из-за отсутствия произвольных нагрузок, распределенных по длине. Попытка же учесть такие нагрузки многократно усложняет и без того сложное точное решение задачи, что делает нецелесообразным его поиск и применение.

Оригинальный подход на основе вариационных принципов предложен Власовым в [1] для получения приближенных уравнений стержня со сплошным сечением, в которых учитываются распределенные нагрузки, отсутствующие в точном решении Сен-Венана. Однако в данной теории не рассматривается вопрос определения функции депланации, и для получения жесткостных характеристик видом этой функции приходится задаваться. Власов предлагал элементарную функцию $\psi = yz$ для задания депланации при кручении, которая приводит к большим погрешностям при определении крутильной жесткости, либо использовать точные функции, полученные путем решения задачи Сен-Венана.

Ниже предлагается комбинированный подход к составлению исходных дифференциальных уравнений стержня, в котором, с одной стороны, делаются допущения, обычные для технических теорий и значительно упрощающие решение, а с другой – используется аппарат ТУ, позволяющий сохранить важнейшие результаты решения задачи Сен-Венана. Важной особенностью данного подхода является использование полумоментной теории упругости, которая в отличие от традиционной учитывает в уравнениях равновесия не только объемные силы, но и моменты, что отменяет закон парности касательных напряжений и за счет большей адаптивности дает возможность удовлетворить все исходные уравнения теории. Другая особенность предлагаемой теории заключается в передаче погонных нагрузок на стержень через объемные силы, моменты и граничные силы, распределяемые по объему и поверхности стержня согласно законам, получаемым в ходе решения.

1. Исходные уравнения полумоментной пространственной теории упругости

На рис. 1 наряду с традиционными напряжениями и объемными силами p_x, p_y, p_z показаны объемные моменты h_x, h_y, h_z, благодаря которым рассматриваемый вариант теории упругости назван полумоментным в отличие от известной моментной теории упругости, дополнительно учитывающей моментные напряжения. Ниже приводятся классические уравнения теории упругости с введением объемных моментов.

Уравнения равновесия с учетом объемных сил и моментов:

$$\begin{cases} -\sigma_x^x - \tau_{yx}^y - \tau_{zx}^z = p_x; \\ -\tau_{xy}^x - \sigma_y^y - \tau_{zy}^z = p_y; \\ -\tau_{xz}^x - \tau_{yz}^y - \sigma_z^z = p_z; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{zy} - \tau_{yz} = h_x; \\ \tau_{xz} - \tau_{zx} = h_y; \\ \tau_{xy} - \tau_{yx} = h_z. \end{cases} \tag{1}$$

Вводим полусуммарные и полуразностные касательные напряжения:

$$\begin{cases} \tau'_{zy} = \frac{1}{2}(\tau_{zy} + \tau_{yz}); \\ \tau'_{xz} = \frac{1}{2}(\tau_{xz} + \tau_{zx}); \\ \tau'_{xy} = \frac{1}{2}(\tau_{xy} + \tau_{yx}); \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau''_{zy} = \frac{1}{2}(\tau_{zy} - \tau_{yz}); \\ \tau''_{xz} = \frac{1}{2}(\tau_{xz} - \tau_{zx}); \\ \tau''_{xy} = \frac{1}{2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}). \end{cases} \tag{2}$$

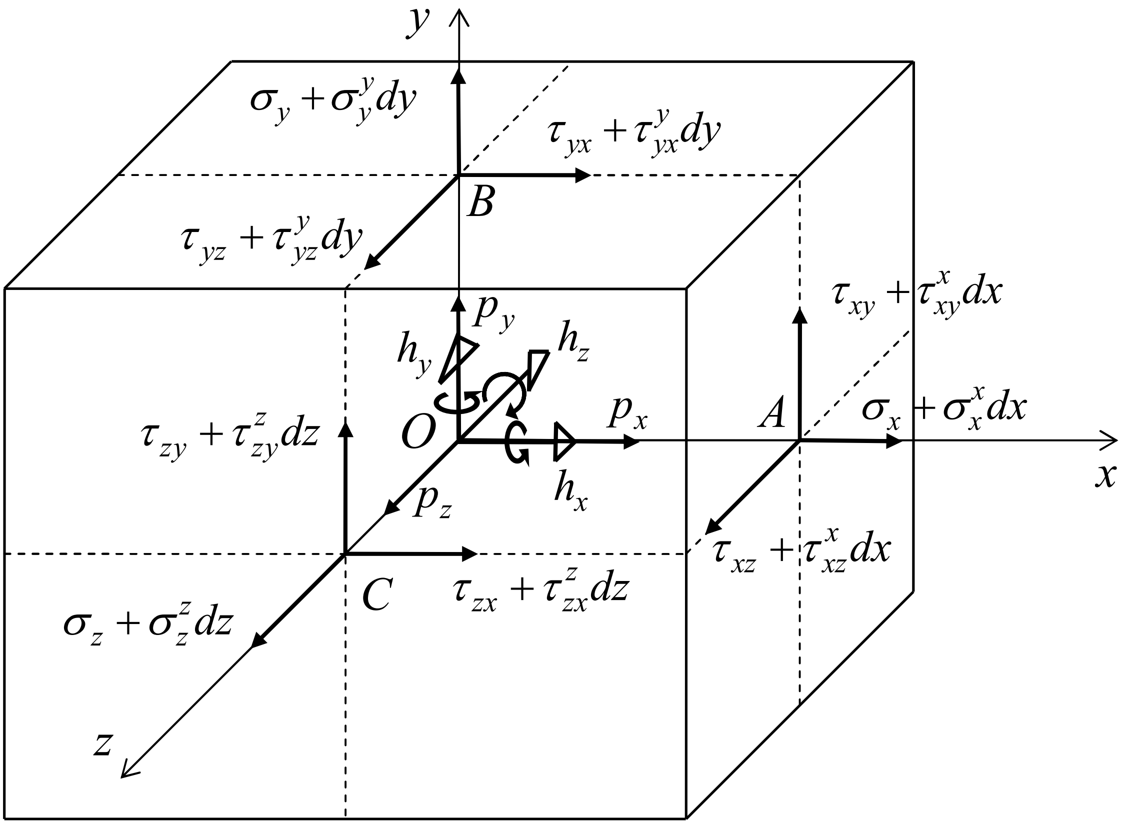


Рис. 1. Напряжения, объемные силы и моменты в общем случае

Отсюда следуют выражения для полных касательных напряжений:

$$\begin{cases} \tau_{zy} = \tau'_{zy} + \tau''_{zy}\,; \\ \tau_{xz} = \tau'_{xz} + \tau''_{xz}\,; \\ \tau_{xy} = \tau'_{xy} + \tau''_{xy}\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{yz} = \tau'_{zy} - \tau''_{zy}\,; \\ \tau_{zx} = \tau'_{xz} - \tau''_{xz}\,; \\ \tau_{yx} = \tau'_{xy} - \tau''_{xy}\,. \end{cases} \tag{3}$$

В физических уравнениях в соответствии с законом Гука представляется связь нормальных и полусуммарных касательных напряжений с деформациями:

$$\begin{cases} \sigma_x = E_1[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z]; \\ \sigma_y = E_1[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z]; \\ \sigma_z = E_1[\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z]; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau'_{zy} = G\gamma_{zy}\,; \\ \tau'_{xz} = G\gamma_{xz}\,; \\ \tau'_{xy} = G\gamma_{xy}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь
$$E_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{5}$$

Из уравнений равновесия моментов (1-2) и обозначений (2-2) следуют выражения для полуразностных касательных напряжений через объемные моменты:

$$\begin{cases} \tau''_{zy} = \dfrac{1}{2} h_x\,; \\ \tau''_{xz} = \dfrac{1}{2} h_y\,; \\ \tau''_{xy} = \dfrac{1}{2} h_z\,. \end{cases} \tag{6}$$

Геометрические уравнения ТУ (уравнения Коши) для области Ω:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_x^x; \\ \varepsilon_y = u_y^y; \\ \varepsilon_z = u_z^z; \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{zy} = u_z^y + u_y^z; \\ \gamma_{xz} = u_x^z + u_z^x; \\ \gamma_{xy} = u_x^y + u_y^x, \end{cases} \qquad y, z \in \Omega. \tag{7}$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = g_x; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = g_y; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = g_z, \end{cases} \qquad y, z \in \Gamma. \tag{8}$$

2. Исходные уравнения полумоментной теории упругости для НДС стержня

Аналитическое решение системы уравнений (1)-(8) для стержня с произвольным поперечным сечением представляет собой чрезвычайно сложную и трудоемкую задачу, которая в общем случае не решена до настоящего времени. Поэтому в предлагаемой теории сделан ряд допущений, которые позволяют значительно упростить вывод разрешающих уравнений для стержня и получить точное решение в рамках сделанных допущений.

Допущение 1. Пренебрежение отдельными напряжениями в продольных сечениях (см. рис. 2), отсутствующими в решении задачи Сен-Венана, и деформациями поперечного сечения, обычно пренебрегаемыми в технических теориях:

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0; \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

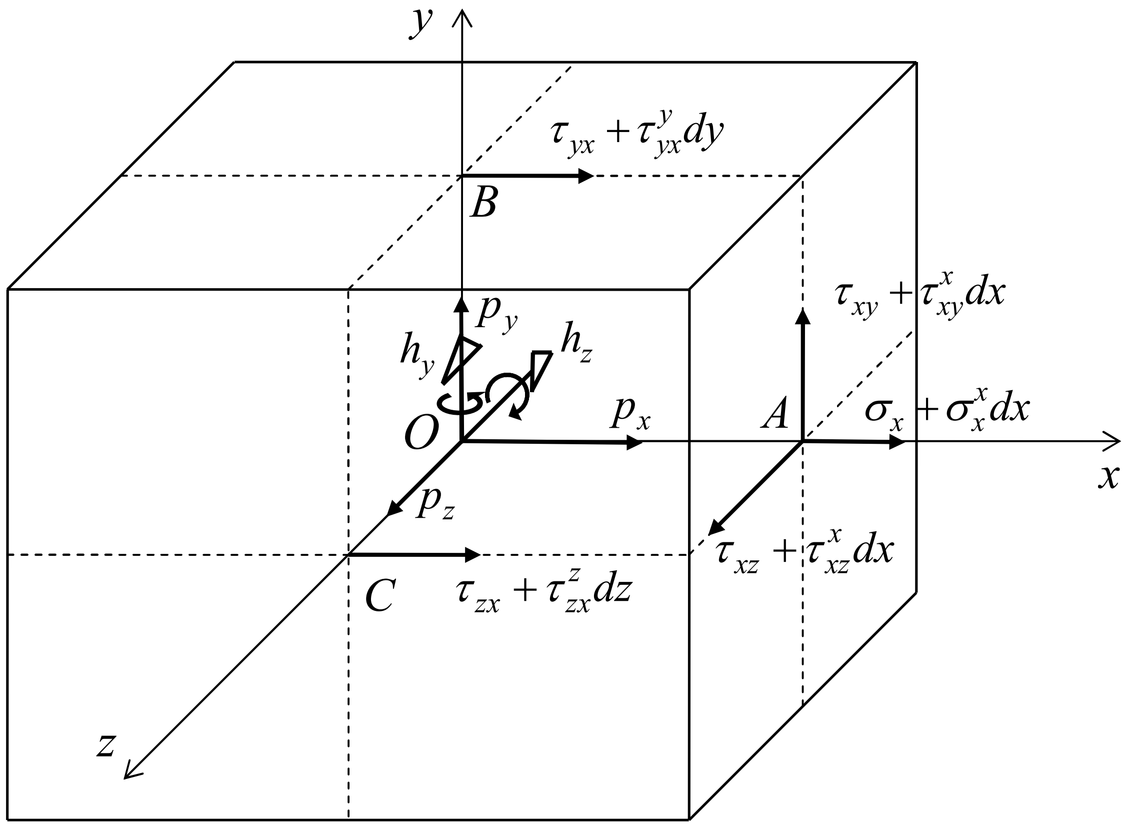


Рис. 2. Напряжения, объемные силы и моменты для НДС стержня

Следствие из (2), (6), (9):

$$\tau'_{zy} = \tau''_{zy} = h_x = 0. \tag{10}$$

Далее полагается, что поперечное сечение стержня состоит из отдельных областей (контуров) Ω_s, соответствующих различным материалам.

Дифференциальные уравнения равновесия сил для области Ω_s из (1), (9):

$$\begin{cases} -\sigma^x_{xs} - \tau^y_{yxs} - \tau^z_{zxs} = p_{xs}; \\ -\tau^x_{xys} = p_{ys}; \qquad\qquad y,z \in \Omega_s. \\ -\tau^x_{xzs} = p_{zs}, \end{cases} \tag{11}$$

Допущение 2. Пренебрежение эффектом Пуассона. При этом считается, что материал стержня имеет осевую анизотропию [5], при которой модуль сдвига и коэффициент Пуассона являются независимыми параметрами и последний принимается равным нулю. Тогда физические уравнения (4) для области Ω_s s-го составляющего контура сечения стержня:

$$\begin{cases} \sigma_{xs} = E_s \varepsilon_{xs}; \\ \tau'_{xys} = G_s \gamma_{xys}; \qquad\qquad y,z \in \Omega_s. \\ \tau'_{xzs} = G_s \gamma_{xzs}, \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения равновесия моментов для области Ω_s из (6), (9):

$$\begin{cases} \tau''_{xys} = \dfrac{1}{2} h_{zs}; \\ \qquad\qquad\qquad y,z \in \Omega_s. \\ \tau''_{xzs} = \dfrac{1}{2} h_{ys}, \end{cases} \tag{13}$$

Геометрические уравнения (уравнения Коши) для области Ω_s из (7), (9):

$$\begin{cases} \varepsilon_{xs} = u^x_{xs}; \\ \gamma_{xys} = u^y_{xs} + u^x_y; \\ \gamma_{xzs} = u^z_{xs} + u^x_z; \end{cases} \qquad \begin{cases} u^y_y = 0; \\ u^z_z = 0; \qquad\qquad y,z \in \Omega_s. \\ u^y_z + u^z_y = 0, \end{cases} \tag{14}$$

Граничные условия (8) на боковой поверхности B_s и границе Γ_{sr} s-го контура сечения стержня при направляющих косинусах $l_s = 0$, $m_s = dz/ds$, $n_s = -dy/ds$ (ds – дифференциал дуги границы контура):

$$\tau_{yxs} \frac{dz}{ds} - \tau_{zxs} \frac{dy}{ds} = g_{xs}, \quad y,z \in \mathrm{B}_s, \Gamma_{sr}. \tag{15}$$

Следствие из (8), (9):

$$g_{ys} = g_{zs} = 0, \qquad\qquad y,z \in \mathrm{K}_s. \tag{16}$$

Для многоконтурного поперечного сечения необходимо учитывать дополнительные условия. Условия совместности перемещений на границе Γ_{sr}:

$$u_{xs} = u_{xr}, \quad y,z \in \Gamma_{sr}. \tag{17}$$

Условия равновесия граничных сил на границе Γ_{sr}:

$$g_{xs} + g_{xr} = 0, \quad y,z \in \Gamma_{sr}. \tag{18}$$

Подстановка (18) в (15) с учетом $m_r = -m_s$, $n_r = -n_s$ вследствие противоположной направленности внешних нормалей на границах Γ_{sr} и Γ_{rs} дает:

$$(\tau_{yxs}-\tau_{yxr})\frac{dz}{ds}-(\tau_{zxs}-\tau_{zxr})\frac{dy}{ds}=0, \quad y,z\in\Gamma_{sr}. \tag{19}$$

3. Перемещения и деформации стержня

Представим базовые перемещения поперечного сечения стержня, являющиеся функциями продольной координаты x, как перемещения твердого тела (см. рис. 3) без учета депланации, причем часть перемещений $\widetilde{u}_1$ зададим в начале координат О, а часть $\widetilde{u}_2$ – в произвольной точке K':

$$\widetilde{u}=\begin{bmatrix}\widetilde{u}_1\\ \widetilde{u}_2\end{bmatrix}; \quad \widetilde{u}_1=\begin{bmatrix}u_{x0}\\ \beta_{z0}\\ \alpha_{y0}\end{bmatrix}; \quad \widetilde{u}_2=\begin{bmatrix}u_{yk}\\ u_{zk}\\ \alpha_{xk}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

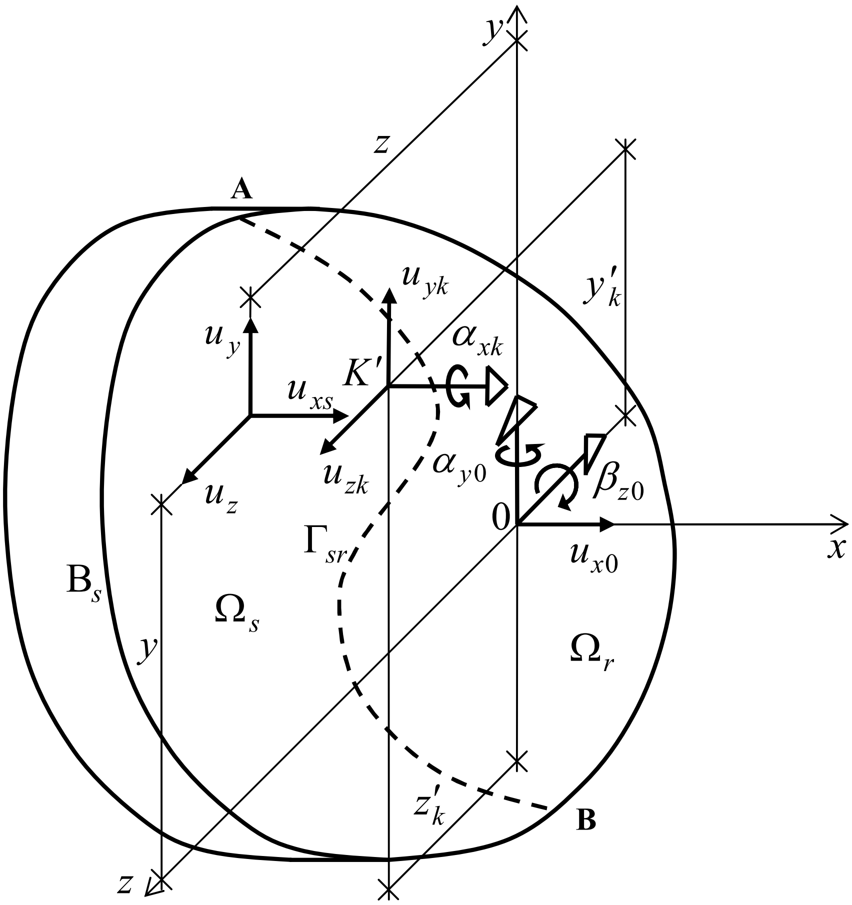


Рис. 3. Перемещения стержня

При решении задачи были введены следующие базовые деформации стержня:

$$\widetilde{e}=\begin{bmatrix}\widetilde{e}_1\\ \widetilde{e}_2\\ \widetilde{e}_3\end{bmatrix}; \quad \widetilde{e}_1=\begin{bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \mu_{z0}\\ \mu_{y0}\end{bmatrix}; \quad \widetilde{e}_2=\begin{bmatrix}\gamma_{xyk}\\ \gamma_{xzk}\\ \mu_{xk}\end{bmatrix}; \quad \widetilde{e}_3=\begin{bmatrix}\lambda_{xyk}\\ \lambda_{xzk}\\ \kappa_{xk}\end{bmatrix}, \tag{21}$$

причем в векторе $\widetilde{e}_1$ представлены продольная деформация и относительные углы поворота поперечного сечения, в векторе $\widetilde{e}_2$ – деформации сдвига и относительный угол закручивания, а вектор $\widetilde{e}_3$ поясняется в дальнейшем.

Решение для функций перемещений в произвольной точке сечения с учетом депланации задаем в виде:

$$\begin{cases} u_{xs} = u_{x0} + y\beta_{z0} + z\alpha_{y0} + \psi_{ys}\gamma_{xyk} + \psi_{zs}\gamma_{xzk} + \psi_{xs}\mu_{xk}\,, \quad y, z \in \Omega_s\,; \\ u_y = u_{yk} - (z - z'_k)\alpha_{xk}\,; \\ u_z = u_{zk} + (y - y'_k)\alpha_{xk}\,, \end{cases} \tag{22}$$

где $\psi_{ys}, \psi_{zs}, \psi_{xs}$ – функции депланации при сдвигах и кручении, аргументами которых являются поперечные координаты y, z. Отметим, что в аналогичном выражении Власовым вводилась единая функция депланации без конкретизации вызывающей ее причины.

Выражение (22) в блочной матричной форме:

$$\begin{cases} u_{xs} = \tilde{f}_x^T \tilde{u}_1 + \tilde{\psi}_s^T \tilde{e}_2\,; \\ u_y = \tilde{f}_y'^T \tilde{u}_2\,; \\ u_z = \tilde{f}_z'^T \tilde{u}_2\,, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$\tilde{f}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}'_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -z + z'_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}'_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y - y'_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{\psi}_s = \begin{bmatrix} \psi_{ys} \\ \psi_{zs} \\ \psi_{xs} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Деформации в произвольной точке с учетом (14), (23) равны:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xs} = u_{xs}^x \qquad\quad = \tilde{f}_x^T \tilde{e}_1 + \tilde{\psi}_s^T \tilde{e}_3\,; \\ \gamma_{xys} = u_{xs}^y + u_y^x = \tilde{\psi}_s^{YT} \tilde{e}_2\,; \\ \gamma_{xzs} = u_{xs}^z + u_z^x = \tilde{\psi}_s^{ZT} \tilde{e}_2\,, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\tilde{e}_3 = \tilde{e}_2^x\,; \tag{26}$$

$$\tilde{\psi}_s^Y = \tilde{f}'_y + \tilde{\psi}_s^y = \begin{bmatrix} 1 + \psi_{ys}^y \\ \psi_{zs}^y \\ -z + z'_k + \psi_{xs}^y \end{bmatrix}; \quad \tilde{\psi}_s^Z = \tilde{f}'_z + \tilde{\psi}_s^z = \begin{bmatrix} \psi_{ys}^z \\ 1 + \psi_{zs}^z \\ y - y'_k + \psi_{xs}^z \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Отметим, что вторая группа уравнений Коши (14) при подстановке в них задаваемого решения (23) обращается в тождества, поэтому уравнения совместности деформаций, являющиеся следствием уравнений Коши, выполняются автоматически и в дальнейшем не используются.

4. Геометрические уравнения стержня

Базовые деформации и перемещения стержня связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x0} = u_{x0}^x\,; \\ \mu_{z0} = \beta_{z0}^x\,; \\ \mu_{y0} = \alpha_{y0}^x\,; \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xyk} = u_{yk}^x + \beta_{z0}\,; \\ \gamma_{xzk} = u_{zk}^x + \alpha_{y0}\,; \\ \mu_{xk} = \alpha_{xk}^x\,. \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{xyk} = \gamma_{xyk}^x = u_{yk}^{xx} + \beta_{z0}^x\,; \\ \lambda_{xzk} = \gamma_{xzk}^x = u_{zk}^{xx} + \alpha_{y0}^x\,; \\ \kappa_{xk} = \mu_{xk}^x = \alpha_{xk}^{xx}\,, \end{cases} \tag{28}$$

или в блочной матричной форме:

$$
\begin{cases}
\tilde{e}_1 = \phantom{\tilde{G}_{21}\tilde{u}_1 +{}} \tilde{u}_1^x \ ; \\
\tilde{e}_2 = \tilde{G}_{21}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2^x \ ; \\
\tilde{e}_3 = \tilde{G}_{21}\tilde{u}_1^x + \tilde{u}_2^{xx} \ ,
\end{cases}
\tag{29}
$$

где блок геометрического оператора

$$
\tilde{G}_{21} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}.
\tag{30}
$$

Представим геометрические уравнения (29) в свернутой матричной форме:

$$
\tilde{e} = \tilde{G}\tilde{u} \ ,
\tag{31}
$$

где полный геометрический оператор:

$$
\tilde{G} = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
\partial^x & & & & & \\
 & \partial^x & & & & \\
 & & \partial^x & & & \\
\hdashline
 & 1 & & \partial^x & & \\
 & & 1 & & \partial^x & \\
 & & & & & \partial^x \\
\hdashline
 & \partial^x & & \partial^{xx} & & \\
 & & \partial^x & & \partial^{xx} & \\
 & & & & & \partial^{xx}
\end{array}\right].
\tag{32}
$$

Здесь $\partial^x = \partial / \partial x$ – дифференциальный оператор.

5. Напряжения и внутренние усилия стержня

Напряжения в произвольной точке из (12), (13), (25) равны:

$$
\begin{cases}
\sigma_{xs} = E_s \varepsilon_{xs} = E_s(\tilde{f}_x^T \tilde{e}_1 + \tilde{\psi}_s^T \tilde{e}_3); \\
\tau'_{xys} = G_s \gamma_{xys} = G_s \tilde{\psi}_s^{YT} \tilde{e}_2 \,; \\
\tau'_{xzs} = G_s \gamma_{xzs} = G_s \tilde{\psi}_s^{ZT} \tilde{e}_2 \,.
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\tau''_{xys} = \dfrac{1}{2} h_{zs} \,; \\
\tau''_{xzs} = \dfrac{1}{2} h_{ys} \,.
\end{cases}
\tag{33}
$$

Внутренние усилия, действующие в поперечном сечении стержня (см. рис. 4), аналогично перемещениям и деформациям приводим к точкам О и K'' :

$$
\tilde{s} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_3 \end{bmatrix} = \tilde{s}' + \tilde{s}'' \ ; \quad
\tilde{s}_1 = \begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} ; \quad
\tilde{s}_2 = \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{bmatrix} = \tilde{s}'_2 + \tilde{s}''_2 \ ; \quad
\tilde{s}_3 = \begin{bmatrix} L_{xy} \\ L_{xz} \\ K_x \end{bmatrix} ;
$$

$$
\tilde{s}' = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}'_2 \\ \tilde{s}_3 \end{bmatrix} ; \qquad
\tilde{s}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{s}''_2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad
\tilde{s}'_2 = \begin{bmatrix} Q'_y \\ Q'_z \\ M'_x \end{bmatrix} ; \qquad
\tilde{s}''_2 = \begin{bmatrix} Q''_y \\ Q''_z \\ M''_x \end{bmatrix} .
\tag{34}
$$

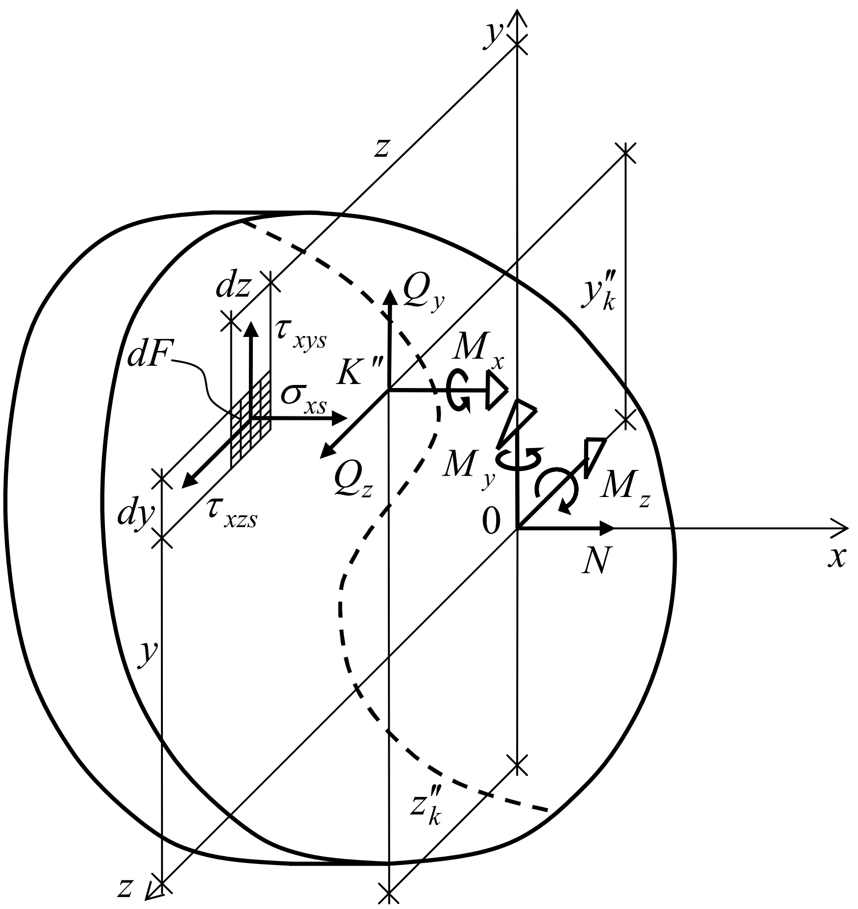


Рис. 4. Усилия и напряжения в стержне

Здесь в векторе $\tilde{s}_1$ сведены продольная сила и изгибающие моменты, в $\tilde{s}_2$ – поперечные силы и крутящий момент, а вектор $\tilde{s}_3$ поясняется в дальнейшем. При этом усилия в $\tilde{s}_2$ разбиваются на слагаемые со штрихами, которые наследуются от касательных напряжений.

Уравнения связи между внутренними усилиями и напряжениями имеют вид:

$$\begin{cases} N = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \sigma_{xs} dF_s ; \\ M_z = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} y\sigma_{xs} dF_s ; \\ M_y = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} z\sigma_{xs} dF_s ; \end{cases} \quad \begin{cases} Q'_y = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \tau'_{xys} dF_s ; \\ Q'_z = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \tau'_{xzs} dF_s ; \\ M'_x = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} [-(z - z''_k)\tau'_{xys} + (y - y''_k)\tau'_{xzs}] dF_s ; \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} L_{xy} = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \psi_{ys}\sigma_{xs} dF_s ; \\ L_{xz} = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \psi_{zs}\sigma_{xs} dF_s ; \\ K_x = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \psi_{xs}\sigma_{xs} dF_s ; \end{cases} \quad \begin{cases} Q''_y = \frac{1}{2}\sum\limits_s \int\limits_{F_s} h_{zs} dF_s ; \\ Q''_z = \frac{1}{2}\sum\limits_s \int\limits_{F_s} h_{ys} dF_s ; \\ M''_x = \frac{1}{2}\sum\limits_s \int\limits_{F_s} [-(z - z''_k)h_{zs} + (y - y''_k)h_{ys}] dF_s , \end{cases} \tag{36}$$

или в блочной матричной форме:

$$\begin{cases} \tilde{s}_1 = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \tilde{f}_x \sigma_{xs} dF_s \,; \\ \tilde{s}_2' = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} (\tilde{f}_y'' \tau_{xys}' + \tilde{f}_z'' \tau_{xzs}') dF_s \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{s}_3 = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \tilde{\psi}_s \sigma_{xs} dF_s \,; \\ \tilde{s}_2'' = \dfrac{1}{2} \sum\limits_s \int\limits_{F_s} (\tilde{f}_y'' h_{zs} + \tilde{f}_z'' h_{ys}) dF_s \,, \end{cases} \tag{37}$$

где векторы $\tilde{f}_y'', \tilde{f}_z''$ определяются аналогично выражениям (24) с заменой одинарного апострофа на двойной. В формулах (35) – (37) суммирование осуществляется по отдельным контурам Ω_s поперечного сечения, а интегрирование – по площади F_s s-го контура.

Усилия в $\tilde{s}_3$ по (36) назовем моментами депланации при сдвигах (L_{xy}, L_{xz} имеют размерность момента) и бимоментом депланации при кручении (K_x является аналогом бимомента в теории тонкостенных стержней Власова). Они соответствуют введенным в (21) деформациям $\tilde{e}_3$, поскольку не нарушают симметрии матрицы жесткости, как будет показано далее.

6. Физические уравнения стержня и частичная диагонализация матрицы жесткости

Подстановка напряжений (33) в уравнения связи (35), (36), (37) дает физические уравнения:

$$\tilde{s}' = \tilde{C} \tilde{e} \,, \tag{38}$$

или в блочной форме:

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2' \\ \tilde{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & & \tilde{C}_{13} \\ & \tilde{C}_{22} & \\ \tilde{C}_{31} & & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{bmatrix} , \tag{39}$$

где блоки матрицы жесткости $\tilde{C}$ равны:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{11} = \sum\limits_s E_s \int\limits_{F_s} \tilde{f}_x \tilde{f}_x^T dF_s = E \begin{bmatrix} F & S_z & S_y \\ S_z & J_z & J_{yz} \\ S_y & J_{yz} & J_y \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{13} = \tilde{C}_{31}^T = \sum\limits_s E_s \int\limits_{F_s} \tilde{f}_x \tilde{\psi}_s^T dF_s = E \begin{bmatrix} I_{\psi y} & I_{\psi z} & I_{\psi x} \\ I_{y\psi y} & I_{y\psi z} & I_{y\psi x} \\ I_{z\psi y} & I_{z\psi z} & I_{z\psi x} \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{22} = \sum\limits_s G_s \int\limits_{F_s} (\tilde{f}_y'' \tilde{\psi}_s^{YT} + \tilde{f}_z'' \tilde{\psi}_s^{ZT}) dF_s = G \begin{bmatrix} F_{yy} & F_{yz} & S_{yx} \\ F_{zy} & F_{zz} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{xz} & J_k \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{33} = \sum\limits_s E_s \int\limits_{F_s} \tilde{\psi}_s \tilde{\psi}_s^T dF_s = E \begin{bmatrix} I_{\psi yy} & I_{\psi yz} & I_{\psi yx} \\ I_{\psi yz} & I_{\psi zz} & I_{\psi zx} \\ I_{\psi yx} & I_{\psi zx} & I_{\psi xx} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{40}$$

Здесь обозначены приведенные и относительные модули упругости и сдвига:

$$\begin{cases} E = (\sum\limits_s E_s F_s) / F \,; \\ G = (\sum\limits_s G_s F_s) / F \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} e_s = E_s / E \,; \\ g_s = G_s / G \,, \end{cases} \tag{41}$$

приведенные геометрические характеристики поперечного сечения:

$$\begin{cases} F = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} dF_s ; \\ S_z = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} y dF_s ; \\ S_y = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} z dF_s ; \\ J_z = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} y^2 dF_s ; \\ J_y = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} z^2 dF_s ; \\ J_{yz} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} yz dF_s ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ S'_z = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y dF_s ; \\ S'_y = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z dF_s ; \\ J'_z = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y^2 dF_s ; \\ J'_y = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z^2 dF_s ; \\ J'_x = J'_y + J'_z , \end{cases} \tag{42}$$

компоненты подматрицы $\widetilde{C}_{22}$:

$$\begin{cases} F_{yy} = F + I'^{y}_{\psi y} ; \quad F_{yz} = I'^{y}_{\psi z} ; \quad F_{zy} = I'^{z}_{\psi y} ; \quad F_{zz} = F + I'^{z}_{\psi z} ; \\ S_{yx} = z'_k F - S'_y + I'^{y}_{\psi x} ; \quad S_{xy} = z''_k F_{yy} - y''_k F_{zy} - S'_y - I'^{y}_{z\psi y} + I'^{z}_{y\psi y} ; \\ S_{zx} = -y'_k F + S'_z + I'^{z}_{\psi x} ; \quad S_{xz} = z''_k F_{yz} - y''_k F_{zz} + S'_z - I'^{y}_{z\psi z} + I'^{z}_{y\psi z} ; \\ J_k = J'_x + z''_k S_{yx} - z'_k S'_y - y''_k S_{zx} - y'_k S'_z - I'^{y}_{z\psi x} + I'^{z}_{y\psi x} , \end{cases} \tag{43}$$

приведенные интегралы от функций депланации:

$$\begin{cases} I_{\psi p} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} \psi_{ps} dF_s ; \\ I_{y\psi p} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} y \psi_{ps} dF_s ; \\ I_{z\psi p} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} z \psi_{ps} dF_s ; \\ I_{\psi pq} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} \psi_{ps} \psi_{qs} dF_s ; \end{cases} \quad \begin{cases} I'^{y}_{\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \psi^{y}_{ps} dF_s ; \\ I'^{z}_{\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \psi^{z}_{ps} dF_s ; \\ I'^{y}_{z\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z \psi^{y}_{ps} dF_s ; \\ I'^{z}_{y\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y \psi^{z}_{ps} dF_s , \end{cases} \quad p,q = y,z,x. \tag{44}$$

Выполним частичную диагонализацию и установим условия симметрии матрицы жесткости исходя из независимости отдельных НДС друг от друга.

1. Независимость НДС растяжения-сжатия и изгибов друг от друга достигается приведением характеристик к главным центральным осям инерции из условий равенства нулю побочных коэффициентов матрицы $\widetilde{C}_{11}$:

$$S_z = S_y = J_{yz} = 0. \tag{45}$$

2. Независимость НДС сдвигов от кручения приводит к условиям равенства нулю побочных коэффициентов матрицы $\widetilde{C}_{22}$:

$$\begin{cases} S_{yx} = S_{zx} = 0 ; \\ S_{xy} = S_{xz} = 0 . \end{cases} \tag{46}$$

Выполнение условий (46) переводит произвольные точки K' (см. рис. 3) и K'' (см. рис. 4) в разряд особых точек поперечного сечения стержня, именуемых в литературе центрами кручения и изгиба. Из (46-1) с учетом обозначений (43) получим **координаты центра кручения** K', выраженные через функции ψ_{xs}:

$$\begin{cases} z'_k = \dfrac{S'_y - I'^{\,y}_{\psi x}}{F}; \\ y'_k = \dfrac{S'_z + I'^{\,z}_{\psi x}}{F}, \end{cases} \tag{47}$$

из (46-2) – систему уравнений относительно **координат центра изгиба** K'', выраженных через функции ψ_{ys}, ψ_{zs} :

$$\begin{cases} F_{yy} z''_k - F_{zy} y''_k = S'_y + I'^{\,y}_{z\psi y} - I'^{\,z}_{y\psi y}; \\ -F_{yz} z''_k + F_{zz} y''_k = S'_z + I'^{\,z}_{y\psi z} - I'^{\,y}_{z\psi z}. \end{cases} \tag{48}$$

В литературе отмечено (см. [4]), что при отсутствии деформаций поперечных сечений в их плоскостях (см. допущение 1) центры кручения и изгиба совпадают. Для доказательства рассмотрим два единичных состояния консоли при действии крутящего момента $P_1 = 1$ и поперечной силы $P_2 = 1$, приложенной в произвольной точке K поперечного сечения. В первом состоянии линейное перемещение δ_{21} по направлению P_2 равно нулю в том случае, если точка K совпадает с центром кручения, а во втором состоянии угловое перемещение δ_{12} равно нулю, если точка K является центром изгиба. Поскольку по теореме взаимности перемещений Максвелла $\delta_{21} = \delta_{12}$, то одновременное равенство нулю данных перемещений возможно лишь тогда, когда центры кручения и изгиба совпадают.

Поэтому в дальнейшем будем опускать введенные штрихи в обозначениях величин y_k, z_k, $\tilde{f}_y$, $\tilde{f}_z$, а ставшею зависимой систему уравнений (48) считать **условием симметрии матрицы жесткости** так же, как и равенство оставшихся побочных коэффициентов матрицы $\tilde{C}_{22}$:

$$F_{yz} = F_{zy} \,. \tag{49}$$

Доказательство выполнений условий (48), (49) в рамках предлагаемой теории будет дано позднее.

3. Независимость НДС растяжения-сжатия и изгибов от деформаций депланации накладывает **интегральные условия на функции депланации** из условия равенства нулю побочных матриц $\tilde{C}_{13}$ и $\tilde{C}_{31}$:

$$\tilde{C}_{13} = \tilde{C}_{31}^T = E \begin{bmatrix} I_{\psi y} & I_{\psi z} & I_{\psi x} \\ I_{y\psi y} & I_{y\psi z} & I_{y\psi x} \\ I_{z\psi y} & I_{z\psi z} & I_{z\psi x} \end{bmatrix} = \tilde{0}\,, \tag{50}$$

или

$$\begin{cases} I_{\psi y} = 0; \\ I_{y\psi y} = 0; \\ I_{z\psi y} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} I_{\psi z} = 0; \\ I_{y\psi z} = 0; \\ I_{z\psi z} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} I_{\psi x} = 0; \\ I_{y\psi x} = 0; \\ I_{z\psi x} = 0. \end{cases} \tag{51}$$

Данные условия наряду с другими уравнениями будут использоваться на этапе определения функций депланации.

Отсюда матрица жесткости с учетом частичной диагонализации равна:

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & & \\ & \widetilde{C}_{22} & \\ & & \widetilde{C}_{33} \end{bmatrix}; \tag{52}$$

$$\widetilde{C}_{11} = E\begin{bmatrix} F & & \\ & J_z & \\ & & J_y \end{bmatrix}; \ \widetilde{C}_{22} = G\begin{bmatrix} F_{yy} & F_{yz} & \\ F_{zy} & F_{zz} & \\ & & J_k \end{bmatrix}; \ \widetilde{C}_{33} = E\begin{bmatrix} I_{\psi yy} & I_{\psi yz} & I_{\psi yx} \\ I_{\psi yz} & I_{\psi zz} & I_{\psi zx} \\ I_{\psi yx} & I_{\psi zx} & I_{\psi xx} \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Связь между деформациями (26) и физические уравнения (39) с диагонализированной матрицей жесткости (52) позволяют установить непосредственную зависимость между аналогичными усилиями:

$$\widetilde{s}_3 = \widetilde{C}_{33}\widetilde{e}_3 = \widetilde{C}_{33}\widetilde{e}_2^{\,x} = \widetilde{C}_{33}\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{s}_2'^{\,x}. \tag{54}$$

7. Граничные силы и обобщение граничных условий

Подстановка полных касательных напряжений (3) в граничные условия (15), (19) дает:

$$\begin{cases} (\tau'_{xys} - \tau''_{xys})\dfrac{dz}{ds} - (\tau'_{xzs} - \tau''_{xzs})\dfrac{dy}{ds} = g_{xs}, \quad y,z \in \mathrm{B}_s; \\ [(\tau'_{xys} - \tau'_{xyr}) - (\tau''_{xys} - \tau''_{xyr})]\dfrac{dz}{ds} - [(\tau'_{xzs} - \tau'_{xzr}) - (\tau''_{xzs} - \tau''_{xzr})]\dfrac{dy}{ds} = 0, \quad y,z \in \Gamma_{sr}. \end{cases} \tag{55}$$

Допущение 3. Граничные силы на боковой поверхности B_s возникают только при появлении полуразностных касательных напряжений, а функции последних не имеют разрывов на границах Γ_{sr}. Тогда с учетом (13) **граничные силы** равны

$$g_{xs} = -\tau''_{xys}\frac{dz}{ds} + \tau''_{xzs}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2}(-h_{zs}\frac{dz}{ds} + h_{ys}\frac{dy}{ds}), \quad y,z \in \mathrm{B}_s, \tag{56}$$

и новые граничные условия будут аналогичны условиям в задаче Сен-Венана:

$$\begin{cases} \tau'_{xys}\dfrac{dz}{ds} - \tau'_{xzs}\dfrac{dy}{ds} = 0, \quad y,z \in \mathrm{B}_s; \\ (\tau'_{xys} - \tau'_{xyr})\dfrac{dz}{ds} - (\tau'_{xzs} - \tau'_{xzs})\dfrac{dy}{ds} = 0, \quad y,z \in \Gamma_{sr}. \end{cases} \tag{57}$$

Подстановка напряжений (33) в (57) позволяет выразить граничные условия через функции депланации:

$$\begin{cases} G_s(\widetilde{\psi}_s^Y\dfrac{dz}{ds} - \widetilde{\psi}_s^Z\dfrac{dy}{ds}) = 0, \quad y,z \in \mathrm{B}_s; \\ G_s(\widetilde{\psi}_s^Y\dfrac{dz}{ds} - \widetilde{\psi}_s^Z\dfrac{dy}{ds}) - G_r(\widetilde{\psi}_r^Y\dfrac{dz}{ds} - \widetilde{\psi}_r^Z\dfrac{dy}{ds}) = 0, \quad y,z \in \Gamma_{sr}. \end{cases} \tag{58}$$

Введем произвольные функции R_{ys}, R_{zs}, R_{xs} аргументов y, z и составим из них вектор:

$$\widetilde{R}_s = \begin{bmatrix} R_{ys} & R_{zs} & R_{xs} \end{bmatrix}^T. \tag{59}$$

Данные функции подчиним условиям совместности на границах Γ_{sr}:

$$\widetilde{R}_s = \widetilde{R}_r, \quad y,z \in \Gamma_{sr}. \tag{60}$$

Умножим покомпонентно вектор $\widetilde{R}_s$ с учетом условия (60) на каждое из граничных условий (58), проинтегрируем по B_s, Γ_{sr} и просуммируем по контурам s:

$$\begin{cases} \sum\limits_s G_s \int\limits_{\mathrm{B}_s} \widetilde{R}_s * (\widetilde{\psi}_s^Y dz - \widetilde{\psi}_s^Z dy) = 0, & y,z \in \mathrm{B}_s; \\ \sum\limits_s [G_s \int\limits_{\Gamma_{sr}} \widetilde{R}_s * (\widetilde{\psi}_s^Y dz - \widetilde{\psi}_s^Z dy) - G_r \int\limits_{\Gamma_{sr}} \widetilde{R}_r * (\widetilde{\psi}_r^Y dz - \widetilde{\psi}_r^Z dy)] = 0, & y,z \in \Gamma_{sr}. \end{cases} \quad (61)$$

Суммируем уравнения (61) с учетом, что для s-го контура $\mathrm{K}_s = \mathrm{B}_s + \sum\limits_r \Gamma_{sr}$, а интегрирование по границе подчиняется правилу $\int\limits_{\Gamma_{sr}} ds = -\int\limits_{\Gamma_{rs}} ds$:

$$\sum_s G_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} \widetilde{R}_s * (\widetilde{\psi}_s^Y dz - \widetilde{\psi}_s^Z dy) = 0, \quad y,z \in \mathrm{K}_s, \quad (62)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_s G_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} R_{ys}[(1+\psi_{ys}^y)dz - \psi_{ys}^z dy] = 0; \\ \sum\limits_s G_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} R_{zs}[\psi_{zs}^y dz - (1+\psi_{zs}^z)dy] = 0; & y,z \in \mathrm{K}_s. \\ \sum\limits_s G_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} R_{xs}[(-z+z_k+\psi_{xs}^y)dz - (y-y_k+\psi_{xs}^z)dy] = 0, \end{cases} \quad (63)$$

Используя для (63) формулу Грина, связывающую интегралы по контуру и по площади

$$\int\limits_{\mathrm{K}_s} Q_s\, dz - P_s dy = \int\limits_{F_s} (P_s^z + Q_s^y)\, dF_s \ , \quad (64)$$

получим **обобщенные граничные условия**:

$$\begin{cases} \sum\limits_s G_s \int\limits_{F_s} [R_{ys}^z \psi_{ys}^z + R_{ys}^y(1+\psi_{ys}^y) + R_{ys}\psi_{ys}^\Delta] dF_s = 0; \\ \sum\limits_s G_s \int\limits_{F_s} [R_{zs}^z (1+\psi_{zs}^z) + R_{zs}^y \psi_{zs}^y + R_{zs}\psi_{zs}^\Delta] dF_s = 0; \\ \sum\limits_s G_s \int\limits_{F_s} [R_{xs}^z (y-y_k+\psi_{xs}^z) + R_{xs}^y(-z+z_k+\psi_{xs}^y) + R_{xs}\psi_{xs}^\Delta] dF_s = 0, \end{cases} \quad (65)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \equiv \partial^{yy+zz}$ - оператор Лапласа.

Таким образом, граничные условия (58), заданные во множестве точек внешних и внутренних границ поперечного сечения, могут быть заменены интегральными обобщенными условиями (65), полученными путем «взвешивания» первых условий на множестве произвольных функций (59). Данная замена будет использоваться в дальнейшем при доказательстве симметрии матрицы жесткости и при разработке методики определения функций депланации.

8. Погонные нагрузки на стержень и объемные силы и моменты

По аналогии с базовыми перемещениями (20) введем векторы погонных нагрузок:

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} q_x \\ m_z \\ m_y \end{bmatrix} = \tilde{q}_1' + \tilde{q}_1''; \quad \tilde{q}_1' = \begin{bmatrix} q_x' \\ m_z' \\ m_y' \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_1'' = \begin{bmatrix} q_x'' \\ m_z'' \\ m_y'' \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ m_x \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Допущение 4. Погонные нагрузки передаются на стержень через объемные силы, моменты и граничные силы. Причем по аналогии с принципом Сен-Венана [3] полагается, что закон распределения объемных сил и моментов по поперечному сечению незначительно влияет на результаты практических расчетов и может быть принят исходя из максимального упрощения математического решения задачи.

Нагрузки в (66) с одним штрихом являются равнодействующими объемных сил, с двумя штрихами – граничных сил и объемных моментов. При этом уравнения связи между ними имеют вид:

$$\begin{cases} q_x' = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} p_{xs} dF_s; \\ m_z' = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} y p_{xs} dF_s; \\ m_y' = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} z p_{xs} dF_s; \end{cases} \qquad \begin{cases} q_x'' = \sum\limits_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} g_{xs} ds_s; \\ m_z'' = \sum\limits_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} y g_{xs} ds_s + \sum\limits_s \int\limits_{F_s} h_{zs} dF_s; \\ m_y'' = \sum\limits_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} z g_{xs} ds_s + \sum\limits_s \int\limits_{F_s} h_{ys} dF_s; \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{cases} q_y = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} p_{ys} dF_s; \\ q_z = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} p_{zs} dF_s; \\ m_x = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} [-(z - z_k) p_{ys} + (y - y_k) p_{zs}] dF_s. \end{cases} \tag{68}$$

В блочной матричной форме:

$$\begin{cases} \tilde{q}_1' = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} \tilde{f}_x p_{xs} dF_s; \\ \tilde{q}_1'' = \sum\limits_s \int\limits_{\mathrm{K}_s} \tilde{f}_x g_{xs} ds_s + \sum\limits_s \int\limits_{F_s} (\tilde{f}_x^y h_{zs} + \tilde{f}_x^z h_{ys}) dF_s; \\ \tilde{q}_2 = \sum\limits_s \int\limits_{F_s} (\tilde{f}_y p_{ys} + \tilde{f}_z p_{zs}) dF_s. \end{cases} \tag{69}$$

Подставляя граничные силы (56) в (67-2) или (69-2) и используя для интегралов по контурам K_s формулу Грина (64), получим погонные нагрузки $\tilde{q}_1''$, выраженные только через объемные моменты:

$$\begin{cases} q_x'' = -\dfrac{1}{2} \sum\limits_s \int\limits_{F_s} (h_{zs}^y + h_{ys}^z) dF_s; \\ m_z'' = -\dfrac{1}{2} \sum\limits_s \int\limits_{F_s} [y(h_{zs}^y + h_{ys}^z) - h_{zs}] dF_s; \\ m_y'' = -\dfrac{1}{2} \sum\limits_s \int\limits_{F_s} [z(h_{zs}^y + h_{ys}^z) - h_{ys}] dF_s. \end{cases} \tag{70}$$

В блочной матричной форме:

$$\tilde{q}_1'' = -\frac{1}{2} \sum_s \int\limits_{F_s} [\tilde{f}_x (h_{zs}^y + h_{ys}^z) - \tilde{f}_x^y h_{zs} - \tilde{f}_x^z h_{ys}] dF_s. \tag{71}$$

Закон распределения объемных сил и моментов будем искать из дифференциальных уравнений равновесия ТУ (11), в которых с помощью формул (3), (13) перейдем от полных касательных напряжений к полусуммарным. Выразив из полученных уравнений совокупности объемных сил и моментов, будем иметь:

$$\begin{cases} p_{xs}^{*} = p_{xs} - \dfrac{1}{2}(h_{zs}^{y} + h_{ys}^{z}) = -\sigma_{xs}^{x} - \tau_{xys}^{\prime y} - \tau_{xzs}^{\prime z}\,; \\ p_{ys}^{*} = p_{ys} + \dfrac{1}{2}h_{zs}^{x} \qquad\qquad = -\tau_{xys}^{\prime x}\,; \qquad\qquad y,z \in \Omega_s\,. \\ p_{zs}^{*} = p_{zs} + \dfrac{1}{2}h_{ys}^{x} \qquad\qquad = -\tau_{xzs}^{\prime x}\,, \end{cases} \tag{72}$$

9. Уравнения равновесия стержня и статико-геометрическая аналогия

Составим дифференциальные уравнения равновесия элемента стержня:

$$\begin{cases} -N^{x} = q_x' + q_x''\,; \\ -M_z^{x} + Q_y' + Q_y'' = m_z' + m_z''\,; \\ -M_y^{x} + Q_z' + Q_z'' = m_y' + m_y''\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} -Q_y^{\prime x} - Q_y^{\prime\prime x} = q_y\,; \\ -Q_z^{\prime x} - Q_z^{\prime\prime x} = q_z\,; \\ -M_x^{\prime x} - M_x^{\prime\prime x} = m_x\,. \end{cases} \tag{73}$$

В блочной матричной форме с учетом обозначений (34), (66) имеем:

$$\begin{cases} -\tilde{s}_1^{x} + \tilde{R}_{12}(\tilde{s}_2' + \tilde{s}_2'') = \tilde{q}_1' + \tilde{q}_1''\,; \\ \qquad -\tilde{s}_2^{\prime x} - \tilde{s}_2^{\prime\prime x} = \tilde{q}_2\,, \end{cases} \tag{74}$$

где блок оператора равновесия:

$$\tilde{R}_{12} = \tilde{G}_{21}^{T} = \begin{bmatrix} & & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}. \tag{75}$$

Запишем дифференциальные уравнения равновесия в свернутой матричной форме:

$$\tilde{R}\tilde{s}' = \tilde{q}\,, \tag{76}$$

где полный дифференциальный оператор равновесия $\tilde{R}$ должен быть согласован с геометрическим оператором $\tilde{G}$ в соответствии со статико-геометрической аналогией, которая заключается в сопряженности составляющих операторов при разложении $\tilde{R}$ и $\tilde{G}$ по порядку дифференцирования p:

$$\tilde{R} = \sum_{p} (-1)^{p} \tilde{R}_p\,; \qquad \tilde{G} = \sum_{p} \tilde{G}_p\,; \qquad \tilde{R}_p = \tilde{G}_p^{T}\,. \tag{77}$$

Согласно (32), (77) оператор равновесия $\tilde{R}$ должен быть равен:

$$\tilde{R} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -\partial^{x} & & & & & & & & \\ & -\partial^{x} & & 1 & & & -\partial^{x} & & \\ & & -\partial^{x} & & 1 & & & -\partial^{x} & \\ \hline & & & -\partial^{x} & & & \partial^{xx} & & \\ & & & & -\partial^{x} & & & \partial^{xx} & \\ & & & & & -\partial^{x} & & & \partial^{xx} \end{array}\right]. \tag{78}$$

Сопоставление (76) с (74) при учете (78), (75) приводит к равенству

$$\tilde{s}_2'' = -\overset{x}{\tilde{s}}_3 \tag{79}$$

и к дифференциальному уравнению равновесия в блочной форме

$$\begin{cases} -\tilde{s}_1^x + \tilde{R}_{12}(\tilde{s}_2' - \tilde{s}_3^x) = \tilde{q}_1' + \tilde{q}_1''; \\ \qquad -\tilde{s}_2'^x + \tilde{s}_3^{xx} = \tilde{q}_2 . \end{cases} \tag{80}$$

Отметим, что необходимость использования в предлагаемой теории полумоментной теории упругости объясняется равенством (79), содержащим в левой части согласно (37) объемные моменты, ибо без его удовлетворения нельзя было бы обеспечить выполнение статико-геометрической аналогии и получение корректного решения задачи.

10. Определение уравнений для функций депланации

Подстановка напряжений (33) в выражения для совокупностей объемных сил и моментов (72) дает:

$$\begin{cases} p_{xs}^* = -E_s(\tilde{f}_x^T \tilde{e}_1^x + \tilde{\psi}_s^T \tilde{e}_3^x) - G_s \tilde{\psi}_s^{\Delta T} \tilde{e}_2 ; \\ p_{ys}^* = -G_s \tilde{\psi}_s^{YT} \tilde{e}_2^x ; \\ p_{zs}^* = -G_s \tilde{\psi}_s^{ZT} \tilde{e}_2^x , \end{cases} \qquad y,z \in \Omega_s . \tag{81}$$

Выразим векторы деформаций из физических уравнений (39) с учетом диагонализации матрицы жесткости (52):

$$\tilde{e}_1 = \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{s}_1 ; \quad \tilde{e}_2 = \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{s}_2' ; \quad \tilde{e}_3 = \tilde{C}_{33}^{-1}\tilde{s}_3 . \tag{82}$$

Подставив деформации (82) в (81), получим выражения для совокупностей объемных сил и моментов через усилия:

$$\begin{cases} p_{xs}^* = -E_s(\tilde{f}_x^T \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{s}_1^x + \tilde{\psi}_s^T \tilde{C}_{33}^{-1}\tilde{s}_3^x) - G_s \tilde{\psi}_s^{\Delta T} \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{s}_2' ; \\ p_{ys}^* = -G_s \tilde{\psi}_s^{YT} \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{s}_2'^x ; \\ p_{zs}^* = -G_s \tilde{\psi}_s^{ZT} \tilde{C}_{22}^{-1}\tilde{s}_2'^x , \end{cases} \qquad y,z \in \Omega_s . \tag{83}$$

Производные по координате x от усилий найдем из уравнения равновесия (74) и равенства (79):

$$\begin{cases} \tilde{s}_1^x = -\tilde{q}_1' - \tilde{q}_1'' + \tilde{R}_{12}(\tilde{s}_2' + \tilde{s}_2'') ; \\ \tilde{s}_2'^x = -\tilde{q}_2 - \tilde{s}_2''^x ; \\ \tilde{s}_3^x = -\tilde{s}_2'' . \end{cases} \tag{84}$$

Подставляя производные от усилий (84) в (83) и группируя, получим:

$$\begin{cases} p_{xs}^* = E_s[\tilde{f}_x^T \tilde{C}_{11}^{-1}(\tilde{q}_1' + \tilde{q}_1'') - (\tilde{f}_x^T \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} - \tilde{\psi}_s^T \tilde{C}_{33}^{-1})\tilde{s}_2''] - \\ \qquad - (E_s \tilde{f}_x^T \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12} + G_s \tilde{\psi}_s^{\Delta T} \tilde{C}_{22}^{-1})\tilde{s}_2' ; \\ p_{ys}^* = G_s \tilde{\psi}_s^{YT} \tilde{C}_{22}^{-1}(\tilde{q}_2 + \tilde{s}_2''^x) ; \\ p_{zs}^* = G_s \tilde{\psi}_s^{ZT} \tilde{C}_{22}^{-1}(\tilde{q}_2 + \tilde{s}_2''^x) , \end{cases} \qquad y,z \in \Omega_s . \tag{85}$$

Все функции нагрузок и усилий в (85) , кроме $\tilde{s}_2'$, согласно (72), (69), (71), (37) зависят только от объемных сил и моментов, поэтому выражение при $\tilde{s}_2'$ должно равняться нулю, откуда следует **уравнение для функций депланации**:

$$\tilde{\psi}_s^{\Delta T} = -\frac{E_s}{G_s} \tilde{f}_x^T \tilde{C}_{11}^{-1}\tilde{R}_{12}\tilde{C}_{22} , \qquad y,z \in \Omega_s . \tag{86}$$

Согласно (53), (75) произведение матриц в (86) равно:

$$\widetilde{C}_{11}^{-1}\widetilde{R}_{12}\widetilde{C}_{22} = \frac{G}{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F_{yy}/J_z & F_{yz}/J_z & 0 \\ F_{zy}/J_y & F_{zz}/J_y & 0 \end{bmatrix}. \tag{87}$$

Представим уравнение (86) с учетом (87) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \psi_{ys}^{\Delta} = -\dfrac{e_s}{g_s}\left(\dfrac{F_{yy}}{J_z}y + \dfrac{F_{zy}}{J_y}z\right); \\ \psi_{zs}^{\Delta} = -\dfrac{e_s}{g_s}\left(\dfrac{F_{yz}}{J_z}y + \dfrac{F_{zz}}{J_y}z\right); \qquad y, z \in \Omega_s. \\ \psi_{xs}^{\Delta} = 0, \end{cases} \tag{88}$$

Таким образом, уравнения для функций депланации (86), (88) получены по аналогии с задачей Сен-Венана из дифференциальных уравнений равновесия ТУ (11), но с учетом объемных сил, моментов и граничных сил, распределенных по поперечному сечению стержня согласно допущению 4.

Для определения функций депланации необходимо решить дифференциальные уравнения (88) с учетом интегральных условий (51), граничных условий в форме (58) или (65) и условий совместности перемещений на границах между контурами (17), которые при подстановке в них (22) принимают вид:

$$\psi_{ps} = \psi_{pr}, \quad p = y, z, x, \quad y, z \in \Gamma_{sr}. \tag{89}$$

Отметим, что уравнение (88) для функции депланации при кручении является классическим уравнением Лапласа, а уравнения для функций депланации при сдвигах можно условно назвать уравнениями Пуассона с неопределенными коэффициентами, поскольку постоянные в правых частях (88) $F_{yy}, F_{yz}, F_{zy}, F_{zz}$ согласно (43), (44) находятся через интегралы от функций депланации и до их определения являются неизвестными.

11. Определение объемных сил, моментов и напряжений по известным погонным нагрузкам и усилиям

Запишем выражения для совокупностей объемных сил и моментов (85) с учетом (72), (86):

$$\begin{cases} p_{xs} - \dfrac{1}{2}(h_{zs}^{y} + h_{ys}^{z}) = E_s[\widetilde{f}_x^{T}\widetilde{C}_{11}^{-1}(\widetilde{q}_1' + \widetilde{q}_1'') - (\widetilde{f}_x^{T}\widetilde{C}_{11}^{-1}\widetilde{R}_{12} - \widetilde{\psi}_s^{T}\widetilde{C}_{33}^{-1})\widetilde{s}_2'']; \\ p_{ys} + \dfrac{1}{2}h_{zs}^{x} = G_s\widetilde{\psi}_s^{YT}\widetilde{C}_{22}^{-1}(\widetilde{q}_2 + \widetilde{s}_2''^{x}); \qquad y, z \in \Omega_s. \\ p_{zs} + \dfrac{1}{2}h_{ys}^{x} = G_s\widetilde{\psi}_s^{ZT}\widetilde{C}_{22}^{-1}(\widetilde{q}_2 + \widetilde{s}_2''^{x}), \end{cases} \tag{90}$$

Для упрощения данных выражений приравняем в (90-2,3) слагаемые, содержащие производные по x, и получим:

$$\begin{cases} p_{ys} = G_s\widetilde{\psi}_s^{YT}\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{q}_2; \\ p_{zs} = G_s\widetilde{\psi}_s^{ZT}\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{q}_2; \end{cases} \quad \begin{cases} h_{zs} = 2G_s\widetilde{\psi}_s^{YT}\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{s}_2''; \\ h_{ys} = 2G_s\widetilde{\psi}_s^{ZT}\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{s}_2'', \end{cases} \quad y, z \in \Omega_s. \tag{91}$$

Последовательно используя (91-2), (27), (86), найдем выражение:

$$\frac{1}{2}(h_{zs}^y + h_{ys}^z) = G_s[(\widetilde{\psi}_s^{YT})^y + (\widetilde{\psi}_s^{ZT})^z]\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{s}_2'' = G_s\widetilde{\psi}_s^{\Delta T}\widetilde{C}_{22}^{-1}\widetilde{s}_2'' = -E_s\widetilde{f}_x^T\widetilde{C}_{11}^{-1}\widetilde{R}_{12}\widetilde{s}_2'',$$

подставив которое в (90-1) и группируя слагаемые, получим:

$$p_{xs} = E_s[\widetilde{f}_x^T\widetilde{C}_{11}^{-1}(\widetilde{q}_1' + \widetilde{q}_1'') - (2\widetilde{f}_x^T\widetilde{C}_{11}^{-1}\widetilde{R}_{12} - \widetilde{\psi}_s^T\widetilde{C}_{33}^{-1})\widetilde{s}_2''] . \quad y, z \in \Omega_s . \tag{92}$$

Подставляя (91), (92) с учетом (86) в выражения для погонных нагрузок (69-1,3), (71), получим тождества и соотношение:

$$\widetilde{q}_1'' = 2\widetilde{R}_{12}\widetilde{s}_2'' . \tag{93}$$

С учетом соотношения (93) формула (92) упрощается:

$$p_{xs} = E_s(\widetilde{f}_x^T\widetilde{C}_{11}^{-1}\widetilde{q}_1' + \widetilde{\psi}_s^T\widetilde{C}_{33}^{-1}\widetilde{s}_2'') , \quad y, z \in \Omega_s . \tag{94}$$

Подставив в (93) выражения $\widetilde{R}_{12}$ по (75) и $\widetilde{s}_2''$ из (37), приходим к соотношению

$$\widetilde{q}_1'' = \sum_s \int_{F_s} (\widetilde{f}_x^y h_{zs} + \widetilde{f}_x^z h_{ys}) dF_s \ ,$$

сопоставляя которое с (69), получим

$$\sum_s \int_{K_s} \widetilde{f}_x g_{xs} ds_s = \widetilde{0} \ .$$

Отсюда следует вывод, что главный вектор и главный момент граничных сил, действующих на боковой поверхности элемента стержня, равны нулю и данные силы можно не учитывать.

Введем вектор-функции:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_s^T = E_s\widetilde{f}_x^T\widetilde{C}_{11}^{-1} ; \\ \widetilde{b}_s^T = G_s\widetilde{\psi}_s^{YT}\widetilde{C}_{22}^{-1} ; \\ \widetilde{c}_s^T = G_s\widetilde{\psi}_s^{ZT}\widetilde{C}_{22}^{-1} ; \\ \widetilde{d}_s^T = E_s\widetilde{\psi}_s^T\widetilde{C}_{33}^{-1} , \end{cases} \quad y, z \in \Omega_s , \tag{95}$$

с помощью которых запись формул (91), (94) для объемных сил и моментов сокращается:

$$\begin{cases} p_{xs} = \widetilde{a}_s^T\widetilde{q}_1' + \widetilde{d}_s^T\widetilde{s}_2'' ; \\ p_{ys} = \widetilde{b}_s^T\widetilde{q}_2 ; \\ p_{zs} = \widetilde{c}_s^T\widetilde{q}_2 ; \end{cases} \quad \begin{cases} h_{zs} = 2\widetilde{b}_s^T\widetilde{s}_2'' ; \\ h_{ys} = 2\widetilde{c}_s^T\widetilde{s}_2'' , \end{cases} \quad y, z \in \Omega_s . \tag{96}$$

Подставив в формулы (33) для напряжений деформации (82) и учитывая (95), получим аналогичные выражения напряжений через усилия:

$$\begin{cases} \sigma_{xs} = \widetilde{a}_s^T\widetilde{s}_1 + \widetilde{d}_s^T\widetilde{s}_3 \ ; \\ \tau_{xys}' = \widetilde{b}_s^T\widetilde{s}_2' ; \\ \tau_{xzs}' = \widetilde{c}_s^T\widetilde{s}_2' ; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xys}'' = \widetilde{b}_s^T\widetilde{s}_2'' ; \\ \tau_{xzs}'' = \widetilde{c}_s^T\widetilde{s}_2'' , \end{cases} \quad y, z \in \Omega_s . \tag{97}$$

Развернутый вид формул (95) для вектор-функций получим подстановкой в них (24), (27), (53):

$$\begin{cases} \widetilde{a}_s^T = e_s\left[\begin{matrix} \dfrac{1}{F} & \dfrac{y}{J_z} & \dfrac{z}{J_y} \end{matrix}\right]; \\ \widetilde{b}_s^T = g_s\left[\begin{matrix} \dfrac{F_{zz}(1+\psi_{ys}^y) - F_{zy}\psi_{zs}^y}{D_F} & \dfrac{-F_{yz}(1+\psi_{ys}^y) + F_{yy}\psi_{zs}^y}{D_F} & \dfrac{-z + z_k + \psi_{xs}^y}{J_k} \end{matrix}\right]; \\ \widetilde{c}_s^T = g_s\left[\begin{matrix} \dfrac{F_{zz}\psi_{ys}^z - F_{zy}(1+\psi_{zs}^z)}{D_F} & \dfrac{-F_{yz}\psi_{ys}^z + F_{yy}(1+\psi_{zs}^z)}{D_F} & \dfrac{y - y_k + \psi_{xs}^z}{J_k} \end{matrix}\right], \end{cases} \tag{98}$$

где

$$D_F = F_{yy}F_{zz} - F_{yz}F_{zy}\,. \qquad (99)$$

Здесь выражение для $\tilde{d}_s^T$ не приведено из-за громоздкости и его лучше оставить в матричной форме (95). При этом формула (97) для нормальных напряжений с учетом (98) имеет вид:

$$\sigma_{xs} = e_s\Big(\frac{N}{F} + \frac{yM_z}{J_z} + \frac{zM_y}{J_y} + \begin{bmatrix}\psi_{ys}\\ \psi_{zs}\\ \psi_{xs}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{\psi yy} & I_{\psi yz} & I_{\psi yx}\\ I_{\psi yz} & I_{\psi zz} & I_{\psi zx}\\ I_{\psi yx} & I_{\psi zx} & I_{\psi xx}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_{xy}\\ L_{xz}\\ K_x\end{bmatrix}\Big). \qquad (100)$$

Отметим, что данная формула по сути аналогична известному выражению для нормальных напряжений в теории тонкостенных стержней открытого профиля Власова ([1, с. 59, формула 8.5]), поскольку наряду с первыми тремя слагаемыми, обычными для технических теорий, содержит члены, зависящие от моментов депланации при сдвигах и бимомента депланации при кручении K_x, который, как отмечалось ранее, является аналогом бимомента, введенного Власовым.

12. Доказательство симметрии матрицы жесткости

Условия симметрии матрицы жесткости $\tilde{C}$ определялись формулами (48), (49) в случае нахождения координат центра кручения по (47). В общем случае они следуют из симметрии блока матрицы $\tilde{C}_{22}$ в (40):

$$\{\; F_{yz} = F_{zy}\,; \quad S_{yx} = S_{xy}\,; \quad S_{zx} = S_{xz}\,. \qquad (101)$$

В обобщенных граничных условиях (65) в качестве произвольных функций R_{ys}, R_{zs} и R_{xs} зададимся функциями депланации с несовпадающими индексами:

$$R_{ys} = \psi_{zs}\,, \quad R_{zs} = \psi_{ys} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{ys}^y \psi_{zs}^y + \psi_{ys}^z \psi_{zs}^z + \psi_{zs}\psi_{ys}^{\Delta}) dF_s + I'^{y}_{\psi z} = 0; \\ \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{ys}^y \psi_{zs}^y + \psi_{ys}^z \psi_{zs}^z + \psi_{ys}\psi_{zs}^{\Delta}) dF_s + I'^{z}_{\psi y} = 0; \end{cases}$$

$$R_{ys} = \psi_{xs}\,, \quad R_{xs} = \psi_{ys} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{ys}^y \psi_{xs}^y + \psi_{ys}^z \psi_{xs}^z + \psi_{xs}\psi_{ys}^{\Delta}) dF_s + I'^{y}_{\psi x} = 0; \\ \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{ys}^y \psi_{xs}^y + \psi_{ys}^z \psi_{xs}^z + \psi_{ys}\psi_{xs}^{\Delta}) dF_s + I'^{z}_{y\psi y} - y_k I'^{z}_{\psi y} - I'^{y}_{z\psi y} + z_k I'^{y}_{\psi y} = 0; \end{cases} \qquad (102)$$

$$R_{zs} = \psi_{xs}\,, \quad R_{xs} = \psi_{zs} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{zs}^y \psi_{xs}^y + \psi_{zs}^z \psi_{xs}^z + \psi_{xs}\psi_{zs}^{\Delta}) dF_s + I'^{z}_{\psi x} = 0; \\ \sum\limits_s g_i \int\limits_{F_s} (\psi_{zs}^y \psi_{xs}^y + \psi_{zs}^z \psi_{xs}^z + \psi_{zs}\psi_{xs}^{\Delta}) dF_s + I'^{z}_{y\psi z} - y_k I'^{z}_{\psi z} - I'^{y}_{z\psi z} + z_k I'^{y}_{\psi z} = 0. \end{cases}$$

Вычитаем в каждой группе из первого уравнения второе и учитываем (43):

$$
\begin{cases}
\sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{zs}\overset{\Delta}{\psi}_{ys} - \psi_{ys}\overset{\Delta}{\psi}_{zs}) dF_s + F_{yz} - F_{zy} = 0\,; \\
\sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{xs}\overset{\Delta}{\psi}_{ys} - \psi_{ys}\overset{\Delta}{\psi}_{xs}) dF_s + S_{yx} - S_{xy} = 0\,;. \\
\sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} (\psi_{xs}\overset{\Delta}{\psi}_{zs} - \psi_{zs}\overset{\Delta}{\psi}_{xs}) dF_s + S_{zx} - S_{xz} = 0\,.
\end{cases} \tag{103}
$$

Из (103) с учетом (101) и обозначений приведенных интегралов

$$
\overset{\Delta}{I'}_{\psi pq} = \sum_s g_s \int\limits_{FS} \psi_{ps}\overset{\Delta}{\psi}_{qs} dF_s\,, \qquad p,q = y,z,x \tag{104}
$$

получаем **условия симметрии матрицы жесткости** $\widetilde{C}$, выраженные через интегралы от произведений функций депланации:

$$
\left\{\ \overset{\Delta}{I'}_{\psi zy} = \overset{\Delta}{I'}_{\psi yz}\,; \quad \overset{\Delta}{I'}_{\psi xy} = \overset{\Delta}{I'}_{\psi yx}\,; \quad \overset{\Delta}{I'}_{\psi xz} = \overset{\Delta}{I'}_{\psi zx}\,. \right. \tag{105}
$$

Подставляя лапласианы $\overset{\Delta}{\psi}_{qs}$ по (88) в (104) с учетом обозначений интегралов (44-1), а результат – в (105), определим данные условия в виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{F_{yy}}{J_z} I_{y\psi z} + \dfrac{F_{zy}}{J_y} I_{z\psi z} = \dfrac{F_{yz}}{J_z} I_{y\psi y} + \dfrac{F_{zz}}{J_y} I_{z\psi y}\,; \\
\dfrac{F_{yy}}{J_z} I_{y\psi x} + \dfrac{F_{zy}}{J_y} I_{z\psi x} = 0; \\
\dfrac{F_{yz}}{J_z} I_{y\psi x} + \dfrac{F_{zz}}{J_y} I_{z\psi x} = 0.
\end{cases} \tag{106}
$$

Поскольку все входящие в (106) интегралы согласно интегральным условиям на функции депланации (51) равны нулю, то все эти условия обращаются в тождества и, следовательно, симметрия матрицы жесткости доказана.

Заметим, что данный вывод можно интерпретировать обратным образом: из условий симметрии (101) матрицы жесткости следует необходимость наложения на функции депланации интегральных условий (51).

13. Дифференциальное уравнение депланационных моментов

Выразив производную от вектора усилий $\widetilde{s}_2'^{\,x}$ из зависимости между усилиями (54):

$$
\widetilde{s}_2'^{\,x} = \widetilde{C}_{22}\widetilde{C}_{33}^{-1}\widetilde{s}_3 \tag{107}
$$

и подставив ее во второе уравнение равновесия (80), получим **уравнение депланационных моментов** с только одним неизвестным вектором $\widetilde{s}_3$:

$$
\widetilde{s}_3^{\,xx} - \widetilde{C}_{22}\widetilde{C}_{33}^{-1}\widetilde{s}_3 = \widetilde{q}_2\,. \tag{108}
$$

Данное уравнение также имеет аналог в теории тонкостенных стержней Власова ([1, с. 149, формула (7.19)]) и позволяет непосредственно определять моменты депланации исходя из нагрузки и граничных условий на концах стержня.

Выводы

В данной работе получена система исходных дифференциальных уравнений стержня с учетом депланации при сдвигах и кручении: геометрические уравнения (31) с геометрическим оператором (32), физические уравнения (38) с матрицей жесткости (52), (53) и уравнения равновесия (76) с оператором равновесия (78). Полученная система уравнений может служить основой для поиска аналитических решений конкретных задач, а также при построении матриц конечных элементов для численных исследований. Следствиями из этих уравнений являются зависимости между отдельными деформациями (26) и усилиями (54), (79), (108), которые позволяют упростить решение данных задач.

Получены также формулы, необходимые для определения функций депланации: дифференциальные уравнения (88), интегральные условия (51), граничные условия (58), (65) и условия совместности перемещений на границах между контурами (89). На основе этих уравнений и условий может быть разработана методика как поиска данных функций для поперечных сечений сложной формы, так и определения зависящих от них характеристик сечения по (43), (44), (47), входящих в матрицу жесткости (52), (53).

Исходя из известных погонных нагрузок и найденных в ходе расчета усилий по выведенным в работе формулам можно найти дополнительные силовые факторы: объемные силы и моменты (96), граничные силы (56) и напряжения (97) – (100).

В заключение отметим, что существующие стержневые теории и построенные на их основе конечные элементы обычно применяются в зависимости от гибкости рассчитываемого стержня: теория Бернулли-Эйлера, не учитывающая сдвиговые деформации от поперечных сил, – при большой гибкости; теория Тимошенко, приближенно учитывающая эти деформации, но не учитывающая депланации поперечного сечения, – при средней гибкости; плоская или пространственная теория упругости, используемая при расчете балок-стенок без привлечения стержневых гипотез. Разработанная авторами теория, учитывающая деформации депланации, не нарушает сложившееся положение, но может применяться для стержней малой гибкости и найти свое место между двумя последними теориями в приведенном выше ряду.

Библиографический список

1. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни. / В.З. Власов. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959.- С. 480-512.
2. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том II. / А.П. Филин. - М.: Наука,1978. - С. 337-354.
3. Новожилов, В.В. Теория упругости. / В.В. Новожилов.- Л.: Судпромгиз, 1958.- С. 236-291.
4. Тимошенко, С.П., Теория упругости. / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. - М.: Наука, 1979.- С. 288-382, 377.
5. Александров, А.В., Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы /А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников под ред. А.Ф. Смирнова. - М.: Стройиздат, 1983.- С. 140-149.

References

1. Vlasov V.Z. Thin-shell elastic bars. M. Phizmatizdat, 1959.-P.480-512.
2. Filin A.P. Applied mechanics of the formed solid. Tom II.-M.: Nauka,1978.- P.337-354.
3. Novozilov V.V. Theory of elasticity. – L.: Sudpromgiz, 1958.- P.236-291.
4. Tymoshenco S.P., Gudier J. Theory of elasticity. – M.: Nauka, 1979.- P. 288-382, 377.
5. Alexandrov A.V., Lashenicov B.Ya., Shaposhnicov N.N. Structural mechanics. Thin-shell spatial systems.-M.: Stroiizdat,1983.-P140-149.

Ключевые слова: стержневая теория, теория упругости, депланация, дифференциальные уравнения, характеристики поперечного сечения, центр кручения, центр изгиба.

Key words: theory of bar, theory of elasticity, deplanation, differential equation, cross section characteristic, center of twist, shear center.

УДК 624.074.5
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики
Е.Н. Петреня
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики
А.А. Петранин
Россия, г. Воронеж, тел. 8(473)271-52-30
e-mail: petranin.san@yandex.ru

Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
PhD of Tech. Science, Associate Professor Of Department of Structural Mechanics
E.N. Petrenya
PhD of Tech. Science, Associate Professor Of Department of Structural Mechanics
A.A. Petranin
Voronezh, Russia, tel. 8(473)2715230
e-mail: petranin.san@yandex.ru

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Разработана методика определения функций депланации при сдвигах и кручении для произвольного поперечного сечения стержня. Найденные функции используются для нахождения характеристик сечения, входящих в физические уравнения. Решение задается в виде суммы трех рядов, состоящих их степенных функций и произведений тригонометрических и гиперболических функций. Методика апробирована на примерах расчета, в которых полученные результаты сопоставлялись с известными аналитическими решениями.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

BAR RANDOM CROSS SECTION DEFINITION BY ANALYTIC METHOD

Method of bar deplanation function during slipping and torsion. Computed functions are used for finding cross characteristics, entering into physical equation. The solution is assigned as the sum of three ranges, consisting of power function and product of trigonometric functions. Method is tested on examples of computation, in which formulaic results were compared with familiar analytic solutions.

В работе [1] путем решения уравнений полумоментной теории упругости с использованием ряда сделанных допущений была сформирована система исходных дифференциальных уравнений стержня с учетом депланации при сдвигах и кручении, а также получены формулы, необходимые для определения функций депланации. Данная работа является ее продолжением и посвящена разработке методики поиска функций депланации для поперечных сечений сложной формы и определения зависящих от них характеристик сечения, входящих в матрицу жесткости.

Поиск функций депланации является сложной задачей, которая решена в замкнутом аналитическом виде для ограниченного числа поперечных сечений простой формы. Решение этой задачи для сечений сложной произвольной формы может быть получено различными методами. Из численных методов наиболее популярным является метод конечных элементов, который требует дискретизации всей области поперечного сечения. Метод граничных элементов можно отнести к полуаналитическим методам, поскольку внутри области используется аналитическое решение, а дискретизация выполняется для контура поперечного сечения. В данной работе предлагается аналитический метод определения функций депланации, в котором дискретизация не производится, а решение задается в виде ряда аналитических функций.

1. Искомые характеристики поперечного сечения

В работе [1] были получены физические уравнения стержня, которые в блочной матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \\ \hline Q'_y \\ Q'_z \\ M'_x \\ \hline L_{xy} \\ L_{xz} \\ K_x \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \widetilde{C}_{11} & & \\ \hline & \widetilde{C}_{22} & \\ \hline & & \widetilde{C}_{33} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \mu_{z0} \\ \mu_{y0} \\ \hline \gamma_{xyk} \\ \gamma_{xzk} \\ \mu_{xk} \\ \hline \lambda_{xyk} \\ \lambda_{xzk} \\ \kappa_{xk} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где блоки матрицы жесткости равны:

$$\widetilde{C}_{11} = E\begin{bmatrix} F & & \\ & J_z & \\ & & J_y \end{bmatrix}; \quad \widetilde{C}_{22} = G\begin{bmatrix} F_{yy} & F_{yz} & \\ F_{zy} & F_{zz} & \\ & & J_k \end{bmatrix}; \quad \widetilde{C}_{33} = E\begin{bmatrix} I_{\psi yy} & I_{\psi yz} & I_{\psi yx} \\ I_{\psi yz} & I_{\psi zz} & I_{\psi zx} \\ I_{\psi yx} & I_{\psi zx} & I_{\psi xx} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Здесь приведены искомые характеристики: элементами блока $\widetilde{C}_{11}$ являются традиционные площадь и моменты инерции поперечного сечения, элементами блока $\widetilde{C}_{22}$ – площади при сдвигах и момент инерции при кручении, элементами блока $\widetilde{C}_{33}$ – интегралы по площади сечения от произведений функций депланации. Приведенные и относительные модули упругости и сдвига в (2) определяются формулами

$$\begin{cases} E = (\sum\limits_s E_s F_s) / \sum\limits_s F_s \,; \\ G = (\sum\limits_s G_s F_s) / \sum\limits_s F_s \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} e_s = E_s / E \,; \\ g_s = G_s / G \,, \end{cases} \qquad (3)$$

где s - номер составляющего контура поперечного сечения.

2. Порядок определения характеристик сечения

Согласно полученным в работе [1] формулам порядок определения искомых характеристик поперечного сечения и функций депланации определяется следующей последовательностью операций.

1. Определение центра тяжести поперечного сечения, положения главных центральных осей и приведенных геометрических характеристик сечения, не связанных с неизвестными функциями депланации:

$$
\begin{cases}
F = \sum_s e_s \int_{F_s} dF_s ; \\
S_z = \sum_s e_s \int_{F_s} y dF_s = 0; \\
S_y = \sum_s e_s \int_{F_s} z dF_s = 0; \\
J_z = \sum_s e_s \int_{F_s} y^2 dF_s ; \\
J_y = \sum_s e_s \int_{F_s} z^2 dF_s ; \\
J_{yz} = \sum_s e_s \int_{F_s} yz dF_s = 0;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\\
S'_z = \sum_s g_s \int_{F_s} y dF_s ; \\
S'_y = \sum_s g_s \int_{F_s} z dF_s ; \\
J'_z = \sum_s g_s \int_{F_s} y^2 dF_s ; \\
J'_y = \sum_s g_s \int_{F_s} z^2 dF_s ; \\
J'_x = J'_y + J'_z \ ,
\end{cases}
\tag{4}
$$

Здесь суммирование осуществляется по составляющим контурам поперечного сечения, а интегрирование – по площади s-го контура. Характеристики без штриха приводятся с помощью относительных модулей упругости составляющих контуров, со штрихом – с помощью относительных модулей сдвига.

Далее следуют три независимых друг от друга пункта, в каждом из которых должна определяться одна из функций депланации и две сопутствующие характеристики сечения. При этом в правом столбце приведенных ниже формул представлены соответствующие данной функции депланации дифференциальные уравнения, интегральные и граничные условия, условия совместности перемещений на границах между контурами поперечного сечения.

2. Определение F_{yy}, F_{zy}, b_z, ψ_{ys} из уравнений:

$$
\begin{cases}
F_{yy} = F + I'^{y}_{\psi y} ; \\
F_{zy} = I'^{z}_{\psi y} ; \\
b_z = S'_y + I'^{y}_{z\psi y} - I'^{z}_{y\psi y} ;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\psi^{\Delta}_{ys} = -\dfrac{e_s}{g_s}\left(\dfrac{F_{yy}}{J_z} y + \dfrac{F_{zy}}{J_y} z\right), \quad y,z \in \Omega_s ; \\
I_{\psi y} = I_{y\psi y} = I_{z\psi y} = 0 ; \\
\sum_s g_s \int_{F_s} [R^z_{ys} \psi^z_{ys} + R^y_{ys}(1+\psi^y_{ys}) + R_{ys}\psi^{\Delta}_{ys}] dF_s = 0 ; \\
\psi_{ys} = \psi_{yr} , \quad y,z \in \Gamma_{sr} .
\end{cases}
\tag{5}
$$

3. Определение F_{yz}, F_{zz}, b_y, ψ_{zs} из уравнений:

$$
\begin{cases}
F_{yz} = I'^{y}_{\psi z} ; \\
F_{zz} = F + I'^{z}_{\psi z} ; \\
b_y = S'_z - I'^{y}_{z\psi z} + I'^{z}_{y\psi z} ;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\psi^{\Delta}_{zs} = -\dfrac{e_s}{g_s}\left(\dfrac{F_{yz}}{J_z} y + \dfrac{F_{zz}}{J_y} z\right), \quad y,z \in \Omega_s ; \\
I_{\psi z} = I_{y\psi z} = I_{z\psi z} = 0 ; \\
\sum_s g_s \int_{F_s} [R^z_{zs}(1+\psi^z_{zs}) + R^y_{zs}\psi^y_{zs} + R_{zs}\psi^{\Delta}_{zs}] dF_s = 0 ; \\
\psi_{zs} = \psi_{zr} , \quad y,z \in \Gamma_{sr} .
\end{cases}
\tag{6}
$$

4. Определение y_k, z_k, ψ_{xs} из уравнений:

$$
\begin{cases}
z_k = \dfrac{1}{F}(S'_y - I'^{y}_{\psi x}) ; \\
y_k = \dfrac{1}{F}(S'_z + I'^{z}_{\psi x}) ;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\psi^{\Delta}_{xs} = 0 , \quad y,z \in \Omega_s ; \\
I_{\psi x} = I_{y\psi x} = I_{z\psi x} = 0 ; \\
\sum_s g_s \int_{F_s} [R^z_{xs}(\psi^z_{xs} + y - y_k) + R^y_{xs}(\psi^y_{xs} - z + z_k)] dF_s = 0 ; \\
\psi_{xs} = \psi_{xr} , \quad y,z \in \Gamma_{sr} .
\end{cases}
\tag{7}
$$

5. Выполнение проверок, следующих из симметрии матрицы жесткости:

$$\begin{cases} F_{zy} = F_{yz}\,; \\ \begin{cases} F_{yy} z_k - F_{zy} y_k = b_z\,; \\ -F_{yz} z_k + F_{zz} y_k = b_y\,. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

6. Определение оставшихся неизвестными характеристик:

$$\begin{cases} J_k = J'_x - z_k S'_y - y_k S'_z - I'^{y}_{z\psi x} + I'^{z}_{y\psi x}\,; \\ I_{\psi\, pq} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} \psi_{ps} \psi_{qs} dF_s\,, \qquad p,q = y,z,x. \end{cases} \tag{9}$$

В формулах (2), (5) – (9) приняты следующие обозначения приведенных интегралов от функций депланации:

$$\begin{cases} I_{\psi\, p} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} \psi_{ps} dF_s\,; \\ I_{y\psi\, p} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} y \psi_{ps} dF_s\,; \\ I_{z\psi\, p} = \sum\limits_s e_s \int\limits_{F_s} z \psi_{ps} dF_s\,; \\ I'^{y}_{\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{z}_{\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \psi^{z}_{ps} dF_s\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} I'^{y}_{y\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{y}_{z\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{z}_{y\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y \psi^{z}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{z}_{z\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z \psi^{z}_{ps} dF_s\,, \end{cases} \qquad p = y,z,x. \tag{10}$$

$$\begin{cases} I'^{y}_{yy\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y^2 \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{y}_{yz\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} yz \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{y}_{zz\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z^2 \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} I'^{z}_{yy\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y^2 \psi^{z}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{z}_{yz\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} yz \psi^{z}_{ps} dF_s\,; \\ I'^{z}_{zz\psi\, p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z^2 \psi^{z}_{ps} dF_s\,, \end{cases} \qquad p = y,z,x. \tag{11}$$

В дальнейшем с целью упрощения решения принято **допущение о единых функциях депланации** для всего поперечного сечения, что автоматически обеспечивает условия их совместности на границах между составляющими контурами сечения (см. последние формулы в (5) – (7)). Причем единые дифференциальные уравнения для функции депланации (см. выражения для лапласианов ψ^{Δ} в (5), (6)) обеспечиваются при условии постоянства отношения модуля упругости к модулю сдвига для разных контуров E_s / G_s, из чего с учетом (3) следует:

$$\begin{cases} \psi_{ps} = \psi_p\,, \quad p = y,z,x\,; \\ \dfrac{e_s}{g_s} = const = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что при допущении (12) теряют смысл введенные ранее штрихи для характеристик сечения, приводимых с помощью относительных модулей сдвига g_s, однако в дальнейшем изложении они оставлены на случай отказа от данного допущения в будущем.

3. Аппроксимация функций депланации

Будем искать решение для конкретной функции депланации в виде суммы трех рядов:

$$\psi_p = \sum_{mn} \alpha_{mn} U_{pmn} + \sum_{mnl} \beta_{mnl} V_{pmnl} + \sum_{mnl} \gamma_{mnl} W_{pmnl} \;, \quad p = y, z, x. \tag{13}$$

Здесь U_{pmn}, V_{pmnl}, W_{pmnl} – неизвестные коэффициенты рядов; α_{mn}, β_{mnl}, γ_{mnl} – функции аппроксимации, равные:

$$\alpha_{mn} = y^m z^n \;, \qquad m,n = 0 \div 3 \;, \qquad m + n \le 3 \;;$$

$$\begin{cases} \beta_{11l} = \cos lby \cosh lbz \,; \\ \beta_{21l} = \sin lby \cosh lbz \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_{12l} = \cos lby \sinh lbz \,; \\ \beta_{22l} = \sin lby \sinh lbz \,, \end{cases} \qquad b = \frac{2\pi}{\Delta y} \;; \tag{14}$$

$$\begin{cases} \gamma_{11l} = \cos lcz \cosh lcy \,; \\ \gamma_{21l} = \sin lcz \cosh lcy \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{12l} = \cos lcz \sinh lcy \,; \\ \gamma_{22l} = \sin lcz \sinh lcy \,, \end{cases} \qquad c = \frac{2\pi}{\Delta z} \;,$$

где b, c – начальные частоты; Δy, Δz – габаритные размеры поперечного сечения в направлении главных осей; l =1, 2, 3, … – частотный параметр. Отметим, что с увеличением l гиперболические сомножители функций β_{mnl}, γ_{mnl} быстро возрастают и могут достигнуть больших величин. Поэтому в практических расчетах их необходимо нормировать, например, путем ввода нормирующих множителей $\cosh^{-1} lbz_{ext}$ для β_{mnl} и $\cosh^{-1} lcy_{ext}$ для γ_{mnl}, где y_{ext}, z_{ext} – экстремальные координаты точек поперечного сечения.

Соответствие (13) общему решению неоднородного уравнения Пуассона для функции депланации обеспечивается первым ограниченным рядом со степенными функциями α_{mn}, который дает возможность точно задать частное решение неоднородного уравнения, и двумя бесконечными рядами с функциями β_{mnl}, γ_{mnl}, которые в совокупности задают общее решение однородного уравнения, поскольку лапласианы каждой из этих функций равны нулю.

Формулы дифференцирования функций аппроксимации имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha^y_{mn} = m\alpha_{m-1,n} \,; \\ \beta^y_{mnl} = (-1)^m lb\beta_{3-m,n,l} \,; \\ \gamma^y_{mnl} = lc\gamma_{m,3-n,l} \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^z_{mn} = n\alpha_{m,n-1} \,; \\ \beta^z_{mnl} = lb\beta_{m,3-n,l} \,; \\ \gamma^z_{mnl} = (-1)^m lc\gamma_{3-m,n,l} \,; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \alpha^{yy}_{mn} = m(m-1)\alpha_{m-2,n} \,; \\ \beta^{yy}_{mnl} = -l^2 b^2 \beta_{mnl} \,; \\ \gamma^{yy}_{mnl} = l^2 c^2 \gamma_{mnl} \,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^{zz}_{mn} = n(n-1)\alpha_{m,n-2} \,; \\ \beta^{zz}_{mnl} = l^2 b^2 \beta_{mnl} \,; \\ \gamma^{zz}_{mnl} = -l^2 c^2 \gamma_{mnl} \,; \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \alpha^{\Delta}_{mn} = m(m-1)\alpha_{m-2,n} + n(n-1)\alpha_{m,n-2} \,; \\ \beta^{\Delta}_{mnl} = 0; \\ \gamma^{\Delta}_{mnl} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 \equiv \partial^{yy+zz}$ - оператор Лапласа.

В дальнейшем используются обозначения приведенных интегралов от функций аппроксимации:

$$
\begin{cases}
I'^{y}_{\beta ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \beta^{y}_{ijk} dF_s\,; & I'^{y}_{z\beta ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z\beta^{y}_{ijk} dF_s\,; \\
I'^{z}_{\beta ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \beta^{z}_{ijk} dF_s\,; & I'^{z}_{y\beta ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y\beta^{z}_{ijk} dF_s\,; \\
I'^{y}_{\gamma ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \gamma^{y}_{ijk} dF_s\,; & I'^{y}_{z\gamma ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} z\gamma^{y}_{ijk} dF_s\,; \\
I'^{z}_{\gamma ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \gamma^{z}_{ijk} dF_s\,; & I'^{z}_{y\gamma ijk} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} y\gamma^{z}_{ijk} dF_s\,.
\end{cases}
\tag{18}
$$

Формулы интегрирования функций аппроксимации для получения интегралов (18) имеют вид:

$$
\begin{cases}
I'^{y}_{\beta ijk} = (-1)^{i}\, kbB'_{3-i,j,k}\,; & I'^{y}_{z\beta ijk} = (-1)^{i}\, kbB'^{01}_{3-i,j,k}\,; \\
I'^{z}_{\beta ijk} = kbB'_{i,3-j,k}\,; & I'^{z}_{y\beta ijk} = kbB'^{10}_{i,3-j,k}\,; \\
I'^{y}_{\gamma ijk} = kcC'_{i,3-j,k}\,; & I'^{y}_{z\gamma ijk} = kcC'^{10}_{i,3-j,k}\,; \\
I'^{z}_{\gamma ijk} = (-1)^{i}\, kcC'_{3-i,j,k}\,; & I'^{z}_{y\gamma ijk} = (-1)^{i}\, kcC'^{01}_{3-i,j,k}\,.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Формулы дифференцирования функций депланации с учетом (13) – (17):

$$
\begin{cases}
\psi^{y}_{p} = \sum\limits_{mn} m\alpha_{m-1,n} U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} (-1)^{m}\, l\beta_{3-m,n,l} V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} l\gamma_{m,3-n,l} W_{pmnl}\,; \\
\psi^{z}_{p} = \sum\limits_{mn} n\alpha_{m,n-1} U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} l\beta_{m,3-n,l} V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} (-1)^{m}\, l\gamma_{3-m,n,l} W_{pmnl}\,; \\
\psi^{\Delta}_{p} = \sum\limits_{mn} \alpha^{\Delta}_{mn} U_{pmn} = \sum\limits_{mn} [m(m-1)\alpha_{m-2,n} + n(n-1)\alpha_{m,n-2}] U_{pmn} = \\
\quad = 2(U_{p20} + U_{p02}) + (6U_{p30} + 2U_{p12})y + (2U_{p21} + 6U_{p03})z\,,
\end{cases}
\quad p = y, z, x. \tag{20}
$$

В дальнейшем будут также использоваться обозначения приведенных интегралов от произведений функций депланации и аппроксимации:

$$
\begin{cases}
I'^{y,y}_{\beta ijk\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \beta^{y}_{ijk} \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\
I'^{z,z}_{\beta ijk\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \beta^{z}_{ijk} \psi^{z}_{ps} dF_s\,; \\
I'^{y,y}_{\gamma ijk\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \gamma^{y}_{ijk} \psi^{y}_{ps} dF_s\,; \\
I'^{z,z}_{\gamma ijk\psi p} = \sum\limits_s g_s \int\limits_{F_s} \gamma^{z}_{ijk} \psi^{z}_{ps} dF_s\,,
\end{cases}
\quad p = y, z, x. \tag{21}
$$

Формулы интегрирования функций депланации и их произведений на функции аппроксимации для получения интегралов (10), (11), (21) имеют вид:

$$
\begin{cases}
I_{\psi p} = \sum\limits_{mn} A_{mn} U_{pmn} + \sum\limits_{mnl} B_{mnl} V_{pmnl} + \sum\limits_{mnl} C_{mnl} W_{pmnl}\,; \\
I_{y\psi p} = \sum\limits_{mn} A_{m+1,n} U_{pmn} + \sum\limits_{mnl} B^{10}_{mnl} V_{pmnl} + \sum\limits_{mnl} C^{01}_{mnl} W_{pmnl}\,; \\
I_{z\psi p} = \sum\limits_{mn} A_{m,n+1} U_{pmn} + \sum\limits_{mnl} B^{01}_{mnl} V_{pmnl} + \sum\limits_{mnl} C^{10}_{mnl} W_{pmnl}\,; \\
I'^{y}_{\psi p} = \sum\limits_{mn} mA'_{m-1,n} U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} (-1)^{m}\, lB'_{3-m,n,l} V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lC'_{m,3-n,l} W_{pmnl}\,; \\
I'^{z}_{\psi p} = \sum\limits_{mn} nA'_{m,n-1} U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lB'_{m,3-n,l} V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} (-1)^{m}\, lC'_{3-m,n,l} W_{pmnl}\,;
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} I'^{y}_{y\psi p} = \sum\limits_{mn} mA'_{m,n}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lB'^{10}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lC'^{01}_{m,3-n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{y}_{z\psi p} = \sum\limits_{mn} mA'_{m-1,n+1}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lB'^{01}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lC'^{10}_{m,3-n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{z}_{y\psi p} = \sum\limits_{mn} nA'_{m+1,n-1}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lB'^{10}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lC'^{01}_{3-m,n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{z}_{z\psi p} = \sum\limits_{mn} nA'_{m,n}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lB'^{01}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lC'^{10}_{3-m,n,l}W_{pmnl}\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'^{y}_{yy\psi p} = \sum\limits_{mn} mA'_{m+1,n}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lB'^{20}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lC'^{02}_{m,3-n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{y}_{yz\psi p} = \sum\limits_{mn} mA'_{m,n+1}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lB'^{11}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lC'^{11}_{m,3-n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{y}_{zz\psi p} = \sum\limits_{mn} mA'_{m-1,n+2}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lB'^{02}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lC'^{20}_{m,3-n,l}W_{pmnl}\,; \end{cases}$$

$$p = y, z, x. \quad (22)$$

$$\begin{cases} I'^{z}_{yy\psi p} = \sum\limits_{mn} nA'_{m+2,n-1}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lB'^{20}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lC'^{02}_{3-m,n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{z}_{yz\psi p} = \sum\limits_{mn} nA'_{m+1,n}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lB'^{11}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lC'^{11}_{3-m,n,l}W_{pmnl}\,; \\ I'^{z}_{zz\psi p} = \sum\limits_{mn} nA'_{m,n+1}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lB'^{02}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lC'^{20}_{3-m,n,l}W_{pmnl}\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'^{y,y}_{\beta ijk\psi p} = (-1)^i kb[\sum\limits_{mn} mB'^{m-1,n}_{3-i,j,k}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lD'^{3-i,j,k}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lF'^{m,3-n,l}_{3-i,j,k}W_{pmnl}]; \\ I'^{z,z}_{\beta ijk\psi p} = kb[\sum\limits_{mn} nB'^{m,n-1}_{i,3-j,k}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lD'^{i,3-j,k}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lF'^{3-m,n,l}_{i,3-j,k}W_{pmnl}]; \\ I'^{y,y}_{\gamma ijk\psi p} = kc[\sum\limits_{mn} mC'^{m-1,n}_{i,3-j,k}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl}(-1)^m lF'^{i,3-j,k}_{3-m,n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl} lE'^{i,3-j,k}_{m,3-n,l}W_{pmnl}]; \\ I'^{z,z}_{\gamma ijk\psi p} = (-1)^i kc[\sum\limits_{mn} nC'^{m,n-1}_{3-i,j,k}U_{pmn} + b\sum\limits_{mnl} lF'^{3-i,j,k}_{m,3-n,l}V_{pmnl} + c\sum\limits_{mnl}(-1)^m lE'^{3-i,j,k}_{3-m,n,l}W_{pmnl}]; \end{cases}$$

В формулах (19), (22) введены интегральные коэффициенты, представляющие собой приведенные интегралы по площади поперечного сечения от функций аппроксимации или от их произведений в различных сочетаниях:

$$\begin{cases} A_{mn} = \sum\limits_{s} e_s \int\limits_{F_s} \alpha_{mn} dF_s\,; \\ B_{mnl} = \sum\limits_{s} e_s \int\limits_{F_s} \beta_{mnl} dF_s\,; \\ C_{mnl} = \sum\limits_{s} e_s \int\limits_{F_s} \gamma_{mnl} dF_s\,; \\ B^{ij}_{mnl} = \sum\limits_{s} e_s \int\limits_{F_s} \alpha_{ij}\beta_{mnl} dF_s\,; \\ C^{ij}_{mnl} = \sum\limits_{s} e_s \int\limits_{F_s} \alpha_{ji}\gamma_{mnl} dF_s\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} A'_{mn} = \sum\limits_{s} g_s \int\limits_{F_s} \alpha_{mn} dF_s\,; \\ B'_{mnl} = \sum\limits_{s} g_s \int\limits_{F_s} \beta_{mnl} dF_s\,; \\ C'_{mnl} = \sum\limits_{s} g_s \int\limits_{F_s} \gamma_{mnl} dF_s\,; \\ B'^{ij}_{mnl} = \sum\limits_{s} g_s \int\limits_{F_s} \alpha_{ij}\beta_{mnl} dF_s\,; \\ C'^{ij}_{mnl} = \sum\limits_{s} g_s \int\limits_{F_s} \alpha_{ji}\gamma_{mnl} dF_s\,; \end{cases} \qquad (23)$$

$$\begin{cases} D'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \int_{F_S} \beta_{ijk}\beta_{mnl} dF_s; \\ E'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \int_{F_S} \gamma_{ijk}\gamma_{mnl} dF_s; \\ F'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \int_{F_S} \gamma_{ijk}\beta_{mnl} dF_s. \end{cases} \quad (24)$$

4. Определение интегральных коэффициентов

Получение формул для вычисления интегральных коэффициентов выполнялось в предположении, что каждый составляющий контур поперечного сечения задан в виде замкнутой ломаной линии. Тогда интеграл по площади отдельного s-го контура представляется суммой интегралов по площади трапеции, ограниченной отрезком t ломаной линии и одной из осей координат.

В зависимости от очередности аргументов y, z возможны два способа интегрирования функции $\varphi(y,z)$ по площади:

$$\begin{cases} \int_F \phi\, dF = \sum_t \int_{yt}^{yt+1} (\int_0^g \phi\, dz) dy; \\ g = \frac{y_{t+1}z_t - y_t z_{t+1}}{y_{t+1} - y_t} + \frac{z_{t+1} - z_t}{y_{t+1} - y_t} y; \end{cases} \quad \begin{cases} \int_F \phi\, dF = \sum_t \int_{zt+1}^{zt} (\int_0^h \phi\, dy) dz; \\ h = \frac{y_t z_{t+1} - y_{t+1} z_t}{z_{t+1} - z_t} + \frac{y_{t+1} - y_t}{z_{t+1} - z_t} z. \end{cases} \quad (25)$$

Далее будут использоваться обозначения:

$$\begin{cases} y_R = y_{t+1} - y_t; \\ z_R = z_{t+1} - z_t; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_S = y_{t+1} + y_t; \\ z_S = z_{t+1} + z_t; \end{cases} \quad (26)$$

$$L = \sqrt{y_R^2 + z_R^2}; \qquad \Delta[\phi(y,z)] = \phi(y_{t+1}, z_{t+1}) - \phi(y_t, z_t). \quad (27)$$

Формулы для вычисления интегральных коэффициентов A'_{mn}

$$\begin{cases} A'_{00} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{2} z_S; \\ A'_{10} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{12} (y_R z_R + 3 y_S z_S); \\ A'_{01} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{24} (z_R^2 + 3 z_S^2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_{20} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{24} [2 y_R y_S z_R + z_S (y_R^2 + 3 y_S^2); \\ A'_{11} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{48} [2 y_R z_R z_S + y_S (z_R^2 + 3 z_S^2); \\ A'_{02} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{24} z_S (z_R^2 + z_S^2); \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
A'_{30} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{80}[y_R z_R(y_R^2 + 5y_S^2) + 5y_S z_S(y_R^2 + y_S^2)]; \\
A'_{21} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{480}[z_R^2(3y_R^2 + 5y_S^2) + 5z_S^2(y_R^2 + 3y_S^2) + 20y_R y_S z_R z_S]; \\
A'_{12} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{240}[y_R z_R(z_R^2 + 5z_S^2) + 5y_S z_S(z_R^2 + z_S^2)]; \\
A'_{03} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{320}[z_R^4 + 5z_S^2(2z_R^2 + z_S^2)];
\end{cases}
\tag{28}
$$

$$
\begin{cases}
A'_{40} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{480}[3y_R^3(y_R z_S + 4y_S z_R) + 5y_S^3(4y_R z_R + 3y_S z_S) + 30y_R^2 y_S^2 z_S]; \\
A'_{31} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{960}[3y_R^2 y_S(3z_R^2 + 5z_S^2) + 6y_R z_R z_S(y_R^2 + 5y_S^2) + 5y_S^3(z_R^2 + 3z_S^2)]; \\
A'_{22} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{1440}[3z_R^2 z_S(3y_R^2 + 5y_S^2) + 6y_R y_S z_R(z_R^2 + 5z_S^2) + 5z_S^3(y_R^2 + 3y_S^2)]; \\
A'_{13} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{1920}[3z_R^3(y_S z_R + 4y_R z_S) + 5z_S^3(4y_R z_R + 3y_S z_S) + 30y_S z_R^2 z_S^2)]; \\
A'_{04} = \sum\limits_s g_s \sum\limits_t \dfrac{y_R}{480} z_S(3z_R^4 + 10z_R^2 z_S^2 + 3z_S^4).
\end{cases}
$$

Формулы для вычисления интегральных коэффициентов $B'_{mnl} \equiv B'^{00}_{mnl}, B'^{ij}_{mnl}$

$$
B'^{ij}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t M\Delta(\sum_{p=1}^{2} \zeta \sum_{q=1}^{2} Q_{pq}\beta_{m'n'}), \tag{29}
$$

где

$$
\begin{cases}
m' = p(3-m) + m(3-p) - 3; \\
\zeta = 1 - 2(m-1)(2-m'); \\
n' = q(3-n) + n(3-q) - 3.
\end{cases}
\tag{30}
$$

Величины компонент M, Q_{pq} формулы (29) зависят от верхних индексов i, j интегрального коэффициента и приведены ниже.

Определение компонент M, Q_{pq} при вычислении коэффициентов B'^{00}_{mnl} :

$$
M = \frac{y_R}{l^2 b^2 L^2}; \quad
\begin{cases}
Q_{11} = z_R; \\
Q_{12} = 0; \\
Q_{21} = 0; \\
Q_{22} = y_R.
\end{cases}
\tag{32}
$$

Определение компонент M, Q_{pq} при вычислении коэффициентов B'^{10}_{mnl} :

$$
M = \frac{y_R}{l^3 b^3 L^4}; \quad
\begin{cases}
Q_{11} = lbL^2 y z_R; \\
Q_{12} = y_R(y_R^2 - z_R^2); \\
Q_{21} = -2y_R^2 z_R; \\
Q_{22} = lbL^2 y y_R.
\end{cases}
\tag{33}
$$

Определение компонент M, Q_{pq} при вычислении коэффициентов B'^{01}_{mnl} :

$$M = \frac{y_R}{l^3 b^3 L^4}; \quad \begin{cases} Q_{11} = lbL^2 z z_R ; \\ Q_{12} = -2z_R^3 ; \\ Q_{21} = -y_R(y_R^2 + 3z_R^2); \\ Q_{22} = lbL^2 z y_R . \end{cases} \tag{34}$$

Определение компонент M, Q_{pq} при вычислении коэффициентов B'^{20}_{mnl} :

$$M = \frac{y_R}{l^4 b^4 L^6}; \quad \begin{cases} Q_{11} = z_R[l^2 b^2 y^2 L^4 - 2y_R^2(3y_R^2 - z_R^2)]; \\ Q_{12} = 2lbyy_R L^2(y_R^2 - z_R^2); \\ Q_{21} = -4lbyy_R^2 z_R L^2 ; \\ Q_{22} = y_R[l^2 b^2 y^2 L^4 - 2y_R^2(y_R^2 - 3z_R^2)]. \end{cases} \tag{35}$$

Определение компонент M, Q_{pq} при вычислении коэффициентов B'^{11}_{mnl} :

$$M = \frac{y_R}{l^4 b^4 L^6}; \quad \begin{cases} Q_{11} = l^2 b^2 yzz_R L^4 - y_R(y_R^4 + 6y_R^2 z_R^2 - 3z_R^4); \\ Q_{12} = -lbL^2[2yz_R^3 - zy_R(y_R^2 - z_R^2)]; \\ Q_{21} = -lby_R[y(y_R^4 + 4y_R^2 z_R^2 + 3z_R^4) + 2zy_R z_R L^2]; \\ Q_{22} = y_R(l^2 b^2 yzL^4 + 8y_R z_R^3). \end{cases} \tag{36}$$

Определение компонент M, Q_{pq} при вычислении коэффициентов B'^{02}_{mnl} :

$$M = \frac{y_R}{l^4 b^4 L^6}; \quad \begin{cases} Q_{11} = z_R[l^2 b^2 z^2 L^4 - 2z_R^2(y_R^2 - 3z_R^2)]; \\ Q_{12} = -4lbzz_R^3 L^2 ; \\ Q_{21} = -2lbzy_R(y_R^4 + 4y_R^2 z_R^2 + 3z_R^4); \\ Q_{22} = y_R[l^2 b^2 z^2 L^4 + 2(y_R^4 + 3y_R^2 z_R^2 + 6z_R^4). \end{cases} \tag{37}$$

Используем инверсию обозначений для вычисления интегральных коэффициентов C'_{mnl}, C'^{ij}_{mnl} по формулам для B'_{mnl}, B'^{ij}_{mnl} :

$$y \to z; \quad z \to y; \quad b \to c; \quad \beta \to \gamma; \quad B \to -C. \tag{38}$$

Формулы для вычисления интегральных коэффициентов D'^{ijk}_{mnl}

Общий случай:

$$D'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{4} \Delta \left[\sum_{\substack{p=r,s \\ q=r,s}} \frac{\zeta'_p \zeta''_q}{q(p^2 y_R^2 + q^2 z_R^2)} (qz_R t_{\mu,p} h_{\nu,q} + \zeta_\mu p y_R t_{3-\mu,p} h_{3-\nu,q}) \right], \tag{39}$$

где

$$\begin{cases} r = (l-k)b; \\ s = (l+k)b; \end{cases} \begin{cases} \mu = 1 + |i-m|; \\ \nu = 1 + |j-n|; \end{cases} \begin{cases} \zeta'_r = 1 - 2(2-i)(m-1); \\ \zeta'_s = 1 - 2(i-1)(m-1); \end{cases} \begin{cases} \zeta''_r = 1 - 2(n-1); \\ \zeta''_s = 1; \end{cases} \tag{40}$$

$$\left\{ \zeta_\mu = 3 - 2\mu; \quad \begin{cases} t_{1p} = \cos py; \\ t_{2p} = \sin py, \end{cases} p = r, s; \quad \begin{cases} h_{1q} = \cosh qz; \\ h_{2q} = \sinh qz, \end{cases} q = r, s. \right. \tag{41}$$

Частный случай $l = k \to r = 0$:

$$D'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{1}{4}\Delta\Bigg[z_S \zeta'_r \zeta''_r y t_{\mu,r} h_{\nu,r} + \frac{y_R \zeta'_r \zeta''_s}{s^2 z_R} t_{\mu,r} h_{\nu,s} + \frac{z_R \zeta'_s \zeta''_r}{s^2 y_R} t_{\mu,s} h_{\nu,r} + \\ + \frac{y_R \zeta'_s \zeta''_s}{s^2 L^2}(z_R t_{\mu,s} h_{\nu,s} + \zeta_\mu y_R t_{3-\mu,s} h_{3-\nu,s})\Bigg], \tag{42}$$

где
$$\begin{cases} t_{1r} = 1; & t_{1s} = \cos sy; \\ t_{2r} = 0; & t_{2s} = \sin sy; \end{cases} \quad \begin{cases} h_{1r} = 1; & h_{1s} = \cosh sz; \\ h_{2r} = 0; & h_{2s} = \sinh sz. \end{cases} \tag{43}$$

Частный подслучай $r = 0,\ |z_R| << L$:

$$D'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{1}{4}\Bigg\{ \frac{y_R \zeta'_r \zeta''_s}{s} t_{\mu,r} h_{3-\nu,s}(z_s) + \Delta\Bigg[z_S \zeta'_r \zeta''_r y t_{\mu,r} h_{\nu,r} + \\ + \frac{z_R \zeta'_s \zeta''_r}{s^2 y_R} t_{\mu,s} h_{\nu,r} + \frac{y_R \zeta'_s \zeta''_s}{s^2 L^2}(z_R t_{\mu,s} h_{\nu,s} + \zeta_\mu y_R t_{3-\mu,s} h_{3-\nu,s})\Bigg]\Bigg\}. \tag{44}$$

Частный подслучай $r = 0,\ |y_R| << L$:

$$D'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{1}{4}\Bigg\{ \frac{z_R \zeta'_s \zeta''_r}{s} t_{3-\mu,s}(-y_s) h_{\nu,r} + \Delta\Bigg[z_S \zeta'_r \zeta''_r y t_{\mu,r} h_{\nu,r} + \\ + \frac{y_R \zeta'_r \zeta''_s}{s^2 z_R} t_{\mu,r} h_{\nu,s} + \frac{y_R \zeta'_s \zeta''_s}{s^2 L^2}(z_R t_{\mu,s} h_{\nu,s} + \zeta_\mu y_R t_{3-\mu,s} h_{3-\nu,s})\Bigg]\Bigg\}. \tag{45}$$

Используем инверсию обозначений для вычисления интегральных коэффициентов E'^{ijk}_{mnl} по формулам для D'^{ijk}_{mnl} :

$$y \to z; \quad z \to y; \quad b \to c; \quad \beta \to \gamma; \quad D \to -E. \tag{46}$$

Формулы для вычисления интегральных коэффициентов F'^{ijk}_{mnl}

Общий случай:

$$F'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{4}\Delta\Bigg[\sum_{\substack{p=r',s' \\ q=r'',s''}} M_{pq}(P_{pq} t_{3-\mu,p} h_{3-\nu,q} + \zeta_\mu Q_{pq} t_{\mu,p} h_{\nu,q}) \Bigg], \tag{47}$$

где
$$\begin{cases} r' = kcz - lby; \\ s' = kcz + lby; \end{cases} \begin{cases} r'' = lbz - kcy; \\ s'' = lbz + kcy; \end{cases} \begin{cases} M_0 = \dfrac{3-2i}{k^2c^2 + l^2b^2}; \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} M_{pq} = \dfrac{M_0 \zeta'_p \zeta''_q}{(\Delta p)^2 + (\Delta q)^2}; \end{cases} \begin{cases} P_{pq} = \ \ lb\Delta p + kc\Delta q; \\ Q_{pq} = -kc\Delta p + lb\Delta q, \end{cases} p = r', s';\ q = r'', s''; \tag{49}$$

$$\begin{cases} \mu = 1 + |i - m|; \\ \nu = 1 + |j - n|; \end{cases} \begin{cases} \zeta'_{r'} = 1 - 2(i-1)(m-1); \\ \zeta'_{s'} = 1 - 2(2-i)(m-1); \end{cases} \begin{cases} \zeta''_{r''} = 3 - 2j; \\ \zeta''_{s''} = 1; \end{cases} \tag{50}$$

$$\{\ \zeta_\mu = 3 - 2\mu; \quad \begin{cases} t_{1p} = \cos p; \\ t_{2p} = \sin p, \end{cases} p = r', s'; \quad \begin{cases} h_{1q} = \cosh q; \\ h_{2q} = \sinh q, \end{cases} q = r'', s''. \tag{51}$$

Частный случай $lb \approx kc,\ y_R \approx z_R$:

$$F'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{4} \left\{ M_0 \zeta'_p \zeta'' (kct_{3-\mu,\rho'} h_{3-\nu,\rho''} + \zeta_\mu lbt_{\mu,\rho'} h_{\nu,\rho''}) + \right.$$
$$\left. + \Delta \left[\sum_{\substack{p,q=r',s'';\\ s',r'';\, s',s''.}} M_{pq} (P_{pq} t_{3-\mu,p} h_{3-\nu,q} + \zeta_\mu Q_{pq} t_{\mu,p} h_{\nu,q}) \right] \right\}, \tag{52}$$

где

$$\left\{ \rho' = \frac{kcz_S - lby_S}{2}; \quad \rho'' = \frac{lbz_S - kcy_S}{2}. \right. \tag{53}$$

Частный случай $lb \approx kc,\ y_R \approx -z_R$:

$$F'^{ijk}_{mnl} = \sum_s g_s \sum_t \frac{y_R}{4} \left\{ M_0 \zeta'_p \zeta'' (kct_{3-\mu,\sigma'} h_{3-\nu,\sigma''} + \zeta_\mu lbt_{\mu,\sigma'} h_{\nu,\sigma''}) + \right.$$
$$\left. + \Delta \left[\sum_{\substack{p,q=r',r'';\\ r',s'';\, s',r''.}} M_{pq} (P_{pq} t_{3-\mu,p} h_{3-\nu,q} + \zeta_\mu Q_{pq} t_{\mu,p} h_{\nu,q}) \right] \right\}, \tag{54}$$

где

$$\left\{ \sigma' = \frac{kcz_S + lby_S}{2}; \quad \sigma'' = \frac{lbz_S + kcy_S}{2}. \right. \tag{55}$$

5. Системы разрешающих уравнений для определения коэффициентов аппроксимации *U, V, W*

Три независимых системы уравнений (5) – (7) для определения функций депланации и сопутствующих характеристик сечения после подстановки в них задаваемого решения (13) с учетом обозначений интегралов (4), (10), (11), (18), (21) и последующей подстановки их выражений по формулам (19), (22) преобразуются в алгебраические системы относительно неизвестных коэффициентов U_{pmn}, V_{pmnl}, W_{pmnl}, $p = y, z, x$. Полученные таким образом системы приведены ниже, но без выполнения последней подстановки с целью сокращения записи.

Уравнения для определения коэффициентов $U_{ymn}, V_{ymnl}, W_{ymnl}$

1) $F_{yy} \rightarrow \qquad F_{yy} - I'^{y}_{\psi y} = F$;

2) $F_{zy} \rightarrow \qquad F_{zy} - I'^{z}_{\psi y} = 0$;

3,4,5) $\qquad I_{\psi y} = I_{y\psi y} = I_{z\psi y} = 0$;

6) ψ^{Δ}_{y} *при* 1 $\quad \rightarrow \quad 2U_{y20} + 2U_{y02} = 0$;

7) ψ^{Δ}_{y} *при y* $\quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{J_z} F_{yy} + 6U_{y30} + 2U_{y12} = 0$;

8) ψ^{Δ}_{y} *при z* $\quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{J_y} F_{zy} + 2U_{y21} + 6U_{y03} = 0$;

9) $R_y = y^2 - z^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{A_{30} - A_{12}}{J_z} F_{yy} + \dfrac{A_{21} - A_{03}}{J_y} F_{zy} - 2(I'^{y}_{y\psi y} - I'^{z}_{z\psi y}) = 0$;

10) $R_y = yz \quad \to \quad \dfrac{A_{21}}{J_z}F_{yy} + \dfrac{A_{12}}{J_y}F_{zy} - I'^{y}_{z\psi y} - I'^{z}_{y\psi y} = 0$; (56)

11) $R_y = y^3 - 3yz^2 \to$

i. $\dfrac{A_{40} - 3A_{22}}{J_z}F_{yy} + \dfrac{A_{31} - 3A_{13}}{J_y}F_{zy} - 3I'^{y}_{yy\psi y} + 3I'^{y}_{zz\psi y} + 6I'^{z}_{yz\psi y} = 3(J'_z - J'_y)$;

12). $R_y = z^3 - 3zy^2 \to$

i. $\dfrac{A_{13} - 3A_{31}}{J_z}F_{yy} + \dfrac{A_{04} - 3A_{22}}{J_y}F_{zy} - 3I'^{z}_{zz\psi y} + 3I'^{z}_{yy\psi y} + 6I'^{y}_{yz\psi y} = -6J'_{yz}$;

13) $R_y = \beta_{ijk} \quad \to \quad \dfrac{B^{10}_{ijk}}{J_z}F_{yy} + \dfrac{B^{01}_{ijk}}{J_y}F_{zy} - I'^{y,y}_{\beta ijk\psi y} - I'^{z,z}_{\beta ijk\psi y} = I'^{y}_{\beta ijk}$;

14) $R_y = \gamma_{ijk} \quad \to \quad \dfrac{C^{01}_{ijk}}{J_z}F_{yy} + \dfrac{C^{10}_{ijk}}{J_y}F_{zy} - I'^{y,y}_{\gamma ijk\psi y} - I'^{z,z}_{\gamma ijk\psi y} = I'^{y}_{\gamma ijk}$.

Уравнения для определения коэффициентов $U_{zmn}, V_{zmnl}, W_{zmnl}$

1) $F_{yz} \to \quad F_{yz} - I'^{y}_{\psi z} = 0$;

2) $F_{zz} \to \quad F_{zz} - I'^{z}_{\psi z} = F$;

3,4,5) $I_{\psi z} = I_{y\psi z} = I_{z\psi z} = 0$;

6) ψ^{Δ}_z *при* $1 \quad \to \quad 2U_{z20} + 2U_{z02} = 0$;

7) ψ^{Δ}_z *при* $y \quad \to \quad \dfrac{1}{J_z}F_{yz} + 6U_{z30} + 2U_{z12} = 0$;

8) ψ^{Δ}_z *при* $z \quad \to \quad \dfrac{1}{J_y}F_{zz} + 2U_{z21} + 6U_{z03} = 0$;

9) $R_z = y^2 - z^2 \quad \to \quad \dfrac{A_{30} - A_{12}}{J_z}F_{yz} + \dfrac{A_{21} - A_{03}}{J_y}F_{zz} - 2(I'^{y}_{y\psi z} - I'^{z}_{z\psi z}) = 0$;

10) $R_z = yz \quad \to \quad \dfrac{A_{21}}{J_z}F_{yz} + \dfrac{A_{12}}{J_y}F_{zz} - I'^{y}_{z\psi z} - I'^{z}_{y\psi z} = 0$; (57)

11) $R_z = y^3 - 3yz^2 \to$

i. $\dfrac{A_{40} - 3A_{22}}{J_z}F_{yz} + \dfrac{A_{31} - 3A_{13}}{J_y}F_{zz} - 3I'^{y}_{yy\psi z} + 3I'^{y}_{zz\psi z} + 6I'^{z}_{yz\psi z} = -6J'_{yz}$;

12) $R_z = z^3 - 3zy^2 \to$

i. $\dfrac{A_{13} - 3A_{31}}{J_z}F_{yz} + \dfrac{A_{04} - 3A_{22}}{J_y}F_{zz} - 3I'^{z}_{zz\psi z} + 3I'^{z}_{yy\psi z} + 6I'^{y}_{yz\psi z} = 3(J'_y - J'_z)$;

13) $R_z = \beta_{ijk} \quad \to \quad \dfrac{B^{10}_{ijk}}{J_z}F_{yz} + \dfrac{B^{01}_{ijk}}{J_y}F_{zz} - I'^{y,y}_{\beta ijk\psi z} - I'^{z,z}_{\beta ijk\psi z} = I'^{z}_{\beta ijk}$;

14) $R_z = \gamma_{ijk}$ $\rightarrow$ $$\frac{C_{ijk}^{01}}{J_z} F_{yz} + \frac{C_{ijk}^{10}}{J_y} F_{zz} - I'^{\,y,y}_{\gamma ijk\psi z} - I'^{\,z,z}_{\gamma ijk\psi z} = I'^{\,z}_{\gamma ijk}\,.$$

Уравнения для определения коэффициентов $U_{xmn}, V_{xmnl}, W_{xmnl}$

1) $z_k \to \quad -Fz_k - I'^{y}_{\psi x} = -S'_y$;

2) $y_k \to \quad Fy_k - I'^{z}_{\psi x} = S'_z$;

3,4,5) $\quad I_{\psi x} = I_{y\psi x} = I_{z\psi x} = 0$;

6) ψ_x^{Δ} *при* $1 \quad \to \quad 2U_{x20} + 2U_{x02} = 0$;

7) ψ_x^{Δ} *при* $y \quad \to \quad 6U_{x30} + 2U_{x12} = 0$;

8) ψ_x^{Δ} *при* $z \quad \to \quad 2U_{x21} + 6U_{x03} = 0$;

9) $R_x = y^2 - z^2 \quad \to \quad -2(I'^{y}_{y\psi x} - I'^{z}_{z\psi x}) = 0$;

10) $R_x = yz \quad \to \quad -I'^{y}_{z\psi x} - I'^{z}_{y\psi x} = -J_y + J_z$; (58)

11) $R_x = y^3 - 3yz^2 \to$

i. $-3(J'_z - J'_y)z_k - 3I'^{y}_{yy\psi x} + 3I'^{y}_{zz\psi x} + 6I'^{z}_{yz\psi x} = -9A'_{21} + 3A'_{03}$;

12). $R_x = z^3 - 3zy^2 \to$

i. $3(J'_y - J'_z)y_k - 3I'^{z}_{zz\psi x} + 3I'^{z}_{yy\psi x} + 6I'^{y}_{yz\psi x} = 9A'_{12} - 3A'_{30}$;

13) $R_x = \beta_{ijk} \quad \to \quad -I'^{y}_{\beta ijk}z_k + I'^{z}_{\beta ijk}y_k - I'^{y,y}_{\beta ijk\psi x} - I'^{z,z}_{\beta ijk\psi x} = I'^{z}_{y\beta ijk} - I'^{y}_{z\beta ijk}$;

14) $R_x = \gamma_{ijk} \quad \to \quad -I'^{y}_{\gamma ijk}z_k + I'^{z}_{\gamma ijk}y_k - I'^{y,y}_{\gamma ijk\psi x} - I'^{z,z}_{\gamma ijk\psi x} = I'^{z}_{y\gamma ijk} - I'^{y}_{z\gamma ijk}$;

В приведенных системах (56) – (58) слева указаны номер уравнения или группы уравнений (13, 14) с кратким пояснением. Так уравнения (6) – (8) получены путем приравнивания свободных членов и коэффициентов при указанных аргументах в выражениях для лапласианов от функций депланации. Для уравнений (9) – (14), соответствующих граничным условиям, слева приведены весовые функции.

6. Примеры расчета

По предложенному методу определения характеристик произвольного сечения стержня были разработаны алгоритм и программа расчета Parus, включенная в состав суперэлементного программного комплекса Seria. Для проверки достоверности получаемых по программе результатов была выполнена серия расчетов стержней с различными поперечными сечениями, для которых известны аналитические решения. Поскольку большинство данных решений посвящено задаче о кручении стержня, то основными характеристиками сечения при проверке принимались момент инерции при кручении J_k и координаты центра кручения (изгиба) y_k, z_k .

6.1. Треугольное поперечное сечение

Из известного решения задачи о кручении стержня, поперечным сечением которого является равносторонний треугольник со стороной a (см. [2]), момент инерции при кручении вычисляется по формуле

$$J_k = \frac{3}{5}J_x = \frac{\sqrt{3}a^4}{80} \ . \tag{59}$$

При $a = 1$ м по формуле (59) J_k=2,16506351·10^{-2} . Данный результат полностью совпал при расчете по программе Parus при удержании в аппроксимации функций депланации по (13) только степенных слагаемых (10 членов ряда). Аксонометрические изображения функций депланации при сдвигах и кручении показаны на рис.1.

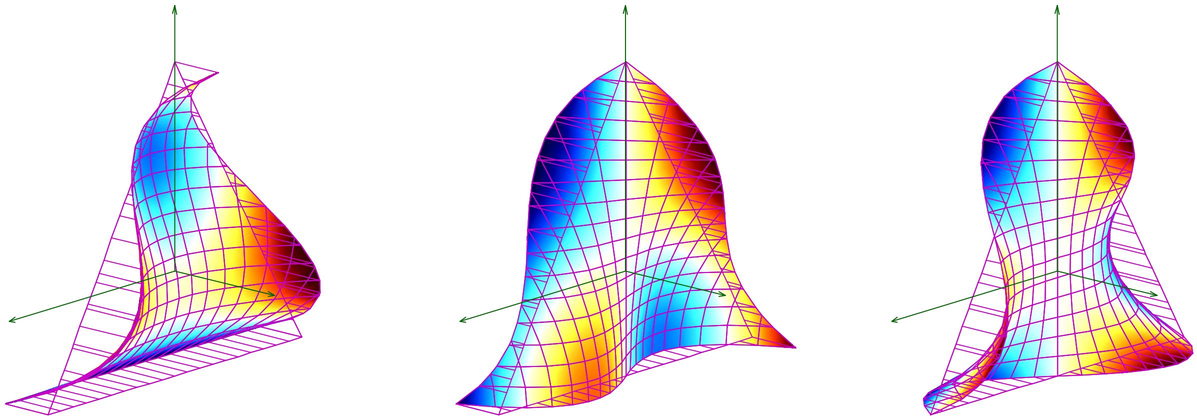


Рис. 1. Функции ψ_y, ψ_z, ψ_x

Для большей наглядности поверхности функций окрашены цветами, соответствующими величинам их ординат, причем теплые тона использованы для положительных значений, холодные – для отрицательных. Отметим, что отмеченное выше точное совпадение результатов объясняется простым видом аналитического решения, который согласуется с аппроксимацией функций депланации степенными рядами.

6.2. Эллиптическое поперечное сечение

Из классического решения задачи о кручении стержня с эллиптическим поперечным сечением (см. [2]) момент инерции J_k определяется по формуле

$$J_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \ . \tag{60}$$

При значениях полуосей a=0,5 м, b=0,25 м по формуле (60) J_k=1,96349541·10^{-2} . По программе Parus при удержании в аппроксимации функций депланации по (13) только степенных слагаемых получено значение J_k=1,94740595·10^{-2} , которое незначительно меньше аналитического, что объясняется заданием в программе поперечного сечения в виде многоугольника, вписанного в эллипс. Изображения функций депланации представлены на рис. 2.

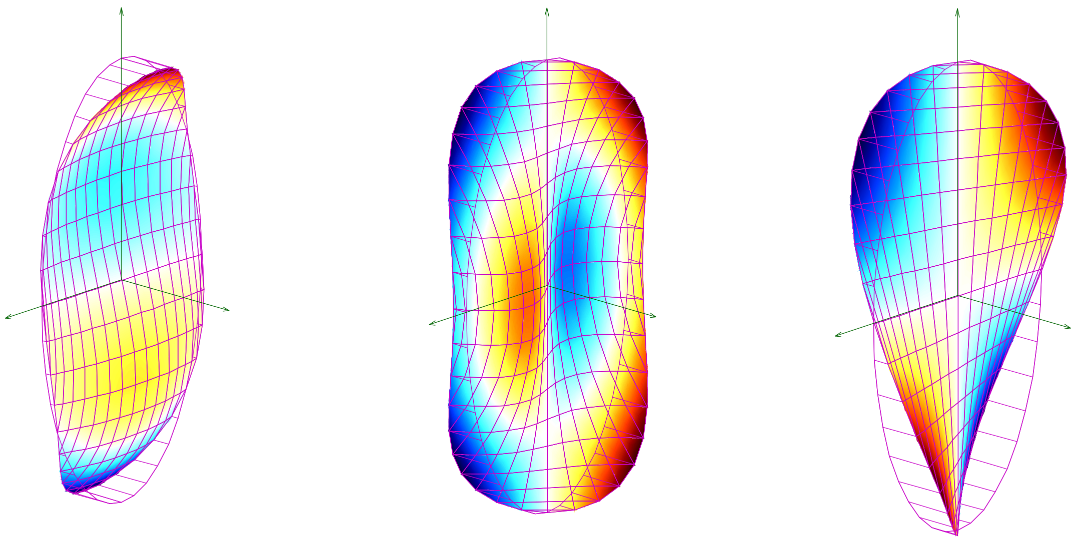


Рис. 2. Функции ψ_y, ψ_z, ψ_x

6.3. Прямоугольное поперечное сечение

Момент инерции при кручении для прямоугольного поперечного сечения со сторонами b и h находится по формуле в виде ряда (см. [3]):

$$J_k = \frac{hb^3}{3}\left(1 - \frac{192b}{\pi^5 h}\sum_{n}^{1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi h}{2b}\right). \tag{61}$$

По программе Parus была выполнена серия расчетов при фиксированном значении h=1,0 м и различных b=1,0, 0,5, 0,1 м. При этом исследовалась сходимость результата расчета к точному решению в зависимости от количества удерживаемых групп членов ряда в аппроксимации функций депланации по (13). Под первой группой членов ряда понимаются степенные члены ряда (всего 10 членов), под остальными группами – члены ряда, содержащие функции β_{mnl}, γ_{mnl} из (14) при одинаковых частотных параметрах l (по 8 членов ряда). Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка погрешности определения J_k для прямоугольного поперечного сечения

		J_k			Отн. погрешность, %		
b/h		1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1
Количество групп членов ряда	1	0,166667	0,0333333	3,30033E-04	18,55897	16,61042	5,66970
	2	0,142272	0,0290134	3,19805E-04	1,20545	1,49797	2,39489
	3	0,140929	0,0286822	3,16485E-04	0,25021	0,33931	1,33178
	4	0,140694	0,0286188	3,14754E-04	0,08328	0,11760	0,77759
	5	0,140627	0,0286000	3,13799E-04	0,03576	0,05175	0,47187
	6	0,140602	0,0285928	3,13256E-04	0,01801	0,02649	0,29807
	7	0,140591	0,0285895	3,12937E-04	0,01011	0,01506	0,19582
	8	0,140586	0,0285878	3,12742E-04	0,00614	0,00923	0,13339
	9	0,140583	0,0285869	3,12618E-04	0,00396	0,00600	0,09386
Точ. реш.		0,140577	0,0285852	3,12325E-04	0,00000	0,00000	0,00000

На рис. 3 показаны графики относительных погрешностей из табл. 1 с логарифмической шкалой ординат.

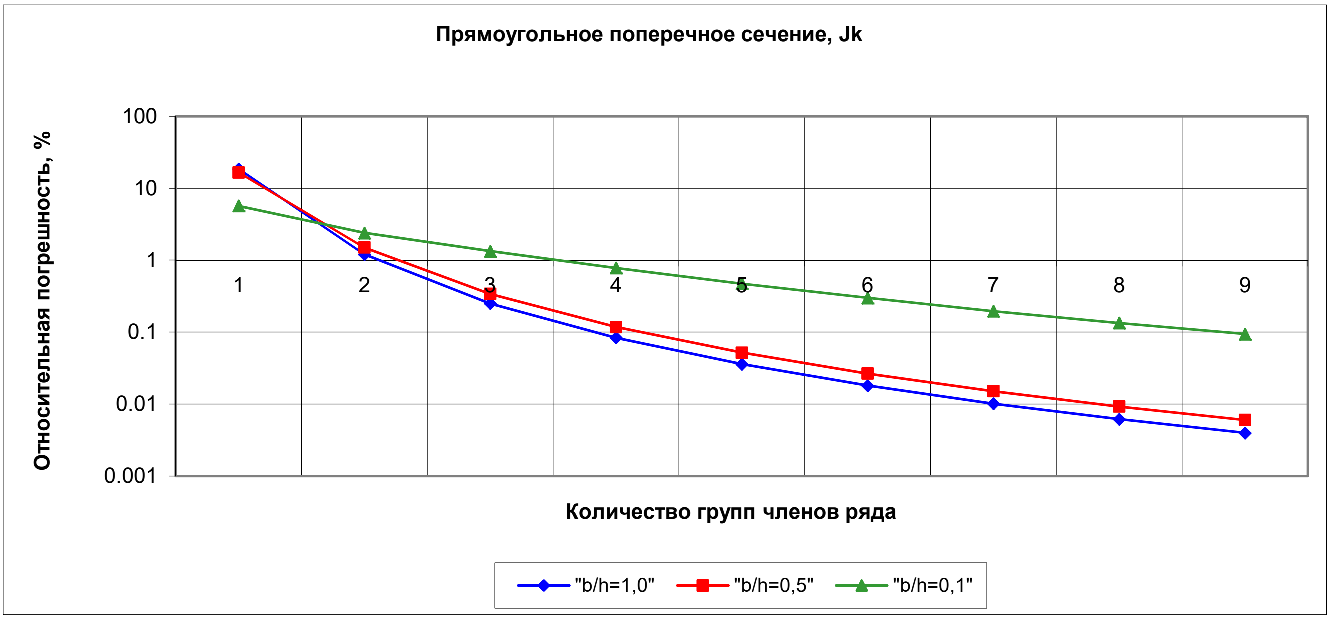


Рис. 3. Графики относительных погрешностей J_k при различных b/h

Из табл. 1 и рис. 3 видно, что с увеличением количества удерживаемых групп членов ряда результаты расчетов по программе Parus быстро сходятся к точному решению, причем с уменьшением отношения b/h сходимость ухудшается.

Полученные функции депланации и функции распределения нормальных и касательных напряжений от различных усилий представлены на рис. 4 – 8 .

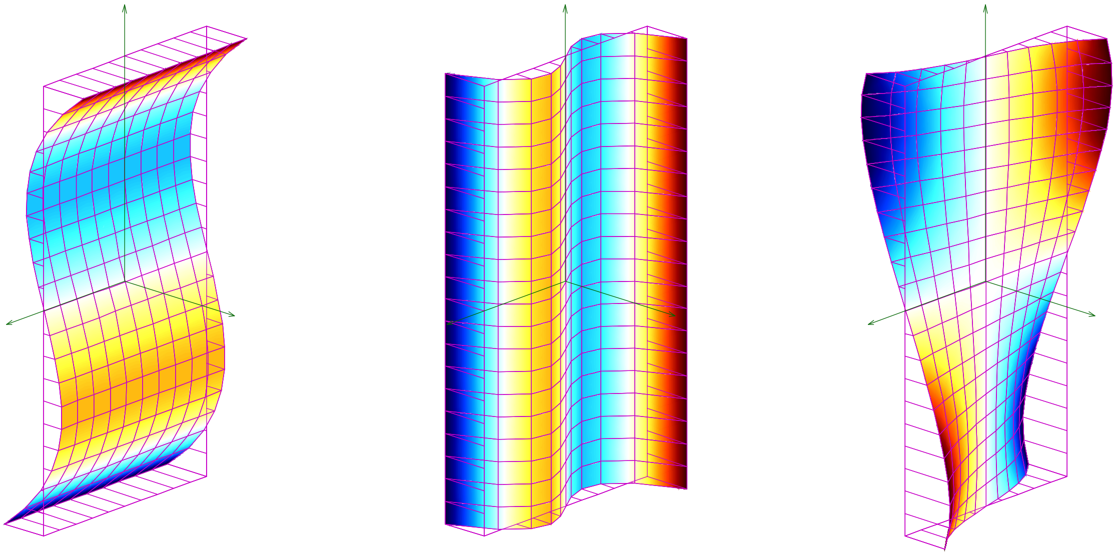


Рис. 4. Функции ψ_y, ψ_z, ψ_x

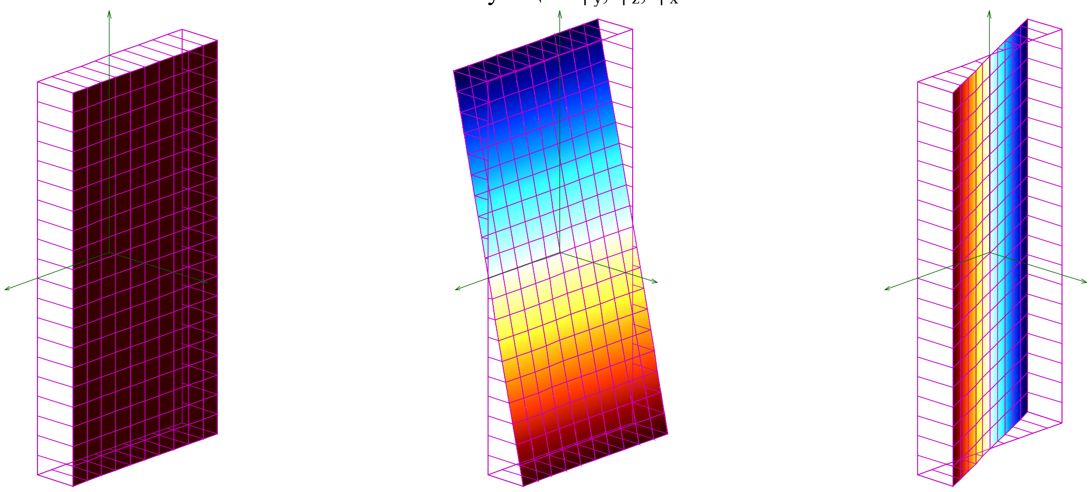


Рис. 5. Напряжения $\sigma_x(N, M_z, M_y)$

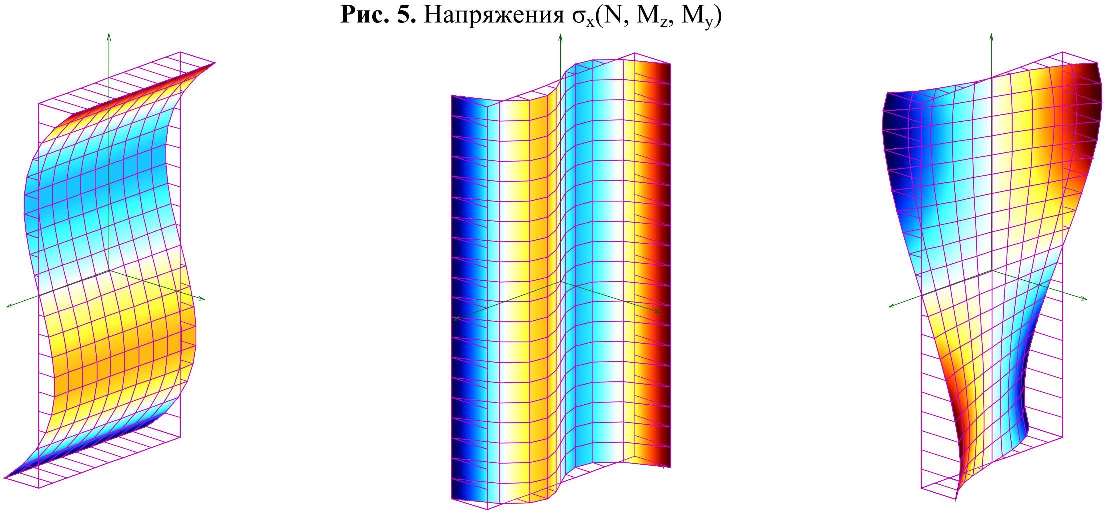


Рис. 6. Напряжения $\sigma_x(L_{xy}, L_{xz}, K_x)$

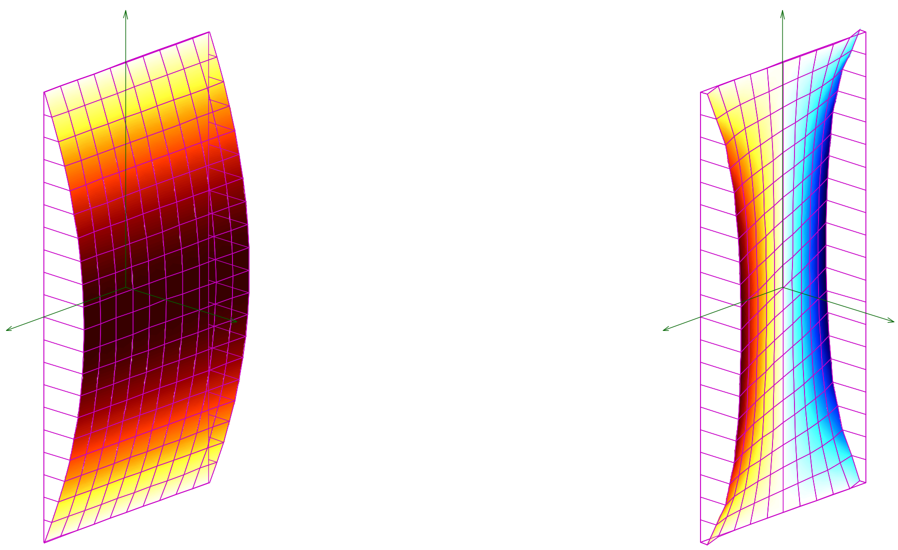


Рис. 7. Напряжения $\tau_{xy}(Q_y, M_x)$

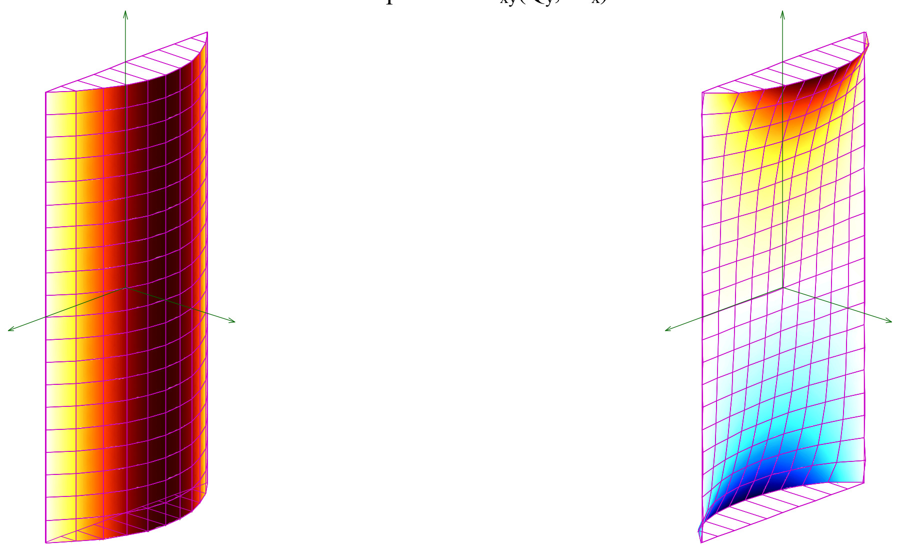


Рис. 8. Напряжения $\tau_{xz}(Q_z, M_x)$

Отметим, что функции нормальных напряжений на рис. 6, вызванных моментами депланации, подобны самим функциям депланации на рис. 4. Это объясняется тем, что матрица $\widetilde{C}_{33}$ из (2) , входящая в формулу для напряжений, становится диагональной вследствие наличия двух осей симметрии поперечного сечения. Функции касательных напряжений на рис. 7, 8 хорошо удовлетворяют граничным условиям, из которых следует равенство нулю этих напряжений на соответствующих кромках поперечного сечения.

6.4. Полукольцевое поперечное сечение

В работе Новожилова [4] в полярных координатах решена задача о кручении стержня с полукольцевым поперечным сечением, имеющим внешний радиус R и внутренний радиус R_1. Момент инерции при кручении находится в виде ряда по формуле

$$J_k = \frac{8R^4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)^2(1+k^{4n+6}) - (2n+3)^2 k^4 (1+k^{4n-2}) + 16(2n+1)k^{2n+3}}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2(1-k^{4n+2})}, \qquad (62)$$

где $k = R_1 / R$.

В решении также получена формула для определения координаты центра изгиба z_k в центральных осях:

$$z_k = -\frac{8R}{5\pi(1-k^4)}\{1+5k^2-5k^3-k^5+$$
$$+\frac{\nu}{3(1+\nu)}[1-5k^2+5k^3-k^5-\frac{10(1-k^3)J_k}{\pi(1-k^2)R^4}]\}+z_c\,, \tag{63}$$

где $z_c = \frac{4R(1-k^3)}{3\pi(1-k^2)}$ - привязка центра тяжести к центру окружностей сечения.

Поскольку в предложенной теории эффект Пуассона не учитывается, то формулу (63) запишем для случае $\nu = 0$:

$$z_k = -\frac{8R}{5\pi(1-k^4)}(1+5k^2-5k^3-k^5)+z_c\,. \tag{64}$$

По программе Parus была выполнена серия расчетов при фиксированном значении R =0,5 м и различных R_1=0,15, 0,25, 0,35 м. При этом оценивалась сходимость результата расчета к точному решению для J_k (см. табл. 2, рис. 9) и для z_k (см. табл. 3, рис. 10).

Таблица 2

Оценка погрешности определения J_k для полукольцевого поперечного сечения

		J_k			Отн. погрешность, %		
k		0,3	0,5	0,7	0,3	0,5	0,7
Количество групп членов ряда	1	0,015281	0,0112304	0,00714303	32,6732	110,2741	410,9083
	2	0,013838	0,0076181	0,00243828	20,1419	42,6393	74,3993
	3	0,012961	0,0059938	0,00147524	12,5270	12,2267	5,5175
	4	0,012299	0,0054619	0,00140245	6,7845	2,2675	0,3112
	5	0,011902	0,0053557	0,00139971	3,3382	0,2774	0,1147
	6	0,011697	0,0053427	0,00139874	1,5513	0,0341	0,0459
	7	0,011591	0,0053412	0,00139809	0,6349	0,0077	0,0007
	8	0,011547	0,0053411	0,00139807	0,2567	0,0046	0,0024
	9	0,011528	0,0053408	0,00139806	0,0844	0,0004	0,0033
Точ. реш.		0,011518	0,0053408	0,00139810	0,0000	0,0000	0,0000

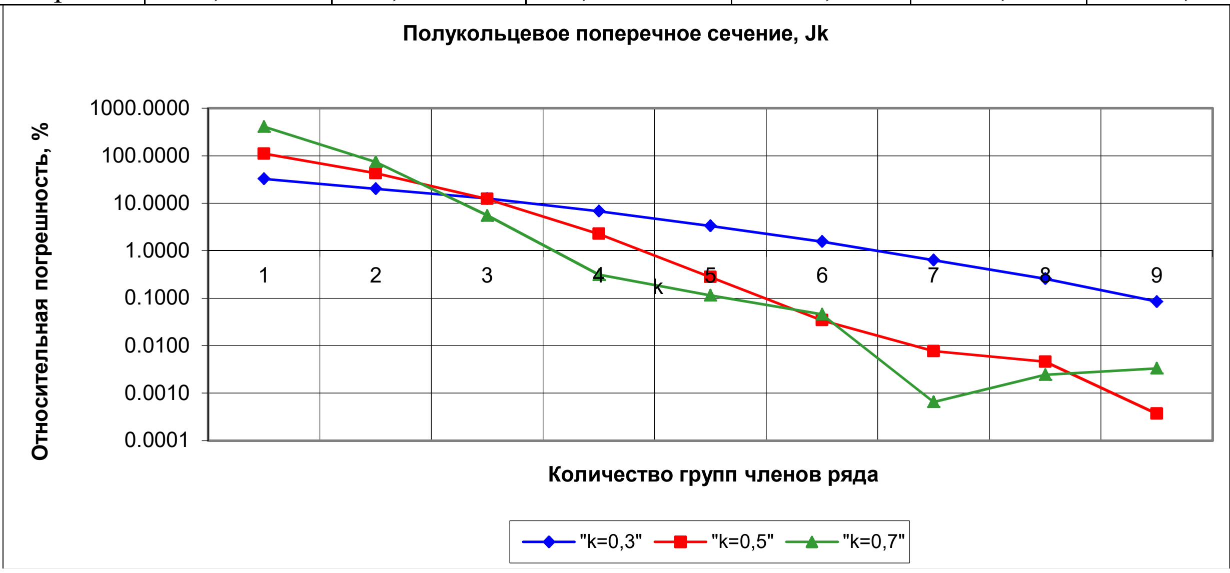


Рис. 9. Графики относительных погрешностей J_k при различных k

Таблица 3

Оценка погрешности определения z_k для полукольцевого поперечного сечения

		$-z_k$			Отн. погрешность, %		
k		0,3	0,5	0,7	0,3	0,5	0,7
Количество групп членов ряда	1	0,0600748	0,0885918	0,1186941	45,42370	52,19703	52,84630
	2	0,0793596	0,1425235	0,2168903	27,90401	23,09621	13,83579
	3	0,0892500	0,1692083	0,2466875	18,91880	8,69746	1,99825
	4	0,0977257	0,1809828	0,2511994	11,21890	2,34411	0,20578
	5	0,1032315	0,1844102	0,2515834	6,21702	0,49472	0,05321
	6	0,1064381	0,1851366	0,2516768	3,30389	0,10278	0,01613
	7	0,1083173	0,1852786	0,2517145	1,59669	0,02618	0,00114
	8	0,1092351	0,1853039	0,2517175	0,76294	0,01252	0,00004
	9	0,1097207	0,1853223	0,2517179	0,32171	0,00257	0,00019
Точ. реш. $\nu = 0$		0,1100749	0,1853271	0,2517174	0,00000	0,00000	0,00000
Точ. реш. $\nu \neq 0$		0,1110224	0,1858053	0,2518336			
z_c		0,2268978	0,2475744	0,2733720			

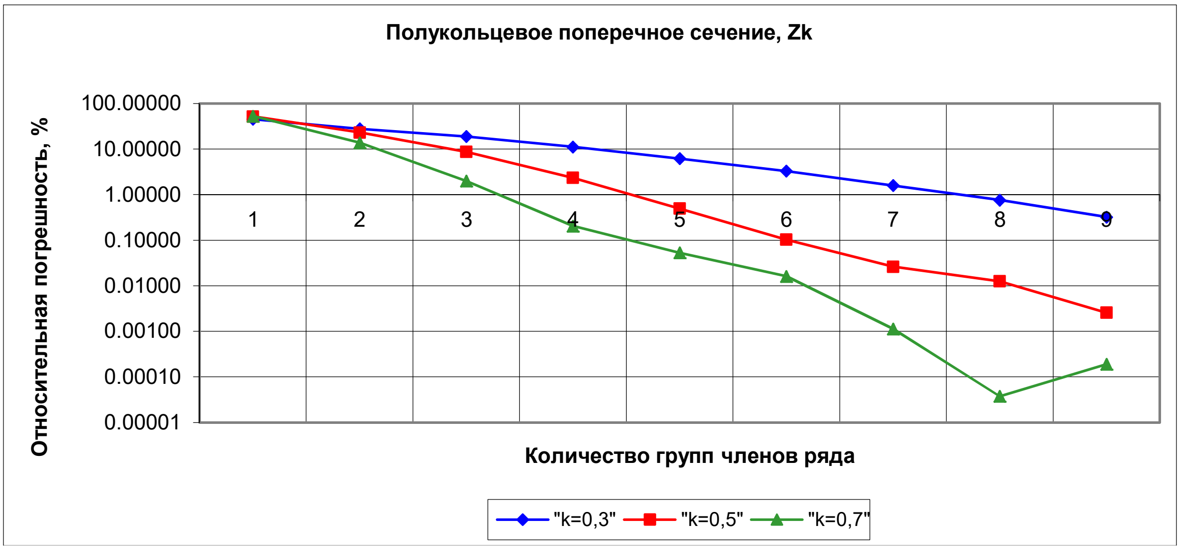


Рис. 10. Графики относительных погрешностей z_k при различных k

Из табл. 2, 3 и рис. 9, 10 видно, что с увеличением количества удерживаемых групп членов ряда результаты расчетов по программе Parus, как и в предыдущем примере, быстро сходятся к точному решению, причем с уменьшением отношения k сходимость ухудшается.

Полученные функции депланации и функции распределения нормальных и касательных напряжений от различных усилий представлены на рис. 11 – 15 .

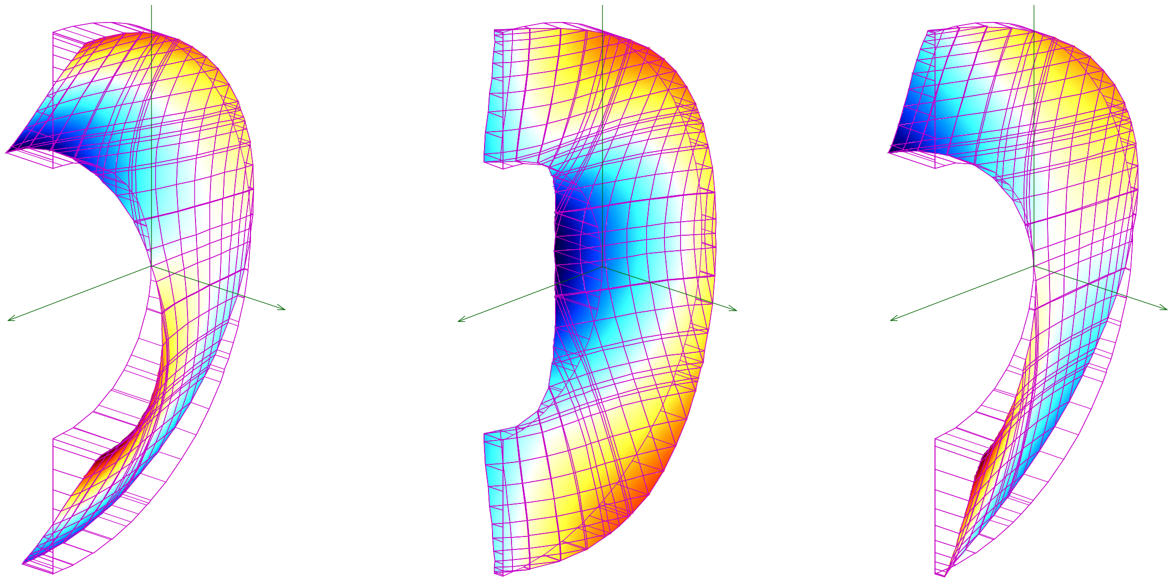


Рис. 11. Функции ψ_y, ψ_z, ψ_x

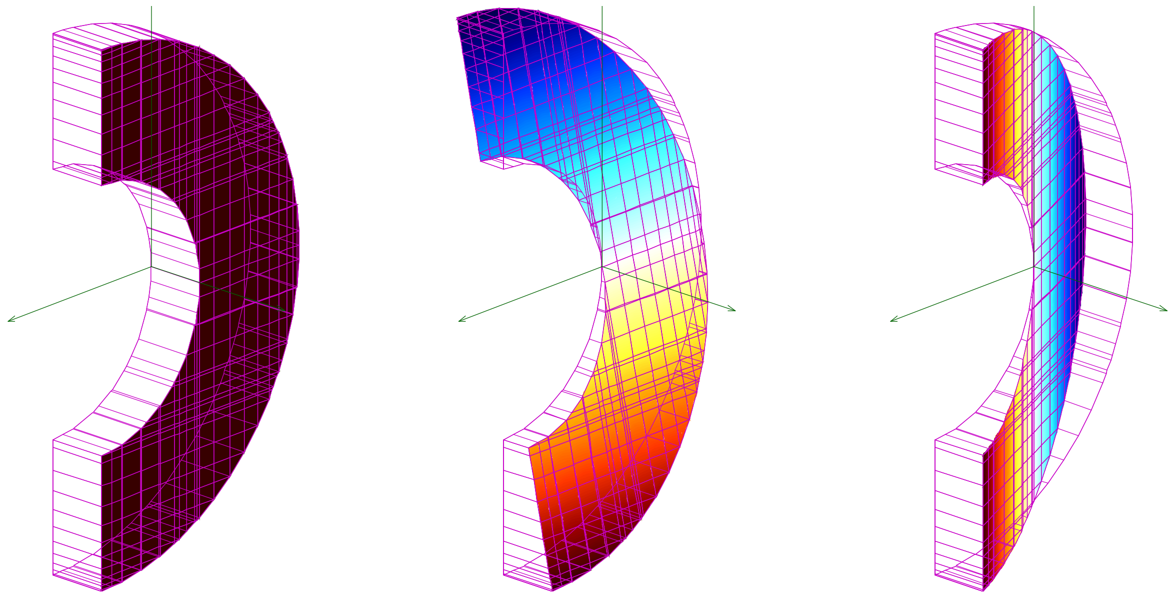


Рис. 12. Напряжения $\sigma_x(N, M_z, M_y)$

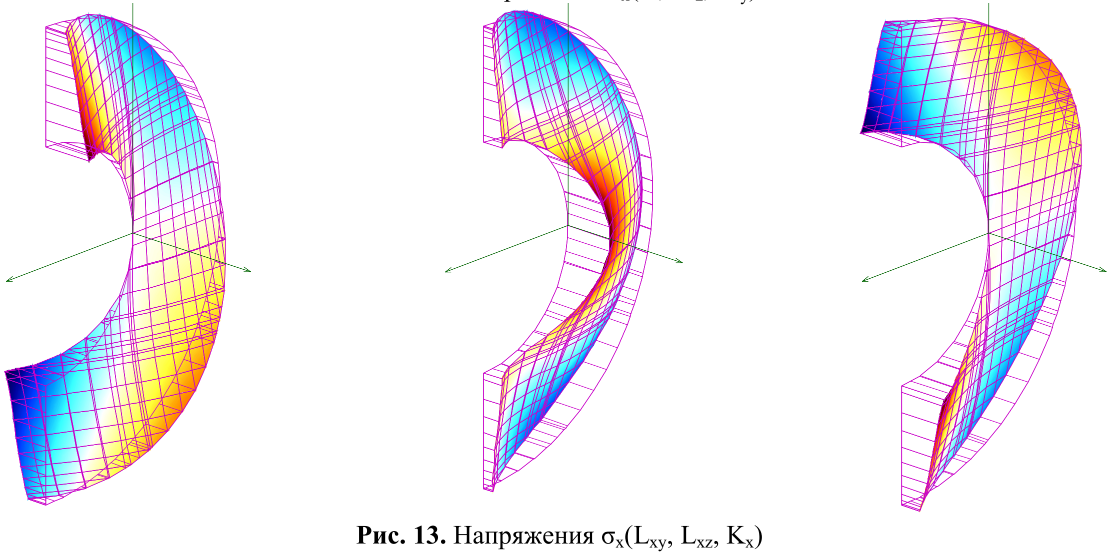


Рис. 13. Напряжения $\sigma_x(L_{xy}, L_{xz}, K_x)$

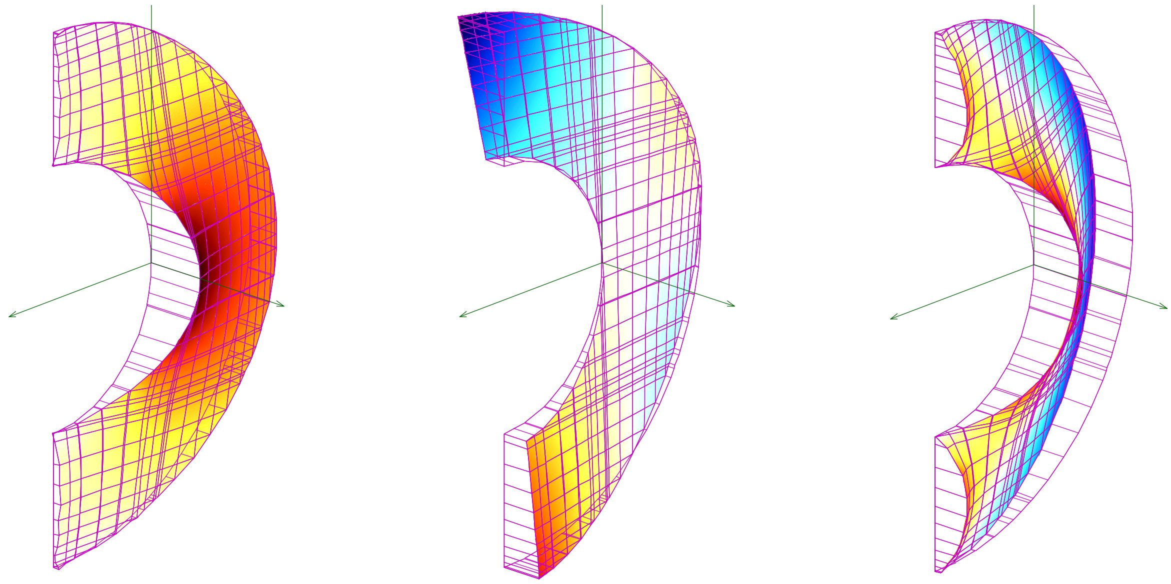


Рис. 14. Напряжения $\tau_{xy}(Q_y, Q_z, M_x)$

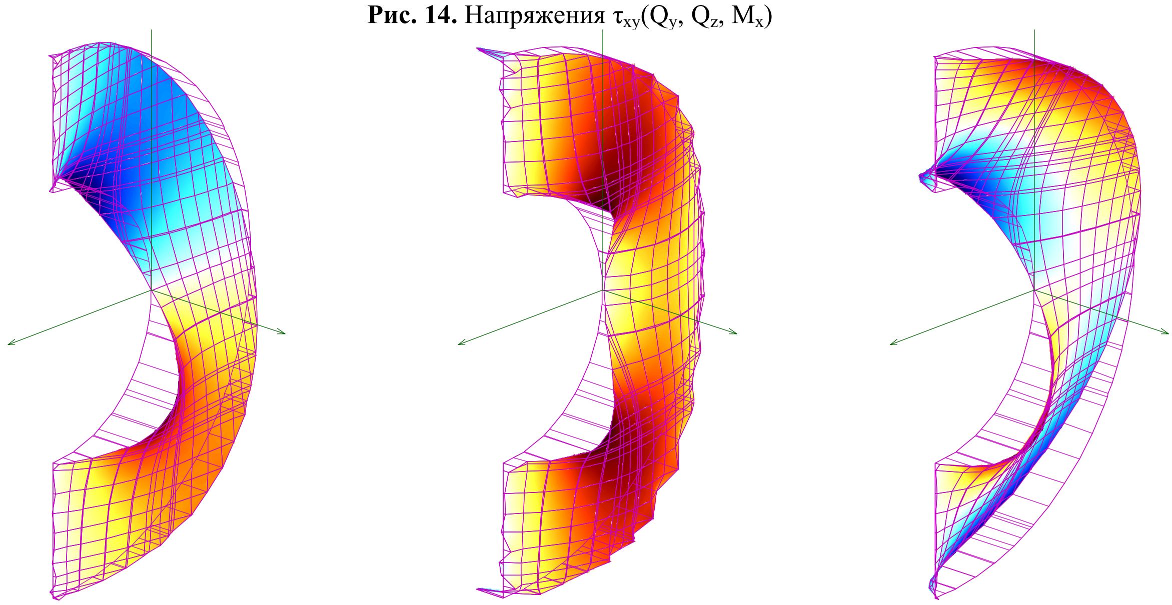


Рис. 15. Напряжения $\tau_{xz}(Q_y, Q_z, M_x)$

Отметим, что касательные напряжения на рис. 14, 15 возникают не только от одноименных поперечных сил, как в предыдущем примере, но и от ортогональных к ним поперечных сил.

6.5. Двутавровое поперечное сечение

По программе Parus был рассчитан стержень с двутавровым поперечным сечением, имеющим следующие размеры: высота сечения 1,2 м, ширина полок 0,8 м, толщина полок и стенок 0,2 м. Вычисленный программой момент инерции при кручении составил J_k =0,0089653 м^4 . Найденный по теории тонкостенных стержней J_k=0.0083162 м^4 , который меньше первого на 7,2 %. Такое различие объясняется тем, что выбранное сечение не является тонкостенным.

Расчет по программе Parus выполнялся с удержанием 21 группы членов ряда в аппроксимации (13). Найденные функции депланации и функции распределения касательных напряжений представлены на рис. 16 – 18.

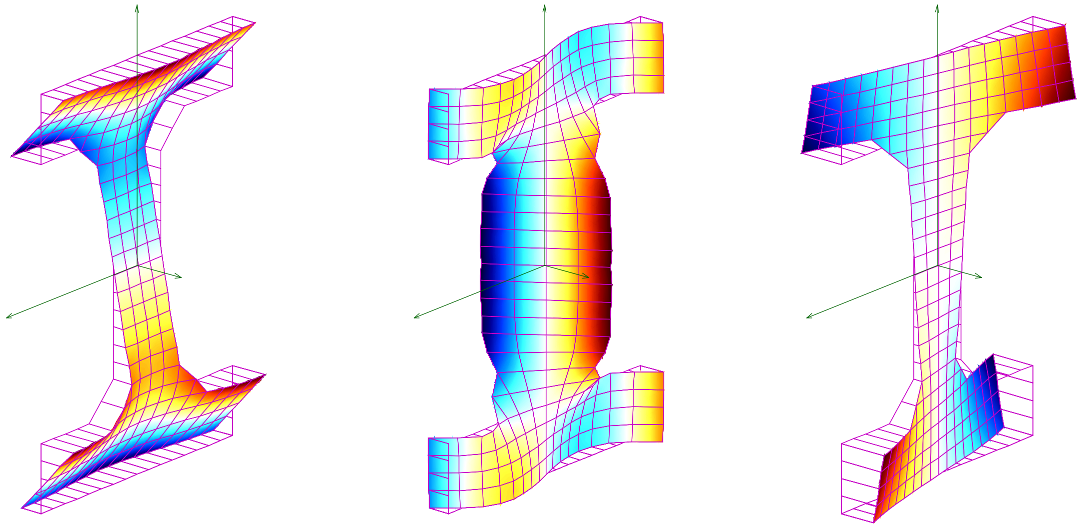


Рис. 16. Функции ψ_y, ψ_z, ψ_x

Рис. 17. Напряжения $\tau_{xy}(Q_y, M_x)$

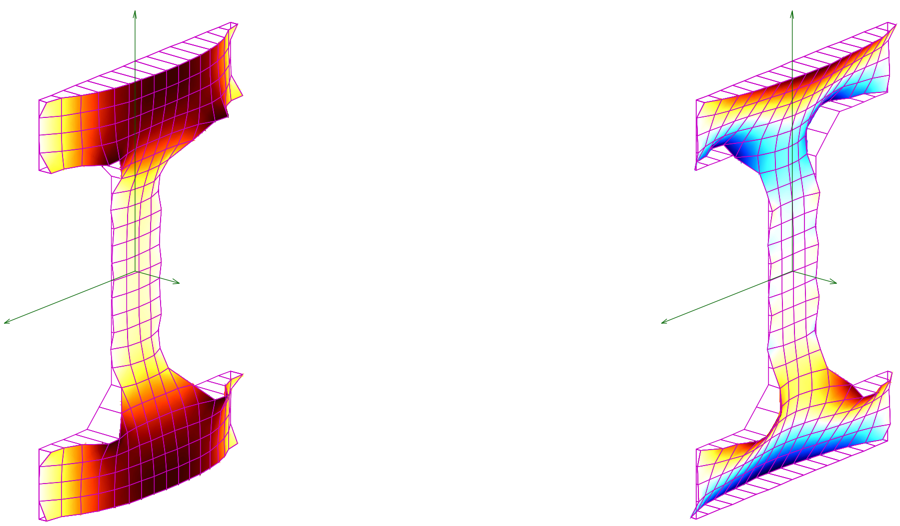


Рис. 18. Напряжения $\tau_{xz}(Q_z, M_x)$

Отметим, что напряжения τ_{xy} на рис. 17 в основном сосредоточены в стенке двутаврового сечения и подчиняются граничным условиям на горизонтальных кромках, а напряжения τ_{xz} на рис. 18 – в полках сечения с удовлетворением граничных условий на вертикальных кромках. При этом заметны незначительные осцилляции функций, вызванные приближенностью их аппроксимации.

Выводы

Представленные примеры расчета показывают, что вычисленные по программе Parus характеристики для различных сечений достаточно быстро и монотонно сходятся к точным результатам известных аналитических решений при увеличении количества групп членов ряда в аппроксимации функций депланации. Однако следует отметить, что с усложнением формы поперечного сечения и с появлением в нем тонкостенных элементов скорость сходимости к решению снижается. При этом увеличение количества удерживаемых групп членов ряда сдерживается используемыми в аппроксимации (13) гиперболическими функциями, поскольку значительное увеличение коэффициента при аргументе приводит их к достижению величин с большими порядками, что ведет к вырождению как самих функций, так и разрешающей системы уравнений.

В заключение отметим, что представленные выше результаты расчетов получены в рамках стержневой теории, а значит, дискретизация конструкции при использовании метода конечных элементов может осуществляться одномерными и относительно крупными конечными элементами. Чтобы получить аналогичные результаты в рамках теории упругости, необходимо использовать трехмерные элементы, размеры которых обычно значительно меньше поперечного сечения. Трудоемкость расчетов при этом может увеличиться на несколько порядков с одновременным снижением надежности получаемых результатов.

Библиографический список

1. Петреня, Е.Н. Исходные дифференциальные уравнения пространственного стержня с многоконтурным поперечным сечением произвольной формы/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. - Воронеж.-№2.-2011. (статья в настоящем сборнике)
2. Тимошенко, С.П. Теория упругости. / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер - М.: Наука,1979, - С. 304-307.
3. Филин ,А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том II. / А.П. Филин- М.: Наука, 1978.- С. 57-64.
4. Новожилов, В.В. Теория упругости. / В.В. Новожилов.- Л.: Судпромгиз, 1958.- С. 266-269, 287-288.

References

1. . Petrenya E.N., Petranin A.A. Initial differential equations of spatial bar with the multicontour cross-section of free-form.// Structural Mechanics and Constructions.-Voronezh, issue2, 2011.
2. Tymoshenco S.P., Gudier J. Theory of elasticity. – M.: Nauka, 1979.- P. 288-382, 377.
3. Filin A.P. Applied mechanics of the formed solid. Tom II.-M.: Nauka,1978,- P.57-64.
4. Novozilov V.V. Theory of elasticity. – L.: Sudpromgiz, 1958.- P. 266-269, 287-288.

Ключевые слова: стержневая теория, теория упругости, депланация, дифференциальные уравнения, характеристики поперечного сечения, центр кручения, центр изгиба

Key words: bar theory, theory of elasticity, deplanation, differential equation, cross-section characteristics, spinning center, flexural center.

УДК 624.04

Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс (г. Орел)
Докт. техн. наук, проф. кафедры строительных конструкций и материалов
В. И. Коробко
Аспирант кафедры строительных конструкций и материалов А. А. Черняев
Россия, г. Орел, тел. 8(4862)73-43-95;
email: Chernyev87@yandex.ru

The State University – Educational-Science-Production Complex (Oryol city)
Doc. Sc. Tech., Prof. of Department of Building designs and materials
V. I. Korobko
Post-graduate student of Department of Building designs and materials A. A. Chernyaev
Russia, Oryol, tel.: 8(4862)73-43-95;
email: Chernyev87@yandex.ru

В. И. Коробко, А. А. Черняев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОГИБА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ КРУГЛЫХ, ПРАВИЛЬНЫХ N-УГОЛЬНЫХ, ТРЕУГОЛЬНЫХ И РОМБИЧЕСКИХ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИНОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТНОШЕНИЯ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Для определения величины максимального прогиба упругих изотропных круглых, правильных n-угольных, произвольных треугольных и ромбических пластинок с жестко защемленным контуром от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки предлагается использовать единую расчетную функцию одной переменной. В качестве этой переменной выступает новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач строительной механики – безразмерная геометрическая характеристика формы плоской области (области пластинки) – отношение внутреннего к внешнему конформных радиусов.

V. I. Korobko, A. A. Chernyaev

DEFINITION OF MAXIMUM DEFINITION OF MAXIMUM DEFLECTION OF ELASTIC, ISOTROPIC, CIRCULAR, REGULAR, N – POLIGONAL , TRIANGULAR AND RHOMBIC RIGIDLY RESTRAINED PLATES WITH USAGE OF RATIO OF CONFORMAL RADIUSES.

It is proposed to use unified design function of one variable for definition of maximum deflection of elastic, isotropic, circular, regular, n - polygonal, general, triangular and rhombic plates with rigidly restrained edge, caused by continuous onto the whole area lateral load. New argument of geometric methods of structural theory two-dimensional problem solving - dimensionless geometric characteristic of plane range form - ratio of inner and outer conformal, radiuses.

Состояние проблемы и постановка задачи. Точные решения задачи поперечного изгиба упругих изотропных пластинок найдены лишь в ряде частных случаев для простейших форм пластинок (круглой, эллиптической, прямоугольной, правильной треугольной) и простейших условий загружений. Во всех остальных и практически важных случаях приходится прибегать к различным приближенным методам.

Применение вариационных методов (В. Ритца, Б.Г. Галеркина, С.П. Тимошенко, Э. Треффца и др.) требует решения сложных дифференциальных уравнений, что является достаточно трудоемким. Численные методы (метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и др.) для обеспечения высокой точности требуют привлечения мощных ЭВМ и производят однократный расчет, при котором нет возможности отследить изменение искомого решения (например, максимального прогиба) при изменении геометрической формы пластинки. Другие методы, такие как метод R-функций, метод коллокаций, метод компенсирующих нагрузок и пр., в некоторых случаях являются более предпочтительными в сравнении с вариационными и численными.

Однако также являются достаточно трудоемкими и в большинстве своем не применимы к пластинкам сложных форм.

В тех случаях, когда необходимо оперативно получить оценку искомой физической характеристики пластинки и (или) не требуется высокая точность, что особенно актуально на начальной стадии проектирования, успешно применяют геометрические методы[1]. Такие методы позволяют избежать решения сложных дифференциальных уравнений, не требуют мощных ЭВМ и сводятся к геометрическому моделированию области пластинок. При этом выбирается геометрическая характеристика формы области (например, в нашем случае области пластинки), выступающая в роли основного аргумента, по которому оцениваются получаемые решения.

Среди таких методов стоит отметить изопериметрический метод (ИЗПМ), примененный впервые всемирно известными математиками Г. Полиа и Г. Сеге [1] еще в 1962 году для решения задач математической физики, а для решения задач теории пластинок – профессором В.И. Коробко в 1980 году [2], а также метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [3], разработанный профессором А.В Коробко и являющийся логическим развитием ИЗПМ. В этих методах в качестве геометрического аргумента для определения физических характеристик пластинок (в их числе максимальный прогиб) используется интегральная характеристика формы плоской области – коэффициент формы K_f. Подробнее с этой характеристикой, ее изопериметрическими свойствами и закономерностями можно ознакомиться, например, в работах [2, 3].

В настоящей работе рассматривается новый аналогичный геометрический аргумент – безразмерная характеристика формы плоской области – отношение внутреннего к внешнему конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$. Как аргументы по отдельности конформные радиусы широко используются при решении многих прикладных задач математической физики [1, 4], а как отношение впервые было использовано в теории пластинок В.И. Коробко и А.Н. Хусточкиным в 1994 году при исследовании задачи устойчивости [5], в которой было установлено одно «замечательное» свойство: «Значения критического усилия при потере устойчивости от действия равномерного всестороннего сжатия для круглых, правильных n-угольных, произвольных треугольных и ромбических шарнирно опертых (либо жестко защемленных) по контуру пластинок равной площади, представленные как функции отношения внутреннего к внешнему конформных радиусов областей пластинок, вырождаются в одну кривую». Как следствие, шарнирно опертые (либо жестко защемленные) по контуру пластинки рассматриваемых форм равной площади, имеющие одинаковое значение отношения конформных радиусов, имеют и одинаковую величину критического усилия.

Ни одна другая геометрическая характеристика, в том числе коэффициент формы K_f, не позволяет объединить одной аналитической зависимостью решения для такого большого подмножества форм пластинок. Это свойство основано на возможности представления площади плоской области A (области пластинки) через внутренний $\dot{r}$ и внешний $\bar{r}$ конформные радиусы:

$$A = \pi \bar{r} \dot{r}\,. \tag{1}$$

Для правильных n-угольников и ромбов равенство (1) следует из выражений для $\dot{r}$ и $\bar{r}$ как данных, которые выводятся из формулы Кристоффеля-Шварца, а для треугольников установлено Хиги [1, с. 330].

Учитывая известную математическую аналогию задач устойчивости и поперечного изгиба пластинок (2), описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа четвертого порядка [3], можно предположить, что это «замечательное» свойство и в задаче поперечного изгиба для рассматриваемого множества пластинок может быть обнаружено.

[1] Круг задач, к решению которых могут применяться геометрические методы, для пластинок, ограничивается случаем равного для всех условием нагружения. Для задачи поперечного изгиба – это: равномерно распределенная по всей площади нагрузка; сосредоточенная сила, приложенная в геометрическом центре; чистый изгиб с постоянной величиной изгибающего момента и т.д.

А параметром, аналогичным критическому усилию, будет выступать величина максимального прогиба. Проверим эту гипотезу для случая жесткого защемления.

$$\begin{cases} D\Delta^2\Delta^2 w - q_0\Delta^2 w = 0, \\ D\Delta^2\Delta^2 w - q = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где D – цилиндрическая жесткость; Δ – оператор Лапласа; w – функция прогибов; q_0 – интенсивность равномерной нагрузки при всестороннем сжатии пластинки, q – интенсивность поперечной нагрузки.

1. Формулы для определения конформных радиусов. В научной и справочной литературе по теории конформного отображения и математической физике приводятся формулы для нахождения внутреннего $\dot{r}$ и внешнего $\bar{r}$ и конформных радиусов для рассматриваемых в работе областей (фигур) [1]:

– для круга радиуса a:

$$\dot{r} = a\,,\ \bar{r} = a\,; \tag{3}$$

– для правильных n-угольников:

$$\dot{r} = \frac{\tilde{A}(1-1/n)}{2^{1-\frac{2}{n}}\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}L\,,\ \bar{r} = \frac{\tilde{A}(1+1/n)}{2^{1+\frac{2}{n}}\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}L\,, \tag{4}$$

где n – число сторон правильного многоугольника; L – его периметр; здесь и далее $\Gamma(x)$ – Г-функция (Гамма-функция);

– для произвольных треугольников с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$:

$$\dot{r} = 4\pi\cdot f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\cdot\rho\,, \tag{5}$$

где $f(x) = \dfrac{1}{\tilde{A}(x)}\left\{\dfrac{x^x}{(1-x)^{1-x}}\right\}^{1/2}$; ρ – радиус описанного круга;

– для равнобедренных треугольников с $\alpha = \beta$ выражение (5) примет вид

$$\dot{r} = 4\pi\cdot f^2(\alpha)f(\gamma)\cdot\rho\,. \tag{6}$$

Значение внешнего конформного радиуса $\bar{r}$ для треугольников, получим из выражения (1):

$$\bar{r} = A/\pi\dot{r}; \tag{7}$$

– для равнобедренных треугольников по выражению (7) с учетом (5) после некоторых преобразований получим:

$$\bar{r} = \frac{ctg\alpha\cdot h^2}{\pi\dot{r}}, \tag{8}$$

где α – равный угол при основании; h – высота равнобедренного треугольника;

– для прямоугольных треугольников по выражению (7) с учетом (5) после некоторых преобразований получим:

$$\bar{r} = \frac{\sin 2\alpha\cdot c^2}{4\pi\dot{r}}, \tag{9}$$

где α – угол при гипотенузе; c – гипотенуза треугольника;

– для ромбов с углом πα:

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L\,,\ \bar{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\tilde{A}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L\,, \qquad (10)$$

где L – периметр ромба.

2. Значения конформных радиусов и их отношения. Подсчитанные по формулам (3), (4), (6) – (10) значения конформных радиусов и их отношения для правильных фигур, ромбов, равнобедренных и прямоугольных треугольников сведем в табл. 1–4. Значения Г-функции подсчитывались в приложении «MSOffice Excel_2003». На основании табличных данных построим графики изменения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ в зависимости от характерного для каждой фигуры геометрического параметра (рис. 1–4, а).

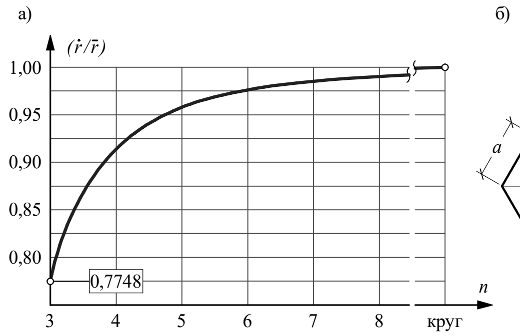


Рис. 1. Правильные фигуры:
а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(n)$; б) общий вид области

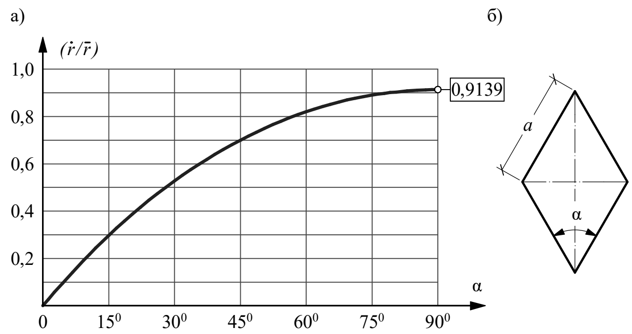


Рис. 2. Ромбы:
а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$; б) общий вид области

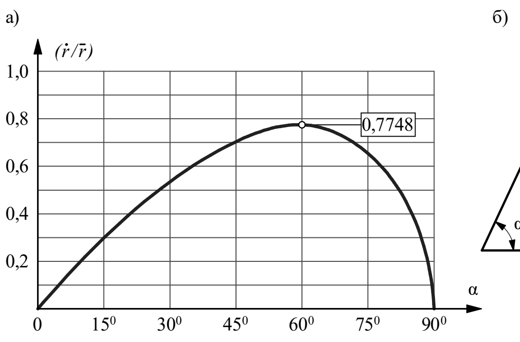


Рис. 3. Равнобедренные треугольники:
а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$; б) общий вид области

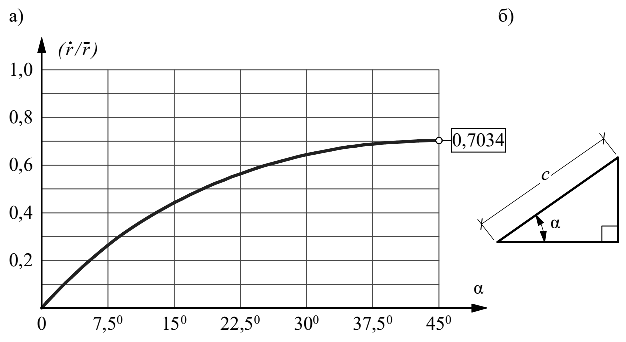


Рис. 4. Прямоугольные треугольники:
а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$; б) общий вид области

Таблица 1

Значения конформных радиусов их отношения для правильных фигур

Форма области	$\dot{r}$, a	$\bar{r}$, a	$\dot{r}/\bar{r}$
№ п/п	1	2	3
Круг	1	1	1
Правильный:			
20-угольник	3,169	3,1709	0,9994
16-угольник	2,5285	2,5315	0,9988
12-угольник	1,8852	1,8905	0,9972
10-угольник	1,5611	1,5688	0,9951
9-угольник	1,398	1,4076	0,9931
8-угольник	1,2337	1,2458	0,9 03
7-уго ьник	1,0676	1,0835	0,9853
6-угольник	0,8985	0,9204	0,9762
5-угольник	0,7243	0,7561	0,9579
4-угольник	0,5394	0,5902	0,9139
3-угольник	0,3268	0,4218	0,7748

Примечание: a – для круга радиус, для правильных n-угольников – сторона.

Таблица 2

Значения конформных радиусов и их отношения для ромбов

α	$\dot{r}$, a	$\bar{r}$, a	$\dot{r}/\bar{r}$
№ п/п	1	2	3
5^0	0,0545	0,5094	0,107
10^0	0,1066	0,5183	0,2057
15^0	0,1564	0,5268	0,2969
20^0	0,2036	0,5348	0,3807
25^0	0,2481	0,5423	0,4575
30^0	0,2898	0,5492	0,5277
35^0	0,3286	0,5557	0,5913
40^0	0,3643	0,5616	0,6487
45^0	0,3970	0,5670	0,7002
50^0	0,4264	0,5718	0,7457
55^0	0,4526	0,5761	0,7856
60^0	0,4754	0,5798	0,8199
65^0	0,4949	0,5830	0,8489
70^0	0,5108	0,5855	0,8724
75^0	0,5233	0,5876	0,8906
80^0	0,5322	0,5890	0,9036
85^0	0,5376	0,5899	0,9113
90^0	0,5394	0,5902	0,9139

Примечания. 1. α – острый угол ромба ($\alpha \le 90^0$); 2. a – сторона ромба.

Таблица 3

Значения конформных радиусов и их отношения для равнобедренных треугольников

α	$\dot{r}$, h	$\bar{r}$, h	$\dot{r}/\bar{r}$
№ п/п	1	2	3
5^0	0,6239	5,8315	0,107
10^0	0,6102	2,9584	0,2063
15^0	0,5954	1,9952	0,2984
20^0	0,5793	1,5097	0,3837
25^0	0,5618	1,2151	0,4623
30^0	0,5427	1,0159	0,5342
35^0	0,5218	0,8712	0,5989
40^0	0,4987	0,7607	0,6556
45^0	0,4732	0,6727	0,7034
50^0	0,4449	0,6003	0,7411
55^0	0,4131	0,5395	0,7657
60^0	0,3774	0,487h	0,7748
65^0	0,3368	0,4407	0,7642
70^0	0,2902	0,3992	0,727
75^0	0,2362	0,3611	0,6541
80^0	0,1726	0,3252	0,5308
85^0	0,0960	0,2901	0,3309

Примечания. 1. α – равный угол при основании треугольника; 2. h – его высота.

Таблица 4

Значения конформных радиусов и их отношения для прямоугольных треугольников

α	$\dot{r}$, c	$\bar{r}$, c	$\dot{r}/\bar{r}$
№ п/п	1	2	3
5^0	0,0510	0,2710	0,1882
$7{,}5^0$	0,0737	0,2795	0,2637
10^0	0,0949	0,2868	0,3309
$12{,}5^0$	0,1145	0,2937	0,3899
15^0	0,1326	0,3001	0,4419
$17{,}5^0$	0,1492	0,3059	0,4877
20^0	0,1644	0,3111	0,5284
$22{,}5^0$	0,1781	0,3159	0,5638
25^0	0,1903	0,3203	0,5941
$27{,}5^0$	0,2012	0,3240	0,6210
30^0	0,2106	0,3272	0,6436
$32{,}5^0$	0,2185	0,3301	0,6619
35^0	0,2250	0,3323	0,6771
$37{,}5^0$	0,2301	0,3341	0,6887
40^0	0,2337	0,3353	0,6970
$42{,}5^0$	0,2359	0,3361	0,7019
45^0	0,2366	0,3363	0,7034

Примечания. 1. α – меньший угол при гипотенузе треугольника ($\alpha \le 45^0$);
2. c – его гипотенуза.

Для произвольных треугольников таблицу значений отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ не приводим из-за большого занимаемого ею объема, а приведем аппроксимирующую функцию, полученную с помощью программы «TableCurve_2D», построенную по значениям (всего 45), полученным по формулам (5), (7):

$$\dot{r}/\bar{r} = \frac{a + c\ln\alpha + e\ln\beta + g(\ln\alpha)^2 + i(\ln\beta)^2 + k\ln\alpha\ln\beta}{1 + b\ln\alpha + d\ln\beta + f(\ln\alpha)^2 + h(\ln\beta)^2 + j\ln\alpha\ln\beta}, \tag{11}$$

где a = –0,07119; b = –0,18777; c = 0,07191; d = –0,21962; e = 0,026978; f = 0,008523; g = –0,011417; h = 0,013928; i = –0,004845; j = 0,019253; k = –0,0021934; α и β – два меньших угла треугольника: $\alpha < 90^0$; $\beta < 90^0$ (рис. 5, б).

Значения углов α и β принимались от 10^0 до 80^0 через 10^0, а также вырожденных случаев 0^0 и 90^0, при которых величина $\dot{r}/\bar{r} \to 0$. Погрешность функции (11) не превышает 1,5%, ее график приведен на рис. 5, а.

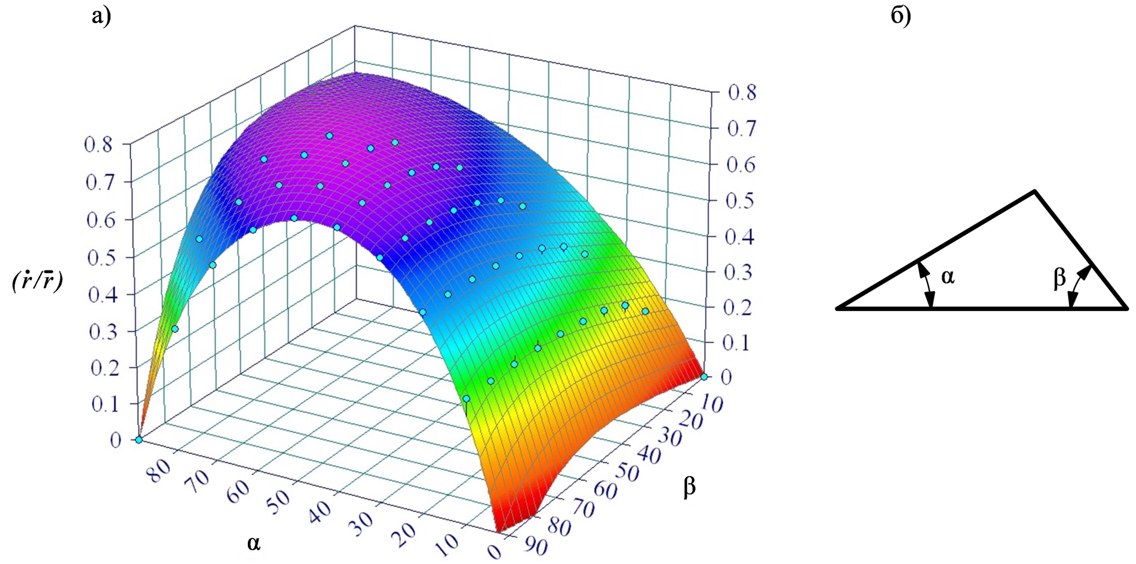


Рис. 5. Произвольные треугольники:
а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha; \beta)$; б) общий вид области

3. Определение максимального прогиба пластинок (проверка гипотезы). Для проверки выдвинутой гипотезы о возможности объединения одной функцией значений максимального прогиба от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки для круглых, правильных n-угольных, произвольных треугольных и ромбических жестко защемленных по контуру пластинок сведем в табл. 5 (колонка 2) известные в справочной литературе решения и решения, полученные МКЭ с использованием программного комплекса «SCAD_11.3» (с числом конечных элементов не менее 1000). А в колонку 1 – значения отношений конформных радиусов для рассматриваемых форм пластинок заимствованных из рассмотренных выше в п. 2 табл. 1–4 (колонки 3).

Значения максимального прогиба w_0 представим в общем виде зависимостью

$$w_0 = k_w \frac{qA^2}{D}, \tag{12}$$

где k_w – коэффициент пропорциональности (численное решение), зависящий от формы пластинки и ее граничных условий; A –площадь пластинки; q и D – то же, что и в выражении (2).

Таблица 5

Сопоставление известных значений максимального прогиба жестко защемленных по контуру пластинок и полученных с помощью МКЭ со значениями, найденными по аппроксимирующей функции (13)

Форма пластины	$\dot{r}/\bar{r}$	Известные точные значения и значения, полученные МКЭ		Значения по аппроксимирующей функции		Δ, %
		$10^3 k_w$	источник	$10^3 k_w$	по	
№ п/п	1	2	3	4	5	6
Пластинки в форме правильных фигур						
Круг	1	1,583	[3]	1,579	(13)	-0,27
16 - угольник	0,9988	1,568	[МКЭ]	1,573		0,33
10 - угольник	0,9951	1,548	[МКЭ]	1,556		0,53
8 - угольник	0,9903	1,518	[МКЭ]	1,535		1,12
6 - угольник	0,9762	1,480	[3]	1,478		-0,16
5 - угольник	0,9579	1,410	[3]	1,410		0,02
4 - угольник	0,9139	1,262	[3]	1,267		0,43
3 - угольник	0,7748	0,880	[3]	0,900		2,28
Пластинки в форме равнобедренных треугольников						
$\alpha = 80^0$	0,5308	0,418	[МКЭ]	0,428	(13)	2,44
$\alpha = 70^0$	0,7270	0,778	[МКЭ]	0,793		1,91
$\alpha = 60^0$	0,7748	0,880	[3]	0,900		2,28
$\alpha = 50^0$	0,7411	0,817	[МКЭ]	0,824		0,81
$\alpha = 45^0$	0,7034	0,738	[МКЭ]	0,743		0,66
$\alpha = 40^0$	0,6556	0,642	[МКЭ]	0,647		0,79
$\alpha = 30^0$	0,5342	0,432	[МКЭ]	0,434		0,37
$\alpha = 20^0$	0,3837	0,221	[МКЭ]	0,223		0,71
$\alpha = 10^0$	0,2063	0,058	[МКЭ]	0,057		-1,24
Пластинки в форме прямоугольных треугольников						
$\alpha = 45^0$	0,7034	0,738	[МКЭ]	0,743	(13)	0,66
$\alpha = 40^0$	0,6970	0,726	[МКЭ]	0,730		0,50
$\alpha = 30^0$	0,6436	0,620	[МКЭ]	0,624		0,66
$\alpha = 20^0$	0,5284	0,421	[МКЭ]	0,424		0,81
$\alpha = 10^0$	0,3309	0,164	[МКЭ]	0,163		-0,79
Ромбические пластинки						
$\alpha = 90^0$	0,9139	1,262	[3]	1,267	(13)	0,43
$\alpha = 80^0$	0,9036	1,224	[МКЭ]	1,237		1,03
$\alpha = 70^0$	0,8724	1,134	[МКЭ]	1,147		1,18
$\alpha = 60^0$	0,8199	1,022	[МКЭ]	1,009		-1,26
$\alpha = 50^0$	0,7457	0,850	[МКЭ]	0,834		-1,90
$\alpha = 40^0$	0,6487	0,647	[МКЭ]	0,634		-2,04
$\alpha = 30^0$	0,5277	0,428	[МКЭ]	0,423		-1,10
$\alpha = 20^0$	0,3807	0,224	[МКЭ]	0,219		-3,17

Примечания. 1. α – равный угол при основании для равнобедренного треугольника, для прямоугольного – меньший угол при гипотенузе, для ромба – острый угол; 2. Значения $\dot{r}/\bar{r}$ взяты из табл. 1–4. 3. Δ – разница между значениями в столбцах 2 и 4. 4. Значения прогиба представлены в общем виде (12).

На основании табличных данных (колонки 1, 2) отложим в координатной плоскости $k_w - (\dot{r}/\bar{r})$ значения максимального прогиба k_w для рассматриваемых пластинок (рис. 6).

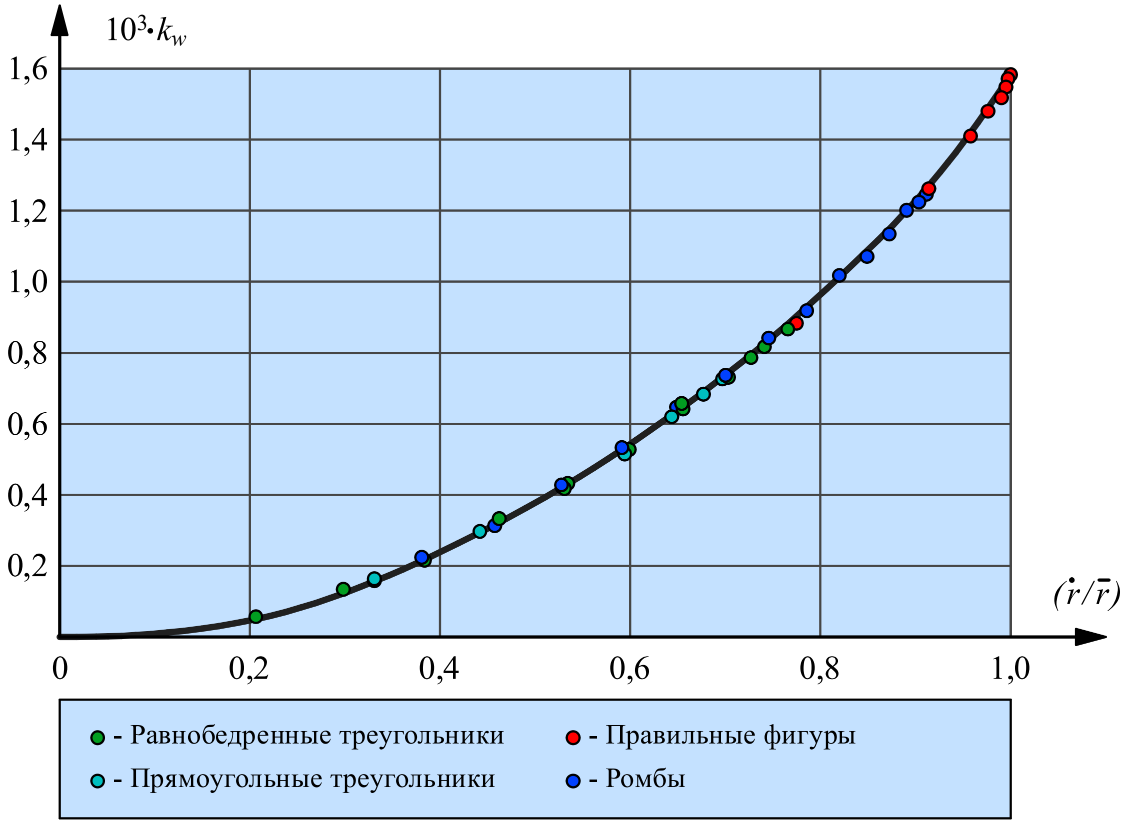


Рис. 6. Кривая $k_w - (\dot{r}/\bar{r})$ для жестко защемленных пластинок

Из рисунка видно, что все множество значений k_w для рассматриваемого множества форм пластинок вырождаются в одну кривую. Воспользуемся программой «TableCurve_2D» и получим аппроксимирующую функцию рационального вида «Rational Equations» с удержанием необходимого количества знаков в численных коэффициентах при аргументе:

$$k_w = \frac{-0{,}0044 + 1{,}5655(\dot{r}/\bar{r})^2 - 1{,}1923(\dot{r}/\bar{r})^4}{1 - 0{,}67712(\dot{r}/\bar{r})^2 - 1{,}1923(\dot{r}/\bar{r})^4}. \qquad (13)$$

Отклонение значений получаемых по функции (13), от точных и полученных МКЭ не превышает 3,2 % (см. табл. 5, колонки 4, 6).

Значения максимального прогиба для треугольных пластинок произвольной формы в работе не приводим из-за большого объема материала. Отметим лишь, что многочисленные примеры показали, что для таких пластинок значения k_w также сливаются с кривой, изображенной на рис. 6, с погрешностью, не превышающей 3,2 %, при этом величина отношения $\dot{r}/\bar{r}$ определялась по выражению (11).

Таким образом, выдвинутую в работе гипотезу о возможности объединения одной функцией значений максимального прогиба от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки для круглых, правильных n-угольных, произвольных треугольных и ромбических жестко защемленных по контуру пластинок можно считать теоретически подтвержденной. Ее экспериментальная проверка планируется в ближайшее время, а результаты будут опубликованы в последующих работах авторов.

Выводы

1. Значения максимального прогиба от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки для круглых, правильных n-угольных, произвольных треугольных и ромбических жестко защемленных по контуру пластинок равной площади, представленные как функции отношения внутреннего к внешнему конформных радиусов областей пластинок, вырождаются в одну кривую.

2. Жестко защемленные по контуру пластинки рассматриваемых форм равной площади, имеющие одинаковое значение отношения конформных радиусов, имеют и одинаковую величину максимального прогиба от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки.

Библиографический список

1. Полиа, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике [пер. с англ.] / Г. Полиа, Г. Сеге. – 2-е изд., стереотипное – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.
2. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в строительной механике. В 3 т. Т. 1. Теоретические основы изопериметрического метода / В.И. Коробко. – М.: Изд-во АСВ стран СНГ, 1997. – 390 с.
3. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 320 с.
4. Иванов, В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
5. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок / В.И. Коробко, А.Н. Хусточкин. – Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1994. – 148 с.

References

1. Polya, G. Isoperimetric inequalities in the mathematical physics [the lane with English] / G.Polya, G.Sege. – 2 edit., stereotypic – M: KomBook, 2006. – 336 p.
2. Korobko, V.I. Isoperimetric method in the building mechanics in 3 т. T. 1. Theoretical bases of an isoperimetric method / V.I.Korobko. – M: Publishing house ASV of the CIS countries, 1997. – 390 p.
3. Korobko, A.V. Geometrical modeling of area by form in the two-dimensional problems of theory elasticity / A.V.Korobko. – M: Publishing house ASV, 1999. – 320 p.
4. Ivanov V.I. Conformal displays and their appendices / V.I. Ivanov, V.Ju. Popov. – M: Editorial URSS, 2002. – 324 p.
5. Korobko, V.I. Isoperimetric method in problems of stability of plates / V.I. Korobko, A.N. Hustochkin. – Rostov-on-Don: Publishing house of the North Caucasian center of science of the higher school, 1994. – 148 p.

Ключевые слова: пластинки, жесткое защемление, поперечный изгиб, равномерно распределенная нагрузка, максимальный прогиб, отношение конформных радиусов, геометрические методы.

Key words: plates, rigid restraint, lateral bending, continuous load, maximum deflection, ratio of conformal, radiuses, geometrical methods.

УДК 624.04+624.6

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики В.С. Сафронов
Аспирант кафедры строительной механики А.В. Антипов
Россия, г. Воронеж, тел. 8(4732)37-97-36;
e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru

Voronezh Sate University of Architecture and Civil Engineering
Dr of Tech. Science, professor. of the department of Structural Mechanics
V.S. Safronov
Post-graduate student of Structural Mechanics
A.V.Antipov
Russia, Voronezh, tel. 8(4732)37-97-36;
e-mail: antipov-andrey-1708@yandex.ru

В.С. Сафронов, А.В. Антипов

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КОРОБЧАТОГО ПРОЛЕТНОГО СТРОЕНИЯ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА

Рассматриваются различные пространственные конечноэлементные расчетные схемы неразрезных металлических пролетных строений с тонкостенными коробчатыми несущими балками, которые в настоящее время широко используются в мостостроении. Изучаются особенности их реализации для исследования НДС с помощью современных вычислительных комплексов. Результаты пространственных расчетов на действие временных нагрузок сопоставляются с данными натурных испытаний вновь построенного автодорожного моста.

V.S. Safronov, A.V. Antipov

PILOT - DESIGN INVESTIGATION OF DEFLECTED MODE OF ROAD METAL BOX SPAN

Various dimensional final-element design models of continuous metal spans with shallow box supporting girders, which are widely used in bridge building today, are under consideration. Peculiarities of their implementation for deflected mode investigation with the help of modern computer systems are explored. The results of spatial live loads effect calculations are compared with full-scale test data of newly built road bridge.

Конструктивные схемы неразрезных металлических пролетных строений с тонкостенными коробчатыми несущими балками разработаны несколько десятилетий назад [1], однако их применение в проектной и инженерной практике ограничивалось отдельными сооружениями. В последние годы количество проектируемых и строящихся мостовых сооружений с такими пролетными строениями резко возросло благодаря экономичности, отлаженным технологиям и ограниченным срокам возведения. Этому также способствует появление основанных на использовании метода конечного элемента программных комплексов, которые быстро осваиваются для проведения достаточно сложных пространственных статических и динамических расчетов. При этом используются различные варианты расчетных схем [2].

Для оценки адекватности описания этими моделями действительного напряженно деформированного состояния при действии постоянных и временных нагрузок необходимы расчетно-экспериментальные исследования. В настоящей работе представлены результаты такого исследования на вновь построенном объекте, на котором были проведены натурные статические испытания.

В качестве объекта исследования выбрана русловая часть вновь построенного моста через р. Москва (рис. 1) на подъезде к г.Жуковский от а/д М-5 "УРАЛ"» в Московской обл.

Рис. 1. Общий вид руслового пролетного строения моста

Пролетное строение русловой части моста, запроектированное проектным институтом ЗАО «Институт «Гипростроймост СПб», г. Санкт-Петербург, выполнено неразрезным цельнометаллическим с ортотропной плитой проезжей части. Металлическое пролетное строение выполнено по схеме 86,5+145+86,5м и состоит из двух коробчатых балок, каждая из которых образована двумя вертикальными сплошностенчатыми балками, соединенными нижней ребристой плитой. По верху главные балки объединены металлической ортотропной плитой, состоящей из покрывающего листа и системы поперечных балок и стрингеров коробчатого сечения. На рис. 2 показано поперечное сечение пролетного строения русловой части рассматриваемого моста с указанием размеров конструктивных элементов и состава слоев дорожного покрытия на проезжей части моста и служебных проходах. Опорные части главных балок на переходных и промежуточных опорах русловой части моста шаровые сегментные. Схема расположения опорных частей показана на рис. 3. Главные балки по длине пролетного строения имеют переменное поперечное сечение. Учет изменения жесткости коробчатых балок вдоль пролетного строения выполнен путем введения в КЭ - модель 15 типов сечений (см. рис. 4 и табл. 1). Шаг поперечных ребер ортотропной плиты и вертикальных связей между главными балками составляет 4,25м. Горизонтальные связи по нижним поясам главных коробчатых балок не предусмотрены. На опорах установлены домкратные балки. Элементы пролетного строения выполнены из стали 10ХСНД с расчетным сопротивлением 350МПа.

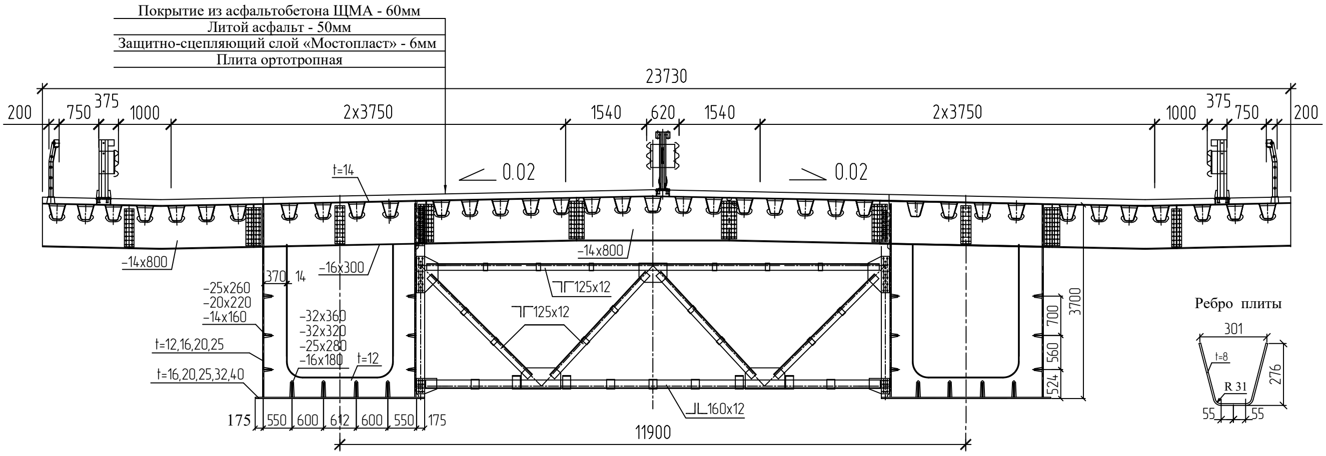


Рис. 2. Поперечное сечение пролётного строения русловой части рассматриваемого моста

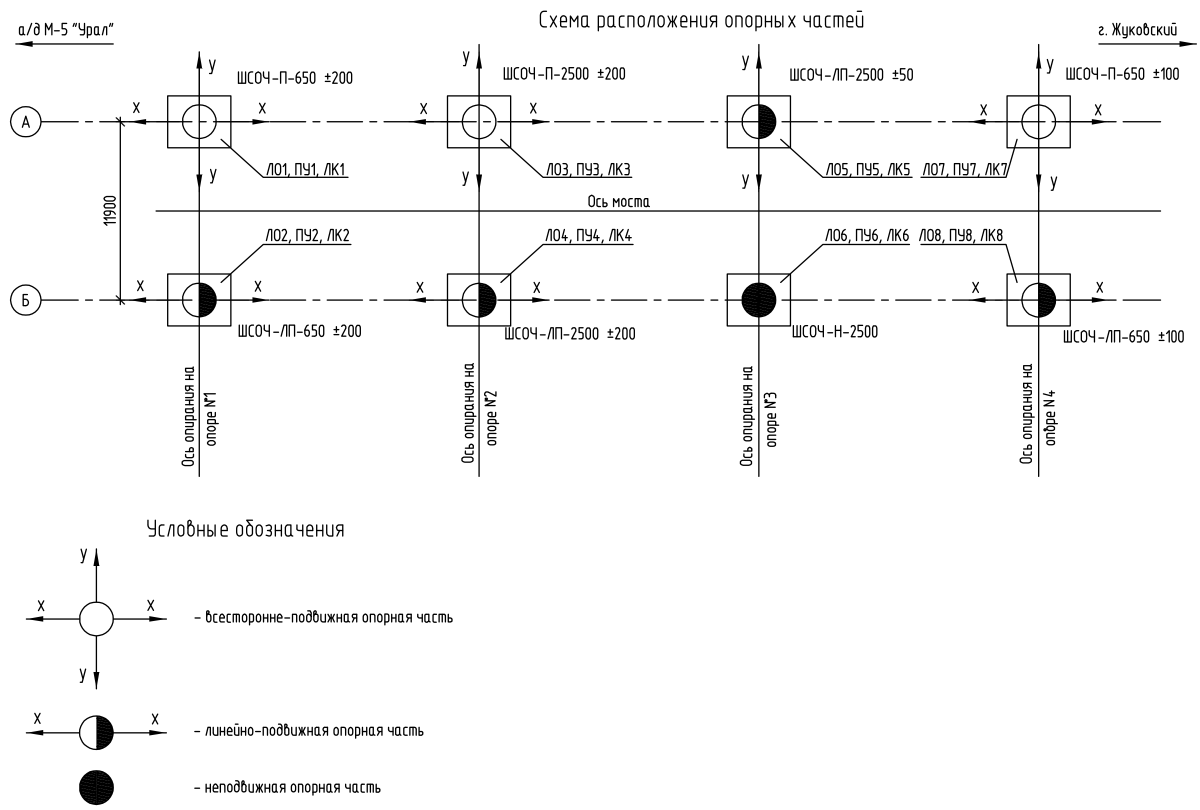


Рис. 3. Схема расположения ШСОЧ мостового сооружения

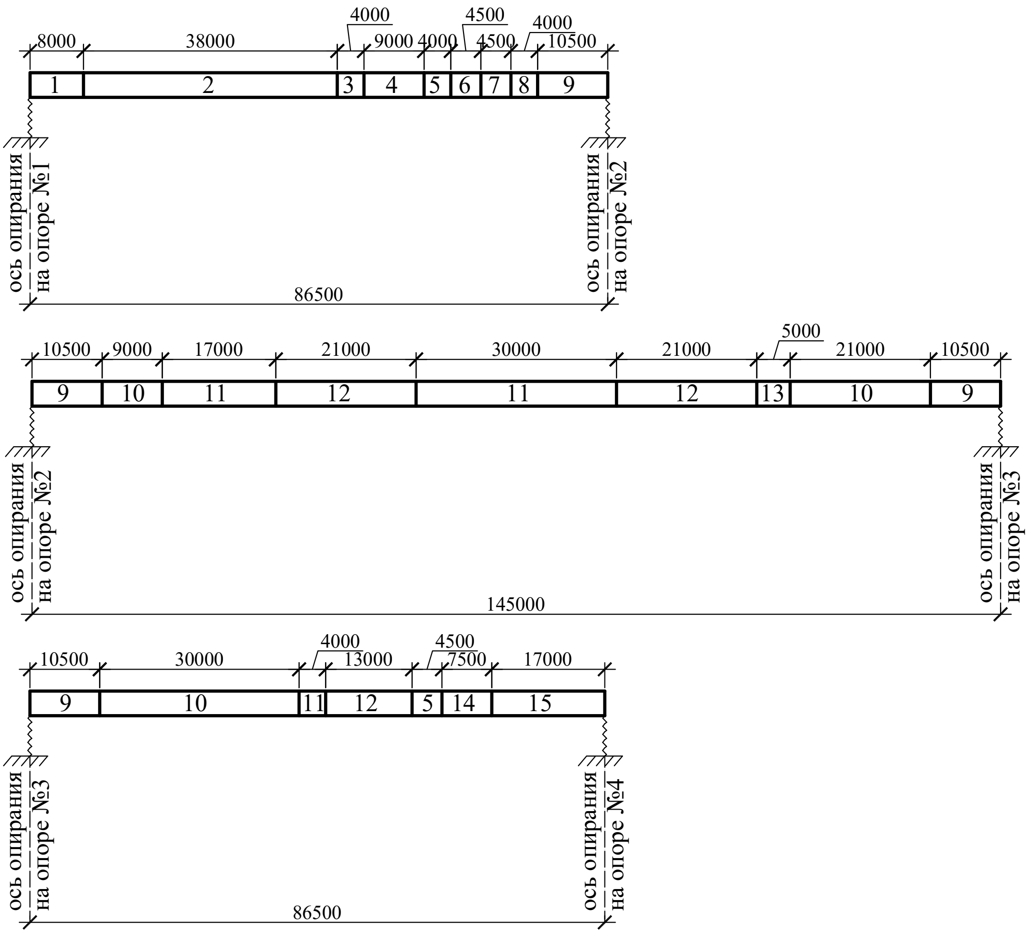


Рис. 4. Схема дискретизации коробчатых балок вдоль пролетного строения по типам сечений

Таблица 1

Состав сечений коробчатых главных балок

Тип сечения	Толщина стенок, мм	Толщина нижнего пояса, мм	Ребра стенок, мм	Ребра нижнего пояса, мм
1	12	20	14×160	16×180
2	12	16	14×160	16×180
3	12	16	20×220	16×180
4	12	20	20×220	25×280
5	16	25	20×220	25×280
6	20	25	20×220	25×280
7	20	32	20×220	32×360
8	25	32	25×260	32×360
9	25	40	25×260	32×360
10	25	32	25×260	32×320
11	20	32	20×220	32×320
12	20	25	20×220	25×280
13	20	32	20×220	32×320
14	16	20	20×220	25×280
15	16	20	14×160	16×180

Русловая часть рассматриваемого мостового сооружения аппроксимировалась двумя пространственными КЭ - моделями, которые схематично представлены на рис. 5, 6. При этом использовались следующие типы конечных элементов (КЭ):

- пространственный (3D) стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций;
- плоский прямоугольный оболочечный КЭ;
- специальные конечные элементы: упругий Link элемент, упругая опора и элемент жесткой связи Rigid.

Пространственный стержневой КЭ представляет собой прямолинейный двухузловой элемент с 12 степенями свободы (СС), работающий на растяжение-сжатие, кручение, поперечный сдвиг и изгиб. Жесткие вставки, указанные в свойствах элемента, позволяют сдвигать линию центров тяжести (гибкая часть КЭ) относительно линии узлов.

Плоский оболочечный КЭ с 24 СС является комбинацией конечных элементов плоского (мембранного) и изгибного напряженных состояний. Этот элемент воспринимает мембранные, сдвиговые, поперечные и изгибные нагрузки.

Поскольку в узлах стержневого и плоского оболочечного КЭ одинаковый набор СС, то возможно их совместное использование в одной КЭ - модели.

Упругий Link элемент представляет собой связь двух СС заданной жесткостью. Используется для моделирования упругих свойств конструкции, которые не являются производными от ее геометрических свойств и по этой причине не могут быть моделированы обычными конечными элементами.

Элемент Rigid создает жесткую связь между ведущим узлом и одним или несколькими другими узлами.

Упругая опора представляет собой одноузловой КЭ для задания конечной жёсткости по каждому из шести направлений.

В 1-ой КЭ - модели стенки и пояса коробчатых главных балок, а также плита проезжей части моделировались прямоугольными плоскими оболочечными КЭ. Ортотропия этих элементов учитывалась путем использования комбинированной системы, состоящей из плоских оболочечных КЭ, подпертых стержневыми КЭ ребер. Для прикрепления стержня ребра с необходимым эксцентриситетом к узлам на срединной поверхности плоской оболочки использовались жесткие вставки.

Во 2-ой КЭ - модели металлические главные коробчатые балки и поперечные связи между ними моделировались стержневыми КЭ, а ортотропная плита проезжей части – плоскими оболочечными КЭ. Элементы плиты проезжей части связывались со стержневыми КЭ главных балок элементами жестких связей. Во 2-ой КЭ - модели поперечные ребра коробчатых балок не учитывались.

Шаровые сферические опорные части моделировались упругими элементами в соответствии со смонтированными на мосту ограничениями на перемещения точек прикрепления пролетного строения к опорам.

В обоих КЭ - моделях не учитывалась деформативность массивных опор моста, поэтому КЭ упругой опоры задавались абсолютно жесткими по всем направлениям.

Дискретизация стенок и поясов коробчатых балок и плиты проезжей части прямоугольными плоскими оболочечными КЭ выполнена по узлам пересечения продольных и поперечных ребер.

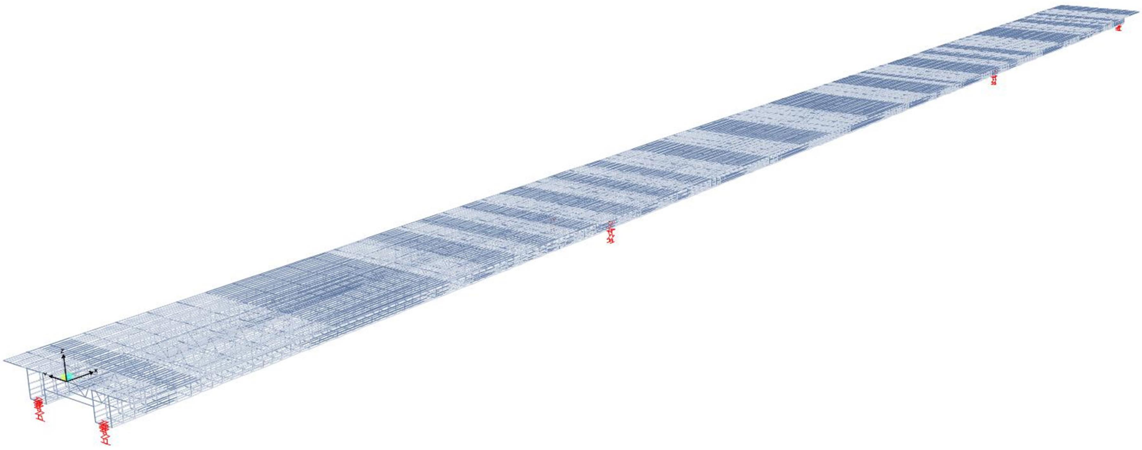
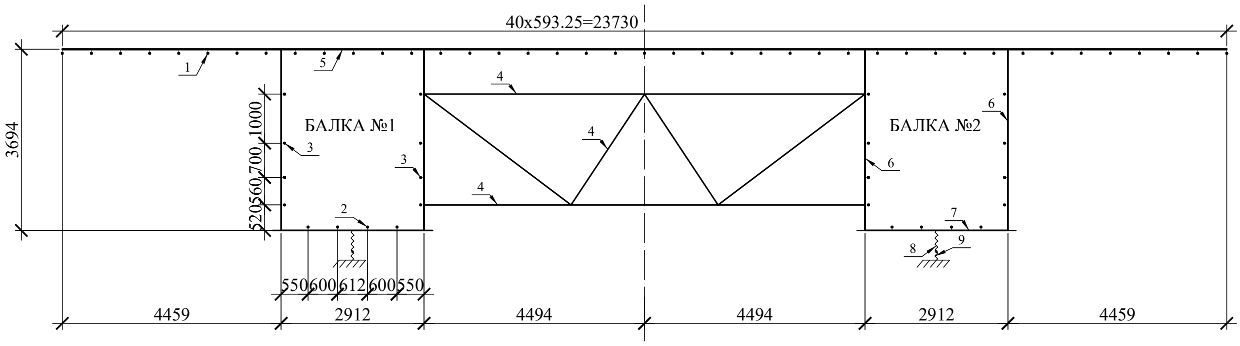


Рис. 5. Пространственная КЭ модель пролетного строения моста

Модель №1



Модель №2

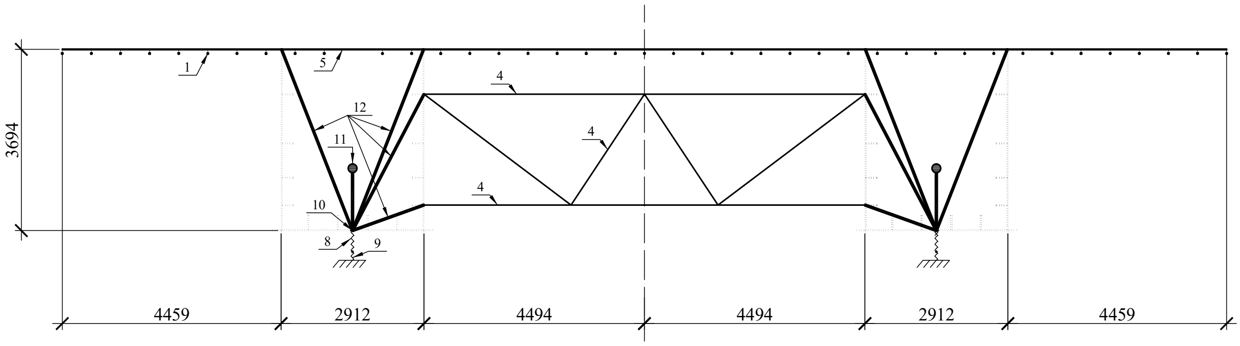


Рис. 6. Схематичное представление (поперечные разрезы) КЭ схем мостового сооружения (стержневые КЭ продольных ребер: 1 – плиты проезжей части, 2 – нижнего пояса балок, 3 – стенок балок; 4 – стержневые КЭ поперечных связей между балками, 5,6,7 – оболочечные КЭ, 8 – упругие элементы, 9 – упругая опора, 10 – стержневые КЭ главных балок, 11 – ценры тяжести (гибкая часть) стержневых КЭ, 12 – КЭ жесткой связи)

Испытания моста выполнялись путем установки на пролетные строения испытательной нагрузки и измерения перемещений и деформаций в характерных сечениях и волокнах несущих элементов. В качестве испытательной нагрузки использовались восемь нагруженных самосвалов VOLVO-БЦМ-52/FM-400 (рис. 7) с массами автомобилей от 42,15 т до 44,5 т.

Рис. 7. Испытательная нагрузка

Для расчета выбраны две схемы загружения пролетного строения моста, показанные на рис. 8. В первой схеме четыре автомобиля устанавливались посередине среднего пролета двумя колоннами по два автомобиля в каждой с максимальным смещением к левому ограждению. Во второй схеме загружались крайний и средний пролеты, посередине каждого пролета устанавливались по четыре автомобиля двумя колоннами с максимальным смещением к левому ограждению. Соответственно для первой схемы расчетным является поперечное сечение в середине среднего пролета моста, для второй – опорное сечение пролетного строения.

Схема загружения №1

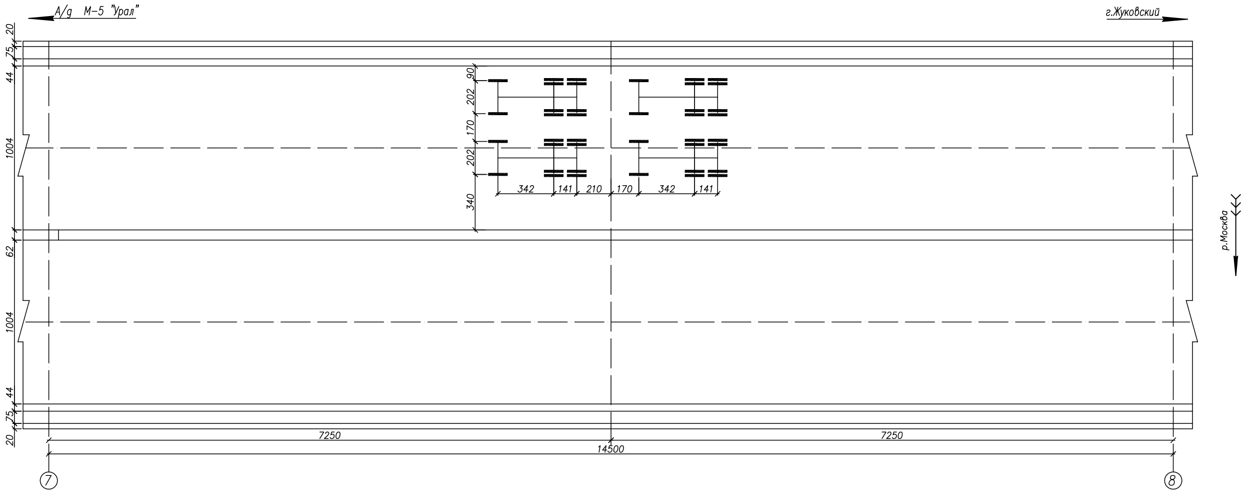


Схема загружения №2

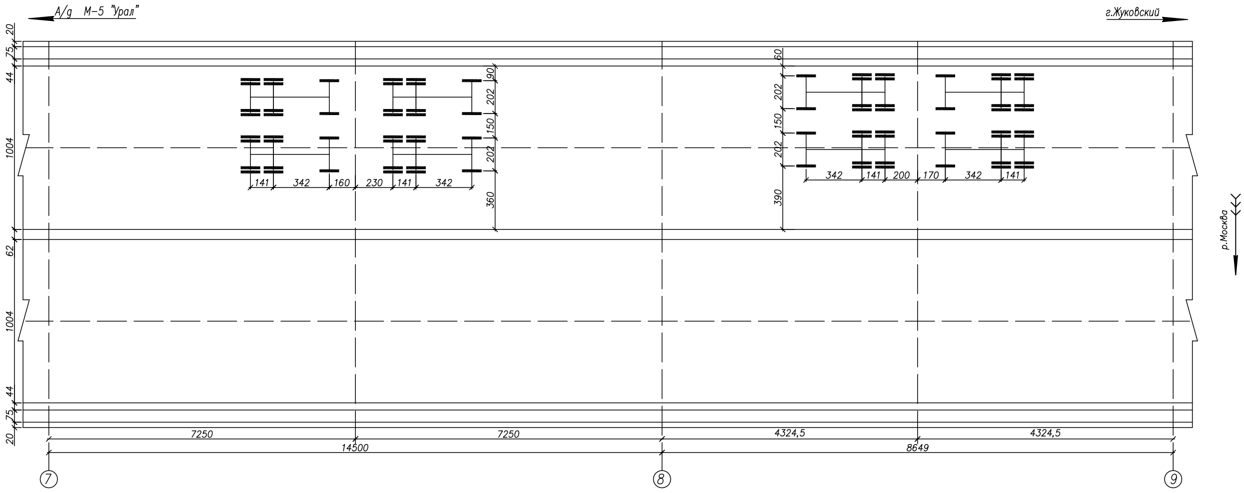


Рис. 8. Схемы загружения пролетного строения моста испытательной нагрузкой

На рис. 9 представлены графики экспериментальных и расчетных прогибов пролетного строения в сечении посередине среднего пролета от действия испытательной нагрузки. На рис. 10 показаны полученные расчетом по 1-ой КЭ - модели поля нормальных напряжений в расчетных сечениях пролетного строения.

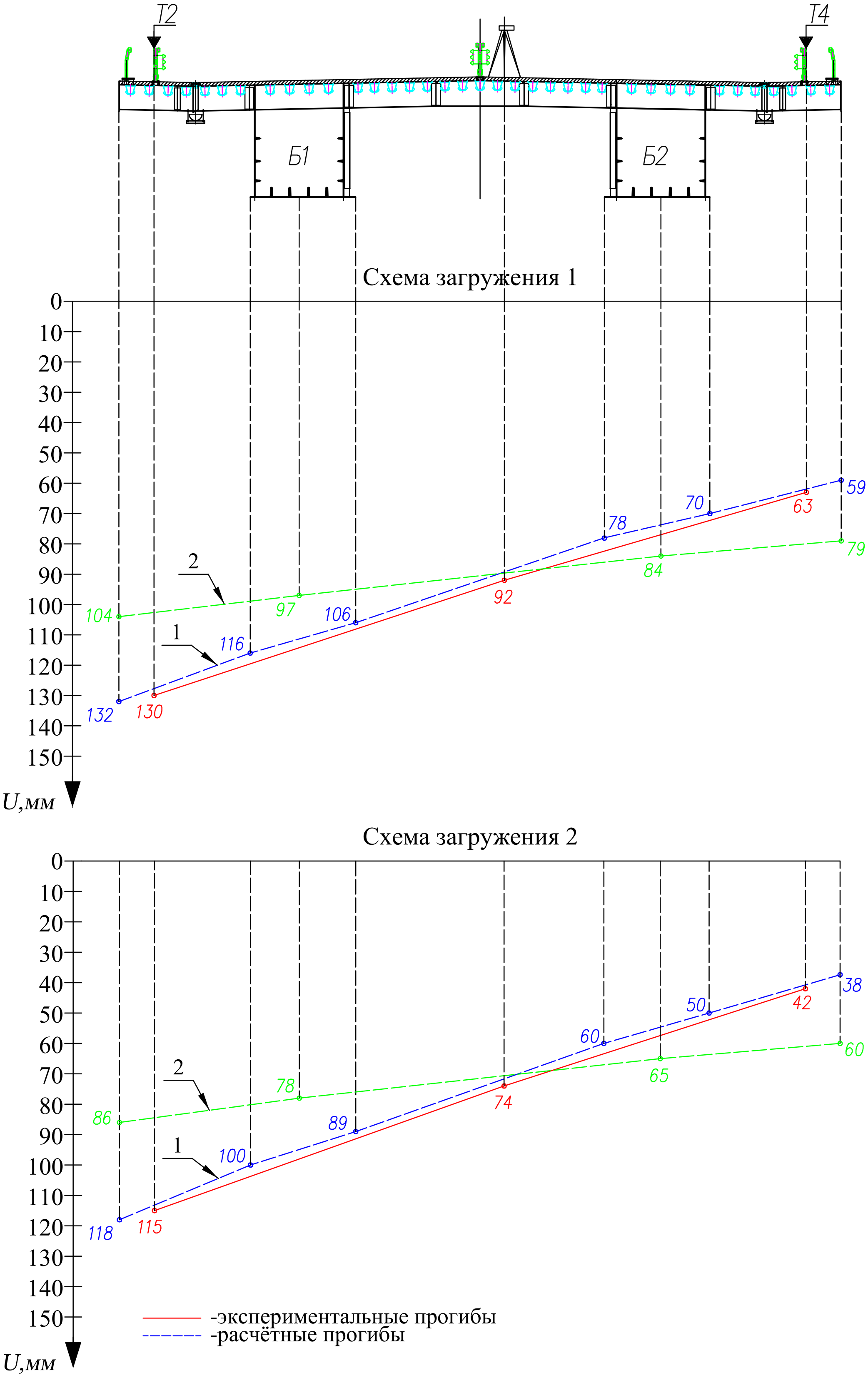
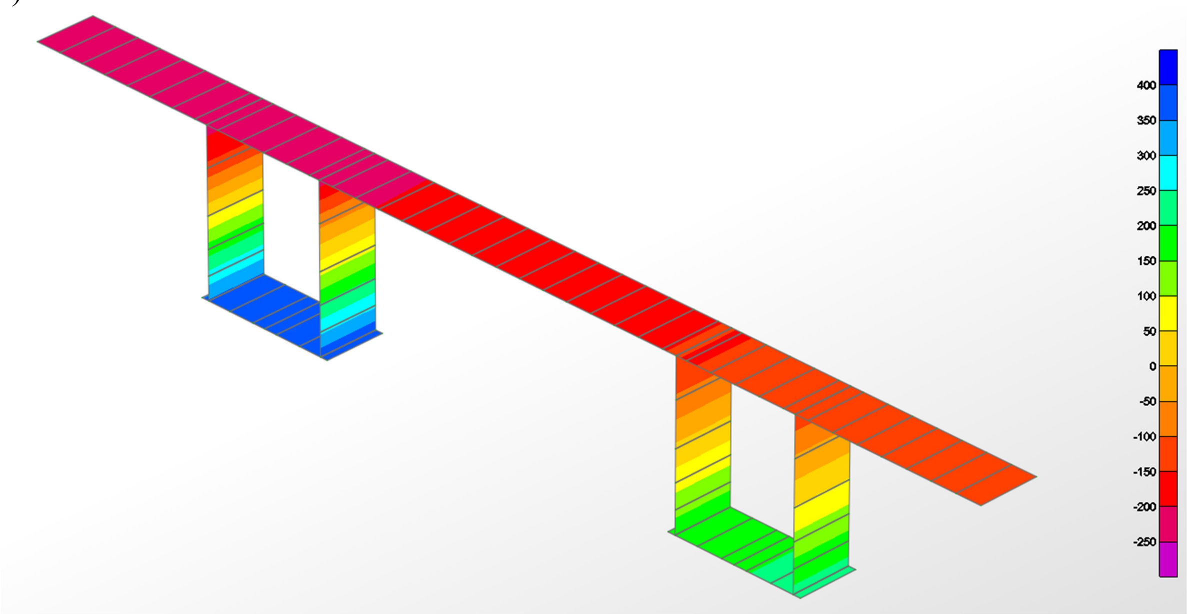


Рис. 9. Графики экспериментальных и расчетных прогибов пролетного строения в сечении посередине среднего пролета от действия испытательной нагрузки (1 – по модели №1, 2 – по модели №2)

а)



б)

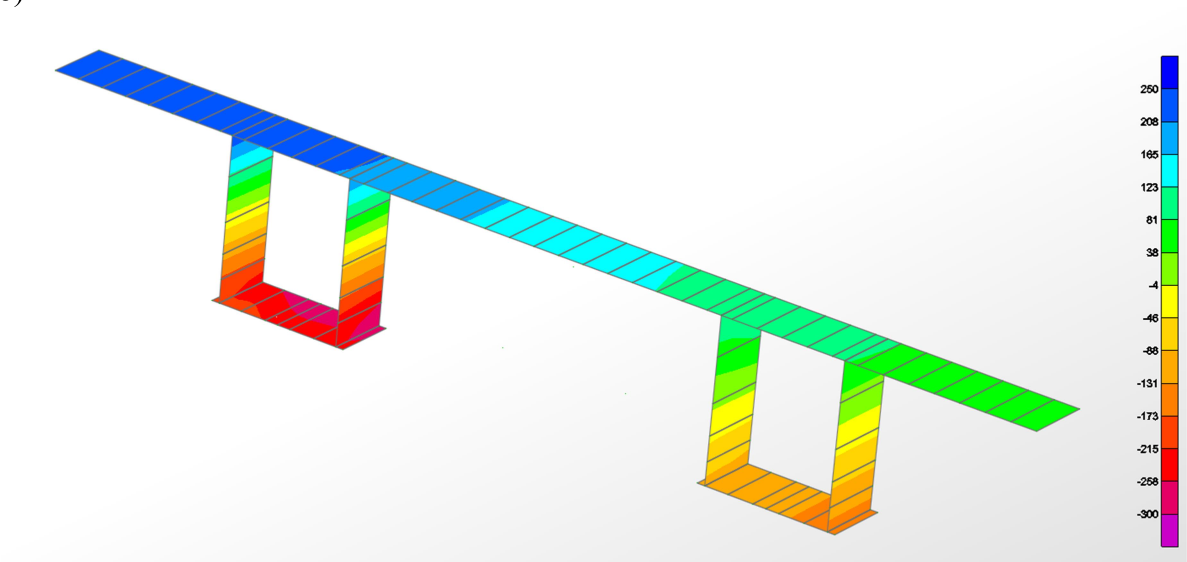


Рис. 10. Поля нормальных напряжений (кгс/см^2) в расчетных сечениях пролетного строения моста: а) сечение посередине среднего пролета, б) приопорное сечение

В табл. 2 приведены экспериментальные и расчетные напряжения в поясах коробчатых балок в рассматриваемых сечениях пролетного строения моста. Напряжения по 1-ой КЭ - модели вычислялись в местах установки деформометров во время испытаний. Напряжения в коробчатых балках 2-ой КЭ - модели вычислялись по полученным в результате расчета усилиям в стержневых КЭ. Геометрические характеристики поперечных сечений стержневых КЭ главных балок вычислялись без введения редукционных коэффициентов, учитывающих неравномерность распределения нормальных напряжений по ширине поясов коробки. При этом крутильная жесткость коробчатых балок вычислялась как для замкнутого контура, а изгибная и продольная – как для открытого контура.

Таблица 2

Значения максимальных нормальных напряжений (кгс/см^2) в нижнем поясе стальной коробчатой балки и в ортотропной плите проезжей части (верхнем поясе балки)

Расчетное сечение, координата	Номер главной балки		Нагрузка по схеме 1			Нагрузка по схеме 2		
			Э	М1	М2	Э	М1	М2
Сечение №1, x=159 м	Б1	н.п.	+393	+385	+336	+342	+350	+305
		в.п.	-162	-200	-200	-162	-176	-185
	Б2	н.п.	+162	+180	+236	+126	+150	+202
		в.п.	-126	-160	-160	-111	-140	-138
Сечение №2, x=231,5 м	Б1	н.п.	-147	-170	-161	-267	-260	-249
		в.п.	+69	+108	+110	+90	+180	+175
	Б2	н.п.	-48	-68	-117	-105	-100	-178
		в.п.	+57	+83	+94	+90	+120	+139

Примечание: сечение №1 – середина среднего пролета, сечение №2 – приопорное сечение, н.п. – нижний пояс балки, в.п. – верхний пояс балки, Э – экспериментальные напряжения, М1 – расчетные напряжения по КЭ - модели №1, М2 – расчетные напряжения по КЭ модели №2

Выводы

1. Сопоставление результатов расчетных и экспериментальных прогибов главных балок моста для рассмотренных моделей пролетного строения показывает, что наиболее близкие к полученным при испытаниях результаты дает пластинчатая расчетная схема (модель №1). Пластинчато-стержневая расчетная схема (модель №2) приводит к существенным погрешностям.
2. Сравнение расчетных напряжений в характерных сечениях главных балок с вычисленными по измеренным при натурных статических испытаниях продольным деформациям также приводит к преимуществам пластинчатой модели.
3. Затраты ресурсов ЭВМ на реализацию обеих расчетных схем не выявили существенной разницы.

Библиографический список

1. Ильясевич, С.А. Металлические коробчатые мосты. - М.: Изд. «Транспорт», 1970. – 280 с.
2. Владимирский, С.Р. Металлические пролетные строения мостов с ортотропными плитами: учебн. - пособие. Издание второе, переработанное и дополненное. /С.Р. Владимирский. СПб. Изд. ДНК, 2006. – 200 с.
3. Потапкин, А.А. Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. / А.А. Потапкин. - М.: Транспорт, 1984. – 200 с.
4. Беркли, Справочное руководство SAP2000. Калифорния, США: 2009. – 470 с.

References

1. Iljasevich S.A. Metal box-shaped bridges. M: Publishing house "Transport", 1970. – 280p.
2. Vladimirsky S.R. Metal spans of bridge with orthotropic plates / The manual. The second edition, processed and added. St.-Petersburg: DNA Publishing house, 2006y. – 200p.
3. Potapkin A.A. Construction of steel bridges subject to plastic deformations. M: Transport, 1984y.. – 200p.
4. CSI analysis reference manual for SAP2000. Berkeley, California, USA: 2009y. – 470p.

Ключевые слова: металлическое пролетное строение моста, балка коробчатого сечения, напряженно-деформированное состояние, временная нагрузка, конечноэлементная модель, пространственный расчет

The keywords: metal bridge span, box section girders, deflected mode, live load, final element model, dimensional design.

УДК 624.046:624.21

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики
Д.М.Шапиро
Аспирант кафедры строительной механики
А.П.Тютин
Россия, г. Воронеж, тел.8(4732)71-52-30
e-mail: davshap@mail.ru

The Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
Dr if Tehc. Science , prof. of the department of Structural Mechanics
D.M.Shapiro
Post – graduate student of department of Structural Mechanics
A.P.Tjutin
Russia, Voronezh, ph. 8 (4732) 71-52-30
e-mail: davshap@mail.ru

Д.М.Шапиро, А.П.Тютин

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЁТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТНО-РЕБРИСТЫХ ПРОЛЁТНЫХ СТРОЕНИЙ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

Разработан метод и обобщённый алгоритм деформационного расчёта железобетонных пролётных строений с обычной и предварительно напряжённой арматурой. Особенностью разработанного метода расчёта является использование геометрических характеристик, отражающих нелинейное деформирование сечений балок. Приводится пример расчётов.

D.M.Shapiro, A.P.Tjutin

TRIDIMENSIONAL COMPUTATION OF FERROCONCRETE SLAB – T-BEAM BRIDGE SPAN

Method and generalized algorithm of deformation computation of ferroconcrete span with ordinary and prestressed reinforcement is developed. Application of geometric characterization, expressing nonlinear of deformed beam sections is the peculiarity of design method. There is given an example of computation.

На кафедре строительной механики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета начиная с 2005 г. ведутся исследования, разрабатываются методы и алгоритмы расчётов на основе нелинейной деформационной модели железобетонных плитно-ребристых мостовых пролётных строений мостов с обычной и предварительно напряжённой арматурой [1, 2]. Настоящая статья является продолжением и развитием исследований этого направления, выполненных в диссертациях [3, 4].

Расчёты плитно-ребристых железобетонных пролётных строений состоят из двух групп процедур:

-деформационного нелинейного расчёта, описывающего развитие напряжённо-деформированного состояния балок с обычной или высокопрочной арматурой;

-пространственного расчёта пролётных строений средствами МКЭ с поэтапным (ступенчатым) приложением временной нагрузки.

К теме настоящей статьи относятся следующие группы расчётов:

-по прочности нормальных сечений балок с обычной и предварительно напряжённой арматурой;

-по образованию трещин, нормальных к продольной оси, в балках с предварительно напряжённой арматурой.

Теоретической основой полученных решений и разработанных алгоритмов являются кинематические условия гипотезы плоских сечений, допущение о деформировании бетона при растяжении без сопротивления в расчётах по прочности; трёхлинейная диаграмма состояния бетона при сжатии и (в расчётах по образованию трещин) при растяжении, билинейная (трёхлинейная) диаграмма состояния обычной (высокопрочной) арматуры в соответствии с рис. 1,а, б, в, на которых все обозначенные параметры относительных деформаций и напряжений являются нормируемыми величинами:

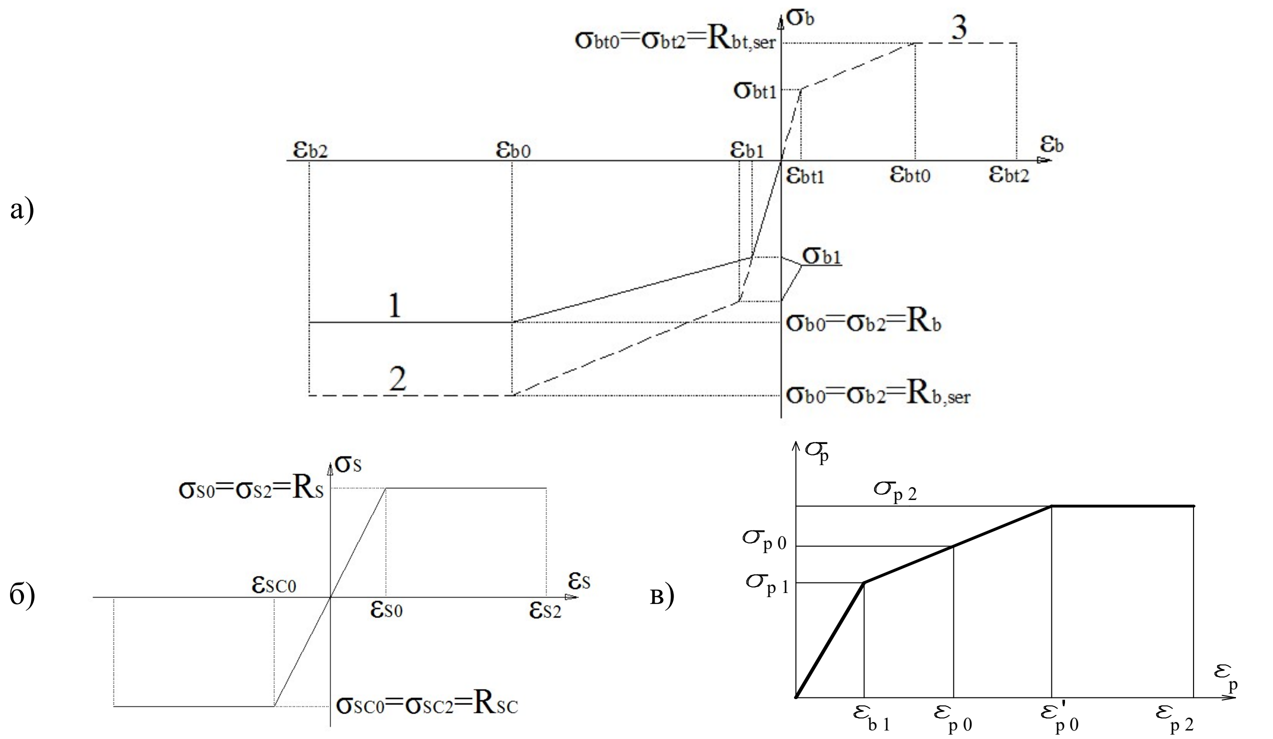


Рис. 1. Диаграммы зависимостей $\varepsilon=f(\sigma)$: *а*− бетона при сжатии для расчётов по предельным состояниям первой (1) и второй (2) группы и (в расчётах по образованию трещин) при растяжении (3), *б*−стержневой арматуры, *в*−высокопрочной арматуры

$$/\sigma_{b1}/=0{,}6R_b,\ /\sigma_{b0}/=R_b,\ \varepsilon_{b1}=\sigma_{b1}/E_b,\ \varepsilon_{b0}=-0{,}002,\ \varepsilon_{b2}=-0{,}0035;$$

$$\sigma_{bt1}=0{,}6R_{bt.ser},\ \sigma_{bt0}=R_{bt.ser},\ \varepsilon_{bt1}=\sigma_{bt1}/E_b,\ \varepsilon_{bt0}=0{,}0001,\ \varepsilon_{bt2}=0{,}00015; \qquad (1)$$

$$\sigma_{s0}=R_s,\ /\sigma_{sc0}/=R_{sc},\ \varepsilon_{s0}=\sigma_{s0}/E_s,\ \varepsilon_{sc0}=\sigma_{sc0}/E_s,\ \varepsilon_{s2}=0{,}025; \qquad (2)$$

$$\sigma_{p1}=0{,}9R_p,\ \sigma_{p0}=R_p,\ \sigma_{p2}=1{,}1R_p;$$

$$\varepsilon_{p1}=\sigma_{p1}/E_p,\ \varepsilon_{p0}=R_p\ /E_p+0{,}002,\ \varepsilon'_{p0}=1.1R_p\ /E_p+0{,}004,\ \varepsilon_{p2}=0{,}015, \qquad (3)$$

где E_b, R_b, R_{bt} – начальный модуль деформации бетона при сжатии и растяжении, расчётные сопротивления при сжатии и растяжении бетона, $R_s= R_{sc}$, R_p, E_s, E_p – расчётные сопротивления и модули деформации обычной и предварительно напряжённой арматуры. В расчётах по образованию поперечных трещин R_b заменяется на более высокое расчётное сопротивление $R_{b.ser}$ [2] или $R_{b.mc1}$ [5].

Задача о распределении напряжений и деформаций в сечении изгибаемых железобетонных балок решается как обратная. В качестве независимого переменного принимается относительная деформация $\varepsilon_{b,z=x}$ бетона сжатой грани сечения (рис. 2, *в*, *г*), где x – высота сжатой зоны бетона, z – координата, отсчитываемая от нейтральной оси, с положительным направлением в сторону сжатой грани сечения. В соответствии с используемой в расчётах гипотезой плоских сечений распределение относительных деформаций в бетоне сжатой зоны, в растянутой и сжатой арматуре принимается линейным: $\{\varepsilon_{bz}\ \varepsilon_s\ \varepsilon_{sc}\}=(\varepsilon_{b,z=x}/x)\times\{z\ x–h_0\ x–a'_s\}$, а деформация предварительно напряжённой арматуры определяется по формуле $\varepsilon_p=\sigma_{pн}/E_p+\varepsilon_{b,z=x}(x–h_0)/x$, где $\sigma_{pн}$ – предварительное напряжение в арматуре с учётом потерь. Это позволяет построить (описать аналитически) множество прямых $\varepsilon=f(z)$, для каждой из которых напряжения σ_b, σ_s, σ_{sc}, σ_p, соответствующие указанным выше деформациям, определяются при помощи соотношений в соответствии с диаграммами на рис. 1, *а*, *б*, *в*.

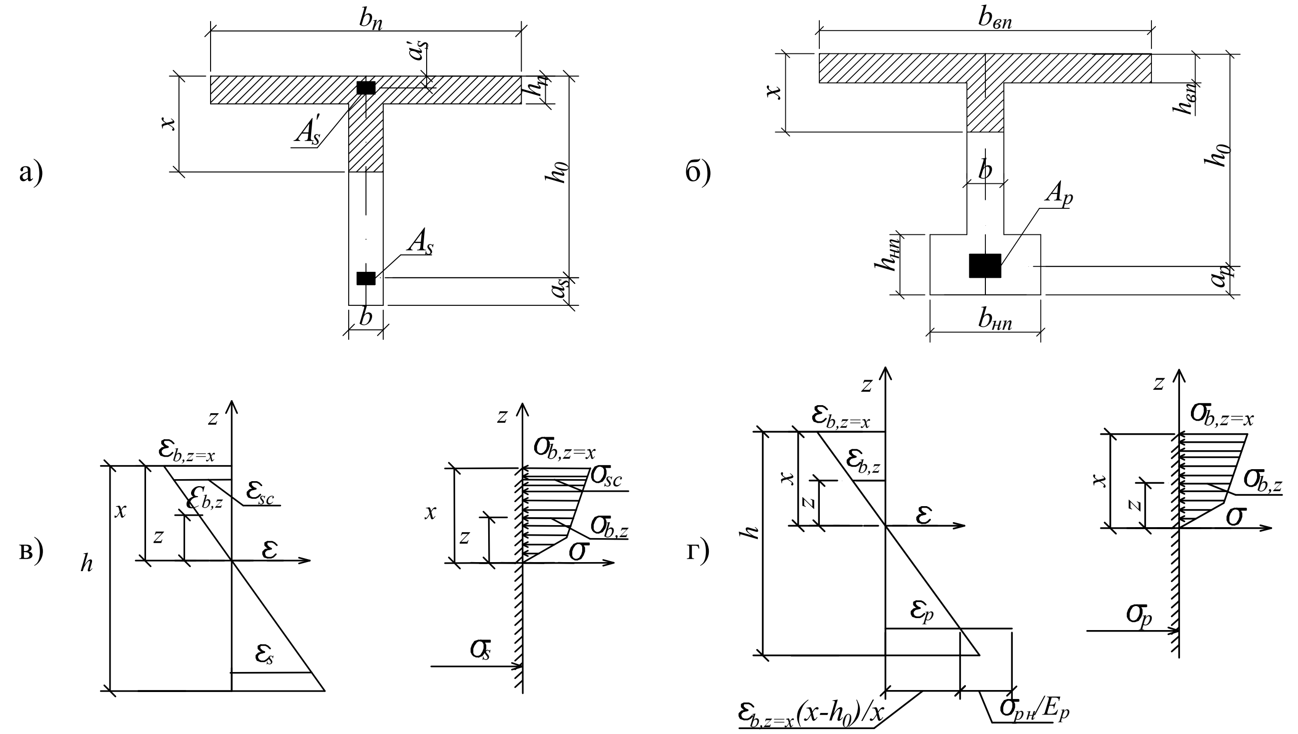


Рис. 2. Схемы к деформационному расчёту по прочности изгибаемых железобетонных балок с обычной и предварительно напряжённой арматурой: *а* – поперечное сечение балки с обычной арматурой, *б* – поперечное сечение балки с предварительно напряжённой арматурой; *в* – эпюры распределения деформаций и напряжений по высоте сечения балки с обычной арматурой; *г* – эпюры распределения деформаций и напряжений по высоте сечения балки с предварительно напряжённой арматурой

Равнодействующие напряжений в сжатой зоне бетона (F_b), в обычной растянутой и сжатой арматуре (F_s, F_{sc}), в предварительно напряжённой арматуре (F_p) определяются по формулам:

$$F_b=\Sigma\int\sigma_b dA, \qquad F_s=\sigma_s A_s,\ F_{sc}=\sigma_{sc}A'_s, \qquad F_p=\sigma_p A_p, \tag{4}$$

где A, dA – площадь бетона сжатой части сечения и её элементарный фрагмент, A_s, A_p, A'_s – площади сечения растянутой (обычной, предварительно напряжённой) и сжатой арматуры, $h_0=h-a_s$, $h_0=h-a_p$,– расчётная высота сечения, h – полная высота сечения, a_s, a_p – расстояние от нижней грани сечения до центра тяжести обычной или предварительно напряжённой арматуры.

В решаемых задачах действующей нагрузкой является изгибающий момент, внешняя продольная сила отсутствует. В балках с обычным армированием из множества прямых $\varepsilon=f(z)$ действительной (расчётной) является та, для которой равнодействующая

$$F=F_b+F_s+F_{sc}=0; \tag{5}$$

в балках с предварительно напряжённой арматурой −

$$F=F_b+F_p=0. \tag{6}$$

Изложенное выше позволяет (при фиксированном $\varepsilon_{b,z=x}$) выбрать из множества прямых $\varepsilon=f(z)$ единственную, удовлетворяющую условию равновесия (5) или (6), и получить соответствующее этим уравнениям распределение относительных деформаций и напряжений по высоте сечения и высоту *x* сжатой зоны сечения.

Изгибающие моменты *M*, соответствующие каждому значению $\varepsilon_{b,z=x}$, высоте сжатой зоны *x*, распределению относительных деформаций ε_b, ε_s, ε_p, ε_{sc}, напряжений σ_b, σ_s, σ_p, σ_{sc} при условиях (5) или (6) определяются по следующим формулам:

-для сечений балок с обычной арматурой

$$M= \Sigma \int[/\sigma_b/(h_0-x+z)\,dA] + /\sigma_{sc}/\,A'_s\,(h_0-a'_s)=$$
$$= \Sigma \int[/\sigma_b/\,z\,dA]+/\sigma_{sc}/A'_s(x-a'_s)+ \sigma_s\,A_s(h_0-x); \qquad (7)$$

-для сечений предварительно напряжённых балок

$$M=\Sigma\int[/\sigma_b/(h_0-x+z)\,dA]= \Sigma\int[(/\sigma_b/\,z)dA]+/F_b/(h_0-x). \qquad (8)$$

В уравнениях (4), (7), (8) знак интеграла ($\int$) означает суммирование элементарных долей геометрических характеристик в пределах частей сечения: верхней, нижней полок и стенки; знак «суммы» (Σ) означает суммирование в пределах высоты x сжатой зоны.

Уравнения (5), (7) или (6), (8) позволяют построить диаграмму или составить таблицу, где каждому значению $\varepsilon_{b,z=x}$ соответствуют единственные значения M и x.

Особенностью предлагаемой версии деформационных расчётов является определение и использование переменных геометрических характеристик сечений (расчётных площадей, статических моментов, моментов инерции) при нелинейном деформировании железобетонных балок в составе плитно-ребристых систем.

На основании взаимосвязанных значений $\varepsilon_{b,z=x}$, x определяются приведенные геометрические характеристики работающей части сечения (без растянутой зоны бетона): площадь A_{red} и статический момент $S_{red,0\text{-}0}$ относительно нейтральной оси, момент инерции I_{red}. В сечениях балок с обычной арматурой центр тяжести находится на нейтральной оси ($S_{red,0\text{-}0}$=0), в сечениях с предварительно напряжённой арматурой центр тяжести смещён относительно нейтральной оси в сторону сжатой грани на величину

$$t=S_{red,0\text{-}0}/A_{red}.$$

Для сечений балок с обычным армированием:

$$A_{red}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)\,dA] + (\sigma_{sc}/\varepsilon_{sc}\,E_s)n_1\,A'_s+(\sigma_s/\varepsilon_s\,E_s)\,n_1\,A_s, \qquad (9)$$
$$I_{red}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)z^2 dA] +(\sigma_{sc}/\varepsilon_{sc}E_s)\,n_1\,A'_s(x-a'_s)^2+(\sigma_s/\varepsilon_s E_s)\,n_1 A_s(h_0-x)^2. \qquad (10)$$

Для сечений балок с предварительно напряжённой арматурой:

$$A_{red}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)\,dA] + (\sigma_p/\varepsilon_p\,E_p)\,n_1\,A_p, \qquad (11)$$
$$S_{red,0\text{-}0}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)z\,dA] - (\sigma_p/\varepsilon_p\,E_p)(h_0-x)\,n_1\,A_p, \qquad (12)$$
$$I_{red}= \Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_b E_b)(z-t)^2\,dA] + [(\sigma_p/\varepsilon_p\,E_p)(h_0-x+t)^2]\,n_1\,A_p. \qquad (13)$$

В уравнениях (9)–(13) через n_1 обозначено отношение модулей деформации арматуры и бетона (E_s/E_b или E_p/E_b).

В сечениях предварительно напряжённых балок действуют расчётный момент $M=M_{вн.}$ от внешних сил, определяемый по формуле (8), и внецентренное сжатие (сила F_n и момент M_n относительно центра тяжести сечения) от натяжения арматуры

$$F_n= \varepsilon_{b,z=x}(t/x)E_b A_{red},\ M_n=F_n(h_0-x+t). \qquad (14)$$

Алгебраическая сумма моментов M_Σ в сечении предварительно напряжённой балки определяется по следующей формуле:

$$M_\Sigma=M_{вн.}-/M_n/=M_{вн.}-/\varepsilon_{b,z=x}(t/x)E_b\,A_{red}(h_0-x+t)/. \qquad (15)$$

Момент M_Σ, момент инерции I_{red} и кривизна $1/\rho$ балки с предварительно напряжённой арматурой находятся в соотношении $M_\Sigma=(1/\rho)E_b I_{red}$. Аналогичное соотношение для балок с обычным армированием $M=(1/\rho)E_b\,I_{red}$.

При расчётах предварительно напряжённых балок по образованию трещин (с учётом напряжений в бетоне растянутой зоны) распределение относительных деформаций ($\varepsilon_{bt1}=\varepsilon_{b,z=x}z/x$, где $z<0$) и напряжений бетона и арматуры принимается в соответствии с диаграммами на рис. 3. В расчёт вводится равнодействующая напряжений [как сумма интегралов напряжений σ_{bt} при z в пределах от ($x-h$) до 0] в растянутой зоне бетона

$$F_{bt}=\Sigma\int\sigma_{bt}\,dA. \tag{16}$$

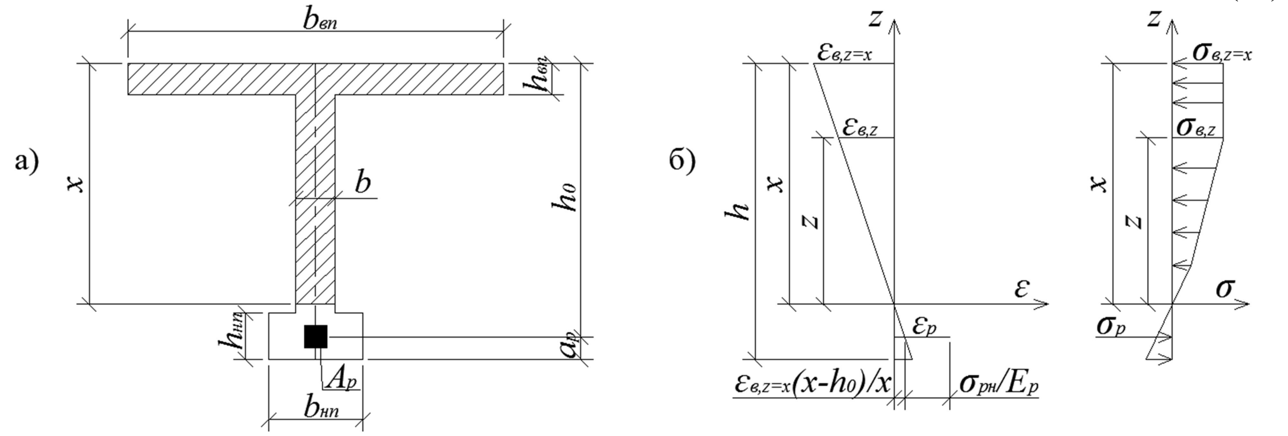


Рис. 3. Схемы к деформационному расчёту по образованию трещин в железобетонных балках с предварительно напряжённой арматурой: *а* – поперечное сечение балки; *б* – эпюры распределения деформаций и напряжений по высоте сечения балки

В соответствии с этим вносятся коррективы в уравнения (6), (8), (11) – (13):

$$F=F_b+F_{bt}+F_p=0; \tag{6′}$$

$$M=\Sigma\int[/\sigma_b/(h_0-x+z)\,dA+\sigma_{bt}(h_0-x-/z/)dA]=$$

$$=\Sigma\int[(/\sigma_b/z)dA]+/F_b/(h_0-x)+\Sigma\int\sigma_{bt}(h_0-x-/z/)dA, \tag{8′}$$

$$A_{red}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_bE_b)dA]+\Sigma\int[(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt}E_b)dA]+(\sigma_p/\varepsilon_p E_p)\,n_1 A_p, \tag{11′}$$

$$S_{red,0\text{-}0}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_bE_b)zdA]-\Sigma\int[(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt}E_b)/z/dA]-(\sigma_p/\varepsilon_p E_p)(h_0-x)n_1A_p, \tag{12′}$$

$$I_{red}=\Sigma\int[(\sigma_b/\varepsilon_bE_b)(z-t)^2dA]+\Sigma\int[(\sigma_{bt}/\varepsilon_{bt}E_b)(/z/+t)^2dA]+$$

$$+[(\sigma_p/\varepsilon_pE_p)(h_0-x+t)^2]\,n_1A_p. \tag{13′}$$

Для реализации алгоритма деформационного расчёта и определения геометрических характеристик сечений балок по предложенным выше формулам составлена программа, разработанная в математической среде *Mathcad*.

Изложенные выше положения, в том числе формулы, определяющие приведенные геометрические характеристики сечений, сохраняют своё значение и вид при других диаграммах связи между деформациями и напряжениями при сжатии и растяжении бетона.

Пространственный расчёт плитно-ребристых пролётных строений выполняется при помощи современных универсальных сертифицированных программных комплексов, реализующих МКЭ: *LIRA*, *SCAD* и др. При выполнении расчёта используется расчётная схема в виде плитно-стержневой системы на рис. 4 [3, 4], отражающая переменную по длине жёсткость балок, состоящая из следующих конечных элементов (КЭ):

-прямоугольных плитных КЭ с тремя степенями свободы в узле, моделирующих плиту;

-стержневых КЭ с шестью степенями свободы в узле, моделирующих отрезки балки.

Рис.4. Расчётные схемы балок пролётных строений плитно-стержневой системы: 1-КЭ плиты, 2-стержневые КЭ, моделирующие отрезки балки, 3-процедура жесткой вставки, 4-контур сечения балки пролетного строения

Пространственный нелинейный деформационный расчёт балочных пролётных строений включает следующие процедуры:

-формирование расчётной схемы и представление её в форме, пригодной для расчёта МКЭ;

-определение и описание постоянных и временных нагрузок;

-деформационный нелинейный расчёт всех сечений балок, определение (построение диаграмм) моментов M, параметров x, $M\rho$ в зависимости от $\varepsilon_{b,z=x}$;

-конечно-элементный пространственный расчёт со ступенчатым приложением временной нагрузки. В качестве ступеней временной нагрузки на заключительной части расчёта принимаются доли временных нагрузок АК=А1 – А2 и 0,05÷0,10 нагрузки НК-102,8 (Н14).

По результатам расчёта строится кривая зависимости прогибов балок от уровня временной нагрузки АК или НК, фиксируются образовавшиеся пластические шарниры в сечениях балок.

При использовании деформационной модели расчёты по прочности и по образованию поперечных трещин выполняются с одними и теми же допущениями и соответствием между напряжённо-деформированным состоянием и распределением жёсткостей железобетонных конструкций. Это позволяет при расчётах плитно-ребристых систем обоснованно перераспределить моменты с наиболее нагруженных (или ослабленных) балок на другие менее нагруженные балки [4]. При этом напряжённое состояние во всех сечениях (и его распределение по высоте любого сечения) является предельным или допредельным с определением по расчёту границ соответствующих подобластей.

Кроме того, в соответствии с диаграммой на рис. 1, *в* при расчётах предварительно напряжённых пролётных строений расчётное сопротивление рабочей арматуры принимается в размере $1{,}1R_p$, т. е. увеличенным на 10 % по сравнению с обычным расчётом по прочности. Это позволяет при проектировании и определении грузоподъёмности получать по расчётам предельные изгибающие моменты, увеличенные примерно на такой процент.

По результатам расчётов могут быть определены прогибы (с последующим добавлением перемещений от ползучести бетона) в зависимости от уровней действующих нагрузок, фиксируется образование пластических шарниров в сечениях балок. Решение о достижении предельного состояния может быть принято не только по условиям достижения предельных деформаций, но также по другим критериям [4]: предельным прогибам или градиентам прогибов в наиболее нагруженных пролётах или балках; по числу образовавшихся пластических шарниров в статически неопределимой системе.

Пример расчёта. На рис. 5, *а*, *б* изображены поперечные сечения пролётного строения длиной 18 м и одной из его предварительно напряжённых балок таврового сечения высотой 75 см. Расчётные характеристики материалов: модули деформации бетона (класса В40) E_b=32400 МПа, арматуры (класса В) E_p=190000 МПа, расчётное сопротивление бетона R_b=20 МПа, арматуры R_p=1055 МПа. Площадь сечения рабочей арматуры в середине пролёта балки A_p=33 см^2. Временные вертикальные нагрузки по проекту АК=А11 и НК-80 (Н11) [5].

а)

б)

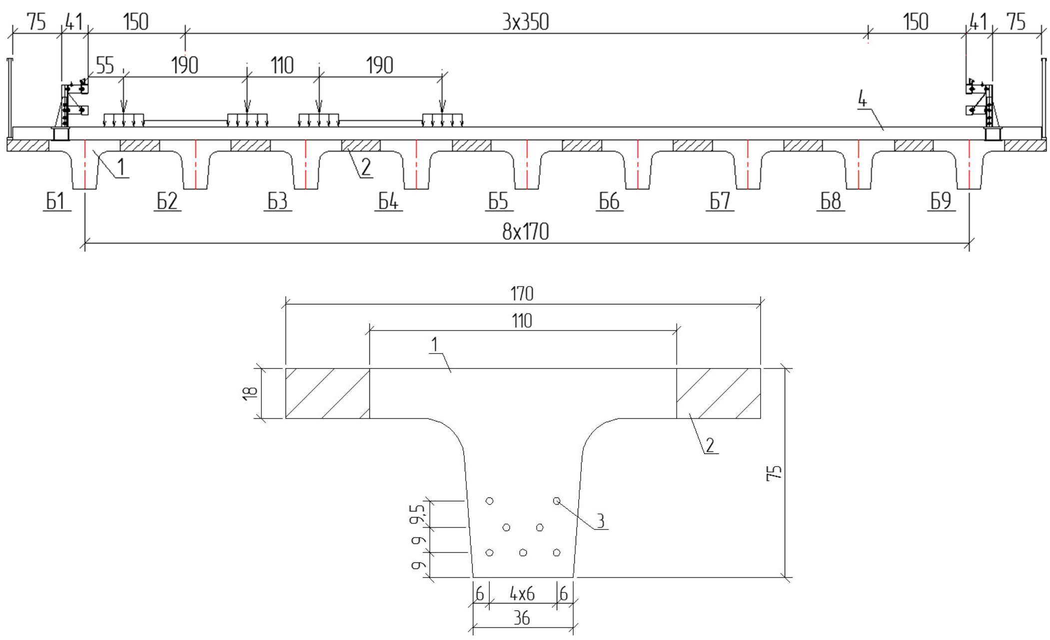


Рис. 5. Поперечные сечения пролётного строения длиной 18 м (*а*) и предварительно напряжённой балки в его составе (*б*); *1*–балка таврового сечения с предварительно напряжённой арматурой, *2*–швы омоноличивания балок; *3* – пучки высокопрочной арматуры 24Ø5В; *4*–мостовое полотно (многослойная дорожная одежда, металлическое барьерное ограждение, металлические перила)

По проекту предусматривалась установка балок с шагом 1,5 м, но при строительстве те же балки были установлены с шагом 1,7 м. Число балок в каждом пролёте по проекту 11, фактически установлено 9. Контрольный расчёт выполнен с целью обоснования фактически принятого числа и расстановки балок.

При выполнении расчётов было получено, наиболее невыгодно положение нагрузки АК на рис. 5, а со смещением к левой кромке проезжей части (включая полосу безопасности). Расчёты нормальных сечений балок по предельным состояниям первой группы на воздействие постоянной нагрузки и нагрузки А11 были выполнены двумя способами: «по предельным усилиям» и «на основе нелинейной деформационной модели». Кроме того, был выполнен расчёт нормальных сечений балок «на основе нелинейной деформационной модели» на воздействие постоянной нагрузки и нагрузки А14.

Пространственный расчёт выполнен средствами МКЭ по программе *LIRA* с использованием плитно-стержневой расчётной схемы балок на рис. 4. В процессе деформационных расчётов на каждой ступени нагрузки геометрические характеристики сечений балок изменялись в соответствии с достигнутыми изгибающими моментами.

Общие результаты всех трёх расчётов сечений в середине пролётов наиболее нагруженных средней и крайней балки представлены в следующей таблице.

Таблица

Результаты расчёта пролётного строения длиной 18 м (расчётные и предельные моменты)

Положение балки	$M_{пост.}$, кНм	$\underline{M_{A11}}$ $M_{A11}+M_{пост.}$, кНм		$\underline{M_{A14}}$ $M_{A14}+M_{пост.}$, кНм	$M_{пред.1}$, кНм	$M_{пред.ДМ}$, кНм
		Расчёт по предельным усилиям	Расчёт по деформ. модели	Расчёт по деформ. модели		
Средняя балка	878	$\underline{729}$ 1607	$\underline{621}$ 1499	$\underline{748}$ 1626	1845	1996
Крайняя балка	1044	$\underline{767}$ 1811	$\underline{614}$ 1658	$\underline{741}$ 1785	1869	2022

В таблице приняты следующие обозначения: $M_{пост.}$ – момент от постоянных нагрузок в балке; M_{A11}, M_{A14} – моменты от временной нагрузки А11 и А14; $M_{пред.1}$, $M_{пред.ДМ}$ – предельные момент по расчётам по прочности «по предельным усилиям» и на «основе деформационной модели».

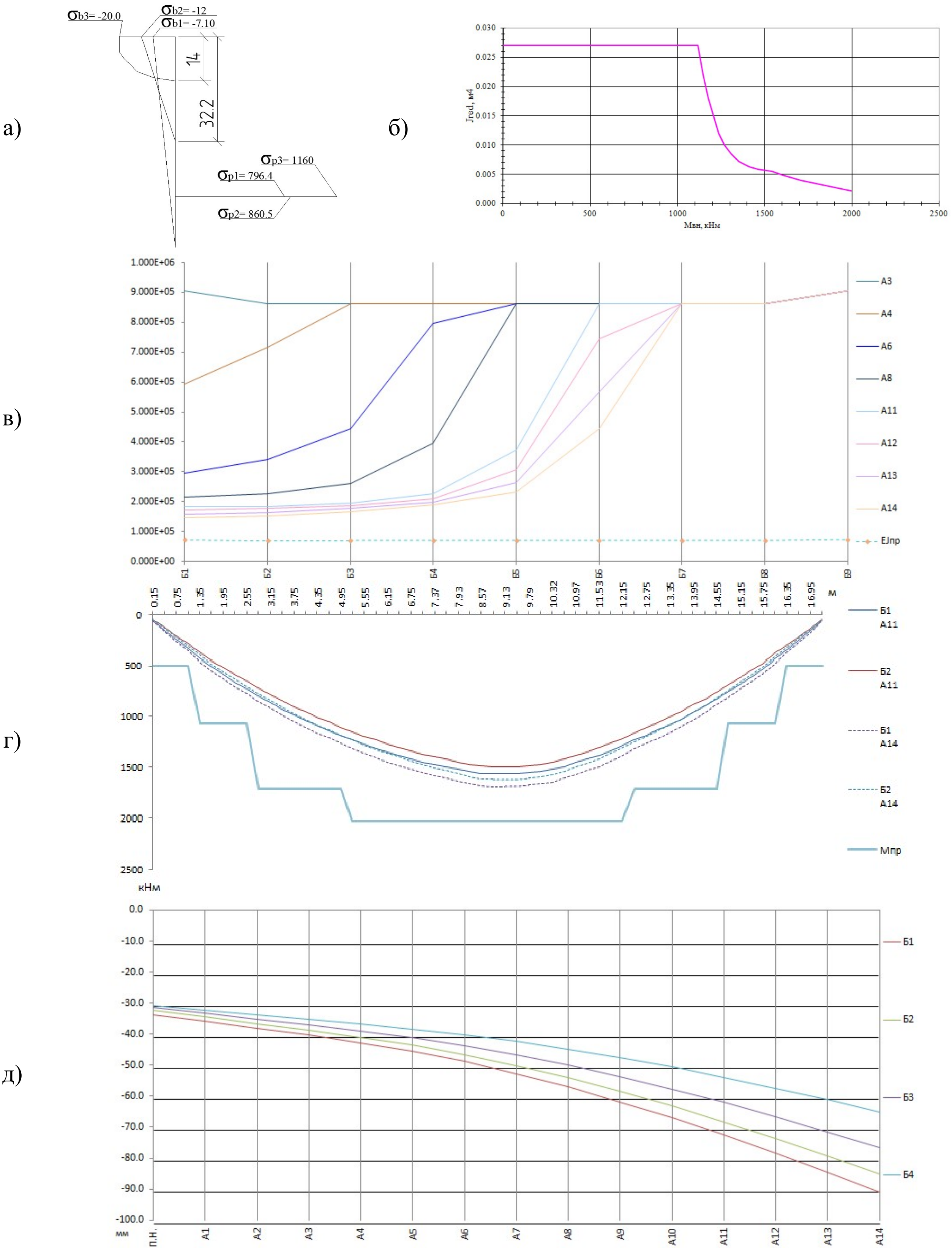


Рис. 6. Результаты деформационного расчёта балок пролётного строения длиной 18 м: *а* – эпюры напряжений σ_b, σ_p в среднем сечении балки при значениях внешнего момента соответственно M=1119; 1407; 1996 кНм ($\varepsilon_{b,z=x}$=-2.223×10^{-4}; -3.704×10^{-4}; -2.895×10^{-3}) без учёта работы бетона в растянутой части сечения; *б* – графики зависимостей I_{red}=$f(M)$ в среднем сечении балки без учёта работы бетона в растянутой части сечения; *в* – распределение жёсткостей EI_{red} балок в среднем сечении пролётного строения при действии постоянной нагрузки и временной вертикальной нагрузки от А3 до А14; *г*–эпюры моментов в балках Б-1, Б-2 при расчётных постоянных и временных нагрузках А11 и А14 (M_{np}–эпюра предельных значений моментов); *д* – диаграмма зависимости прогибов балок Б-1, Б-2, Б-3, Б-4 от размера нагрузки АК при К от 0 до 14

На рис. 6, *а–д* показаны результаты расчётов по деформационной модели сечений балок в середине пролёта. Нулевые напряжения на нижней грани сечения балок были получены при моментах $M_{вн}$=1119 кНм, что соответствует сумме расчётной постоянной нагрузки и временной нагрузки А4. Достижение в тех же балках напряжений на верхней грани сечения $\sigma_{b,z=x}$=0,6R_b=12МПа соответствует моменту $M_{вн}$=1407 кНм (постоянная нагрузка + временная нагрузка А8).

Диаграммы на рис. 6, *б*, *в* иллюстрируют зависимости моментов сопротивления I_{red} от внешнего момента $M_{вн}$ и распределение жёсткостей EI_{red} балок в среднем сечении пролётного строения при увеличении (после приложения постоянной нагрузки) временной вертикальной нагрузки от А3 до А14. Крайняя точка на диаграмме на рис. 6, *б* соответствует достижению предельных деформаций предварительно напряжённой арматуры ε_{p2}=0,015.

Рис. 6, *д* иллюстрирует прогрессирование прогибов балок при увеличении класса (K=1…14) нагрузки АК. При достижении K=14 сохраняется плавность диаграммы «прогиб балок–класс нагрузки К», что позволяет считать неисчерпанной несущую способность пролётного строения по условию прогрессирования прогибов.

Результаты расчёта с использованием деформационной модели позволили получить расчётную несущую способность пролётного строения, превышающую А14, в то время как по обычному расчёту («по предельным усилиям») расчётная грузоподъёмность близка к А11: $M_{расч.}$=1811 кНм, $M_{пред}$=1869. кНм (см. таблицу).

Библиографический список

1. Свод правил по проектированию и строительству. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. СП 52-101-2003/ ФГУП ЦПП. – М. – 2004. – 53с.

2. Свод правил по проектированию и строительству. Предварительно напряжённые железобетонные конструкции. СП 52-102-2004/ ФГУП ЦПП.- М. – 2005.

3. Шапиро, Д.М. Пространственный нелинейный деформационный расчёт пролётных строений автодорожных мостов / Д.М.Шапиро, А.В. Агарков, Чан Тхи Тхюи Ван.// Науч. вестник ВГАСУ. Серия Строительство и архитектура. – Воронеж, 2008. – Вып. 2 – С.29-37.

4. Шапиро, Д.М. Нелинейные методы расчёта в современном проектировании (на примерах объектов геотехники и мостовых сооружений) / А.В. Агарков, Н.Н. Мельничук, Чан Тхи Тхюи Ван // Науч. вестник ВГАСУ. Серия Строительство и архитектура. – Воронеж, 2009. – Вып. 3(15) – С.85-94.

5.СНиП 2.05.03-84* (актуализированная редакция). Мосты и трубы / ОАО «ППП».- М. – 2011.

The bibliographic list

1. The arch corrected on designing and building. Concrete and ferro-concrete designs without preliminary pressure of armature. The joint venture of 52-101-2003/FGUP ЦПП. - M - 2004. - 53с.

2. The arch corrected on designing and building. Preliminary intense ferro-concrete designs. The joint venture of 52-102-2004/FGUP ЦПП. - M - 2005.

3. Shapiro D.M.Agarkov A.V.tub Thi Thjui Van. Spatial nonlinear deformation calculation of flying structures of road bridges//Nauch. Bulletin ВГАСУ. A series Building and architecture. - Voronezh, 2008. - Vyp. 2 - C.29-37.

4. D.M.Shapiro, A.V.Agarkov, N.N.Melnichuk, Chan Thi Thjui Van Nonlinear methods of calculation in modern designing (on examples of objects of geotechnics and bridge constructions)//Nauch. Bulletin ВГАСУ. A series Building and architecture. - Voronezh, 2009. - Vyp. 3(15) - C.85-94.

5. СНиП 2.05.03-84* (the staticized edition). Bridges and pipes / Open Society "ППП". M - 2011.

Ключевые слова: нелинейная деформационная модель, расчёт по прочности, пролётные строения мостов, предварительно напряжённые железобетонные балки.

Keywords: nonlinear deformation model, durability design, bridge spans, prestressed ferroconcrete beams.

УДК 624.042+624.072

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики
С.В. Ефрюшин

Аспирант кафедры строительной механики М.А. Викулов
Россия, г. Воронеж, тел. 8(4732)92-37-69; email: vikulovmiha@mail.ru

The Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
Dr if Tehc. Science , prof. of the department of Structural Mechanics
S.V. Efryshin

Post – graduate student of department of Structural Mechanics M.A. Vikulov
Russia, Voronezh, ph. 8(4732)92-37-69; email: vikulovmiha@mail.ru

С.В.Ефрюшин, М.А.Викулов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ ПРОЛЕТНОГО СТРОЕНИЯ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА С ДЕФЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

На основе пространственной модели предельного равновесия рассматривается влияние различного рода дефектов на грузоподъемность балочного автодорожного моста. Для наглядного представления результатов предлагается построение поверхностей влияния расположения дефектов. Рассмотрено влияние подвижности нагрузки на грузоподъемность пролетного строения.

S.V. Efryshin, M.A. Vikulov

COMPUTATIONAL (МАТЕМАТИЧЕСКОЕ) (NUMERICAL – ФИЗИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ) INVESTIGATION OF BEARING CAPACITY OF ROAD BRIDGE SPAN WITH DEFECTS BASED ON SPATIAL MODEL OF LIMIT EQUILIBRIUM

Effect of different defects based on spatial model of limit equilibrium on bearing capacity of beam bridge is under analysis. Results of surface definition of defect position effect is proposed for pictorial view. Influence of load mobility on sap bearing capacity is considered.

В работе [1] предложено применять пространственную схему предельного равновесия к оценке грузоподъемности пролетных строений балочных автодорожных мостов. Расчетная схема пролетного строения формируется в виде ортогональной перекрестной стержневой системы, моделирующей работу главных балок, объединенных по плите или диафрагмам. Математические модели задач предельного равновесия дискретных систем приведены в [2] и [3]. За основные силовые факторы, определяющие несущую способность пролетного строения, приняты изгибающие моменты. На основе указанных моделей проведены численные исследования влияния места расположения дефектов на коэффициент грузоподъемности.

Расчет в стадии предельного равновесия, реализованный методом линейного программирования, приведен на примере пролетного строения длиной 12 м, габарит Г8+2х0,75 м по типовому проекту «3.503.1-81.Выпуск 7-1. Балки пролетного строения длиной 12,15,18,21,34 и 33 м цельноперевозимые с натяжением на упоры». Шаг балок 1,82 м. Поперечное сечение пролетного строения изображено на рис. 1.

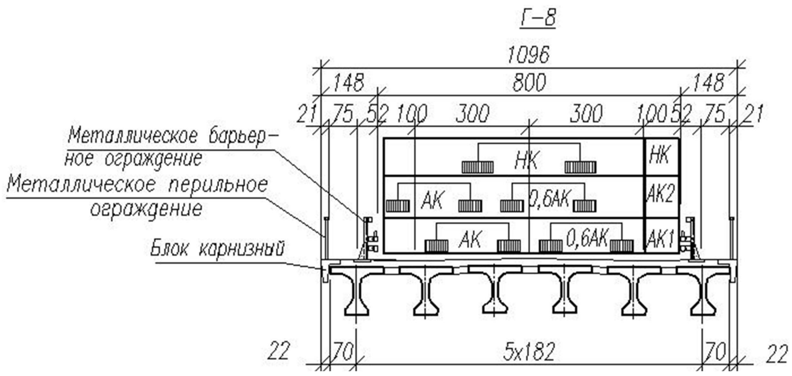


Рис. 1. Поперечное сечение пролетного строения

Расчетная схема пролетного строения показана на рис. 1. Цифрами обозначены номера конечных элементов.

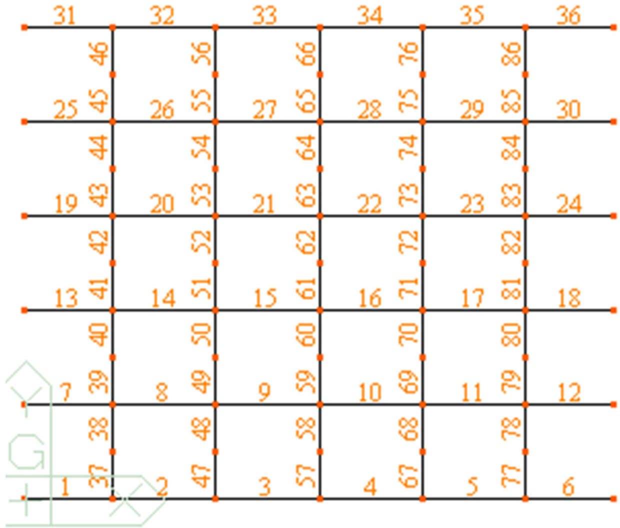


Рис. 2. Расчетная схема пролетного строения

Пролетное строение рассчитано на 3 варианта загружения: 1) случай АК1 – 2 полосы нагрузки А14, расположенные вне полос безопасности; 2) случай АК2 – 2 полосы нагрузки А14, ось первой полосы расположена на расстоянии 1,5 от края габарита проезжей части; 3) случай НК – пропуск нагрузки Н14 по центру габарита пролетного строения. Класс бетона пролетного строения В35, рабочая арматура - напрягаемые прямолинейные горизонтальные пучки из 24 проволок диаметром 5 мм класса В.

Эпюра изгибающих моментов Му от постоянной нагрузки изображена на рис. 3. Объемлющая эпюра от случая загружения АК1 изображена на рис. 4, от случая загружения АК2 – на рис. 5, от случая загружения НК – на рис. 6.

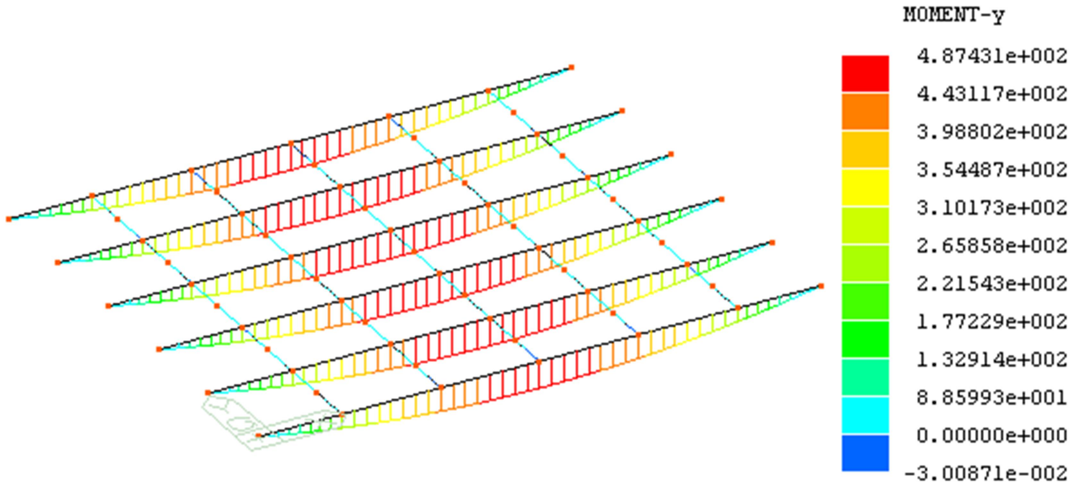


Рис. 3. Объемлющая эпюра изгибающих моментов My от постоянной нагрузки

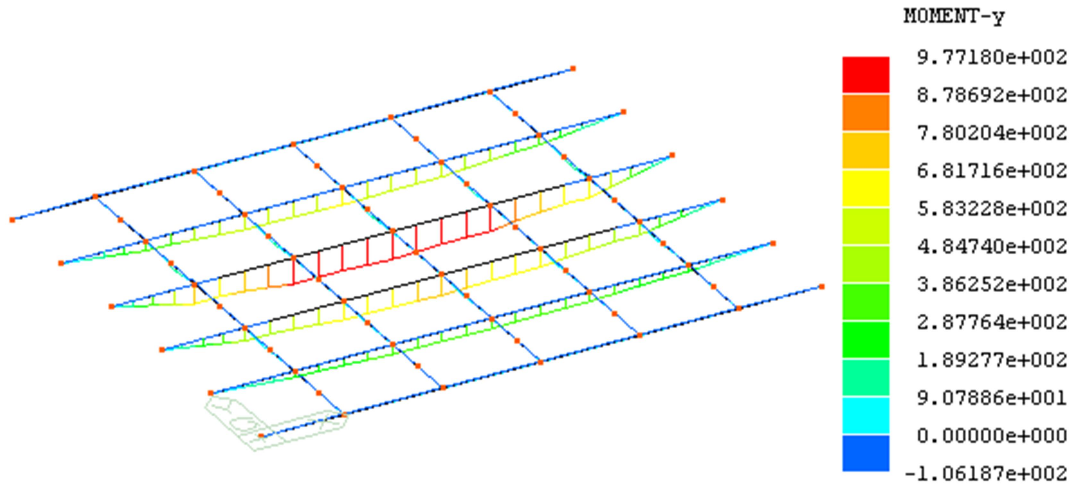


Рис. 4. Объемлющая эпюра изгибающих моментов My от подвижной временной нагрузки АК1

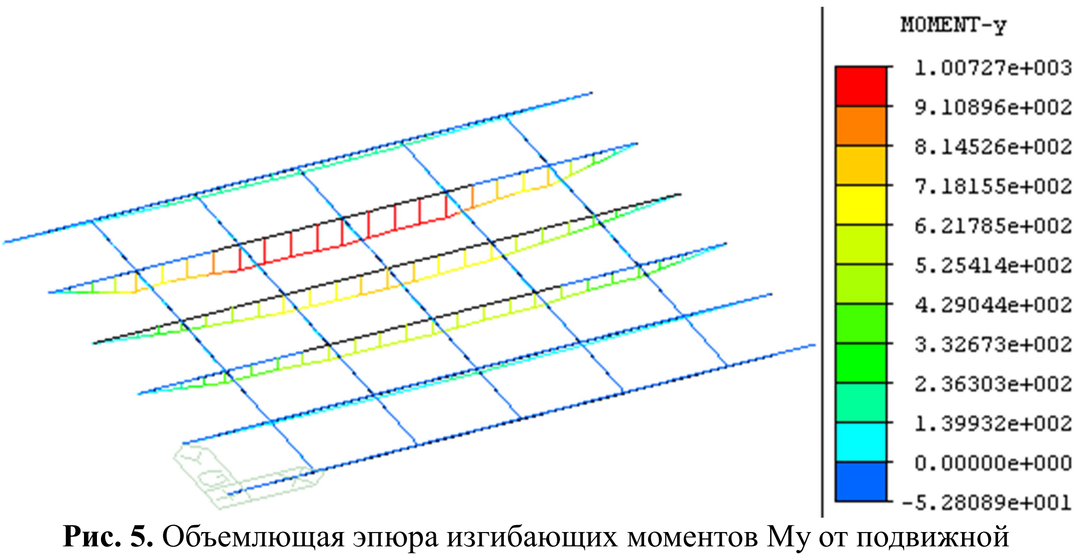


Рис. 5. Объемлющая эпюра изгибающих моментов My от подвижной временной нагрузки АК2

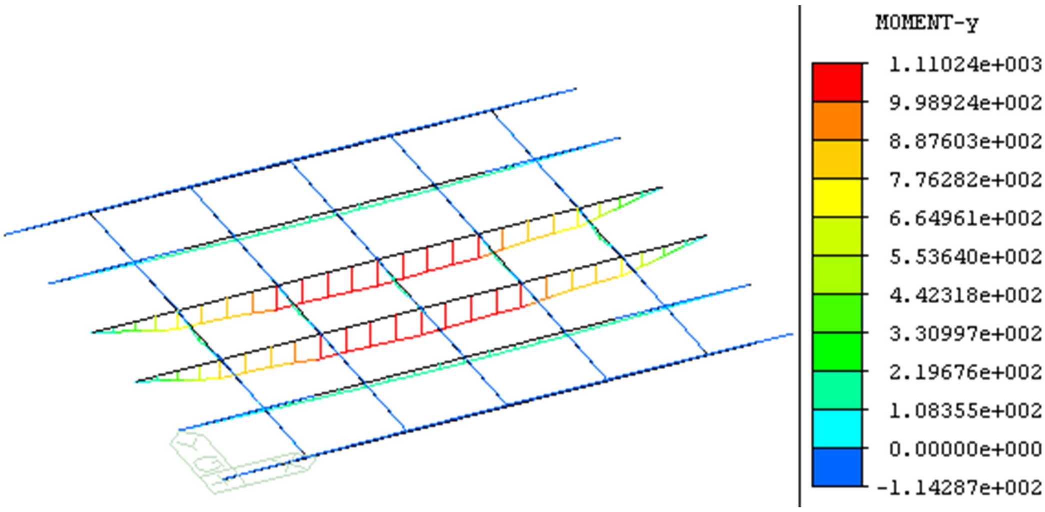


Рис. 6. Объемлющая эпюра изгибающих моментов Му от подвижной временной нагрузки НК

По чертежам типового проекта найдены предельные изгибающие моменты Му для сечений главных балок (табл. 1) и для сечений поперечных балок, которые моделируют плиту проезжей части (табл. 2).

Таблица 1

Координата сечения от оси опирания, мм	Предельный положительный момент ,кНм		Предельный отрицательный момент ,кНм	
	Крайняя балка	Средняя балка	Крайняя балка	Средняя балка
0-1700	827.21	829.23	353.47	396.36
1700-5700	1619.37	1627.46	353.47	396.36

Таблица 2

Положение сечения	Предельный положительный момент ,кНм	Предельный отрицательный момент ,кНм
Над балкой	318.4	318.4
Между балками	104.8	81,0

1. Случай загружения АК1

Коэффициент грузоподъемности, полученный по методике, изложенной в нормативных документах [4,5], равен 0,8444. То есть класс нагрузки, которая может передвигаться по пролетному строению, при загружении нагрузкой АК1 соответствует К=11,82. При решении задачи грузоподъемности методом линейного программирования коэффициент равен 1,2205, что соответствует классу К=17,09 и превышает нормативный коэффициент в 1,45 раза. Результаты решения задачи методом линейного программирования в статической постановке приведены на рис. 7-9, в кинематической постановке - на рис. 10,11.

Эпюра остаточных изгибающих моментов Му, получившихся в результате решения задачи линейного программирования, изображена на рис. 7.

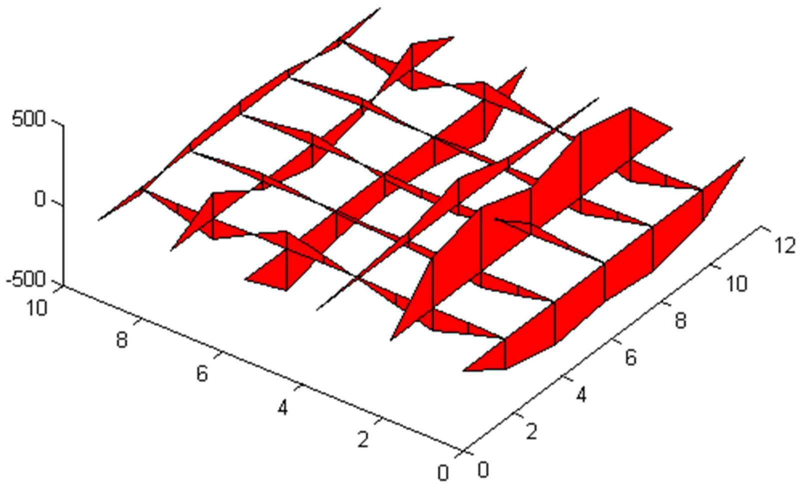


Рис. 7. Эпюра остаточных изгибающих моментов Му

На рис. 8 и рис. 9 изображены эпюры соответственно положительных и отрицательных изгибающих моментов Му в стадии предельного равновесия.

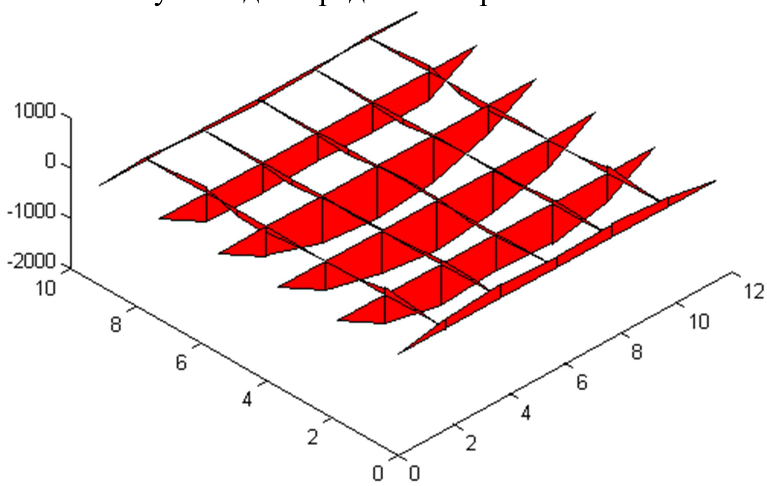


Рис. 8. Эпюра положительных изгибающих моментов Му в стадии предельного равновесия

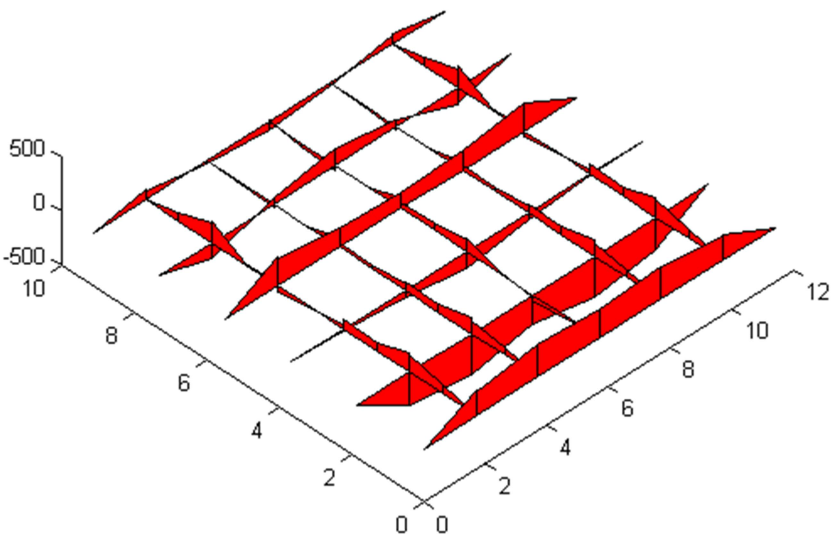


Рис. 9. Эпюра отрицательных изгибающих моментов Му в стадии предельного равновесия

На рис. 10 показана схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров для случая загружения нагрузкой АК1.

Значения, по которым построена схема, являются результатом решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке.

Флажки на рис. 10 показывают местоположение элементов, в которых образовались пластические шарниры. Шарнир называется положительным, если он возникает вследствие достижения положительного предельного момента, и отрицательным, если он возникает вследствие достижения отрицательного предельного момента. Вершина флажка показывает сечение в начале или в конце элемента, в котором образовался пластический шарнир. Размер флажка означает очередность образования шарниров: чем флажок выше, тем раньше образовался пластический шарнир.

По рис. 10 разрушение пролетного строения начинается с образования пластического шарнира в 4-ой главной балке и в 1-ой поперечной балке, в сечении между 4-ой и 5-ой главными балками.

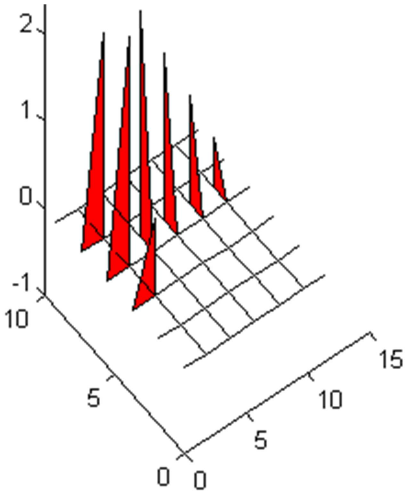


Рис. 10. Схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров в стадии предельного равновесия

На рис. 10 показана схема разрушения пролетного строения. Значения, по которым построена схема, также являются результатом решения задачи грузоподъемности в кинематической постановке. Схема разрушения согласуется со схемой образования шарниров. Механизм разрушения возникает без разрушения крайних балок пролетного строения.

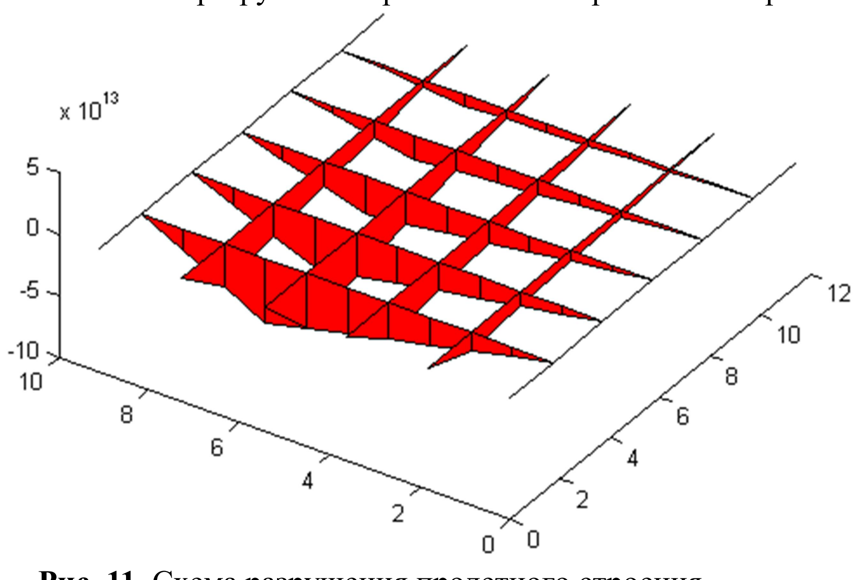


Рис. 11. Схема разрушения пролетного строения

2. Случай загружения АК2

Коэффициент грузоподъемности, полученный по методике, изложенной в нормативных документах [4,5], равен 0,7629. То есть класс нагрузки, которая может передвигаться по пролетному строению, при загружении нагрузкой АК2 соответствует К=10,68. При решении задачи грузоподъемности методом линейного программирования коэффициент равен 1,3621, что соответствует классу К=19,07 и превышает нормативный коэффициент в 1,79 раза. Отметим, что коэффициенты грузоподъемности, полученные по нормативной методике, в случае нагрузки АК1 больше, чем в случае АК2. Результаты решения задач методом линейного программирования дают обратный результат. Этот эффект связан с перераспределением нагрузки. Количество и схема расположения сечений, в которых образуются пластические шарниры при загружении нагрузкой АК1, быстрее приводят к образованию механизма, чем при нагрузке АК2. На рис. 12, 13 приведены результаты решения задачи линейного программирования в кинематической постановке. Результаты статической постановки задачи менее информативны, поэтому в дальнейшем не приводятся.

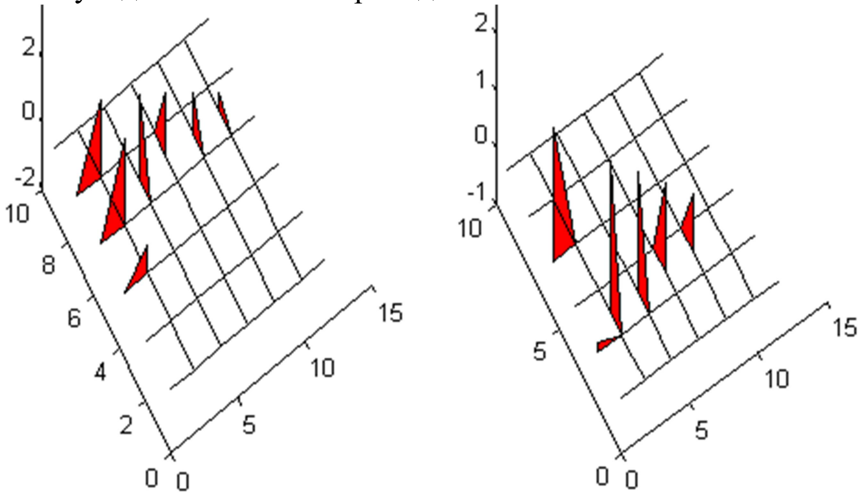


Рис. 12. Схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров в стадии предельного равновесия

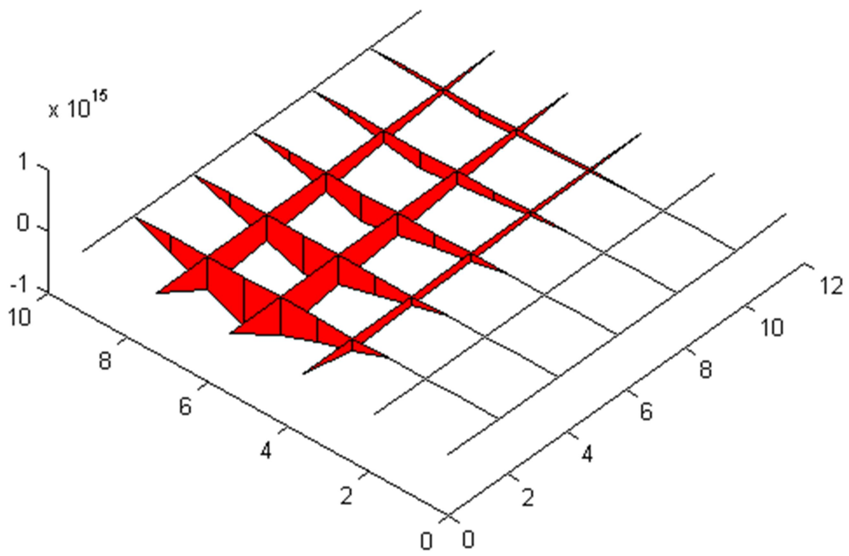


Рис. 13. Схема разрушения пролетного строения

В случае нагрузки АК2 балки 1,2,6 не разрушаются.

3. Случай загружения НК

Коэффициент грузоподъемности, полученный по методике, изложенной в нормативных документах [4,5], равен 0,7374. То есть класс нагрузки, которая может передвигаться по пролетному строению, при загружении нагрузкой АК2 соответствует К=10,32. При решении задачи грузоподъемности методом линейного программирования коэффициент равен 0,801, что соответствует классу К=11,21 и превышает нормативный коэффициент в 1,09 раза. На рис. 14, 15 приведены результаты решения задачи линейного программирования в кинематической постановке.

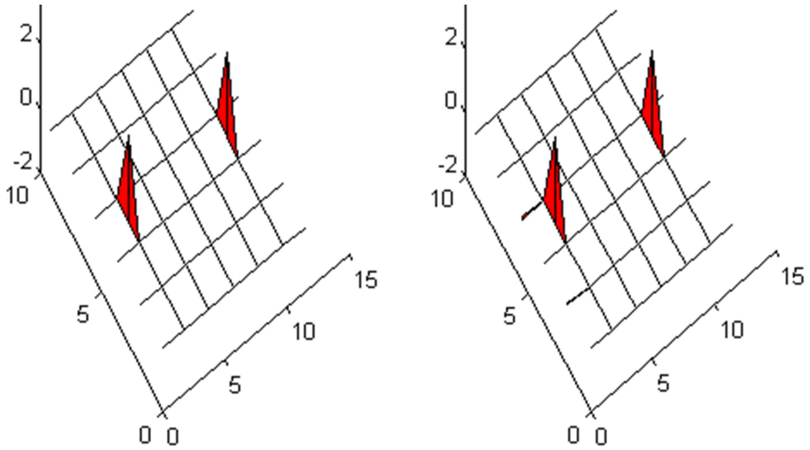


Рис.14 Схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров в стадии предельного равновесия

На схеме рис. 14 образовались 4 пластических шарнира, 2 положительных и 2 отрицательных. Причем отрицательные и положительные шарниры образовались в одних и тех же сечениях крайних поперечных балок, моделирующих плиту. Этот эффект называется переменной пластичностью или малоцикловой усталостью [3]. Разрушение схемы при возникновении такого эффекта называется циклическим пластическим разрушением. При возникновении эффекта малоцикловой усталости шарниры на схеме показаны только в местах образования данного эффекта, так как скорость деформации в данных сечениях во много раз превышает скорость деформаций в остальных сечениях с пластическими шарнирами.

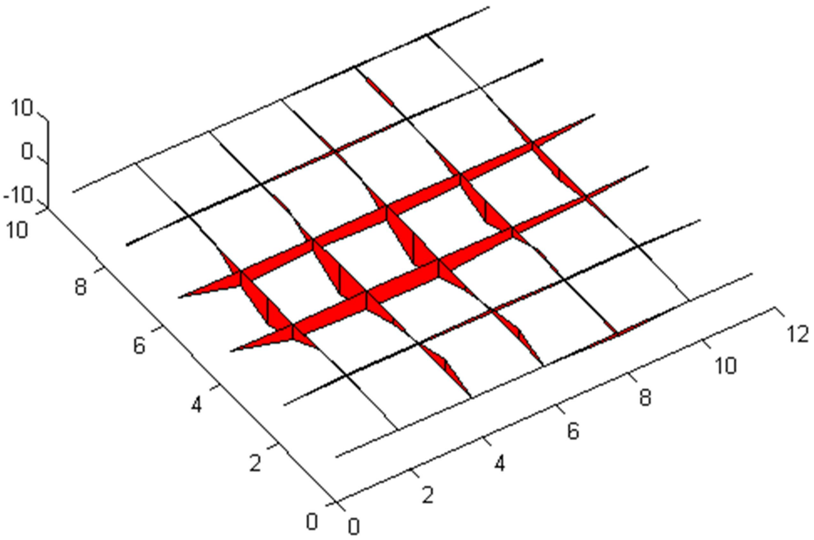


Рис. 15. Схема разрушения пролетного строения

Схема разрушения на рис. 15 не соответствует схеме образования пластических шарниров рис. 14 вследствие возникновения эффекта малоцикловой усталости. Механизм образуется при разрушении 3-ей и 4-ой главных балок и поперечных балок, их соединяющих.

Выше рассмотрены задачи расчета грузоподъемности при подвижности временной нагрузки. Решим задачу грузоподъемности пролетного строения без учета подвижности временной нагрузки АК1.

Из расчета грузоподъемности в случае подвижной нагрузки АК1 выберем сечение, скорость деформаций которого будет максимальной. Таковым сечением является сечение элемента 19. Данное сечение является расчетным, так как разница предельного и расчетного момента минимальна.

Для учета неподвижности нагрузки в качестве усилий упругого расчета будем использовать не объемлющую эпюру изгибающих моментов, а эпюру, дающую максимальное значение изгибающего момента в расчетном сечении. Эпюра изгибающих моментов при неподвижной временной нагрузке изображена на рис. 16.

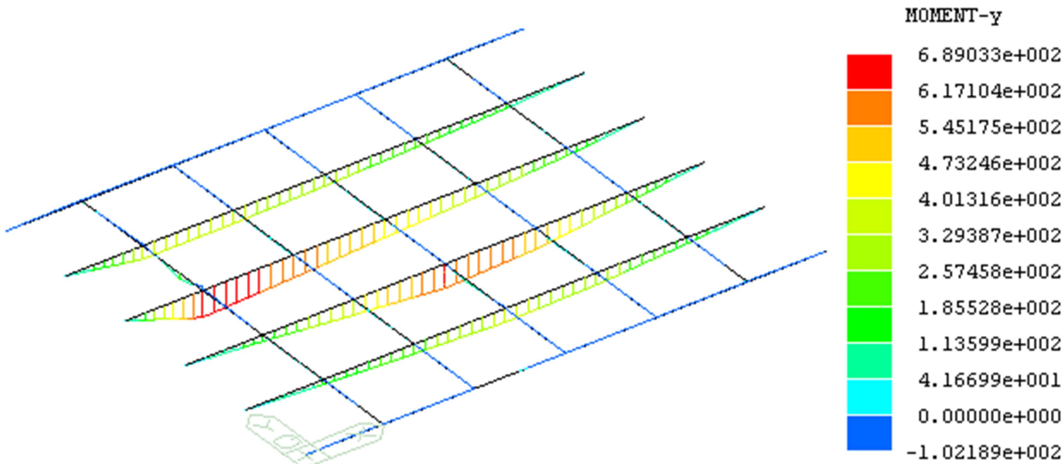


Рис. 16. Эпюра изгибающих моментов Му от расчетного положения временной нагрузки АК1 для расчетного сечения элемента 19

Коэффициент грузоподъемности, полученный по нормативной методике, остается без изменения, так как данная методика не учитывает подвижность или неподвижность нагрузки. Поэтому класс нагрузки К=11,82. При решении задачи грузоподъемности методом линейного программирования при неподвижной нагрузке АК1 коэффициент равен 1,5016, что соответствует классу К=21,02.

Коэффициент грузоподъемности, найденный при неподвижной нагрузке, в 1,23 раза больше коэффициента, найденного с учетом подвижности нагрузки, и в 1,78 раза больше нормативного коэффициента. Такое значение коэффициента объясняется «недогруженностью» расположенных рядом сечений.

На рис. 17, 18 приведены результаты решения задачи линейного программирования в кинематической постановке.

На рис. 17 показана схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров для случая загружения неподвижной нагрузкой АК1. В отличие от схемы с подвижной нагрузкой образуется меньшее количество пластических шарниров и расположены они более сосредоточенно.

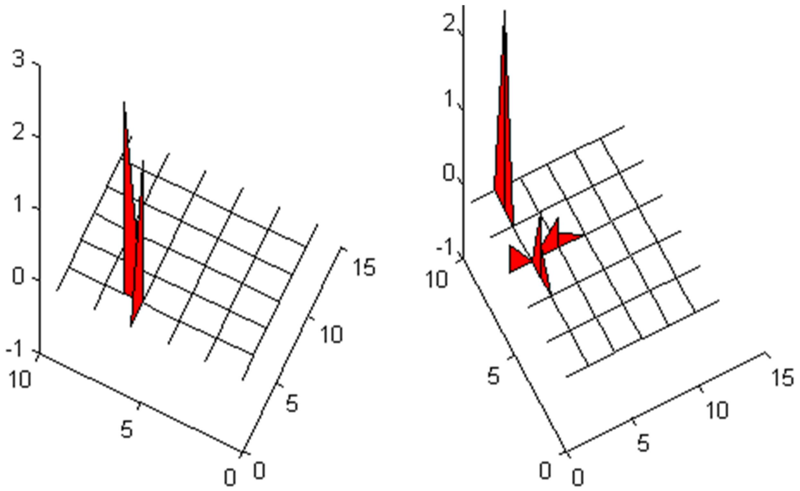


Рис. 17. Схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров в стадии предельного равновесия

На рис. 18 показана схема разрушения пролетного строения при неподвижной нагрузке АК1. Разрушение носит локальный характер: частично разрушается 4-ая главная балка и 1-ая поперечная балка.

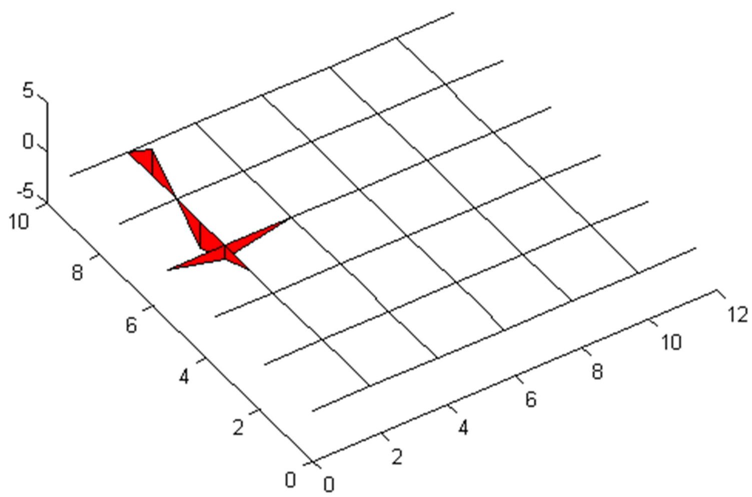


Рис. 18. Схема разрушения пролетного строения

Грузоподъемность мостовых сооружений чаще всего определяется для существующих сооружений, которые могут иметь различные дефекты.

Определим грузоподъемность пролетного строения при возникновении дефектов в главных балках. В качестве варианта дефекта примем уменьшение предельного момента в конце 27-го элемента до 0.

При определении грузоподъемности по методике, изложенной в нормативных документах [4,5], коэффициент грузоподъемности равен нулю, так как нормативная методика не учитывает перераспределения усилий. При решении задачи грузоподъемности методом линейного программирования коэффициент равен 0,9014. То есть при полном разрушении сечения главной балки в середине пролета, в результате перераспределения усилий, пролетное строение может пропускать временную нагрузку класса К=12,62.

На рис. 19 показана схема образования пластических шарниров при моделировании дефекта в 27 элементе расчетной схемы. Образование шарниров начинается с элемента поперечной балки, пересекающей дефектный элемент главной балки.

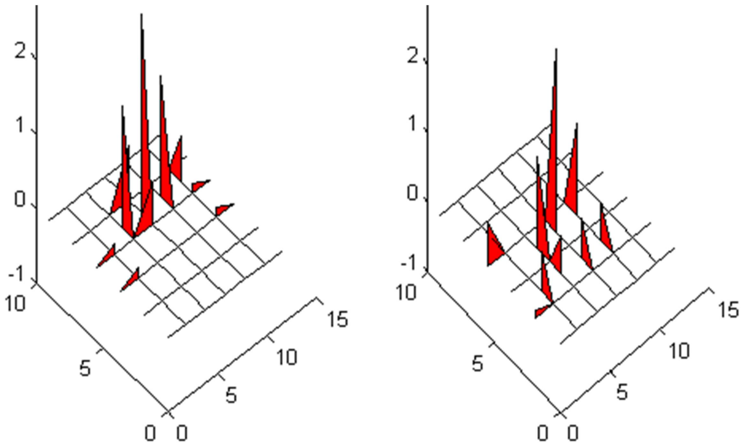


Рис. 19. Схема образования положительных (слева) и отрицательных (справа) пластических шарниров в стадии предельного равновесия

На рис. 20 показана схема разрушения пролетного строения. Образуется механизм с разрушением 3-ей, 4-ой, 5-ой главных балок и поперечных балок, которые их соединяют.

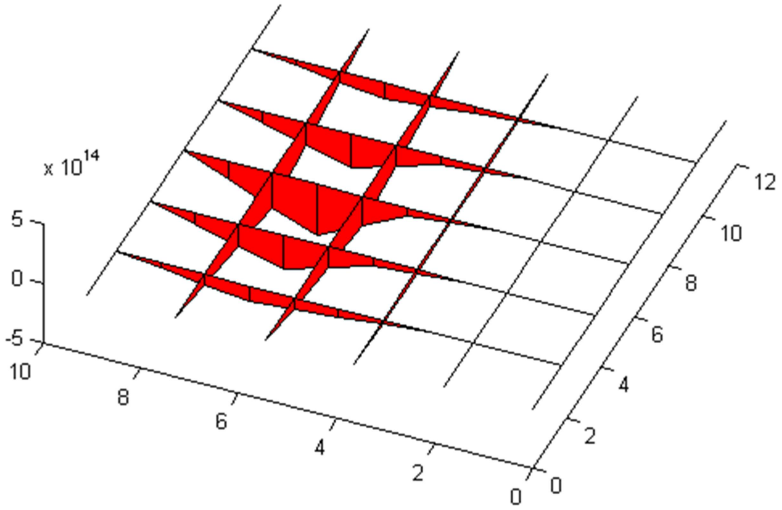


Рис. 20. Схема разрушения пролетного строения

Для выявления областей главных балок, наиболее чувствительных к появлению дефектов и уровню повреждения, поочередно, в каждом элементе балки снизим предельный момент и произведем расчет грузоподъемности методом линейного программирования. Для каждого уровня повреждения (снижения предельного момента) построим поверхность и линии уровня, соединив ординаты коэффициентов грузоподъемности в сечениях элементов с дефектами. На рис. 21, рис. 22, рис. 23 показаны поверхности коэффициентов грузоподъемности при снижении предельного момента в сечениях соответственно до 0, 30 % от Мпред, 70 % от Мпред, где Мпред – предельный момент в сечении, не имеющем дефектов.

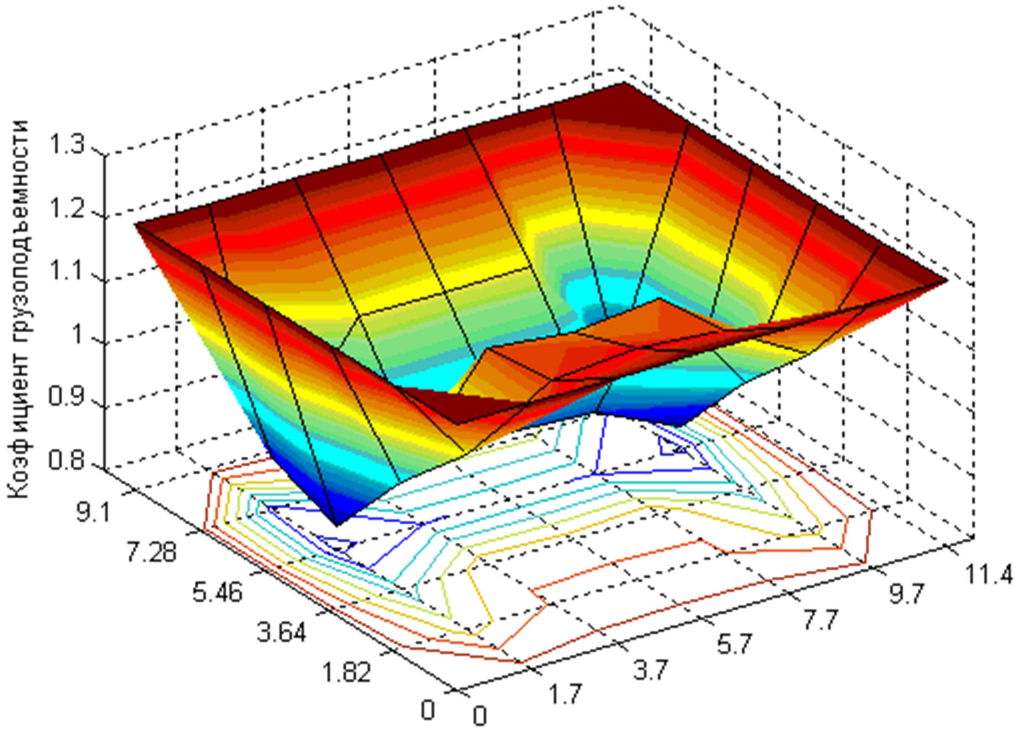


Рис. 21. Поверхность коэффициентов грузоподъемности при снижении предельного момента в сечениях до 0

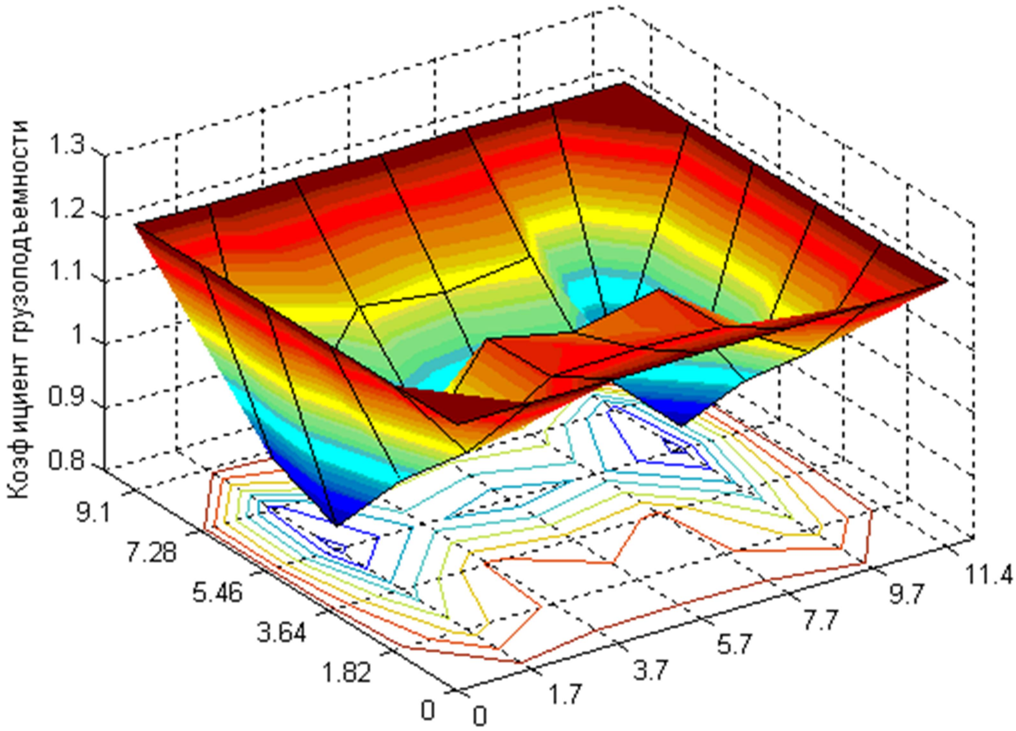


Рис. 22. Поверхность коэффициентов грузоподъемности при снижении предельного момента в сечениях до 30 % от Мпред

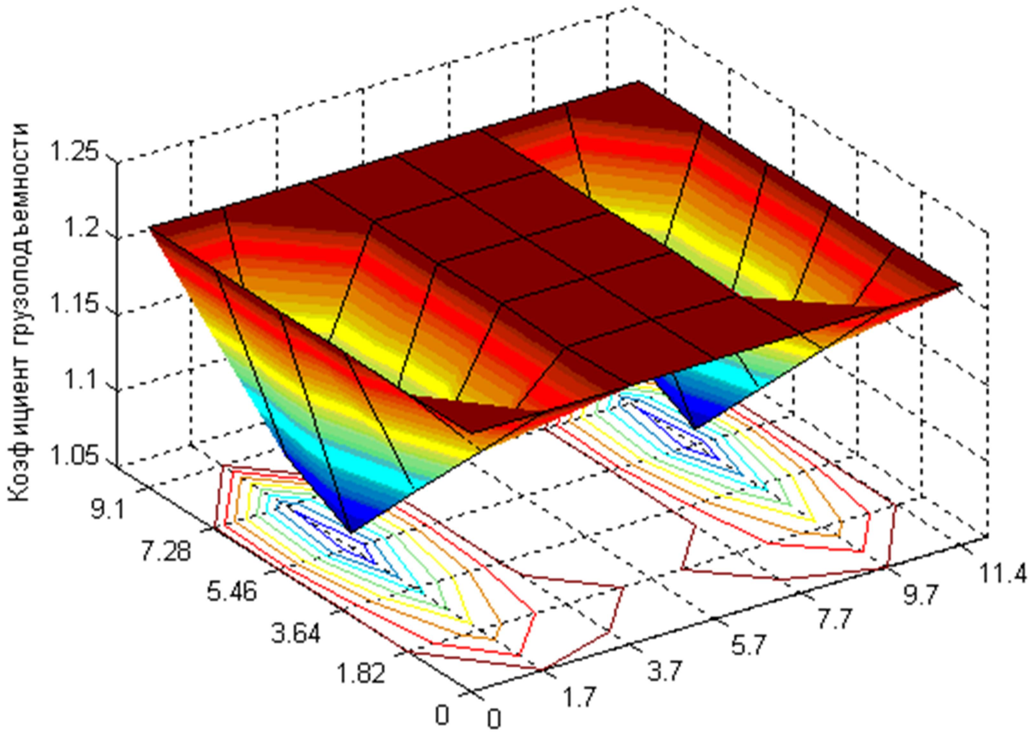


Рис. 23. Поверхность коэффициентов грузоподъемности при снижении предельного момента в сечениях до 70 % от Мпред

При визуальном анализе поверхностей четко видны 2 области в пролетном строении, которые имеют наибольшую чувствительность к дефектам в сечениях главных балок. Они расположены ближе к торцам и к левому краю пролетного строения. Сравнивая поверхности коэффициентов грузоподъемности при уровне повреждений 100 % и 70 % с поверхностью коэффициентов при уровне повреждения 30 %, можно сказать, что дефекты в середине пролетного строения при относительно малых повреждениях не оказывают существенного влияния на коэффициент грузоподъемности (плоская площадка на рис. 23). Кроме этого можно выделить главную балку, при расположении дефектов в которой наиболее сильно меняется коэффициент грузоподъемности. Это 4-ая балка пролетного строения с координатой по ширине 5,46 м.

Расположение областей пролетного строения, наиболее чувствительных к дефектам, у торцов пролетного строения обусловлено изменением в этих местах предельного момента, а смещение их к левому краю – наибольшей загруженностью балок в левой части пролетного строения за счет коэффициента полосности. При равномерной загруженности балок по ширине пролетного строения смещение областей к краям отсутствует.

На рис. 24 изображен разрез (по самой загруженной 4-ой балке) совмещения поверхностей коэффициентов грузоподъемности для уровней снижения предельного момента: 1) до 0; 2) 30 % от Мпред; 3) 40 % от Мпред; 4) 50 % от Мпред; 5) 60 % от Мпред; 6) 70 % от Мпред; 7) 80 % от Мпред; 8) 90 % от Мпред. Поверхности изображены снизу вверх по порядку в соответствии с уровнями снижения предельного момента.

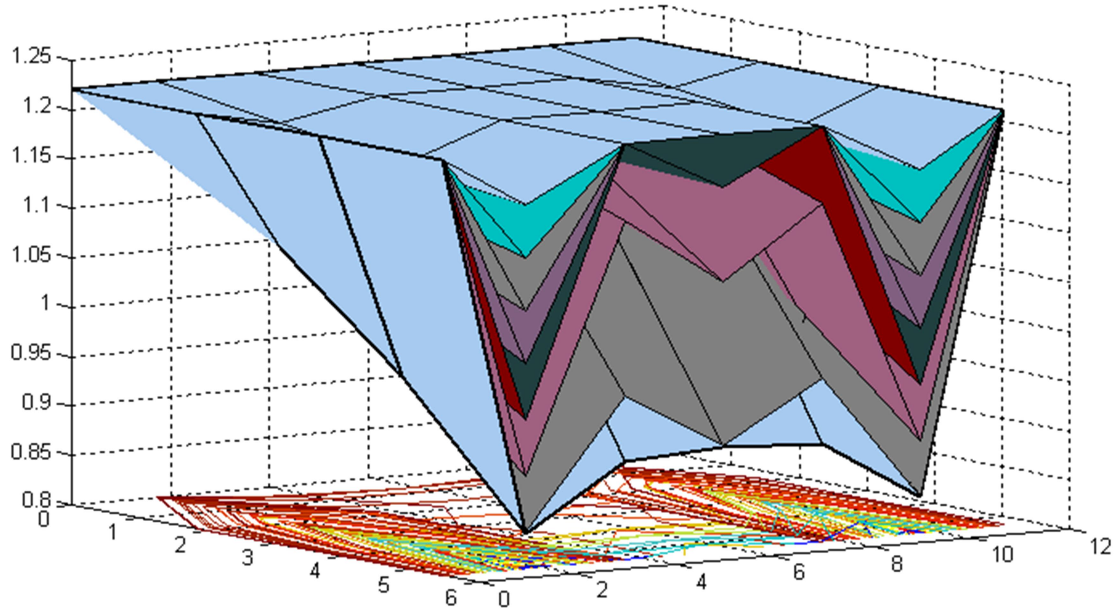


Рис. 24. Совмещение поверхностей коэффициентов грузоподъемности

Густота линий уровней на рис. 24 также свидетельствует о расположении области наибольшей чувствительности, при разных уровнях повреждений балок, у торцов пролетного строения.

На рис. 25 изображен график изменения коэффициента грузоподъемности в сечениях главных балок пролетного строения при разном уровне предельного момента. Сечения взяты на концах элементов главных балок и обозначены в легенде справа от графика, в соответствие с номером элемента на расчетной схеме.

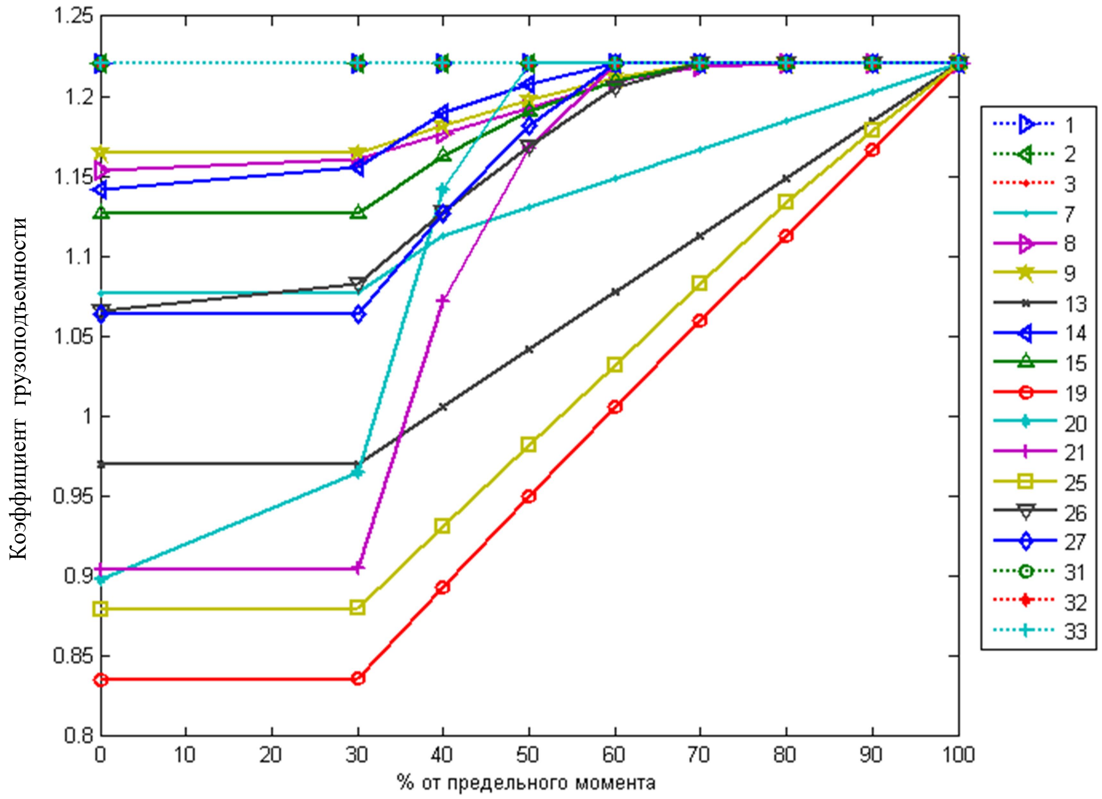


Рис. 25. График изменения коэффициентов грузоподъемности пролетного строения в зависимости от уровня предельного момента в сечениях главных балок

Дефекты в крайних балках, а именно в сечениях 1, 2, 3, 31, 32, 33 - не вызывают изменения коэффициента грузоподъемности при любом уровне снижения предельного момента. График изменения коэффициентов грузоподъемности в этих сечениях представлен горизонтальной линией, проходящей через ординату 1,2205. Этот эффект может быть связан с малой загруженностью балок временной нагрузкой. Тем самым расчетная схема при загружении нагрузкой АК1 раньше образует механизм, чем дефекты в крайней балке успевают повлиять на распределение усилий.

Изменение коэффициентов грузоподъемности в самых нагруженных балках в месте скачка предельного момента у торцов пролетного строения, а именно: в сечениях 13, 19, 25 - носит линейный характер. При этом скорость убывания коэффициента грузоподъемности в сечении увеличивается в зависимости от загруженности балки.

В остальных сечениях коэффициенты грузоподъемности изменяются нелинейно относительно уровня снижения предельного момента. В сечениях 20, 21 самой нагруженной балки скорость убывания коэффициента грузоподъемности максимальна относительно остальных сечений. При этом коэффициент грузоподъемности падает быстрее уменьшения предельного момента.

На графике ярко выражен уровень снижения предельного момента, при котором графики коэффициентов грузоподъемности имеют прямолинейный участок. Это уровень равен 30 % от Мпред. Чем обусловлено это значение?

При определении грузоподъемности по методу, описанному в нормативных документах, выбирается сечение, которое имеет минимальный запас прочности. Если предположить, что в качестве расчетного момента выступает момент от постоянной нагрузки, то в нашем случае, вследствие равномерного распределения постоянной нагрузки, такими сечениями являются сечения в месте изменения предельного момента в балках и в середине сечения. Возьмем сечение 15 в середине пролетного строения. Предельный момент в сечении Мпред=1627,46 кНм, момент от постоянной нагрузки Мпост=486,98кНм. Найдем, при каком уровне снижения предельного момента коэффициент грузоподъемности равен 0. Для этого вычислим: Мпост/Мпред=0,3. Это означает, что при уменьшении предельного момента на 30 % коэффициент грузоподъемности, вычисленный при постоянной нагрузке, равен 0, Мпред*0,3-Мпост=0. То есть при уровне предельного момента 30 % от Мпред образуется несколько пластических шарниров и схема пролетного строения превращается в механизм только при действии постоянной нагрузки. Этим и обусловлены горизонтальные участи на графиках коэффициентов грузоподъемности.

В сечениях 8, 14, 20, 26, при достижении предельного момента уровня в 30% от Мпред, не образуется пластических шарниров, поэтому графики для этих сечений не имеют горизонтальных участков.

Выводы

1. Применение методики определения грузоподъемности с помощью решения задачи линейного программирования позволяет вскрыть резервы несущей способности дефектной и бездефектной системы, моделирующей работу мостового сооружения.

2. Учет подвижности временной нагрузки приводит к снижению коэффициент грузоподъемности.

3. Наиболее чувствительные зоны расположения дефектов приближены к максимально загруженным элементам и элементам, имеющим минимальный запас прочности.

4. Зависимость коэффициентов грузоподъемности от изменения уровня повреждений является сложной и может носить как линейный, так и нелинейный характер в зависимости от расположения сечения на пролетном строении.

5. Предложенная методика построения поверхностей влияния дефектов может быть использована для оценки живучести при диагностике эксплуатируемых пролетных строений с повреждениями.

Библиографический список

1. Ефрюшин, С.В. Исследование несущей способности стержневых систем, применяемых в мостостроении по методу предельного равновесия / С.В.Ефрюшин, М.А.Викулов// Строительная механика и конструкции. – 2010. – Вып. №1. – С.7-15.
2. Ерхов, М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. /М.И. Ерхов –М.: Наука, 1978.-352 с.
3. Чирас, А. А. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. / А. А. Чирас – Вильнюс: Мокслас, 1982.-112 с.
4. ВСН 32-89 «Инструкция по определению грузоподъемности железобетонных балочных пролетных строений эксплуатируемых автодорожных мостов».
5. ВСН 36-84 «Инструкция по определению грузоподъемности сталежелезобетонных балочных пролетных строений автодорожных мостов».

References

1. Efryshin S.V. Research of rod systems bearing capacity applied in bridgeconstruction by method of limiting balance / S.V. Efryshin, M.A. Vikulov // Structural mechanics and structures. – 2010. – Issue. №1. – P.7-15.
2. Erhov M.I. The theory of ideal plastic bodies and structures. -M.: Nauka, 1978.-352 p.
3. Chiras A. Mathematical models of analysis and optimization of elastically systems. – Vilnius: Mokslas, 1982.-112p.
4. VSN 32-89 «Recommendation for definition of bearing capacity of reinforced-concrete beam spans of highway bridges ».
5. VSN 36-84 « Recommendation for definition of bearing capacity of steelferro-concrete highway bridge spans».

Ключевые слова: несущая способность, стержневые системы, предельное равновесие, линейное программирование.

Keywords: bearing capacity, bar systems, limit equilibrium, linear programming.

УДК 620.10:620.17

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Кан. техн. наук, проф.кафедры строительной механики
А.Н.Синозерский
Ст.преподаватель кафедры строительной механики Р.А.Мухтаров
Россия, г. Воронеж, тел.8(473)271-52-30
e-mail:

А.Н. Синозерский, Р.А.Мухтаров

ЗАВИСИМОСТЬ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ ВНУТРЕННИХ СИЛ ОТ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ КОРОТКИХ ПРИЗМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассматривается короткий стержень прямоугольного поперечного сечения при внецентренном сжатии с постоянной скоростью. Для каждого случая Б, н, п, l определяются максимальные значения равнодействующих внутренних сил. Усилия $\tilde{N}(\dot{\theta}, e)$ начальных, промежуточных и конечных условных состоянии являются линейными функциями экстремальных напряжений $\tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}, e)$.

A.N. Sinezyorsky, R.A. Muhtarov

DEPENDENCE OF RESULTANT INTERNAL FORCES ON EXTREME INNER COMPRESSION STRESS WITH CONSTANT SPEED OF RECTANGULAR CROSS-SECTION SHORT PRISM

Short bar of rectangular cross section under eccentric compression with constant velocity is under consideration. For every case(base, initial, interstitial, finite) maximum values of resultant internal forces are determined. Strains N (O, e) of initial, intermediate and final conditional states are linear functions of extreme stress $\tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}, e)$.

1. Исходные данные

В опытах на центральное сжатие до разрушения [1] элементов $b \cdot h \cdot L = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.4$ м из мелкозернистого бетона 28-дневного возраста при трёх относительных скоростях нагружения $\dot{\theta}_1 = 392{,}3 \cdot 10^{-3}$, $\dot{\theta}_2 = 39{,}23 \cdot 10^{-3}$, $\dot{\theta}_3 = 3{,}923 \cdot 10^{-3}$ установлены:

призменные пределы прочности $\overline{\sigma}_u(\dot{\theta}_1) = 26{,}09 \pm 1{,}47$ МПа, $\overline{\sigma}_u(\dot{\theta}_2) = 25{,}51 \pm 0{,}69$ МПа, $\overline{\sigma}_u(\dot{\theta}_3) = 23{,}64 \pm 1{,}37$ МПа с

$$\sigma_u(\dot{\theta}) = 28.38 - \frac{7.758}{1 + lg(1 + 895.6 \cdot \dot{\theta})}, \qquad (1)$$

зависимость напряжений $\tilde{\sigma}$ от деформаций $\tilde{\varepsilon}$

$$\tilde{\sigma} = E \cdot \tilde{\varepsilon} - \tilde{\alpha}(\dot{\theta}) \cdot (\tilde{\varepsilon})^{\tilde{\beta}(\dot{\theta})} \qquad (2)$$

с экстремальными при $\overline{\sigma}_u(\dot{\theta})$ деформациями $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_1) = 1600 \cdot 10^{-6}$, $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_2) = 1824 \cdot 10^{-6}$, $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_3) = 2045 \cdot 10^{-6}$ и

$$\varepsilon_u(\dot{\theta}) = 905 \cdot 10^{-6} + \frac{1800 \cdot 10^{-6}}{1 + 1.95 \cdot (\dot{\theta})^{0.22}}, \tag{3}$$

где $\dot{\theta} = \dot{\sigma}/\dot{\sigma}_{1.00}$; $\dot{\sigma}$, МПа $\cdot$ с$^{-1}$ – постоянная скорость нагружения; $\dot{\sigma}_{1.00} = 1$ МПа $\cdot$ с$^{-1}$;

E=31390 МПа – модуль упругости материала; $\tilde{\beta}(\dot{\theta})$ и $\tilde{\alpha}(\dot{\theta})$, МПа-параметры, определяемые из условия существования экстремума в случае $\tilde{\sigma} = \overline{\sigma}_u(\dot{\theta})$ $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$ по формулам

$$\tilde{\beta}(\dot{\theta}) = \frac{E \cdot \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})}{E \cdot \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}) - \overline{\sigma}_u(\dot{\theta})}, \tag{4}$$

$$\tilde{\alpha}(\dot{\theta}) = \frac{E}{\tilde{\beta}(\dot{\theta}) \cdot \left(\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})\right)^{\tilde{\beta}(\dot{\theta})}} \tag{5}$$

с $\tilde{\beta}(\dot{\theta}_1) = 2{,}08100$ и $\tilde{\alpha}(\dot{\theta}_1) = 15885000$ МПа, $\tilde{\beta}(\dot{\theta}_2) = 1{,}80358$ и $\tilde{\alpha}(\dot{\theta}_2) = 2764700$ МПа, $\tilde{\beta}(\dot{\theta}_3) = 1{,}58300$ и $\tilde{\alpha}(\dot{\theta}_3) = 733160$ МПа.

2. Постановка задач

Рассматривается стержень (рис. 1) длиной $L = 0{,}4$ м квадратного поперечного сечения шириной b и $h = b = 0{,}1$ м из мелкозернистого бетона в возрасте 28 суток. Равнодействующая внешних сил p приложена в точке f с координатами y_f, $z_f = 0$ и возрастает с $\dot{\theta} = F/(b \cdot h \cdot \dot{\sigma}_{1.00} \cdot t) = const$ за время $0 \ldots t$ от нуля до F.

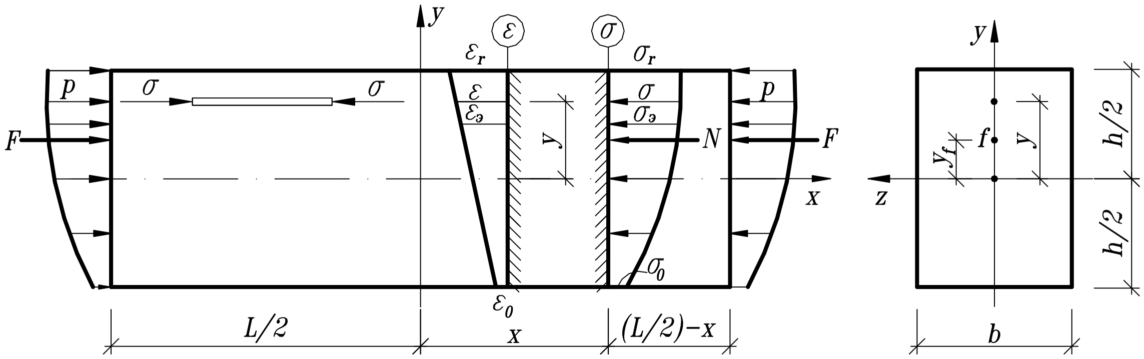


Рис. 1. Загружение стержня из мелкозернистого бетона

Элемент короткий, что исключает влияние гибкости на результаты расчёта. Сжимающие деформации ε, нормальные напряжения σ, равнодействующие внешних F и внутренних N сил принимаются по модулю.

Все компоненты тензора напряжений кроме $\sigma = \sigma_x$ равны нулю.

При центральном сжатии установлен закон деформирования (2), график которого представлен на рис. 2.

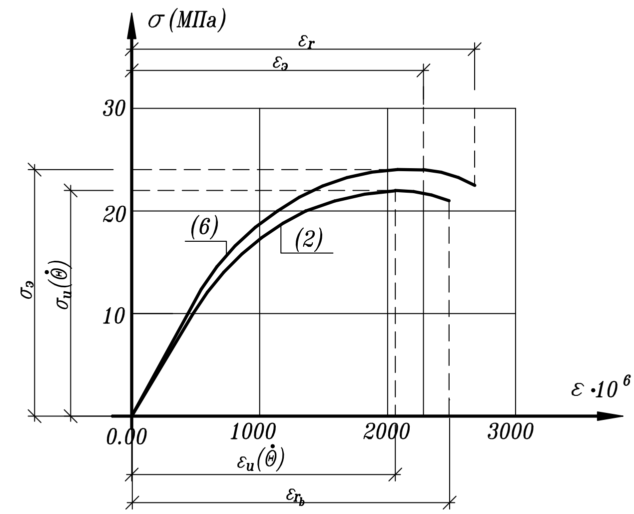


Рис. 2. Зависимость «$\sigma - \varepsilon$» при центральном сжатии

Полагаем, что при внецентренном воздействии с заданной скоростью $\dot{\theta}$ и относительным эксцентриситетом $e_f = y_f / h$

-имеет место зависимость

$$\sigma = E - \alpha(\dot{\theta}, e) \cdot (\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta}, e)} \tag{6}$$

с экстремальным (см.рис. 2) напряжением $\sigma_э \geq \overline{\sigma}_u(\dot{\theta})$ и деформацией $\varepsilon_э \geq \tilde{\varepsilon}_э(\dot{\theta})$;

-на уровне координаты y (см.рис.1)

$$\varepsilon = B \cdot (y - 0.5 \cdot h) + \varepsilon_r \tag{7}$$

с наибольшей

$$\varepsilon_r = \varepsilon_э \cdot r, \tag{8}$$

где B, м$^{-1}$ – параметр эпюры деформации ε; $r > 1$ – коэффициент увеличения $\varepsilon_э$, зависящий от $\dot{\theta}$ и e по причине возникающих при внецентренных воздействиях неоднородных состояний σ и ε.

Исследуем ряд Б, Н, п= 1, 2, … и l условных состояний:

-базовое Б с $\tilde{\sigma}_э = \overline{\sigma}_u(\dot{\theta})$, $\tilde{\varepsilon}_э = \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$, коэффициентом $\tilde{r}_Б$ и $\tilde{\varepsilon}_{r_Б} = \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}) \cdot r_Б$;

-начальное с $\tilde{\sigma}_{эн} = \overline{\sigma}_u(\dot{\theta})$, $\tilde{r}_н > \tilde{r}_Б$,

$$\tilde{\varepsilon}_э = 0.5 \cdot \left(\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}) + \tilde{\varepsilon}_{r_Б}\right) \tag{9}$$

и $\varepsilon_{r_н} = \tilde{\varepsilon}_э \cdot \tilde{r}_н$;

-промежуточные п= 1, 2, … с $\tilde{\sigma}_{эп} > \tilde{\sigma}_{эн}$, $\tilde{r}_п < \tilde{r}_н$, $\tilde{\varepsilon}_э$ по (9) и $\varepsilon_{r_п} = \tilde{\varepsilon}_э \cdot \tilde{r}_п$;

-конечное l (lim) с $\tilde{\sigma}_{эl} > \tilde{\sigma}_{эп}$, $\tilde{r}_l = \tilde{r}_b < \tilde{r}_п$, $\tilde{\varepsilon}_э$ по (9) и $\varepsilon_{r_l} = \tilde{\varepsilon}_э \cdot \tilde{r}_l$.

Найдём для каждого из перечисленных случаев Б, н, п, l максимальные значения равнодействующих внутренних сил $N_Б, N_н, N_п, N_l$.

3. Расчётные формулы

Для левой (см. рис. 1) отделённой части длиной $x + (L/2)$ записываем

$$N = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot dy,\ N \cdot y_f = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot dy \cdot y$$

или с учётом (6), (7) и $\alpha(\dot{\theta}, e) = \alpha$, $\beta(\dot{\theta}, e) = \beta$ после преобразовании получаем

$$N = b \cdot h \cdot E \cdot (\varepsilon_r - 0.5 \cdot B \cdot h) - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+1}}{B}, \tag{10}$$

$$N \cdot y_f = \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+1}}{B} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_r}{B}\right) - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 2} \cdot$$

$$\cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+2} - (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+2}}{(B)^2}. \tag{11}$$

Умножая (10) на $\left(-y_f\right)$ и складывая с (11), будем иметь

$$\Phi(B) = \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+1}}{B} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_r}{B}\right) - \frac{b \cdot \alpha}{\beta + 2} \cdot$$
$$\cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+2} - (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+2}}{(B)^2} + y_f \cdot b \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_r)^{\beta+1} - (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+1}}{B} - \right.$$
$$\left. -h \cdot E \left(\varepsilon_r - \frac{B \cdot h}{2}\right)\right] = 0\,. \tag{12}$$

Если

$$B \cdot h > \varepsilon_r, \tag{13}$$

то в сечении эпюра ε двух знаков. В связи с этим **вводим допущение**, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Зависимость «$\sigma - \varepsilon$» в случае растяжения

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha \cdot (\varepsilon)^\beta, \tag{14}$$

где α и β – коэффициенты, те же, что и (6), деформации ε – отрицательные, и при вычислении $(\varepsilon)^\beta$ берутся по модулю.

Здесь в уравнениях (10), (11), (12) выражения

$$(\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+1} \text{ и } (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+2} \tag{15}$$

следует заменить соответственно на

$$(B \cdot h - \varepsilon_r)^{\beta+1} \text{ и } (B \cdot h - \varepsilon_r)^{\beta+2}. \tag{16}$$

Когда $\boldsymbol{B \cdot h = \varepsilon_r}$**,** то вместо (15) и (16) **вводятся нули**.

Определение параметра $\boldsymbol{B}$ и усилия $\boldsymbol{N}$ проводим численными способами.

4. Вычисление базовых показателей

Имеем $\tilde{\sigma}_э = \overline{\sigma}_u(\dot{\theta}_1)$, $\tilde{\varepsilon}_э = \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$, $\tilde{\beta}_Б$, $\tilde{\alpha}_Б$ по (4), (5) и зависимость (2).

Назначаем коэффициент увеличения $r_0 = 1$ и шаг $\Delta_r = 0{,}05$. Выполняем расчёты при

$$r_0, r_1 = r_0 + 1 \cdot \Delta_r, r_2 = r_0 + 2 \cdot \Delta_r, \ldots, r_k = r_0 + k \cdot \Delta_r. \tag{17}$$

Определение $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k$ начинаем с определения корня уравнения (12). Например, в случае r_0, имея при B_{0C} и B_{0m}

$$\Phi(B_{0C}) > 0 \text{ и } \Phi(B_{0m}) < 0, \tag{18}$$

находим методом хорд [2] с точностью до 6…7 - значащих цифр:

$$B_{0p+1} = \frac{B_{0C} \cdot \left(\Phi(B_{0m})\right) - B_{0m} \cdot \left(\Phi(B_{0C})\right)}{\Phi(B_{0m}) - \Phi(B_{0C})}, \tag{19}$$

где (m) и $(m + 1)$ - приближения параметра B_0.

Затем из выражения (10) получим N_0.

Продолжаем расчёт до достижения условия

$$N_{k-2} < N_{k-1} > N_k. \tag{20}$$

Затем для вычисления $maxN = N_Б$ применяем квадратичную интерполяцию [3], полагая

$$N_r = A_0 + A_1 \cdot u + A_2 \cdot u^2, \tag{21}$$
$$u = \frac{r - r_{k-2}}{\Delta_r}$$

с узловыми значениями $u = 0, u = 1, u = 2$ и коэффициентами

$$A_0 = N_{k-2}, A_1 = 0{,}5 \cdot (-3 \cdot N_{k-2} + 4 \cdot N_{k-1} - N_k),$$
$$A_2 = 0{,}5 \cdot (N_{k-2} - 2 \cdot N_{k-1} + N_k). \tag{22}$$

Далее устанавливаем:

- положение экстремума $u_э = -A_1/2 \cdot A_2$; (23)

- усилие $maxN = A_0 + A_1 \cdot u_э + A_2 \cdot u_э^2$; (24)
- коэффициент увеличения $r_Б = r_{k-2} + \Delta_r \cdot u_э$; (25)
- деформацию $\varepsilon_{r_Б}$ по (8);
- параметр $B_{r_Б}$ из решения (12);
- базовую силу $\tilde{N}_Б \approx maxN$ по (10).
-

Примеры

***Партия 1**:* $\dot{\theta}_1 = 392{,}3 \cdot 10^{-3}$, $y_f = 0{,}005$ м и $e = y_f/h = 0{,}050$.

Полученные сведения и результаты расчётов представлены в табл.1, а на рис.3 построен график $N_m - r_m$.

Таблица 1

$\dot{\theta}_1 \cdot 10^3$	e	$\tilde{\varepsilon}_э = \tilde{\varepsilon}_u \cdot 10^6$	$\tilde{\sigma}_э = \overline{\sigma}_u$, МПа	Параметры		m	$\tilde{r}_m$	$\tilde{\varepsilon}_{rm} \cdot 10^6$	$\tilde{B}_{rm} \cdot 10^2$,м$^{-1}$	$\tilde{N}_m$, кН
				$\alpha_Б$, МПа	$\beta_Б$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
392.3	0.050	1600	26.09	15885000	2.08100	0	1.00	1600	1.1203824	217.232
						1	1.05	1680	1.2089067	219.486
						2	1.10	1760	1.3013655	221.048
						3	1.15	1840	1.3977300	221.942
						4	1.20	1920	1.4979084	222.193
						$k = 5$	1.25	2000	1.6017872	221.822
						6	1.30	2080	1.7092173	220.853
						Б	1.1952	1912.3	1.4881064	222.196

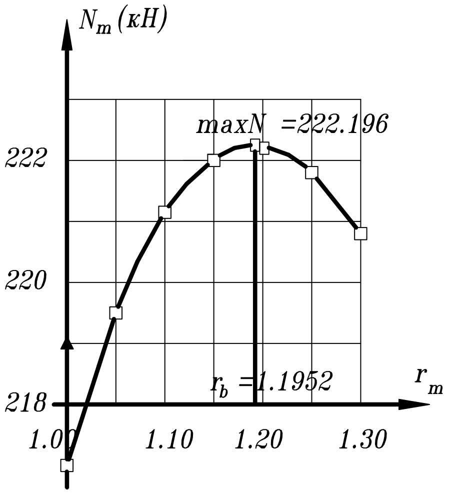


Рис. 3. График зависимости $N_m - r_m$

При $k = 5$ критерий (20) удовлетворяется

$$N_3 < N_4 > N_{k=5}.$$

В соответствии с (22) вычисляем коэффициенты

$$A_0 = 221.942 \text{ кН},$$

$$A_1 = 0{,}5 \cdot (-3 \cdot 221{,}942 + 4 \cdot 222{,}193 - 221{,}822) = = 0.562 \text{ кН},$$

$$A_2 = 0{,}5 \cdot (221{,}942 - 2 \cdot 222{,}193 + 221{,}822) = = -0{,}311 \text{ кН}.$$

Находим по формулам:

(23) – положение экстремума:

$$u_э = -\frac{0.562}{2 \cdot (-0.311)} = 0{,}9035;$$

(24) – усилие:

$$maxN = \frac{221}{942} + 0{,}562 \cdot 0{,}9035 + (-0{,}311) \cdot (0{,}9035)^2 = = 222{,}196 \text{ кН};$$

(25) – коэффициент увеличения: $\tilde{r}_Б(\dot{\theta}_1, 0{,}05) = 1{,}15 + 0{,}9035 \cdot 0{,}05 = 1{,}1952$;

(8) – деформацию: $\tilde{\varepsilon}_{r_Б}(\dot{\theta}_1, 0{,}05) = 1600 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}1952 = 1912{,}3 \cdot 10^{-6}$, при которой из решения (12) и (10) определены параметр $\tilde{B}_Б = 1{,}4881064 \cdot 10^{-2}$ м$^{-1}$ и базовая сила $\tilde{N}_Б(\dot{\theta}_1, 0{,}05) = 222{,}196$ кН (см. строку $m =$ Б в табл.1).

***Партия 2**:* $\dot{\theta}_2 = 39{,}23 \cdot 10^{-3}$, $y_f = 0{,}005$ м и $\dot{\theta}_3 = 3{,}923 \cdot 10^{-3}$ $y_f = 0{,}0045$ м $e = 0{,}045$ с приведёнными в табл. 2 только результатами вычислений для $m = 1, 2, k = 3$, Б.

Таблица 2

j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	e	$\tilde{\varepsilon}_{эj} = \tilde{\varepsilon}_{uj} \cdot 10^6$	$\tilde{\sigma}_{эj} = \overline{\sigma}_{uj}$, МПа	Параметры $\tilde{\alpha}_{jБ}$, МПа	Параметры $\tilde{\beta}_{jБ}$	m	$\tilde{r}_m$	$\tilde{\varepsilon}_{rm} \cdot 10^6$	$\tilde{B}_{rm} \cdot 10^2$, м$^{-1}$	$\tilde{N}_m$, кН
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39.23	0.050	1824	25.51	2764700	1.80358	1	1.15	2097.6	1.6386557	217.381
							2	1.20	2188.8	1.7511567	217.740
							$k = 3$	1.25	2280.0	1.8672091	217.574
							Б	1.2092	2205.0	1.7722802	217.748
3	3.923	0.045	2045	23.64	733160	1.58300	1	1.15	2351.8	1.8231443	204.750
							2	1.20	2454.0	1.9482932	205.072
							$k = 3$	1.25	2556.2	2.0770938	204.967
							Б	1.2127	2480.0	1.9807194	205.085

Базовые усилия $\tilde{N}_Б(\dot{\theta}_1, 0{,}050) = 222{,}196$ кН, $\tilde{N}_Б(\dot{\theta}_2, 0{,}050) = 217.748$ кН, $\tilde{N}_Б(\dot{\theta}_3, 0{,}045) = 205{,}085$ кН составляют всего 0,940, 0,929, 0,921 от средних опытных разрушающих нагрузок $\overline{F}_u(\dot{\theta}_1, 0{,}050) = 236{,}3$ кН, $\overline{F}_u(\dot{\theta}_2, 0{,}050) = 234{,}4$ кН, $\overline{F}_u(\dot{\theta}_3, 0{,}045) = 222{,}6$ кН.

5. Определение характеристик начальных состояний

Здесь $\tilde{\sigma}_{эн} = \overline{\sigma}_u(\dot{\theta})$ и $\tilde{\varepsilon}_э$ является средним арифметическим $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$, $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{r}_Б}(\dot{\theta}, e)$, см.(9). Поэтому вычисление соответствующих показателей выполняем по методике (4) и сводим в табл. 3.

Таблица 3

j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	e	$\tilde{\varepsilon}_{эj} \cdot 10^6$ по (9)	$\tilde{\sigma}_{энj} = \overline{\sigma}_{uj}$, МПа	Параметры $\tilde{\alpha}_{jн}$, МПа	Параметры $\tilde{\beta}_{jн}$	m	$\tilde{r}_m$	$\tilde{\varepsilon}_{rm} \cdot 10^6$	$\tilde{B}_{rm} \cdot 10^2$, м$^{-1}$	$\tilde{N}_m$, кН
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	392.3	0.050	1756.2	26.09	4944744	1.898505	1	1.15	2019.6	1.5617698	222.212
							2	1.20	2107.4	1.6706466	222.541
							$k = 3$	1.25	2195.2	1.7831315	222.307
							н	1.2042	2114.8	1.6799870	222.543
2	39.23	0.050	2014.8	25.51	1244370	1.676038	1	1.15	2317.1	1.8366635	217.546
							2	1.20	2417.8	1.9600649	217.949
							$k = 3$	1.25	2518.5	2.0870107	217.866
							н	1.2165	2451.0	2.0015349	217.974
3	3.923	0.045	2262.5	23.64	437444	1.498946	1	1.17	2647.2	2.0946669	205.040
							2	1.22	2760.3	2.2340209	205.226
							$k = 3$	1.27	2873.4	2.3770952	205.014
							н	1.2184	2756.6	2.2293952	205.226

6. Показатели конечных условных состояний

Определение экстремальных напряжений $\tilde{\sigma}_{эl}(\dot{\theta}, e)$ проводим последовательными приближениями. Задаёмся $\tilde{\sigma}_{эl(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{эl(1)}$, при которых $\tilde{r}_{l(0)} > \tilde{r}_Б(\dot{\theta}, e)$ и $\tilde{r}_{l(1)} < \tilde{r}_Б(\dot{\theta}, e)$.

Напряжения $\tilde{\sigma}_{эl(p=2,3,\dots)}$ находим методом хорд [2]:

$$\tilde{\sigma}_{эl(p+1)} = \frac{\tilde{\sigma}_{эl(0)} \cdot \delta_{(p)} - \tilde{\sigma}_{эl(p)} \cdot \delta_{(0)}}{\delta_{(p)} - \delta_{(0)}}, \tag{26}$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$ - приближения $\tilde{\sigma}_{эl}$; $\delta_{(0)}$ и $\delta_{(p)}$ – отклонения $\tilde{r}_{l(0)}$ и $\tilde{r}_{l(p)}$ от базового коэффициента увеличения $\tilde{r}_Б(\dot{\theta}, e)$ для

$$\left.\begin{aligned} \delta_{(0)} &= \tilde{r}_{l(0)} - \tilde{r}_Б(\dot{\theta}, e) > 0, \\ \delta_{(p)} &= \tilde{r}_{l(p)} - \tilde{r}_Б(\dot{\theta}, e) < 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Процесс заканчиваем при абсолютной величине $\left|\delta_{(p+1)}\right| \leq 5 \cdot 10^{-5}$. (28)

Принимая $\tilde{\sigma}_{эl}\left(\dot{\theta}, e\right) = \tilde{\sigma}_{эl(p+1)}$ – с округлением до 5 - значащих цифр, вычисляем окончательные характеристики $\overline{\alpha}_l\left(\dot{\theta}, e\right)$, $\overline{\beta}_l\left(\dot{\theta}, e\right)$, $\overline{r}_l\left(\dot{\theta}, e\right)$, $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{r}_l}\left(\dot{\theta}, e\right)$, $\tilde{B}_l\left(\dot{\theta}, e\right)$, $\tilde{N}_l\left(\dot{\theta}, e\right)$, представленные в табл. 4.

Таблица 4

j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	e	$\tilde{\varepsilon}_{эj} \cdot 10^6$ по (9)	$\tilde{\sigma}_{элj}$, МПа	Параметры		m	$\tilde{r}_m$	$\tilde{\varepsilon}_{rm} \cdot 10^6$	$\tilde{B}_{rm} \cdot 10^2$,м$^{-1}$	$\tilde{N}_m$, кН
					$\tilde{\alpha}_{jl}$, МПа	$\tilde{\beta}_{jl}$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	392.3	0.050	1756.2	28.720	14924800	2.087586	1	1.15	2019.6	1.5329518	244.372
							2	1.20	2107.4	1.6429057	244.649
							$k = 3$	1.25	2195.2	1.7569393	244.241
							l	1.1952	2099.0	1.6322105	244.653
2	39.23	0.050	2014.8	28.165	2542290	1.802889	1	1.15	2317.1	1.8102733	240.012
							2	1.20	2417.8	1.9344916	240.408
							$k = 3$	1.25	2518.5	2.0626253	240.225
							l	1.2092	2436.3	1.9577500	240.416
3	3.923	0.045	2262.5	26.169	692934	1.588467	1	1.17	2647.2	2.0717642	226.862
							2	1.22	2760.3	2.2118967	227.027
							$k = 3$	1.27	2873.4	2.3559976	226.726
							l	1.2127	2743.7	2.1910679	227.033

Изменения по сравнению с начальными состояниями составили (см. табл.4 и табл.3):

$$\Delta\tilde{\sigma}_э\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 28.720 - 26.090 = 2.630 \text{ МПа},$$
$$\Delta\tilde{\sigma}_э\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 28.165 - 25.510 = 2.655 \text{ МПа},$$
$$\Delta\tilde{\sigma}_э\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 26.169 - 23.640 = 2.529 \text{ МПа};$$
$$\Delta\tilde{r}\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 1.1952 - 1.2042 = -0.0090,$$
$$\Delta\tilde{r}\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 1.2092 - 1.2165 = -0.0073,$$
$$\Delta\tilde{r}\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 1.2127 - 1.2184 = -0.0057;$$
$$\Delta\tilde{N}\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 244.653 - 222.543 = 22.110 \text{ кН},$$
$$\Delta\tilde{N}\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 240.416 - 217.974 = 22.442 \text{ кН},$$
$$\Delta\tilde{N}\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 227.027 - 205.226 = 21.801 \text{ кН}.$$

7. Характеристики промежуточных условных состояний

Задаёмся шагом для экстремальных напряжений $\Delta\sigma\left(\dot{\theta}, e\right) \approx \Delta\sigma_э\left(\dot{\theta}, e\right)/3$. При: $\Delta\tilde{\varepsilon}_э\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 1756.2 \cdot 10^{-6}$, $\Delta\sigma\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 0.874$ МПа и

$$\Delta\sigma_{э1} = \overline{\sigma}_u\left(\dot{\theta}_1\right) + \Delta\sigma\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 26.090 + 0.874 = 26.964 \text{ МПа},$$
$$\Delta\sigma_{э2} = \overline{\sigma}_u\left(\dot{\theta}_1\right) + 2 \cdot \Delta\sigma\left(\dot{\theta}_1, 0.05\right) = 26.090 + 2 \cdot 0.874 = 27.838 \text{ МПа};$$

$\Delta\tilde{\varepsilon}_э\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 2014.8 \cdot 10^{-6}$, $\Delta\sigma\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 0.875$ МПа и

$$\Delta\sigma_{э1} = \overline{\sigma}_u\left(\dot{\theta}_2\right) + \Delta\sigma\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 25.510 + 0.875 = 26.385 \text{ МПа},$$
$$\Delta\sigma_{э2} = \overline{\sigma}_u\left(\dot{\theta}_2\right) + 2 \cdot \Delta\sigma\left(\dot{\theta}_2, 0.05\right) = 25.510 + 2 \cdot 0.875 = 27.260 \text{ МПа};$$

$\Delta\tilde{\varepsilon}_э\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 2262.5 \cdot 10^{-6}$, $\Delta\sigma\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 0.870$ МПа и

$$\Delta\sigma_{э1} = \overline{\sigma}_u\left(\dot{\theta}_3\right) + \Delta\sigma\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 23.640 + 0.870 = 24.510 \text{ МПа},$$
$$\Delta\sigma_{э2} = \overline{\sigma}_u\left(\dot{\theta}_3\right) + 2 \cdot \Delta\sigma\left(\dot{\theta}_3, 0.045\right) = 23.640 + 2 \cdot 0.870 = 25.380 \text{ МПа}$$

получим окончательные характеристики по табл. 5

Таблица 5

j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	e	$\tilde{\varepsilon}_{эj} \cdot 10^6$ по (9)	п	$\tilde{\sigma}_{эпj}$, МПа	Параметры		m	$\tilde{r}_m$	$\tilde{\varepsilon}_{rm} \cdot 10^6$	$\tilde{B}_{rm} \cdot 10^2$, м$^{-1}$	$\tilde{N}_m$, кН
						$\tilde{\alpha}_{пj}$, МПа	$\tilde{\beta}_{пj}$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	392.3	0.050	1756.2	1	26.964	6969680	1.957422	1	1.15	2019.6	1.5523935	229.584
								2	1.20	2107.4	1.6616128	229.900
								$k = 3$	1.25	2195.2	1.7745866	229.614
								$п = 1$	1.2012	2109.5	1.6642559	229.901
				2	27.838	10052200	2.020114	1	1.15	2019.6	1.5428198	236.950
								2	1.20	2107.4	1.6523885	237.249
								$k = 3$	1.25	2195.2	1.7658654	236.907
								$п = 1$	1.1983	2104.5	1.6487057	237.250
2	39.23	0.050	2014.8	1	26.385	1556020	1.715825	1	1.15	2317.1	1.8281138	224.957
								2	1.20	2417.8	1.9517785	225.359
								$k = 3$	1.25	2518.5	2.0790922	225.247
								$п = 1$	1.2141	2446.2	1.9873246	225.379
				2	27.260	1968130	1.757547	1	1.15	2317.1	1.8194157	232.361
								2	1.20	2417.8	1.9433486	232.761
								$k = 3$	1.25	2518.5	2.0710609	232.617
								$п = 1$	1.2118	2440.6	1.9719490	232.775
3	3.923	0.045	2262.5	1	24.510	509387	1.526985	1	1.17	2647.2	2.0868776	212.551
								2	1.22	2760.3	2.2265056	212.731
								$k = 3$	1.27	2873.4	2.3699078	212.491
								$п = 1$	1.2164	2572.1	2.2162519	212.732
				2	25.380	596829	1.556093	1	1.17	2647.2	2.0789937	220.058
								2	1.22	2760.3	2.2188918	220.230
								$k = 3$	1.27	2873.4	2.3626010	199.958
								$п = 1$	1.2144	2747.6	2.2034630	220.233

8. Оценка полученных результатов

Сводка основных показателей рассмотренных условных состояний представлена в табл. 6. На рис. 4 изображены графики «$\widetilde{N} - \tilde{\sigma}_э$».

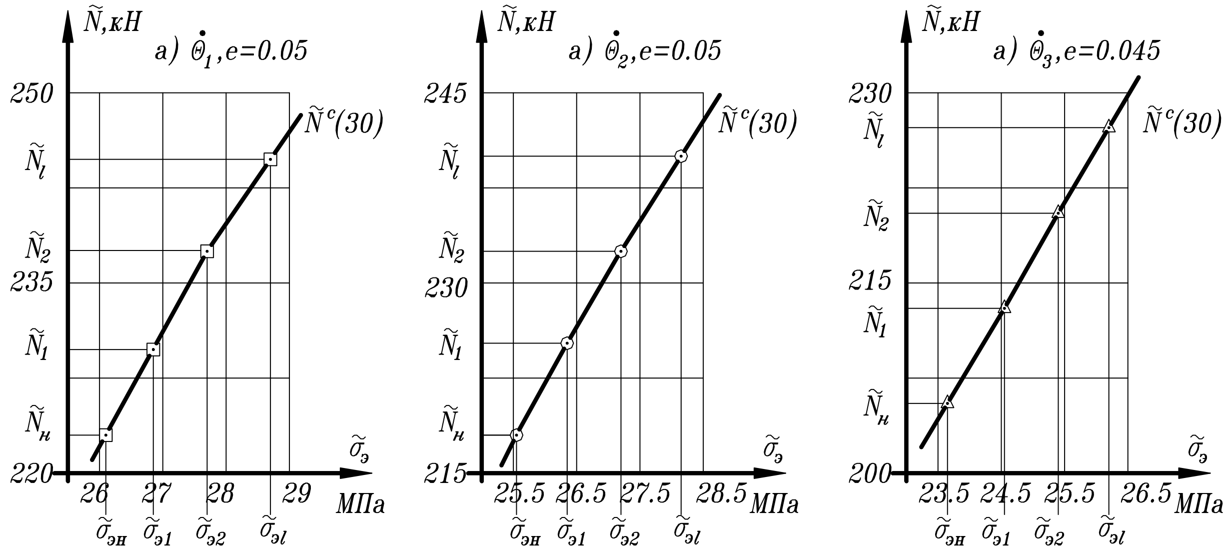


Рис.4. □,○,△ - условные усилия $\widetilde{N}_{н,п,l}$ при напряжениях $\tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}_1, 0.05)$, $\tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}_2, 0.05)$, $\tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}_3, 0.045)$

Видим, что зависимости усилий $\widetilde{N}$ от экстремальных напряжений $\tilde{\sigma}_э$ близки к линейной:

$$\widetilde{N}^c = a + b \cdot \tilde{\sigma}_э. \tag{29}$$

По сведениям, установленным для начального и конечного состояний находим параметры:

$$a = \frac{\widetilde{N}_н \cdot \tilde{\sigma}_{эl} - \widetilde{N}_l \cdot \tilde{\sigma}_{эн}}{\tilde{\sigma}_{эl} - \tilde{\sigma}_{эн}}, \qquad b = \frac{\widetilde{N}_l - \widetilde{N}_н}{\tilde{\sigma}_{эl} - \tilde{\sigma}_{эн}}.$$

При $\widetilde{N}_н$, $\widetilde{N}_l$ и $\tilde{\sigma}_{эн}$, $\tilde{\sigma}_{эl}$ из табл. 6 получим формулы

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{N}^c(\dot{\theta}_1, 0.05) &= 3.208 + 8.407 \cdot \tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}_1, 0.05), \\ \widetilde{N}^c(\dot{\theta}_2, 0.05) &= 2.345 + 8.453 \cdot \tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}_2, 0.05), \\ \widetilde{N}^c(\dot{\theta}_3, 0.045) &= 1.384 + 8.623 \cdot \tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}_3, 0.045) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

и значения равнодействующих внутренних сил $\widetilde{N}^c(\dot{\theta}_j, e)$, совпадающие с исходными $\widetilde{N}(\dot{\theta}_j, e)$ в пределах точности выполненных расчётов (см. столбцы 12, 13 табл. 6).

Выводы

Усилия $\widetilde{N}(\dot{\theta}, e)$ начальных, промежуточных и конечных условных состояний являются линейными функциями (29) экстремальных напряжений $\tilde{\sigma}_э(\dot{\theta}, e)$. Для определения коэффициентов a и b этих функций достаточно рассмотреть только состояния н и l.

Таблица 4

j	$\dot{\theta}_j \cdot 10^3$	e	$\tilde{\varepsilon}_{эj} \cdot 10^6$ по (9)	Состояние н, п, l	$\tilde{\sigma}_{эj}$, МПа при н, п, l	Параметры		$\tilde{r}_{н,п,l}$	$\tilde{\varepsilon}_r \cdot 10^6$	$\tilde{B}_r \cdot 10^2$, м$^{-1}$	Усилия, кН	
						$\tilde{\alpha}_j$, МПа	$\tilde{\beta}_j$				$\tilde{N}_{н,п,l}$, кН	$\tilde{N}^c$ по (30)
1	2	3	4	5	6	7	8	9		11	12	13
1	392.3	0.050	1756.2	н	26.090	4944744	1.898505	1.2042	2114.8	1.6799870	222543	228.547
				п=1	26.964	6969680	1.957422	1.2012	2109.5	1.6642559	229.901	229.894
				п=2	27.838	10052220	2.020114	1.1983	2104.5	1.6487057	237.250	237.242
				l	28.720	14924800	2.087586	1.1952	2099.0	1.6322105	244.653	244.657
2	39.23	0.050	2014.8	н	25.510	1244370	1.676038	1.2165	2451.0	2.0015349	217.974	217.981
				п=1	26.385	1556020	1.715825	1.2141	2446.2	1.9873246	225.379	225.377
				п=2	27.260	1968130	1.757547	1.2118	2440.6	1.9719490	232.775	232.774
				l	28.165	2542290	1.802889	1.2092	2436.3	1.9577500	240.416	240.424
3	3.923	0.045	2262.5	н	23.640	437444	1.498946	1.2184	2756.6	2.2293952	205.226	205.232
				п=1	24.510	509387	1.526985	1.2164	2752.1	2.2162519	212.732	212.734
				п=2	25.380	596829	1.556093	1.2144	2747.6	2.2034630	220.233	220.236
				l	26.169	692934	1.588467	1.2127	2743.7	2.1910679	227.033	227.039

Библиографический список

1. Синозерский, А.Н. Определение усилий соответствующих началу микротрещинообразования, при внецентренных нагружениях призм из мелкозернистого бетона 28 – дневного возраста по методике условных деформации / Мухтаров Р.А. /Научно – технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – 2011. – вып.№1 (2). – С.24-27.
2. Лапчик, М.П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов /М.П.Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред.М.П.Лапчика. – М.: Изд-во центр «Академия», 2004.-384 с.
3. Фильчаков, П.Ф. Справочник по высшей математике /П.Ф. Фильчаков, – Киев: Изд-во «Науково думка», 1973. – 744 с.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, экстремальное напряжение, равнодействующая внутренних сил.
Key words: metal, bearing capacity, limiting equilibrium, design-computational complex LIRA.

УДК 624.042+624.072

*Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры
строительной механики
В. С. Варнавский
Магистр кафедры строительной
Механики
А. С. Поворин
Россия, г. Воронеж, тел. 8(4732)71-52-30;
email: stroymech.vgasu@yandex.ru*

*The Voronezh State University
of Architecture and Civil Engineering
PhD of Technical Science, Lecturer of Constructional
Mechanics Department
V. S. Varnavsky
Master of Constructional
Mechanics Department
A. S. Povorin
Voronezh Russia. tel.: +7(4732)715230;
email stroymech.vgasu@yandex.ru*

В. С. Варнавский, А. С. Поворин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО РАМНОГО КАРКАСА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ЛИРА

Рассматривается определение несущей способности металлического плоского каркаса по критерию предельного равновесия. Методика позволяет моделировать процесс упруго-пластического деформирования конструкции и учитывать перераспределение усилий. В данной работе исследуются возможности ПК ЛИРА при выполнении расчётов рамного статически неопределимого стального каркаса с учётом пластических деформаций материала.

V. S. Varnavsky, A. S. Povorin

DEFINITION OF BEARING CAPACITY OF METAL FRAME, USING DESIGN-COMPUTATIONAL COMPLEX LIRA.

Definition of bearing capacity of metal plane frame according to criteria of limit equilibrium, was analyzed. In the very work design-computational complex LIRA resources while performing of calculations of frame statistically indeterminate steel frame with account of material plastic deformation is analysed.

В настоящее время расчёт металлических стержневых каркасов зданий и сооружений на нагрузку часто выполняется при условии линейно-упругого деформирования материала. В то же время большинство строительных сталей обладают пластическими свойствами и нормативные документы рекомендуют при наличии возможности учитывать эти свойства в расчётах. Расчёт конструкций на прочность с учётом пластических деформаций стали осуществляется в двух основных постановках:

1. Расчёт по критерию ограниченных пластических деформаций, при котором не нарушается целостность элементов конструкции и не ухудшаются эксплуатационные свойства материала. Этот метод рекомендуется нормативными документами [1, 2].

2. Расчёт на определение предельной несущей способности конструкции. Расчёт выполняется на максимальную возможную нагрузку, возникающую в исключительных случаях эксплуатации.

Во втором виде расчёта используется критерий предельного равновесия и предельным состоянием конструкции считается момент её превращения в геометрически изменяемую систему (механизм). При этом в наиболее нагруженных изгибаемых элементах в предельном состоянии образуются пластические шарниры. Появление пластического шарнира означает исчерпание несущей способности сечения стержня. Пластические деформации в стали, соответствующие пластическому шарниру, могут заметно превышать нормативный критерий ограниченных пластических деформаций. Несмотря на это, расчёт стальных конструкций по несущей способности с допущением пластических шарниров предствляет значительный практический интерес, так как позволяет выявить резервы несущей способности конструкции и определить соответствующую предельную нагрузку. Особенно это актуально для статически неопределимых стержневых систем, в которых при образовании пластических шарниров происходит перераспределение усилий. В результате несущая способность конструкции в целом может заметно превышать несущую способность её отдельных элементов.

В данной работе рассматривается решение задачи второго вида с применением программно-вычислительного комплекса ЛИРА, широко распространённого в России в расчётах строительных конструкций.

Основными целями данной работы являются:

1) определение несущей способности плоского стального каркаса, применяемого в промышленном строительстве, по критерию предельного равновесия;

2) исследование возможностей программно-вычислительного комплекса ЛИРА для расчёта несущей способности плоской стержневой системы с учётом пластических деформаций материала.

Задачами данной работы являются:

1) выбор конечно-элементной схемы разбиения металлического каркаса и проведение расчёта на нагрузку в условиях линейно-упругого деформирования материала; подбор сечений элементов на основе упругого расчёта;

2) упруго-пластический расчёт металлического каркаса; оценка сходимости и достоверности результатов расчёта;

3) определение схемы и последовательности возникновения пластических шарниров в стержнях конструкции вплоть до превращения всей рамной конструкции или крупных её частей в геометрически изменяемую систему, то есть до потери конструкцией или крупными её частями своей несущей способности;

4) нахождение предельной нагрузки, вызывающей потерю несущей способности всей конструкции или её частей.

В качестве объекта исследования принят плоский рамный стальной каркас, являющийся частью запроектированного Поворинным А.С. несущего пространственного каркаса промышленного здания в г.Димитровграде Ульяновской области. Сравнительный анализ результатов пространственного и плоского расчётов каркаса в условиях линейно-упругого деформирования по ПК ЛИРА показал допустимость решения задачи в плоской постановке с целью экономии ресурсов и времени вычислений.

Расчётная схема плоской рамы, включающая в себя размеры, нагрузку, нумерацию элементов и узлов, изображена на рис. 1. Закрепление всех опорных узлов шарнирно-неподвижное. Поперечные сечения стержней в виде двутавров были подобраны в ходе упругого расчёта согласно требованиям нормативных документов [1]. Окончательные эпюры продольных сил N и изгибающих моментов M_y приводятся на рис. 2,3.

Для выполнения упруго-пластических расчетов выбирается соответствующий тип элементов – физически нелинейный универсальный пространственный стержневой КЭ (тип -

210). Поведение материала описывается экспоненциальным законом деформирования из базы данных ПК Лира. Максимальная нагрузка для упругого расчета является начальной для упруго-пластического расчёта. Условно ей присваивается коэффициент k=1. В ходе пластического расчета увеличение нагрузки отслеживается с помощью этого коэффициента.

Обязательным требованием к решению нелинейной задачи численными методами является обеспечение сходимости и достоверности решения. В ПК ЛИРА решение физически нелинейной задачи выполняется методом пошагового увеличения нагрузки.

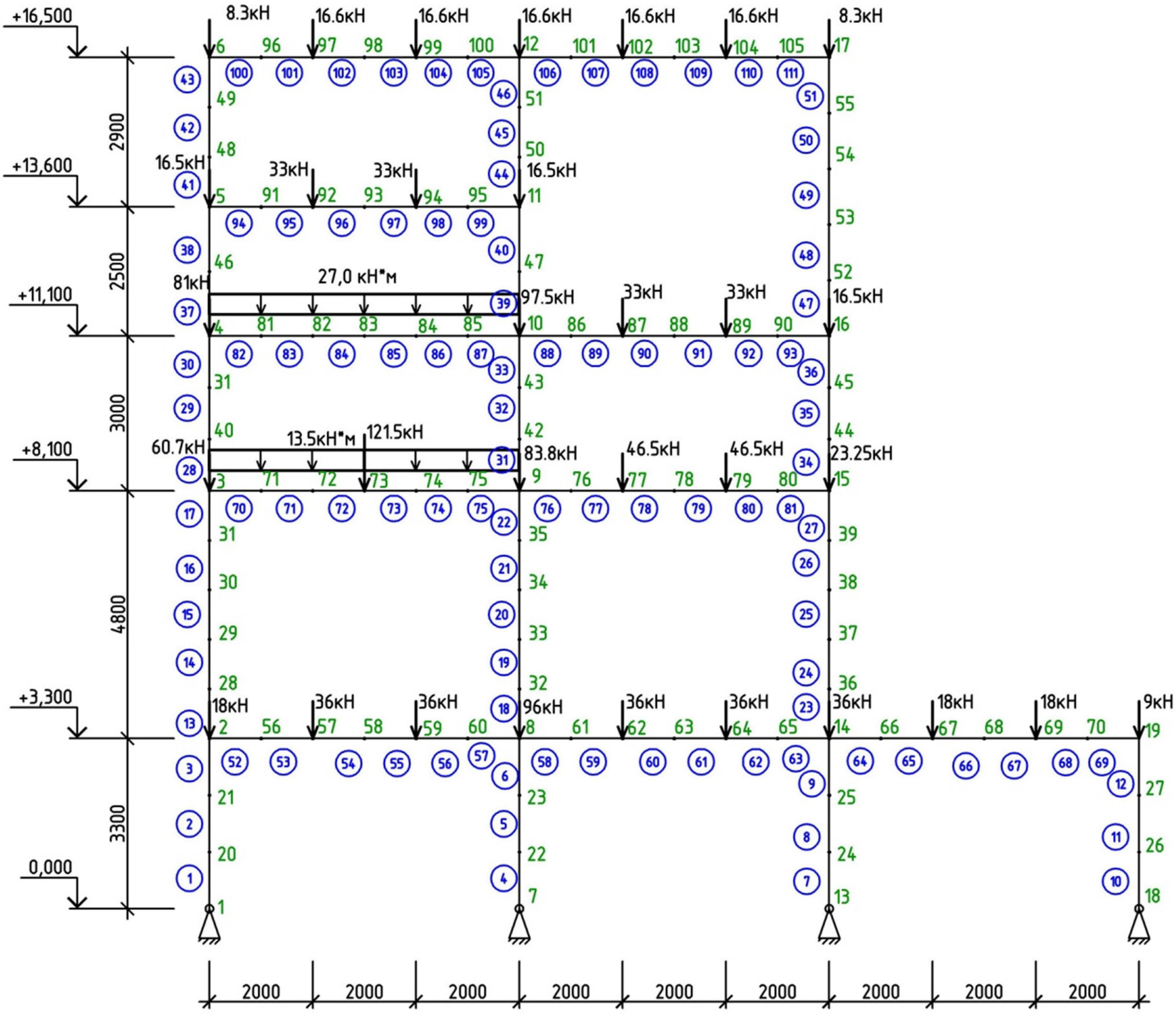


Рис. 1. Расчётная схема рамы

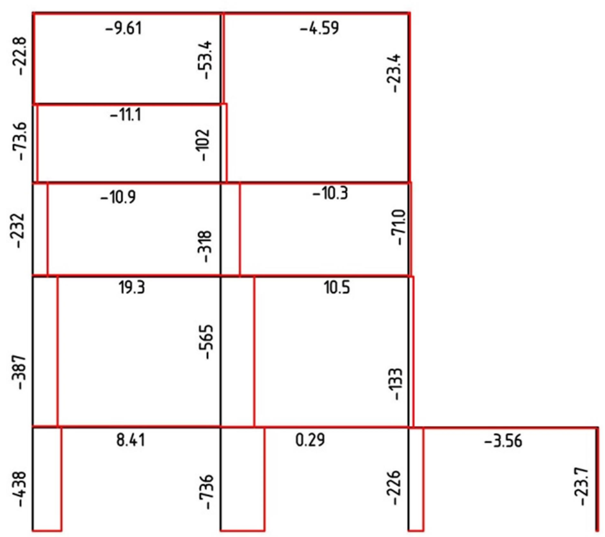


Рис. 2. Эпюра изгибающих моментов M_y

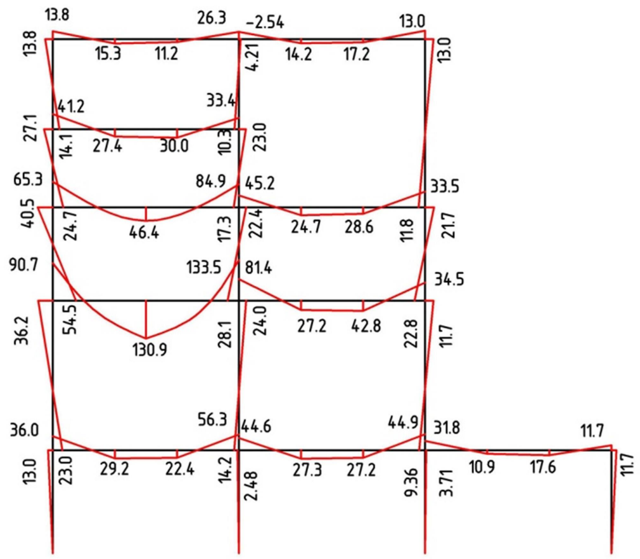


Рис. 3. Эпюра продольных сил N

Поэтому в упруго-пластическом расчете на результат заметное влияние будут оказывать два фактора: шаг приращения нагрузки; точность (плотность) конечно-элементной сетки разбиения конструкции (КЭ-сетки).

Влияние этих параметров настолько велико, что процесс расчета, основанный на итерациях, может либо давать неверный результат, либо вообще не давать никого решения. В связи с этим для обеспечения сходимости и достоверности решения необходимо было провести:

1) исследование влияния шага нагружения на результат расчета;
2) исследование влияния точности КЭ-сетки на результат;
3) подбор соответствующего шага нагружения и КЭ-сетки, которые обеспечивали бы нам требуемый результат расчета.

Под результатом понимается:

1) схема и порядок возникновения пластических шарниров в стержнях рамы;
2) величины нагрузок, приводящих к потере несущей способности рамы или её частей.

В настоящей работе было выполнено несколько расчётов рамы при разных конечно-элементных сетках и различных шагах приращения по нагрузке. Были выбраны 3 шага по нагрузке, равные $0{,}1P_0$, $0{,}05P_0$, $0{,}025P_0$, где P_0 – начальная нагрузка, то есть максимальная нагрузка из упругого расчета. Величина нагрузки оценивается для удобства не абсолютной величиной P, а соответствующим ей коэффициентом k, где $P=k\cdot P_0$.

Расчёт № 1. Для первоначального упруго-пластического расчета выбирается КЭ-сетка №1 из упругого расчёта (Рис.1). Шаг приращения нагрузки принимается $0{,}1P_0$. Схемы разрушения рамы, полученные в расчёте №1, изображены на рис. 4. Указаны места образования пластических шарниров в раме и номера, соответствующие последовательности их возникновения.

а) первый этап: k_1=2,20 б) второй этап: k_2=1,20

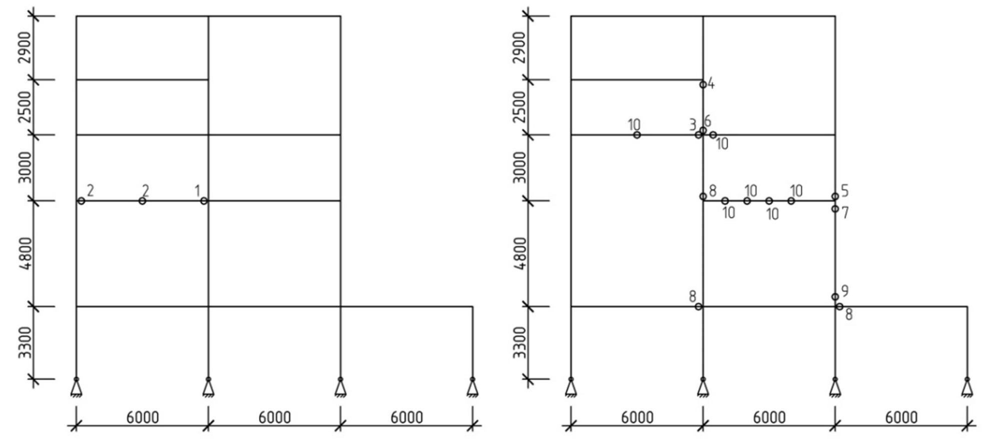


Рис. 4. Схема разрушения рамы в расчёте № 1: сетка №1 ; шаг нагрузки $0.1P_0$; k=3,40

Расчёт выполняется поэтапно. На первом этапе к раме прикладывается нагрузка P_1=k_1P_0. При k_1=2,20 в одном из ригелей возникает 3 пластических шарнира и он теряет несущую способность, но остальные части рамы ещё не разрушены. Разрушение ригеля образует в части рамы механизм и не позволяет продолжить расчёт по ЛИРЕ с первоначальной расчётной схемой, так как исчезает сходимость к решению.

Поэтому на втором этапе используется новая расчётная схема с удалённым разрушенным ригелем. При этом к раме прикладывается нагрузка P_2=k_2P_0 дополнительно к P_1. Величины нагрузок P_1, P_2 заранее не известны. Они определяются автоматически в ходе расчёта в момент образования механизма.

На втором этапе при k_2=1,20 пластические шарниры образуются сразу в 9-ти стержнях и происходит разрушение большой части рамы. В связи с этим дальнейшее увеличение нагрузки не имеет смысла. Предельная нагрузка вычисляется как $P_{пред} = kP_0$, где суммарный коэффициент $k=k_1+k_2$. В расчёте №1 k = 2,20+1,20 = 3,40. Оценим достоверность полученных результатов путём варьирования шага приращения нагрузки и КЭ-сетки.

Для исследования влияния шага приращения нагрузки на результат расчета с первой КЭ-сеткой были выполнены расчет № 2 с шагом $0{,}05P_0$ и расчёт № 3 с шагом $0{,}025P_0$. Для каждого шага указаны схемы образования шарниров и коэффициенты для нагрузок (рис. 5, 6).

а) первый этап: k_1=2,20 б) второй этап: k_2=0,65

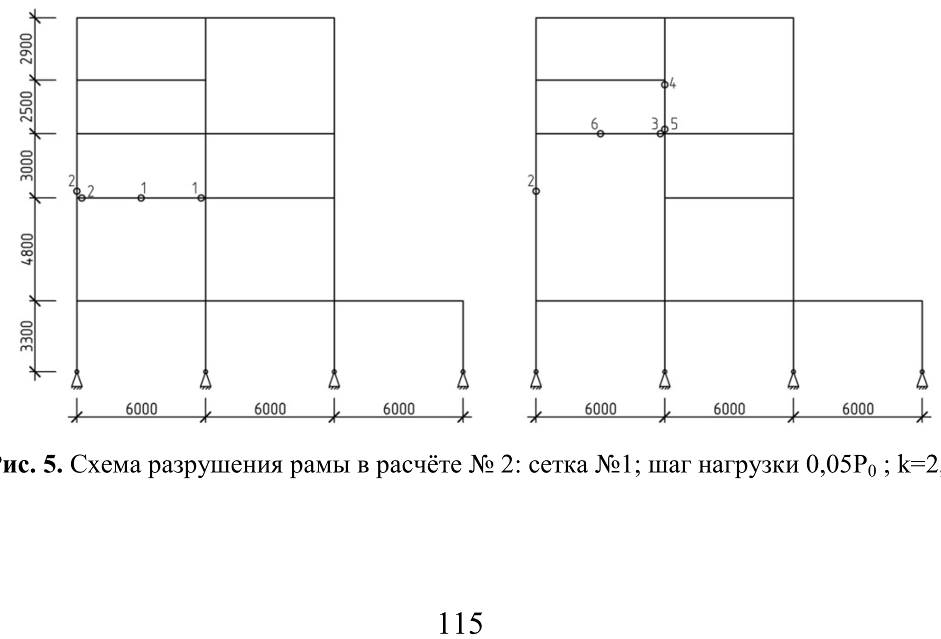


Рис. 5. Схема разрушения рамы в расчёте № 2: сетка №1; шаг нагрузки $0{,}05P_0$; k=2,85

а) первый этап: k_1=2,20 б) второй этап: k_2=0,65

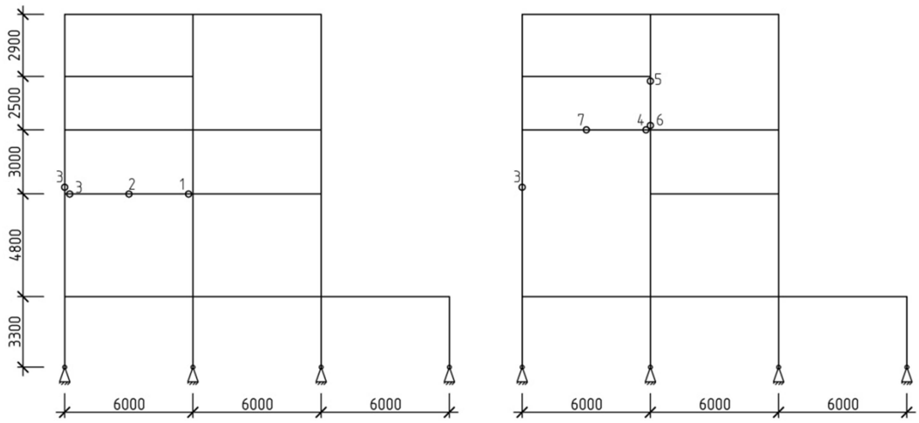


Рис. 6. Схема разрушения рамы в расчёте № 3: сетка №1; шаг нагрузки $0{,}025P_0$; k=2,85

По всем трем шагам приращений нагрузки наблюдается хорошее совпадение схем шарниров и величин нагрузок (оценка по коэффициентам) на первом этапе нагружения. Заметные отличия возникают на втором этапе. При шаге $0{,}1P_0$ (рис. 4, б) результаты по схеме шарниров и по предельной нагрузке принципиально отличаются от результатов при шагах $0{,}05P_0$ и $0{,}025P_0$ (рис. 5, б, 6, б). В то же время для шагов $0{,}05P_0$ и $0{,}025P_0$ результаты по схеме шарниров и по предельной нагрузке хорошо совпадают между собой. Это говорит о том, что с уменьшением шага приращения по нагрузке результаты становятся более точными.

Схема рамы на рис. 5, б, 6, б не является механизмом. Однако при дальнейшем возрастании нагрузки (k>2.85) исчезает сходимость к решению. В отличие от расчёта №1 в расчётах №№2, 3 пластические шарниры образуются не в отдельном ригеле, а в нескольких стержнях, включая стойки. Удаление такой части рамы для продолжения расчёта невозможно. Поэтому для принятых параметров расчёта (шага приращения нагрузки и КЭ-сетки) состояние на рис. 5, б, 6, б считается предельным.

С целью проверки сходимости решения и обеспечения более точных результатов были произведены расчёты с более плотными КЭ-сетками. Рассматривались сетка № 2, уплотнённая в 2 раза, и сетка № 3, уплотнённая в 4 раза по сравнению с сеткой №1.

Расчёт № 4: сетка №2; шаг нагрузки 0,05 P_0 (рис. 7).

Расчёт № 5: сетка №2; шаг нагрузки 0,025 P_0 (рис. 8).

Расчёт № 6: сетка №3; шаг нагрузки 0,05 P_0 (рис. 9).

Расчёт № 7: сетка №3; шаг нагрузки 0,025 P_0 (рис. 10).

а) первый этап: k_1=2,20 б) второй этап: k_2=0,60

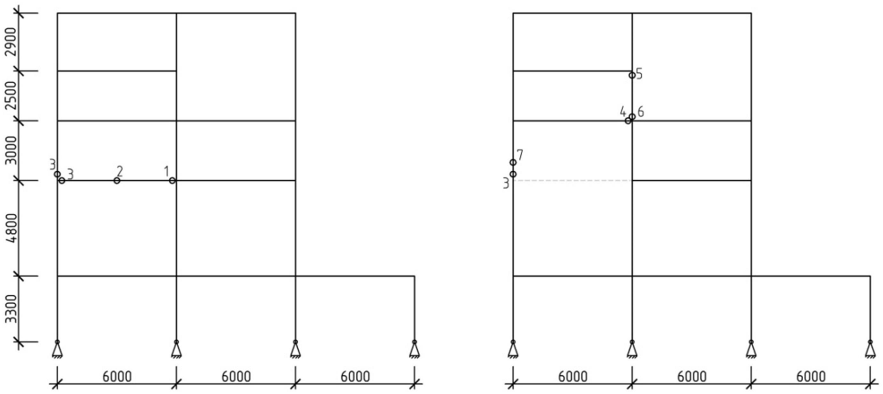


Рис. 7. Схема разрушения рамы в расчёте № 4: сетка №2; шаг нагрузки $0{,}05P_0$; k=2,80

Схемы рамы на рис. 7, б, 8, б, 9, б, 10, б, как и ранее на рис. 5, б, 6, б в строгом смысле не являются механизмом. Но при этом программа ЛИРА выдаёт сообщение о разрушении конечных элементов в зоне пластических шарниров на левой стойке. Как следствие при дальнейшем возрастании нагрузки (k>2,80 или k>2,60) исчезает сходимость к решению. Поэтому, как и в расчётах №№2, 3 для принятых параметров расчёта (шага приращения нагрузки и КЭ-сетки) состояния на рис. 7, б, 8, б, 9, б, 10,б считаются предельными.

При КЭ-сетках №2 и №3, также как и при КЭ-сетке №1, получаем, что для шагов по нагрузке $0{,}05P_0$ и $0{,}025P_0$ наблюдается совпадение по местам образования пластических шарниров, порядку их возникновения и по предельным нагрузкам. Отсутствие влияния шага приращения нагрузки на результаты расчёта означает, что достигнута сходимость к решению задачи по этому параметру.

а) первый этап: $k_1=2{,}20$ б) второй этап: $k_2=0{,}60$

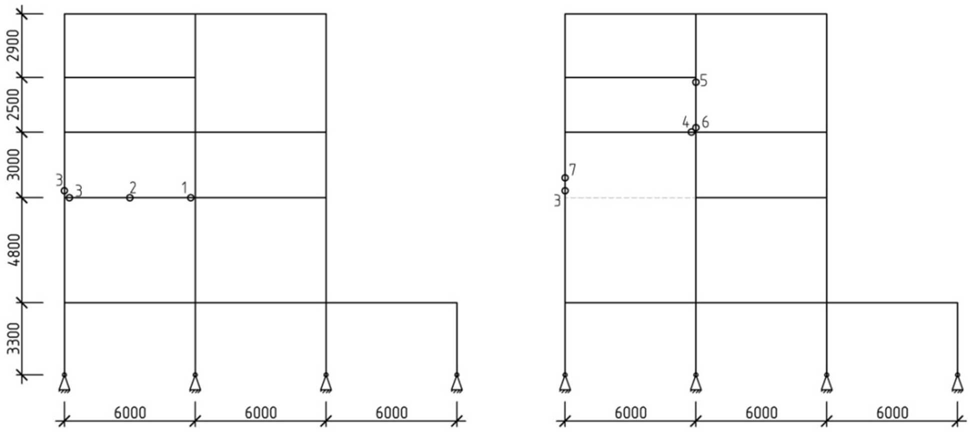


Рис. 8. Схема разрушения рамы в расчёте № 5: сетка №2; шаг нагрузки $0{,}025P_0$; k=2,80

а) первый этап: $k_1=2{,}20$ б) второй этап: $k_2=0{,}40$

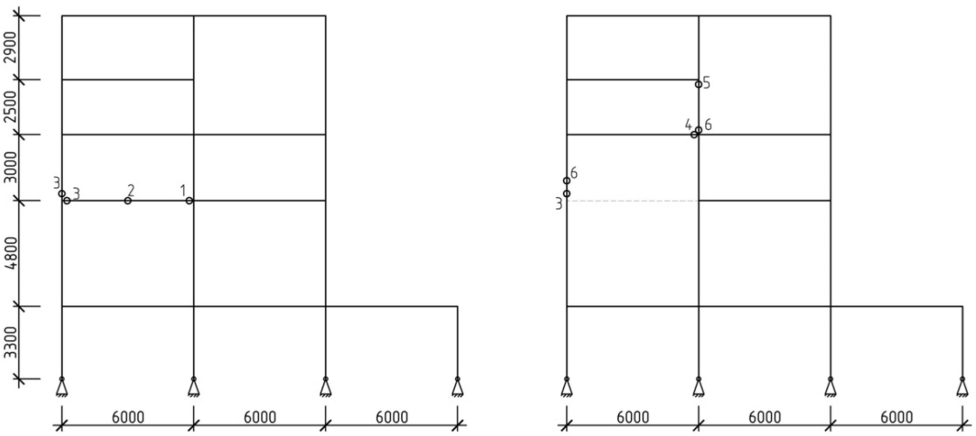


Рис. 9. Схема разрушения рамы в расчёте № 6: сетка №3; шаг нагрузки $0{,}05P_0$; k=2,60

а) первый этап: k_1=2,20 б) второй этап: k_2=0,40

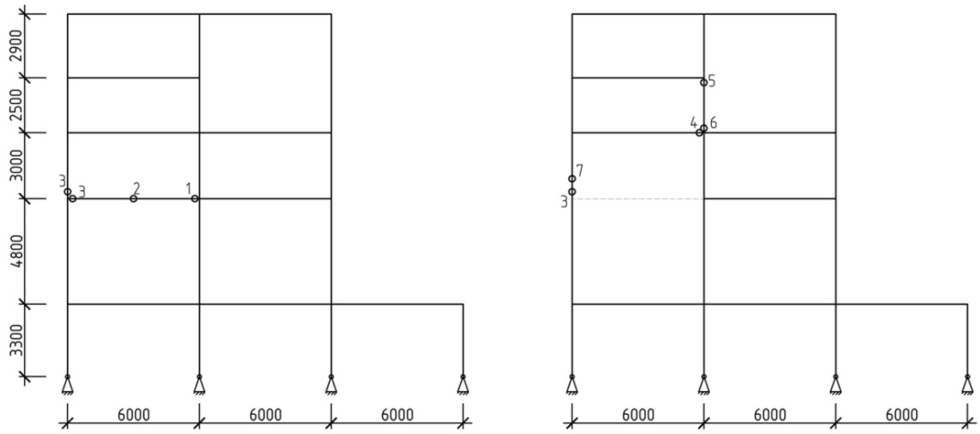


Рис. 10. Схема разрушения рамы в расчёте № 7: сетка №3; шаг нагрузки $0{,}025P_0$; k=2,60

Применение более плотных КЭ-сеток №2 и №3 вместо КЭ-сетки №1 изменило результаты расчёта только для второго этапа нагружения. Сменилось положение одного пластического шарнира в предельном состоянии. Вместо шарнира №7 в центре ригеля образуется дополнительный шарнир №7 в левой стойке. Разница в предельных нагрузках между КЭ-сеткой №2 и КЭ-сеткой №3 и составляет Δk=(2,80-2,60)/2,80*100 %=7,1 %, что является вполне удовлетворительным результатом. Учитывая близость предельных нагрузок и непринципиальное различие схем пластических шарниров в предельном состоянии, можно считать, что достигнута сходимость к решению задачи по параметру - точность КЭ-сетки. Некоторое отличие схем разрушения и предельных нагрузок для разных КЭ-сеток не отрицает достоверности результатов, а является отражением высокой чувствительности решения физически нелинейной задачи к параметрам сетки в состоянии конструкции близком к предельному.

Таким образом, за счет уменьшения шага приращения нагрузок и уплотнения сетки удалось обеспечить сходимость решения к более точным результатам. Наличие сходимости решения подтверждает достоверность выполненных расчётов в рамках применяемой методики вычислений по программе расчёта ЛИРА.

Предельная нагрузка, вызывающая разрушение одного ригеля рассмотренной рамы по критерию предельного равновесия, выше предельной нагрузки для упругого расчёта в 2,2 раза, а предельная нагрузка, вызывающая разрушение значительной части рамы, – в 2,6 раза.

Выводы

Плоский стальной рамный каркас промышленного здания имеет значительный резерв несущей способности, вычисленный по критерию предельного равновесия.

Программно-вычислительный комплекс ЛИРА позволяет выполнять расчёт несущей способности плоской рамной системы с учётом пластических деформаций материала в рамках рассмотренной методики. При этом требуется подбор параметров расчёта для обеспечения сходимости и достоверности результатов.

Библиографический список

1. СНиП II-23-81* Стальные конструкции / Госстрой СССР. – М.: Стройиздат, 1990. – 96 с.
2. Металлические конструкции. Т. 1. / Под ред. В.В. Горева. – М.: Высш. школа, 2001. – 551 с.

References

1. Building Code II-23-81* Steel structures/ Gosstroy of the USSR. – M: Stroyizdat, 1990. – 96 p.
2. Metal structures. T.1. Under the edition of V.V. Gorev M: High School., 2001. – 551 p.

Ключевые слова: металлический рамный каркас, несущая способность, предельное равновесие, программный комплекс ЛИРА

Keywords: metal frame, bearing capacity, limiting equilibrium, design –computational complex.