На правах рукописи

Сысоев Антон Сергеевич

МЕТОДОЛОГИЯ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Специальность 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Воронеж — 2026

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и системного анализа ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»

Научный консультант:	**Погодаев Анатолий Кирьянович**, доктор технических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Алексеев Владимир Витальевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем и защиты информации, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов
	Воробьев Андрей Владимирович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», г. Уфа
	Клюев Роман Владимирович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электроснабжения промышленных предприятий, ФГБОУ ВО «Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет)», г. Владикавказ
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН», г. Москва

Защита состоится «16» октября 2026 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 99.2.031.03, созданного на базе ВГТУ, ВГУ и ЛГТУ, по адресу: 394026, г. Воронеж, Московский проспект, 14, ауд. 216.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Воронежского государственного технического университета и на сайте www.cchgeu.ru.

Автореферат разослан «8» июля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 99.2.031.03
доктор технических наук, профессор Белецкая Светлана Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Анализ чувствительности по факторам математических моделей в системном анализе — это этап, дающий количественную оценку того, как разброс входных данных отражается на выходных показателях сложной системы. Необходимость такой оценки продиктована фундаментальными свойствами сложных систем: их неопределённостью, многокомпонентностью, иерархичностью и потребностью в обосновании управленческих решений. Во-первых, с помощью анализа чувствительности выделяют факторы, создающие главную неопределённость на выходе — тем самым решается задача оценки реакции на внешние и внутренние возмущения. Это же позволяет переориентировать сбор данных, сосредоточив усилия на наиболее значимых переменных. Во-вторых, полученные результаты анализа служат основой для редукции модели. Сложные системы включают гетерогенные компоненты, каждый — со своим набором входов. Выявив факторы, слабо влияющие на результат, можно исключить их из рассмотрения — вычислительные затраты снижаются без ощутимой потери точности, а это прямо отвечает требованиям к эффективным алгоритмам обработки информации. В-третьих, анализ чувствительности по факторам применяется для проверки устойчивости модели. Если чувствительность на обучающих и тестовых данных различаются, это говорит об идентификации моделью шума, а не истинной зависимости. Такой контроль необходим для оценки адекватности модели и принятия обоснованных решений в условиях неопределённости. В-четвёртых, анализ чувствительности по факторам используется для сценарного анализа: определяют набор ключевых факторов с заданным пространством вариантов и оценивают поведение системы в различных режимах функционирования.

Развитие методов анализа чувствительности по факторам открывает перспективы в прикладных исследованиях, позволяя перейти от моделей типа «чёрный ящик» к прозрачным, устойчивым и интерпретируемым решениям, что соответствует принципу раскрытия внутренней структуры системы для преодоления неопределённости.

Однако существующие методы исследования чувствительности по факторам имеют ограничения, не позволяющие применять их к широкому классу моделей. Локальные методы, основанные на частных производных, применимы лишь при малых вариациях факторов и не учитывают их взаимодействие. Глобальные методы требуют большого числа запусков модели, что для вычислительно сложных систем часто неприемлемо. Методы метамоделирования либо предполагают линейность связи, либо теряют интерпретируемость. Применение концепции анализа конечных изменений позволяет избежать некоторых из этих ограничений и исследовать более широкий класс систем, обеспечивая точное разложение конечного изменения выходного показателя по факторам без неразложимого остатка и с учётом иерархической структуры.

Степень разработанности. Значительный вклад в развитие методов исследования чувствительности по параметрам и факторам внесли ученые: Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М., Соболь И.М., Солдатенко С.А., Колман Р.А., Оморов Р.О., Дианский Н.А., Абрамов В.И., Назаренко С.А., Шалобанов С.В., Широков Л.А., Смирнов Н.И., Хлопенко И.Н., Ягудина Р.И., Макарова А.А., Вершинина Л.П., Saltelli A., Homma T., Hambi D., Borgonovo E., Turanyi T., Morris M., Cotter S., Helton J., Kleijnen J., Campolongo F. и др. В настоящее время существует неоднородность в исследовании чувствительности математических моделей по факторам. Некоторые аспекты этого направления изучены достаточно хорошо. Например, локальные методы анализа чувствительности, основанные на исследовании частных производных, и применимые для широкого класса прикладных задач, имеют высокую степень разработанности. Однако среди недостатков таких исследований необходимо указать устойчивую применимость методов только для малых вариаций исследуемых факторов и отсутствие учета взаимодействия факторов. Глобальные методы анализа чувствительности, основанные на разложении дисперсии отклика модели, спектральном анализе и скрининге значимых факторов, тоже имеют высокую степень исследованности и применимости в прикладных задачах широкого класса. Такие методы уже допускают исследование взаимодействия факторов. Однако ограничениями применимости здесь являются высокие вычислительные затраты для сложных моделей, что связано с большим числом их запусков. Использование метамоделирования, основанного на изучении стандартизированных коэффициентов линейных регрессий, замещающих исходные модели, и на применении случайного леса с методом оценки важности входов, тоже имеет высокую степень разработанности и применимости, однако, предполагает линейность или слабую нелинейность связи отклика с определяющими его факторами. Актуальной задачей является разработка подходов, способствующих повышению универсальности применения анализа чувствительности по факторам к различным типам систем. Одним из направлений является применение анализа конечных изменений, направленного на решение задачи нахождения точного разложения конечного изменения результирующего показателя на конечные изменения оказывающих на него влияние факторов. Такая задача связана с проблемами экономического факторного анализа. Среди ученых, проводивших исследования в этой области, необходимо отметить: Шеремет А.Д., Баканов М.И., Блюмин С.Л., Погодаев А.К. и др. В некоторых случаях при анализе чувствительности по факторам интерес представляет учет сложной иерархической структуры рассматриваемой системы. В области анализа иерархических систем значительный вклад внесли ученые: Новиков Д.А., Месарович М., Цвиркун А.Д., Макрусев В.В., Xu C., Chen H., Liu Yu и др.

Таким образом, уровень развития моделей и методов анализа чувствительности сложных систем, а также имеющиеся ограничения таких методов определяют важность и значимость решения научной проблемы создания основ прикладной методологии анализа чувствительности по факторам при исследовании моделей различной систем с учетом доступной информации.

Тематика диссертационной работы соответствует научному направлению ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет» «Вычислительная математика». Работа является частью исследований, в которых автор принимал участие как руководитель (проект РНФ № 18-71-10034) и исполнитель (проекты РНФ № 24-21-00474, № 24-21-00291 и РФФИ №19-47-48003).

Объект исследования — сложные системы, составные части которых описываются математическими моделями различной структуры.

Предмет исследования — методологический подход к анализу чувствительности по факторам математических моделей сложных систем, направленный на учет доступной информации при решении прикладных задач упрощения систем и повышения их интерпретируемости.

Цель работы — теоретическое обоснование и разработка методологии анализа чувствительности по факторам математических моделей сложных систем на основе анализа конечных изменений для повышения точности количественной оценки влияния факторов, сокращения вычислительных затрат за счёт планирования эксперимента и обеспечения интерпретируемости результатов в системах с иерархиями и смешанными по природе факторами.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- провести системный анализ основных направлений исследований в области изучения чувствительности по факторам математических моделей сложных систем, предложить классификацию существующих методов, определить границы их применимости и выработать рекомендации по выбору адекватного задаче метода;
- развить методологию анализа чувствительности по факторам математических моделей систем;
- разработать класс методов приближенного анализа чувствительности по факторам, основанных на применении аппроксимации численного представления частных производных моделей систем;
- разработать класс методов иерархического анализа чувствительности по факторам с учетом конфигурации рассматриваемой системы;
- разработать класс методов планирования эксперимента при проведении анализа чувствительности по факторам математических моделей сложных систем;
- разработать алгоритм определения интервалов чувствительности по факторам математических моделей систем;
- решить прикладные задачи исследования систем и управления ими с использованием предлагаемых подходов.

Научная новизна работы характеризуется следующими результатами:

1. Предложен метод анализа чувствительности по факторам, основанный на применении анализа конечных изменений и используемый для объективной количественной оценки влияния факторов (глава 2; п. 5 паспорта специальности 2.3.1.).

2. Предложен класс методов приближенного анализа чувствительности по факторам, отличающихся использованием анализа конечных изменений и аппроксимированных усредненных коэффициентов влияния без необходимости аналитического дифференцирования математических моделей системы (глава 3; п. 4 паспорта специальности 2.3.1.).
3. Предложен алгоритм анализа чувствительности для смешанных факторов, основанный на модификации методов анализа конечных изменений, отличающийся способностью к единому точному разложению влияния факторов различных типов (глава 3; пп. 2, 4 паспорта специальности 2.3.1.).
4. Предложен метод иерархического анализа чувствительности, отличающийся использованием анализа конечных изменений и способностью сквозного точного разложения влияния факторов на всех уровнях системы с учетом структурных связей и конфигурации системы (глава 4; пп. 4, 17 паспорта специальности 2.3.1.).
5. Предложен класс адаптивных методов планирования эксперимента для анализа чувствительности по факторам, отличающихся использованием анализа конечных изменений с автоматической концентрацией точек плана в областях высокой вариации отклика и позволяющий сократить количество вычислений моделей системы (глава 5; п. 4 паспорта специальности 2.3.1.).
6. Предложен класс оптимальных методов планирования эксперимента для анализа чувствительности, отличающихся целенаправленным формированием плана, максимизирующего информативность градиентов модели в промежуточных точках, и применяемых для сокращения количества вычислений моделей системы (глава 5; п. 4 паспорта специальности 2.3.1.).
7. Предложен алгоритм определения интервалов чувствительности по факторам математических моделей систем, основанный на классификации локальных оценок градиента в точках, полученных методом анализа конечных изменений, отличающийся автоматическим выявлением областей значений факторов с качественно различной силой влияния на отклик и применяемый для выделения рабочих диапазонов и пороговых значений факторов (глава 5; п. 5 паспорта специальности 2.3.1.).
8. Предложен алгоритм управления конечными приращениями факторов, основанный на итеративной комбинации методов анализа конечных изменений и задач условной оптимизации и используемый для поиска оптимального набора изменений факторов для заданного достижения целевого приращения отклика модели системы (глава 6; пп. 5, 17 паспорта специальности 2.3.1.).

Теоретическая и практическая значимость исследования заключается в системном развитии методологии анализа чувствительности на основе аппарата анализа конечных изменений. Преодолеваются принципиальные ограничения классических методов, основанных на линеаризации, обеспечивается точное глобальное разложение влияния факторов без неразложимого остатка. Синтезированы новые классы методов, интегрирующих этот аппарат с теорией планирования эксперимента, задачами оптимизации и подходами к работе со сложными системами.

Теоретические результаты могут быть использованы в организациях для создания конкретных инструментов решения актуальных прикладных задач. Разработанные алгоритмы позволяют существенно сократить вычислительные затраты на анализ сложных моделей, предоставляют количественное обоснование для управляющих решений и дают возможность проводить глубокую диагностику поведения систем. Это обеспечивает эффективную поддержку процессов моделирования, оптимизации и управления в условиях неопределённости.

На компоненты математического и программного обеспечения получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте.

Реализация и внедрение результатов работы. Полученные практические результаты и разработанные модули программного обеспечения используются для анализа данных и управления транспортными потоками в Управлении Госавтоинспекции УМВД России по Липецкой области; анализа и управления региональными экономическими показателями в Министерстве экономического развития Липецкой области; оперативного анализа данных об оказании медицинской помощи населению в Территориальном фонде обязательного медицинского страхования Липецкой области. Теоретические результаты диссертации используются в учебном процессе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Липецкий государственный технический университет» в рамках образовательных программ по направлениям 01.03.04 «Прикладная математика» и 01.04.04 «Прикладная математика» при выполнении курсовых работ, индивидуальных заданий, а также при выполнении выпускных квалификационных работ.

Методология и методы исследования. Общая методология работы основана на исследовании чувствительности по факторам элементов сложных систем. При решении поставленных в диссертации задач использовались методы системного анализа, математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, теории оптимизации, теории нейронных сетей, анализа данных, а также методы объектно-ориентированного программирования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод анализа чувствительности по факторам, основанный на точном разложении конечного изменения отклика, позволяет сформировать количественную оценку влияния факторов при их произвольных изменениях в моделях сложных систем.
2. Для моделей систем, заданных сложной аналитической формой или таблично, предложен класс методов приближенного анализа чувствительности по факторам, который позволяет получить аппроксимированные усредненные коэффициенты влияния.

3. Алгоритм анализа чувствительности для смешанных факторов, основанный на модификации анализа конечных изменений с аппроксимацией производной для дискретных факторов и минимизацией невязки при поиске промежуточной точки, обеспечивает единое точное разложение влияния непрерывных и дискретных факторов.
4. Метод иерархического анализа чувствительности по факторам, основанный на рекурсивном применении анализа конечных изменений к каждому уровню системы с последовательным определением параметров промежуточных точек, обеспечивает сквозное точное разложение влияния входных факторов на отклик с учетом структурной конфигурации многоуровневой системы.
5. Адаптивные методы планирования эксперимента для анализа чувствительности по факторам, использующие анализ конечных изменений, позволяют сократить количество вычислений при анализе моделей сложной системы.
6. Оптимальные методы планирования эксперимента для анализа чувствительности, основанные на целенаправленном формировании плана, максимизирующего информативность градиентов модели в промежуточных точках, позволяют сократить количество вычислений при анализе моделей сложной системы.
7. Алгоритм определения интервалов чувствительности по факторам, основанный на классификации локальных оценок градиента в точках, полученных методом анализа конечных изменений, обеспечивает автоматическое выявление и описание областей значений факторов с качественно различной силой влияния на отклик.
8. Алгоритм управления конечными приращениями факторов, основанный на итеративной комбинации метода анализа конечных изменений и решения задачи условной оптимизации с заданной функцией стоимости изменений факторов, обеспечивает поиск оптимального набора изменений факторов для достижения заданного целевого приращения отклика модели системы.

Степень достоверности и апробация работы. Достоверность защищаемых положений работы, работоспособность и результативность предлагаемых решений подтверждается приведенными в диссертации:

— результатами компьютерного моделирования;
— результатами анализа чувствительности по факторам как известных, так и новых систем с целью упрощения их структуры, повышения интерпретабельности, решения задач управления;
— практическим внедрением результатов работы в ряде организаций и в учебном процессе.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (Арзамас, 2014; Волгоград, 2015; Самара, 2016; Новочеркасск, 2024); Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2018, 2019, 2022, 2023, 2025); Всероссийская Поспеловская конференция с международным участием «Гибридные и синергетические интеллектуальные системы» (Калининград, 2020, 2022); XX Международная конференция «Reliability and Statistics in Transportation and Communication» (Латвия, Рига, 2020); Международная научная конференция «Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)» (Липецк, 2019-2025); VI Международная конференция «Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems» (Чехия, Прага, 2020); Международная научная конференция «Transport Infrastructure and Systems in a Changing World. Towards a more Sustainable, Reliable and Smarter Mobility, TIS Roma» (Италия, Рим, 2019); Международная научная конференция «Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем» (Республика Беларусь, Минск, 2020); Международная научная конференция «Complex Systems: Control and Modeling Problems» (Самара, 2019); XIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство» (Старый Оскол, 2016); IX Международная научная конференция «Application of Information and Communication Technologies, AICT 2015» (Ростов-на-Дону, 2015); Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (Казань, 2020; Ярославль, 2022; Минск, 2022, 2023); XIV Международная конференция по распознаванию образов и обработки информации «PRIP'2019» (Республика Беларусь, Минск, 2019); Международная конференция «Information and Control Systems» (КНР, Бэньси, 2026).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 60 научных работах, в том числе 15 — в ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных в Перечне ВАК РФ, 16 — в изданиях, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus, получено 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад соискателя. В работах, опубликованных в соавторстве, лично соискателю принадлежат следующие результаты: [10,14,15,24,30,31,36,37,45,47, 50,51,58,59] — развитие методов анализа конечных изменений, [27,28,40,41, 43] — анализ чувствительности по факторам, основанный на применении методов анализа конечных изменений, [8] — методы приближенного анализа чувствительности по факторам математических моделей сложных систем, [6,9,17,29,39,42, 48] — метод иерархического анализа чувствительности по факторам, [5] — методы планирования эксперимента для анализа чувствительности по факторам математических моделей сложных систем, [4] — алгоритм определения интервалов чувствительности по факторам математических моделей сложных систем, [52–

56] — управление на основе исследования чувствительности с помощью анализа конечных изменений, [7,11–13,16,18,19,20,22,23,25,26,32–35,38,44,49,57,60] — применение анализа чувствительности по факторам для решения прикладных задач.

Тематика работы соответствует пунктам паспорта специальности ВАК 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика:

— п. 2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
— п. 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
— п. 5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
— п. 17. Прикладные статистические исследования, направленные на выявление, измерение, анализ, прогнозирование, моделирование складывающейся конъюнктуры и разработки перспективных вариантов развития сложных систем.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и приложений. Список использованной литературы содержит 268 наименований. Текст диссертации содержит 299 страниц машинописного текста, включая 36 рисунков и 24 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость результатов работы.

В **первой главе** проведён системный анализ методологии исследования чувствительности математических моделей по факторам.

В наиболее общем виде система Σ может быть представлена кортежем $\Sigma = (T, X, Y, S, \Phi, \Gamma)$, где $T \subseteq \mathbb{R}$ — множество моментов времени, X — множество допустимых входных сигналов (факторов), Y — множество допустимых выходных сигналов (реакций системы), S — множество состояний системы, $\Phi : S \times X \times T \to S$ — оператор перехода, описывающий эволюцию состояния, а $\Gamma : S \times X \times T \to Y$ — оператор выхода, формирующий наблюдаемый результат. Такое представление является общим и охватывает широкий класс динамических систем. В рамках настоящего исследования рассмотрение ограничивается классом систем, для которых возможно установить явную зависимость между входами и выходами (статическую или динамическую, однако в базовой постановке пренебрегают инерционностью и внутренней динамикой). В этом случае система описывается редуцированным кортежем $\Sigma_{\text{ст}} = (X, y, f)$, где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \in D \subset \mathbb{R}^n$ — вектор входов, $y \in \mathbb{R}$ — скалярный выход, а $f : D \to \mathbb{R}$ — известная функциональная связь.

Представление $\Sigma_{\text{ст}}$ описывает систему как неструктурированное отображение «входы — выход», что не позволяет локализовать источник влияния внутри сложной системы. Для преодоления этого ограничения перейдём к описанию, явно сохраняющему внутреннюю структуру. Для сложной системы строится её функциональная модель, позволяющая представить систему как совокупность взаимодействующих компонентов. Пусть система состоит из m частей, каждая из которых описывается моделью $y_i = f_i(\mathbf{w}_i)$, $\mathbf{w}_i$ — вектор входов модели, причём выходы одних частей могут служить входами для других. В результате декомпозиции строится функциональная модель $M = (E, R, F, \{\mathbf{P}_i\}, F_{\text{agg}}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, где E — множество элементов, R — связи между ними, F — семейство функций поведения, $\mathbf{P}_i$ — матрицы проекции внешних факторов, F_{agg} — агрегирование выходов в итоговые показатели. Такая модель представляется ориентированным графом и сохраняет интерпретируемость анализа чувствительности, позволяя локализовать влияние факторов и учитывать связи между компонентами без ограничений на природу моделей отдельных элементов.

Проведенный в главе обзор начинается с принципиального разделения задач исследования чувствительности по факторам и по параметрам (внутренним коэффициентам), подчёркивая различие их прикладных целей. Данное исследование направлено на развитие методов анализа чувствительности по факторам математических моделей и систем. В этом направлении последовательно рассмотрены детерминированные локальные методы, оценивающие влияние в окрестности базовой точки. Проанализированы стохастические глобальные методы, исследующие влияние факторов на всей области их возможных изменений. Отдельно рассмотрены скрининговые методы для быстрого отбора значимых факторов при большой размерности задачи.

Предложена классификация методов анализа чувствительности по факторам моделей, структурирующая их по целям и принципам действия, а также сформированы практические рекомендации по выбору адекватного метода в зависимости от специфики решаемой задачи, свойств модели и характера неопределённости исходных данных. Обоснована необходимость разработки новых методов, сочетающих достоинства глобального анализа со сниженной вычислительной сложностью, и сформулированы задачи диссертационного исследования.

Во **второй главе** представлен и развит теоретический аппарат, направленный на преодоление принципиальных ограничений классических методов анализа чувствительности, основанных на дифференциальном исчислении. При решении прикладных задач исследователи часто сталкиваются не с бесконечно малыми, а с конечными, часто значительными изменениями факторов. Применение локальных методов в таких условиях приводит к появлению неразложимого остатка, который невозможно объективно распределить между факторами, что снижает достоверность анализа. Решение возникающего противоречия лежит в использовании анализа конечных изменений, теоретической основой которого служит теорема Лагранжа о промежуточной точке. В многомерном случае она утверждает: для непрерывно дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что

$$\Delta f = f(\mathbf{x}^{(1)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \Delta \mathbf{x}) \, \Delta x_i. \tag{1}$$

Соотношение (1) позволяет получить конечное приращение некоторой функции как точное разложение конечных приращений её аргументов, при этом коэффициентами разложения служат частные производные функции в некоторой промежуточной точке на пути от начального состояния системы $\mathbf{x}^{(0)}$ к её финальному состоянию $\mathbf{x}^{(1)}$. Эта идея позволяет снять проблему неразложимого остатка: эффекты взаимодействий факторов учитываются автоматически в коэффициентах влияния посредством выбора точки $\mathbf{x}^{(\alpha)}$.

В работе проводится систематизация подходов через концепцию различительных исчислений, связанных с различными формами представления конечных изменений величин: конечного приращения $\Delta z = z^{(1)} - z^{(0)}$ и конечного индекса $I_z = \frac{z^{(1)}}{z^{(0)}}$. Классификация строится на основе четырёх функциональных уравнений Коши, которым соответствуют аддитивное, мультипликативное, аддитивно-мультипликативное и мультипликативно-аддитивное различительные исчисления. Основная задача анализа конечных изменений в этом контексте заключается в поиске функциональной связи зависимости конечного изменения отклика Θy от конечных изменений его факторов $\Theta\mathbf{x}$. Соответствие между уравнениями, формами изменений величин и типами исчислений сведено в таблицу 1.

Для каждого типа различительного исчисления сформулированы и доказаны соответствующие теоремы (формулы (2)–(5)), являющиеся аналогами теоремы Лагранжа о промежуточной точке.

Предложена методология анализа чувствительности по факторам на основе анализа конечных изменений (рисунок 1), которая представляет собой структурированный процесс из четырёх ключевых этапов.

Этап 1. Идентификация и формализация объекта. Объектом выступает модель $y = f(\mathbf{x}, \theta)$, заданная аналитически или в виде набора значений. Фиксируются базовое (начальное) $\mathbf{x}^{(0)}$ и плановое (конечное) $\mathbf{x}^{(1)}$ состояния системы.

Этап 2. Применение анализа конечных изменений. В отличие от классических методов, методология оперирует конечными (не обязательно малыми) изменени-

Таблица 1 – Типы различительного исчисления, соответствующие функциональные уравнения Коши и формы теоремы Лагранжа о промежуточной точке

Тип различительного исчисления	**Функциональное уравнение Коши**	**Теорема Лагранжа о промежуточной точке**
Аддитивное исчисление	Первое: $\varphi(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(1)}) - \varphi(\mathbf{x}^{(0)})$	Существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \Delta \mathbf{x})\, \Delta x_i \quad (2)$$ где $\Delta x_i = x_i^{(1)} - x_i^{(0)}$, $\Delta f = f(\mathbf{x}^{(1)}) - f(\mathbf{x}^{(0)})$
Мультипликативное исчисление	Четвёртое: $\dfrac{\varphi(\mathbf{x}^{(1)})}{\varphi(\mathbf{x}^{(0)})} = \varphi\left(\dfrac{\mathbf{x}^{(1)}}{\mathbf{x}^{(0)}}\right)$	Существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $$I_f = \prod_{i=1}^{n} (I_{x_i})^{E_i(\mathbf{x}^{(\alpha)})} \quad (3)$$ где $I_z = \dfrac{z^{(1)}}{z^{(0)}}$, $E_i(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial \ln f}{\partial \ln x_i}$, $\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(0)} \cdot (I_{\mathbf{x}})^{\alpha}$
Аддитивно-мультипликативное исчисление	Второе: $\dfrac{\varphi(\mathbf{x}^{(1)})}{\varphi(\mathbf{x}^{(0)})} = \varphi(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})$	Существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $$I_f = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \Delta \mathbf{x})\, \Delta x_i\right) \quad (4)$$ где $\Delta x_i = x_i^{(1)} - x_i^{(0)}$, $I_f = \dfrac{f(\mathbf{x}^{(1)})}{f(\mathbf{x}^{(0)})}$
Мультипликативно-аддитивное исчисление	Третье: $\varphi(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \varphi\left(\dfrac{\mathbf{x}^{(1)}}{\mathbf{x}^{(0)}}\right)$	Существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что: $$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^{(0)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(\alpha)}) \cdot \ln I_{x_i}\right] \quad (5)$$ где $I_{x_i} = \dfrac{x_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}$, $\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(0)} \cdot (I_{\mathbf{x}})^{\alpha}$

ями факторов Θx_i, что позволяет: учитывать реальные, значительные вариации входных переменных; строить объективные количественные оценки вклада каждого фактора в общее изменение отклика Θy.

Этап 3. Реализация специализированных стратегий анализа. В зависимости от целей исследования методология поддерживает несколько направлений:

— иерархический анализ чувствительности для декомпозиции влияния в многоуровневых системах и редукции моделей;
— планирование эксперимента для синтеза адаптивных планов, а также оптимальных планов, минимизирующих количество запусков модели;
— определение интервалов и порогов чувствительности для выявления областей качественного изменения влияния факторов.

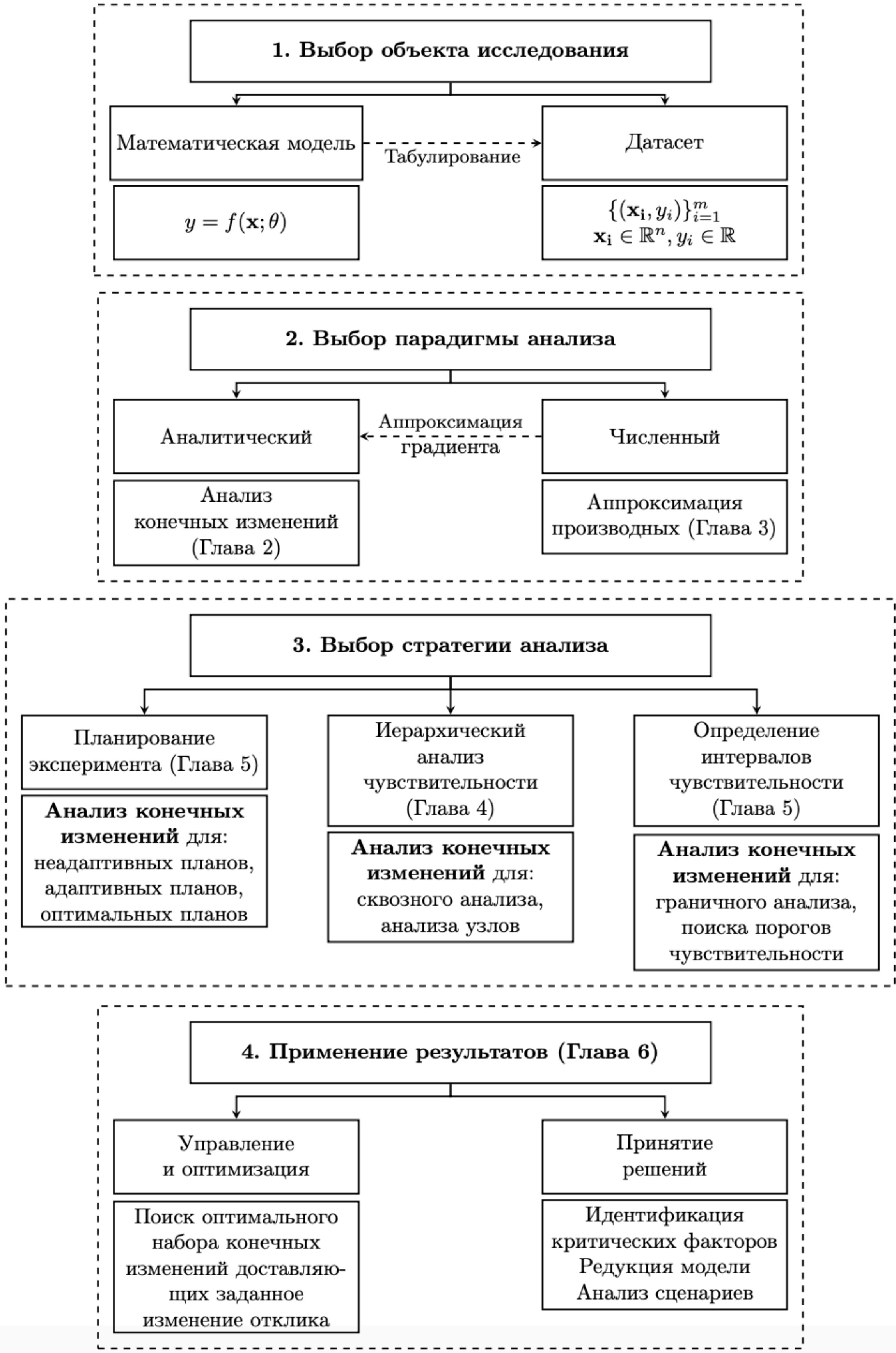

Рисунок 1 – Обобщённая схема методологии анализа чувствительности по факторам на основе анализа конечных изменений

Этап 4. Использование результатов для решения прикладных задач. Полученные количественные оценки чувствительности служат основой для: управления и оптимизации (решения обратной задачи — нахождения изменений факторов, приводящих к целевому изменению отклика); поддержки принятия решений (идентификации критических факторов, обоснованной редукции модели и др.).

На основе этого теоретического аппарата предложен базовый алгоритм анализа чувствительности по факторам.

Вход:

— функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор факторов;

— базовые (начальные) значения факторов $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$;

— плановые (конечные) значения факторов $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$.

Выход:

— разложение общего изменения Θy на факторные вклады;

— коэффициенты влияния факторов;

— ранжирование факторов по вкладу в изменение результата.

Шаг 1. Определение базового и планового состояний отклика: $y^{(0)} = f(\mathbf{x}^{(0)})$, $y^{(1)} = f(\mathbf{x}^{(1)})$.

Шаг 2. Выбор формы представления изменений Θ и вычисление изменений факторов и отклика: аддитивная, мультипликативная, комбинированные формы.

Шаг 3. Применение соответствующей формы теоремы Лагранжа о промежуточной точке (таблица 1).

Шаг 4. Определение параметра α промежуточной точки.

Шаг 5. Вычисление точных коэффициентов влияния.

Шаг 6. Интерпретация результатов: ранжирование факторов по $|\Theta y_i^*|$; вычисление долей влияния факторов; анализ знаков вкладов.

Предложенный алгоритм обладает рядом ключевых свойств, среди которых: глобальность и усреднение мер чувствительности на интервале, учет нелинейности и взаимодействий факторов, независимость от структуры модели и возможность интерпретации полученных результатов. Предложен статистический протокол оценки устойчивости метода.

Представлена концептуальная структура анализа чувствительности на основе анализа конечных изменений (рисунок 2), состоящая из трёх блоков: 1) формализация задачи и выбор формы изменений; 2) применение соответствующего различительного исчисления и определение промежуточной точки; 3) расчёт мер чувствительности, ранжирование факторов и оценка устойчивости результатов. Методология, представляющая собой совокупность методов и алгоритмов исследования чувствительности по факторам моделей сложных систем, является универсальной и применима к моделям систем различной природы.

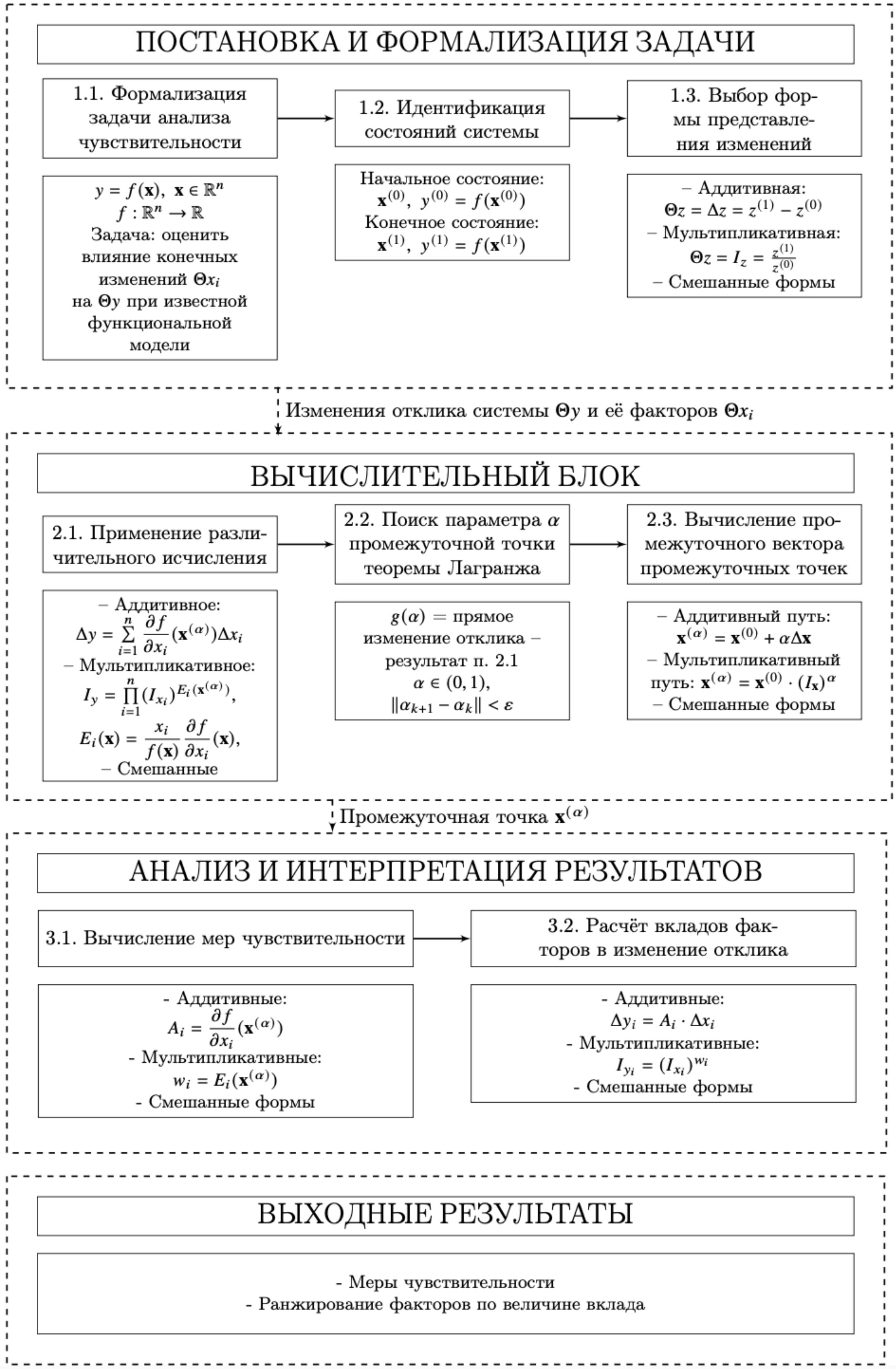

Рисунок 2 – Схема методологии анализа чувствительности по факторам на основе анализа конечных изменений

Таким образом, во второй главе предложен *метод анализа чувствительности по факторам, основанный на применении анализа конечных изменений и используемый для объективной количественной оценки влияния факторов*.

Третья глава посвящена систематизации методов приближённого анализа чувствительности, основанных на аппроксимации производных. Предложено использовать линейные регрессионные модели со взаимодействиями для аппроксимации зависимости «факторы-отклик». Исследована возможность аналитического вычисления частных производных, которые в общем виде представляются как линейные комбинации исходных переменных и их произведений. Полученные аналитические выражения используются в соотношениях метода анализа конечных изменений, основанного на теореме Лагранжа о промежуточной точке (модели (2)–(5)). В случае использования аддитивного различительного исчисления при переходе от состояния $\mathbf{x}$ к $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ изменение отклика для модели (2) в матричной форме представляется как

$$\Delta y(\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x},$$

где $\mathbf{J}$ — якобиан. Для регрессионной модели якобиан в промежуточной точке $\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}$ вычисляется подстановкой компонент $\tilde{x}_i = x_i + \alpha\Delta x_i$ в аналитические выражения производных.

Преимуществом предложенного подхода является высокая интерпретируемость получаемых оценок, поскольку коэффициенты регрессии непосредственно характеризуют вклад каждого фактора, а также возможность учёта эффектов взаимодействия переменных без существенного усложнения вычислительной процедуры.

Исследована возможность использования полносвязных нейронных сетей как универсального аппроксиматора для восстановления сложных нелинейных зависимостей. Рассматривается сеть с L слоями, реализующая преобразование входного вектора в выходной сигнал. В матричной форме градиент в промежуточной точке $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}$ выражается как произведение матриц весов и диагональных матриц производных функций активации

$$\nabla_{\hat{y}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{W}^{(1)T}\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{W}^{(2)T}\left(\ldots\left(\mathbf{D}^{(L-1)}\mathbf{W}^{(L)T}\mathbf{D}^{(L)}\right)\ldots\right)\right),$$

где $\mathbf{D}^{(l)}$ — диагональная матрица производных функций активации на слое l, вычисленных при прямом распространении промежуточной точки, $\mathbf{W}^{(l)T}$ — матрица весовых коэффициентов. Подстановка полученного градиента в соотношение (2) даёт

$$\Delta\hat{y}(\Delta\mathbf{x}) = \nabla_{\hat{y}}(\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x})^T\Delta\mathbf{x}.$$

Преимуществом нейросетевого подхода является его способность аппроксимировать сколь угодно сложные функции без необходимости задания их конкретной формы.

Рассмотрена возможность использования интерполяционных методов для построения аппроксимирующих конструкций. Интерполяционный многочлен Лагранжа для многомерного случая строится как тензорное произведение одномерных базисных функций. Исследованы интерполяционные многочлены Ньютона в терминах конечных разностей и разложения по ортогональным полиномам. Для всех типов интерполяционных конструкций производные в промежуточной точке выражаются в общем виде

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x_p}\right|_{\mathbf{x}+\alpha\Delta\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{i}} f(\mathbf{x}_\mathbf{i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_p}\left.\left(\prod_{k=1}^{d} \phi_{i_k}^{(k)}(x_k)\right)\right|_{\mathbf{x}+\alpha\Delta\mathbf{x}},$$

где $\phi_{i_k}^{(k)}$ — базисные функции выбранного интерполяционного метода. Градиент интерполяционного многочлена в промежуточной точке $\nabla P(\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x})$ представляет собой вектор частных производных. Полученные аналитические выражения градиентов в промежуточной точке для соотношений (2)–(5) позволяют точно декомпозировать общее изменение выхода системы на вклады, ассоциированные с каждым фактором. В работе также исследована устойчивость предложенных методов к погрешностям исходных данных и показана их работоспособность при наличии шума в экспериментальных измерениях.

Таким образом, предложен *класс методов приближенного анализа чувствительности по факторам, отличающихся использованием анализа конечных изменений и аппроксимированных усредненных коэффициентов влияния без необходимости аналитического дифференцирования математических моделей системы*.

Рассмотрен случай моделей систем, имеющих факторы дискретной природы. В работе предлагается алгоритм анализа чувствительности для смешанных факторов. Пусть вектор входов модели задан в виде $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D)$, где $\mathbf{x}_C \in \mathbb{R}^m$ — непрерывные факторы, $\mathbf{x}_D \in \mathbb{D}$ — дискретные ($\mathbb{D}$ — декартово произведение конечных множеств). Основная идея модификации заключается в том, чтобы искать промежуточную точку $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ не произвольно в $\mathbb{R}^n$, а в множестве допустимых комбинаций дискретных факторов. Таким образом, промежуточная точка ищется в виде $\mathbf{x}^{(\alpha)} = (\mathbf{x}_C^{(0)} + \alpha\Delta\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D^{(\alpha)})$, где $\alpha \in (0, 1)$, а $\mathbf{x}_D^{(\alpha)} \in \mathbb{X}_{\text{cand}} \subset \mathbb{D}$ — дискретная компонента из специально построенного множества кандидатов. При такой постановке точное выполнение условия теоремы Лагранжа о промежуточной точке не гарантируется, поэтому решается задача минимизации невязки

$$(\alpha^*, \mathbf{x}_D^*) = \arg \min_{\alpha \in (0,1), \mathbf{x}_D \in \mathbb{X}_{\text{cand}}} \left| \Delta y - \sum_{i \in I_C} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(\alpha)}) \Delta x_i - \sum_{j \in I_D} \tilde{g}_j(\mathbf{x}_D) \Delta x_j \right|, \tag{6}$$

где $\tilde{g}_j$ — конечно-разностная оценка влияния дискретного фактора j.

Вход:

— $\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{x}_C^{(0)}, \mathbf{x}_D^{(0)})$ — начальное состояние;

— $\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{x}_C^{(1)}, \mathbf{x}_D^{(1)})$ — конечное состояние;

— $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$, $\Delta y = f(\mathbf{x}^{(1)}) - f(\mathbf{x}^{(0)})$ — приращения факторов и отклика;

— множества индексов непрерывных I_C и дискретных I_D факторов.

Выход:

— промежуточная точка $\mathbf{x}^{(\alpha)}$;

— показатели чувствительности по факторам;

— минимальная достигнутая невязка по дискретным факторам $R_{\min} = R(\alpha^*, \mathbf{x}_D^*)$.

Шаг 1. Построить конечное множество кандидатов для дискретной компоненты промежуточной точки $\mathbb{X}_{\text{cand}} \subset \mathbb{D}$. Выбрать стратегию формирования этого множества (траектории, гиперпрямоугольная оболочка, случайная выборка).

Шаг 2. Для каждого кандидата $\mathbf{x}_D^{(k)} \in \mathbb{X}_{\text{cand}}$ и для заданного значения параметра $\alpha \in (0, 1)$ вычислить оценки частных производных. Для целочисленных факторов использовать конечно-разностную схему с минимальным шагом из области допустимых точек.

Шаг 3. Определить пару $(\alpha^*, \mathbf{x}_D^*)$, минимизирующую невязку уравнения (6).

Шаг 4. Вычислить оценки чувствительности факторов в точке $\mathbf{x}^{(\alpha)} = (\mathbf{x}_C^{(0)} + \alpha^* \Delta \mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D^*)$:

$$S_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(\alpha)}) \cdot \Delta x_i \quad \text{(непрерывные)}, \qquad S_j = \tilde{g}_j(\mathbf{x}_D^*) \cdot \Delta x_j \quad \text{(дискретные)}.$$

В отличие от существующих методов, предлагаемый подход позволяет оценивать вклад как непрерывных, так и дискретных факторов в единой концепции. В случае дискретных факторов происходит замена производной ее конечно-разностным аналогом, что сохраняет интерпретируемость изменений.

Таким образом, предложен *алгоритм анализа чувствительности для смешанных факторов, основанный на модификации методов анализа конечных изменений, отличающийся способностью к единому точному разложению влияния факторов различных типов*.

В **четвертой главе** рассматривается класс систем, имеющих компоненты иерархических связей. В системах присутствуют k уровней, на уровне $l = 1$ находятся входы системы; каждый последующий уровень $l = 2, \ldots, k$ содержит подсистемы, описываемые функциями $f_j^{(l)}$, выходы которых служат входами для подсистем более высокого уровня. На верхнем уровне $l = k$ находится результирующий показатель $y = f^{(k)}$. Предполагается, что все функции систем $f_j^{(l)}$ непрерывно дифференцируемы на своих областях определения. Заданы начальные $\mathbf{X}^{(0)}$ и конечные $\mathbf{X}^{(1)}$ состояния всех входов системы. Требуется разложить общее конечное приращение $\Delta y = y^{(1)} - y^{(0)}$ (или индекс $I_y = y^{(1)}/y^{(0)}$) на сумму (произведение) вкладов отдельных входных факторов с учётом полной иерархической структуры модели и нелинейности преобразований на каждом уровне.

Предлагаемый подход основан на применении анализа конечных изменений к каждому уровню иерархии. В отличае от исследования чувствительности выхода многоуровневой системы по входам её нижнего уровня и изолированного анализа каждого из уровней, предлагаемый подход позволяет обеспечить сквозное прослеживание влияния факторов через всю иерархию системы. В работе сформулированы и доказаны теоремы о сквозном иерархическом разложении влияния конечных изменений факторов на конечное изменение отклика системы в аддитивной (7) и мультипликативной (8) формах.

Для рассматриваемой иерархической системы существуют числа $\beta^{(l)}$ для каждого ее уровня $l = 2, ..., k$ такие, что общее конечное приращение Δy представимо в виде

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n_1} \left[\prod_{l=2}^{k} \frac{\partial f^{(l)}}{\partial f_{j_l}^{(l-1)}} \big(\mathbf{F}^{(l,\beta^{(l)})}\big) \right] \cdot \Delta x_i^{(1)}, \tag{7}$$

где $\mathbf{F}^{(l,\beta^{(l)})}$ — промежуточные точки на уровне l:

$$\mathbf{F}^{(l,\beta^{(l)})} = \big(f_1^{(l-1),(0)} + \beta^{(l)} \Delta f_1^{(l-1)}, ..., f_{n_{l-1}}^{(l-1),(0)} + \beta^{(l)} \Delta f_{n_{l-1}}^{(l-1)}\big),$$

$\Delta x_i^{(1)}$ — приращения входов, $\Delta f_j^{(l-1)}$ — приращения выходов подсистем уровня $l - 1$.

Если все функции $f_j^{(l)}$ положительны, то индекс итогового показателя $I_y = \dfrac{y^{(1)}}{y^{(0)}}$ представим в виде

$$I_y = \prod_{i=1}^{n_1} \big(I_{x_i^{(1)}}\big)^{\prod\limits_{l=2}^{k} E^{(l)}\left(\mathbf{F}^{(l,\beta^{(l)})}\right)}, \tag{8}$$

где $I_{x_i^{(1)}} = \dfrac{x_i^{(1),(1)}}{x_i^{(1),(0)}}$ — индексы входных факторов, $E^{(l)} = \dfrac{f^{(l-1)}}{f^{(l)}} \dfrac{\partial f^{(l)}}{\partial f^{(l-1)}}$ — эластичность выхода уровня l по выходу уровня $l - 1$, промежуточные точки в мультипликативной форме

$$\mathbf{F}^{(l,\beta^{(l)})} = \left(f_1^{(l-1),(0)}(I_{f_1^{(l-1)}})^{\beta^{(l)}}, ..., f_{n_{l-1}}^{(l-1),(0)}(I_{f_{n_{l-1}}^{(l-1)}})^{\beta^{(l)}}\right).$$

В частности, для системы вида $y = p\big(f_1(\mathbf{x}_1), \ldots, f_n(\mathbf{x}_n)\big)$ (случай $k = 2$) аддитивное разложение принимает форму цепного правила с различными промежуточными точками

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial p}{\partial f_j}\Big(f_1^{(0)} + \beta\Delta f_1, \ldots, f_n^{(0)} + \beta\Delta f_n\Big) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}}\Big(x_{j1}^{(0)} + \alpha_j \Delta x_{j1}, \ldots, x_{jm}^{(0)} + \alpha_j \Delta x_{jm}\Big)\right] \cdot \Delta x_{ji},$$

где $\beta, \alpha_j \in (0, 1)$ — параметры промежуточных точек для агрегирующей функции и подсистем соответственно.

Параметры $\beta^{(l)}$ определяются из условий теоремы Лагранжа о промежуточной точке на каждом уровне. Для подсистемы $g_j(\mathbf{x})$ нижнего уровня параметр α_j находится из решения уравнения

$$\Delta g_j = \sum_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i}\big(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}\big)\Delta x_i. \tag{9}$$

Для агрегирующей функции $p(\mathbf{g})$ параметр β находится из уравнения

$$\Delta y = \sum_j \frac{\partial p}{\partial g_j}\big(\mathbf{g}^{(0)} + \beta \Delta \mathbf{g}\big)\Delta g_j.$$

Определение параметров промежуточных точек носит рекурсивный характер. Для каждой из подсистем нижнего уровня значение параметра α_j^* находится из решения уравнения типа (9).

Таким образом, предложен *метод иерархического анализа чувствительности, отличающийся использованием анализа конечных изменений и способностью сквозного точного разложения влияния факторов на всех уровнях системы с учетом структурных связей и конфигурации системы*.

В **пятой главе** рассматриваются варианты применения планирования эксперимента для сокращения набора точек исследования чувствительности модели по факторам и определения интервалов чувствительности по факторам моделей.

Предлагается класс методов, синтезирующих метод латинского гиперкуба с аппаратом анализа конечных изменений. Ключевая особенность — использование параметров промежуточных точек $\alpha \in (0, 1)$, получаемых из точного разложения конечных приращений, в качестве инструмента оценки локальной чувствительности и критерия адаптивного сгущения плана. Это позволяет не только сократить общее число экспериментов, но и гарантировать, что дополнительные точки размещаются именно там, где функция наиболее чувствительна к изменениям факторов.

Алгоритм 1 Адаптивный анализа чувствительности

Вход:

Анализируемая функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
Область определения $D = [\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}]$
Параметры: N_0 — число точек в начальном плане, $N_{\max}$ — максимальное число точек в плане, $k_{\max}$ — максимальное число соседей, дополнительные параметры

Выход:

Финальный план $\mathbf{X}^* = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N)}\}$
Вектор оценок чувствительности $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$

Процедура AdaptiveSensitivityAnalysis(f, D, параметры)
  $\mathbf{X} \leftarrow$ Генерация (N_0, D) ▷ Шаг 1: Начальный план
  $\mathcal{F} \leftarrow$ Вычисление_функции($\mathbf{X}, f$)
  $t \leftarrow 0$
  Повторять ▷ Шаг 2: Итерационный процесс
    $k^* \leftarrow$ Определение_масштаба_поиска($\mathbf{X}, k_{\max}$) ▷ Автоматический выбор числа соседей
    $\mathcal{I} \leftarrow$ Поиск_промежуточных_точек($\mathbf{X}, \mathcal{F}, k^*$) ▷ Шаг 3: Локальный анализ
    $\mathcal{E} \leftarrow$ Вычисление_показателей($\mathcal{I}, D$, режим) ▷ Шаг 4: Оценка влияния факторов
    $\mathbf{X}_{\text{new}} \leftarrow$ Обогащение_плана($\mathcal{E}, \mathcal{I}$, параметры, D) ▷ Шаг 5: Добавление новых точек
    $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} \cup \mathbf{X}_{\text{new}}$
    $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup$ Вычисление_функции($\mathbf{X}_{\text{new}}, f$)
    $\mathbf{S}^{(t)} \leftarrow$ Агрегирование_оценок($\mathcal{E}$)
    $\Delta\mathbf{S} \leftarrow$ Оценка_изменения($\mathbf{S}^{(t)}, \mathbf{S}^{(t-1)}$)
    $t \leftarrow t + 1$
  до Критерий_останова($\Delta\mathbf{S}$, параметры) **или** $|\mathbf{X}| \geq N_{\max}$ ▷ Шаг 6: Проверка завершения
  Возврат $\mathbf{X}, \mathbf{S}^{(t)}$
Конец Процедура

В модификации алгоритма 1 с конечными приращениями параметрами являются: λ (порог отбора), ξ (размер окрестности) и ε (точность останова). На каждой итерации вычисляются Δf и $\Delta\mathbf{x}$, оцениваются частные производные с нормировкой. Отбор точек производится по условию $S_m > \lambda \cdot \max S$, новые точки генерируются как $\mathbf{x}_{\text{new}} = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\delta}$, где $\delta_m \sim U(-\xi\Delta x_m, \xi\Delta x_m)$. Останов осуществляется при стабилизации оценок с точностью ε.

Модификация с конечными индексами использует параметры: η (шаг генерации), δ (случайная составляющая), p (усиление эластичностей), λ_0 и γ (адаптивный порог $\lambda^{(t)} = \lambda_0 e^{-\gamma t}$), θ (резервный отбор), ε_1 и ε_2 (точности останова). На шаге 3 вычисляются эластичности, на шаге 4 — нормировка и суммарная чувствительность $E_{sum}^{(i)} = \sum_m |E_m^{(i)}|^p$. Отбор точек проводится при $E_{sum}^{(i)} > \lambda^{(t)}$ (иначе — θ% точек с максимальной чувствительностью). Направление движения определяется вектором $\mathbf{v} = \mathrm{sign}(\mathbf{E}) \odot |\mathbf{E}|^p$ с последующей нормировкой. Новая точка вычисляется как $\mathbf{x}_{\text{new}} = \mathbf{x}^{(i)} \pm \eta \cdot \mathbf{v}_{\text{norm}} \odot (\mathbf{x}_{\max} - \mathbf{x}_{\min}) + \boldsymbol{\delta}$. Останов происходит при одновременной стабилизации важности факторов (точность ε_1) и поведения функции (точность ε_2).

Структура подхода является единой, поэтому модификация алгоритма сводится к замене отдельных компонентов вычислительного процесса. Общая логика метода при этом не изменяется. В работе доказана теоретическая сходимость алгоритмов и приведена оценка их вычислительной сложности.

Таким образом, предложен *класс адаптивных методов планирования эксперимента для анализа чувствительности по факторам, отличающихся использованием анализа конечных изменений с автоматической концентрацией точек плана в областях высокой вариации отклика, и позволяющий сократить количество вычислений моделей системы*.

Предложен класс методов, синтезирующих теорию оптимального планирования эксперимента (D, A, E-оптимальность) с анализом конечных изменений. Ключевая особенность — использование информационной матрицы вида

$$M(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} \nabla f(\mathbf{x}_i) \nabla f(\mathbf{x}_i)^T,$$

где $\nabla f(\mathbf{x}) = \big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big)^T$, в качестве меры чувствительности и критерия адаптивного пополнения плана. Диагональные элементы M_{jj} определяют суммарную чувствительность выхода к фактору x_j, собственные векторы задают направления наибольшей чувствительности.

Алгоритм 2 представляет собой обобщенную итерационную схему класса методов оптимального планирования эксперимента, предназначенных для анализа чувствительности. Данная структура объединяет три различных режима (D-, E- и A-оптимальный) в единую методологическую основу, где конкретная реализация определяется выбором режима оптимальности. Основная идея алгоритма заключается в итеративном обогащении плана эксперимента точками, улучшающими заданный критерий оптимальности информационной матрицы, с параллельной оценкой чувствительности факторов с помощью анализа конечных изменений.

Алгоритм 2 Оптимальный анализ чувствительности

Вход:

Анализируемая функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
Область определения $D = [\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}]$
Параметры: N_0 — количество точек в начальном плане, $N_{\max}$ — максимальное количество точек в плане, дополнительные параметры

Выход:

Оптимальный план $\mathbf{X}^* = \{\mathbf{x}^{(1)}, ..., \mathbf{x}^{(N)}\}$
Вектор оценок чувствительности $\mathbf{S} = (S_1, ..., S_n)$

Процедура OptimalSensitivityAnalysis(f, D, параметры, режим)
    $\mathbf{X} \leftarrow$ Генерация_начального_плана$(N_0, D,$ режим$)$ ▷ Шаг 1: Начальный оптимальный план
    $\mathcal{F} \leftarrow$ Вычисление_функции$(\mathbf{X}, f)$
    $\mathbf{M} \leftarrow$ Информационная_матрица$(\mathbf{X}, f)$
    $t \leftarrow 0$
    Повторять ▷ Шаг 2: Итерационный процесс
        $\mathcal{P} \leftarrow$ Поиск_промежуточных_точек$(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ ▷ Шаг 3: Локальный анализ
        $\mathcal{S} \leftarrow$ Оценка_чувствительности$(\mathcal{P},$ режим$)$ ▷ Шаг 4: Оценка мер чувствительности
        $\mathbf{X}_{\text{cand}} \leftarrow$ Генерация_кандидатов$(\mathcal{S}, \mathcal{P},$ параметры$, D)$ ▷ Шаг 5: Формирование множества точек-кандидатов
        $\mathbf{x}_{\text{new}} \leftarrow$ Оптимальный_выбор$(\mathbf{X}_{\text{cand}}, \mathbf{M},$ режим$)$ ▷ Выбор новой точки
        $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}_{\text{new}}\}$
        $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{f(\mathbf{x}_{\text{new}})\}$
        $\mathbf{M} \leftarrow \mathbf{M} + \nabla f(\mathbf{x}_{\text{new}}) \nabla f(\mathbf{x}_{\text{new}})^T$
        $\mathbf{S}^{(t)} \leftarrow$ Агрегирование_оценок$(\mathcal{S})$
        $\Delta\mathbf{M} \leftarrow$ Оценка_изменения$(\mathbf{M},$ режим$)$
        $t \leftarrow t + 1$
    до Критерий_останова$(\Delta\mathbf{M},$ параметры$)$ **или** $|\mathbf{X}| \geq N_{\max}$ ▷ Шаг 6: Проверка завершения
    Возврат $\mathbf{X}, \mathbf{S}^{(t)}$
Конец Процедура

Параметры режимов алгоритма 2 представлены в таблице 2.

Использование методов анализа конечных изменений для точного определения промежуточных точек $\mathbf{x}^*$ позволяет вычислять оценки чувствительности S_m на основе локальных информационных матриц $M^*(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}^*)^T$ и осуществлять направленный отбор областей $\mathbf{X}_{\text{sens}}$ для генерации кандидатов. В работе доказана теоретическая сходимость алгоритмов оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности по факторам и приведена оценка их вычислительной сложности.

Таким образом, предложен *класс оптимальных методов планирования эксперимента для анализа чувствительности, отличающихся целенаправленным формированием плана, максимизирующего информативность градиентов модели в промежуточных точках, и применяемых для сокращения количества вычислений моделей системы*.

Таблица 2 – Параметры режимов оптимальных алгоритмов анализа чувствительности

Параметр	**Режим**		
	D-оптимальный	**E-оптимальный**	**A-оптимальный**
Специализированные параметры	θ — порог отбора точек, ε — пороговое значение останова	ε — пороговое значение останова	θ — порог отбора точек, ε — пороговое значение останова
Шаг 1: Начальный план	$\mathbf{X}_0 = \arg\max\limits_{\mathbf{X}\subset\mathbb{X}} \det(\mathbf{J}^T\mathbf{J})$	$\mathbf{X}_0 = \arg\max\limits_{\mathbf{X}\subset\mathbb{X}} \lambda_{\text{min}}(\mathbf{J}^T\mathbf{J})$	$\mathbf{X}_0 = \arg\min\limits_{\mathbf{X}\subset\mathbb{X}} \operatorname{tr}((\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1})$
Шаг 4: Оценка чувствительности		$S_m = \dfrac{1}{\lvert\mathcal{X}^*\rvert} \sum\limits_{\mathbf{x}^*\in\mathcal{X}^*} \dfrac{M^*_{mm}}{\operatorname{tr}(M^*)}$	
Шаг 5: Генерация кандидатов	$\mathbf{X}_{\text{cand}} = \mathbf{X}_{\text{sens}} \cup \mathbf{X}_{\text{rand}}$, где $\mathbf{X}_{\text{sens}}$ — точки с $S_m > \theta$	$\mathbf{x}_{\text{cand}} = \mathbf{x}^* + \delta$, $\delta \sim N(0, \sigma^2)$	$\mathbf{X}_{\text{cand}} = \mathbf{X}_{\text{sens}} \cup \mathbf{X}_{\text{rand}}$, где $\mathbf{X}_{\text{sens}}$ — точки с $S_m > \theta$
Шаг 6: Выбор новой точки	$\arg\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}_{\text{cand}}} \det(\mathbf{M} + \nabla f \nabla f^T)$	$\arg\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}_{\text{cand}}} \lambda_{\text{min}}(\mathbf{M} + \nabla f \nabla f^T)$	$\arg\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}_{\text{cand}}} \operatorname{tr}\left((\mathbf{M} + \nabla f \nabla f^T)^{-1}\right)$
Критерий останова	$\left\lvert \dfrac{\det(\mathbf{M}_{t+1}) - \det(\mathbf{M}_t)}{\det(\mathbf{M}_t)} \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \dfrac{\lambda_{\text{min}}(\mathbf{M}_{t+1}) - \lambda_{\text{min}}(\mathbf{M}_t)}{\lambda_{\text{min}}(\mathbf{M}_t)} \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \dfrac{\operatorname{tr}(\mathbf{M}_{t+1}^{-1}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}_t^{-1})}{\operatorname{tr}(\mathbf{M}_t^{-1})} \right\rvert < \varepsilon$
Выходные результаты	План $\mathbf{X}$, максимизирующий $\det(\mathbf{M})$; вектор $\mathbf{S}$	План $\mathbf{X}$, максимизирующий $\lambda_{\text{min}}(\mathbf{M})$; вектор $\mathbf{S}$	План $\mathbf{X}$, минимизирующий $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1})$; вектор $\mathbf{S}$

Примечание: J — якобиан функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{M}$ — информационная матрица, ∇f — градиент функции, $\mathbf{X}_{\text{sens}}$ — точки с высокой чувствительностью, $\mathbf{X}_{\text{rand}}$ — случайные точки, δ — случайное возмущение.

Одной из ключевых проблем в планировании эксперимента и анализе моделей, напрямую влияющей на точность их применения и достоверность результатов, является неравномерность чувствительности по факторам. Данная проблема возникает, когда оценка влияния факторов на отклик существенно зависит от диапазона их изменения. Предложен алгоритм, который направлен на выделение интервалов значений факторов, соответствующих различным уровням чувствительности, что позволяет учитывать локальную неоднородность влияния факторов на исследуемую функцию.

Вход:

— функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, для которой исследуется чувствительность;

— область определения $D = [\mathbf{x}_{\text{min}}, \mathbf{x}_{\text{max}}]$;

— параметры: m — количество точек дискретизации; k — число категорий чувствительности; $t_1, \ldots, t_{k-1}$ — пороговые значения для классификации.

Выход: интервалы $I^{L_i,m}$ для каждого фактора m и уровня чувствительности L_i. Для каждого интервала:

— диапазон значений фактора $[x_{\text{min}}^{L_i,m}, x_{\text{max}}^{L_i,m}]$, соответствующий данному уровню;

— диапазон значений чувствительности $[S_{\text{min}}^{L_i,m}, S_{\text{max}}^{L_i,m}]$;

— средняя чувствительность $\mu^{L_i,m}$.

Шаг 1. Из области определения факторов сгенерировать последовательность из m точек $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$, где $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$.

Шаг 2. Для каждой пары $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)})$:

— вычислить вектор приращений $\Delta\mathbf{x}$;

— найти параметр α промежуточной точки;

— в точке $\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}$ вычислить градиент:

$$\nabla f(\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x})\right).$$

Шаг 3. Для каждого фактора x_m выполнить нормализацию полученных оценок чувствительности S_m. На основе нормализованных значений построить распределение чувствительностей факторов.

Шаг 4. Для каждого фактора x_m:

— вычислить пороговые значения $Q_{t_i} = \text{quantile}(S_m, t_i)$, где $i = 1, \ldots, k-1$;

— значения S_m разделить на k категорий согласно правилу

$$\text{Level}(S_m) = \begin{cases} \text{уровень } 1, & S_m \le Q_{t_1} \\ \vdots & \\ \text{уровень } k, & S_m > Q_{t_{k-1}} \end{cases}$$

Шаг 5. Для каждого уровня $L = 1, \ldots, k$:

— определить границы интервала фактора:

$$x^L_{\text{min}} = \min\{\, x_m \mid \text{Level}(S_m) = L \,\},$$
$$x^L_{\text{max}} = \max\{\, x_m \mid \text{Level}(S_m) = L \,\};$$

— вычислить показатели чувствительности для данного уровня:

$$S^L_{\text{min}} = \min\{\, S_m \mid \text{Level}(S_m) = L \,\},$$
$$S^L_{\text{max}} = \max\{\, S_m \mid \text{Level}(S_m) = L \,\},$$
$$\mu^L = \text{mean}\{\, S_m \mid \text{Level}(S_m) = L \,\}.$$

Шаг 6. Если для двух соседних уровней L_{i-1} и L_i выполняется условие $x^{L_i}_{\text{min}} < x^{L_{i-1}}_{\text{max}}$ (интервалы перекрываются), произвести их разделение:
— вычислить точку раздела:

$$x_{\text{split}} = \frac{\max(x^{L_i}_{\text{min}}, x^{L_{i-1}}_{\text{min}}) + \min(x^{L_i}_{\text{max}}, x^{L_{i-1}}_{\text{max}})}{2};$$

— обновить границы интервалов:

$$x^{L_{i-1}}_{\text{max}} = x_{\text{split}}, \qquad x^{L_i}_{\text{min}} = x_{\text{split}}.$$

Шаг 7. Для каждого уровня L_i сформировать интервал

$$I^{L_i} = \left([x^{L_i}_{\text{min}}, x^{L_i}_{\text{max}}], \quad [S^{L_i}_{\text{min}}, S^{L_i}_{\text{max}}], \quad \mu^{L_i}\right).$$

Полученные интервалы позволяют исследовать неоднородность чувствительности факторов в различных областях пространства входных переменных, что имеет значение при калибровке сложных вычислительных моделей и в задачах оптимизации, требующих учета локальной вариации влияния факторов.

Таким образом, предложен *алгоритм определения интервалов чувствительности по факторам математических моделей систем, основанный на классификации локальных оценок градиента в точках, полученных методом анализа конечных изменений, отличающийся автоматическим выявлением областей значений факторов с качественно различной силой влияния на отклик, и применяемый для выделения рабочих диапазонов и пороговых значений факторов*.

В **шестой главе** представлены решения частных задач, основанных на исследовании чувствительности по факторам моделей.

Предложен комплексный подход, интегрирующий стохастическое моделирование, анализ чувствительности и построение экспертной системы на основе продукционных правил. Такой механизм лёг в основу реализации адаптивной замкнутой системы управления, общая архитектура и логика работы которой представлены на схеме (рис. 3) и включают функционально связанные модули.

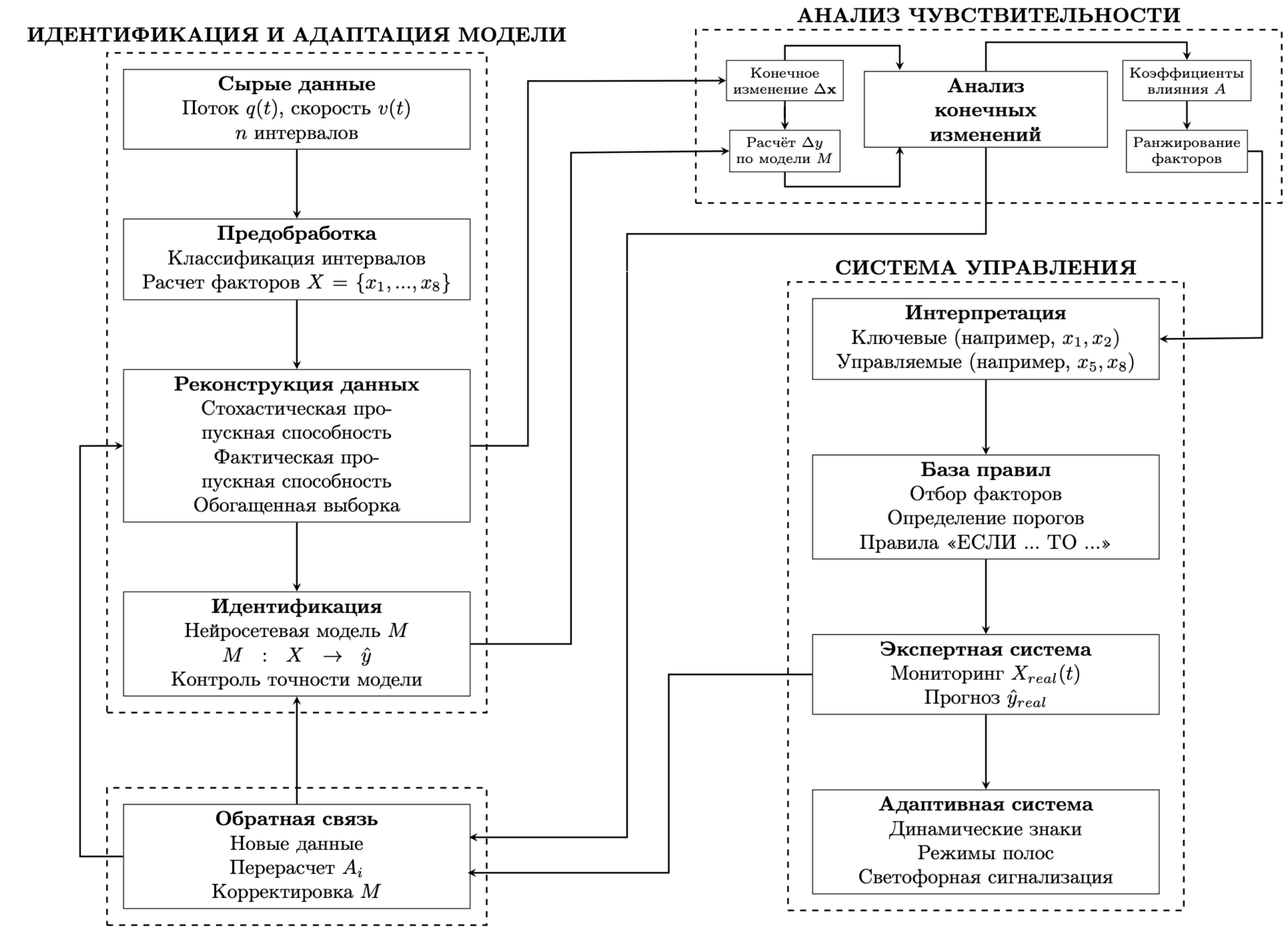

Рисунок 3 – Структурно-алгоритмическая схема адаптивной системы управления пропускной способностью на основе нейросетевого моделирования и анализа чувствительности

Особую роль в предлагаемом подходе играет анализ чувствительности построенной нейросетевой модели, который количественно оценивает влияние каждого входного фактора на прогнозируемую пропускную способность. Анализ служит связкой между точной прогнозной моделью и практической системой принятия решений, обеспечивая обоснованность формируемых управляющих правил.

Система функционирует на основе сбора и предварительной обработки данных с гетерогенных детекторов транспортного потока. Для каждого участка транспортной сети формируется вектор входных факторов $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_8\}$. На этапе обучения модели создаётся обогащённая обучающая выборка на основе прямых замеров пропускной способности в моменты затора и её стохастических оценок в моменты свободного движения. Выборка используется для идентификации модели $M : \mathbf{x} \rightarrow \hat{y}$ и ее последующей верификации.

К построенной модели M применяется анализ чувствительности для определения влиятельности факторов. Результаты анализа позволяют формально разделить факторы на две группы с помощью порогового значения θ: ключевые факторы $K = \{i : |\tilde{A}_i| \geq \theta\}$ и управляемые факторы $U = \{j : |\tilde{A}_j| < \theta\}$ и фактор j оперативно изменяется. Это разделение позволяет сформировать рациональную основу для построения базы продукционных правил экспертной системы: условия правил формируются преимущественно на основе факторов из множества K, а управляющие воздействия — на основе факторов из множества U. При активации продукционного правила система выбирает оптимальное управляющее воздействие из множества возможных $\Delta x_{\text{упр}} = \{\Delta u_1, \Delta u_2, \dots\}$ на основе оценки ожидаемого эффекта: $\Delta \hat{y}_{u_j} \approx \sum_{i \in U} \tilde{A}_i \cdot \Delta u_j^{(i)}$, где $\Delta u_j^{(i)}$ — изменение i-го управляемого фактора при применении j-го воздействия. Система выбирает воздействие u^*, которое максимизирует прирост пропускной способности. Экспертная система осуществляет непрерывный мониторинг текущего состояния потока $\mathbf{x}_{real}(t)$, прогнозирует потенциальную пропускную способность $\hat{y}_{real}$ и на основе активированных правил генерирует управляющие команды для адаптивной дорожной инфраструктуры: динамических информационных табло, систем реверсивного движения полос, светофорного регулирования на въездах. Применение управляющих воздействий изменяет характеристики транспортного потока. Эти изменения регистрируются детекторами и поступают в систему в виде новых данных, замыкая контур управления. Новые данные используются для периодического перерасчёта коэффициентов чувствительности $\tilde{A}_i$ и, при необходимости, адаптации (дообучения) модели M.

Применение анализа чувствительности позволило выявить, что три фактора обеспечивают более 85% совокупного влияния на выходной показатель, что даёт возможность сократить размерность задачи управления в 3–4 раза без существенной потери качества решений. Сформированная на этой основе база продукционных правил обеспечивает обоснованное принятие управленческих решений в реальном времени, позволяя увеличить пропускную способность загруженных участков на 12–18% по сравнению со сценарием отсутствия адаптивного управления.

В работе рассмотрена постановка и подход к решению обратной задачи управления на основе исследования чувствительности по факторам — определение необходимых управляющих воздействий (приращений контролируемых факторов), которые обеспечат достижение желаемого целевого состояния ключевого показателя (в рассматриваемом примере — валового регионального продукта) при минимизации затрат на их реализацию. Предложенное решение основано на комбинации методов машинного обучения, кластерного анализа и анализа чувствительности. Предлагаемая методология включает три ключевых этапа: типологизация регионов, построение прогнозных моделей и итеративный поиск оптимальных управлений. Применение метода k-средних к показателям субъектов РФ позволило выделить несколько устойчивых типов регионов (кластеров), различающихся по структуре экономики и уровню развития. Это позволяет в дальнейшем строить модели, которые учитывают специфику каждого типа, а не усредняют разнородные данные. На втором этапе для каждого кластера C_k строится нейросетевая аппроксимация $y = f_{C_k}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ — управляемые факторы, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ — контекстные параметры. Качество идентификации моделей для кластеров подтверждается высокими значениями коэффицентов детерминации ($R^2 > 0.8$). На третьем этапе для региона i из кластера C_k с текущими $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ требуется найти $\Delta\mathbf{x}_i$, обеспечивающий заданный прирост Δy_i^* при минимальных затратах. Для решения этой задачи предложен итеративный алгоритм управления конечными приращениями факторов, основанный на применении анализа чувствительности модели.

Вход: $f(\mathbf{x})$ — дифференцируемая функция отклика, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор факторов; $\mathbf{x}_0$ — начальная точка (базовое состояние системы); Δf_{target} — целевое приращение функции отклика; $C(\Delta\mathbf{x})$ — функция стоимости изменений факторов; D — область допустимых приращений факторов (ограничения на изменения); $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$ — начальное приближение приращений факторов; $\alpha^{(0)} = 0.5$ — начальное значение параметра $\alpha \in (0, 1)$ для теоремы Лагранжа о промежуточной точке; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — пороговые значения для критериев останова; max_iter — максимальное число итераций.

Выход: оптимальные приращения факторов $\Delta\mathbf{x}^*$, обеспечивающие заданное изменение отклика при минимальной стоимости; вклад каждого фактора в общее изменение отклика.

Шаг 1. Инициализация. Задание начального приближения $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$. Определение критериев останова: ε_1 (точность по Δf), ε_2 (стабилизация $\Delta\mathbf{x}$), ε_3 (стабилизация α). Вычисление начального значения $\Delta f^{(0)} = f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) - f(\mathbf{x}_0)$.

Шаг 2. Для всех $k = 0, 1, \ldots,$ max_iter:

— Вычислить промежуточную точку и градиент в ней

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)\right)^T.$$

— Решить вспомогательную задачу оптимизации

$$\min_{\Delta\mathbf{x} \in D} C(\Delta\mathbf{x}) \quad \text{при условии} \quad \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \Delta\mathbf{x} = \Delta f_{\text{target}}.$$

— Уточнить α из решения уравнения

$$f\left(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}^{(k+1)}\right) - f(\mathbf{x}_0) = \\ = \nabla f\left(\mathbf{x}_0 + \alpha^{(k+1)}\Delta\mathbf{x}^{(k+1)}\right)^T \Delta\mathbf{x}^{(k+1)}.$$

— Проверить следующие критерии:

$$\left|\Delta f^{(k+1)} - \Delta f_{\text{target}}\right| < \varepsilon_1 \quad \text{(достижение целевого прироста);}$$
$$\left\|\Delta\mathbf{x}^{(k+1)} - \Delta\mathbf{x}^{(k)}\right\| < \varepsilon_2 \quad \text{(стабилизация управляющих воздействий);}$$
$$\left|\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}\right| < \varepsilon_3 \quad \text{(стабилизация параметра шага).}$$

Если выполняется хотя бы одно из условий, перейти к проверке корректности найденного решения (шаг 3).

Шаг 3. Проверка корректности решения. Найденное приращение $\Delta\mathbf{x}^{(k+1)}$ должно принадлежать допустимой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (множество допустимых значений управляемых факторов). Дополнительно проверить точность достижения целевого прироста

$$\left| f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}^{(k+1)}) - f(\mathbf{x}_0) - \Delta f_{\text{target}} \right| < \varepsilon_1.$$

Шаг 4. Анализ результатов. Для найденного решения $\Delta\mathbf{x}^{(k+1)}$ вычислить итоговую стоимость управления $C(\Delta\mathbf{x}^{(k+1)})$. Вклад каждого фактора x_i в изменение отклика оценить как

$$\text{Вклад}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\mathbf{x}^{(k+1)}\big) \cdot \Delta x_i^{(k+1)}.$$

В работе рассматриваются различные типы функций стоимости $C(\Delta\mathbf{x})$, формализующие цель управления как минимизацию затрат на изменения управляемых факторов (квадратичная L2, модульная L1, комбинированная Elastic Net, минимаксная L-infinity). Выбор конкретной функции осуществляется на основе приоритетов экономической политики (например, минимизация суммарных изменений или равномерное распределение воздействий).

При минимальных совокупных затратах на изменение факторов достигнутая точность составила 98,1% от целевого прироста ВРП. Индекс Херфиндаля-Хиршмана равен $HHI = 0,339$; при этом 86,3% суммарного управляющего воздействия приходится на три фактора. Эффективное число факторов $N_{\text{eff}} = 2,95$, что соответствует снижению размерности задачи управления с 11 до 3 (в 3,7 раза). Сокращение числа значимых направлений уменьшает потребность в административных и бюджетных ресурсах при практической реализации региональной политики.

Таким образом, предложен *алгоритм управления конечными приращениями факторов, основанный на итеративной комбинации методов анализа конечных изменений и задач условной оптимизации, и используемый для поиска оптимального набора изменений факторов для заданного достижения целевого приращения отклика модели системы*.

Решена задача редукции признакового пространства для определения аномалий в массивах данных об оказании медицинской помощи. Критически важной подзадачей при цифровизации системы здравоохранения РФ является детектирование аномальных наблюдений — записей, статистически значимо отклоняющихся от шаблонов корректного оказания услуг. Семантически аномалии соответствуют: техническим ошибкам кодирования; клинически необоснованным схемам лечения; потенциальным случаям финансовых нарушений. Пусть исходное пространство признаков описывается вектором $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$, где $n = 34$ (полный набор атрибутов учета медицинской помощи). Нейросетевая модель-классификатор реализует отображение $F : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$, где 1 соответствует метке «аномалия».

Задача редукции формулируется как поиск подмножества индексов $I \subset \{1, ..., n\}$

мощностью $|I| = m < n$, для которого редуцированная модель $F_R : \mathbb{R}^m \to \{0, 1\}$ удовлетворяет условию: $|\mathrm{Perf}(F) - \mathrm{Perf}(F_R)| \le \varepsilon$, где $\mathrm{Perf}(\cdot)$ — метрика качества классификации, ε — допустимое снижение точности.

В качестве базовой модели выбрана полносвязная нейронная сеть: входной слой (34 исходных признака и синтетический признак — оценка аномальности методом изолирующего леса); скрытый слой (3 нейрона с логистической функцией активации); выходной слой (1 нейрон с линейной активацией, значение $\hat{y}$ интерпретируется как степень аномальности). Применение анализа чувствительности к полной модели F выявило существенную неоднородность распределения факторных нагрузок. На основе кумулятивной суммы нормированных нагрузок отобрано $m = 15$ признаков, обеспечивающих более 92% совокупного влияния на выход модели.

Применение анализа конечных изменений для исследования чувствительности с последующей редукцией модели обнаружения аномалий позволило сократить размерность входного пространства признаков с 34 до 15 (сокращение на 56%). При этом сохранено 92% совокупной факторной нагрузки. Точность классификации составила 78%, доля ложноположительных срабатываний — 24%, ложноотрицательных — 16%. Указанные значения соответствуют требованиям к системам фильтрации аномалий, предназначенным для последующей экспертной верификации. Вычислительная сложность модели снизилась в 2,1 раза.

В **заключении** диссертации подведены итоги проведенного и завершенного в рамках поставленных задач исследования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложен метод анализа конечных изменений для исследования чувствительности моделей по факторам, позволяющий получить точные оценки влияния в детерминированных моделях и приближённые методы с аппроксимированными усреднёнными коэффициентами, применяемые для моделей со сложной или недоступной для дифференцирования аналитической формой.
2. Синтезирован алгоритм анализа чувствительности для смешанных факторов, обеспечивающий единое точное количественное разложение вклада факторов различных типов (непрерывных и дискретных) в условиях единой конфигурации модели.
3. Разработан метод иерархического анализа чувствительности, позволяющий осуществлять сквозное точное разложение влияния входных факторов на выходной показатель с учётом структуры и конфигурации многоуровневой системы.
4. Предложены классы адаптивных и оптимальных методов планирования эксперимента для анализа чувствительности, позволяющих сократить количество точек для исследования. Показана теоретическая сходимость предложенных алгоритмов.
5. Предложен алгоритм определения интервалов чувствительности по факторам, основанный на кластеризации локальных оценок градиента, для автоматиче-

ского выявления и описания областей значений факторов с качественно различной силой влияния на отклик модели.

6. Разработан итерационный алгоритм управления конечными приращениями факторов, основанный на комбинации методов анализа чувствительности и задач условной оптимизации, для решения обратных задач управления путём нахождения минимально затратного набора изменений факторов. Эффективность алгоритма подтверждена доказательством сходимости за конечное число итераций при выполнении условий строгой выпуклости функции стоимости и компактности области допустимых решений.

7. Предложен комплексный подход к управлению пропускной способностью автомагистралей, интегрирующий стохастическое моделирование, анализ чувствительности на основе метода конечных изменений и построение продукционной экспертной системы, что обеспечивает реализацию адаптивной замкнутой системы управления дорожной инфраструктурой. Построенная нейросетевая модель продемонстрировала высокую точность прогнозирования (99,5%). Анализ чувствительности выявил, что три ключевых фактора обеспечивают более 85% совокупного влияния на выходной показатель, что позволяет сократить размерность задачи управления в 3-4 раза без потери качества. Сформированная на этой основе база продукционных правил обеспечивает обоснованное принятие решений в реальном времени, увеличивая пропускную способность загруженных участков на 12–18%.

8. Разработан метод решения обратной задачи регионального управления на основе итерационного алгоритма управления конечными приращениями факторов на кластер-специфичных нейросетевых моделях для определения оптимальных управляющих воздействий, обеспечивающих достижение заданного прироста валового регионального продукта при минимальных затратах. Экспериментальная апробация метода продемонстрировала его высокую эффективность: точность достижения целевого прироста ВРП составила 98,1%, индекс концентрации Херфиндаля-Хиршмана подтвердил, что 86,3% усилий приходятся на три ключевых фактора, эффективное число факторов показало, что предложенный подход позволяет снизить размерность задачи управления в 3,7 раза, что критически важно для практической реализации региональной политики в условиях ограниченных бюджетных ресурсов.

9. Разработан метод редукции модели обнаружения аномалий в медицинских данных на основе анализа чувствительности нейросетевого классификатора, обеспечивающий сокращение размерности признакового пространства при сохранении высокой точности модели и значительном повышении её вычислительной эффективности и интерпретируемости. Применение подхода позволило сократить размерность входного пространства признаков на 56% при сохранении 92% совокупной факторной нагрузки, что обеспечило снижение вычислительной сложности модели более чем в 2 раза без критической потери качества детекции.

10. Полученные результаты апробированы в виде публикаций и докладов на конференциях, а также путём их реализации при решении ряда практических задач.

Рекомендации по использованию полученных результатов. Результаты работы целесообразно использовать при проектировании и анализе сложных систем в условиях неопределённости для оценки влияния факторов в математических моделях энергетических, транспортных и производственных систем, при обосновании редукции многоуровневых иерархических моделей, в задачах сценарного анализа и оптимизации управляющих воздействий на основе обратных задач, а также для построения адаптивных и оптимальных планов эксперимента при высокой вычислительной сложности системы.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации связаны с распространением предложенной методологии на динамические системы и системы с распределёнными параметрами. Дополнительные направления развития включают интеграцию разработанных методов с технологиями цифровых двойников и применение подхода к задачам управления в активных системах с обратной связью в реальном времени.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ РАБОТЫ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. **Сысоев, А.С.** Оптимальное управление конечными приращениями факторов модели на основе анализа чувствительности / А.С. Сысоев // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. — 2026. — Т. 14, № 2 (53).
2. **Сысоев, А.С.** Анализ чувствительности моделей с учетом дискретных факторов / А.С. Сысоев // Системы управления и информационные технологии. — 2026. — № 1 (103). — С. 12–16.
3. **Сысоев, А.С.** Адаптивное планирование эксперимента в анализе чувствительности по факторам математических моделей: применение эластичности как меры чувствительности / А.С. Сысоев // Научно-технический Вестник Поволжья. — 2026. — № 3. — С. 98–101.
4. **Сысоев, А.С.** Применение анализа чувствительности, построенного на исследовании конечных изменений, для математического ремоделирования моделей с неравномерной чувствительностью / А.С. Сысоев, П.В. Сараев // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. — 2025. — № 4. — С. 6–16.
5. **Сысоев, А.С.** Планирование эксперимента для анализа чувствительности по факторам математических моделей различных классов / А.С. Сысоев, П.В. Сараев, А.К. Погодаев // Управление большими системами: сборник трудов. — 2025. — № 117. — С. 103–118.
6. **Сысоев, А.С.** Редукция иерархических моделей: чувствительность по факторам на основе анализа конечных изменений / А.С. Сысоев, А.К. Погодаев, П.В. Сараев // Управление большими системами : сборник трудов. — 2025. — № 113. — С. 21–36.
7. Погодаев, А.К. Применение нейро-нечеткого метода классификации напряженных точек транспортной сети / А.К. Погодаев, **А.С. Сысоев**, С.В. Жихорева // Системы управления и информационные технологии. — 2025. — № 1 (99). — С. 44–49.

8. **Сысоев, А.С.** Математическое и программное обеспечение для решения задачи анализа чувствительности по факторам таблично заданных математических моделей с использованием концепции ремоделирования / А.С. Сысоев, А.И. Мирошников, П.В. Сараев // Прикладная математика и вопросы управления. — 2024. — № 4. — С. 6–17.

9. Применение иерархического анализа чувствительности к модели пропускной способности городской транспортной сети / Г.С. Боровкова, С.В. Жихорева, В.Э. Клявин, А.К. Погодаев, **А.С. Сысоев** // Прикладная математика и вопросы управления. — 2024. — № 4. — С. 88–98.

10. Блюмин, С.Л. Исследование чувствительности нейросетевых моделей с применением анализа конечных изменений / С.Л. Блюмин, А.В. Галкин, **А.С. Сысоев** // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2023. — № 2. — С. 40–51.

11. Система выявления аномальных наблюдений в данных об оказании медицинской помощи населению / С.Л. Блюмин, Р.В. Щеглеватых, А.А. Найденов, **А.С. Сысоев** // Вестник Тамбовского государственного технического университета. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 356–367.

12. Щеглеватых, Р.В. Исследование нейросетевой модели обнаружения аномальных наблюдений в массивах данных / Р.В. Щеглеватых, **А.С. Сысоев** // Прикладная математика и вопросы управления. — 2021. — № 1. — С. 23–40.

13. Щеглеватых, Р.В. Математическая модель обнаружения аномальных наблюдений с использованием анализа чувствительности нейронной сети / Р.В. Щеглеватых, **А.С. Сысоев** // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. — 2020. — Т. 8, № 1.

14. Блюмин, С.Л. Применение теоремы Лагранжа о конечных приращениях для решения проблем управления транспортными системами / С.Л. Блюмин, **А.С. Сысоев** // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 82–87.

15. Blyumin, S.L. Evaluation of teaching staff activity using methods of analysis of finite fluctuations / S.L. Blyumin, G.S. Borovkova, **A.S. Sysoev** // Вести высших учебных заведений Черноземья. — 2014. — № 3 (37). — С. 40–44.

Публикации в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus

16. **Sysoev, A.S.** Traffic Flow Optimization in a High-Speed Transportation Corridor: Analytical Modeling and Software / A.S. Sysoev, A.K. Pogodaev, A.I. Miroshnikov // Control Sciences. — 2025. — № 5. — P. 79–87.

17. **Sysoev, A.** Mathematical remodeling: Hierarchical sensitivity analysis approach based on analysis of finite fluctuations / A. Sysoev, P. Saraev // Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science. — 2025. — Vol. 69, № 2. — P. 188–197.

18. Neural networks approach to remodel capacity on urban road and street network / **A. Sysoev**, S. Zhikhoreva, V. Klyavin, A. Pogodaev // Periodica Polytechnica Transportation Engineering. — 2025. — Vol. 53, № 4. — P. 357–363.

19. Application of Neural Networks to Generate Production Rules for Traffic Flow Control / G. Borovkova, S. Galkina, V. Klyavin, A. Pogodaev, **A. Sysoev** // 2025 7th

International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, 12–14 November 2025. — 2025. — P. 381–384.

20. Modeling Intelligent Traffic Control System for Urban Agglomeration / A. Pogodaev, V. Klyavin, **A. Sysoev** [et.al.] // 2024 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, 13–15 November 2024. — 2024. — P. 872–879.

21. **Sysoev, A.** Sensitivity analysis of mathematical models / A. Sysoev // Computation. — 2023. — Vol. 11, № 8. — P. 159.

22. Applying Machine Learning Methods and Models to Explore the Structure of Traffic Accident Data / **A. Sysoev**, A. Mamedov, V. Shushunov [et.al.] // Computation. — 2022. — Vol. 10, № 4. — P. 57.

23. **Sysoev, A.** Hybrid model of controlling traffic flows within regional intelligent transportation system / A. Sysoev, A. Galkin, E. Khabibullina // Reliability and Statistics in Transportation and Communication (RelStat 2020) : Selected Papers from the 20th International Conference, Riga, 14–17 October 2020. — Cham, 2021. — P. 528–537.

24. Blyumin, S. Finite increments and quantum derivatives / S. Blyumin, G. Borovkova, **A. Sysoev** // Proceedings of 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA 2020), Virtual, Lipetsk, 10–13 November 2020. — 2020. — Vol. 2. — P. 11–13.

25. **Sysoev, A.S.** Functional model of expert traffic flow control system within high-speed transportation corridors / A.S. Sysoev, E.L. Khabibullina // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — Bristol, 2020. — P. 012084.

26. **Sysoev, A.** Highway Capacity Estimation: International Regulation and Neurostructural Remodeling Approach / A. Sysoev, S. Blyumin, T. Anikienko // Periodica Polytechnica Transportation Engineering. — 2020. — Vol. 48, № 2. — P. 180–188.

27. Sensitivity analysis of neural network models: Applying methods of analysis of finite fluctuations / **A. Sysoev**, S. Blyumin, A. Ciurlia, R. Sheglevatych // Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science. — 2019. — Vol. 63, № 4. — P. 306–311.

28. **Sysoev, A.** Approach to sensitivity analysis of stochastic freeway capacity model based on applying analysis of finite fluctuations / A. Sysoev, N. Voronin // Proceedings of 2019 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA 2019), Lipetsk, 20–22 November 2019. — 2019. — P. 621–626.

29. Blyumin, S. Analysis of finite fluctuations in studying hierarchical organizational systems / S. Blyumin, G. Borovkova, **A. Sysoev** // Proceedings of 2019 21st International Conference ”Complex Systems: Control and Modeling Problems” (CSCMP 2019), Samara, 3–6 September 2019. — 2019. — P. 724–728.

30. Analysis of finite fluctuations as an approach to mathematical remodeling / S. Blyumin, **A. Sysoev**, A. Galkin, P. Saraev // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — P. 012025.

31. Analysis of finite fluctuations for solving big data management problems / S.L. Blyumin, G.S. Borovkova, K.V. Serova, **A.S. Sysoev** // 2015 9th International

Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT 2015) : Proceedings : 9, Rostov-on-Don, 14–16 October 2015. — Rostov-on-Don, 2015. — P. 48–51.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

32. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025696881 Российская Федерация. Программа для генерации продукционных правил управления транспортными потоками с использованием нейронных сетей : № 2025696027 : заявл. 11.12.2025 : опубл. 22.12.2025 / Г.С. Боровкова, С.В. Галкина, В.Э Клявин, А.К. Погодаев, **А.С. Сысоев** ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Липецкий государственный технический университет.

33. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021615876 Российская Федерация. Модуль автоматизированного формирования продукционных правил экспертной системы управления транспортными потоками : № 2021614910 : заявл. 07.04.2021 : опубл. 13.04.2021 / Д.М. Инютин, Е.Л. Хабибуллина, **А.С. Сысоев** ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Липецкий государственный технический университет.

34. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021663205 Российская Федерация. Система обработки данных об оказании медицинской помощи : № 2021662303 : заявл. 02.08.2021 : опубл. 12.08.2021 / А.А. Найденов, **А.С. Сысоев**, Р.В. Щеглеватых ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Липецкий государственный технический университет.

Монографии и учебные пособия

35. Интеллектуальные методы управления транспортными системами : монография / **А.С. Сысоев**, С.А. Ляпин, А.В. Галкин [и др.]. — Москва : Дашков и К°, 2021. — 192 с. — ISBN 978-5-394-04558-5.

36. Развитие методов графоструктурного моделирования и анализа конечных изменений : учебное пособие / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, Н.Ю. Жбанова, **А.С. Сысоев**. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, 2021. — 111 с. — ISBN 978-5-00175-065-9.

37. Основы лагранжева анализа конечных изменений : учебное пособие / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, К.В. Серова, **А.С. Сысоев**. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, 2016. — 80 с. — ISBN 978-5-88247-807-9.

38. Оптимизация. Псевдообращение. Итерации и рекурсии : учебное пособие / А.К. Погодаев, С.Л. Блюмин, С.П. Миловидов, **А.С. Сысоев**. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, 2015. — 193 с. — ISBN 978-5-88247-741-6.

Прочие статьи и материалы конференций

39. Иерархический анализ чувствительности модели пропускной способности / А.К. Погодаев, В.Э. Клявин, **А.С. Сысоев** [и др.] // Управление большими системами : труды XX Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Новочеркасск, 10–13 сент. 2024 г. — Новочеркасск, 2024. — С. 149–155.

40. Блюмин, С.Л. Исследование чувствительности нейросетевой модели с несколькими откликами / С.Л. Блюмин, А.В. Галкин, **А.С. Сысоев** // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 дек. 2022 г. — Воронеж, 2023. — С. 343–347.

41. Блюмин, С.Л. Об анализе чувствительности по факторам математических моделей / С.Л. Блюмин, А.В. Галкин, **А.С. Сысоев** // Математические методы в технологиях и технике. — 2022. — № 10. — С. 39–43.

42. Графо-структурное моделирование организационных систем и иерархий / С.Л. Блюмин, Н.Ю. Жбанова, А.И. Мирошников, **А.С. Сысоев** // Вестник Липецкого государственного технического университета. — 2020. — № 1 (42). — С. 5–11.

43. Sheglevatych, R. Analysis of finite fluctuations as a basis of defining a set of neural network model inputs / R. Sheglevatych, **A. Sysoev** // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем. — 2020. — № 4. — С. 313–316.

44. **Сысоев, А.С.** Функциональная модель экспертной системы управления потоками транспорта в высокоскоростных транспортных коридорах / А.С. Сысоев, Е.Л. Хабибуллина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 нояб. 2019 г. — Воронеж, 2020. — С. 1114–1120.

45. Блюмин, С.Л. Конечные приращения и квантовые производные / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Актуальные вопросы естествознания: материалы V Всеросийской научно-практической конференции с международным участием, Иваново, 24 марта 2020 г. / сост.: О.В. Хонгорова, М.Г. Есина. — Иваново, 2020. — С. 271–275.

46. **Сысоев, А.С.** Гибридная модель региональной интеллектуальной системы управления потоками в высокоскоростных транспортных коридорах / А.С. Сысоев // Гибридные и синергетические интеллектуальные системы : материалы V Всероссийской Поспеловской конференции с международным участием, Зеленоградск, Калининградская область, 18–20 мая 2020 г. / под ред. А.В. Колесникова. — Калининград, 2020. — С. 355–362.

47. Блюмин, С.Л. Векторный анализ конечных изменений / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // International Journal of Advanced Studies in Computer Engineering. — 2019. — № 2. — С. 4–8.

48. Блюмин, С.Л. Анализ конечных изменений как метод исследования иерархических организационных систем / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Проблемы управления и моделирования в сложных системах : труды XXI Международной конференции, Самара, 3–6 сент. 2019 г. В 2 т. Т. 2 / под ред.:

С.А. Никитова, Д.Е. Быкова, С.Ю. Боровика, Ю.Э. Плешивцевой. — Самара, 2019. — С. 367–372.

49. **Sysoev, A.S.** Neural network approach to remodel stochastic freeway capacity / A.S. Sysoev, J. Geistefeldt // IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018) : Proceedings, Moscow, 22–27 October 2018. — Москва, 2018. — С. 302–307.

50. Блюмин, С.Л. Применение метода лагранжева анализа конечных изменений для оценки качества работы преподавателей / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Управление качеством образовательного процесса в высшей школе в условиях реформирования : материалы Международной научной конференции, Владикавказ, 6–7 нояб. 2014 г. — Владикавказ, 2017. — С. 125–131.

51. Анализ конечных изменений как вариант математического ремоделирования / С.Л. Блюмин, А.В. Галкин, П.В. Сараев, **А.С. Сысоев** // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 дек. 2017 г. — Воронеж, 2017. — С. 587–591.

52. Блюмин, С.Л. Обратные задачи в лагранжевом анализе конечных изменений / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство : материалы Тринадцатой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Старый Оскол, 23–25 нояб. 2016 г. — Старый Оскол, 2016. — С. 6–10.

53. Блюмин, С.Л. Цепной лагранжев анализ конечных изменений в системе менеджмента качества предприятия / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Парадигма. — 2016. — № 2. — С. 24–33.

54. Блюмин, С.Л. Методы анализа конечных изменений в транспортной экономической науке / С.Л. Блюмин, **А.С. Сысоев**, К.В. Серова // Развитие экономической науки на транспорте: скорость как экономическая категория : сборник докладов III Международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 6 июня 2014 г. / под общ. ред. Н.А. Журавлевой. — Краснодар, 2015. — С. 53–59.

55. **Сысоев, А.С.** Решение задач управления техническими и социально-экономическими системами методами анализа конечных изменений / А.С. Сысоев, Г.С. Боровкова // Управление большими системами : материалы XII Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Волгоград, 7–11 сент. 2015 г. / под общ. ред. Д.А. Новикова, А.А. Воронина. — Москва, 2015. — С. 819–831.

56. **Сысоев, А.С.** Лагранжев анализ конечных изменений как инструмент управления улично-дорожной сетью городского района / А.С. Сысоев // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т. 3, № 5-3 (16-3). — С. 187–192.

57. Блюмин, С.Л. Применение анализа конечных изменений сложных зависимостей к оценке качества работы ППС / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Управление большими системами (УБС’2016) : материалы XIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Самара, 5–9 сент. 2016 г. / под общ. ред. Д.А. Новикова, В.Г. Засканова ; Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Самарский университет. — Москва, 2016. — С. 271–286.

58. Блюмин, С.Л. Оценка деятельности профессорско-преподавательского состава методом анализа конечных изменений / С.Л. Блюмин, Г.С. Боровкова, **А.С. Сысоев** // Управление большими системами : материалы XI Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Арзамас, 9–12 сент. 2014 г. — Москва, 2014. — С. 498–507.

59. Blyumin, S.L. Lagrange mean value theorem as a basis of analysis of finite fluctuations in transport regulation / S.L. Blyumin, **A.S. Sysoev** // Computer Science and Information Technologies (CSIT’2014) : Proceedings of the 16th International Workshop, Sheffield, England, 17–22 September 2014. — Ufa, 2014. — С. 142–146.

60. Блюмин, С.Л. Лагранжев анализ конечных изменений для исследования развития металлургической промышленности / С.Л. Блюмин, К.В. Серова, **А.С. Сысоев** // Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство : материалы Одиннадцатой Всероссийской научно-практической конференции, с международным участием, Старый Оскол, 3–5 декабря 2014 г. — Старый Оскол, 2014. — С. 147–153.

Подписано в печать 26.06.2026.
Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times New Roman.
Бумага для копировальной техники.
2 п.л. Тираж 100 экземпляров.
Заказ № 2271.

Отпечатано в отделе редакционно-печатной деятельности
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
398020, г. Липецк, ул. Ленина, 42.