

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи



Тран Зуй

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ
МНОГОФАЗНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СЕТЕПОДОБНЫХ ПРОЦЕССОВ
ПЕРЕНОСА И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Провоторов Вячеслав Васильевич

Воронеж – 2024

Оглавление

Введение	6
Глава I Математическое описание эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях	14
1.1 Общие замечания	14
1.2 Модели гемодинамики	15
1.2.1 Математическое описание гидродинамического процесса гемодинамики.....	17
1.2.2 Математическое описание динамики переноса веществ по сердечно-сосудистой системе	20
1.2.3 Волновые явления в сердечно-сосудистой системе	23
1.3 Математические модели транспортировки по магистральным и сетевым носителям	25
1.3.1 Ламинарное течение жидкости сетевом носителе.....	25
1.3.2 Турбулентное течение вязкой жидкости в многомерных сетеподобных носителях	28
1.3.3 Ламинарное течение вязкой жидкости в многомерных сетеподобных носителях	30
1.4 Математические модели упругих механических конструкций	31
1.4.1 Описание колебаний мачтовой антенной конструкции.....	31
1.4.1.1 Одноуровневая антенная конструкция	32
1.4.1.2 Двухуровневая антенная конструкция.....	35
1.4.1.3 Многоуровневая антенная конструкция	37
1.5 Математическое описание процессов теплопереноса и волновых процессов в слоистых носителях	39
1.6 Другие задачи естествознания	41
Выводы	42
Глава 2 Вычислительные методы применительно к моделям сетеподобных процессов и явлений. Разностные схемы	43

2.1	Сложноструктурируемые носители процесса.....	43
2.1.1	Сети и сетеподобные носители процессов.....	45
2.1.2	Слоистые носители	48
2.2	Сетки и сеточные функции	49
2.2.1	Равномерная сетка в сети	49
2.2.2	Равномерная сетка в многомерной сетеподобной и слоистой областях.....	50
2.3	Аппроксимации дифференциальных выражений. Погрешность аппроксимаций	52
2.3.1	Аппроксимация частных производных	52
2.3.2	Аппроксимации дифференциального оператора с изменяющейся переменной на графе.....	55
2.3.3	Аппроксимации дифференциального оператора с изменяющейся переменной в сетеподобной области	56
2.3.4	Аппроксимации дифференциального оператора с изменяющейся переменной в слоистой области	59
2.4	Двух- и трехслойные разностные схемы	60
2.4.1	Двухслойная разностная схема с весовым параметром для уравнения переноса	60
2.4.1.1	Двухслойная разностная схема на одномерной сети	60
2.4.1.2	Двухслойная разностная схема на многомерной сети.....	62
2.4.2	Трехслойная разностная симметричная схема с весовым параметром для уравнения переноса.....	63
2.4.2.1	Трехслойная разностная симметричная схема на одномерной сети	63
2.4.2.2	Трехслойная разностная симметричная схема на многомерной сети	64
2.4.3	Трехслойная разностная несимметричная схема с весовыми параметрами для уравнения переноса	64

2.4.3.1	Трехслойная разностная несимметричная схема на одномерной сети	64
2.4.3.2	Трехслойная разностная несимметричная схема на многомерной сети	65
2.4.4	Трехслойная разностная схема с весовыми параметрами для волнового уравнения	66
2.4.4.1	Трехслойная разностная схема в одномерной области	66
2.4.4.2	Трехслойная разностная схема на многомерной сети	67
Выводы		68
Глава 3	Обоснование разностных схем эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях.....	69
3.1	Устойчивость двухслойной разностной схемы для уравнения переноса.....	70
3.2	Устойчивость двухслойной разностной схемы с весовым параметром для уравнения переноса.....	73
3.3	Устойчивость трехслойной разностной схемы с весовым параметром для уравнения переноса.....	76
3.4	Устойчивость трехслойной разностной схемы для волновой системы с сетеподобным носителем	79
3.5	Устойчивость разностных схем уравнений переноса и волновых уравнений с изменяющимися на слоистой области пространственной переменными	82
3.6	Рекомендации для использования разностных схем.....	83
Выводы		83
Глава 4	Программный комплекс для решения проблемно-ориентированных задач процессов переноса и волновых процессов на сети и сетеподобных носителях	84
4.1	Описание структуры программного комплекса.....	84
4.2	Решение тестовых задач процессов переноса и волновых процессов на сети.....	87

4.2.1 Задачи переноса сплошных сред в сети.....	87
4.2.2 Задачи колебаний упругих сложносочлененных конструкций в сети	93
4.3 Решение задач процессов переноса и волновых процессов на сетеподобных носителях	97
4.3.1 Задачи переноса сплошных сред в двумерной сети	97
4.3.2 Задачи переноса сплошных сред в трехмерной сети	110
4.3.3 Задачи колебаний упругих сложносочлененных конструкций в двумерной сети.....	120
4.3.4 Задачи колебаний упругих сложносочлененных конструкций в трехмерной сети	127
4.3.5 Задача переноса теплоты в слоистой области.....	135
Выводы	138
Заключение	139
Список литературы	141
Приложение 1 Численные расчеты прикладных задач главы 4.....	154
Приложение 2 Листинги программ для решения прикладных задач главы 4.....	216
Приложение 3 Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ	263

Введение

Актуальность темы. Численные методы анализа математических моделей всегда были и остаются в поле зрения исследователей прежде всего применительно к многофазным сетеподобным процессам различного типа, отличительная особенность которых характеризуется 1) наличием сложноструктурированных носителей процессов и 2) использованием функций с принадлежащей сетеподобной области многомерной пространственной переменной для описания количественных характеристик этих процессов. Теоретические основы анализа математических моделей различных сетеподобных процессов, прежде всего относящиеся к теории управления системами с распределенными параметрами, заложены в работах М. И. Белишева, А. Г. Бутковского, Л. Н. Знаменской, В. И. Зубова, Ж. -Л. Лионса, В. В. Провоторова, Ю. А. Гнилицкой [1, 4, 5, 19, 23-25, 30-32, 46, 52-54], а также в работах А. В. Боровских, А. П. Жабко, В. А. Ильина, О. М. Пенкина, С. М. Сергеева, А. Ф. Филлипова [2, 20, 26, 40, 41, 62, 86] в направлении анализа разрешимости краевых задач математических моделей. Исследования в направлении численных методов анализа для последующей числовой интерпретации полученных теоретических результатов пока не приобрели систематического характера, существуют только фрагментарные результаты – численный анализ эволюционных сетевых процессов возник только с появлением работ О. Р. Балабан [6]. Численные методы анализа развиваются плодотворно и приводят к цели, если удастся осуществить редукцию исходной начально-краевой задачи, описывающую математическую модель сетеподобного процесса, к соответствующей конечномерной алгебраической системе, аппроксимирующую исходную задачу и дающую достаточно точное приближение решение ее. Универсальным методом приближенного решение дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики. Широко распространенным с глубоко развитым математическим аппаратом является метод конечных разностей, приводящий последовательности вспомогательных конечномерных задач. Такое сведение исходной задачи к последовательности вспомогательных

конечномерных задач неоднозначно и неединообразно для задач различных типов и зависит прежде всего от пространств функций, в которых рассматриваются исходные задачи (работы А. А. Самарского, Г. И. Марчука, А. Н. Тихонова, А. Ф. Филиппова [34, 60, 61, 86]). Тематика исследования диссертационной работы находится в рамках актуального направления, определяемого численными методами анализа эволюционных сетеподобных процессов, в рамках которого начало исследований было положено работами О. А. Махиновой, А. С. Волковой, О. Р. Балабан, В. Н. Хоанга, где носителями процессов явилась сеть – совокупность одномерных, ограниченных кривых, математическое описание которой осуществлялось инструментами пространственных графов, ребра которых (фрагменты сети) параметризованы отрезками числовой оси [79]. Данная работа продолжает исследование указанных авторов в направлении увеличения размерности фрагментов сети, моделируя их двумерными и трехмерными областями и переходя к численному анализу процессов, осуществляемых в сетеподобных носителях, каковыми в приложениях являются тепловоды, гидро- и газонефтепроводы, волноводы [32, 42-44, 59, 67-69, 72, 79]. Особенный интерес исследования (и особенную сложность) представляет случай многофазной сплошной среды, в которой развивается тот или иной процесс. Предметом исследования явились также процессы в композиционных материалах (композитах), моделируемые слоистыми областями [57]. При этом используется инструментарий теории разностных схем дифференциальных уравнений в частных производных [11, 13, 14, 16, 18, 28, 29, 61]. Полученные результаты применимы в анализе сетеподобных процессов промышленности и экономики [3, 12, 19, 27, 39, 58, 62, 85, 87, 88, 93, 94, 102-110], а также маркетинговой и дистрибьюторской политике [99, 101, 104]. Исследование содержит результаты в следующих актуальных направлениях численного анализа сложноструктурированных эволюционных процессов переноса и волновых процессов: разработка методов и принципов построения разностных схем для математических моделей, анализ устойчивости и сходимости разностных схем, численный анализ прикладных задач промышленности, биомедицины и

экономики, формирование программного комплекса для количественного описания свойств сетеподобных процессов.

С учетом вышеизложенного актуальность темы диссертационного исследования заключается в необходимости дальнейшего развития средств анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов. Работа подготовлена в соответствии с одним из научных направлений «Математические модели гидродинамики», осуществляемым математическим факультетом Воронежского государственного университета.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка модифицируемых средств моделирования носителей сетеподобных процессов, методов построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, образующих основу моделей эволюционных процессов, разработка разностных схем и алгоритмов, сформированных на базе устойчивых (условно устойчивых) разностных схем, разработка программного комплекса, ориентированного на решение ряда проблемно-ориентированных задач, относящиеся к анализу эволюционных процессов.

Достижение цели диссертационного исследования осуществляется решением следующих **задач**:

1. Разработка средств моделирования носителей сетеподобных процессов с учетом особенности структуры этих носителей, состоящей в наличии мест ветвления линейных фрагментов носителей.

2. Разработка средств построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, образующих основу моделей эволюционных процессов, с учетом особенностей разветвленной структуры носителей процессов.

3. Формирование разностных схем для сетеподобных процессов, учитывающих особенности структуры носителей этих процессов, многофазность сплошной среды, анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости

таких схем, разработка алгоритмов, сформированных на базе устойчивых (условно устойчивых) разностных схем.

4. Разработка программного комплекса, ориентированного на решение серии проблемно-ориентированных задач, относящиеся к анализу эволюционных процессов переноса сплошных сред и процессов колебаний в сложноструктурированных носителях.

Объект исследования: многофазные сетеподобные процессы с учетом особенности структуры этих носителей, конечномерные сеточные функции с особенностями, порожденные структурой носителей процесса и многофазностью среды, дискретные аналоги начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, алгоритмов для реализации разностных схем.

Предмет исследования: численные методы анализа дискретных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, учитывающих особенности структуры носителей этих процессов, анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости соответствующих разностных схем, алгоритмы для реализации таких схем, направленных на решение серии проблемно-ориентированных задач.

Научная новизна. В диссертационном исследовании достигнуты следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

– предложена модификация подхода к реализации численных методов анализа многофазных эволюционных процессов различного типа, отличающаяся возможностью адекватного описания неклассических динамических свойств процессов и явлений в местах ветвления сложноструктурированных носителей;

– разработана формализация к построению конечно-разностных аналогов начально-краевых задач многофазных эволюционных процессов, отличающаяся наличием особенностей разветвленной структуры носителей процессов;

– разработаны формальные средства построения разностных схем для конечно-разностных аналогов многофазных эволюционных процессов, отличающиеся наличием свойств ветвлений носителей процессов;

– предложен подход анализа устойчивости (условной устойчивости) и сходимости соответствующих разностных схем, алгоритмы для реализации таких схем, отличительной особенностью которых является общность использования для разностных схем иных процессов;

– предложена структура программного комплекса численного анализа, отличающаяся реализацией механизмов построения программных систем численного анализа в соответствии с описанием характера ветвлений сетеподобных носителей исследуемых процессов и учитывающая свойство многофазности этих процессов.

Практическая значимость работы. Разработанные алгоритмы применимы к задачам транспортировки нефти и нефтепродуктов по магистральным и сетевым трубопроводам, а также к анализу волновых процессов при этом возникающих. Эти же алгоритмы адаптированы к анализу композиционных материалов (композитов), которые, имея слоистую внутреннюю структуру носителя тепловых и волновых процессов, являются частным случаем сетеподобных процессов. Разработанный программный комплекс может быть использован в научно-исследовательских организациях, занимающихся разработкой средств численного анализа сложноструктурированных физических и искусственных процессов.

Внедрение результатов. Результаты диссертационного исследования реализованы в учебном процессе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» в рамках образовательной программы по направлению 01.04.01 «Математика» при проведении спецкурсов по дисциплинам «Математические модели гидродинамики», а также при подготовке магистерских выпускных квалификационных работ. Результаты могут быть использованы для разработок спецкурсов Института математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета и ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), а также при решении прикладных задач технического характера, определяемых научным направлением концерна «Созвездие» (г. Воронеж). На специализированные программные

средства получены свидетельства о государственной регистрации Российской Федерации.

Теоретическая значимость. Результаты анализа устойчивости предложенных двухслойных и трехслойных разностных схем дискретных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов являются важным вкладом в развитие теории устойчивости разностных схем. Разработка новых алгоритмов, описывающих различного типа явления в местах ветвления сетевых носителей и определяющих выбор балансных соотношений в этих местах, могут стать теоретическим инструментом для формирования информативной базы математического описания аналогичных явлений иных сетеподобных процессов, например, кровотоков и волновых эффектов в сердечно-сосудистой системы живого организма, сетевых клеточных метаболизмов различного типа.

Методология и методы исследования. В диссертационном исследовании для достижения цели и решении поставленных задач использованы теория дифференциальных уравнений с частными производными, методы теории моделирования сложных систем, краевых задач с многомерной пространственной переменной, теории аппроксимаций и приближений, теории разностных схем (устойчивость, сходимости и корректность).

Положения, выносимые на защиту:

1. Особенности символьного описания явлений в местах ветвления сетеподобного носителя процесса, позволяющие формирование математической модели этого процесса.

2. Развитие аппарата конечно-разностных аналогов для эволюционных уравнений переноса и волновых уравнений, образующих основу моделей эволюционных процессов, с учетом особенностей разветвленной структуры носителей процессов и многофазности среды.

3. Развитие методов построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, обеспечивающие

формализацию особенностей разветвленной структуры носителей процессов и многофазность среды.

4. Формирование новых разностных схем для сетеподобных процессов, учитывающих особенности структуры носителей процессов и многофазность среды, анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости схем, разработка алгоритмов для этих схем.

5. Программный комплекс, включающий в себя модули классификации носителей процессов, модули вычислительных алгоритмов для количественного описания характеристик и свойств этих процессов, обеспечивающий решение проблемно-ориентированных задач прикладного характера. Результаты численного анализа актуальных задач процессов переноса сплошных сред и волновых процессов.

Достоверность научных результатов и выводов исследования обусловлена корректным использованием теоретических методов исследования и подтверждается сравнительным анализом полученных в работе результатов с известными в периодической печати результатами российских и зарубежных исследователей по представляемой тематике, сравнением полученных теоретических результатов с серией вычислительных экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты исследования докладывались и обсуждались на Международных научных конференциях «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» ПМТУКТ (Воронеж, 2021, 2022, 2023), Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2022» (Воронеж, 2022), LIII и LIV Международных научных конференциях аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2022, 2023), а также на научных семинарах проф. А.В. Глушко и проф. В.В. Провоторова (Воронежский государственный университет, 2021, 2022, 2023, 2024), проф. О.Н. Мосиной (Елецкий государственный университет, 2022), проф. А.П. Жабко (Санкт-Петербургский государственный университет, 2022, 2023), проф. Е.С.

Жуковского (Институт математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета, 2023).

Тематика работы соответствует следующим пунктам Паспорта специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: п. 2 – Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; п. 3 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; п. 7. – Качественные или аналитические методы исследования математических моделей (технические науки); п. 8 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, в том числе 6 статей в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [43, 59, 67-70], 2 статьи в журнале, индексируемом библиографической и реферативной базой данных SCOPUS [101, 105], получено 4 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [63-66].

Личный вклад. В перечисленных работах, которые опубликованы в соавторстве, соискателю принадлежат: [67] – построение разностной схемы конечно-разностного аналога дифференциальной системы; [68] – построение и обоснование двухслойной разностной схемы по временному переменному; [70] – алгоритм отыскания приближенного решения двухслойной разностной схемы по временному переменному; [59] – пути построения разностных схем начальной задачи для неоднородного уравнения переноса тепла; [43] – построение и обоснование трехслойной разностной схемы по временному переменному.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа содержит 266 страницы текста, 70 рисунков и 131 таблиц, список литературы состоит из 110 источников.

Глава I Математическое описание эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях

Содержание главы посвящено примерам природных и искусственных физических, биологических и иных процессов, которые будем определять как сетеподобные эволюционные процессы. В последующих главах приведен детальный численный анализ некоторых из них, основополагающим инструментом при этом являются формализмы достаточно глубоко развитой на сегодняшний день теории эволюционных дифференциальных уравнений с изменяющейся пространственной переменной в сетеподобных областях.

Предложены новые пути исследования многофазных физических процессов, прежде всего процессов переноса и волновых процессов, носителями которых являются сложноструктурированные объекты (сети, сетеподобные промышленные конструкции). Эти пути включают в себя новые принципы формирования математических моделей указанных процессов в терминах разностных схем дискретных аналогов краевых задач для дифференциальных уравнений, физические переменные которых изменяются в сетеподобной области евклидова пространства R^n , $n = 1, 2, 3$.

1.1 Общие замечания

Обратимся вначале к общим вопросам сетевой гидродинамики – перенос вязких жидкостей и газожидкостных сред по сетеподобным носителям (магистральные и сетевые трубопроводы) – работы [6, 8, 10, 21, 36, 47]. Тематика исследований в этом направлении сформировалась относительно недавно с появлением результатов по математическому описанию переноса многофазных вязких жидкостей с использованием инструментария дифференциальных систем уравнений в частных производных с распределенными параметрами одномерным сетям (графам) [9, 17, 22, 40, 48, 51, 55, 57]. Последние результаты (2022, 2023 гг.) в направлении анализа сетевой гидродинамики инициировали работы прикладного характера: корректность математических моделей динамики

жидкостей по сетевым носителям, разрешимость краевых задач гидродинамики многофазных сред, дифференциально-разностные системы гидродинамики, волновые эффекты в процессах переноса, численные методы и алгоритмы [35, 37, 38, 67-70]. К этому следует добавить исследования процессов биологического – моделирование гемодинамических свойств живых организмов, системы кровотоков и сердечно-сосудистой системы этих организмов [7, 15].

В разделах 1.2 – 1.6 представлены типичные примеры типичных сетеподобных эволюционных процессов и им соответствующие математические модели, которые описываются начально-краевыми задачами математической физики, пространственные переменные которых изменяются сетеподобных областях евклидова пространства R^n , $n=1, 2, 3$. В главах 2 – 4 данного исследования подробно изучаются вопросы численного анализа дискретных аналогов математических моделей.

1.2 Модели гемодинамики

Носителем кровотока, где осуществляются гемодинамические процессы и явления, представляется множество сосудов ССС человека (ССС – сердечно-сосудистая система, граф ССС – граф сердечно-сосудистой системы [27]), полостей, которых заполнены кровью (рис. 1.1). Динамика крови осуществляется в результате работы (сокращений) сердечной мышцы, которая формирует давление в ССС. Одна из задач гемодинамики – рассмотрение закономерностей и свойств присущих кровотокам ССС (или фрагментов ССС, рис 1.2). Осуществляется это посредством анализа математической модели гемодинамических процессов в графе ССС, причем это происходит без испытуемого человека с достаточной степенью достоверности [39]. Является естественным графу ССС соотнести геометрический граф Γ и описывать гемодинамические процессы с помощью математической символики эволюционных дифференциальных уравнений со сосредоточенными параметрами в определенных точках графа Γ (или местах,

т.е. подграфа) [70]; как обобщенный случай, используется символика эволюционных дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на графе Γ [80, 81].

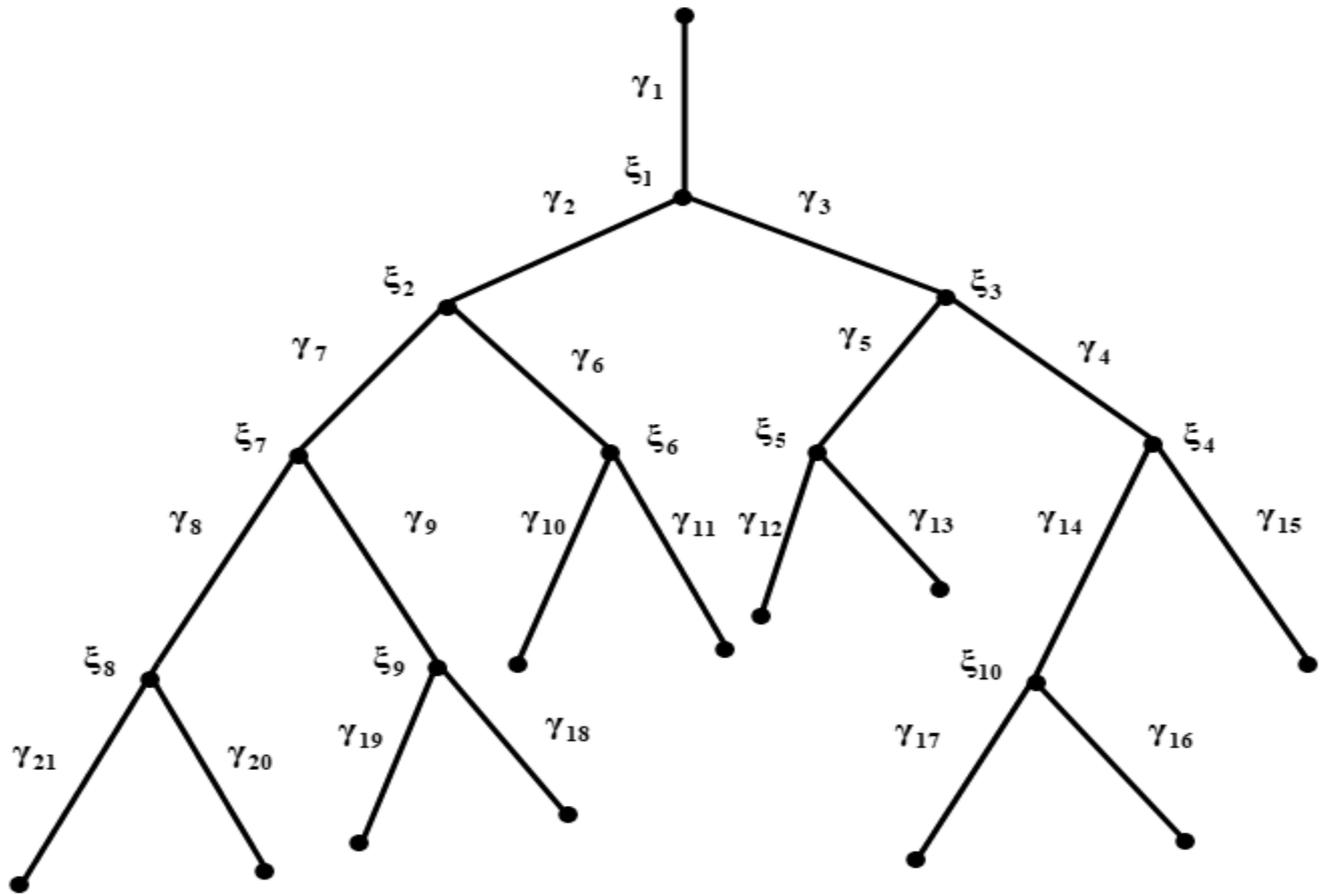


Рис. 1.1. Граф сердечно-сосудистой системы

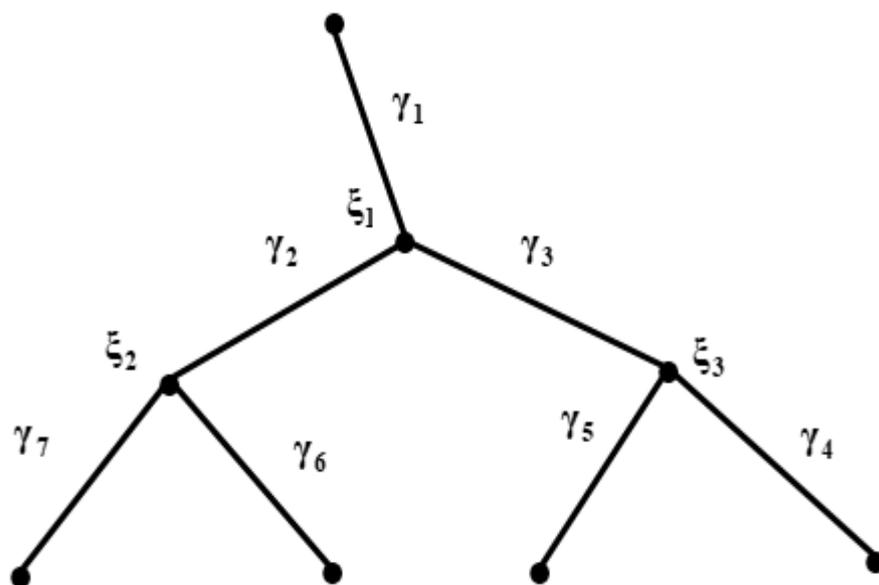


Рис. 1.2. Фрагмент графа сердечно-сосудистой системы

1.2.1 Математическое описание гидродинамического процесса гемодинамики

Хорошо известно [27], что кровопоток в ССС определяется совокупностью, определенным образом соединенных эластичных сосудов различного сечения, но диаметры этих сечений много меньше длин сосудов. А значит, ориентированный геометрический граф Γ с достаточной степенью достоверности моделирует совокупность сосудов графа ССС. Узлы (вершины) ξ_i геометрического графа Γ определяют месторасположение органов или иные части организма и, таким образом, представляется целостная модель графа ССС (рис. 1.1 и рис. 1.2): ребра γ_k геометрического графа Γ моделируют совокупность сосудов, узлы (вершины), а ξ_i моделируют совокупность различных органов, места ветвления и тканевые места сердечно-сосудистой системы [12]. Заметим, что давление в артериальной части сердечно-сосудистой системы формируется в результате работы сердечной мышцы (механический аналог этой мышцы – пульсовый насос-генератор давления), поэтому, исходя из естественной упрощенной гемодинамики сердечно-сосудистой системы, рассматриваются гидродинамические явления, имеющие только в артериальной части сердечно-сосудистой системы графа ССС.

Как сказано выше, диаметры сосудов различного сечения много меньше длин (линейных размеров) сосудов, а значит, допускается представление графа ССС квазиодномерном приближении, т.е. геометрическим графом Γ . Последнее означает, что одна пространственная переменная x геометрического графа Γ осуществляет параметризацию сосудов графа ССС, причем эта параметризация выбрана так, что для всех ребер геометрического графа Γ переменная x заведомо принадлежит одному фиксированному отрезку числовой оси. Причиной тому явилось желание упростить рутинные математические выкладки при математическом описании явлений гемодинамики.

Следует отметить, при высказанных условиях течение крови в сосудах артериальной части сердечно-сосудистой системы графа ССС будет необходимо ламинарным. Значит, математическое описание этого течения в каждом сосуде графа ССС (т.е. в каждом ребре геометрического графа Γ) подчиняются уравнениям:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_{mp} + F_e, \quad (1.2)$$

$$S = S(p). \quad (1.3)$$

Обозначения:

S – площадь поперечного сечения сосуда,

$u(x,t)$ – скорость кровотока по сосуду,

$p(x,t)$ – давление в сосудах,

ρ – плотность кровотока,

$F_{mp} = -8\pi\nu u/S$ – эмпирическая зависимость от площади сечения S силы трения кровотока о стенки сосуда,

ν – вязкость крови,

F_e – внешние силы.

Система (1.1) – (1.3) определяет уравнения гемодинамики на графе ССС.

Эмпирическая формула (1.3) определяет связь между площадью сечений S сосуда и давлением $p(x,t)$ в нем. А именно, имеют место соотношения вида:

$$\frac{dS(p)}{dp} \geq 0,$$

$$S(p) \rightarrow S_{\max}, \text{ если } p \rightarrow p_{\max},$$

$$S(p) \rightarrow S_{\min}, \text{ если } p \rightarrow p_{\min},$$

где числовые значения S_{\max} , S_{\min} определяют изменения площади $S(p)$. Как правило на практике, $S(p)$ описывается соотношением

$$S(p) = \begin{cases} S_{\max}, & p > p_{\max}, \\ S_{\min} + \frac{S_{\max} - S_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}(p - p_{\min}), & p_{\min} \leq p \leq p_{\max}, \\ S_{\min}, & p < p_{\min} \end{cases}$$

полученным опытным путем.

Определенный класс задач гемодинамики преследует цели определить количественные показатели переноса кровотоком кислорода, гормонов, солей, лекарств и других химических препаратов. Эта информация необходима для того, чтобы оценить их влияние на проходимость сосудов, а значит, оценить изменение гемодинамических свойств сердечно-сосудистой системы.

Рассмотрим гемодинамический процесс при условии содержания определенной массы вещества в составе крови. Считаем известной скорость $u(x,t)$ кровотока любого сосуда S_k графа ССС и известна площадь S_k , соответствующая сосуду S_k : $S_k = S_k(x,t)$. Если $u_k = u_k(x,t)$ – скорость в k -ом сосуде, то функция $u_k = u_k(x,t)$ гидродинамического процесса в графе ССС . удовлетворяет системе (1.1) – (1.3).

Пусть в каждом сосуде находятся вещества с массовой концентрацией $C_l = \frac{m_l}{m} (l = \overline{1, l_c})$. Имеем исходную информацию относительно вещества C_l в каждом сосуде графа ССС: m_l – масса C_l , – масса крови, тогда $C_l = \frac{m_l}{m} (l = \overline{1, l_c})$ – концентрация C_l . Количественное изменение концентрации C_l при развитии гидродинамического процесса подчиняется следующему уравнению

$$\frac{\partial C_l}{\partial t} + u \frac{\partial C_l}{\partial x} = 0.$$

Учитывая эффект диффузии $W_D = -D \frac{\partial C}{\partial x}$, D – диффузионный коэффициент вещества, полученное уравнение трансформируется к виду

$$\frac{\partial SC}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(SCu - SD \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0.$$

Учитывая соотношение (1.1) и считая коэффициент постоянным, приходим к соотношению

$$\frac{\partial SC}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(SCu - SD \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Преобразования части второго слагаемого в (1.4) приводят

$$\frac{D}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial C}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \left(\frac{\rho}{S} \frac{\partial S}{\partial p} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (1.5)$$

При этом $\left(\frac{\rho}{S} \frac{\partial S}{\partial p} \right) = \frac{1}{c^2}$, считая, что через c обозначена скорость малых перемещений. В предположении квазистационарности течения имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx -8\pi\nu \frac{u}{S}.$$

Второе слагаемое в соотношении (1.5) примет вид

$$D \left(\frac{\rho}{S} \frac{\partial S}{\partial p} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \approx -8\pi\nu D \frac{1}{c^2} \frac{u}{S} \frac{\partial C}{\partial x} = -8\pi\nu D \frac{1}{Sc} M \frac{\partial C}{\partial x},$$

M – число Маха, которое $M \ll 1$, а площадь сечения S ограничена.

Отсюда при условии наличия эффекта диффузии можно использовать относительно C для ламинарного переноса потока крови уравнение следующего вида (параболическое уравнение):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0.$$

1.2.2 Математическое описание динамики переноса веществ по сердечно-сосудистой системе

В данном пункте представлены математические формализмы дифференциальных уравнений, используемые при изучении динамики

переноса многофазной среды (кровь со включенными лекарственными веществами) по части системы сосудов [12]. Получаемые таким образом математические модели особенно эффективны для изучения свойств сосудистой системы при транспортировке лекарственных веществ от мест введения. Часть системы ССС ограничена точкой введения лекарств и точкой (точками) их применения. Вначале остановимся описании графа инструментами символьной математики.

Обозначения:

Γ – граф (множество отрезков соединенных в точках, которые являются концами этих отрезков, рис. 1.3),

γ_k – ребра графа (отрезки),

ζ_ς – узлы (вершины) графа (k, ς – выбранная нумерация узлов),

$J(\Gamma)$ – множество узлов (вершин) графа,

$\partial\Gamma$ – множество граничных узлов (вершин) графа, граничный узел характеризуется тем, что к нему примыкает только одно ребро.

Произвольному ребру γ_k ставится в соответствие отрезок $[0, 1]$, если узел ξ внутренний, то $r(\xi)$ – множество ребер, для которых ξ совпадает началом отрезка $[0, 1]$, а $R(\xi)$ – множество ребер, для которых ξ совпадает концом отрезка $[0, 1]$ (рис. 1.3).

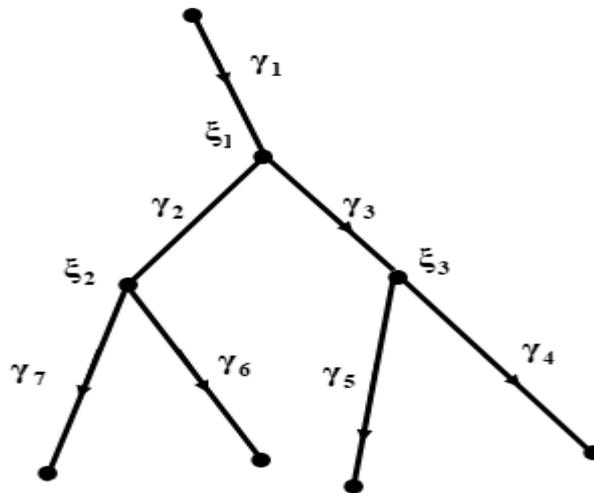


Рис. 1.3. Направления переноса среды по фрагменту графа ССС

Следует отметить, что замена принятого математического термина «вершина графа», употребляющегося, например, в монографиях [45, 55, 57], на используемый здесь термин «узел» объясняется прикладным характером исследования, например, медицинской литературе принят термин «узел графа ССС», аналогичное применение этого термина имеет место литературе технического характера, например, «узел ветвления трубопроводной сети».

Как следует из предыдущего пункта, описание символикой математических соотношений переноса многофазных сред с диффузионными эффектами по сердечно-сосудистой системы представляется адекватным с помощью специальной начально-краевой задачей параболического типа с пространственной переменной, изменяющейся на ограниченном геометрическом графе Γ :

$$\frac{\partial SC}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(SCu - SD \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.6)$$

Функция $C(x, t)$, описывающая количественные изменения концентрации веществ в крови, определена в области $\Gamma \setminus (\partial\Gamma \cup J(\Gamma)) \times (0, T)$, при этом обобщенный закон Кирхгофа являет собой закономерность сохранять баланс ковопотоков в узлах ветвления сосудов:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma_j \in R(\xi)} S_{\gamma_j} \left((C(1, t)u(1, t))_{\gamma_j} - D \frac{\partial C(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} \right) = \\ = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} S_{\gamma_j} \left((C(0, t)u(0, t))_{\gamma_j} - D \frac{\partial C(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношение

$$C(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (1.8)$$

устанавливает концентрацию при нулевом значении временной переменной, соотношение

$$C(x, t)|_{x \in \partial\Gamma} = \phi(x), \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

значения концентрации $C(x, t)$ с помощью заданных функций $\varphi(x)$, $\phi(x)$.

Начально-краевая задача (1.6) – (1.9) определяет математическую модель кровотока по части ССС, а значит и содержащих в крови лекарственных веществ.

1.2.3 Волновые явления в сердечно-сосудистой системе

Волновые (пульсовые) явления сопровождают естественный поток крови. Это объясняется свойством периодической спецификой работы сердечной мышцы как пульсового насоса, порождающего волны, носящие пульсовый характер [27]. Формирование и развитие по времени таких волн является важной составляющей гемодинамики графа ССС – пульсирующий эффект инициирует возникновение продольных волн в стенках сосудов, что определенно связано с изменением показателей кровяного давления в сердечно-сосудистой системе, несущих информацию о состоянии организма [27, 39]. Анализ математических моделей процессов гемодинамики способствует изучению механизма паталогических изменений организма.

Представим упрощенную математическую модель гемодинамического процесса. Описание этого процесса осуществляется формализмами эволюционного уравнения с распределенными параметрами по графу ССС

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial M}{\partial t} + GM + F, \\ -\alpha \frac{\partial p}{\partial t} &= v^2 \frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

используя следующие характеристики процесса:

p – давление в системе графа ССС как функция переменных x и t ,

$\alpha \equiv \alpha(x, t)$ – характеристика сечения сосуда,

M – расход массы, соответствующий сечению сосуда,

G, F, v – показатели сопротивления, скоростей пульсовых волн.

Переменная x в системе (1.10) изменяется вдоль оси сосудов графа ССС, временная переменная t изменяется на заданном временном интервале, заданные функции G, F, v зависят только от переменных x и t . Функции

$p \equiv p(x, t)$, $M = M(x, t)$ подлежат определению в произвольной точке (x, t) графа ССС.

Анализ и отыскание решения волновой системы (1.10) предусматривает дифференцируемость функций $p \equiv p(x, t)$, $M = M(x, t)$. Предполагая выполненными условия $\alpha(x, t) = \alpha$, $v(x, t) = v$, $\alpha, v - const$, можно привести эту систему к классическому гиперболическому виду, упрощающему отыскание представление решения преобразованного из системы (1.10). Это уравнение имеет вид

$$\frac{\alpha}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(GM)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Если, рассматривая частный случай, считать функцию $M(x, t)$ известной, полученной в результате анализа статистических данных, то соотношение (1.11) задает уравнение относительно искомой функции $p(x, t)$, которая описывает распределение давления в сосуде при заведомо заданной временной переменной t . Нетрудно убедиться в том, что представление $p(x, t)$ имеет синусоидальный вид, а значит, волновое уравнение (1.11) описывает пульсовые явления в сердечно-сосудистой системы графа ССС.

Замечание 1.1. При совместном рассмотрении уравнений (1.6) и (1.11) следует считать, что концентрация $C(x, t)$ и масса $M(x, t)$ переносимого потоком крови вещества (веществ) связаны соотношением

$$C(x, t) = \Phi(M(x, t))$$

(фиксированная функция $\Phi(\cdot)$ устанавливает зависимость $C(x, t)$ от $M(x, t)$, т.е. уравнения (1.6) и (1.11) определяют связанную систему уравнений (1.6), (1.11). Начальные и краевые условия для функций $C(x, t)$ от $M(x, t)$ определяются естественным образом.

1.3 Математические модели транспортировки по магистральным и сетевым носителям

При описании гидродинамических процессов переноса используется математические методы применительно к однофазным жидкостям (жидкая среда состоит из одной компоненты) и многофазным жидкостям (жидкая среда состоит из двух и более компонент) [91, 92]. Математический аппарат описания существенно отличается в этих случаях: в первом случае используется класс дифференцируемых функций, во втором случае этот класс функций неприменим, его необходимо расширять до класса интегрируемых (суммируемых) функций. Объясняется это тем, что попытки моделирования динамики многофазных жидкостей описанием течения каждой фазы упирается в непреодолимое препятствие, состоящее в том, что требуется рассматривать и описывать межфазные связи и взаимодействия их. Ситуация усугубляется собственной физической структурой носителя процесса – наличием особенностей сетевых носителей, возникающих в местах их ветвления. Все эти сложности наследуют и конечно-разностные аналоги дифференциальных систем сетеподобных процессов, образующих описательную основу математических моделей (аппарат перехода от дифференциальных систем к конечно-разностным аналогам представлен содержанием главы 2). Ниже приводятся известные примеры математического моделирования таких сетеподобных процессов, изученные в работах [47, 55].

1.3.1 Ламинарное течение жидкости сетевом носителе

Следует отметить, что в прикладной гидродинамике термин «магистральный носитель» означает, что носитель процесса (например, трубопровод) состоит из конечного числа линейных фрагментов и не имеет ветвлений (рис. 1.4),

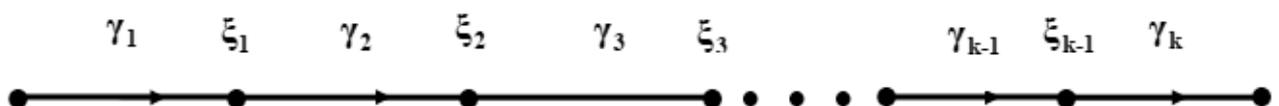


Рис. 1.4. Магистральный носитель

термин «сетевой носитель» означает, что носитель процесса содержит места ветвлений носителя процесса (рис. 1.5).

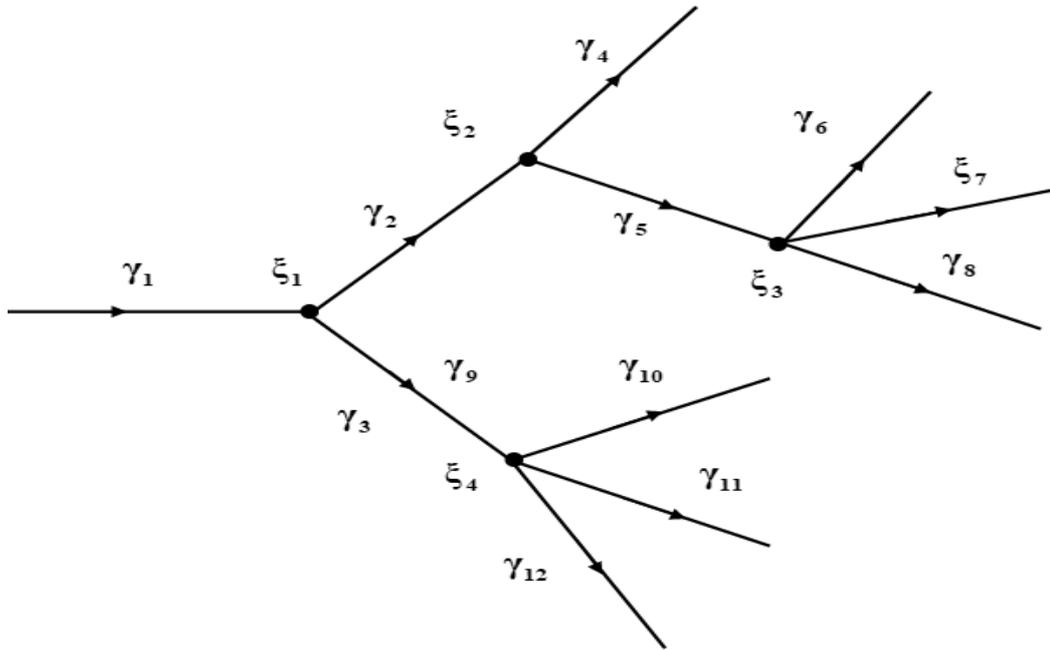


Рис. 1.5. Сетевой носитель

Ниже рассматривается ситуация, где сетевой носитель имеет особенность — длина любого его линейного фрагмента существенно больше диаметра сечения этого фрагмента. Это означает обоснованно считать (или предположить), что течение жидкой среды обладает свойством ламинарности (отсутствуют вихревые эффект, направление движения осуществляется только вдоль осевой линии). Естественной моделью такого носителя является геометрический граф, одномерная пространственная переменная x является естественным параметром, определяющим совместно с фиксированным ребром графа местоположение любой точки соответствующего фиксированного фрагмента носителя. При этом можно считать отрезок $[0, 1]$ множеством изменения параметра x : $x \in [0, 1] \in R^1$. Аналогичные рассуждения имеют место и для магистрального носителя.

Введем обозначения, сходные с приведенными в п. 1.2.2 (рис. 1.3):

Γ — геометрический граф (аналог сетевого носителя),

γ — ребро Γ (аналог фрагмента сетевого носителя),

$\partial\Gamma$ — множество граничных узлов Γ ,

$J(\Gamma)$ – множество внутренних узлов Γ ,

$\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ ($(0, T)$ – интервал изменения для переменной t),
 $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$.

Для функции $y(x, t)$ с изменяющимися переменными в области Γ_T введем соотношение

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x, t) + f(x, t) = 0, \quad (1.12)$$

которое определяет систему уравнений переноса сплошной среды по всем ребрам γ графа Γ . Пусть функция $y(x, t)$ определена как решение (1.12), удовлетворяющее во всех узлах множества $J(\Gamma)$ для любых значений временной переменной t из интервала $(0, T)$ условию

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial y(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial y(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (1.13)$$

(используются принятые в работе [50] обозначения: $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества γ , которые ориентированы к ξ и от ξ , соответственно; через $y(\cdot, \cdot)_{\gamma}$ обозначена компонента функции $y(\cdot, \cdot)$, пространственная переменная x определена на γ).

Определяя начальные

$$y|_{t=0} = v(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.14)$$

и краевые условия,

$$y|_{x \in \partial\Gamma} = \varphi(x, t), \quad 0 < t < T \quad (1.15)$$

получаем начально-краевую задачу (1.12) – (1.15).

Состояние системы (1.12) определяется функцией $y(x, t)$, которая задает решение начально-краевой задачи (1.12) – (1.15), а начально-краевая задача описывает математическую модель транспортировки по сетевому носителю ламинарного потока жидкости при наличии в носителе давления, которое определяется, например, значениями функции $f(x, t)$. Функции $v(x)$ в (1.14) и $\varphi(x, t)$ в (1.15) являются исходными данными, коэффициенты $a(x)$, $b(x)$

описывают динамические особенности всех фаз жидкой среды (одной фазы, если многофазная жидкость представляется в модели «усредненной» жидкостью).

1.3.2 Турбулентное течение вязкой жидкости в многомерных сетеподобных носителях

Удобно проводить рассмотрение на примере сетеподобного трубопровода, как это представлено в работе [53, 55]. Сетеподобный гидроноситель составлен из множества отдельных труб, определенным образом примыкающих между собой и образующих трубопроводную система (рис. 1.6).

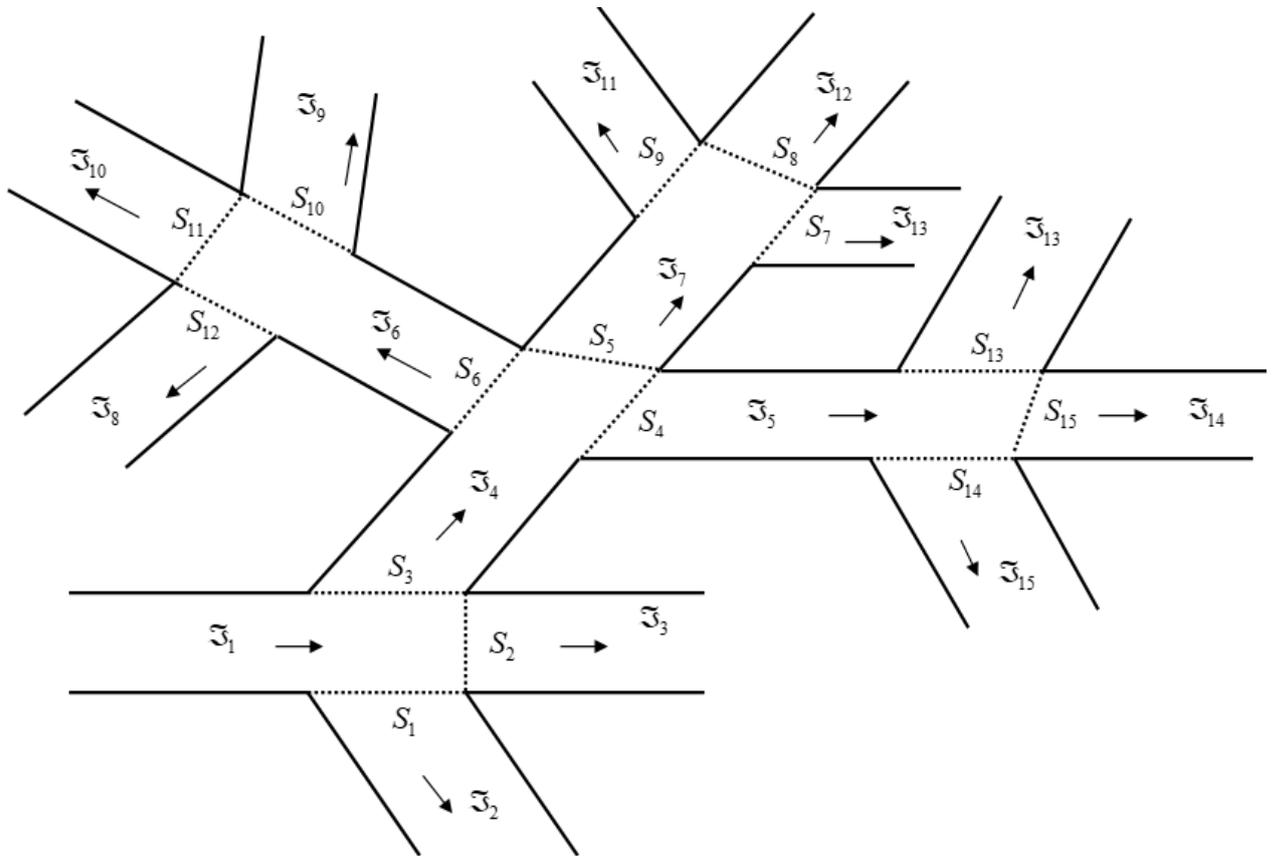


Рис. 1.6. Сетеподобный гидроноситель

Математическое описание сетеподобного гидроносителя осуществляется построением ограниченной области \mathfrak{Z} трехмерного пространства R^3 , имеющая топологическую структуру графа Γ (см. описание Γ и рис. 1.5 предыдущего пункта): $\mathfrak{Z} = \bigcup_k \mathfrak{Z}_k \bigcup_l S_l$. Будем использовать принятые в работе [47] обозначения:

\mathfrak{Z}_k – подобласти области, принадлежащие области \mathfrak{Z} ,

S_l – поверхность примыкания подобластей \mathfrak{Z}_k ,

$\partial\mathfrak{Z}_k$ – граница подобласти \mathfrak{Z}_k , частями границ $\partial\mathfrak{Z}_k$ осуществляется примыкание подобластей \mathfrak{Z}_k друг к другу.

ξ – место примыкания подобластей \mathfrak{Z}_k , место примыкания ξ содержит фиксированное число поверхностей S_l , равное числу примыкающих подобластей, т.е. $\xi: \xi = \bigcup S_l$.

Введем векторную функцию

$$Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), y_3(x, t)\} \quad (x = \{x_1, x_2, x_3\}),$$

которая означает совокупность компонентов скоростей потока, пространственная переменная x и временная переменная t из области $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} = Y' &= \{y'_1, y'_2, y'_3\} = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial y_3}{\partial t} \right\}, \\ \frac{\partial Y}{\partial x_i} &= \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \frac{\partial y_3}{\partial x_i} \right\}, \Delta Y = \{\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3\}, \end{aligned}$$

(Δ – оператор Лапласа).

Система эволюционных уравнений, называемая системой Навье-Стокса, в $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$ для переноса вязких жидкостей в имеет вид [30, 32]:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f - \text{grad} p, \quad (1.16)$$

$$\text{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (1.17)$$

при этом в каждом месте примыкания ξ определены условия примыкания [100]

$$Y|_{S_l^-} = Y|_{S_l^+} \quad (1.18)$$

$$\sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-} \Big|_{S_l^-} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+} \Big|_{S_l^+} = 0, \quad (1.19)$$

S_l – двухсторонняя со сторонами S_l^- , S_l^+ и соответствующие нормали n_l^- , n_l^+ к S_l^- , S_l^+ ; число $\nu > 0$ – вязкость жидкой среды, $p(x, t)$ – давление в носителе.

Заданием начальных и краевых условий

$$Y(x, 0) = Y_0(x), \quad x \in \mathfrak{S}, \quad (1.20)$$

$$Y|_{\partial\mathfrak{S}} = \varphi(x, t), \quad (1.21)$$

формируется начально-краевая задача (1.16) – (1.21). Искомой для этой задачи является векторная функция $Y(x, t)$ и скалярная функция $p(x, t)$ в замыкании $\bar{\mathfrak{S}}_T$ области $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$ ($\bar{\mathfrak{S}}_T = (\mathfrak{S} \cup \partial\mathfrak{S}) \times [0, T]$).

Система уравнений (1.16) – (1.21) определяет гидрпоток в изотемическом случае, для неизотермического случая к соотношению (1.16) присоединяется уравнение теплопроводности для функции $T(x, t)$:

$$\alpha \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} + (Y, \text{grad} T), \quad (1.22)$$

в котором $(Y, \text{grad} T)$ посредством символа α представлен коэффициент теплопроводности переносимой вязкой жидкости по гидроносителю.

1.3.3 Ламинарное течение вязкой жидкости в многомерных сетеподобных носителях

Частный случай переноса вязкой жидкости определяется ламинарным течением. При этом система Навье-Стокса трансформируется – отсутствует слагаемое $\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ – система (1.16) становится линейной из-за исключения слагаемого, описывающий эффект конвективности потокового течения. Математическая модель ламинарного течения жидкости с вязкостью $\nu > 0$, учитывая упомянутые особенности, определяется следующими соотношениями в области $\bigcup_k \mathfrak{S}_k \times (0, T)$:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y = f - \text{grad} p, \quad (1.23)$$

$$\text{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (1.24)$$

$$Y|_{s_i^-} = Y|_{s_i^+} \quad (1.25)$$

$$\sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-} \Big|_{S_l^-} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+} \Big|_{S_l^+} = 0, \quad (1.26)$$

$$Y(x, 0) = Y_0(x), \quad x \in \mathfrak{Z}, \quad (1.27)$$

$$Y|_{\partial \mathfrak{Z}} = \varphi(x, t). \quad (1.28)$$

1.4 Математические модели упругих механических конструкций

Примерами сложносочлененных упругих механических конструкций являются различного типа антенны: стержневая мачтовая антенна вместе растяжками, ее поддерживающие, решетчатые антенны, линейчатые антенны, структурно схожие пространственным связным графом [8, 46]. Математическое описание в виде математических моделей таких конструкций нетрудно осуществить формализмами начально-краевых задач для эволюционного волнового уравнения, пространственная координата которого изменяется в связной сетеподобной области, представленной объединением конечного числа одномерных подобластей. Такую область, как нетрудно заметить, можно отождествить с пространственным геометрическим графом, ребра которого образуют упомянутые подобласти. Поскольку ребра можно параметризовать одномерной переменной, то в качестве множества изменения этой переменной можно использовать отрезок. Таким образом, начально-краевые задачи для волнового уравнения, представляющих математические модели, следует формировать на функциях, пространственная переменная которых изменяется на графе, т.е. на совокупности отрезков.

1.4.1 Описание колебаний мачтовой антенной конструкции

Рассматривается вопрос моделирования волновых явлений, возникающих в стержневой мачтовой антенной конструкции в предположении наличия продольных колебаний в теле мачты и поперечных колебаний растяжек мачты [52, 54]. Как сказано выше, математическая модель антенной конструкции допускает использование инструментов и свойств

геометрического графа, а значит, формализмов начально-краевых задач с пространственной переменной, изменяющейся одномерной сетеподобной области. Представляя подобную систему в виде геометрического графа, получим основополагающий объект исследования – уравнение с распределенными параметрами на геометрическом графе.

1.4.1.1 Одноуровневая антенная конструкция

Одноуровневая антенная конструкция предполагает существование только одного места закрепления растяжек на теле мачты (рис. 1.7).

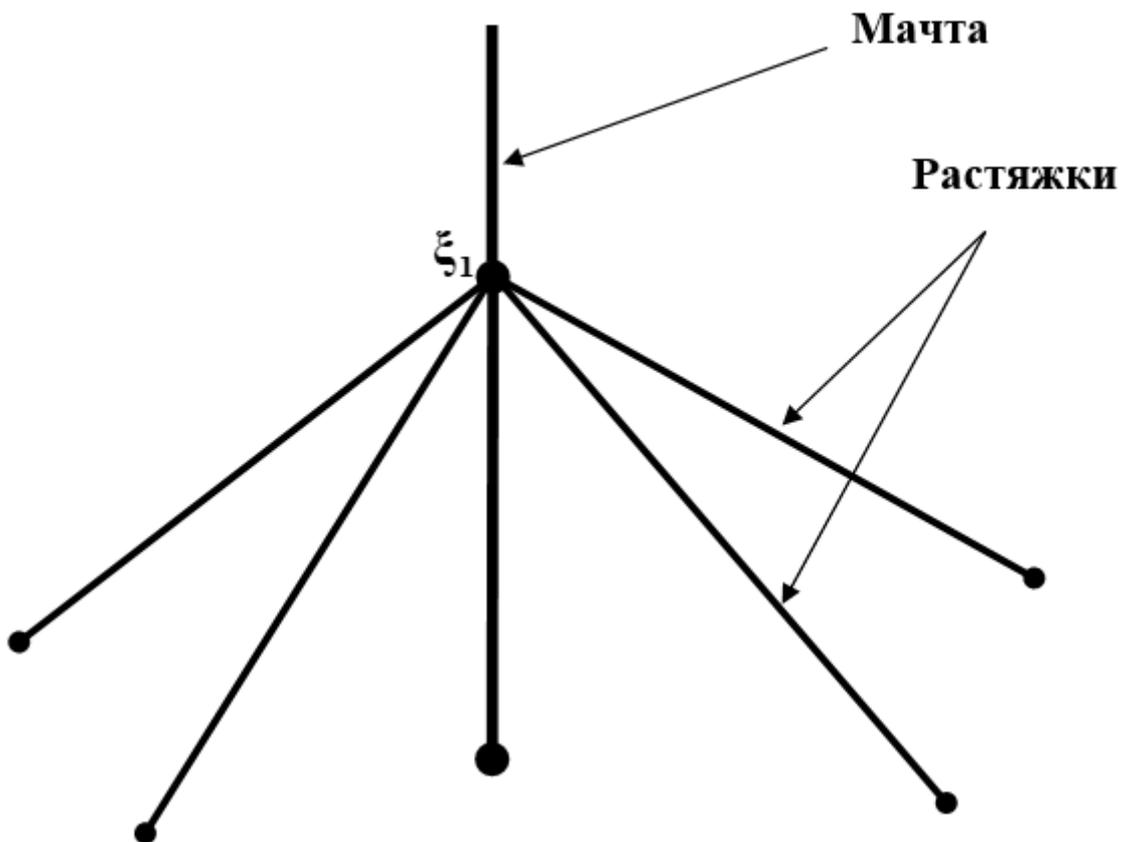


Рис. 1.7. Одноуровневая антенная конструкция

Для упрощения представления модели считается допустимым [52] заменять точечной массой M фрагмент мачты, расположенный выше места крепления растяжек, масса M соответствует массе заменяемого фрагмента. При этом считается, что точечная масса M помещена в месте крепления растяжек. Принятое допущение обосновано рассуждениями работ [52, 54]. Тело мачты, находящееся ниже места крепления растяжек,

предполагается подвержено колебаниям, направленным вдоль своей оси, растяжки подвержены поперечным колебаниям.

Выбор геометрического графа в качестве модели носителя волнового процесса в данной антенной конструкции означает, волновое уравнение имеет место во всех интервалах, соответствующих каждому ребру графа, в месте крепления растяжек устанавливается соотношение, описывающее баланс сил натяжения элементов конструкции.

Обозначим через Γ граф-звезду с m ребрами и узлом ξ (см. рис. 1.7). Для сокращения рутинных математических преобразований выбирается следующая параметризация ребер: ребрам γ_k ($k = \overline{1, m_\ell - 1}$), соответствует отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ребру γ_m — $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, узел ξ параметризуется числом $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, растяжкам мачты соответствуют ребра γ_k ($k = \overline{1, m_\ell - 1}$), телу мачты соответствует ребро γ_m , узлу ξ приписывается точечная масса M .

Замечание 1.2 [54]. Предложенное соответствие между ребрами графа и фрагментами антенны не влияет на анализ волновых процессов антенной конструкции. В случае произвольных длин фрагментов замена переменных ведет к полученному выше. А именно, пусть ребра γ_k ($k = \overline{1, m_\ell - 1}$) (т.е. растяжки) длиной l , а γ_m (т.е. тело мачты) длиной L , тогда замена

$$x = \frac{\pi}{2l} \tilde{x}, \quad y = \frac{\pi}{2L} (\tilde{y} + L), \quad \tilde{x} \in [0, l], \quad \tilde{y} \in [0, L],$$

соответственно, дает результат, полученный выше. Волновой процесс для функции перемещения $\Omega(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ представлен соотношениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k} - q(x)_{\gamma_k} \Omega(x, t)_{\gamma_k} \quad (1.29)$$

γ_k ($k = \overline{1, m}$) — произвольное ребро, и условиями баланса сил натяжений в ξ :

$$\begin{aligned}\Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} \quad (k = \overline{1, m-1}), \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m},\end{aligned}\tag{1.30}$$

при этом учитывается, что M существенно меньше массы оставшегося тела мачты. В противном случае масса учитывается, то соотношения (1.30) представляются в виде

$$\begin{aligned}\Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} &= -F(t).\end{aligned}$$

В этом случае под $F(t)$ понимается инерционная сила

$$F(t) = -M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m},$$

тогда балансные условия в месте крепления ξ растяжек приобретают вид

$$\begin{aligned}\Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} &= M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Далее это учитывается и используется соотношение (1.31). Фиксируются начальные

$$\Omega(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, 0) = \hat{\tau}(x),\tag{1.32}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \Omega(0, t)_{\gamma_k} - h\Omega(0, t)_{\gamma_k} &= \mu_k(t) \quad (k = \overline{1, m-1}), \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega(\pi, t)_{\gamma_m} + H\Omega(\pi, t)_{\gamma_m} &= \nu(t);\end{aligned}\tag{1.33}$$

$\tau(x)$, $\hat{\tau}(x)$, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ – фиксированные функции, H, h – наперед заданные постоянные.

Соотношения начально-краевой задачи (1.29), (1.30), (1.32), (1.33) (если масса M достаточно мала и не влияет на волновой процесс) либо начально-

краевой задачи (1.29), (1.31) – (1.33) (если M следет учитывать) определяют математическую модель волнового процесса в одноуровневой антенной конструкции.

Замечание 1.3 [54]. Процедура, описанная выше, применима и к общему волновому уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x} (a(x) \Phi(x, t))_{\gamma_k} - b(x)_{\gamma_k} \Phi(x, t)_{\gamma_k} \quad (1.34)$$

совместно с условиями в узле ξ :

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ a(x)_{\gamma_m} \frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} a(x)_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} - \\ - Mb\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} &= M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь $a(x) > 0$, $b(x) > 0$, $x \in \Gamma$. При $a(x) \in C^1[\Gamma]$, $b(x) \in C[\Gamma]$, то выполнении подстановок (см. [13])

$$z(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}} d\zeta, \quad c = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}} d\zeta, \quad \Omega(z, t) = \sqrt[4]{a(x)} \Phi(x, t),$$

соотношения (1.34), (1.35) принимают вид (1.29), (1.30) (вместо $\Phi(x, t)$ вводится новая функция $\Omega(x, t)$ и новая переменная z), при этом в волновом уравнении при функции $\Omega(x, t)$ возникает коэффициент

$$q(z) = \frac{d^2}{dz^2} (\sqrt[4]{a(x)}) - c^2 b(x),$$

а при $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k}$ – коэффициент c ; условия (1.32), (1.33) вид не изменяют.

1.4.1.2 Двухуровневая антенная конструкция

Идеология математического описания одноуровневой антенной конструкции переносится на более сложную двухуровневую антенную конструкцию с двумя крепежными местами приложения растяжек. Имеют

место рассуждения относительно сосредоточенной массы M , заменяющей фрагмент тела антенны, расположенного выше верхнего места крепления растяжек ξ_1 (рис. 1.8).

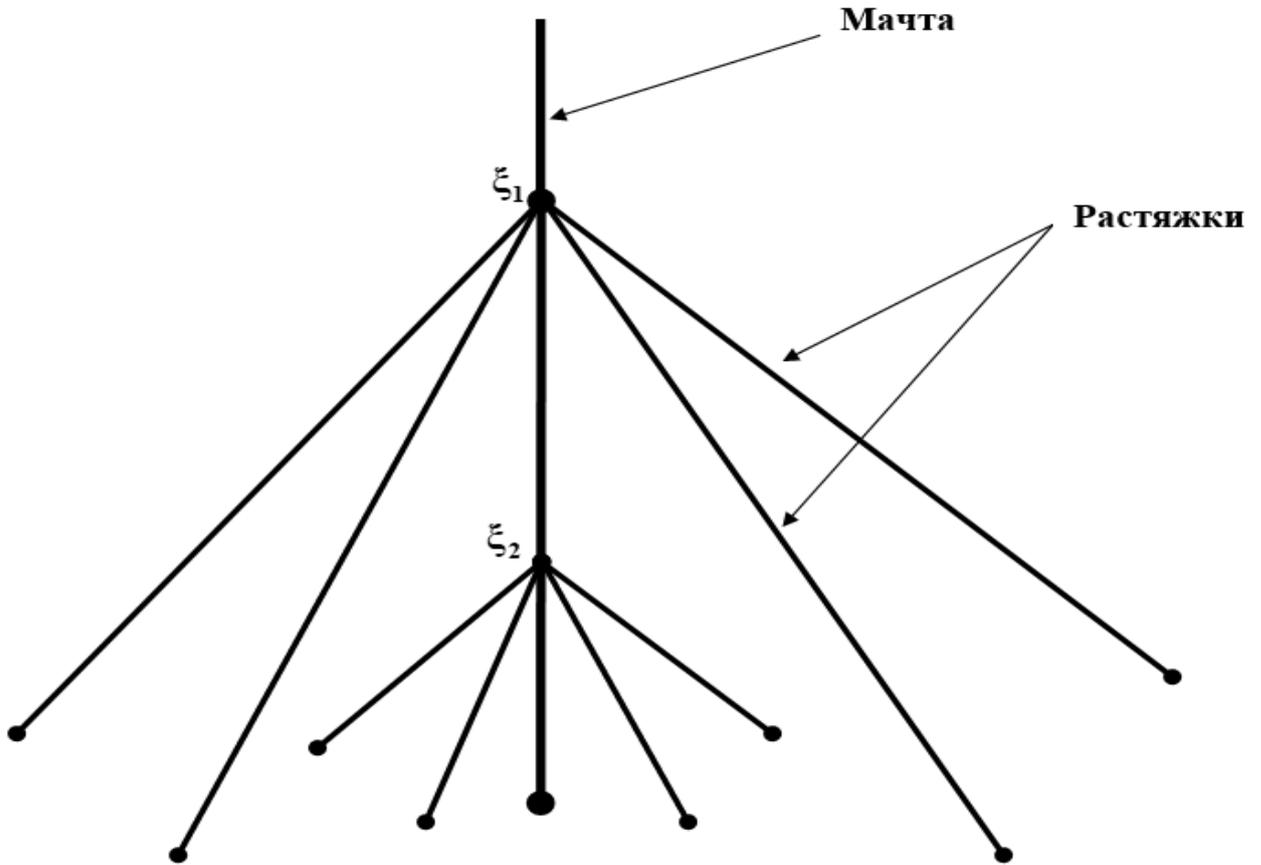


Рис. 1.8. Двухуровневая система «мачта-растяжки»

Моделируя антенную конструкцию двумя соединенными общим ребром графами-звездами Γ_1, Γ_2 , получаем на ребрах этих звезд волновые уравнения, а в узлах ξ_1 и ξ_2 графа, где ребра смыкаются – балансные соотношения типа (1.31). Состоящий из звезд Γ_l ($l=1, 2$) граф \mathfrak{Z} имеет узлы ξ_l и ребра γ_k^l ($k=\overline{1, m_l}$), $\gamma_{m_l}^1$ является общим для ξ_1 (см. рис. 1.8): ребрам γ_k^l ($k=\overline{1, m_l-1}, l=1, 2$) соответствуют отрезки $[(l-1)\pi/2, l\pi/2]$ ($l=1, 2$), ребрам $\gamma_{m_l}^l$ ($l=1, 2$) – $[l\pi/2, (l+1)\pi/2]$; узлам ξ_l ($l=1, 2$) соответствует число $l\pi/2$. При этом имеет место замечание, аналогичное замечанию 1.3.

Волновой процесса для функции перемещения $\Omega(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ представлен соотношениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k^l} - q(x)_{\gamma_k^l} \Omega(x, t)_{\gamma_k^l}, \quad (1.36)$$

на γ_k^l ($k = \overline{1, m_l}$, $l = 1, 2$), соотношениями в ξ_2 :

$$\begin{aligned} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^2} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_2}^2}, \quad k = \overline{1, m_2 - 1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega(\pi, t)_{\gamma_{m_1}^1} + \sum_{k=1}^{m_2-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega(\pi, t)_{\gamma_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \Omega(\pi, t)_{\gamma_{m_2}^2}; \end{aligned} \quad (1.37)$$

соотношения в ξ_1 , где присутствует масса M , аналогично (1.31):

$F(t) = -M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}$ – инерционная сила определяет в ξ_1 соотношения

$$\begin{aligned} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, \quad k = \overline{1, m_1 - 1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} - \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_{m_1}^1} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} &= \\ &= M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Фиксируются начальные при $x \in \mathfrak{Z}$, $t = 0$

$$\Omega(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, 0) = \hat{\tau}(x), \quad (1.39)$$

и граничные условия в \mathfrak{Z} ($t \in [0, T]$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Omega((l-1)\pi/2, t)_{\gamma_k^l} - h_l \Omega((l-1)\pi/2, t)_{\gamma_k^l} &= \mu_k^l(t), \quad (k = \overline{1, m_l - 1}, l = 1, 2), \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega(3\pi/2, t)_{\gamma_{m_2}^2} + H \Omega(3\pi/2, t)_{\gamma_{m_2}^2} &= v(t); \end{aligned} \quad (1.40)$$

$\tau(x)$, $\hat{\tau}(x)$, $\mu_k^l(t)$, $v(t)$ – фиксированные функции, h_l , H – наперед заданные постоянные, (1.36) – (1.39) – математическая модель волнового процесса в двухуровневой антенной конструкции.

1.4.1.3 Многоуровневая антенная конструкция

Антенная конструкция имеет L креплений растяжек к телу мачты, причем фрагмент мачты, находящийся выше самого верхнего узла ξ_1 включает массу M ; фрагменты тела мачты, колеблются вдоль своей оси,

колебания растяжек поперечные. Таким образом, математическая модель включает в себя начально-краевую задачу для волнового уравнения вместе с балансными условиями натяжений в местах крепления растяжек. Граф является собой $\Gamma_l (l = \overline{1, L})$ с узлами ξ_l и ребрами $\gamma_k^l (k = \overline{1, m_l})$ (рис. 1.9); ребрам $\gamma_k^l (k = \overline{1, m_l - 1}) (l = \overline{1, L})$ соответствуют отрезки $[(l-1)\pi/2, l\pi/2]$, ребрам $\gamma_{m_l}^l - [l\pi/2, (l+1)\pi/2] (l = \overline{1, L})$; узлам ξ_l соответствует число $l\pi/2$.

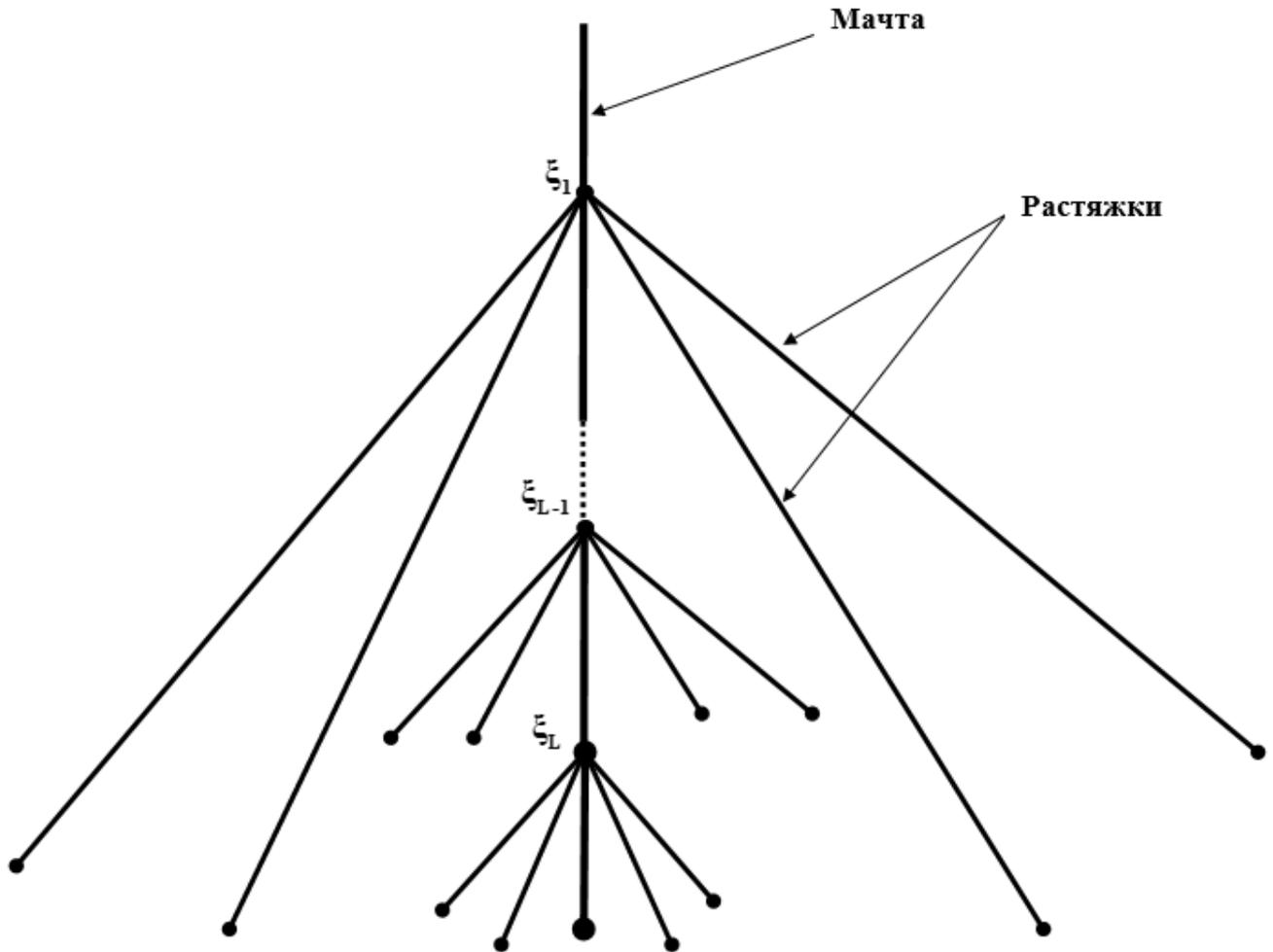


Рис. 1.9. Многоуровневая система «мачта-растяжки»

Волновой процесс для функции перемещения $\Omega(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ представлен соотношениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x, t)_{\gamma_k^l} - q(x)_{\gamma_k^l} \Omega(x, t)_{\gamma_k^l} \quad (1.41)$$

на $\gamma_k^l (k = \overline{1, m_l}, l = \overline{1, L})$, соотношениями $\xi_l (l = \overline{2, L})$:

$$\Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^l} = \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_l}^l}, k = \overline{1, m_l - 1}, \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(l \frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_l-1}^l} + \sum_{k=1}^{m_l-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(l \frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^l} = \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(l \frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_l}^l};$$

соотношения в ξ_1 , где присутствует масса M , аналогично (1.38):

$F(t) = -M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}$ – инерционная сила определяет в ξ_1 соотношения

$$\begin{aligned} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} &= \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, k = \overline{1, m_1 - 1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} - \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_{m_1}^1} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} &= \\ &= M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Omega\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Фиксируются начальные при $x \in \mathfrak{S}, t = 0$

$$\Omega(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, 0) = \hat{\tau}(x), \quad (1.44)$$

и граничные условия в $\mathfrak{S} (t \in [0, T])$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left((l-1)\pi/2, t\right)_{\gamma_k^l} - h_l \Omega\left((l-1)\pi/2, t\right)_{\gamma_k^l} &= \mu_k^l(t), (k = \overline{1, m_l - 1}, l = \overline{1, L}), \\ \frac{\partial}{\partial x} \Omega\left((L+1)\pi/2, t\right)_{\gamma_{m_L}^L} + H \Omega\left((L+1)\pi/2, t\right)_{\gamma_{m_L}^L} &= v(t); \end{aligned} \quad (1.45)$$

$\tau(x), \hat{\tau}(x), \mu_k^l(t), v(t)$ – фиксированные функции, h_l, H – наперед заданные постоянные, (1.41) – (1.45) – математическая модель волнового процесса в L -уровневой антенной конструкции.

1.5 Математическое описание процессов теплопереноса и волновых процессов в слоистых носителях

К сложноструктурируемым носителям процесса (сложноструктурируемым областям) относятся слоистые носители процесса, достаточно часто встречающиеся на практике – композиционные материалы (композиты). К этому объекту принадлежат множества носителей, структурированных многомерными слоями (рис. 1.10).

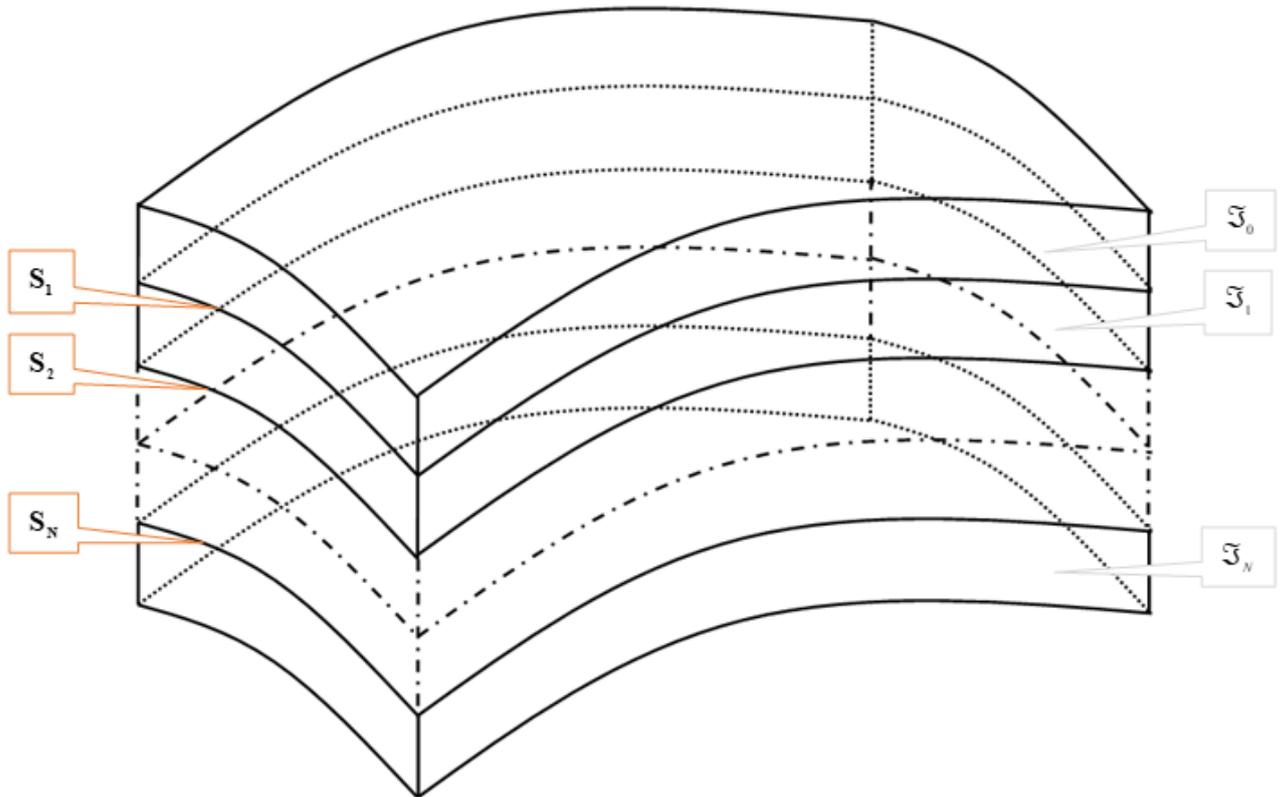


Рис. 1.10. Слоистая область

Математическая модель такого носителя, ниже называемого слоистым носителем, определяется как слоистая область (множество подобластей – слоев – попарно имеющие общие границы). Описание структуры слоистого носителя процесса несколько проще, чем сетеподобного носителя. Детальное математическое описание приведено в пункте 2.1.2 главы 2 (см. также, работу [2]), приведем основные рассуждения, они будут аналогичны рассуждениям в описании сетеподобного носителя.

Слоистый носитель определяется связной областью \mathfrak{Z} с границей $\partial\mathfrak{Z}$ (рис. 1.10). Область \mathfrak{Z} является подмножеством трехмерного евклидова пространства R^3 и состоит из объединения двух внутренних множеств: конечного множества слоев $\mathfrak{Z}_j, j = \overline{0, N}$ (с границами $\partial\mathfrak{Z}_j$ и обычно установленной толщиной слоев) и множества поверхностей $S_j, j = \overline{0, N}$, являющихся частью границ $\partial\mathfrak{Z}_j$, посредством которых слои примыкают друг к другу (S_j – поверхности примыкания). Надо отметить, что характеристики и параметры тепловых или волновых явлений в слоях могут различаться. Очевидно, как и выше для

сетеподобных носителей, описание явлений изучаемого процесса на S_j будут аналогичны соотношениям (2.6) главы 2. А именно, поверхности примыкания S_j , $j = \overline{0, N}$, слоев \mathfrak{S}_j , $j = \overline{0, N}$ характеризуются соотношениями

$$\int_{s_j^+} a(x)_{s_j^+} \frac{\partial u(x)_{s_j^+}}{\partial n_j^+} ds - \int_{s_j^-} a(x)_{s_j^-} \frac{\partial u(x)_{s_j^-}}{\partial n_j^-} ds = 0, \quad j = \overline{1, N},$$

здесь S_j^+ и S_j^- – соответственно внешняя и внутренняя стороны поверхности примыкания S_j подобластей \mathfrak{S}_j , $j = \overline{0, N}$. Здесь $a(x) \in C(\overline{\mathfrak{S}})$ и $a(x)_{s_j}$, $u(x)_{s_j}$, $a(x)_{s_{ji}}$, $u(x)_{s_{ji}}$ – сужения $u(x)$, $a(x)$ на соответствующую сторону S_j^+ и S_j^- , n_j^+ и n_j^- – внешние нормали к S_j^+ и S_j^- , $j = \overline{1, N}$.

Определяя посредством замыкания по желаемой норме множества функций, удовлетворяющих характеризующим соотношениям, получаем необходимое пространство, где рассматриваются уравнение переноса и волновое уравнение, т.е. получаем математические модели процесса переноса и волнового процесса в слоистом носителе – композиционном материале (композите).

1.6 Другие задачи естествознания

Схожие подходы, приведенные в разделах 1.2 – 1.5, используются при описании различных метаболизмов в живом организме, например, химические реакции, присущие определенным органам в живом организме, сетевой клеточный метаболизм [39], биофизические процессы (в том числе процессы, относящиеся многим разделам современной биоинформатики) [58]. Все перечисленные процессы существенно определяются структурой присущим им сетей, знание которой и умение формировать для них адекватное математическое описание составляют первостепенную задачу исследователя. Следует отметить также, что сетеподобные процессы диффузионного характера имеют некоторые аналоги в коммерции. Схожие закономерности наблюдаются при продвижении товаров по ритейлеровским коммерческим сетям, если для них определена единообразная сетевая маркетинговая и дистрибьюторская процессуальная политика [62, 99, 101, 104].

Выводы

Представлены примеры, иллюстрирующие новые принципы математического описания эволюционных процессов переноса и волновых процессов в сетеподобных носителях этих процессов. Формируются подходы анализа указанных процессов, базирующиеся на использовании развитого математического инструментария теории краевых задач для эволюционных дифференциальных уравнений с пространственной переменной, изменяющейся в многомерной сетеподобной (в одномерной – на геометрическом графе) или слоистой области.

1. Математическими формализмами теории множеств представлено описание носителей сетеподобных эволюционных процессов переноса и волновых процессов.

2. Приведены примеры существующих математических моделей сетеподобных процессов переноса сплошных и дискретных сред, волновых процессов, а также моделей этих процессов слоистых носителях.

3. Представлены подходы и принципы моделирования сетеподобных физических процессов, иллюстрированные конкретными примерами, ориентированными на практическое использование.

Глава 2 Вычислительные методы применительно к моделям сетеподобных процессов и явлений. Разностные схемы

2.1 Сложноструктурируемые носители процесса

Рассматриваются два типа сложноструктурируемых носителей процесса (сложноструктурируемых областей), достаточно часто встречающихся на практике: сетеподобные и слоистые носители процесса. К первому типу принадлежат множества одномерных сетеподобных носителей процесса, структурированных по типу геометрического графа (рис. 2.1),

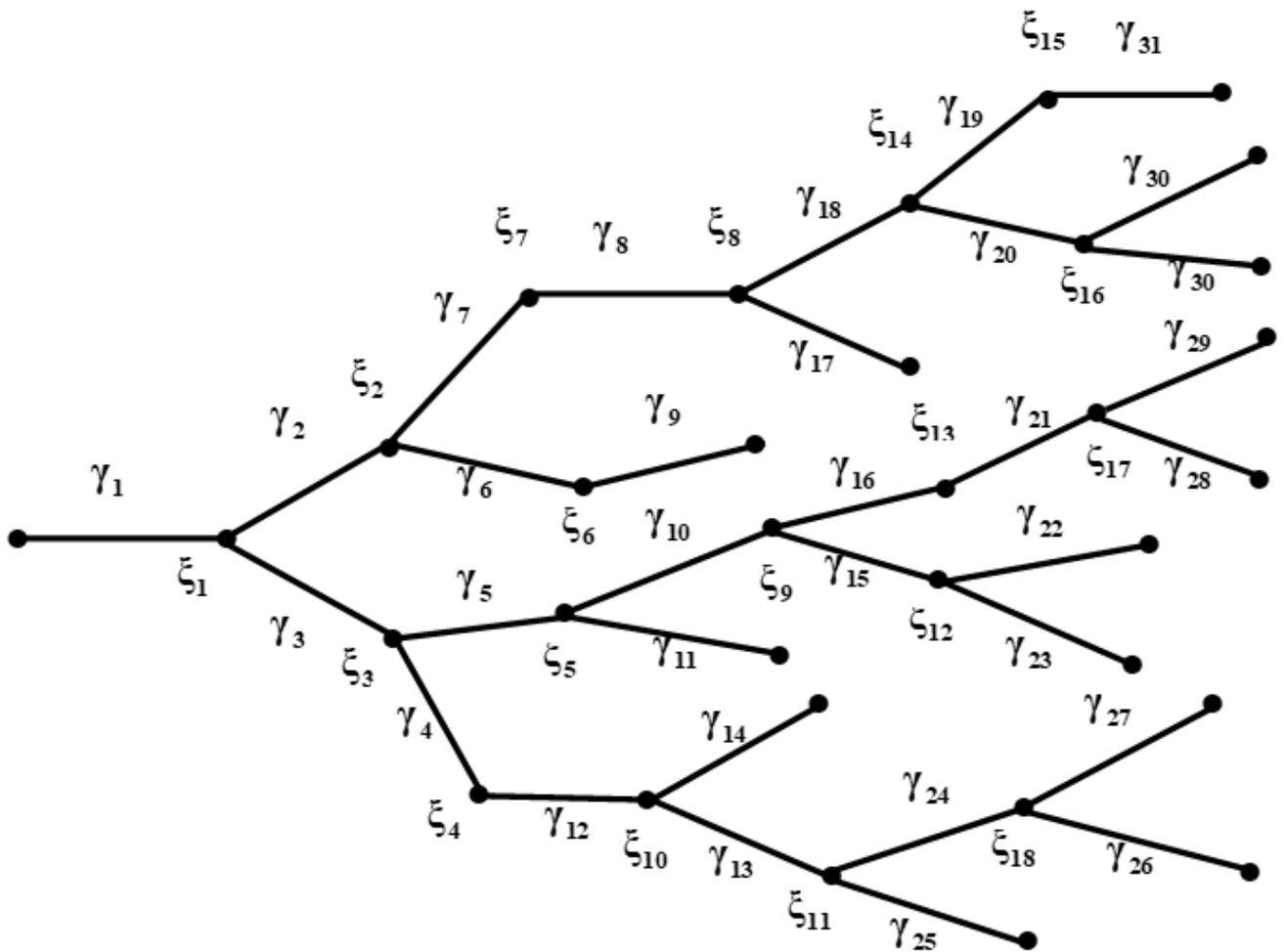


Рис. 2.1. Структура графа

а также многомерных сетеподобных носителей процесса, наследующих структуру графа (рис. 2.2).

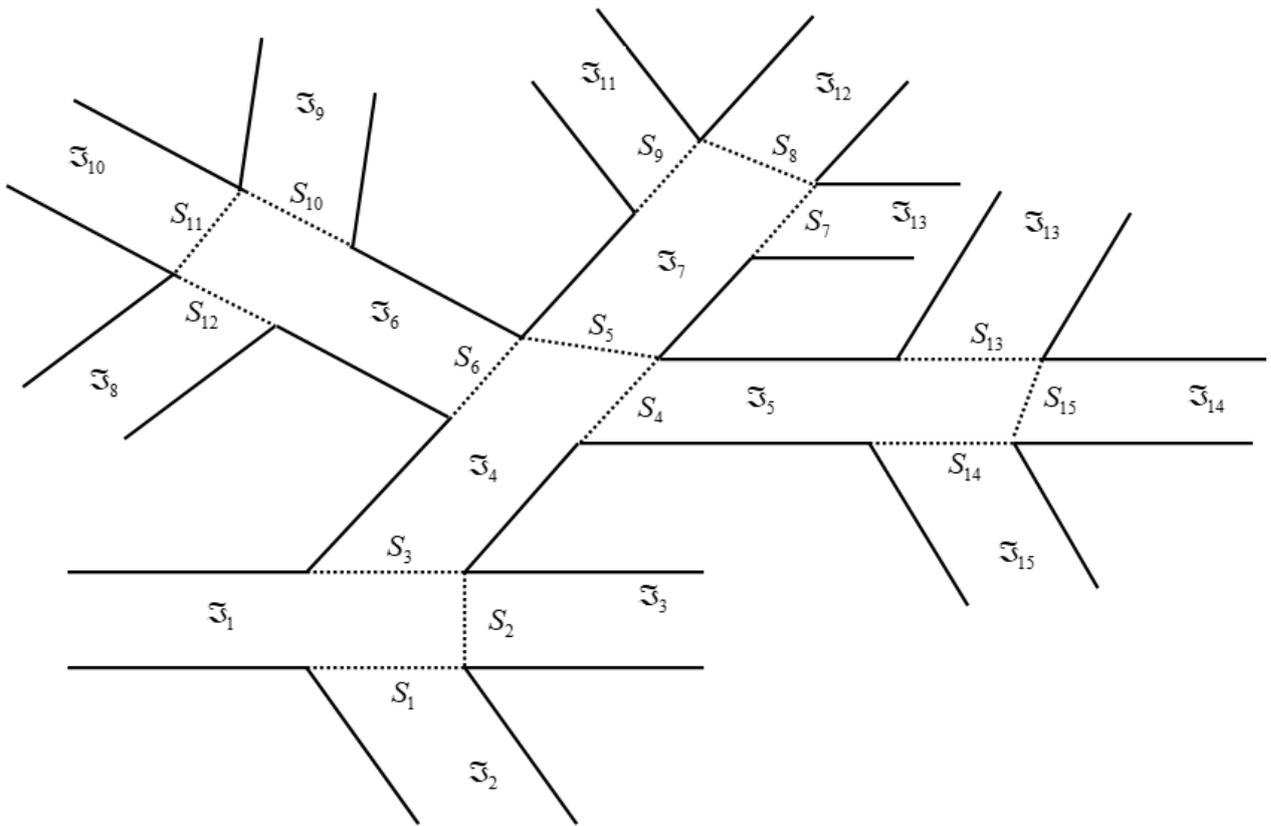


Рис. 2.2. Структура области

Ко второму типу принадлежат множества носителей процесса, структурированных многомерными слоями (рис. 2.3).

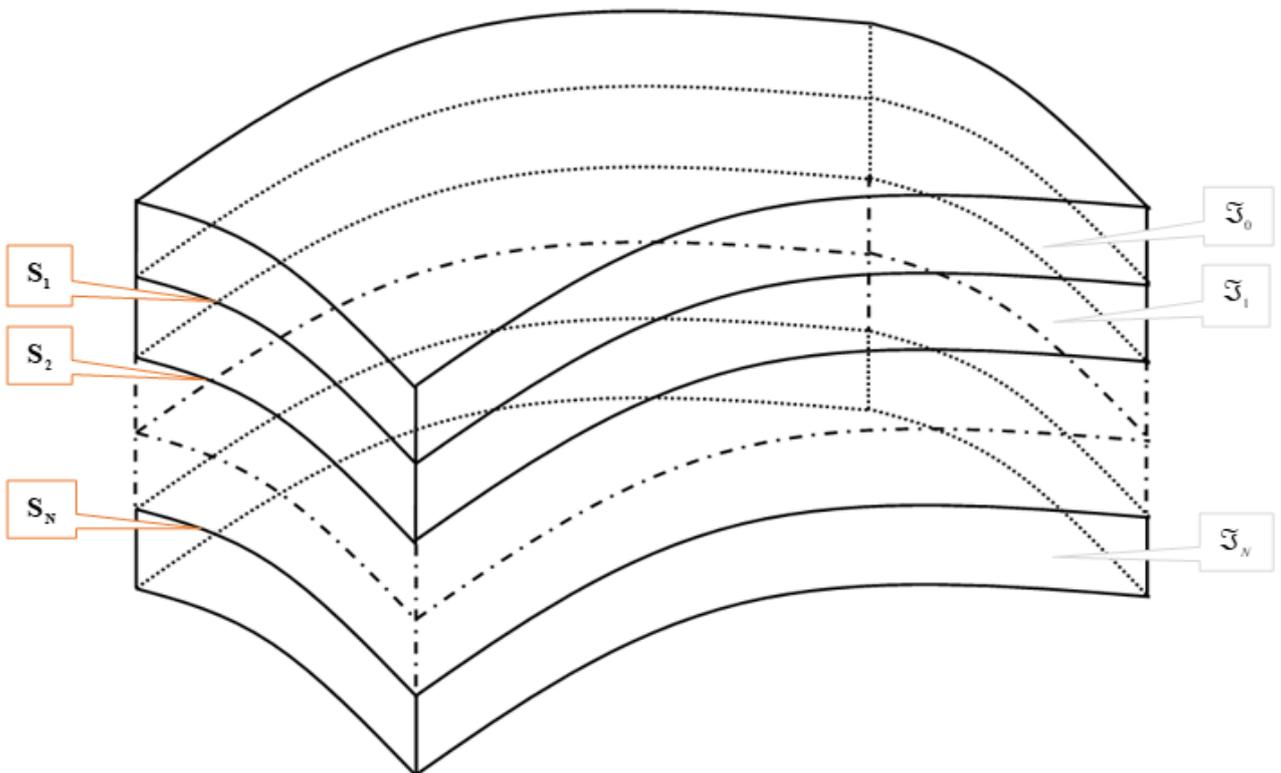


Рис. 2.3. Слоистая область

В качестве описательной математической модели одномерного носителя, ниже называемого сетью, используется геометрический граф – связное множество одномерных областей (т.е. сочлененных в концевых точках отрезков). Для многомерных сетеподобных носителей, ниже называемого многомерной сетью, математическую модель удобно представлять связной сетеподобной областью (множество примыкающих своими границами подобластей). Математическая модель второго типа носителя процесса, ниже называемого слоистым носителем, определяется как слоистая область (множество подобластей – слоев – попарно имеющие общие границы). Рисунки 2.1, 2.2 и 2.3 представляют графику сложноструктурируемых носителей сетеподобного процесса.

Представленная ниже информация используется при разработки вычислительных методов применительно к математическим моделям сетеподобных процессов и для формирования разностных схем с одномерной и многомерной пространственной переменной.

2.1.1 Сети и сетеподобные носители процессов

Вначале введем обозначение сетеподобной области $\mathfrak{S} \subset R^n$, $n=1,2,3$, которая представляет собой связное множество подобластей \mathfrak{S}_k , $k=\overline{1, M}$; $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $\partial\mathfrak{S}_T = \partial\mathfrak{S} \times (0, T)$, $\partial\mathfrak{S}$ – граница \mathfrak{S} ; частями границ $\partial\mathfrak{S}_k$ осуществляется примыкание подобластей \mathfrak{S}_k друг к другу.

В серии работ [44 – 47, 51 – 53] представлено детальное математическое описание пространств и множеств функций, используемых для разработки математических моделей данного исследования. Воспользуемся самыми необходимыми результатами для формирования разностных схем математических моделей сетеподобных процессов.

В работе [47] вводятся пространства Лебега $L_2(\Omega)$ и Соболева $W_2^1(\Omega)$ классических множеств Ω вместе метрикой, определяемой скалярным произведением и нормой:

$$(u, v)_{\Omega}^{(1)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{k=1}^n u_{x_k} v_{x_k} \right) dx = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} \right) dx \quad (2.1)$$

$$\|u\|_{\Omega}^{(1)} = \sqrt{(u, u)_{\Omega}^{(1)}}, \quad (2.2)$$

При этом $\int_{\mathfrak{Z}} u(x) dx = \sum_{k=1}^M \int_{\mathfrak{Z}_k} u(x) dx$ и в соответствии с (2.1), (2.2)

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}} = \sum_{k=1}^M \int_{\mathfrak{Z}_k} u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}} = \left(\sum_{k=1}^M (u, u)_{\mathfrak{Z}_k} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}}^{(1)} = \sum_{k=1}^M (u, v)_{\mathfrak{Z}_k}^{(1)} = \sum_{k=1}^M \int_{\mathfrak{Z}_k} \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\kappa}} \right) dx, \quad (2.4)$$

$$\|u\|_{\mathfrak{Z}}^{(1)} = \left(\sum_{k=1}^M (u, u)_{\mathfrak{Z}_k}^{(1)} \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

На \mathfrak{Z} введем множества функций, для которых имеют место соотношения (2.3), (2.4) и (2.5):

$C(\overline{\mathfrak{Z}})$ – совокупность непрерывных функций $u(x)$.

$C^1(\overline{\mathfrak{Z}_k})$ ($k = \overline{1, M}$) – совокупность $u(x) \in C(\overline{\mathfrak{Z}})$, причем $u_{x_k}(x) \in C(\overline{\mathfrak{Z}_k})$.

$C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ – совокупность функций $u(x) \in C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$, для которых

$$\int_{s_j} a(x)_{s_j} \frac{\partial u(x)_{s_j}}{\partial n_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{s_{ji}} a(x)_{s_{ji}} \frac{\partial u(x)_{s_{ji}}}{\partial n_{ji}} ds = 0, \quad x \in S_{ji}, \quad i = \overline{1, m_j}, \quad (2.6)$$

в местах примыкания S_j, S_{ji} ($i = \overline{1, m_j}$) подобластей \mathfrak{Z}_k , $k = \overline{1, M}$. Здесь $a(x) \in C(\overline{\mathfrak{Z}})$ и $a(x)_{s_j}, u(x)_{s_j}, a(x)_{s_{ji}}, u(x)_{s_{ji}}$ – сужения $u(x), a(x)$ на S_j и S_{ji} , n_j и n_{ji} – внешние нормали к S_j и S_{ji} , $i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, M}$.

Применительно к ниже изучаемым математическим моделям в работе [53] вводятся необходимое пространство $W^1(\mathfrak{Z})$ посредством замыкания $C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ в норме (2.5). При этом, если кроме (2.6) считать выполненным соотношение $u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0$ (и получим $C_0^1(\mathfrak{Z})$), формируется пространство $W_0^1(\mathfrak{Z})$ посредством замыкания $C_0^1(\mathfrak{Z})$. Таким образом, получены пространства $W^1(\mathfrak{Z})$ и $W_0^1(\mathfrak{Z})$, в которых изучаются дискретные аналоги математических моделей. По аналогии формируются пространства $W^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$ и $W_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$ через замыкание $\Omega(\mathfrak{Z}_T)$,

используя вместо (2.5) соотношения $\|u\|_{\mathfrak{Z}_T}^{1,0} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k \times (0,T)} \left(u^2 + \sum_{k=1}^n u_{x_k}^2 \right) dx dt \right)^2$ и $\|u\|_{\mathfrak{Z}_T}^1 = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k \times (0,T)} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{k=1}^n u_{x_k}^2 \right) dx dt \right)^2$.

Вводятся также пространство исходных данных (воздействий на физический процесс) $L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$, $\|v\|_{L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)} = \|v\|_{2,1,\mathfrak{Z}_T} = \int_0^T \left(\int_{\mathfrak{Z}} v^2(x,t) dx \right)^{1/2} dt$,

Далее введем одномерную сетеподобную область $\Gamma \subset R^1$, которую назовем сеть (в теории математического моделирования множеств – граф [100]): γ – ребра Γ , Γ_0 – множество точек графа Γ , не включающее граничных точек всех ребер, (т. е. интервалов $(0,1)$, $\bar{\Gamma}_0 = \Gamma$); $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$ ($\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t)$), $\gamma_t = \gamma_0 \times (0,t)$, $t \in (0,T]$, $T < \infty$; $\partial\Gamma$ – совокупность всех узлов ζ графа Γ , являющихся граничными узлами, $J(\Gamma)$ – совокупность внутренних узлов Γ , при этом $\int_{\Gamma} f(x) dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma} f(x) dx$. По аналогии с сетеподобной областью $\mathfrak{Z} \subset R^n$, $n=2,3$, строятся необходимые пространства в которых будут рассматриваться задачи процессов переноса и волновых процессов (работа [55]).

Для $\mu(x)$, $\nu(x)$ введем выражение

$$\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x) \mu(x) \nu(x) \right) dx$$

при $a(x)$, $b(x) \in L_2(\Gamma)$, при этом

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, |b(x)| \leq \beta, x \in \Gamma_0. \quad (2.7)$$

Имеет место утверждение [55, с. 92]:

если $f(x) \in L_2(\Gamma)$, $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ а также

$$\ell(u, \nu) - \int_{\Gamma} f(x) \eta(x) dx = 0 \quad \forall \eta(x) \in W_2^1(\Gamma),$$

тогда при $\gamma \subset \Gamma$ выражение $a(x)_{\gamma} \frac{du(x)_{\gamma}}{dx} \in C(\Gamma)$ во всех узлах Γ .

Пусть $\Omega_a(\Gamma)$ – линейное множество функций $u(x) \in C^1[\Gamma]$, причем

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx} \quad \forall \xi \in J(\Gamma),$$

($R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества γ , которые ориентированы к ξ и от ξ , соответственно). Вводится пространство Соболева $W^1(a, \Gamma)$ [55, с. 92]. При $u(x) \in \Omega_a(\Gamma)$ справедливо соотношение $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, тогда вводится пространство $W_0^1(a, \Gamma)$. Пусть $\Omega(\Gamma_T)$ – линейное множество функций $u(x, t) \in C^{1,0}[\Gamma_T]$, причем

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1, t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0, t)_\gamma}{\partial x} \quad \forall t \in [0, T].$$

Как и выше, если $u(x, t)|_{\partial\Gamma} = 0$, приходим к пространству $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Полученная в работе [55, с. 92] информация используется при разработки вычислительных методов применительно к математическим моделям сетеподобных процессов и для формирования разностных схем с пространственной переменной из $\Gamma \subset R^1$ и $\mathfrak{Z} \subset R^n$, $n = 2, 3$.

2.1.2 Слоистые носители

Описание структуры слоистого носителя процесса несколько проще, чем сетеподобного носителя процесса. Детальное описание приведено в работе [57], приведем основные рассуждения, они будут аналогичны рассуждениям при описании сетеподобного носителя. Слоистый носитель определяется связной областью \mathfrak{Z} с границей $\partial\mathfrak{Z}$, являющаяся подмножеством трехмерного евклидова пространства R^3 и состоящая из объединения двух внутренних множеств: конечного множества слоев \mathfrak{Z}_j , $j = \overline{0, N}$ (с границами $\partial\mathfrak{Z}_j$, иногда установленной определенной толщиной слоев) и множества поверхностей S_j , $j = \overline{1, N}$, являющихся частью границ $\partial\mathfrak{Z}_j$, посредством которых слои примыкают друг к другу (S_j – поверхности примыкания). Слоистый носитель процесса \mathfrak{Z} и $\partial\mathfrak{Z}$ определены объединениями вида

$$\mathfrak{S} = \left(\bigcup_{j=0}^N \mathfrak{S}_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right), \quad \partial \mathfrak{S} = \left(\bigcup_{j=0}^N \partial \mathfrak{S}_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right).$$

Надо отметить, что характеристики и параметры тепловых или волновых явлений в слоях различаются. Очевидно, как и выше для сетеподобных носителей, описание явлений изучаемого процесса на S_j будут аналогичны соотношениям (2.6).

2.2 Сетки и сеточные функции

2.2.1 Равномерная сетка в сети

Пространственная сеть моделируется пространственным геометрическим графом с ребрами, каждый из которых использует естественную метрику отрезка числовой оси.

Пусть $\Gamma \subset R^1$ – произвольный ограниченный связанный граф с узлами ξ_l ($l = \overline{1, p}$), имеющий ребра γ_k ($k = \overline{1, m}$): $\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \gamma_k$ (рис. 2.4). Каждое ребро γ_k ($k = \overline{1, m}$) параметризуется отрезком $[0, 1]$.

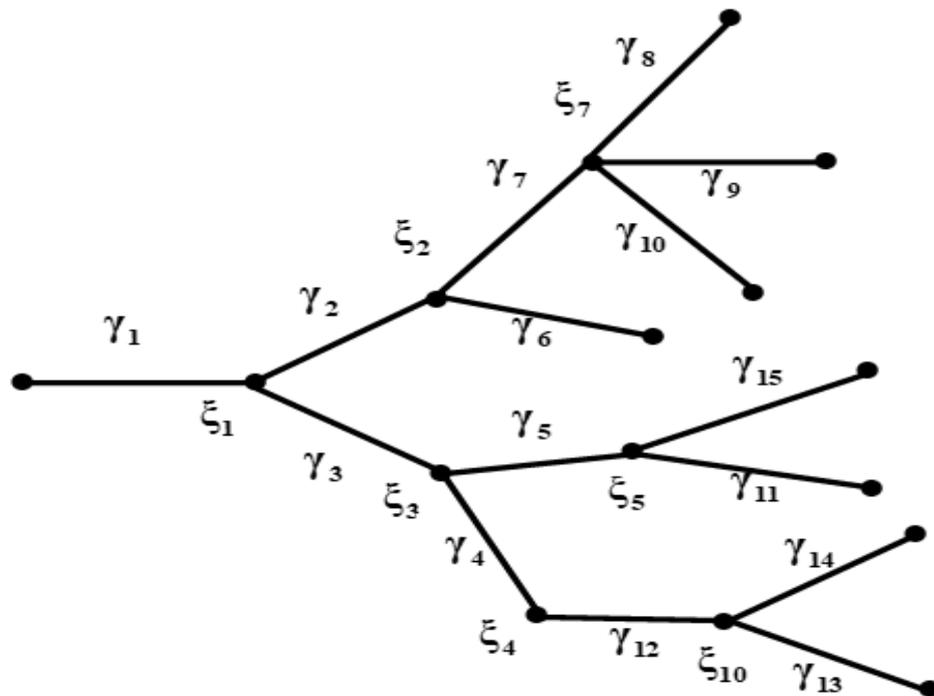


Рис. 2.4. Структура графа Γ

Разобьем каждое ребро γ_k ($k = \overline{1, m}$) точками деления $x_i^k = ih \in \gamma_k$, $i = \overline{0, N}$ с шагом разбиения $h = \frac{1}{N}$. Для удобства чтения и упрощения формул используется единый шаг разбиения h для всех ребер. Точки $x_i^k = ih$ – точки разбиения сетки. Множество всех точек $\{x_i^k, i = \overline{0, N}\}$, назовем сеткой графа Γ и обозначим через ω^Γ . Множество точек сетки ω^Γ , не включающее граничных точек всех ребер обозначим через ω^{Γ_0} и назовем сеткой Γ_0 . Обозначим через $\omega^{\partial\Gamma}$ множество точек сетки ω^Γ , совпадающих с граничными точками графа Γ .

Введем сетки $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, K}\}$ с шагом $\tau = T/K$ на отрезке $[0, T]$ и $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, K-1}\}$ с шагом $\tau = T/K$ на интервале $(0, T)$.

Учитывая введенные ω_τ , $\bar{\omega}_\tau$, вводятся Γ_T , $\bar{\Gamma}_T$:

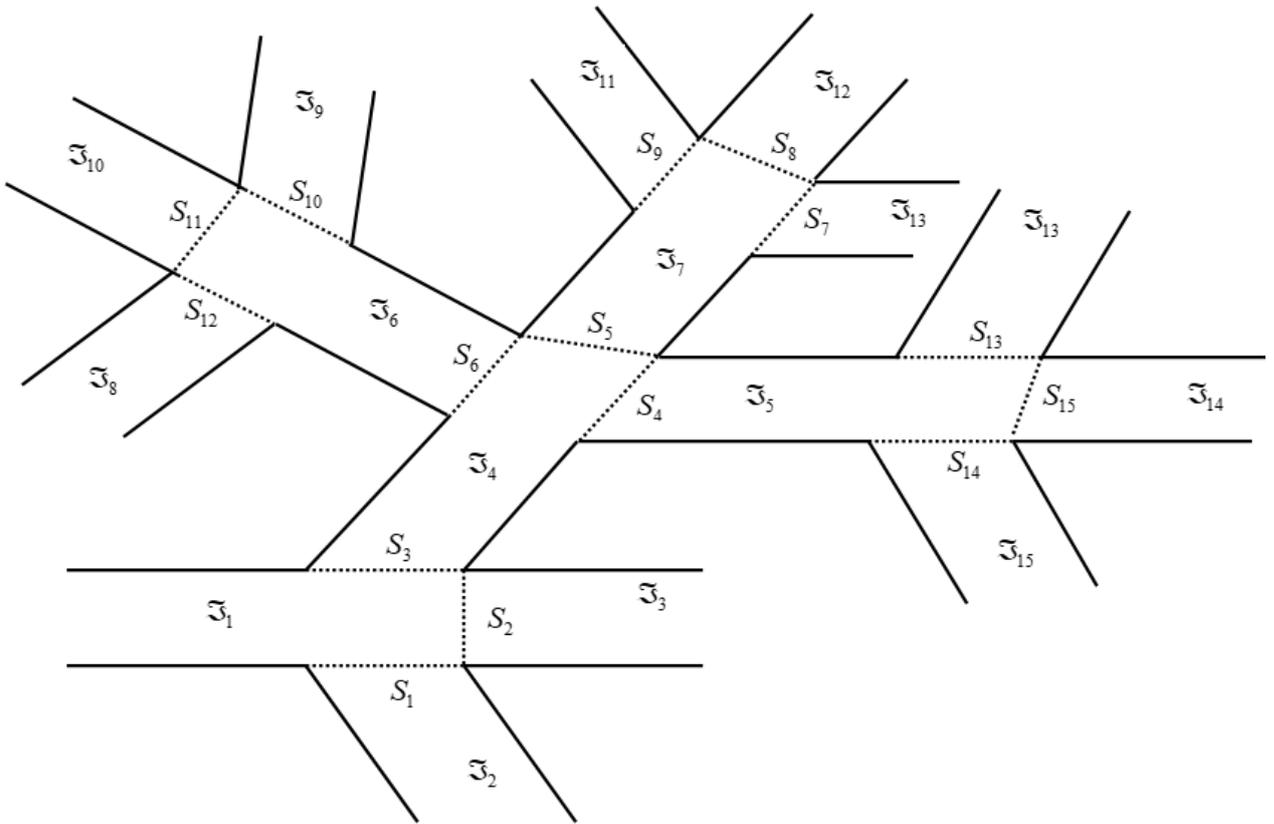
$$\omega^{\Gamma_T} = \omega^{\Gamma_0} \times \omega_\tau;$$

$$\omega^{\bar{\Gamma}_T} = \omega^\Gamma \times \bar{\omega}_\tau.$$

Функции, определенные на ω^{Γ_T} или $\omega^{\bar{\Gamma}_T}$, формируют сеточные функции.

2.2.2 Равномерная сетка в многомерной сетеподобной и слоистой областях

Далее используется терминология теории моделирования процессов и объектов: многомерная сеть \mathfrak{Z} определяется сетеподобная областью, за которой сохраняется то же самое обозначение \mathfrak{Z} , причем являющейся открытой ограниченной областью из $\mathfrak{Z} \subset R^n$, $n = 2, 3$, $\partial\mathfrak{Z}$ – граница \mathfrak{Z} , имеющая сетеподобную структуру, состоящую из областей \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1, M}$): $\mathfrak{Z} = \bigcup_{k=1}^M \mathfrak{Z}_k \bigcup_{l=1}^L S_l$; через S_l обозначены поверхности, разделяющие взаимно прилегающие области (рис. 2.5).

Рис. 2.5. Структура области \mathfrak{Z}

Поместим начало $O(0, \dots, 0)$ системы координат $(0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 2, 3$) в область \mathfrak{Z} и построим гиперплоскости координатных осей Ox_κ ($\kappa = \overline{1, n}$) вида

$$\begin{aligned}
 Ox_1 &: x_1 = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, \\
 Ox_2 &: x_2 = i_2 h_2, i_2 = \overline{0, N_2}, \\
 &\dots \\
 Ox_n &: x_n = i_n h_n, i_n = \overline{0, N_n},
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

где h_n ($n = 2, 3$) – шаги разбиений осей (для простоты считаем $h_1 = h_2 = h_3 = h$).

Определение 2.1 Сеткой области $\omega^{\mathfrak{Z}}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих области \mathfrak{Z} .

Определение 2.2 Сеткой подобласти $\omega^{\mathfrak{Z}_k}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих подобласти \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1, M}$).

Определение 2.3 Сеткой поверхности ω^{S_l} называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих поверхности S_l ($l = \overline{1, L}$).

Определение 2.4 Сеткой границы $\omega^{\partial\mathfrak{Z}}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей вида (*), принадлежащих границы $\partial\mathfrak{Z}$.

Очевидно

$$\omega^{\mathfrak{Z}} = \omega^{\mathfrak{Z}_k} \cup \omega^{S_l};$$

$$\omega^{\bar{\mathfrak{Z}}} = \omega^{\mathfrak{Z}} \cup \omega^{\partial\mathfrak{Z}}.$$

Введем сетки $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, K}\}$ с шагом $\tau = T/K$ на отрезке $[0, T]$ и $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, K-1}\}$ с шагом $\tau = T/K$ на интервале $(0, T)$.

Учитывая введенные $\omega_\tau, \bar{\omega}_\tau$, вводятся $\mathfrak{Z}_\tau, \bar{\mathfrak{Z}}_\tau$:

$$\omega^{\mathfrak{Z}_\tau} = \omega^{\mathfrak{Z}} \times \omega_\tau;$$

$$\omega^{\bar{\mathfrak{Z}}_\tau} = \omega^{\bar{\mathfrak{Z}}} \times \bar{\omega}_\tau.$$

Функции со значениями для переменных из $\omega^{\mathfrak{Z}_\tau}$ или $\omega^{\bar{\mathfrak{Z}}_\tau}$, в литературе определяются как сеточные функции.

Аналогично формируются сетки $\omega^{\mathfrak{Z}}, \omega^{\mathfrak{Z}_k}, \omega^{S_l}$ и соответствующие им $\omega^{\mathfrak{Z}_\tau}, \omega^{\bar{\mathfrak{Z}}_\tau}$, если \mathfrak{Z} является слоистой областью (т.е. областью без ветвлений подобластей, ее образующих).

2.3 Аппроксимации дифференциальных выражений. Погрешность аппроксимаций

2.3.1 Аппроксимация частных производных

Для непрерывной функции $v = v(x, t)$, $x \in \mathfrak{Z}$, $0 \leq t \leq T$, аппроксимация первой частной производной $v'_t = \frac{\partial v}{\partial t}$ по временной переменной t в фиксированной точке $t = t_j \in \omega_\tau$ вводится следующим образом. Определяются точки $t_{j+1} = (j+1)\tau$ и $t_{j-1} = (j-1)\tau$ (здесь, как и выше, $\tau = T/K$ – шаг на отрезке $[0, T]$) и для аппроксимации v'_t используются разностные отношения [34, 60]):

$$v_\tau = \frac{v^j - v^{j-1}}{\tau}, \quad (2.8)$$

$$v_t = \frac{v^{j+1} - v^j}{\tau}, \quad (2.9)$$

(левая (2.8) и правая разностные производные соответственно, в зависимости от положения точки t_j на сетке ω_τ). При этом разностные выражения (2.8) и (2.9) для

$v'_t = \frac{\partial v}{\partial t}$ определены соответственно на интервалах (t_j, t_{j+1}) и (t_{j-1}, t_j) . Для

уменьшения погрешности аппроксимации $v'_t = \frac{\partial v}{\partial t}$ достаточно взять оба

выражения (2.8) и (2.9) в следующем виде:

$$v_t^{(\sigma)} = \sigma v_t + (1 - \sigma) v_{\bar{t}}, \quad (2.10)$$

с произвольной постоянной σ . К примеру, для $\sigma = 0.5$ получаем соотношение

$$v_{\bar{t}} = \frac{1}{2}(v_t + v_{\bar{t}}) = \frac{v^{j+1} - v^{j-1}}{2\tau} \quad (2.11)$$

((2.11) – центральная разностная производная).

Установим уровень погрешности при аппроксимации частной производной v'_t , а именно, количественные выражения в виде разности при аппроксимации производной. Обозначим через v_r разностное выражение для аппроксимации v'_t и введем функцию $\psi_j = \psi(x, t_j) = v_r - v'_t$ в точке $t = t_j$ при достаточно малом τ . Определим функцию ψ_j как погрешность разностной аппроксимации v_r производной v'_t в t_j . Разложение функции $v(x, t)$ в ряд Тейлора при $t = t_j$ представимо в виде

$$v^{j\pm 1} = v^j \pm \tau(v'_t)^j + \frac{\tau^2}{2}(v''_t)^j + O(\tau^3)$$

(предполагается, что функция $v(x, t)$ дифференцируема до второго порядка включительно в окрестности $(t_j - \tau_0, t_j + \tau_0)$ точки t_j , где $\tau < \tau_0$, τ_0 – достаточно малое наперед заданное действительное число). Подставляя представление $v^{j\pm 1}$ в (2.8), (2.9) и (2.11), приходим к следующим соотношениям:

$$v_{\bar{t}} = \frac{v^j - v^{j-1}}{\tau} = (v'_t)^j - \frac{\tau}{2}(v''_t)^j + O(\tau^2),$$

$$v_t = \frac{v^{j+1} - v^j}{\tau} = (v'_t)^j + \frac{\tau}{2}(v''_t)^j + O(\tau^2),$$

$$v_{\bar{t}} = \frac{v^{j+1} - v^{j-1}}{2\tau} = (v'_t)^j + O(\tau^2),$$

из которых заключаем, что

$$\psi = v_t - v'_t = O(\tau),$$

$$\psi = v_{\bar{t}} - v'_t = O(\tau),$$

$$\psi = v_{\bar{t}} - v'_t = O(\tau^2).$$

Таким образом, установлено, что разностное выражение v_r аппроксимирует v'_t в t_j с порядком $m(m > 0)$, а именно,

$$\psi_j = v_r - v'_t = O(\tau^m).$$

Исходя из этого, заметим, что v_t и $v_{\bar{t}}$ аппроксимируют частную производную v'_t с первым порядком точности с данным τ , а $v_{\bar{t}}$ — со вторым порядком точности.

Далее переходим к аппроксимации второй частной производной вида $v''_t = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$. Для разностной аппроксимации производной v''_t необходимо фиксировать точки t_{j-1} , t_j и t_{j+1} .

Введем соотношение

$$v_{\bar{\bar{t}}} = \frac{1}{\tau}(v_t - v_{\bar{t}}) = \frac{1}{\tau^2}(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1}) \quad (2.12)$$

и представим функцию $v(x, t)$ при $t = t_j$, используя ряд Тейлора, получим

$$v_{\bar{\bar{t}}} - v''_t = O(\tau^2).$$

Полученное соотношение устанавливает: выражение, определенное формулой для $v_{\bar{\bar{t}}}$ аппроксимирует частную производную v''_t со вторым порядком точности для данного τ .

2.3.2 Аппроксимации дифференциального оператора с изменяющейся переменной на графе

Покажем методы, которые применимы при формировании аппроксимаций эллиптических операторов зависящими от временного переменного t , с помощью которых устанавливаются приближения количественных характеристик эволюционных процессов на сети [67, 71, 74]. Обозначим через L линейный дифференциальный оператор, v – определенной класса функция, $L_h v$ – конечно-разностный аналог Lv , где производные представлены разностными соотношениями. Выражение $L_h v$ определяет аппроксимацию дифференциального оператора L на графе, который моделирует сети.

Множество $\Omega(\Gamma_T)$ функций $v(x, t) \in C^{1,0}[\Gamma_T]$, удовлетворяющих соотношениям в узлах ξ_l ($l = \overline{1, p}$)

$$\begin{aligned} (v(1, t))_{\gamma_k \in R(\xi_l)} &= (v(0, t))_{\gamma_k \in r(\xi_l)} \\ \sum_{\gamma_k \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_k} \frac{\partial v(1, t)_{\gamma_k}}{\partial x} &= \sum_{\gamma_k \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_k} \frac{\partial v(0, t)_{\gamma_k}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

здесь $R(\xi_l)$ и $r(\xi_l)$ обозначены наборы ребер γ_k ($k = \overline{1, m}$), которые ориентированы по направлению к ξ_l и от ξ_l ; через $(\cdot)_{\gamma_k}$ обозначены сужения $v(x, t)_{\gamma_k}$, $a(x)_{\gamma_k}$, $b(x)_{\gamma_k}$ функций $v(x, t)$, $a(x)$, $b(x)$ ($k = \overline{1, m}$) на соответствующее ребро.

На функциях $v(x, t)$, принадлежащих многообразию $\Omega(\Gamma_T)$, определим дифференциальный оператор L соотношением

$$Lv = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b(x)v, \quad x, t \in \Gamma_T, \quad (2.14)$$

где $a(x)$, $b(x) \in L_2(\Gamma)$, $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \beta$ (a_* , a^* , β – положительные постоянные).

Обозначим через $\Phi^{\Gamma_T} \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$ совокупность функций, которые составляют область определения для L и пусть $v(x, t) \in \Phi^{\Gamma_T}$ обладают следующим свойством:

$$v(x, t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.15)$$

Элементы сеточной функции, соответствующие функции $v(x, t)$, обозначим через v_i , $i = \overline{0, N}$, (здесь индексом i пронумерованы точки деления ребер). Пусть (v_i) образуют совокупность $\Omega_h(\Gamma_T)$, причем для каждого элемента этой совокупности имеют место следующие соотношения в сетевых узлах ξ_l ($l = \overline{1, p}$):

$$v_{N_{\gamma_k \subset R(\xi_l)}} = v_{0_{\gamma_k \subset r(\xi_l)}},$$

$$\sum_{\gamma_k \subset R(\xi_l)} a_{N_{\gamma_k}} \frac{v_{N_{\gamma_k}} - v_{N-1_{\gamma_k}}}{h} = \sum_{\gamma_k \subset r(\xi_l)} a_{0_{\gamma_k}} \frac{v_{1_{\gamma_k}} - v_{0_{\gamma_k}}}{h},$$

данные соотношения являются аппроксимациями (2.13).

Разностный оператор L_h , аппроксимирующий L , в соответствии со сказанным представляется в виде (здесь $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, m}$):

$$L_h v_{\gamma_k} = -\frac{1}{h} \left(a_{i+1_{\gamma_k}} \frac{v_{i+1_{\gamma_k}} - v_{i_{\gamma_k}}}{h} - a_{i_{\gamma_k}} \frac{v_{i_{\gamma_k}} - v_{i-1_{\gamma_k}}}{h} \right) + b_{i_{\gamma_k}} v_{i_{\gamma_k}}.$$

Обозначим через $\Phi_h^{\Gamma_T}$ область определения L_h , элементы которого $(v_i) \in \Omega_h(\Gamma_T)$ и для которых

$$v_{i_{\partial\Gamma}} = 0,$$

(последнее является аппроксимацией (2.15)).

Следует отметить, что сеточные функции $a_{i_{\gamma_k}}$, $b_{i_{\gamma_k}}$, соответствующие фиксированным функциям $a(x)_{\gamma_k}$, $b(x)_{\gamma_k}$, формируются в силу соотношений

$$a_{i_{\gamma_k}} = \frac{1}{\text{meas } R_{ih}^{\Gamma} R_{ih}^{\Gamma}} \int a(x)_{\gamma_k} dx, \quad b_{i_{\gamma_k}} = \frac{1}{\text{meas } R_{ih}^{\Gamma} R_{ih}^{\Gamma}} \int b(x)_{\gamma_k} dx,$$

здесь $R_{ih}^{\Gamma} = \{x \in \gamma_k : ih < x < (i+1)h\}$.

2.3.3 Аппроксимации дифференциального оператора с изменяющейся переменной в сетеподобной области

Рассмотрим вопросы аппроксимации дифференциальных выражений, а следовательно, эллиптических операторов, в сетеподобной области, которая

моделирует многомерную сеть. В работах [69, 72, 73, 75] установлены пути формирования для них разностных схем, которые в данном разделе реализованы в направлении анализа прикладного характера.

Множество $\Omega(\mathfrak{T}_T)$ функции $v(x, t)$ (см. выше, стр. 46), удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} v(x, t)_{S_l^-} &= v(x, t)_{S_l^+}, \\ \sum_{l=1}^L a(x)_{S_l^-} \frac{\partial v(x, t)_{S_l^-}}{\partial n_l^-} + \sum_{l=1}^L a(x)_{S_l^+} \frac{\partial v(x, t)_{S_l^+}}{\partial n_l^+} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

(S_l – двухсторонняя поверхность с внешней и внутренней поверхностями S_l^+ , S_l^- , n_l^+ , n_l^- – соответствующие нормали).

Обозначим угол между n_l^+ и Ox_κ через α_κ ($\kappa = \overline{1, n}$). Перепишем соотношений (2.16) в виде

$$\begin{aligned} v(x, t)_{S_l^-} &= v(x, t)_{S_l^+}, \\ -\sum_{l=1}^L \sum_{\kappa=1}^n a(x)_{S_l^-} \frac{\partial v(x, t)_{S_l^-}}{\partial x_\kappa} \cos \alpha_\kappa + \sum_{l=1}^L \sum_{\kappa=1}^n a(x)_{S_l^+} \frac{\partial v(x, t)_{S_l^+}}{\partial x_\kappa} \cos \alpha_\kappa &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

На функциях $v(x, t)$, принадлежащих многообразию $\Omega(\mathfrak{T}_T)$, определим дифференциальный оператор L соотношением

$$Lv = -\sum_{\kappa, t=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa t}(x) \frac{\partial v}{\partial x_t} \right) + b(x)v, \quad x, t \in \mathfrak{T}_T, \quad (2.18)$$

где $a_{\kappa t}(x), b(x) \in L_2(\mathfrak{T})$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_{\kappa t}(x) &= a_{t\kappa}(x), \quad 0 < a_* \leq a_{\kappa t}(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \\ a_* \xi^2 &\leq \sum_{\kappa, t=1}^n a_{\kappa t}(x) \xi_\kappa \xi_t \leq a^* \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

с фиксированными положительными постоянными a_* , a^* , β и произвольными параметрами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Как и выше в пункте 2.3.2, обозначим через $\Phi^{\mathfrak{T}_T} \subset L_{2,1}(\mathfrak{T}_T)$ совокупность функций, которые составляют область определения для L и пусть $v(x, t) \in \Phi^{\mathfrak{T}_T}$ обладают следующим свойством:

$$v(x, t)|_{x \in \partial \mathfrak{T}} = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.20)$$

Элементы сеточной функции, соответствующие функции $v(x, t)$, обозначим через v_{i_1, i_2, \dots, i_n} , причем для образующих совокупность $\Omega_h(\mathfrak{T}_T)$ сеточных функций $(v_{i_1, i_2, \dots, i_n})$ имеют место следующие соотношения (аппроксимации соотношений (2.17)):

$$\begin{aligned} v_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{S_l^-} &= v_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{S_l^+}, \\ -\sum_{l=1}^L \sum_{\kappa=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{S_l^-} &\frac{v_{i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n}_{S_l^-} - v_{i_1, \dots, i_{\kappa-1}, \dots, i_n}_{S_l^-}}{h} \cos \alpha_\kappa + \\ + \sum_{l=1}^L \sum_{\kappa=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{S_l^+} &\frac{v_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n}_{S_l^+} - v_{i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n}_{S_l^+}}{h} \cos \alpha_\kappa = 0 \\ i_\kappa &= \overline{1, N_\kappa - 1}, \kappa = \overline{1, n}, p = \overline{1, M}, q = \overline{1, M}, \end{aligned}$$

где \mathfrak{T}_p и \mathfrak{T}_q – подобласти, примыкающие друг к другу посредством поверхностей S_l .

Таким образом, если обозначить через конечно-разностный определенный на $\Omega_h(\mathfrak{T}_T)$ оператор L_h , аппроксимирующий L на $\Phi^{\mathfrak{T}_T}$, тогда L_h имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L_h v_{\mathfrak{T}_k} &= -\sum_{\kappa, l=1}^n \frac{1}{h} \left[a_{\kappa l i_1, \dots, i_\kappa+1, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k} \frac{v_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k} - v_{i_1, \dots, i_\kappa+1, \dots, i_{l-1}, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k}}{h} - \right. \\ &\left. - a_{\kappa l i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k} \frac{v_{i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k} - v_{i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_{l-1}, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k}}{h} \right] + b_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k} v_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k} \\ i_\kappa &= \overline{1, N_\kappa - 1}, i_l = \overline{1, N_l}, k = \overline{1, M}, \end{aligned}$$

здесь через $(\cdot)_{\mathfrak{T}_k}$ обозначены сужения $v(x, t)_{\mathfrak{T}_k}$, $a_{\kappa l}(x)_{\mathfrak{T}_k}$, $b(x)_{\mathfrak{T}_k}$ функций $v(x, t)$, $a_{\kappa l}(x)$, $b(x)$ ($k = \overline{1, M}$) на соответствующую область.

Заметим, если обозначить через $\Phi_h^{\mathfrak{T}_T}$ область определения L_h , то функции $(v_{i_1, i_2, \dots, i_n}) \in \Omega_h(\mathfrak{T}_T)$ аппроксимируют (2.20), т.е.

$$v_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{\partial \mathfrak{T}} = 0.$$

Заметим также, что сеточные функции $a_{\kappa l i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k}$, $b_{i_1, i_2, \dots, i_n}_{\mathfrak{T}_k}$, соответствующие фиксированным функциям $a_{\kappa l}(x)_{\mathfrak{T}_k}$, $b(x)_{\mathfrak{T}_k}$, формируются в силу соотношений

$$a_{k_1, i_1, \dots, i_k, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{\text{meas } R_{\text{ih}}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{\text{ih}}^{\mathfrak{S}_k}} a_{k_1}(x)_{\mathfrak{S}_k} dx, \quad b_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{\text{meas } R_{\text{ih}}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{\text{ih}}^{\mathfrak{S}_k}} b(x)_{\mathfrak{S}_k} dx,$$

здесь $R_{\text{ih}}^{\mathfrak{S}_k} = \{x \in \mathfrak{S}_k : |x - x_i| < h\}$, $|x - x_i|$ – норма в R^n .

2.3.4 Аппроксимации дифференциального оператора с изменяющейся переменной в слоистой области

Прежде всего следует отметить, что аппроксимация оператора с переменной, изменяющейся в слоистой области, несколько проще, чем сетеподобной области. Это объясняется отсутствием в слоистой области мест ветвления областей – слои (т.е. подобласти \mathfrak{S}_j) смыкаются между собой попарно. А именно, учитывая структуру слоистой области (п. 2.1.2), соотношения (2.16) и (2.17) представляются в виде ($j = \overline{1, N}$)

$$\begin{aligned} v(x, t)_{S_j^-} &= v(x, t)_{S_j^+}, \\ a(x)_{S_j^-} \frac{\partial v(x, t)_{S_j^-}}{\partial n_j^-} + a(x)_{S_j^+} \frac{\partial v(x, t)_{S_j^+}}{\partial n_j^+} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} v(x, t)_{S_j^-} &= v(x, t)_{S_j^+}, \\ -\sum_{\kappa=1}^n a(x)_{S_j^-} \frac{\partial v(x, t)_{S_j^-}}{\partial x_\kappa} \cos \alpha_\kappa + \sum_{\kappa=1}^n a(x)_{S_j^+} \frac{\partial v(x, t)_{S_j^+}}{\partial x_\kappa} \cos \alpha_\kappa &= 0, \end{aligned}$$

соответственно. А значит, следующие соотношения дают аппроксимации для (2.17):

$$\begin{aligned} v_{i_1, i_2, \dots, i_n, S_j^-} &= v_{i_1, i_2, \dots, i_n, S_j^+}, \\ -\sum_{\kappa=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n, S_j^-} \frac{v_{i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n, S_j^-} - v_{i_1, \dots, i_{\kappa-1}, \dots, i_n, S_j^p}}{h} \cos \alpha_\kappa + \\ + \sum_{\kappa=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n, S_j^+} \frac{v_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n, S_j^q} - v_{i_1, \dots, i_\kappa, \dots, i_n, S_j^+}}{h} \cos \alpha_\kappa &= 0 \\ i_\kappa = \overline{1, N_\kappa - 1}, \kappa = \overline{1, n}, p = \overline{1, N}, q = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где \mathfrak{S}_p и \mathfrak{S}_q – подобласти, смыкающиеся попарно посредством поверхностей S_j , $j = \overline{1, N}$. Оператор L_h , аппроксимирующий L на $\Phi^{\mathfrak{S}_r}$, имеет следующий вид:

$$L_h v_{\mathfrak{S}_j} = - \sum_{\kappa, i=1}^n \frac{1}{h} \left[a_{\kappa i, i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j} \frac{v_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j} - v_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_{\kappa-1}, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j}}{h} - \right. \\ \left. - a_{\kappa i, i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j} \frac{v_{i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j} - v_{i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_{\kappa-1}, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j}}{h} \right] + b_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j} v_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_j} \\ i_{\kappa} = \overline{1, N_{\kappa} - 1}, i_i = \overline{1, N_i}, j = \overline{1, N}.$$

2.4 Двух- и трехслойные разностные схемы

В этом разделе ставятся вопросы и предлагаются подходы к разработке и формированию разностных схем при моделировании сетеподобных эволюционных физических процессов различных типов [50, 67, 69]. Ниже рассматриваются начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений математической физики, определенных на пространственных сетеподобных носителях, которые присутствуют в математическом описании сетеподобных эволюционных процессов [78, 95, 97, 98].

2.4.1 Двухслойная разностная схема с весовым параметром для уравнения переноса

2.4.1.1 Двухслойная разностная схема на одномерной сети

В пространстве $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$, рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad x, t \in \Gamma_T, \quad (2.21)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(x, t)|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad (2.22)$$

где $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(\Gamma)$; оператор L – линейный положительный оператор, определяемый соотношением (2.14).

В целях упрощения представления дальнейших рассуждений символьные обозначения сеточных функций оставляем неизменными с обозначениями функций, которые используются в дифференциальных выражениях. К примеру элементы сеточной функции (u_i^j) для функции $u(x, t)$ использует символику u_i^j , где индексом i , $i = \overline{0, N}$, пронумерованы точки деления ребер, индексом j , $j = \overline{0, K}$ – точки деления отрезка $[0, T]$.

Введем обозачения [60]

$$\hat{u} = u_i^{j+1}, \quad \bar{u} = u_i^j, \quad u_i = \frac{\hat{u} - \bar{u}}{\tau}.$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial t} \sim u_{t_{\gamma_k}} = \frac{u_{i_{\gamma_k}}^{j+1} - u_{i_{\gamma_k}}^j}{\tau}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, K-1}, \quad k = \overline{1, m}.$$

$$Lu_{\gamma_k} \sim L_h u_{\gamma_k} = -\frac{1}{h} \left(a_{i+1_{\gamma_k}} \frac{u_{i+1_{\gamma_k}}^j - u_{i_{\gamma_k}}^j}{h} - a_{i_{\gamma_k}} \frac{u_{i_{\gamma_k}}^j - u_{i-1_{\gamma_k}}^j}{h} \right) + b_{i_{\gamma_k}} u_{i_{\gamma_k}}^j, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, K}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Дифференциальную систему (2.21), (2.22) аппроксимирует двухслойная разностная схема (частный случай):

$$u_{t_{\gamma_k}} + L_h \bar{u}_{\gamma_k} = f_{i_{\gamma_k}}^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m}, \\ u_{i_{\gamma_k}}^0 = \varphi_{i_{\gamma_k}}, \quad (2.23)$$

$$u_{i_{\partial\Gamma}}^j = 0, \quad (2.24)$$

где

$$f_{i_{\gamma_k}}^j = \frac{1}{meas \mathbf{R}_{ih}^\Gamma \tau} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \int_{\mathbf{R}_{ih}^\Gamma} f(x, t)_{\gamma_k} dx dt, \quad \varphi_{i_{\gamma_k}} = \frac{1}{meas \mathbf{R}_{ih}^\Gamma} \int_{\mathbf{R}_{ih}^\Gamma} \varphi(x)_{\gamma_k} dx.$$

Далее рассмотрим двухслойную разностную схему с весовым параметром σ (σ – вещественные числа) для дифференциальной системы (2.21), (2.22):

$$u_{t_{\gamma_k}} + L_h u_{\gamma_k}^{(\sigma)} = f_{i_{\gamma_k}}^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m}, \\ u_{i_{\gamma_k}}^0 = \varphi_{i_{\gamma_k}}, \quad (2.25)$$

$$u_{i_{\partial\Gamma}}^j = 0, \quad (2.26)$$

где $u^{(\sigma)} = \sigma \hat{u} + (1 - \sigma) \widehat{u}$.

2.4.1.2 Двухслойная разностная схема на многомерной сети

В пространстве $W_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$, $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $\mathfrak{S} \subset R^n$ ($n = 2, 3$), рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad x, t \in \mathfrak{S}_T, \quad (2.27)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(x, t)|_{x \in \partial\mathfrak{S}} = 0, \quad (2.28)$$

где $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$, $\varphi(x) \in W_0^1(\mathfrak{S})$; оператор L — линейный положительный оператор, определяемый соотношением (2.18).

Как и выше в пункте 2.4.1.1, сохраняется замечание относительно использования символики сеточной функции $(u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j)$ и ее элементов $u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $i_\kappa = \overline{0, N_\kappa}$, $\kappa = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, K}$, для функции $u(x, t)$.

Введем обозначения

$$\hat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j+1}, \quad \widehat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j, \quad u_t = \frac{\hat{u} - \widehat{u}}{\tau}.$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial u(x, t)_{\mathfrak{S}_k}}{\partial t} \sim u_{t_{\mathfrak{S}_k}} = \frac{u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^{j+1} - u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j}{\tau}, \quad j = \overline{0, K-1}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$Lu_{\mathfrak{S}_k} \sim L_h u_{\mathfrak{S}_k} = \sum_{\kappa, t=1}^n \frac{1}{h} \left[a_{\kappa t, i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} \frac{u_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j - u_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_{t-1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j}{h} - \right. \\ \left. - a_{\kappa t, i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} \frac{u_{i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j - u_{i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_t-1, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j}{h} \right] + b_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \\ i_\kappa = \overline{1, N_\kappa - 1}, \quad i_t = \overline{1, N_t}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Дифференциальную систему (2.27), (2.28) аппроксимирует двухслойная разностная схема (частный случай):

$$u_{t_{\mathfrak{S}_k}} + L_h \widehat{u}_{\mathfrak{S}_k} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k},$$
(2.29)

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \partial \mathfrak{S}}^j = 0,$$
(2.30)

где

$$f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k} \tau} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} f(x, t)_{\mathfrak{S}_k} dx dt, \quad \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \varphi(x)_{\mathfrak{S}_k} dx;$$

Далее рассмотрим двухслойную разностную схему с весовым параметром σ (σ – вещественные числа) для дифференциальной системы (2.27), (2.28):

$$u_{t_{\mathfrak{S}_k}} + L_h u_{\mathfrak{S}_k}^{(\sigma)} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k},$$
(2.31)

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \partial \mathfrak{S}}^j = 0,$$
(2.32)

где $u^{(\sigma)} = \sigma \hat{u} + (1 - \sigma) \check{u}$.

2.4.2 Трехслойная разностная симметричная схема с весовым параметром для уравнения переноса

2.4.2.1 Трехслойная разностная симметричная схема на одномерной сети

В дальнейшем используются обозначения из пункта 2.4.1.1: u_i^j , $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{0, K}$. Введем обозначение [60]

$$\hat{u} = u_i^{j+1}, \quad \check{u} = u_i^j, \quad \check{\check{u}} = u_i^{j-1}, \quad u_{t^0} = \frac{\hat{u} - \check{\check{u}}}{2\tau}.$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial t} \sim u_{t^0_{\gamma_k}} = \frac{u_{i_{\gamma_k}}^{j+1} - u_{i_{\gamma_k}}^{j-1}}{2\tau}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим трехслойную разностную симметричную схему с весовым параметром σ (σ – вещественные числа):

$$u_{t^0_{\gamma_k}} + L_h u_{\gamma_k}^{(\sigma)} = f_{i_{\gamma_k}}^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m},$$

$$u_{i_{\gamma_k}}^0 = \varphi_{0 i_{\gamma_k}}, \quad u_{i_{\gamma_k}}^1 = \varphi_{1 i_{\gamma_k}},$$
(2.33)

$$u_{i_{\partial\Gamma}}^j = 0, \quad (2.34)$$

где $u^{(\sigma)} = \sigma\hat{u} + (1-2\sigma)\bar{u} + \sigma\check{u}$; L_h определяется в пункте 2.4.1.1.

2.4.2.2 Трехслойная разностная симметричная схема на многомерной сети

В дальнейшем используются обозначения из пункта 2.4.1.2: $u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $i_\kappa = \overline{0, N_\kappa}$, $\kappa = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, K}$. Введем обозначение

$$\hat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j+1}, \quad \bar{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j, \quad \check{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j-1}, \quad u_{t^0} = \frac{\hat{u} - \check{u}}{2\tau}.$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial u(x, t)_{\mathfrak{S}_k}}{\partial t} \sim u_{t^0_{\mathfrak{S}_k}} = \frac{u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k}^{j+1} - u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k}^{j-1}}{2\tau}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, M},$$

Рассмотрим трехслойную разностную симметричную схему с весовым параметром σ (σ – вещественные числа):

$$u_{t^0_{\mathfrak{S}_k}} + L_h u_{\mathfrak{S}_k}^{(\sigma)} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (2.35)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{0, i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k}, \quad u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k}^1 = \varphi_{1, i_1, i_2, \dots, i_n, \mathfrak{S}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \partial\mathfrak{S}}^j = 0, \quad (2.36)$$

где $u^{(\sigma)} = \sigma\hat{u} + (1-2\sigma)\bar{u} + \sigma\check{u}$; L_h определяется в пункте 2.4.1.2.

2.4.3 Трехслойная разностная несимметричная схема с весовыми параметрами для уравнения переноса

2.4.3.1 Трехслойная разностная несимметричная схема на одномерной сети

Используем следующие соотношения для u_i^j , $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{0, K}$:

$$\hat{u} = u_i^{j+1}, \quad \bar{u} = u_i^j, \quad \check{u} = u_i^{j-1},$$

$$u_t = \frac{1}{\tau}(\hat{u} - \bar{u}), \quad u_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(\bar{u} - \check{u}), \quad u_t^{(\sigma)} = \sigma u_t + (1-\sigma)u_{\bar{t}}.$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial t} \sim u_{t_{\gamma_k}}^{(\sigma)} = \sigma u_{t_{\gamma_k}} + (1-\sigma)u_{\bar{t}_{\gamma_k}},$$

Рассмотрим трехслойную разностную несимметричную схему с весовыми параметрами σ , σ_1 и σ_2 (σ , σ_1 и σ_2 – действительные числа):

$$u_{i_{\gamma k}}^{(\sigma)} + L_h u_{i_{\gamma k}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = f_{i_{\gamma k}}^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.37)$$

$$u_{i_{\gamma k}}^0 = \varphi_{0 i_{\gamma k}}, \quad u_{i_{\gamma k}}^1 = \varphi_{1 i_{\gamma k}},$$

$$u_{i_{\partial \Gamma}}^j = 0, \quad (2.38)$$

где $u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \bar{u} + \sigma_2 \check{u}$; L_h определяется в пункте 2.4.1.1.

2.4.3.2 Трехслойная разностная несимметричная схема на многомерной сети

Как и выше, используем следующие соотношения для $u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $i_\kappa = \overline{0, N_\kappa}$, $\kappa = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, K}$:

$$\hat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j+1}, \quad \bar{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j, \quad \check{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j-1},$$

$$u_t = \frac{1}{\tau} (\hat{u} - \bar{u}), \quad u_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau} (\bar{u} - \check{u}), \quad u_{t^e} = \frac{1}{2\tau} (\hat{u} - \check{u}), \quad u_{\bar{t}^e} = \frac{1}{2\tau} (\hat{u} - 2\bar{u} + \check{u}),$$

$$u_t^{(\sigma)} = \sigma u_t + (1 - \sigma) u_{\bar{t}}, \quad u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \bar{u} + \sigma_2 \check{u}.$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial u(x, t)_{\bar{\Delta}_k}}{\partial t} \sim u_{t_{\bar{\Delta}_k}}^{(\sigma)} = \sigma u_{t_{\bar{\Delta}_k}} + (1 - \sigma) u_{\bar{t}_{\bar{\Delta}_k}}.$$

Рассмотрим трехслойную разностную несимметричную схему с весовыми параметрами σ , σ_1 и σ_2 (σ , σ_1 и σ_2 – действительные числа):

$$u_{t_{\bar{\Delta}_k}}^{(\sigma)} + L_h u_{t_{\bar{\Delta}_k}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n, \bar{\Delta}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (2.39)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \bar{\Delta}_k}^0 = \varphi_{0 i_1, i_2, \dots, i_n, \bar{\Delta}_k}, \quad u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \bar{\Delta}_k}^1 = \varphi_{1 i_1, i_2, \dots, i_n, \bar{\Delta}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n, \partial \bar{\Delta}_k}^j = 0, \quad (2.40)$$

где L_h определяется в пункте 2.4.1.2.

2.4.4 Трехслойная разностная схема с весовыми параметрами для волнового уравнения

2.4.4.1 Трехслойная разностная схема в одномерной области

В пространстве $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Gamma_0 \subset R^1$, рассмотрим систему, описывающую колебания на сети

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Lu = f(x, t), \quad x, t \in \Gamma_T, \quad (2.41)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$u(x, t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad (2.42)$$

где оператор L определяется соотношением (2.14), $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in W_2^1(\Gamma)$.

Используем следующие соотношения для u_i^j , $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{0, K}$ [60]:

$$\hat{u} = u_i^{j+1}, \quad \bar{u} = u_i^j, \quad \check{u} = u_i^{j-1}, \quad u_{\bar{\bar{t}}} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{u} - 2\bar{u} + \check{u}).$$

Полагая приближенно (см. п. 2.3)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial t^2} \sim u_{\bar{\bar{t}}_{\gamma_k}} = \frac{u_{i_{\gamma_k}}^{j+1} - 2u_{i_{\gamma_k}}^j + u_{i_{\gamma_k}}^{j-1}}{\tau^2}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m},$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)_{\gamma_k}}{\partial t} \right|_{t=0} \sim u_{t_0_{\gamma_k}} = \frac{u_{i_{\gamma_k}}^1 - u_{i_{\gamma_k}}^0}{\tau}.$$

Дифференциальную систему (2.41), (2.42) аппроксимирует трехслойная разностная схема (частный случай):

$$u_{\bar{\bar{t}}_{\gamma_k}} + L_h \hat{u}_{\gamma_k} = f_{i_{\gamma_k}}^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.43)$$

$$u_{i_{\gamma_k}}^0 = \varphi_{0_{i_{\gamma_k}}}, \quad u_{i_{\gamma_k}}^1 = \varphi_{1_{i_{\gamma_k}}},$$

$$u_{i_{\partial\Gamma}}^j = 0, \quad (2.44)$$

где L_h определяется в пункте 2.4.1.1.

Далее рассмотрим трехслойную разностную схему с весовыми параметрами σ_1, σ_2 (σ_1, σ_2 – вещественные числа) для дифференциальной системы (2.41), (2.42):

$$u_{\bar{m}_{\gamma k}} + L_h u_{\gamma k}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = f_{i_{\gamma k}}^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.45)$$

$$u_{i_{\gamma k}}^0 = \varphi_{0 i_{\gamma k}}, \quad u_{i_{\gamma k}}^1 = \varphi_{1 i_{\gamma k}},$$

$$u_{i_{\partial \Gamma}}^j = 0, \quad (2.46)$$

где $u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \bar{u} + \sigma_2 \check{u}$.

2.4.4.2 Трехслойная разностная схема на многомерной сети

В пространстве $W_0^{1,0}(\mathfrak{T}_T)$, $\mathfrak{T}_T = \mathfrak{T} \times (0, T)$, $\mathfrak{T} \subset R^n$ ($n = 2, 3$), рассмотрим систему, описывающую процесс колебаний на многомерной сети

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Lu = f(x, t), \quad x, t \in \mathfrak{T}_T, \quad (2.47)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$u(x, t)|_{x \in \partial \mathfrak{T}} = 0, \quad (2.48)$$

где оператор L определяется соотношением (2.18), $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{T}_T)$, $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in W_0^1(\mathfrak{T})$.

Используем следующие соотношения для $u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $i_\kappa = \overline{0, N_\kappa}$, $\kappa = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, K}$:

$$\hat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j+1}, \quad \bar{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j, \quad \check{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j-1},$$

$$u_{t_0} = \frac{1}{\tau} (u^1 - u^0), \quad u_t = \frac{1}{\tau} (\hat{u} - \bar{u}), \quad u_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau} (\bar{u} - \check{u}), \quad u_{t_0} = \frac{1}{2\tau} (\hat{u} - \check{u}),$$

$$u_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau^2} (\hat{u} - 2\bar{u} + \check{u}), \quad u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \bar{u} + \sigma_2 \check{u}.$$

Так как (пункт 2.3)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)_{\mathfrak{T}_k}}{\partial t^2} \sim u_{\bar{t}_{\mathfrak{T}_k}} = \frac{u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{T}_k}^{j+1} - 2u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{T}_k}^j + u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{T}_k}^{j-1}}{\tau^2}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \sim u_{t_0 \mathfrak{S}_k} = \frac{u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^1 - u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0}{\tau}.$$

Дифференциальную систему (2.47), (2.48) аппроксимирует трехслойная разностная схема (частный случай):

$$u_{\bar{t} \mathfrak{S}_k} + L_h \hat{u}_{\mathfrak{S}_k} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{0 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}, \quad u_{t_0 \mathfrak{S}_k} = \varphi_{1 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \partial \mathfrak{S}}^j = 0, \quad (2.50)$$

Далее рассмотрим трехслойную разностную схему с весовыми параметрами σ_1, σ_2 (σ_1, σ_2 – вещественные числа) для дифференциальной системы (2.47), (2.48):

$$u_{\bar{t} \mathfrak{S}_k} + L_h u_{\mathfrak{S}_k}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{0 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}, \quad u_{t_0 \mathfrak{S}_k} = \varphi_{1 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \partial \mathfrak{S}}^j = 0, \quad (2.52)$$

где L_h определяется в пункте 2.4.1.2.

Выводы

1. Рассмотрены аппроксимации дифференциального оператора на одномерной и многомерной сети.
2. Для эволюционных дифференциальных систем, определенных в одномерной области и многомерной области, построены разностные системы, для которых сформированы двух- и трехслойные разностные схемы; свойства, полученных схем не отличаются от таковых для исходных систем.
3. Используя множества разностных схем с параметрами на одномерной и многомерной сетях, разработаны двух- и трехслойные разностные схемы, не изменяющие свойств изучаемых сетеподобных процессов.

Глава 3 Обоснование разностных схем эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях

В традиционно принятой инженерной практике вопросы анализа стабильности потоковых и волновых явлений, которые сопровождают процесс переноса (прежде всего через узловое места ветвлений носителя процесса) транспортируемого продукта [53, 55], играют ключевую роль (стабильность процесса понимается в смысле наличия свойств, описывающих установившийся режим, который характеризуется заданными рамками отклонений от технологических норм при осуществлении этого процесса). Эти же вопросы представляют интерес при анализе переноса теплоты и сопровождающих этот процесс волновых эффектов по поверхностям примыкания слоев в композиционных материалах (композитах). Отметим, что все названные процессы обладают свойством стабильности, если достаточно малый уровень отклонения установленных норм основных исходных характеристик процессов не влечет за собой существенного изменения количественных показателей указанных характеристик.

В данной главе используется аппроксимации дифференциальных выражений их разностными аналогами, представленные в пунктах 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, дискретными формализмами которых описываются количественные характеристики сетеподобных эволюционных процессов. Обоснование разностных схем содержит в себе прежде всего анализ устойчивости (условной устойчивости), которая во многом гарантирует сходимость этих схем, а значит стабильность потоковых и волновых явлений. При этом используются результаты исследований, представленных работами [60, с. 346, 61, с. 572] (для дифференциально-разностных схем полный анализ устойчивости содержится в работах [49, 76, 77, 82 83, 84, 86]). Отличительная особенность представленного ниже анализа (в этом заключается и сложность анализа) состоит в неклассической структуре носителей сетеподобных процессов (результаты главы 2). Другой отличительной особенностью является использование так называемых в

литературе (см., например, [60, с. 346]) составных норм, тесно связанные с энергетическими тождествами для трехслойных разностных схем.

В исследовании не преследуется цель рассмотрения общего случая – анализ устойчивости трехслойных разностных несимметричных схем с весовыми параметрами для систем переноса сплошных сред, так как в инженерной практике предпочтение отдается свойству простоты применяемых средств математического инструментария точности (уровню погрешности), которая (точность) достигается и достаточно эффективно реализуется с помощью современных мощных компьютеров с глубоким математическим оснащением (аппаратом). Поэтому мы остановимся на анализе совокупности формирующих инженерный пакет разностных схем, дающей возможность соединить в себе простоту использования на практике и достаточную точность при вычислениях по этим схемам.

Остановимся на анализе устойчивости достаточно распространенных в приложениях разностных схем многомерных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов сплошных сред, а также процессов переноса по композиционным средам (композитам). При анализе указанных процессов в одномерных носителях (сетях) все рассуждения дословно повторяются.

3.1 Устойчивость двухслойной разностной схемы для уравнения переноса

Исследуется устойчивость двухслойной разностной схемы (2.29) для уравнения переноса (см. пункт 2.4.1.2), при этом используется упрощенная символика: символы \widehat{u}_{τ_k} и $u_{t_{\tau_k}}$ заменены на \widehat{u} и u_t , соответственно (индексы i_1, i_2, \dots, i_n также опущены). В таких предположениях разностная схема (2.29) принимает вид

$$\begin{aligned} u_t + L_h \widehat{u} &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу линейности решение (3.1) имеет вид $u = \bar{u} + \tilde{u}$, где: \bar{u} удовлетворяет

$$u_t + L_h \bar{u} = 0, \quad u^0 = \varphi, \quad (3.2)$$

\tilde{u} удовлетворяет

$$u_t + L_h \hat{u} = f^j, u^0 = 0. \quad (3.3)$$

Используется определение устойчивости, приведенное в [60, с. 357].

Определение 3.1. Двухслойная разностная схема (3.1) называется устойчивой:

1) по начальным данным φ , если для (3.2)

$$\|u^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|\varphi\|_{(1,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) по правой части f^j , если для (3.3)

$$\|u^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

здесь $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от h , τ , φ , f^j ; через $\|\cdot\|_{(1,h)}$, $\|\cdot\|_{(2,h)}$ обозначены нормы множеств Ψ_h и Φ_h , соответственно Ψ_h и Φ_h – множества сеточных функций, соответствующих функциям пространства $W_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$.

Умножив (3.1) скалярно на $2\tau u_t = 2(\hat{u} - \bar{u})$

$$2\tau(u_t, u_t) + 2\tau(L_h \hat{u}, u_t) = 2\tau(f^j, u_t), \quad (3.4)$$

и используя формулу

$$\bar{u} = \frac{\hat{u} + \bar{u}}{2} - \frac{\hat{u} - \bar{u}}{2} = \frac{1}{2}(\hat{u} + \bar{u}) - \frac{\tau}{2}u_t,$$

перепишем (3.4):

$$2\tau \left(\left(I - \frac{\tau}{2} L_h \right) u_t, u_t \right) + (L_h(\hat{u} + \bar{u}), (\hat{u} - \bar{u})) = 2\tau(f^j, u_t), \quad (3.5)$$

В силу соотношений $(L_h \bar{u}, \hat{u}) = (\bar{u}, L_h \hat{u}) = (L_h \hat{u}, \bar{u})$ имеем

$$(L_h(\hat{u} + \bar{u}), (\hat{u} - \bar{u})) = (L_h \hat{u}, \hat{u}) - (L_h \bar{u}, \bar{u}). \quad (3.6)$$

Учитывая соотношение (3.6) в представлении (3.5), приходим к соотношению

$$2\tau \left(\left(I - \frac{\tau}{2} L_h \right) u_t, u_t \right) + (L_h \hat{u}, \hat{u}) = (L_h \bar{u}, \bar{u}) + 2\tau(f^j, u_t), \quad (3.7)$$

которое определяет энергетическое тождество.

Исследование устойчивости (3.1) по начальным данным – будем оценивать решение задачи (3.2). Из энергетического тождества (3.7) для (3.2) ($f^j = 0$) получим

$$2\tau \left(\left(I - \frac{\tau}{2} L_h \right) u_t, u_t \right) + (L_h \hat{u}, \hat{u}) = (L_h \widehat{u}, \widehat{u}), \quad (3.8)$$

из которого при $I \geq \frac{\tau}{2} L_h$, тогда из (3.8) вытекает

$$(L_h \hat{u}, \hat{u}) \leq (L_h \widehat{u}, \widehat{u}),$$

$$\|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2, \quad j = \overline{1, K-1}.$$

Неравенство $\|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2$ задает цепочку неравенств

$$\|u^{j+1}\|_{L_h} \leq \|u^j\|_{L_h} \leq \dots \leq \|u^0\|_{L_h} = \|\varphi\|,$$

выполнено первое утверждение определения 3.1.

Пусть $B_h u = \left(I - \frac{\tau}{2} L_h \right) u$. Тогда энергетическое тождество (3.7) принимает

вид

$$2\tau (B_h u_t, u_t) + (L_h \hat{u}, \hat{u}) = (L_h \widehat{u}, \widehat{u}) + 2\tau (f^j, u_t). \quad (3.9)$$

Используя неравенство Коши - Буняковского

$$2\tau (f^j, u_t) \leq 2\tau \|f^j\|_{B_h} \|u_t\|_{B_h} \leq 2\tau c_0 \|u_t\|_{B_h}^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f^j\|_{B_h}^2,$$

тогда из (3.9) приходим к неравенству

$$2\tau \|u_t\|_{B_h}^2 + \|\hat{u}\|_{L_h}^2 \leq \|\widehat{u}\|_{L_h}^2 + 2\tau c_0 \|u_t\|_{B_h}^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f^j\|_{B_h}^2,$$

выбирая $c_0 = 1$, получим

$$\|\hat{u}\|_{L_h}^2 \leq \|\widehat{u}\|_{L_h}^2 + \frac{\tau}{2} \|f^j\|_{B_h}^2,$$

или

$$\|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2 + \frac{\tau}{2} \|f^j\|_{B_h}^2, \quad (3.10)$$

последнее дает при $j' = 1, 2, \dots, j$ ($j \leq K-1$)

$$\|u^{j+1}\|_{L_h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j'=1}^j \tau \|f^{j'}\|_{B_h}^2 \right)^{1/2},$$

если

$$\left(\sum_{j'=1}^j \tau \|f^{j'}\|_{B_h}^2 \right)^{1/2} = \|f^j\|_{(2,h)},$$

тогда

$$\|u^{j+1}\|_{L_h} \leq C_2 \|f^j\|_{(2,h)}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т.е. выполнено первое утверждение определения 3.1.

Если

$$B_h \geq \varepsilon I + \frac{\tau}{2} L_n, \quad (3.11)$$

то в силу (3.7), учитывая неравенство Коши – Буняковского совместно с произвольным $\varepsilon > 0$, приходим к неравенству

$$2\tau(f^j, u_t) \leq 2\tau \|f^j\| \|u_t\| \leq 2\tau\varepsilon \|u_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f^j\|^2,$$

используя которое вместе (3.11) в соотношении (3.9), получаем

$$\|\hat{u}\|_{L_h}^2 \leq \|\hat{u}\|_{L_h}^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f^j\|^2 \quad \text{или} \quad \|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f^j\|^2,$$

из которого нетрудно заметить следует неравенство

$$\|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^0\|_{L_h}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|f^{j'}\|^2. \quad (3.12)$$

3.2 Устойчивость двухслойной разностной схемы с весовым параметром для уравнения переноса

Рассматривается разностная схема (2.31) пункта 2.4.1.2 главы 2 (для разностной схемы уравнения переноса индексы i_1, i_2, \dots, i_n и \mathfrak{F}_k не используются).

В таких предположениях разностная схема (2.31) принимает вид

$$\begin{aligned} u_t + L_h u^{(\sigma)} &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

и (3.13) образует множество разностных схем в зависимости от выбора числового параметра σ .

Ясно, что $\sigma \hat{u} + (1 - \sigma) \bar{u} = \bar{u} + \tau \sigma u_t$. Вводя операторное обозначение $D_h u = (I + \sigma \tau L_h) u$, перепишем (3.13) в виде

$$\begin{aligned} D_h u_t + L_h \bar{u} &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу линейности решение (3.13) имеет вид $u = \bar{u} + \tilde{u}$, где:

\bar{u} удовлетворяет

$$D_h u_t + L_h \bar{u} = 0, \quad u^0 = \varphi, \quad (3.15)$$

\tilde{u} удовлетворяет

$$D_h u_t + L_h \bar{u} = f^j, \quad u^0 = 0, \quad (3.16)$$

Снова, как и выше, используется определение устойчивой схемы из монографии [60, с. 357] применительно (3.13).

Определение 3.2. *Схема (3.13) называется устойчивой*

1) *по начальным данным φ , если для (3.15)*

$$\|u^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|\varphi\|_{(1,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) *по правой части f^j , если для (3.16)*

$$\|u^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

здесь $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от h , τ , φ , f^j ; через $\|\cdot\|_{(1,h)}$, $\|\cdot\|_{(2,h)}$ обозначены нормы множеств Ψ_h и Φ_h , соответственно.

Умножая операторное соотношение (3.14) на $2\tau u_t = 2(\hat{u} - \bar{u})$, $\hat{u} = \frac{\hat{u} + \bar{u}}{2} - \frac{\hat{u} - \bar{u}}{2} = \frac{1}{2}(\hat{u} + \bar{u}) - \frac{\tau}{2} u_t$, и используя равенство (3.6), получим энергетическое тождество для схемы (3.14):

$$2\tau\left(\left(D_h - \frac{\tau}{2}L_h\right)u_t, u_t\right) + (L_h\hat{u}, \hat{u}) = (L_h\hat{u}, \hat{u}) + 2\tau(f^j, u_t), \quad (3.17)$$

неравенство (3.17) для задачи (3.15) примет вид

$$2\tau\left(\left(D_h - \frac{\tau}{2}L_h\right)u_t, u_t\right) + (L_h\hat{u}, \hat{u}) = (L_h\hat{u}, \hat{u}). \quad (3.18)$$

Пусть

$$D_h - \frac{\tau}{2}L_h = I + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L_h \geq 0, \quad (3.19)$$

из неравенств $L_h \leq \|L_h\|I$ и $I \geq L_h / \|L_h\|$ следует неравенство

$$I + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L_h \geq \left(\frac{1}{\|L_h\|} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\right)L_h \geq 0,$$

что означает эквивалентность неравенства (3.19) параметрическому неравенству

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|L_h\|}. \quad (3.20)$$

Следствием соотношений (3.20), (3.18) является неравенство

$$(L_h\hat{u}, \hat{u}) \leq (L_h\hat{u}, \hat{u}),$$

т.е. неравенство

$$\|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2,$$

которое формирует при изменении $j' = 1, 2, \dots, j$ ($j \leq K-1$) оценку

$$\|u^{j+1}\|_{L_h} \leq \|\varphi\|_{L_h},$$

а значит, выполнено первое утверждение определения 3.2 – схема (3.13) устойчива по начальным данным.

Из энергетического тождества (3.17) для задачи (3.16) следует

$$2\tau(R_h u_t, u_t) + (L_h\hat{u}, \hat{u}) = (L_h\hat{u}, \hat{u}) + 2\tau(f^j, u_t), \quad R_h = \left(D_h - \frac{\tau}{2}L_h\right), \quad (3.21)$$

вместе с оценкой

$$2\tau(f^j, u_t) \leq 2\tau c_0 \|u_t\|_{R_h}^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f^j\|_{R_h}^2,$$

а из соотношения (3.21) – оценка

$$2\tau \|u_t\|_{R_h}^2 + \|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2 + 2\tau c_0 \|u_t\|_{R_h}^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f^j\|_{R_h}^2.$$

Положим $c_0 = 1$ и учитывая соотношение (3.20), приходим к оценке

$$\|u^{j+1}\|_{L_h}^2 \leq \|u^j\|_{L_h}^2 + \frac{\tau}{2} \|f^j\|_{R_h}^2, \quad (3.22)$$

учитывая $\|u^0\| = 0$ и изменение $j' = 1, 2, \dots, j$, нетрудно убедиться в том, что имеет место второе утверждение определения 3.2.

3.3 Устойчивость трехслойной разностной схемы с весовым параметром для уравнения переноса

Рассматривается симметричная разностная схема (2.35) пункта 2.4.2.2 главы 2. Как и выше в п. 3.2, для разностной схемы уравнения переноса индексы i_1, i_2, \dots, i_n и \mathfrak{Z}_k также не используются. В таких предположениях разностная схема (2.35) принимает вид

$$\begin{aligned} u_{t_0} + L_h u^{(\sigma)} &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi_0, \quad u^1 = \varphi_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ясно, что $\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma) \bar{u} + \sigma \tilde{u} = \bar{u} + \tau^2 u_{\bar{t}}$ приведем схему (3.23) к виду

$$\begin{aligned} u_{t_0} + \sigma \tau^2 L_h u_{\bar{t}} + L_h \bar{u} &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi_0, \quad u^1 = \varphi_1. \end{aligned}$$

В силу линейности решение (3.23) имеет вид $u = \bar{u} + \tilde{u}$, где:

\bar{u} – решение задачи

$$u_{t_0} + \sigma \tau^2 L_h u_{\bar{t}} + L_h \bar{u} = 0, \quad u^0 = \varphi_0, \quad u^1 = \varphi_1, \quad (3.24)$$

а \tilde{u} – решение задачи

$$u_{t_0} + \sigma \tau^2 L_h u_{\bar{t}} + L_h \tilde{u} = f^j, \quad u^0 = u^1 = 0. \quad (3.25)$$

Для изучения устойчивости трехслойной схемы (3.23) будем использовать составную норму вида

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4} \|u^{j+1} + u^j\|_{(1,h)}^2 + \|u^{j+1} - u^j\|_{(2,h)}^2,$$

$$\|U^1\|^2 = \frac{1}{4} \|u^1 + u^0\|_{(1,h)}^2 + \|u^1 - u^0\|_{(2,h)}^2,$$

$\|\cdot\|_{(1,h)}, \|\cdot\|_{(2,h)}$ – другие нормы множества сеточных функций Ψ_h .

Определение 3.3 [60, с. 385] Схема (3.23) называется устойчивой

1) по φ_0, φ_1 , если для (3.24)

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|U^1\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) по f^j , если для (3.25)

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(3,h)}, \quad j = \overline{1, K-1}.$$

Постоянные $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не связаны с h, τ, φ, f^j ; $\|\cdot\|_{(1,h)}, \|\cdot\|_{(2,h)}$ и

$\|\cdot\|_{(3,h)}$ – выбраны для Ψ_h и Φ_h , соответственно.

Учитывая, что $\hat{u} = \frac{1}{2}(\hat{u} + \check{u}) - \frac{1}{2}(\hat{u} - 2\hat{u} + \check{u}) = \frac{1}{2}(\hat{u} + \check{u}) - \frac{\tau^2}{2}u_{\bar{u}}$, перепишем

(3.23) в виде

$$Iu_{t^0} + B_h u_{\bar{u}} + \frac{1}{2} L_h(\hat{u} + \check{u}) = f^j, \quad B_h = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \tau^2 L_h, \quad (3.26)$$

где I – единичный оператор.

Умножим скалярно (3.26) на $2\tau u_{t^0} = \tau(u_t + u_{\bar{t}}) = \hat{u} - \check{u}$ учитывая $\tau u_{\bar{u}} = u_t - u_{\bar{t}}$,

получим

$$2\tau(Iu_{t^0}, u_{t^0}) + (B_h(u_t - u_{\bar{t}}), u_t + u_{\bar{t}}) + \frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) = 2\tau(f^j, u_{t^0}). \quad (3.27)$$

Нетрудно заметить, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (B_h(u_t - u_{\bar{t}}), u_t + u_{\bar{t}}) &= (B_h u_t, u_t) - (B_h u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}), \\ \frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) &= \frac{1}{2}(L_h \hat{u}, \hat{u}) - \frac{1}{2}(L_h \check{u}, \check{u}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) = \frac{1}{2}[(L_h \hat{u}, \hat{u}) + (L_h \check{u}, \check{u})] - \frac{1}{2}[(L_h \hat{u}, \check{u}) + (L_h \check{u}, \hat{u})]. \quad (3.29)$$

Пусть L_h – самосопряженный оператор. Тогда

$$\begin{aligned} (L_h(v+z), v+z) + (L_h(v-z), v-z) &= [(L_h v, v) + 2(L_h v, z) + (L_h z, z)] + \\ &+ [(L_h v, v) - 2(L_h v, z) + (L_h z, z)] = 2[(L_h v, v) + (L_h z, z)] \end{aligned}$$

для любых элементов $v, z \in \Psi_h$. Отсюда

$$(L_h v, v) + (L_h z, z) = \frac{1}{2}(L_h(v+z), v+z) + \frac{1}{2}(L_h(v-z), v-z). \quad (3.30)$$

Полагая в (3.30) $v = \hat{u}$, $z = \tilde{u}$ а затем $v = \hat{u}$, $z = \check{u}$ преобразуем (3.29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \tilde{u}), \hat{u} - \tilde{u}) &= \frac{1}{4}[(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + (L_h(\hat{u} - \hat{u}), \hat{u} - \hat{u})] - \\ &\quad - \frac{1}{4}[(L_h(\hat{u} + \tilde{u}), \hat{u} + \tilde{u}) + (L_h(\hat{u} - \tilde{u}), \hat{u} - \tilde{u})], \end{aligned} \quad (3.31)$$

и подставим (3.31) и (3.28) в (3.27). Так как

$$(L_h(\hat{u} - \hat{u}), \hat{u} - \hat{u}) = \tau^2(L_h u_t, u_t), \quad (L_h(\hat{u} - \tilde{u}), \hat{u} - \tilde{u}) = \tau^2(L_h u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}),$$

получаем энергетическое тождество для схемы (3.27):

$$\begin{aligned} 2\tau(Iu_{t^0}, u_{t^0}) + \left[\frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + ((B_h + \frac{\tau^2}{4}L_h)u_t, u_t) \right] &= \\ = \left[\frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \tilde{u}), \hat{u} + \tilde{u}) + ((B_h + \frac{\tau^2}{4}L_h)u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}) \right] + 2\tau(f^j, u_{t^0}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

или, учитывая $B_h = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau^2 L_h$,

$$\begin{aligned} 2\tau(Iu_{t^0}, u_{t^0}) + \left[\frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + (((\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 L_h)u_t, u_t) \right] &= \\ = \left[\frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \tilde{u}), \hat{u} + \tilde{u}) + (((\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 L_h)u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}) \right] + 2\tau(f^j, u_{t^0}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Для задачи (3.24), равенство (3.33) трансформируется в равенство

$$2\tau(Iu_{t^0}, u_{t^0}) + \|U^{j+1}\|^2 = \|U^j\|^2, \quad (3.34)$$

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + (((\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 L_h)u_t, u_t),$$

$$\|U^j\|^2 = \frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \tilde{u}), \hat{u} + \tilde{u}) + (((\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 L_h)u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}),$$

и следовательно,

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4}\|u^{j+1} + u^j\|_{L_h}^2 + \|u^{j+1} - u^j\|_{\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)L_h}^2. \quad (3.35)$$

Отсюда

$$\|U^{j+1}\|^2 > 0, u^j \neq 0, u^{j+1} \neq 0,$$

т.к. имеет место $L_h > 0$, $\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)L_h > 0$. Соотношение (3.34) дает

$$\|U^{j+1}\|^2 \leq \|U^j\|^2, \|U^{j+1}\| \leq \|U^j\| \leq \dots \leq \|U^1\|.$$

и тогда для (3.23) выполнено утверждение 1 определения 3.3.

Проведем анализ задачи (3.25). Для нее из (3.33) получаем

$$2\tau(Iu_{i_0}, u_{i_0}) + \|U^{j+1}\|^2 = \|U^j\|^2 + 2\tau(f^j, u_{i_0}), \quad (3.36)$$

а также

$$2\tau(f^j, u_{i_0}) \leq \tau\varepsilon_0 \|u_{i_0}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|f^j\|^2,$$

$\varepsilon_0 = const > 0$, не связанная с h , τ . Если $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$, то учитывая (3.36), получим оценку

$$\|U^{j+1}\|^2 \leq \|U^j\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f^j\|^2.$$

Учитывая $\|U^1\| = 0$ и изменение $j' = 1, 2, \dots, j$, нетрудно убедиться в том, что имеет место второе утверждение определения 3.3 для схемы (3.23).

3.4 Устойчивость трехслойной разностной схемы для волновой системы с сетеподобным носителем

Рассматривается трехслойная разностная схема (2.49) пункта 2.4.4.2 главы 2. Как и выше в разделе 3.2, индексы i_1, i_2, \dots, i_n и \mathfrak{I}_k также не используются. В таких предположениях разностная схема (2.49) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{\bar{n}} + L_h \hat{u} &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi_0, \quad u_{i_0} = \varphi_1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В силу линейности решение (3.37) имеет вид $u = \bar{u} + \tilde{u}$, где:

\bar{u} – решение задачи

$$u_{\bar{n}} + L_h \hat{u} = 0, \quad u^0 = \varphi_0, \quad u_{i_0} = \varphi_1. \quad (3.38)$$

а \tilde{u} – решение задачи

$$u_{\bar{t}} + L_h \hat{u} = f^j, u^0 = u^1 = 0. \quad (3.39)$$

Для изучения устойчивости трехслойной схемы (3.37) будем использовать составную норму вида Для изучения устойчивости трехслойной схемы (3.37) используется, как и в разделе 3.2, норма

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4} \|u^{j+1} + u^j\|_{(1,h)}^2 + \|u^{j+1} - u^j\|_{(2,h)}^2,$$

$$\|U^1\|^2 = \frac{1}{4} \|u^1 + u^0\|_{(1,h)}^2 + \|u^1 - u^0\|_{(2,h)}^2,$$

$\|\cdot\|_{(1,h)}, \|\cdot\|_{(2,h)}$ – выбраны для пространства Ψ_h .

Определение 3.4 [60, с. 385] *Схема (3.37) называется устойчивой*

1) по φ_0, φ_1 , если для (3.38) справедливо соотношение

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|U^1\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) по f^j , если для (3.39) справедливо соотношение

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(3,h)}, \quad j = \overline{1, K-1}.$$

Постоянные $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не связаны с $h, \tau, \varphi_0, \varphi_1, f^j$; $\|\cdot\|_{(1,h)}, \|\cdot\|_{(2,h)}$ и $\|\cdot\|_{(3,h)}$ – выбраны для Ψ_h и Φ_h , соответственно.

Обозначив через $B_h u = \tau L_h u$ и $\hat{u} = \frac{1}{2}(\hat{u} + \check{u}) + \frac{1}{2}(\hat{u} - \check{u}) = \frac{1}{2}(\hat{u} + \check{u}) + \tau u_{t^0}$,

получим (3.37) в виде

$$\begin{aligned} B_h u_{t^0} + I u_{\bar{t}} + \frac{1}{2} L_h (\hat{u} + \check{u}) &= f^j, \quad j = \overline{1, K-1}, \\ u^0 &= \varphi_0, \quad u_{t^0} = \varphi_1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где I – единичный оператор.

Умножим скалярно (3.40) на $2\tau u_{t^0} = \tau(u_t + u_{\bar{t}}) = \hat{u} - \check{u}$, учитывая $\tau u_{\bar{t}} = u_t - u_{\bar{t}}$, получим

$$2\tau (B_h u_{t^0}, u_{t^0}) + (I(u_t - u_{\bar{t}}), u_t + u_{\bar{t}}) + \frac{1}{2} (L_h (\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) = 2\tau (f^j, u_{t^0}). \quad (3.41)$$

Так как L_h – самосопряженный оператор, имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} (I(u_t - u_{\bar{t}}), u_t + u_{\bar{t}}) &= (Iu_t, u_t) - (Iu_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}), \\ \frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) &= \frac{1}{2}(L_h\hat{u}, \hat{u}) - \frac{1}{2}(L_h\check{u}, \check{u}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) = \frac{1}{2}[(L_h\hat{u}, \hat{u}) + (L_h\hat{u}, \hat{u})] - \frac{1}{2}[(L_h\hat{u}, \hat{u}) + (L_h\check{u}, \check{u})]. \quad (3.43)$$

Кроме того, при любых $v, z \in \Psi_h$, имеет следующее соотношение (см. (3.30))

$$(L_h v, v) + (L_h z, z) = \frac{1}{2}(L_h(v+z), v+z) + \frac{1}{2}(L_h(v-z), v-z). \quad (3.44)$$

Полагая в (3.44) $v = \hat{u}$, $z = \hat{u}$, а затем $v = \hat{u}$, $z = \check{u}$ получим равенство (3.43) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} - \check{u}) &= \frac{1}{4}[(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + (L_h(\hat{u} - \hat{u}), \hat{u} - \hat{u})] - \\ &\quad - \frac{1}{4}[(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} + \check{u}) + (L_h(\hat{u} - \check{u}), \hat{u} - \check{u})], \end{aligned} \quad (3.45)$$

Учитывая соотношения (3.45), (3.42) в (3.41). получаем для (3.37):

$$\begin{aligned} 2\tau(B_h u_{t^0}, u_{t^0}) + \left[\frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + ((I + \frac{\tau^2}{4}L_h)u_t, u_t) \right] &= \\ = \left[\frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} + \check{u}) + ((I + \frac{\tau^2}{4}L_h)u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}) \right] + 2\tau(f^j, u_{t^0}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

в силу

$$\begin{aligned} (L_h(\hat{u} - \hat{u}), \hat{u} - \hat{u}) &= \tau^2(L_h u_t, u_t), \\ (L_h(\hat{u} - \check{u}), \hat{u} - \check{u}) &= \tau^2(L_h u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

Очевидные преобразования соотношения (3.46), получаем

$$2\tau(B_h u_{t^0}, u_{t^0}) + \|U^{j+1}\|^2 = \|U^j\|^2, \quad (3.47)$$

для (3.38), при этом учтены соотношения

$$\begin{aligned} \|U^{j+1}\|^2 &= \frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \hat{u}), \hat{u} + \hat{u}) + ((I + \frac{\tau^2}{4}L_h)u_t, u_t), \\ \|U^j\|^2 &= \frac{1}{4}(L_h(\hat{u} + \check{u}), \hat{u} + \check{u}) + ((I + \frac{\tau^2}{4}L_h)u_{\bar{t}}, u_{\bar{t}}), \end{aligned}$$

Последние соотношения дают

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4}\|u^{j+1} + u^j\|_{L_h}^2 + \|u^{j+1} - u^j\|_{I + \frac{\tau^2}{4}L_h}^2. \quad (3.48)$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценок

$$\|U^{j+1}\|^2 \leq \|U^j\|^2, \|U^{j+1}\| \leq \|U^j\| \leq \dots \leq \|U^1\|.$$

вытекающих из соотношения (3.47), если $B_h \geq 0$, что означает

$$\|U^{j+1}\|^2 \geq 0 \quad \forall u^j \neq 0, u^{j+1} \neq 0,$$

как следствие операторных неравенств $L_h > 0$, $I + \frac{\tau^2}{4} L_h > 0$

и тогда для (3.37) выполнено утверждение 1 определения 3.4.

Проведем анализ задачи (3.39). Для нее из (3.46) получаем

$$2\tau(B_h u_{t^0}, u_{t^0}) + \|U^{j+1}\|^2 = \|U^j\|^2 + 2\tau(f^j, u_{t^0}) \quad (3.49)$$

и оценку вида

$$2\tau(f^j, u_{t^0}) \leq \tau \varepsilon_0 \|u_{t^0}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|f^j\|^2,$$

$\varepsilon_0 = const > 0$ не связана с h , τ . Тогда нетрудно заметить при $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$ выполнение неравенства

$$\|U^{j+1}\|^2 \leq \|U^j\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f^j\|^2$$

из соотношения (3.49). Учитывая $\|U^1\| = 0$ и изменение $j' = 1, 2, \dots, j$, нетрудно убедиться в том, что имеет место второе утверждение определения 3.4 для схемы (3.37).

3.5 Устойчивость разностных схем уравнений переноса и волновых уравнений с изменяющимися на слоистой области пространственной переменными

Формализмы дискретных аналогов процессов переноса сплошных сред (тепловых процессов) и волновых процессов в слоистых носителях не отличаются от дискретных аналогов процессов в сетеподобных областях. Следует только использовать описания слоистых областей (см. п. 2.1.2 главы 2) и учитывать приведенное в п. 2.3.4 главы 2 описание дискретного аналога дифференциального

оператора на функциях с изменяющейся пространственной переменной в слоистой области. Результаты данной главы (см. разделы 3.1 – 3.4) переносятся дословно.

3.6 Рекомендации для использования разностных схем

Дискретные аналоги изучаемых процессов дают возможность достаточно глубоко анализировать их ключевые свойства, например, устойчивость разностных схем, определяющие стабильность этих процессов на предпроектной стадии. А именно, исследование устойчивости разностных схем процессов в сетеподобных носителях показывает, что представляющий интерес в приложениях различного вида имеют неявные двухслойные и трехслойные разностные схемы, как и в случаях классических носителей. Явные разностные схемы следует применять на первичной стадии экспресс-анализа сетеподобных процессов переноса сплошных сред, а также волновых процессов в слоистых носителях, в силу достаточно просто проверяемых на модели использования исходных данных в практически ориентированных задачах.

Выводы

1. Представлены пути формирования и анализа дискретных аналогов процессов эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях.
2. Предложено детальное исследование свойств стабилизации изучаемых процессов на основе анализа устойчивости разработанных двухслойных и трехслойных разностных схем дискретных аналогов процессов эволюционных процессов.
3. Сформированы достаточные условия устойчивости разностных схем, эффективно и достаточно просто проверяемых в практически ориентированных задачах.
4. Указаны рекомендации к применению разработанных разностных схем для использования в прикладных задачах.

Глава 4 Программный комплекс для решения проблемно-ориентированных задач процессов переноса и волновых процессов на сети и сетеподобных носителях

4.1 Описание структуры программного комплекса

Программная реализация алгоритмов определения приближений решений представлена в виде решений серий тестовых задач для разного вида сетей и сетеподобных областей. Разработанный программный комплекс выполнен в среде Matlab.

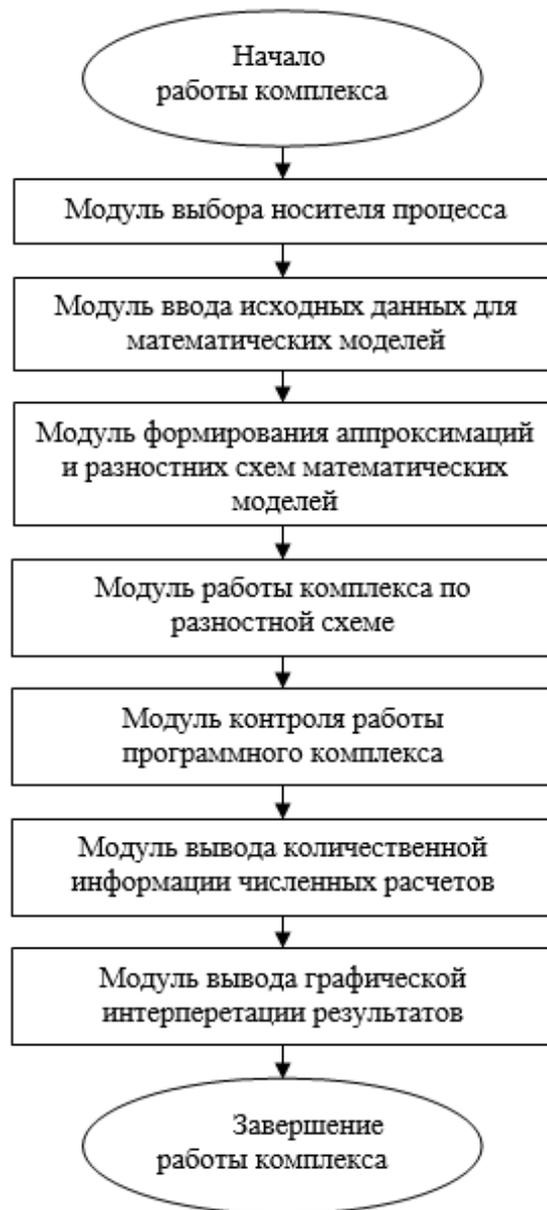


Рис. 4.1. Общая схема программного комплекса

Пользовательский интерфейс

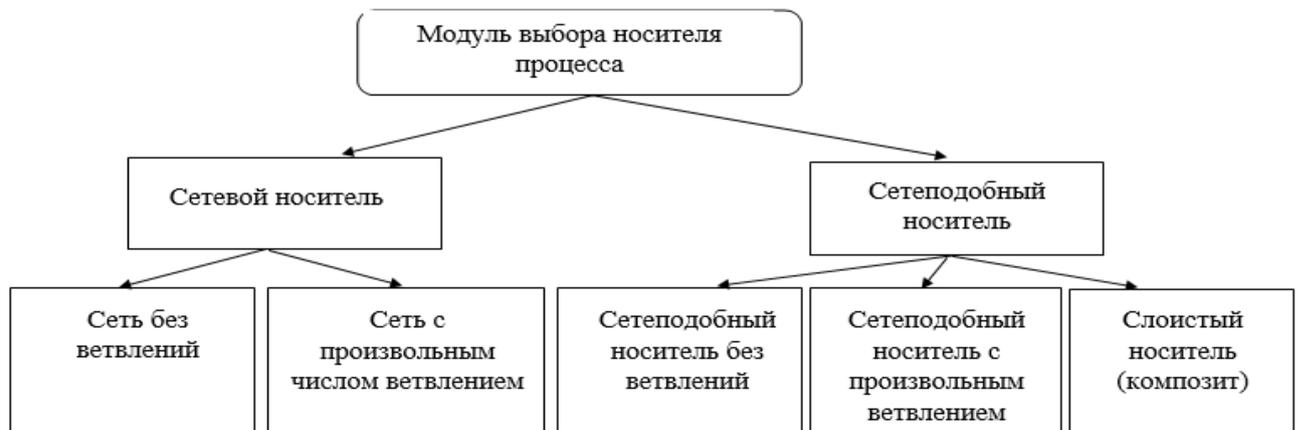
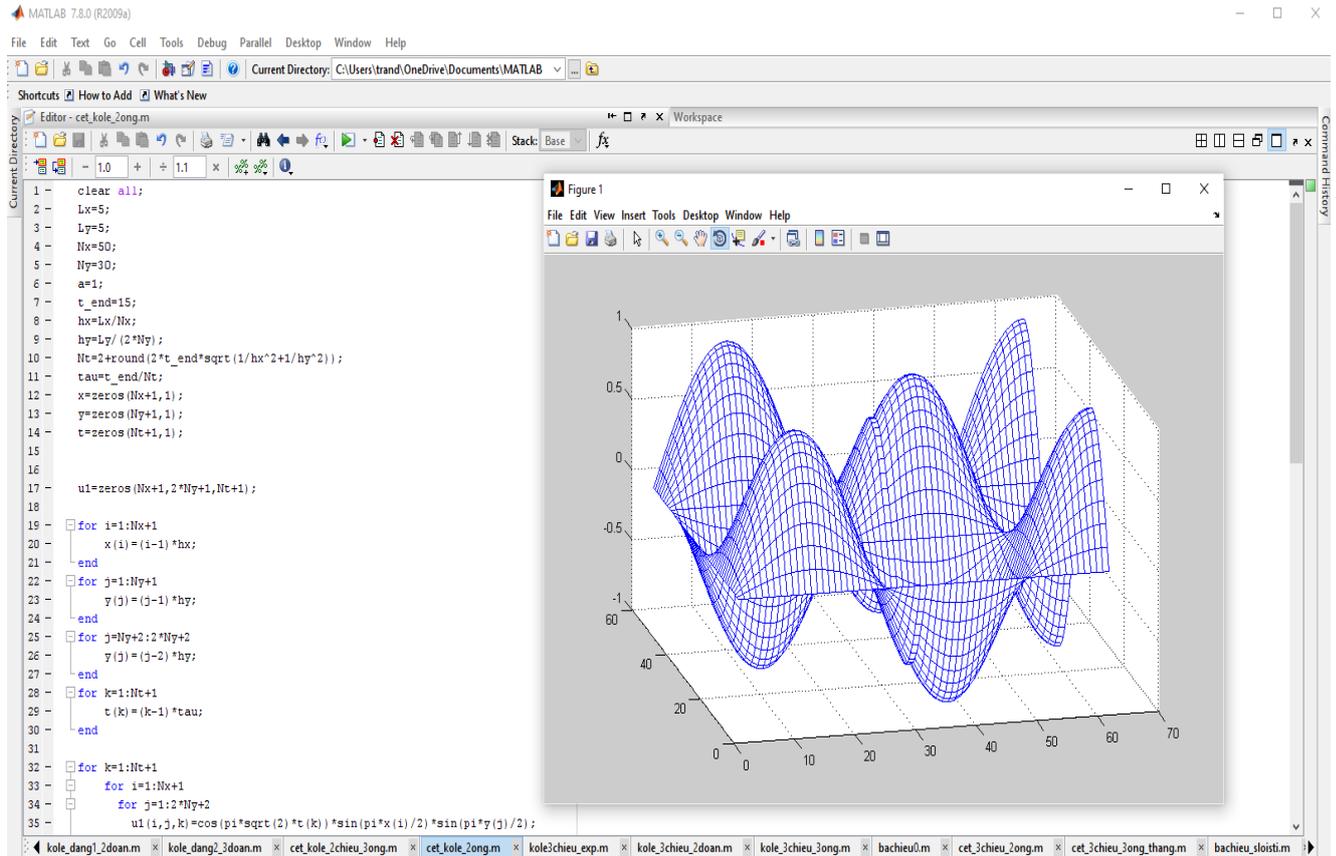


Рис. 4.2. Модуль выбора носителя процесса

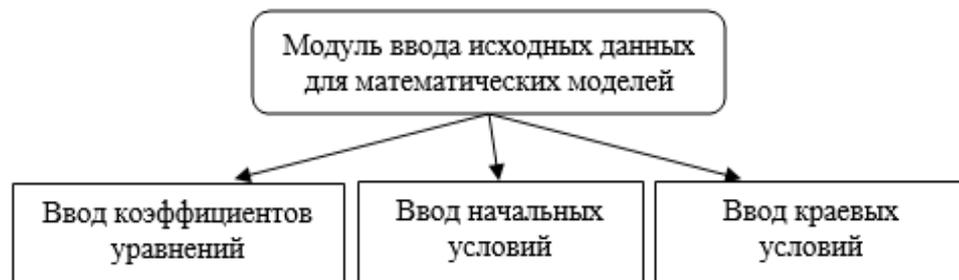


Рис. 4.3. Модуль ввода исходных данных для математических моделей

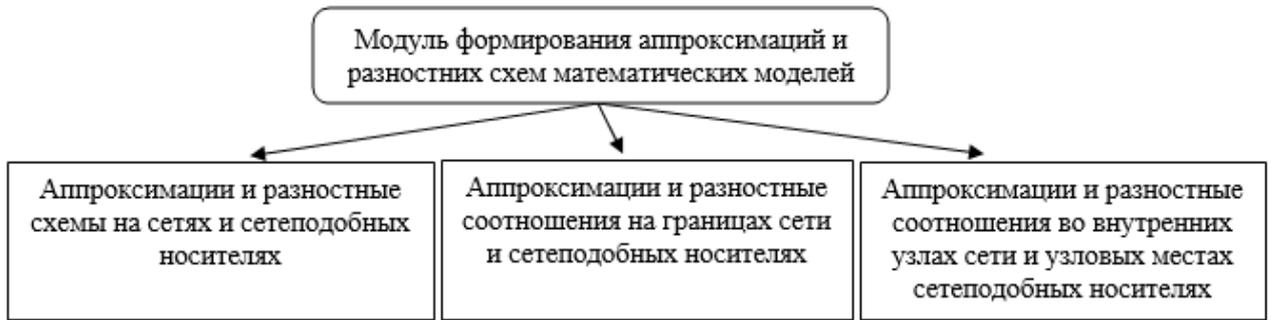


Рис. 4.4. Модуль формирования аппроксимаций и разностных схем математических моделей

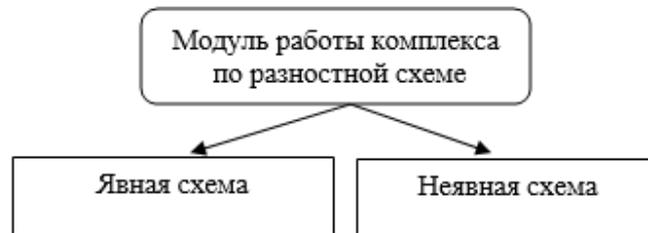


Рис. 4.5. Модуль разностной схемы

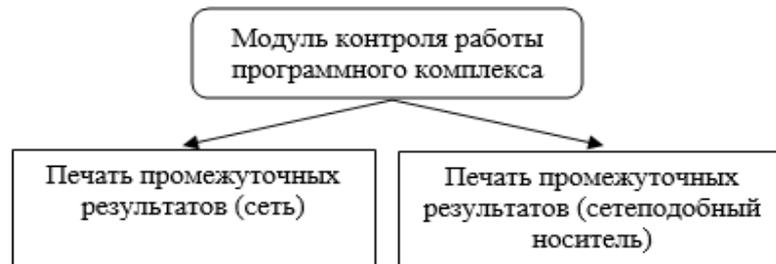


Рис. 4.6. Модуль контроля



Рис. 4.7. Модуль вывода численных расчетов



Рис. 4.8. Модуль графической интерперетации результатов

4.2 Решение тестовых задач процессов переноса и волновых процессов на сети

4.2.1 Задачи переноса сплошных сред в сети

Задача 1. Пусть $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ – сеть без ветвлений (рис. 4.9), ξ – внутренний узел, соединение ребер γ_1 и γ_2 последовательное, γ_1 и γ_2 определяются отрезками $[0, 1]$ и $[1, 2]$, соответственно.

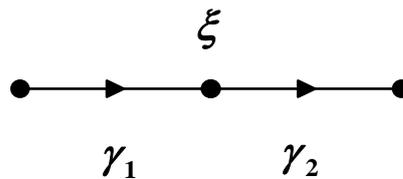


Рис. 4.9. Сеть (ветвления исключены)

Количественные характеристики $u(x, t)$ процесса переноса теплоты по сети $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (1.50)$$

соотношениями в ξ

$$u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_2}, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_2}, \quad (1.51)$$

и соотношениями

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Gamma, \quad (1.52)$$

$$u(x, t)|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x, t)|_{x=2 \in \gamma_2} = 0. \quad (1.53)$$

Соотношения (4.3) и (4.4) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.1) – (4.2) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - (u_i^j)_{\gamma_k}}{\tau} = (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^{j+1})_{\gamma_k} + (u_{i-1}^{j+1})_{\gamma_k}}{h^2} + (b_i)_{\gamma_k} (u_i^{j+1})_{\gamma_k},$$

$$i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, K-1}, k = 1, 2,$$

$$(u_N^{j+1})_{\gamma_1} = (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} = \alpha \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h},$$

$$(u_i^0)_{\gamma_k} = (\varphi_i)_{\gamma_k}, i = \overline{0, N}, k = 1, 2, (u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_N^{j+1})_{\gamma_2} = 0.$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $\varphi(x) = x(4 - x^2)$, $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $h = 0.1$, $\tau = 0.01$, $\alpha = 2$. Графическое изображение поля температур по сети $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ при различных временных значениях представлено рисунком 4.10, числовые расчеты и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.1.1 и 2.1.1, соответственно (регистрация ЭВМ-программы [63]).

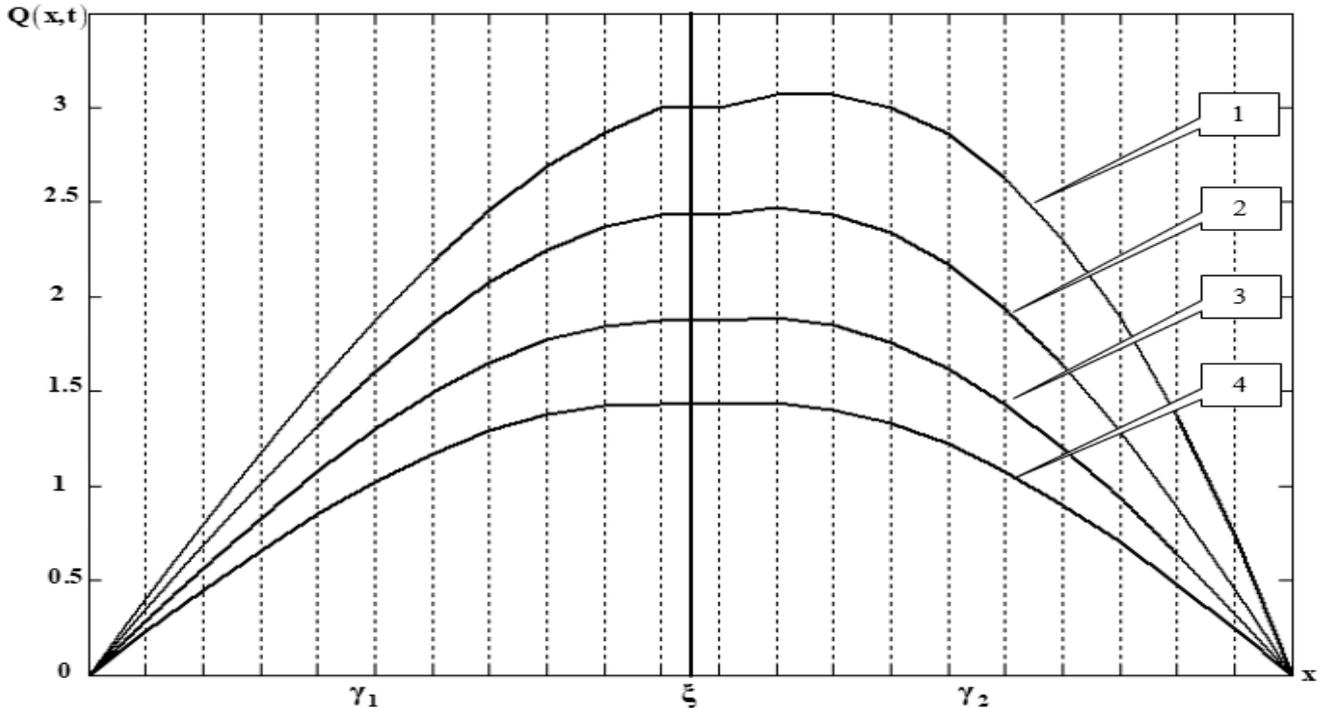


Рис. 4.10. Распределение температур на ребрах γ_k ($k = 1, 2$) сети при различных значениях t : [1] – 0; [2] – 0.1; [3] – 0.2; [4] – 0.3

Задача 2. Пусть $\Gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k$ – сеть с ветвлением в узле ξ (рис. 4.11): ребру γ_1 соответствует отрезок $[0, 1]$, ребрам γ_2, γ_3 – отрезок $[1, 2]$.

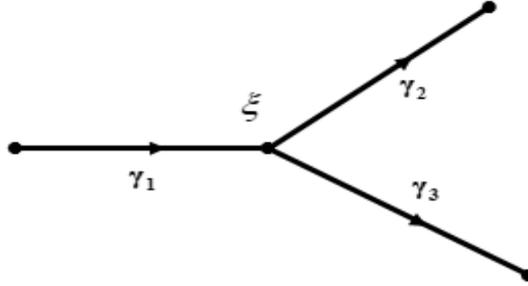


Рис. 4.11. Сеть с ветвлением

Количественные характеристики $u(x, t)$ процесса переноса теплоты по сети

$\Gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k$ определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (1.54)$$

соотношениями в ξ

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=1 \in \gamma_3}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_2} + \alpha_2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_3}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

и соотношениями

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.56)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=2 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=2 \in \gamma_3} = 0. \quad (1.57)$$

Как и выше, аналогично (4.3) и (4.4), соотношения (4.7) и (4.8) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.5) – (4.6) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - (u_i^j)_{\gamma_k}}{\tau} &= (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^{j+1})_{\gamma_k} + (u_{i-1}^{j+1})_{\gamma_k}}{h^2} + (b_i)_{\gamma_k} (u_i^{j+1})_{\gamma_k}, \\ i &= \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_N^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_2} = (u_0^{j+1})_{\gamma_3}, \\ \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} &= \alpha_1 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h} + \alpha_2 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3}}{h}, \\ (u_i^0)_{\gamma_k} &= (\varphi_i)_{\gamma_k}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_N^{j+1})_{\gamma_2} = (u_N^{j+1})_{\gamma_3} = 0. \end{aligned}$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $a(x) = 1$,

$b(x) = 0$, $h = 0.0667$, $\tau = 0.01$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 2$. Графическое изображение поля температур по сети Γ при различных временных значениях представлено рисунком 4.12, числовые расчеты и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.1.2 и 2.1.2, соответственно (регистрация ЭВМ-программы [63]).

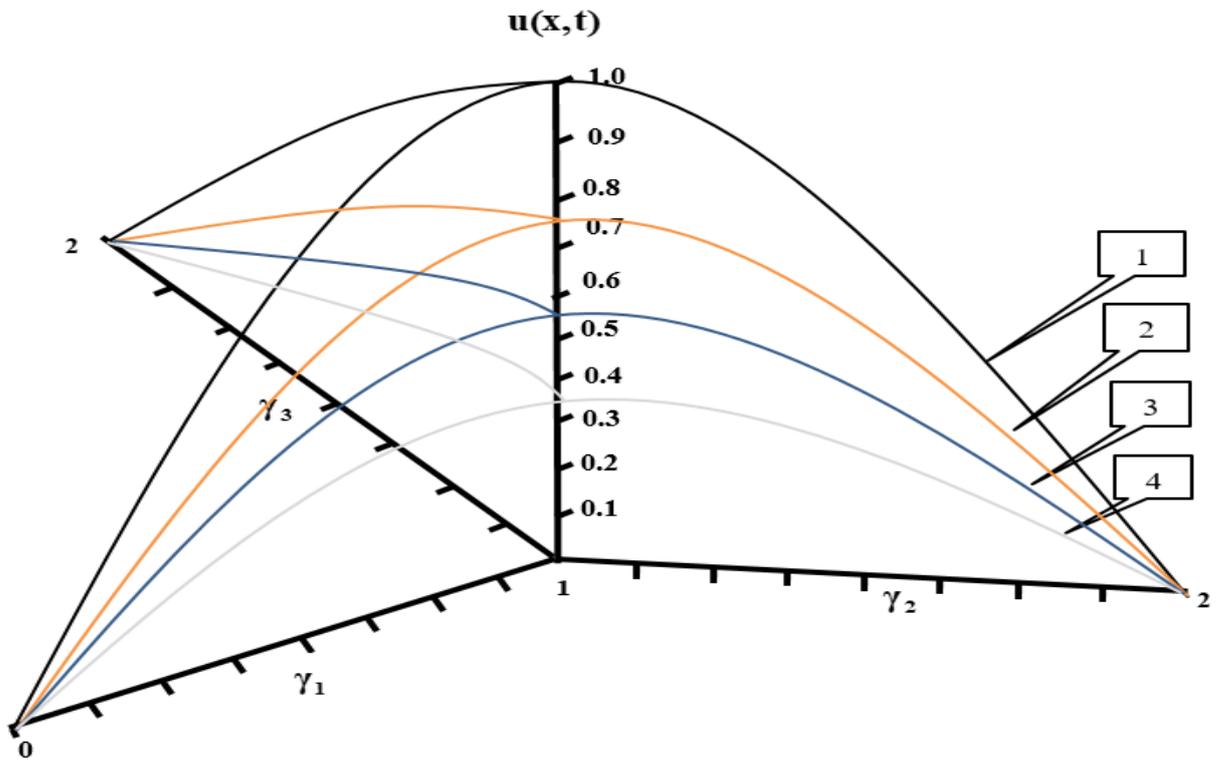


Рис. 4.12. Графическое изображение поля температур на γ_k ($k = \overline{1, 3}$) при различных значениях t : [1]—0; [2]—0.1; [3]—0.2; [4]—0.3

Задача 3. Пусть Γ — сеть с двумя внутренними узлами ξ_1, ξ_2 (рис. 4.13):

$\Gamma = \bigcup_{k=1}^4 \gamma_k$, ребро γ_1 параметризовано отрезком $[0, \pi/3]$, ребро γ_2 параметризовано отрезком $[\pi/3, 2\pi/3]$, а γ_3, γ_4 — отрезком $[2\pi/3, \pi]$.

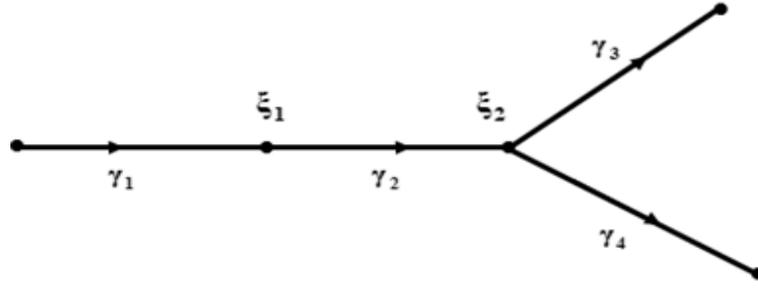


Рис. 4.13. Сеть усложненная с ветвлением

Количественные характеристики $u(x, t)$ процесса переноса теплоты по сети

$\Gamma = \bigcup_{k=1}^4 \gamma_k$ определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (1.58)$$

соотношениями в узлах ξ_1 и ξ_2

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{3} \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{3} \in \gamma_2}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{3} \in \gamma_1} &= \alpha_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{3} \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=\frac{2\pi}{3} \in \gamma_2} &= u(x, t) \Big|_{x=\frac{2\pi}{3} \in \gamma_3} = u(x, t) \Big|_{x=\frac{2\pi}{3} \in \gamma_4}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{2\pi}{3} \in \gamma_2} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{2\pi}{3} \in \gamma_3} + \alpha_2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{2\pi}{3} \in \gamma_4}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

и соотношениями

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.61)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=\pi \in \gamma_3} = u(x, t) \Big|_{x=\pi \in \gamma_4} = 0. \quad (1.62)$$

По аналогии с (4.3), (4.4) и (4.7), (4.8), соотношения (4.12) и (4.13) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.9) – (4.11) формирует разностную схему следующего типа:

$$\begin{aligned} \frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - (u_i^j)_{\gamma_k}}{\tau} &= (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^{j+1})_{\gamma_k} + (u_{i-1}^{j+1})_{\gamma_k}}{h^2} + (b_i)_{\gamma_k} (u_i^{j+1})_{\gamma_k}, \\ i &= \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, 4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_N^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \quad \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} = \alpha_0 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h}, \\ (u_N^{j+1})_{\gamma_2} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_3} = (u_0^{j+1})_{\gamma_4}, \\ \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_2} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_2}}{h} &= \alpha_1 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3}}{h} + \alpha_2 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_4} - (u_0^{j+1})_{\gamma_4}}{h}, \\ (u_i^0)_{\gamma_k} &= (\varphi_i)_{\gamma_k}, \quad k = \overline{1,4}, \quad i = \overline{0, N}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_N^{j+1})_{\gamma_3} = (u_N^{j+1})_{\gamma_4} = 0. \end{aligned}$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $\varphi(x) = \sin x$, $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $h = 0.1047$, $\tau = 0.01$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 2$. Графическое изображение поля температур по сети Γ при различных временных значениях представлено рисунком 4.14, числовые расчеты и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.1.3 и 2.1.3, соответственно (регистрация ЭВМ-программы [63]).

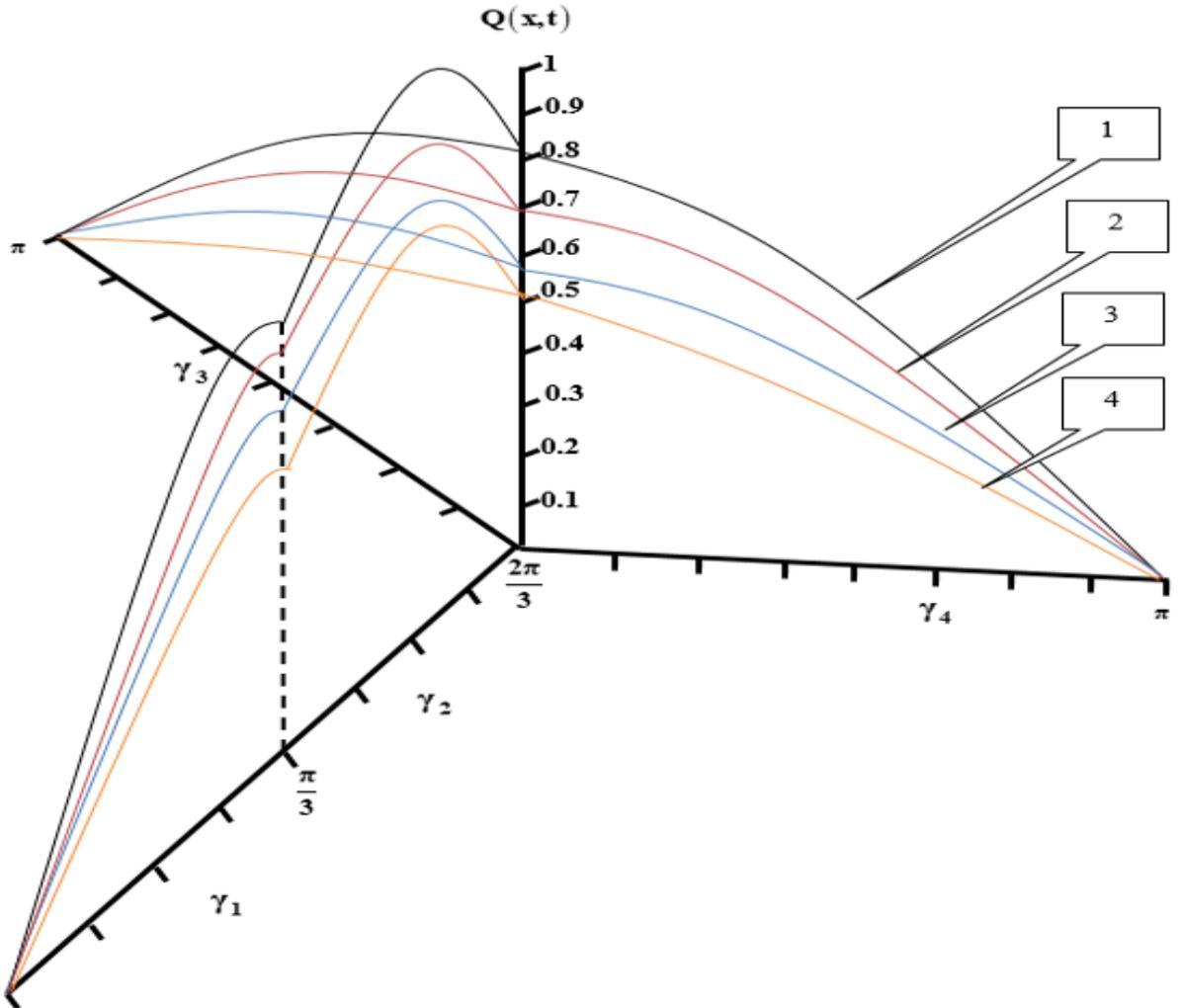


Рис. 4.14. Распределение температур на ребрах γ_k ($k = \overline{1,4}$) сети при различных значениях t : [1] – 0; [2] – 0.1; [3] – 0.2; [4] – 0.3

4.2.2 Задачи колебаний упругих сложносочлененных конструкций в сети

Задача 1. Пусть Γ – сеть без ветвления с одним внутренним узлом ξ (рис. 4.15): $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, ребро γ_1 параметризовано отрезком $[0, 3]$, а γ_2 – отрезком $[3, 6]$.

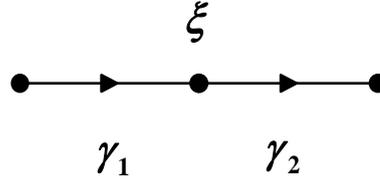


Рис. 4.15. Сеть без ветвления

Количественные характеристики $u(x, t)$ процесса колебаний в сети $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (1.63)$$

соотношениями в ξ

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=3 \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=3 \in \gamma_2}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=3 \in \gamma_1} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=3 \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

и соотношениями

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.65)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=6 \in \gamma_2} = 0. \quad (1.66)$$

Соотношения (4.16) и (4.17) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.14) – (4.16) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^j)_{\gamma_k} + (u_i^{j-1})_{\gamma_k}}{\tau^2} = (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^{j+1})_{\gamma_k} + (u_{i-1}^{j+1})_{\gamma_k}}{h^2} + (b_i)_{\gamma_k} (u_i^{j+1})_{\gamma_k},$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = 1, 2,$$

$$(u_N^{j+1})_{\gamma_1} = (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \quad \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} = \alpha \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h},$$

$$(u_i^0)_{\gamma_k} = (\varphi_i)_{\gamma_k}, \quad \frac{(u_i^1)_{\gamma_k} - (u_i^0)_{\gamma_k}}{\tau} = 0, \quad k=1, 2, \quad i = \overline{0, N}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_N^{j+1})_{\gamma_2} = 0.$$

Используемые параметры: $\varphi(x) = (1-x)\sin(\pi x)$, $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $h = 0.15$, $\tau = 0.01$, $\alpha = 2$. Графическое изображение волнового процесса с сети $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ при различных временных значениях представлено рисунком 4.16, числовые расчеты и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.2.1 и 2.2.1, соответственно.

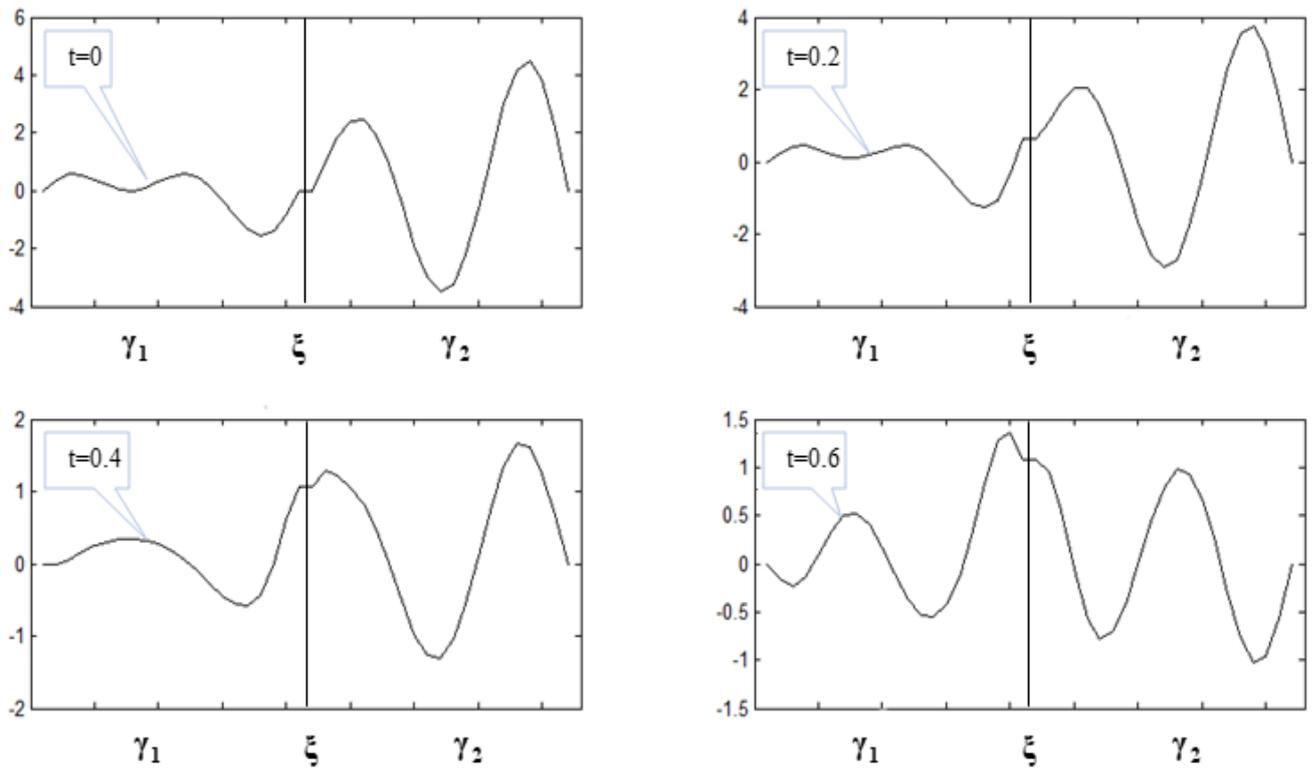


Рис. 4.16. Изменение амплитуд колебаний на ребрах γ_k ($k = 1, 2$)

Задача 2. Пусть $\Gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k$ – сеть с ветвлением в узле ξ (рис. 4.17): ребру γ_1 соответствует отрезок $[0, 2]$, ребрам γ_2, γ_3 – отрезок $[2, 4]$.

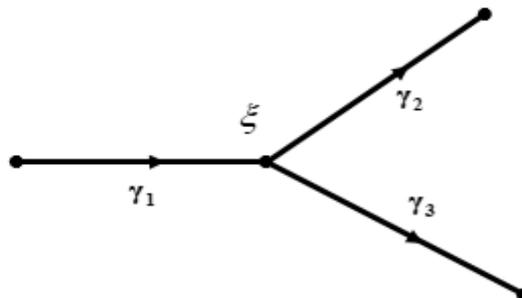


Рис. 4.17. Сеть с ветвлением

Количественные характеристики $u(x, t)$ процесса колебаний в сети $\Gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k$

определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (1.67)$$

соотношениями в ξ

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=2 \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=2 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=2 \in \gamma_3}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=2 \in \gamma_1} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=2 \in \gamma_2} + \alpha_2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=2 \in \gamma_3}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

соотношениями

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.69)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x, t) \Big|_{x=4 \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=4 \in \gamma_3} = 0. \quad (1.70)$$

Соотношения (4.20) и (4.21) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.18) – (4.20) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^j)_{\gamma_k} + (u_i^{j-1})_{\gamma_k}}{\tau^2} = (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^{j+1})_{\gamma_k} + (u_{i-1}^{j+1})_{\gamma_k}}{h^2} + (b_i)_{\gamma_k} (u_i^{j+1})_{\gamma_k},$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$(u_N^{j+1})_{\gamma_1} = (u_0^{j+1})_{\gamma_2} = (u_0^{j+1})_{\gamma_3},$$

$$\frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} = \alpha_1 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h} + \alpha_2 \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_3} - (u_0^{j+1})_{\gamma_3}}{h},$$

$$(u_i^0)_{\gamma_k} = (\varphi_i)_{\gamma_k}, \quad \frac{(u_i^1)_{\gamma_k} - (u_i^0)_{\gamma_k}}{\tau} = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$(u_0^{j+1})_{\gamma_1} = (u_N^{j+1})_{\gamma_2} = (u_N^{j+1})_{\gamma_3} = 0.$$

Используемые параметры следующие: $\varphi(x) = x \sin x$, $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $h = 0.2$, $\tau = 0.01$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, графическое изображение волнового процесса с сети Γ при различных временных значений представлено на рисунках

4.18 – 4.20, числовые расчеты и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.2.2 и 2.2.2, соответственно.

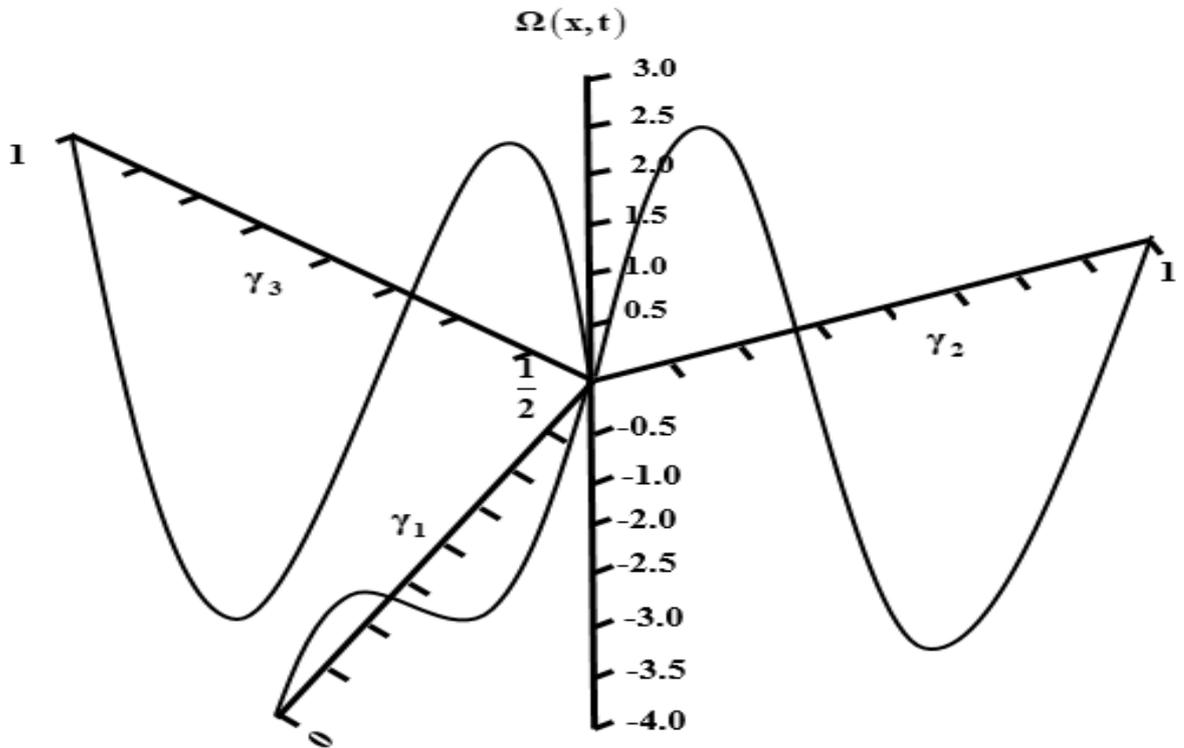


Рис. 4.18. Изменение амплитуд колебаний на ребрах γ_k ($k = \overline{1, 3}$) при $t = 0$

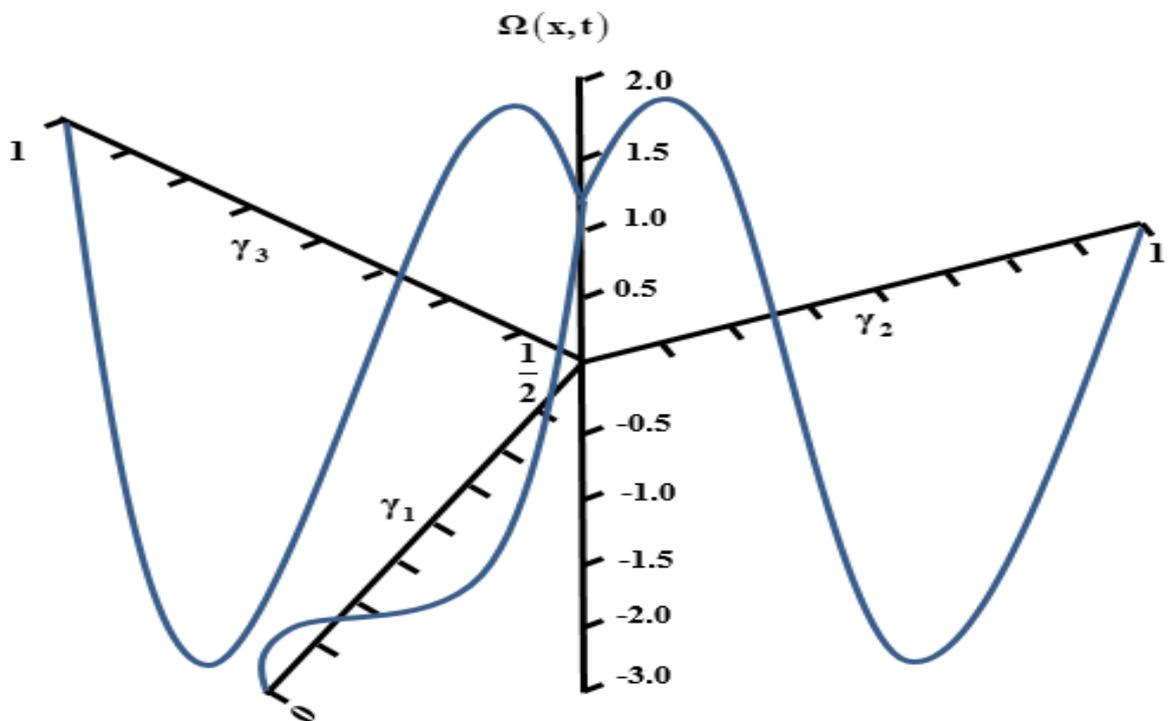


Рис. 4.19. Изменение амплитуд колебаний на ребрах γ_k ($k = \overline{1, 3}$) при $t = 0.3$

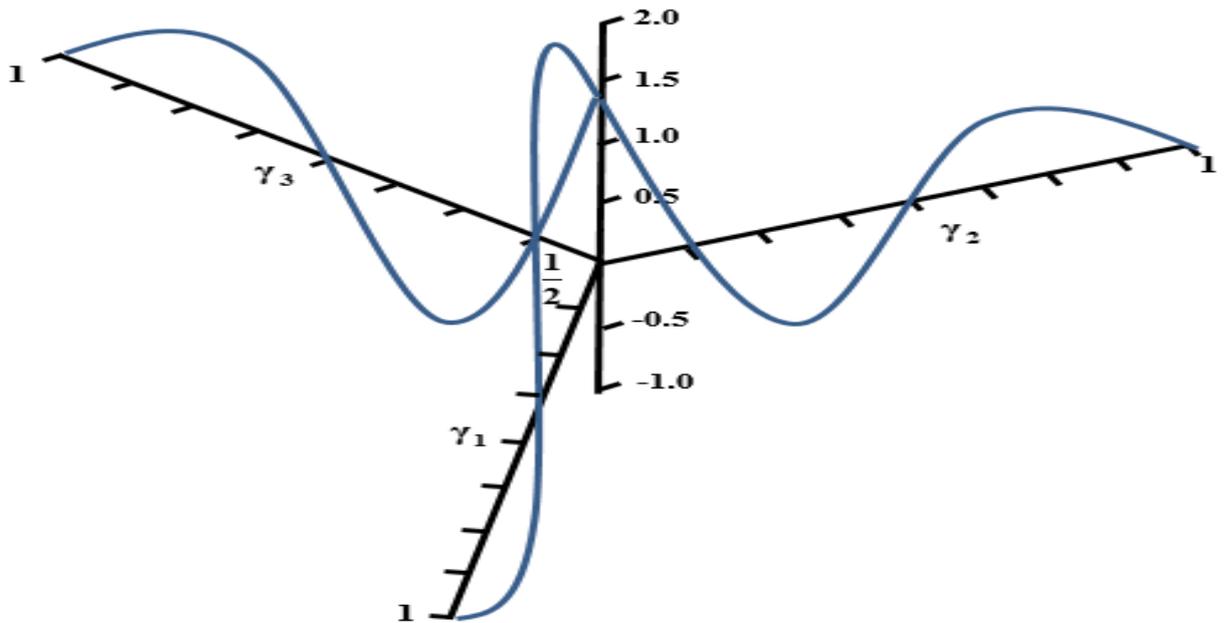


Рис. 4.20. Изменение амплитуд колебаний на ребрах γ_k ($k = \overline{1, 3}$) при $t = 0.6$

4.3 Решение задач процессов переноса и волновых процессов на сетеподобных носителях

4.3.1 Задачи переноса сплошных сред в двумерной сети

Задача 1. Пусть двумерная область $\mathfrak{Z} \subset R^2$ содержит в качестве подобластей \mathfrak{Z}_k ($k = 1, 2$) (подмножества изменения пространственных переменных). При этом примыкание этих подобластей осуществляется через поверхность S (см. рис. 4.21).

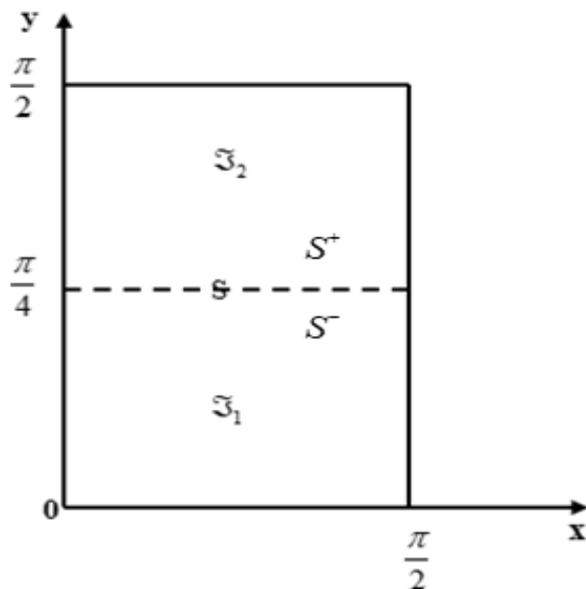


Рис. 4.21. Структура области \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y)u(x, y, t), \quad (1.71)$$

$$x, y \in \mathfrak{S}, t \in (0, T],$$

соотношениями на поверхности S

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^+} = u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^-}, \quad (1.72)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \cos x \cos y, \quad x, y \in \mathfrak{S}, \quad (1.73)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{S}_k} = e^{-2t} \cos y, \quad u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = 0 \quad (1.74)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = e^{-2t} \cos x, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_2} = 0. \quad (1.75)$$

Соотношения (4.24) и (4.25), (4.26) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.22) – (4.23) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k},$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S^+}}{h_2},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \cos(x_{i_1}) \cos(y_{i_2}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, k = 1, 2$$

$$(u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), \quad (u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = 0, \quad (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad (u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} = 0.$$

Используемые параметры следующие: $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.0393$, $h_2 = 0.0393$, $\tau = 0.01$, $\alpha_1 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на

рис. 4.22; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.3.1 и 2.3.1 соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [64]).

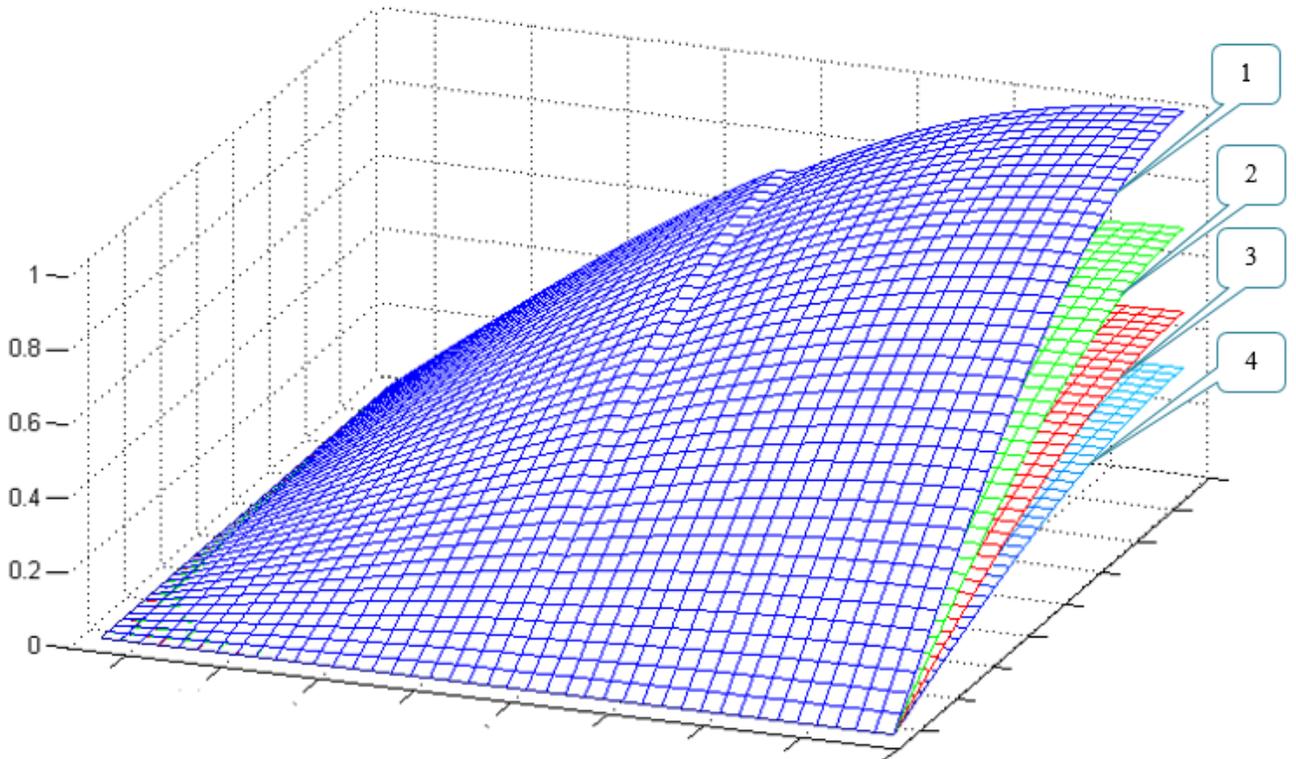


Рис. 4.22. Распределение температур на подобластях \mathfrak{Z}_k ($k=1,2$) при различных значениях t : [1]—0; [2]—0.2; [3]—0.4; [4]—0.6

Задача 2. Пусть двумерная область $\mathfrak{Z} \subset R^2$ (рис. 4.23), состоящая из подобластей \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1,3}$) и двух поверхностей примыкания S_1 и S_2 .

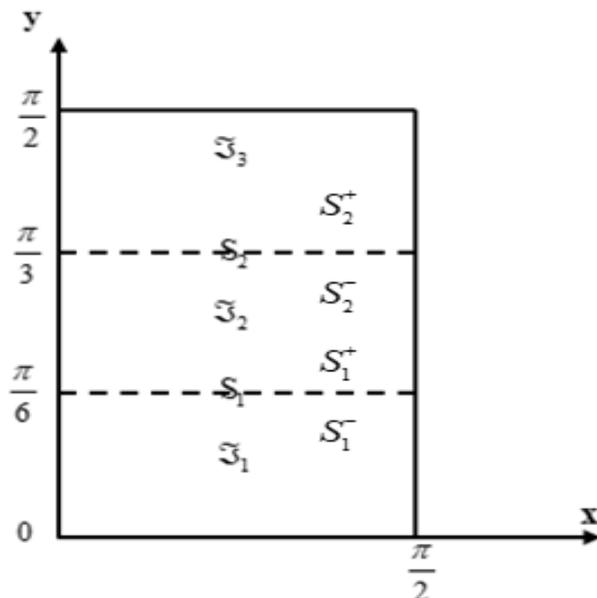


Рис. 4.23. Структура области \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y)u(x, y, t), \quad (1.76)$$

$$x, y \in \mathfrak{I}, t \in (0, T],$$

соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^+} &= u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^+} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^-}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^+} &= u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^+} &= \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^-}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \cos x \cos y, \quad x, y \in \mathfrak{I}, \quad (1.79)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{I}_k} = e^{-2t} \cos y, \quad u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{I}_k} = 0, \quad (1.80)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{I}_1} = e^{-2t} \cos x, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{I}_3} = 0. \quad (1.81)$$

Соотношения (4.30) и (4.31), (4.32) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи (4.27) – (4.29) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - (u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{I}_k}}{\tau} &= (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{I}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}}{h_1^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{I}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}, \end{aligned}$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_1^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_1^+}}{h_2},$$

$$\begin{aligned} (u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_2^-} &= (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2}}{h_2} = \alpha_2 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_2^+}}{h_2}, \\ (u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} &= \cos(x_{i_1}) \cos(y_{i_2}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, k = \overline{1, 3}, \\ (u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} &= e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), \quad (u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = 0, \\ (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} &= e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad (u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = 0. \end{aligned}$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.0524$, $h_2 = 0.0349$, $\tau = 0.01$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.24; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.3.2 и 2.3.2 соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [64]).

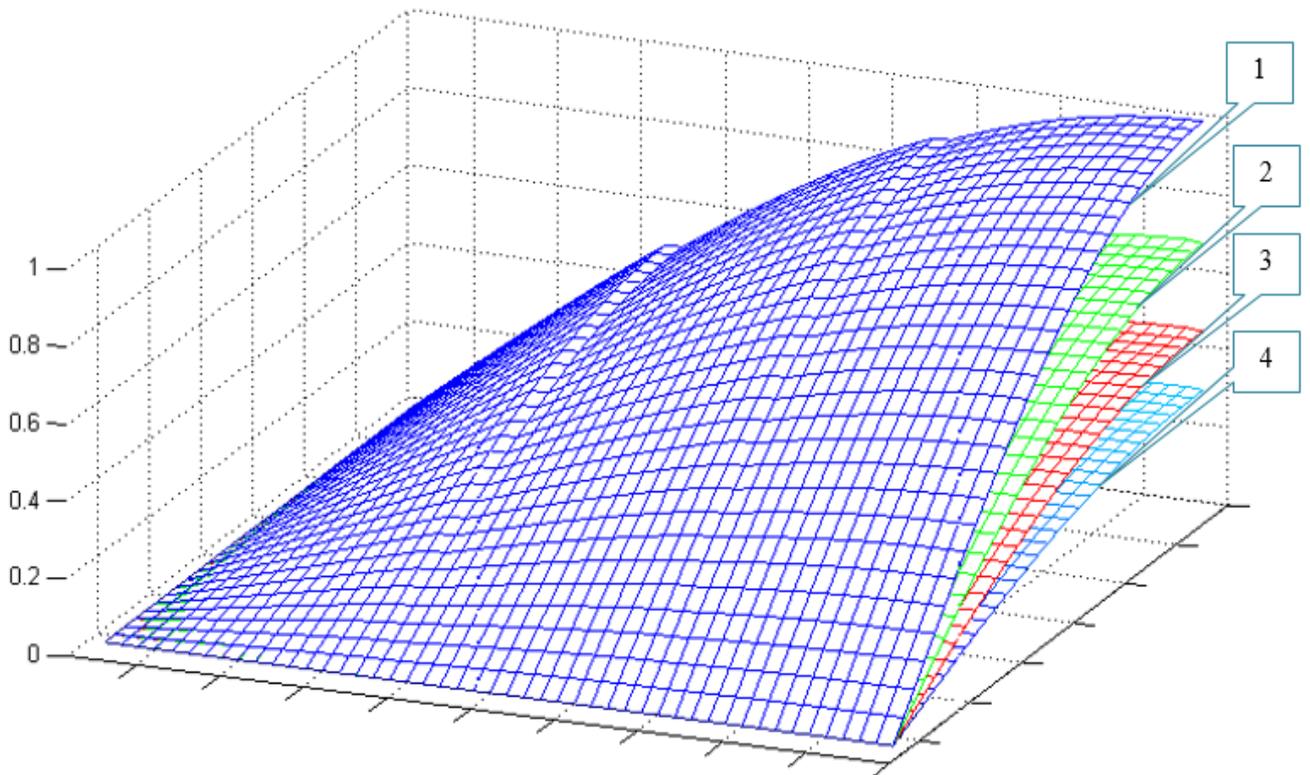
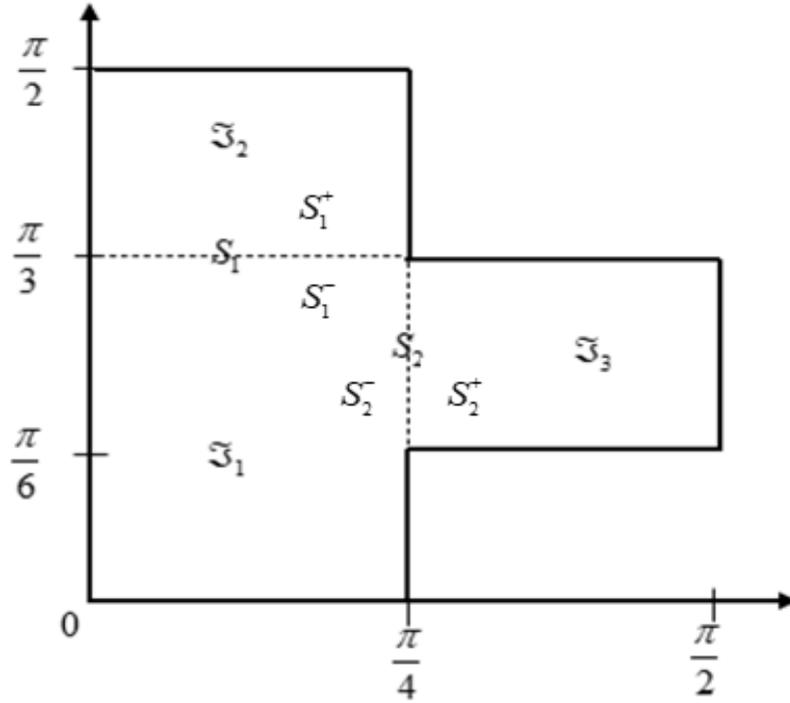


Рис. 4.24. Распределение температур на подобластях \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1, 3}$) при различных значениях t : [1] – 0; [2] – 0.2; [3] – 0.4; [4] – 0.6

Задача 3. Пусть двумерная область $\mathfrak{S} \subset R^2$ (рис. 4.25), состоящая из подобластей \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1, 3}$) и двух поверхностей примыкания S_1 и S_2 .

Рис. 4.25. Структура области \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y) u(x, y, t), \quad (1.82)$$

$$x, y \in \mathfrak{Z}, t \in (0, T],$$

соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} = u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-}, \quad (1.83)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \quad (1.84)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \cos x \cos y, \quad x, y \in \mathfrak{Z}, \quad (1.85)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = e^{-2t} \cos y, \quad u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} \cos y, \quad (1.86)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_3} = 0, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = e^{-2t} \cos x, \quad (1.87)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2t} \cos x, \quad (1.88)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{1}{2} e^{-2t} \cos x, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_2} = 0. \quad (1.89)$$

Соотношения (4.36) и (4.37), (4.38), (4.39), (4.40) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.33) – (4.35) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} & \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \end{aligned}$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \quad j = \overline{1, K - 1}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_1^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_1^+}}{h_2},$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{S_2^-} = (u_{0, i_2}^{j+1})_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{N_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{0, i_2}^{j+1})_{S_2^+}}{h_1},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \cos(x_{i_1}) \cos(y_{i_2}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$(u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), \quad (u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}),$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = 0, \quad (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}),$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{1}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad (u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} = 0.$$

Используемые параметры следующие: $a(x, y) = x + y$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.0524$, $h_2 = 0.0349$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Сеточная функция a_{i_1, i_2} строится по

заданной функции $a(x, y)$ в соответствии с соотношением (усреднение по окрестностям $R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}$): $a_{i_1, i_2} = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{i_1 h_1}^{(i_1+1)h_1} \int_{i_2 h_2}^{(i_2+1)h_2} a(x, y) dx dy$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.26; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.3.3 и 2.3.3 соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [64]).

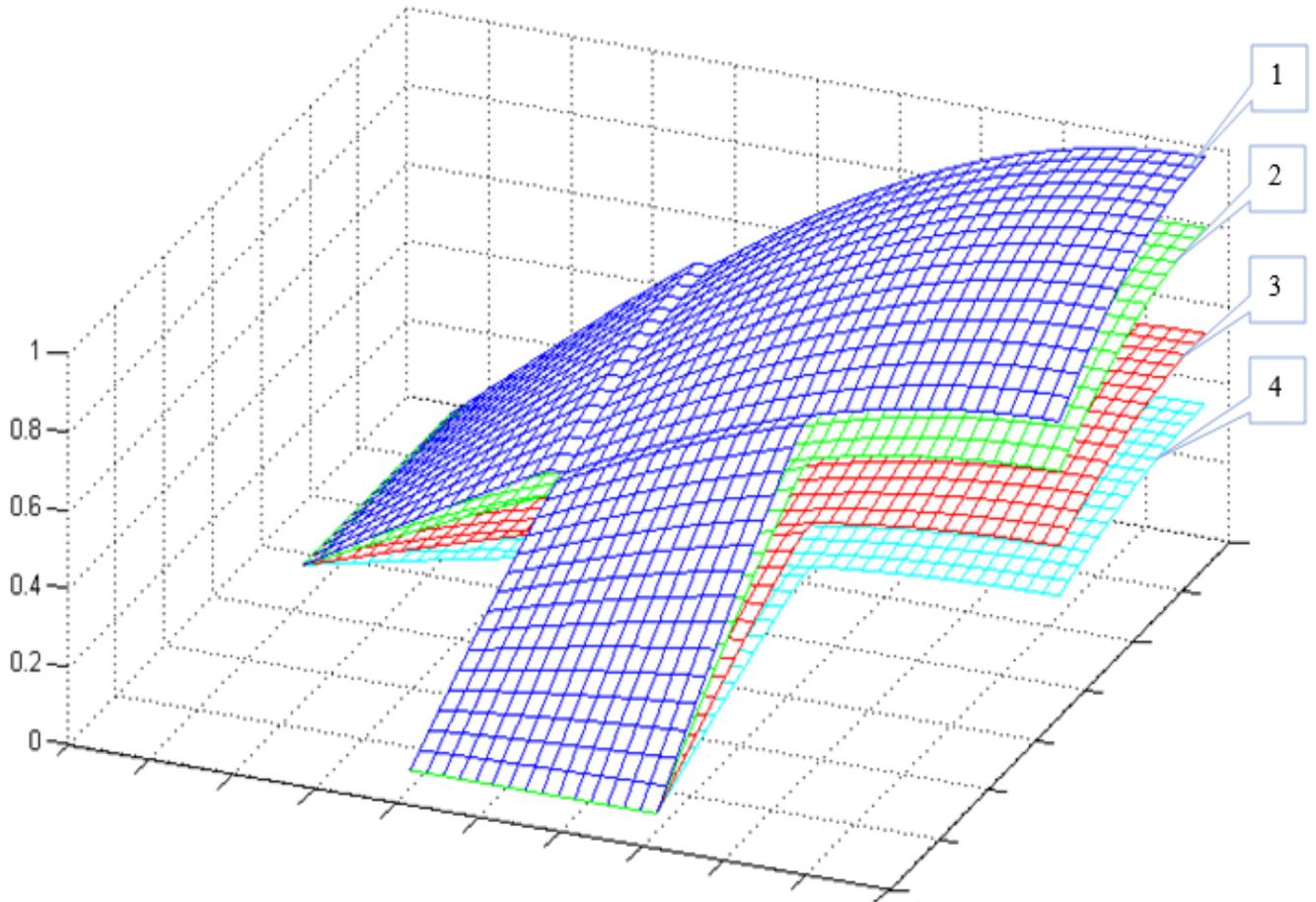
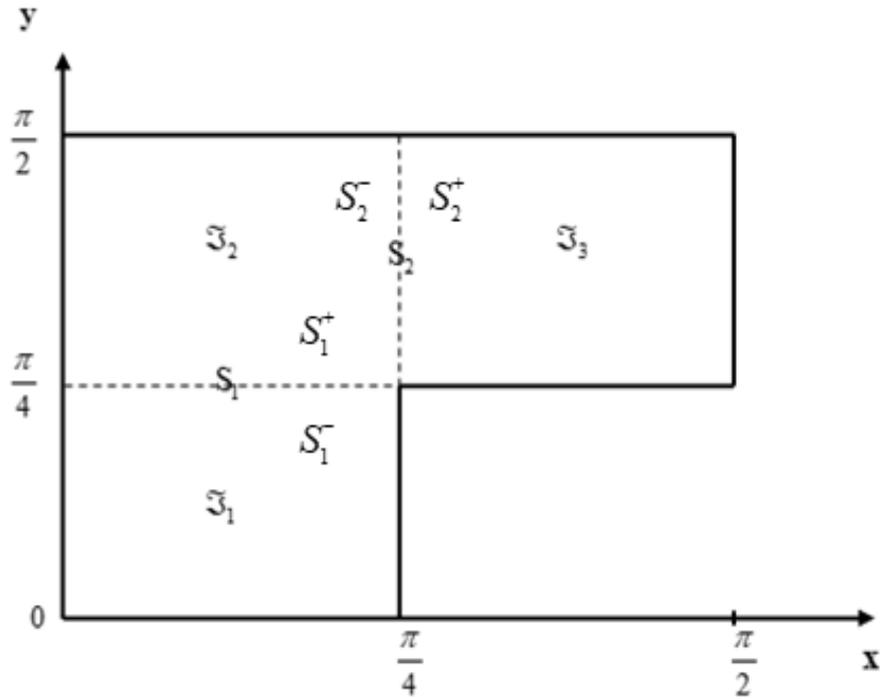


Рис. 4.26. Распределение температур на подобластях \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1,3}$) при различных значениях t : [1] – 0; [2] – 0.1; [3] – 0.3; [4] – 0.5

Задача 4. Пусть двумерная область $\mathfrak{S} \subset R^2$ (рис. 4.27), состоящая из подобластей \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1,3}$) и двух поверхностей примыкания S_1 и S_2 .

Рис. 4.27. Структура области \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y)u(x, y, t), \quad (1.90)$$

$$x, y \in \mathfrak{Z}, t \in (0, T],$$

соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S_1^+} = u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S_1^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S_1^-}, \quad (1.91)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \quad (1.92)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \cos x \cos y, \quad x, y \in \mathfrak{Z}, \quad (1.93)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = e^{-2t} \cos y, \quad (1.94)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{S}_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} \cos y, u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_3} = 0, \quad (1.95)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_3} = e^{-2t} \cos x, \quad (1.96)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} \cos x, u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3} = 0. \quad (1.97)$$

Соотношения (4.44) и (4.45), (4.46), (4.47), (4.48) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.41) – (4.43) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} &= (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \end{aligned}$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = \overline{1, 3},$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^+}, \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^+}}{h_2},$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^-} = (u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^+}, \frac{(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^-} - (u_{N_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^+}}{h_1},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \cos(x_{i_1}) \cos(y_{i_2}), i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, k = \overline{1, 3},$$

$$(u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), (u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}),$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = 0, (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), (u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3} = 0.$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.0393$, $h_2 = 0.0393$, $\tau = 0.01$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.28; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.3.4 и 2.3.4 соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [64]).

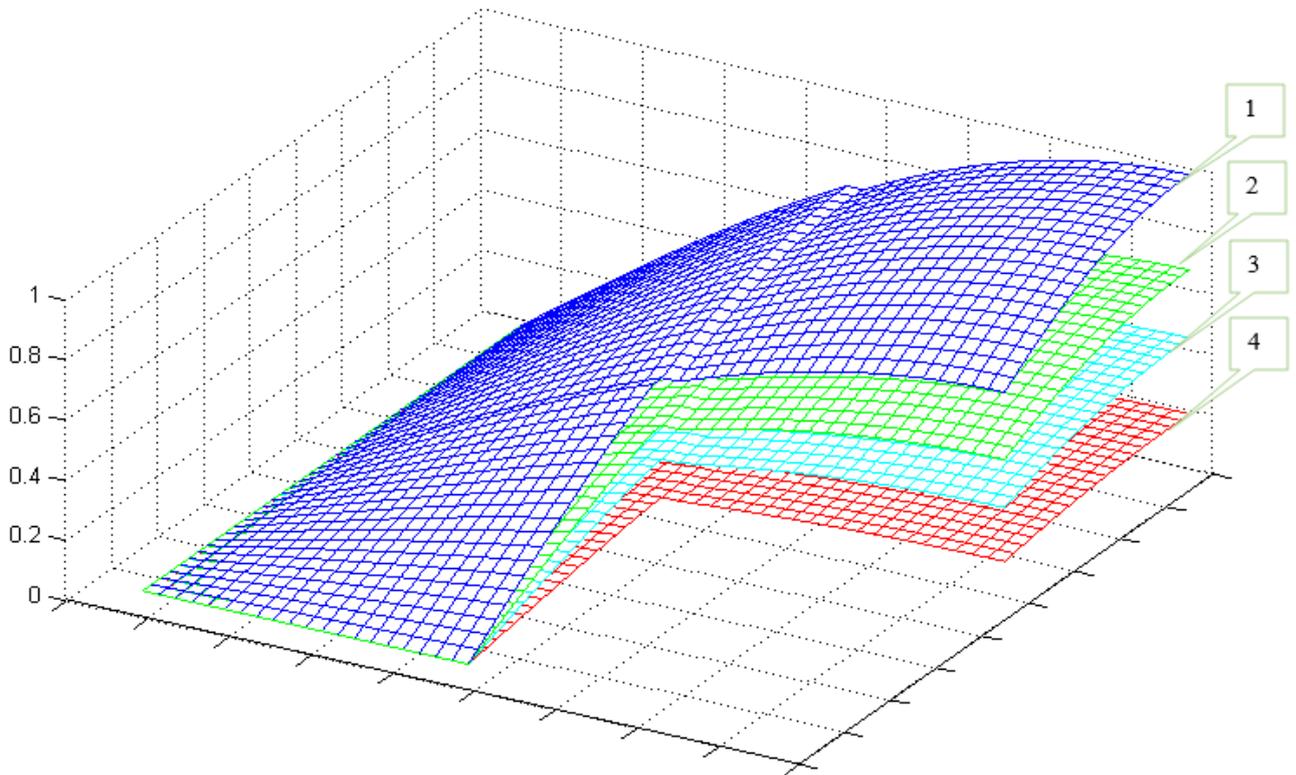


Рис. 4.28. Распределение температур на подобластях \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1,3}$) при различных значениях t : [1]–0; [2]–0.2; [3]–0.4; [4]–0.8

Задача 5. Пусть $\mathfrak{Z} \subset R^2$ – совокупность подобластей \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1,4}$), поверхности S_1 , S_2 и S_3 , соединяющие эти подобласти (рис. 4.29).

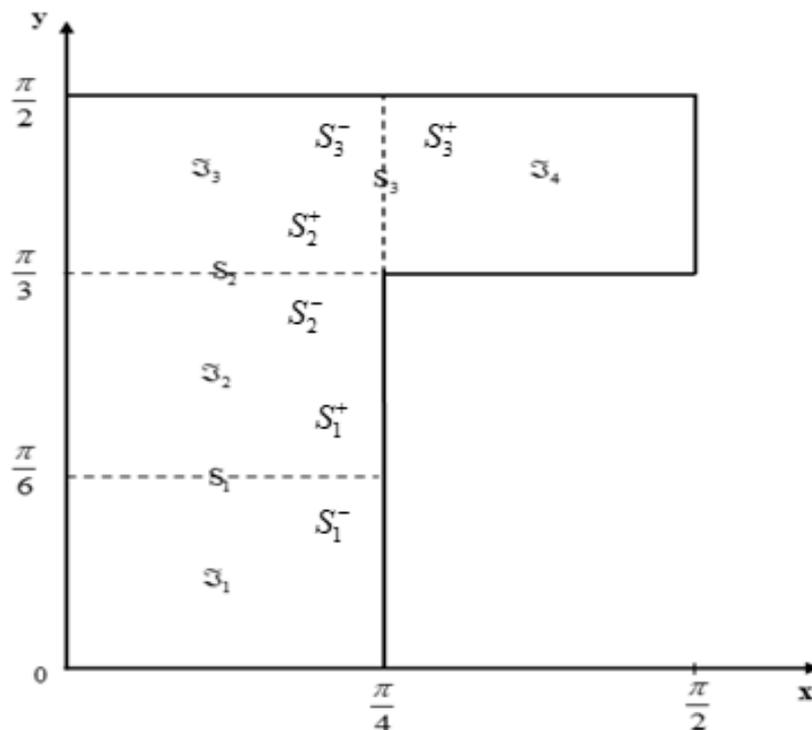


Рис. 4.29. Структура области \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяется уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y)u(x, y, t), \quad (1.98)$$

$$x, y \in \mathfrak{Z}, t \in (0, T],$$

соотношениями на поверхностях S_1 , S_2 и S_3

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^+} &= u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^+} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^-}, \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^+} &= u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^+} &= \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^-}, \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_3^+} &= u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_3^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_3^+} &= \alpha_3 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_3^-}, \end{aligned} \quad (1.101)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \cos x \cos y, \quad x, y \in \mathfrak{Z}, \quad (1.102)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2 \cup \mathfrak{Z}_3} = e^{-2t} \cos y, \quad (1.103)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} \cos y, \quad (1.104)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{Z}_4} = 0, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{Z}_1} = e^{-2t} \cos x, \quad (1.105)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in \mathfrak{Z}_4} = \frac{1}{2} e^{-2t} \cos x, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{Z}_3 \cup \mathfrak{Z}_4} = 0. \quad (1.106)$$

Соотношения (4.53) и (4.54), (4.55), (4.56), (4.57) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.49) – (4.52) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k},$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = \overline{1, 4},$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_1^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_1^+}, \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_1^+}}{h_2},$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_2^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_2^+}, \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2}}{h_2} = \alpha_2 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S_2^+}}{h_2},$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{S_3^-} = (u_{0, i_2}^{j+1})_{S_3^+}, \frac{(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{S_3^-} - (u_{N_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3}}{h_1} = \alpha_3 \frac{(u_{1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_4} - (u_{0, i_2}^{j+1})_{S_3^+}}{h_1},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \cos(x_{i_1}) \cos(y_{i_2}), i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, k = \overline{1, 4},$$

$$(u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3} = e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), (u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}),$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_4} = 0, (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}),$$

$$(u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_4} = \frac{1}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), (u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3 \cup \mathfrak{S}_4} = 0.$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.0374$, $h_2 = 0.0374$, $\tau = 0.01$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.30; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.3.5 и 2.3.5 соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [64]).

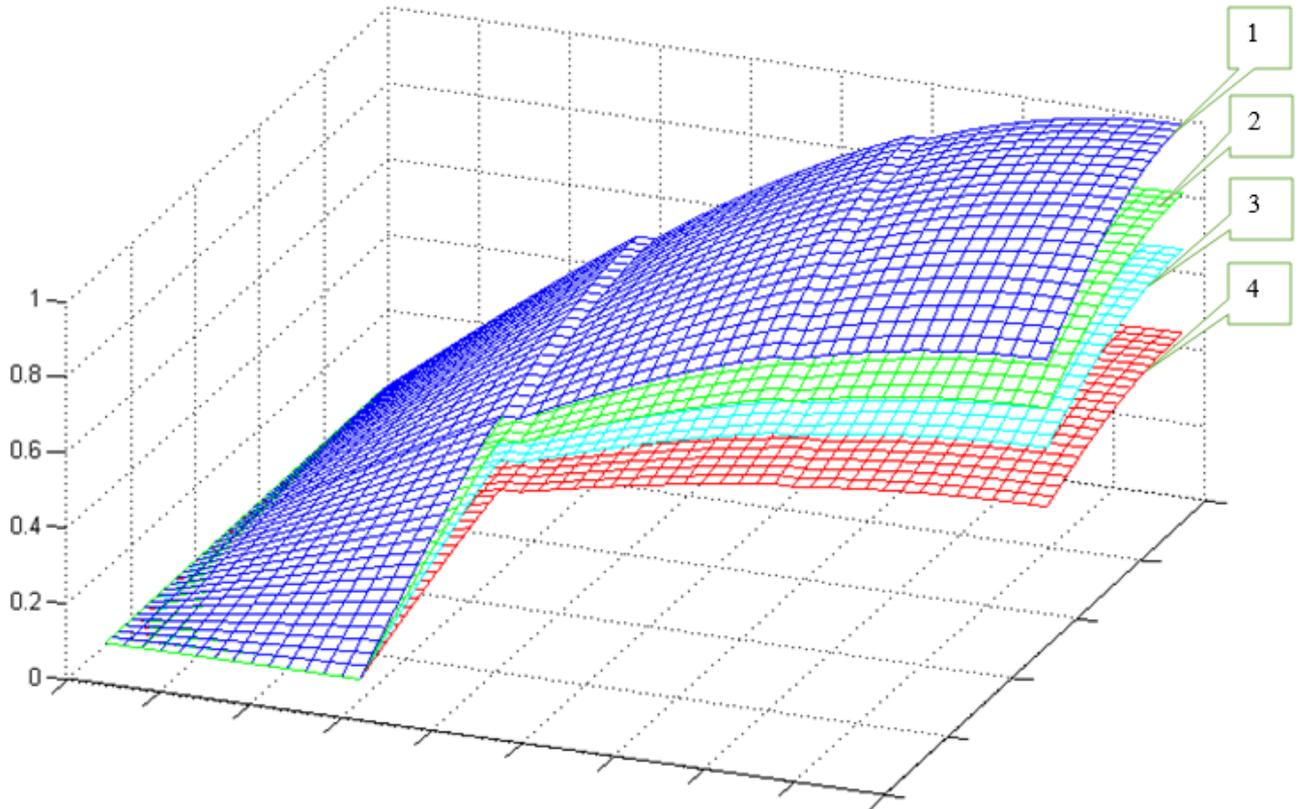


Рис. 4.30. Распределение температур на подобластях \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1,4}$) при различных значениях t : [1] – 0; [2] – 0.1; [3] – 0.2; [4] – 0.4

4.3.2 Задачи переноса сплошных сред в трехмерной сети

Задача 1. Пусть трехмерная область $\mathfrak{S} \subset R^3$ состоит из подобластей \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1,2}$) и поверхности примыкания S (рис. 4.31).

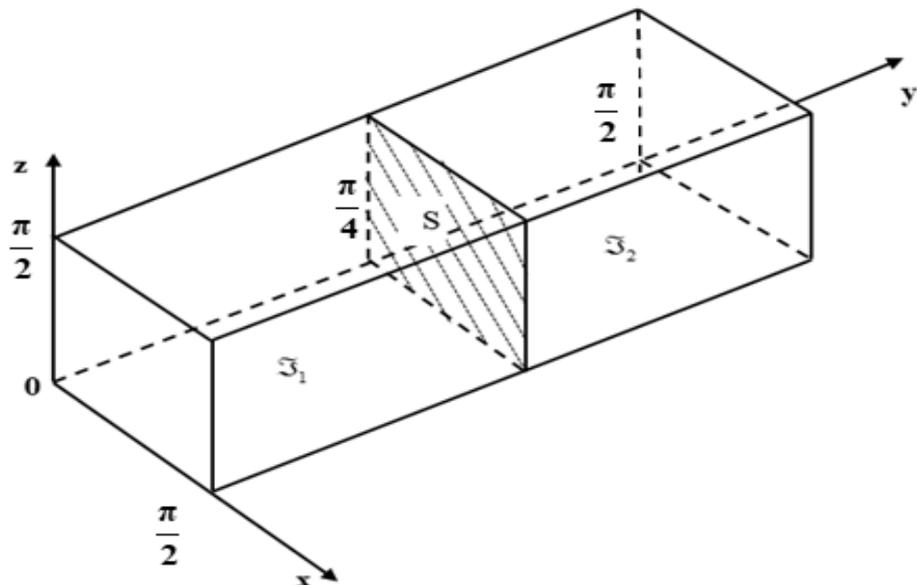


Рис. 4.31. Область \mathfrak{S}

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = a(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + (1.107)$$

$$+ b(x, y, z)u(x, y, z, t), \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, t \in (0, T],$$

соотношениями на поверхности S

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^+} = \alpha \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4} \in S^-}, \quad (1.108)$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = xyz \cos x, \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, \quad (1.109)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = -2te^{-t}yz, \quad (1.110)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xz \cos x - \pi te^{-t}z \sin x, \quad (1.111)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xy \cos x - \pi te^{-t}y \sin x. \quad (1.112)$$

Соотношения (4.60) и (4.61), (4.62), (4.63) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.58) – (4.59) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} + \frac{(u_{i_1, i_2, i_3+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_3^2} \right) +$$

$$+ (b_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, i_3 = \overline{1, N_3 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S^-} = (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S^-} - (u_{i_1, N_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S^+}}{h_2},$$

$$\left(u_{i_1, i_2, i_3}^0\right)_{\mathfrak{S}_k} = x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} \cos(x_{i_1}), i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, i_3 = \overline{0, N_3}, k = 1, 2,$$

$$\left(u_{0, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{\mathfrak{S}_k} = 0, \left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{\mathfrak{S}_k} = -2t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3},$$

$$\left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{\mathfrak{S}_1} = 0, \left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{\mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}),$$

$$\left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{\mathfrak{S}_k} = 0, \left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{\mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} y_{i_2} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} \sin(x_{i_1}).$$

Рассматриваемая задача имеет параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$, $h_1 = 0.0785$, $h_2 = 0.0785$, $h_3 = 0.0785$, $\tau = 10^{-3}$, $\alpha = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.32 и 4.33; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.4.1 и 2.4.1 и соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [66]).

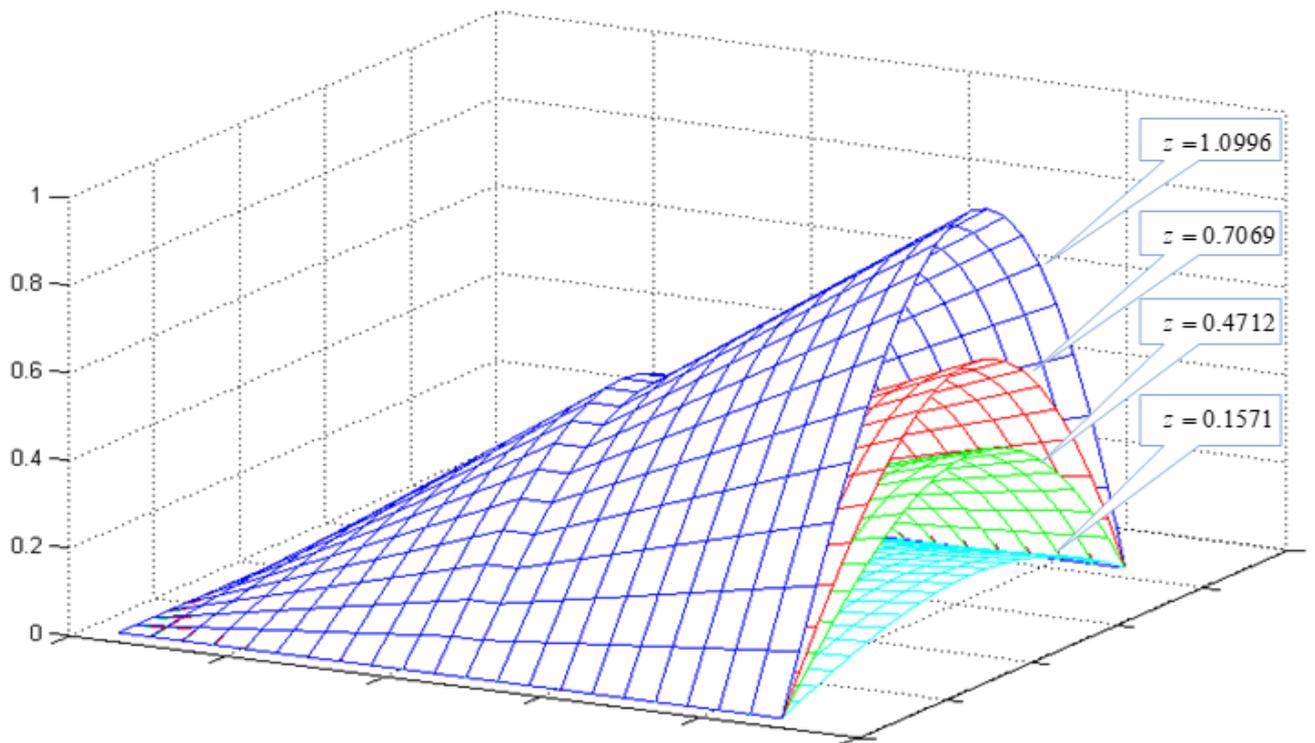


Рис. 4.32. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 0$ в сечении z

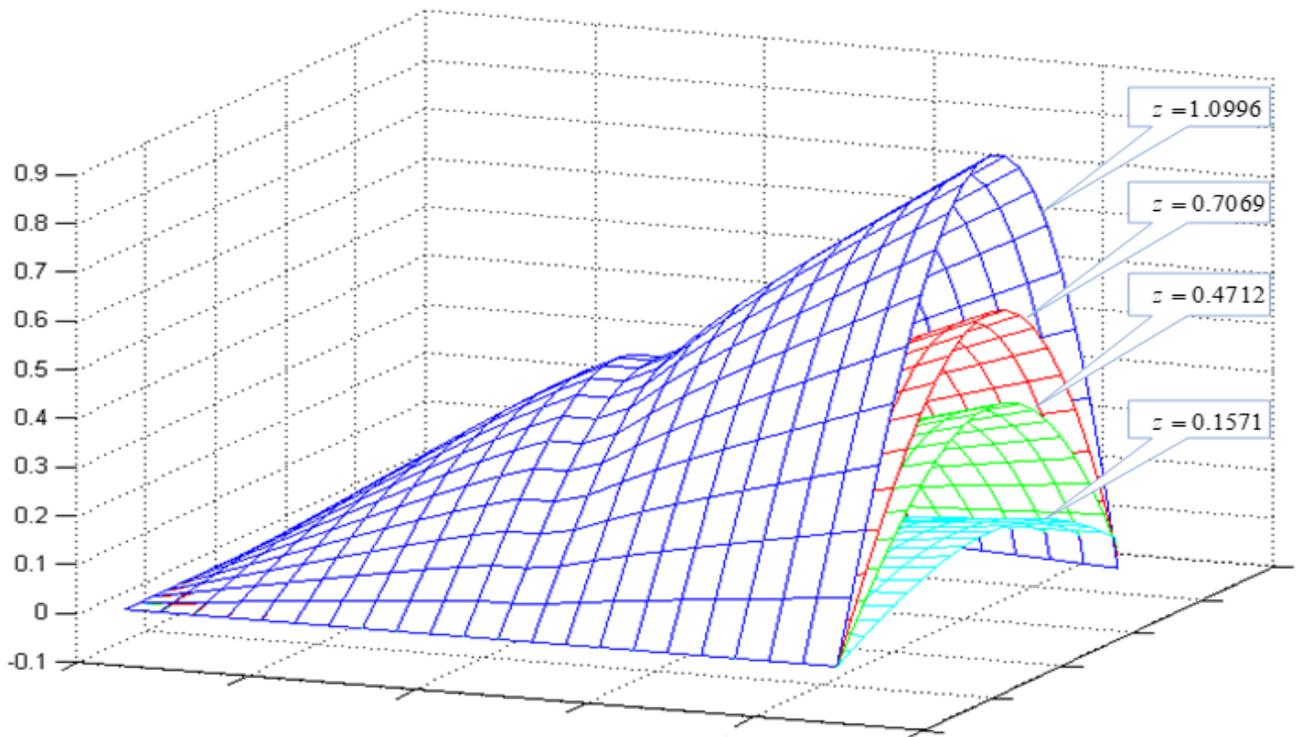


Рис. 4.33. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 0.02$ в сечении z

Задача 2. Пусть область $\mathfrak{V} \subset R^3$ структурирована подобластями \mathfrak{V}_k ($k = \overline{1,3}$) вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 4.34).

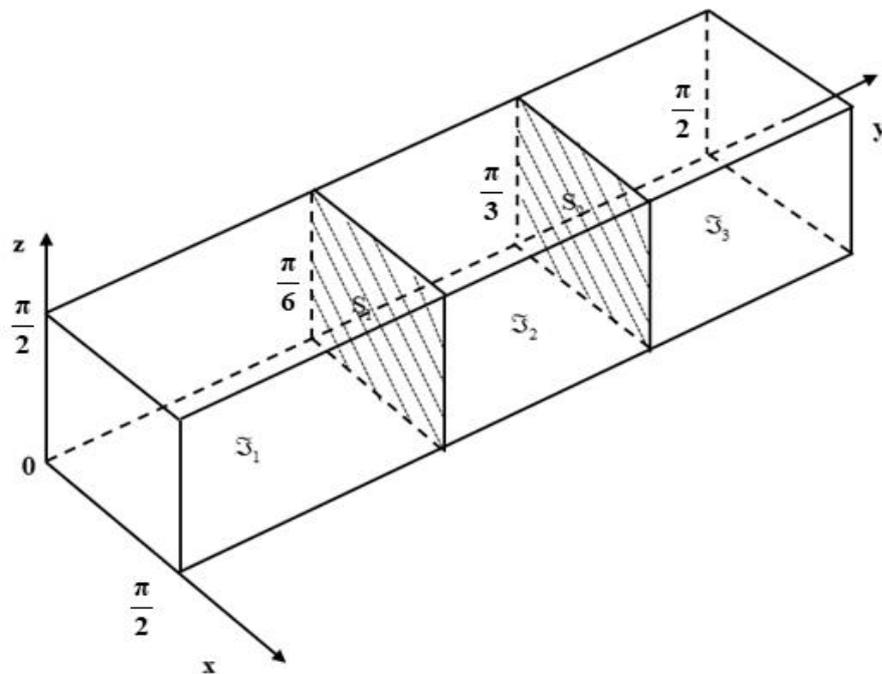


Рис. 4.34. Область \mathfrak{V}

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = a(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + (1.113)$$

$$+ b(x, y, z)u(x, y, z, t), \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, t \in (0, T],$$

соотношениями на S_1 и S_2

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in S_1^-}, \quad (1.114)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_2^-}, \quad (1.115)$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = xyz \cos x, \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, \quad (1.116)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = -2te^{-t}yz, \quad (1.117)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xz \cos x - \pi t e^{-t}z \sin x, \quad (1.118)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xy \cos x - \pi t e^{-t}y \sin x. \quad (1.119)$$

Соотношения (4.67) и (4.68), (4.69), (4.70) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.64) – (4.66) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} + \frac{(u_{i_1, i_2, i_3+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_3^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + (b_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, i_3 = \overline{1, N_3 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = \overline{1, 3}, \\
& (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_1^-} = (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2 - 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_1^+}}{h_2}, \\
& (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_2^-} = (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{i_1, N_2 - 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2}}{h_2} = \alpha_2 \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_2^+}}{h_2}, \\
& (u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k} = x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} \cos(x_{i_1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, i_3 = \overline{0, N_3}, k = \overline{1, 3}, \\
& (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = 0, \quad (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = -2t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3}, \\
& (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = 0, \quad (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\
& (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = 0, \quad (u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} y_{i_2} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} \sin(x_{i_1}).
\end{aligned}$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$,

$h_1 = 0.0785$, $h_2 = 0.0785$, $h_3 = 0.0785$, $\tau = 10^{-3}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.35 и 4.36 для временных значений t в сечении z ; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.4.2 и 2.4.2 и соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [66]).

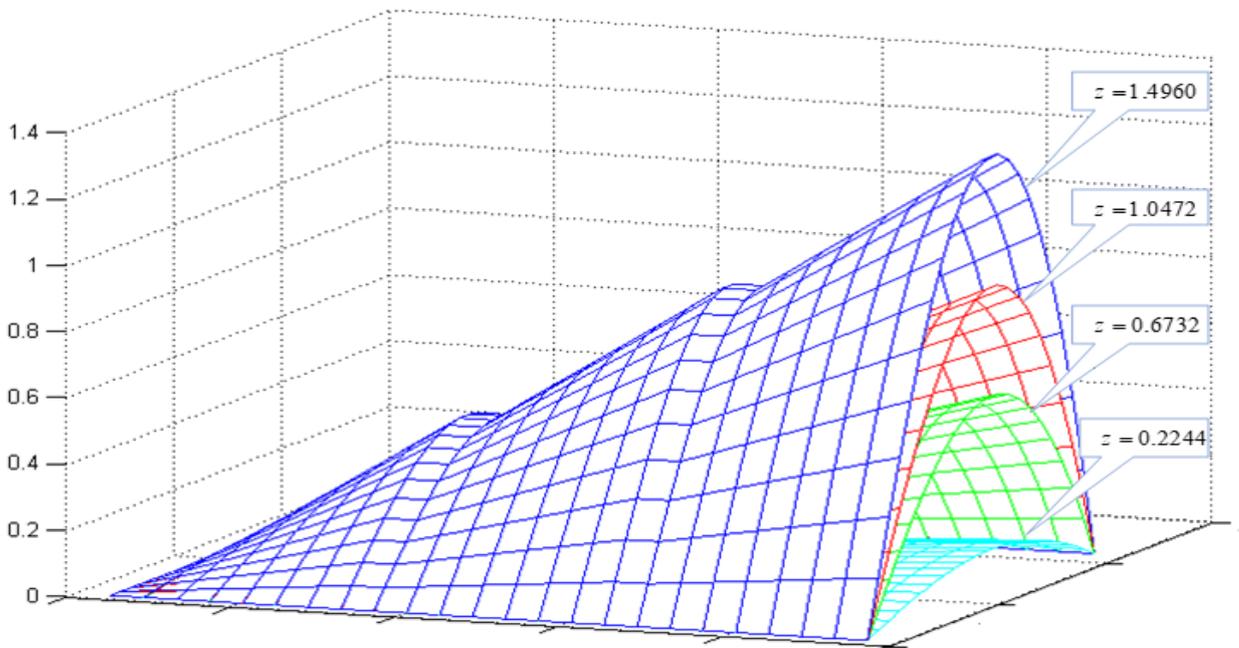


Рис. 4.35. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 0$ в сечении z

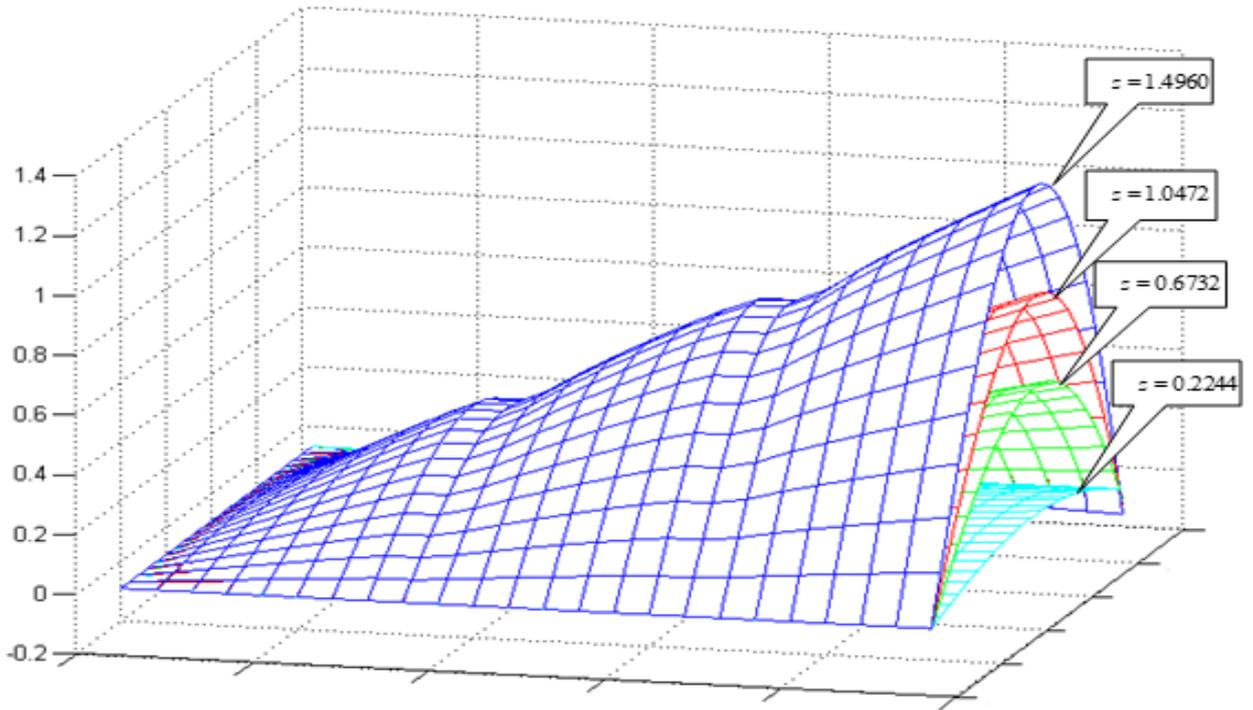


Рис. 4.36. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 0.02$ в сечении z

Задача 3. Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^3$ структурирована подобластями $\mathfrak{Z}_k (k = \overline{1,3})$ вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 4.37).

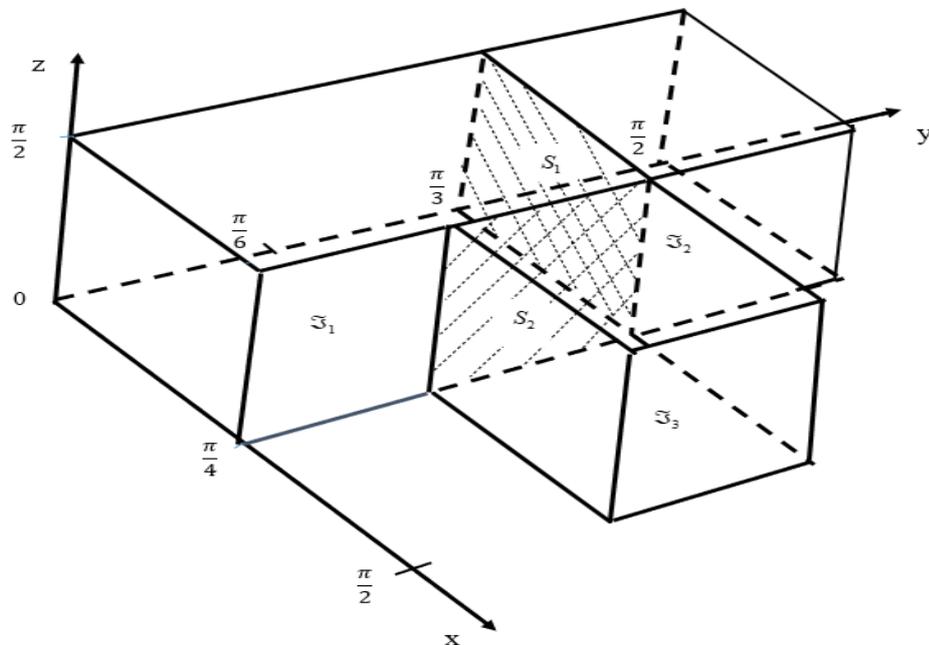


Рис. 4.37. Область \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = a(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + b(x, y, z)u(x, y, z, t), \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, t \in (0, T], \quad (1.120)$$

соотношениями на S_1 и S_2

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} &= u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-}, \end{aligned} \quad (1.121)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} &= u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} &= \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \end{aligned} \quad (1.122)$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = xyz \cos x, \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = 0, \quad (1.123)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{4} e^{-t} zy \cos \frac{\pi}{4} - 2te^{-t} zy \sin \frac{\pi}{4}, \quad (1.124)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_3} = -2te^{-t} yz, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad (1.125)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{6} e^{-t} zx \cos x - \frac{\pi}{3} te^{-t} z \sin x, \quad (1.126)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{3} e^{-t} zx \cos x - \frac{2\pi}{3} te^{-t} z \sin x, \quad (1.127)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{2} e^{-t} zx \cos x - \pi te^{-t} z \sin x, \quad (1.128)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t} yx \cos x - \pi te^{-t} y \sin x. \quad (1.129)$$

Соотношения (4.74) и (4.75), 4.76), 4.77), 4.78), 4.79), (4.80) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.71) – (4.73) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned}
& \frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} + \frac{(u_{i_1, i_2, i_3+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_3^2} \right) + \\
& + (b_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \quad i_3 = \overline{1, N_3 - 1}, \quad j = \overline{1, K - 1}, \quad k = \overline{1, 3}, \\
& (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_1^-} = (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_1^+}}{h_2}, \\
& (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^-} = (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{N_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^+}}{h_1}, \\
& (u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k} = x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} \cos(x_{i_1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad k = \overline{1, 3}, \\
& (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = 0, \quad (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3} - \sqrt{2}\pi e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3}, \\
& (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = -2t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3}, \quad (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = 0, \\
& (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{6} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \frac{\pi}{3} t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\
& (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{3} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \frac{2\pi}{3} t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\
& (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\
& (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = 0, \quad (u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} y_{i_2} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} \sin(x_{i_1}).
\end{aligned}$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = xyz$, $b(x, y, z) = 0$,

$h_1 = 0.0524$, $h_2 = 0.0524$, $h_3 = 0.0524$, $\tau = 10^{-3}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Сеточная функция a_{i_1, i_2, i_3} строится по заданной функции $a(x, y, z)$ в соответствии с соотношением

$$(\text{усреднение по окрестностям } R_{\text{ih}}^{\mathfrak{S}_k}): \quad a_{i_1, i_2, i_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \int_{i_1 h_1}^{(i_1+1)h_1} \int_{i_2 h_2}^{(i_2+1)h_2} \int_{i_3 h_3}^{(i_3+1)h_3} a(x, y, z) dx dy dz.$$

Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.38 и 4.39 для временных значений t в сечении z ; числовые характеристики и листинг ЭВМ-

программы представлены в приложениях 1.4.3 и 2.4.3 и соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [66]).

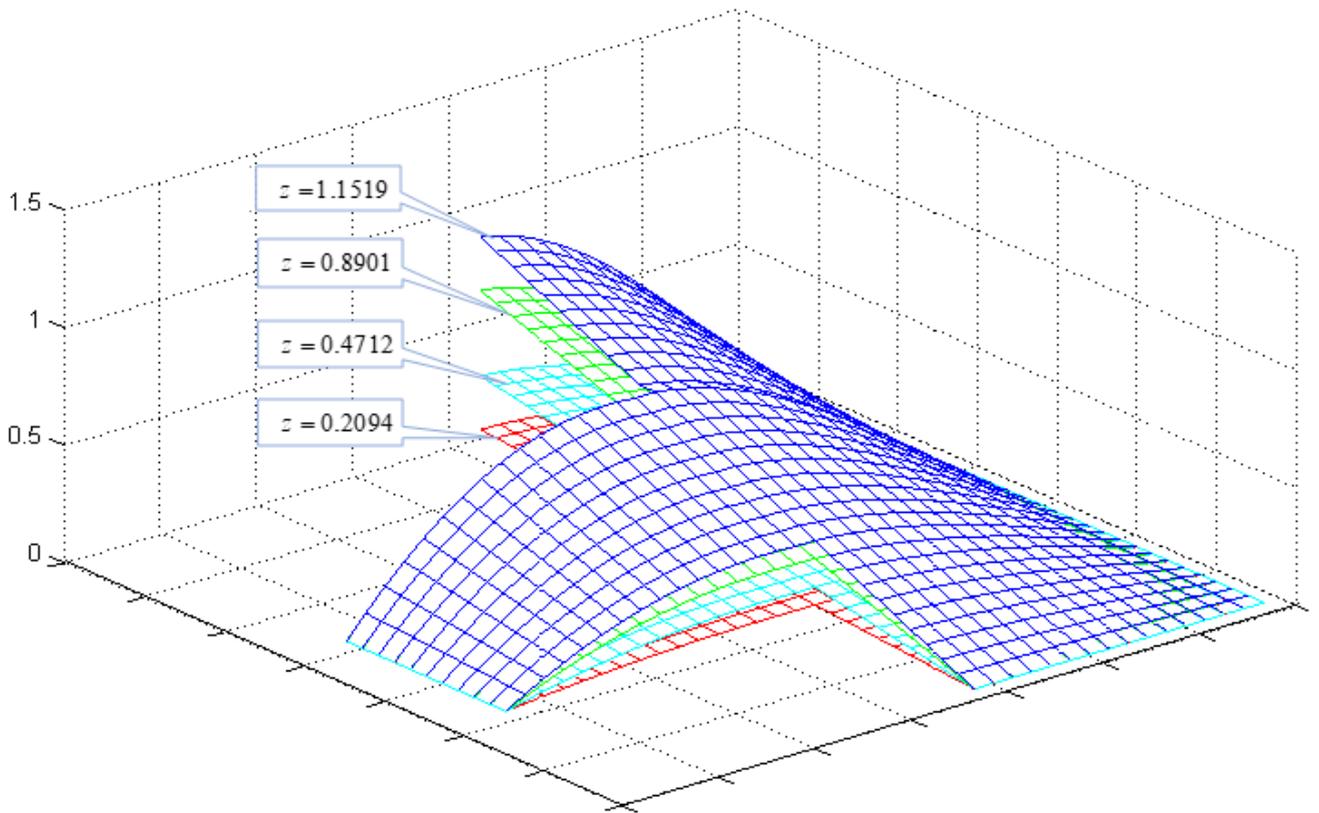


Рис. 4.38. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t=0$ в сечении z

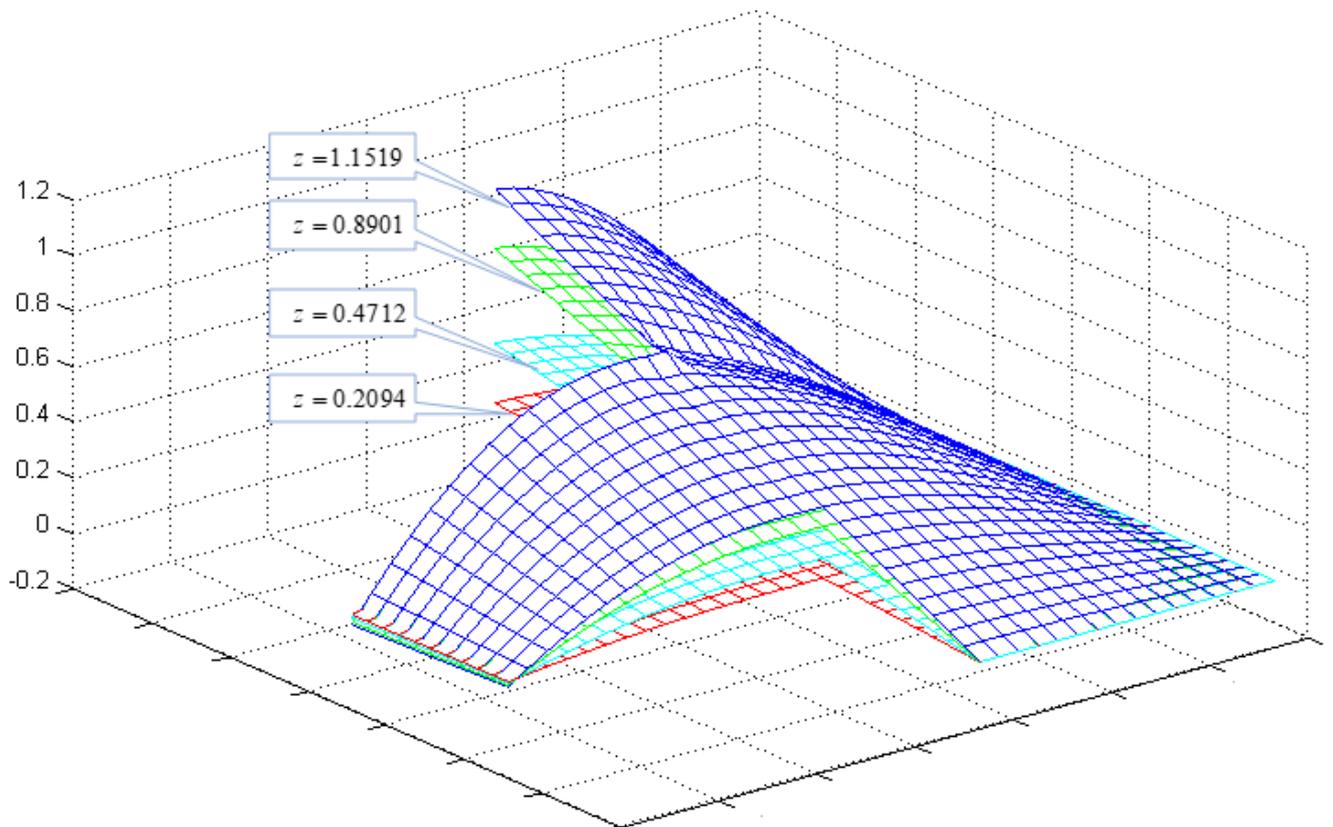


Рис. 4.39. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t=0.02$ в сечении z

4.3.3 Задачи колебаний упругих сложносочлененных конструкций в двумерной сети

Задача 1. Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^2$ структурирована подобластями \mathfrak{Z}_k ($k=1,2$) вместе с поверхностью S (рис. 4.40).

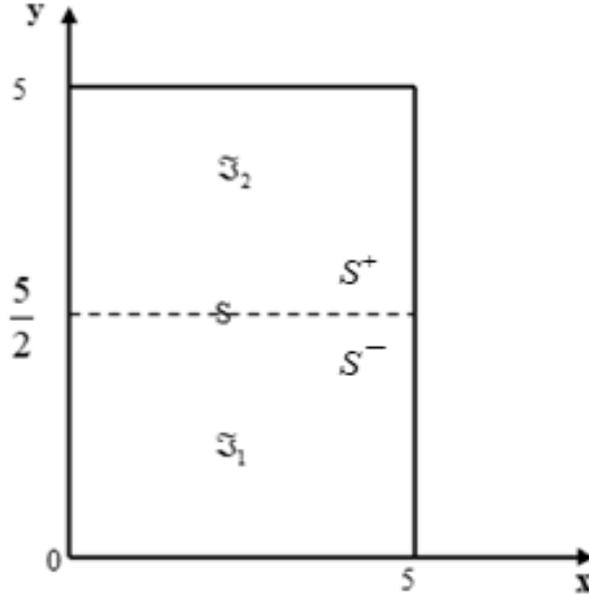


Рис. 4.40. Область \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ волнового процесса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y) u(x, y, t), \quad (1.130)$$

$$x, y \in \mathfrak{Z}, t \in (0, T],$$

соотношениями на S

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{5}{2} \in S^+} = u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{5}{2} \in S^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{5}{2} \in S^+} = \alpha \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{5}{2} \in S^-}, \quad (1.131)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x, y \in \mathfrak{Z}, \quad (1.132)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_k} = 0, \quad u(x, y, t) \Big|_{x=5 \in \mathfrak{Z}_k} = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad (1.133)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=5 \in \mathfrak{S}_2} = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right). \quad (1.134)$$

Соотношения (4.83) и (4.84), (4.85) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.81) – (4.83) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2}^{j-1})_{\mathfrak{S}_k}}{\tau^2} = (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k},$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S^+},$$

$$\frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{S^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{S^+}}{h_2},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right),$$

$$\frac{(u_{i_1, i_2}^1)_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = 0, \quad i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2},$$

$$(u_{0, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k} = 0, \quad (u_{N_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right), \quad k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, 0}^j)_{\mathfrak{S}_1} = 0, \quad (u_{i_1, N_2}^j)_{\mathfrak{S}_2} = \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right).$$

Исходные параметры: $a(x, y) = 4$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.0833$, $\tau = 0.0318$, $\tau = 0.0318$, $\alpha = 1$. Графическое изображение волнового поля – на рис. 4.41, 4.42 и 4.43 для временных значений t ; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.5.1 и 2.5.1, соответственно, (регистрация ЭВМ-программы [65]).

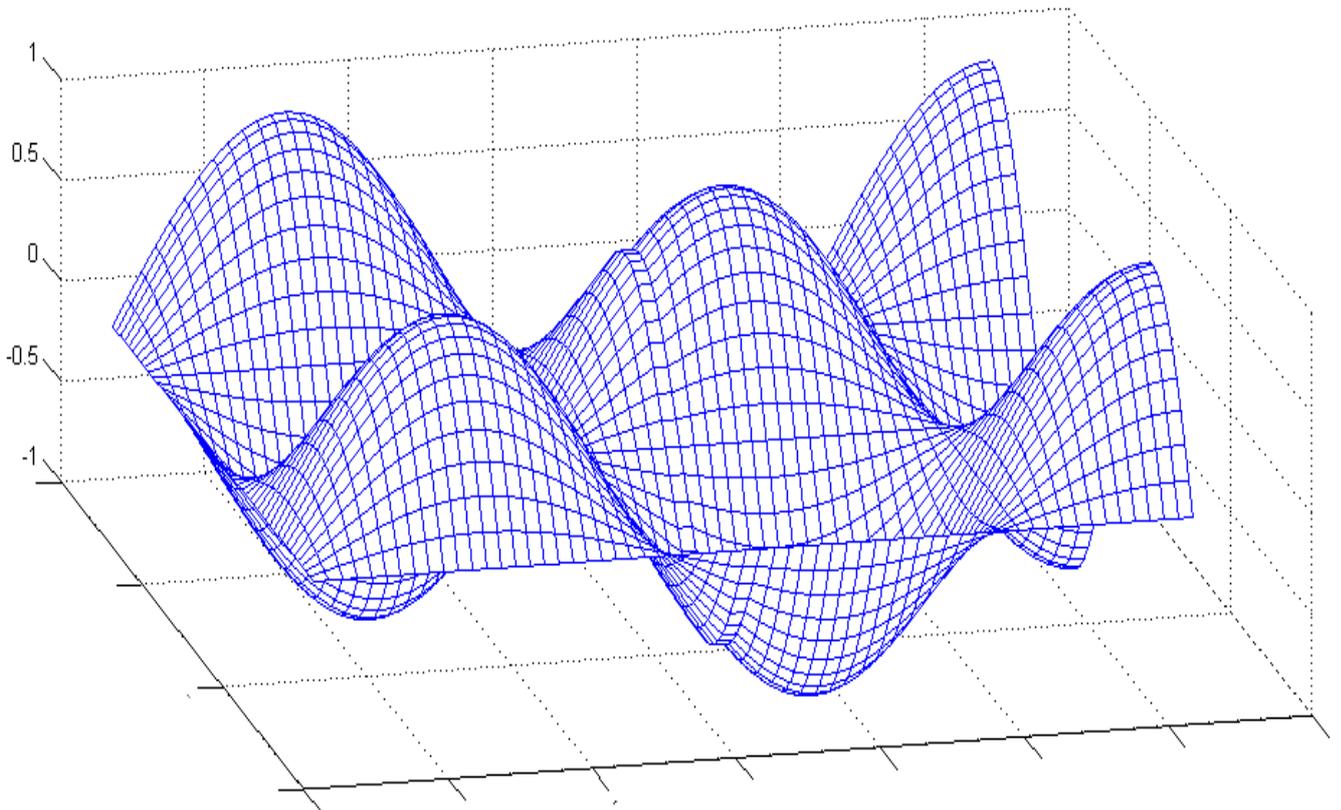


Рис. 4.41. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 0$

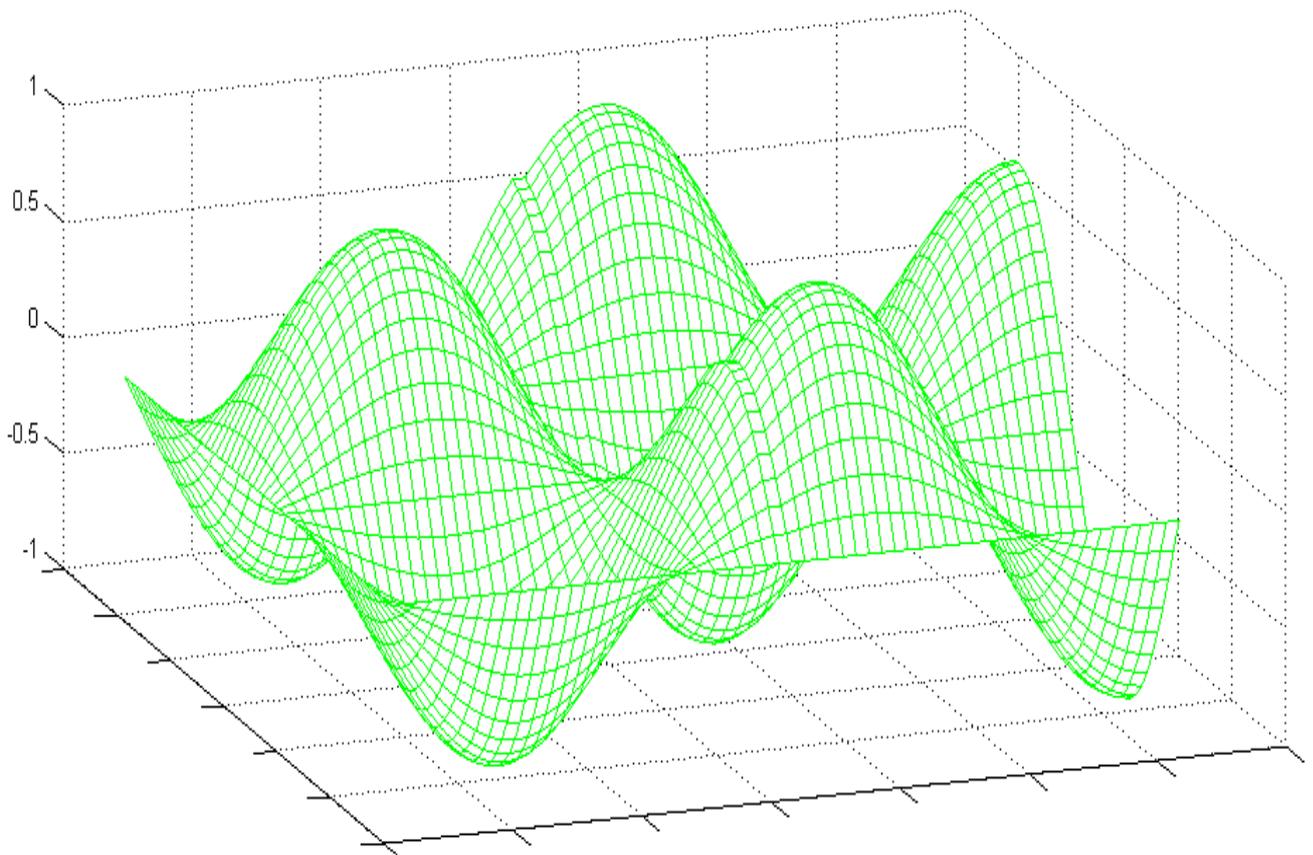


Рис. 4.42. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 0.6369$

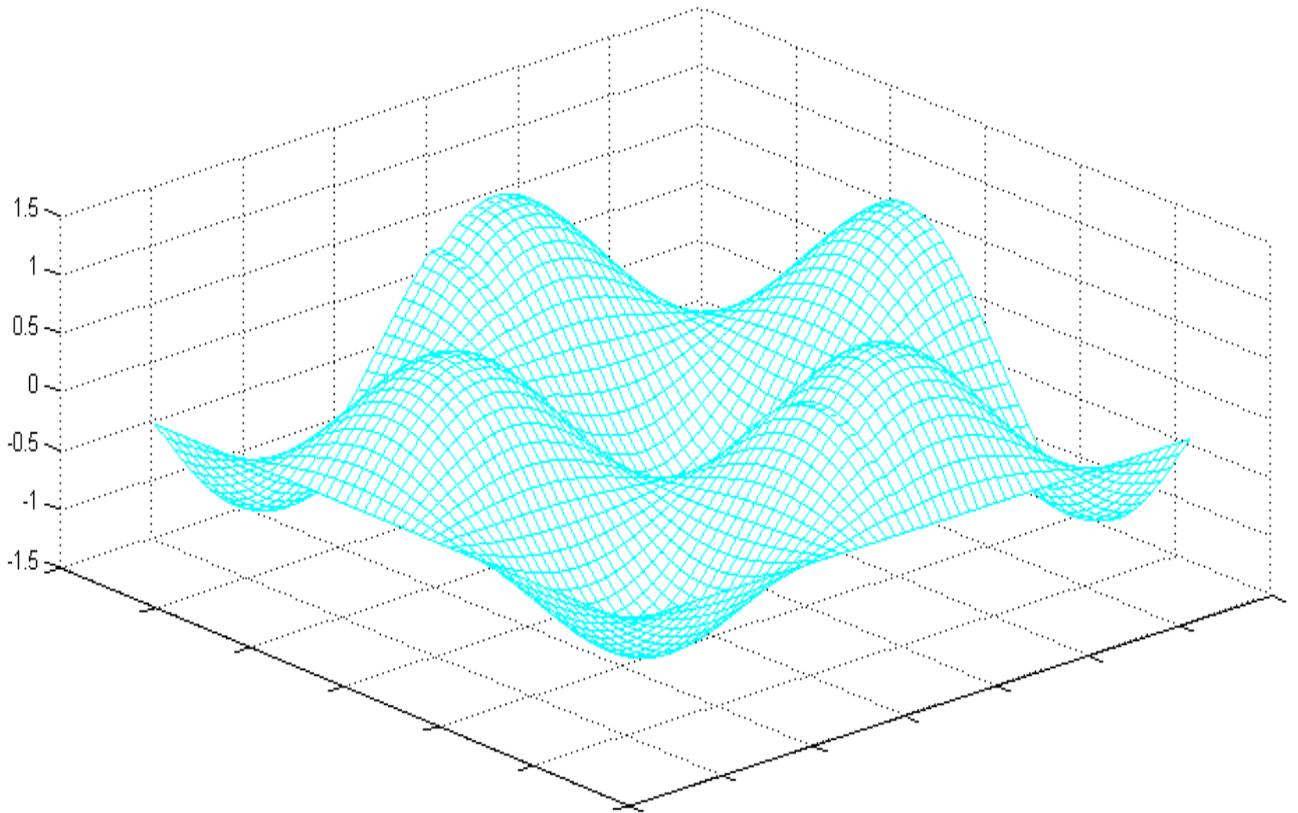


Рис. 4.43. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 0.9554$

Задача 2. Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^2$ структурирована подобластями $\mathfrak{Z}_k (k = \overline{1,3})$ вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 4.44).

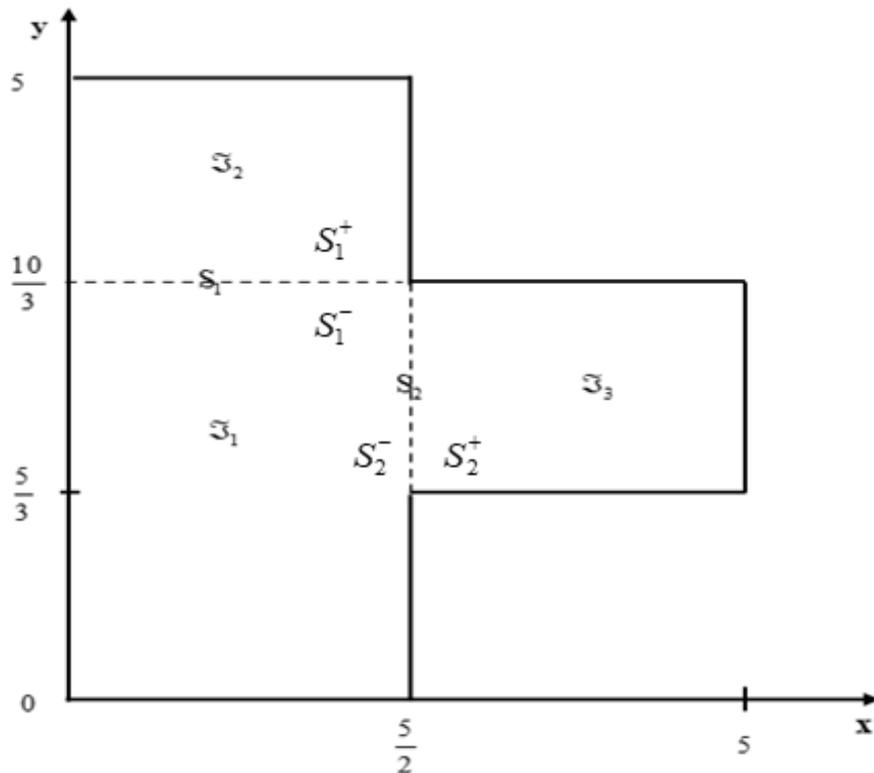


Рис. 4.44. Структура области \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ волнового процесса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = a(x, y) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b(x, y) u(x, y, t), \quad (1.135)$$

$$x, y \in \mathfrak{Z}, t \in (0, T],$$

соотношениями на S_1 и S_2

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^+} = u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^-}, \quad (1.136)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^+} = u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^-},$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^-}, \quad (1.137)$$

и соотношениями

$$u(x, y, t) \Big|_{t=0} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x, y \in \mathfrak{Z}, \quad (1.138)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = 0, \quad u(x, y, t) \Big|_{x=\frac{5}{2} \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad (1.139)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{x=5 \in \mathfrak{Z}_3} = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad u(x, y, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{Z}_1} = 0, \quad (1.140)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{5}{3} \in \mathfrak{Z}_3} = \frac{1}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad (1.141)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=\frac{10}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad (1.142)$$

$$u(x, y, t) \Big|_{y=5 \in \mathfrak{Z}_2} = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right). \quad (1.143)$$

Соотношения (4.89) и (4.90), (4.91), (4.92), (4.93), (4.94) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.86) – (4.89) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^j)_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2}^{j-1})_{\mathfrak{S}_k}}{\tau^2} = (a_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \frac{(u_{i_1, i_2+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} \right) + (b_{i_1, i_2})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k},$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^-} = (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^+}, \frac{(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^-} - (u_{i_1, N_2-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1^+}}{h_2},$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^-} = (u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^+}, \frac{(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^-} - (u_{N_1-1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} - (u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2^+}}{h_1},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right), \frac{(u_{i_1, i_2}^1)_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = 0, i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2},$$

$$(u_{0, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = 0, (u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right),$$

$$(u_{N_1, i_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right), (u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = 0,$$

$$(u_{i_1, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right),$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right),$$

$$(u_{i_1, N_2}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} = \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right).$$

Исходные параметры: $a(x, y) = 4$, $b(x, y) = 0$, $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.0556$, $\tau = 0.0185$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение волнового поля – на рис. 4.45 – 4.47 для временных значений t ; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.5.2 и 2.5.2, соответственно (регистрация ЭВМ-программы [65]).

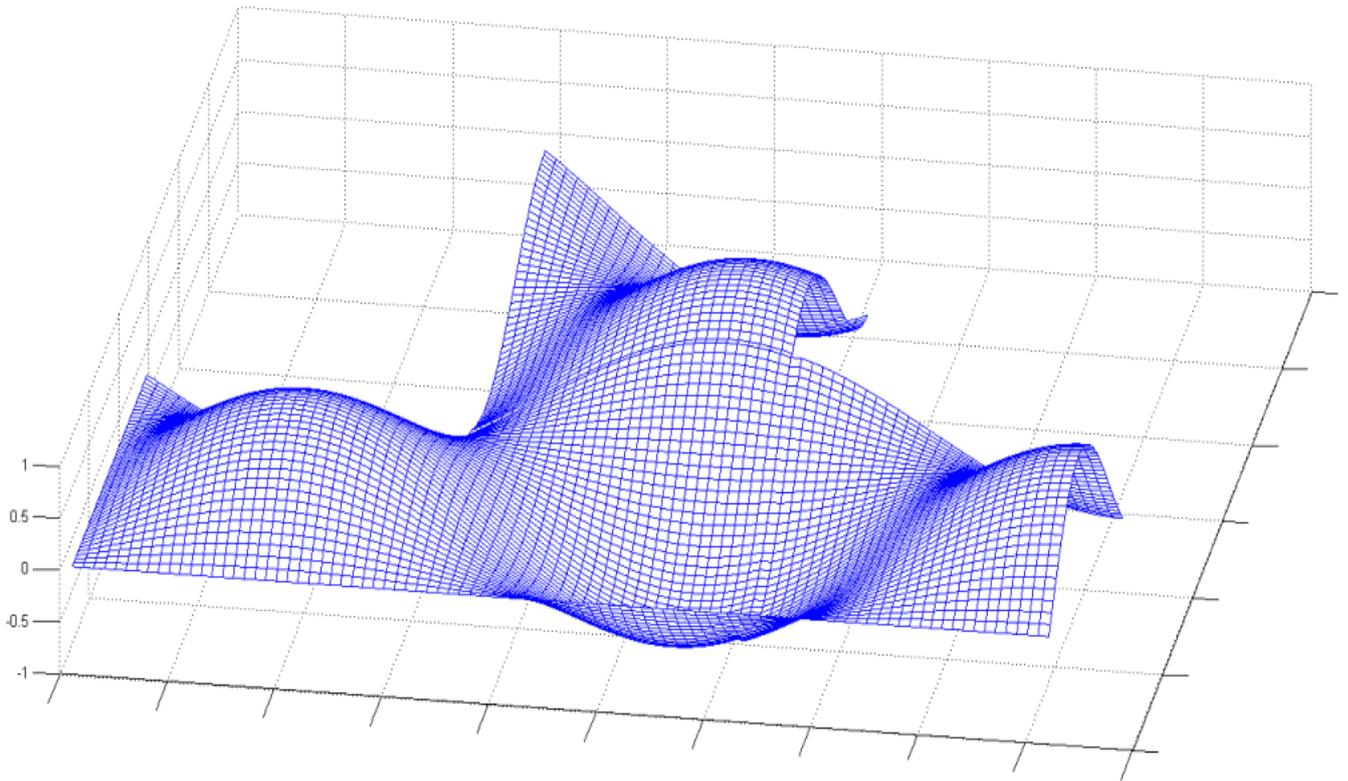


Рис. 4.45. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 0$

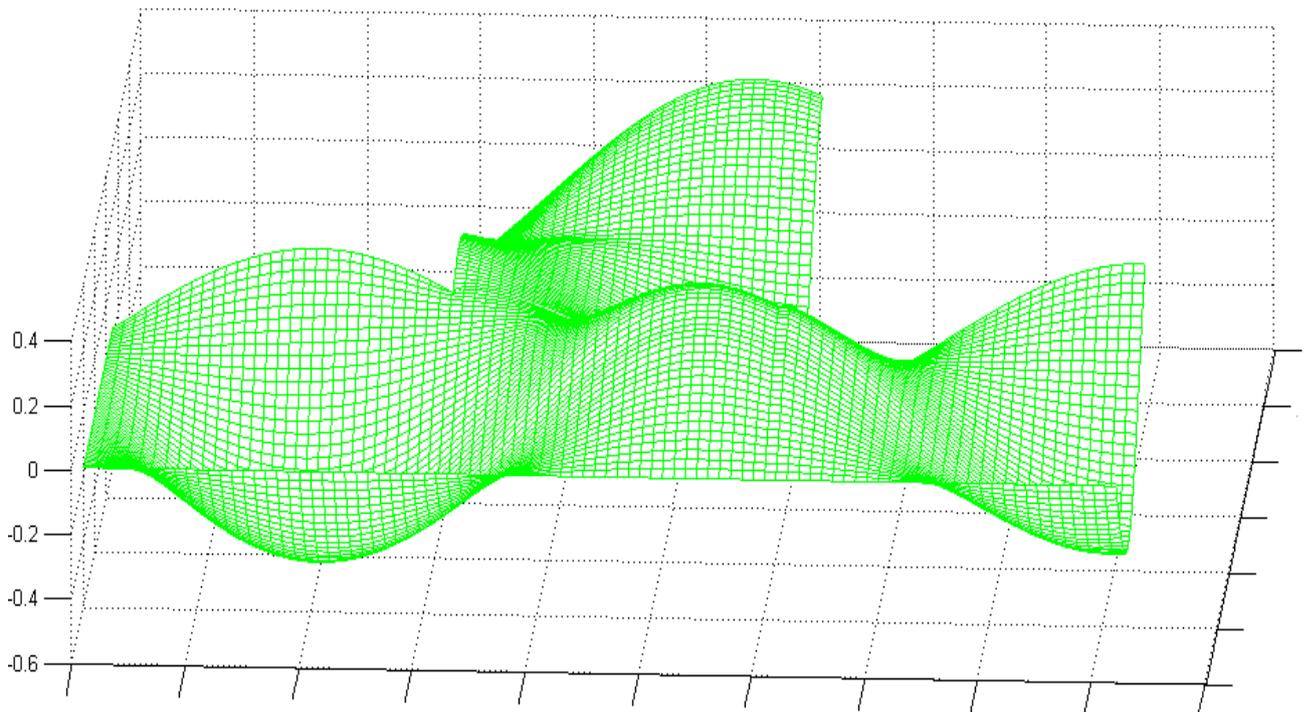


Рис. 4.46. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 1.85$

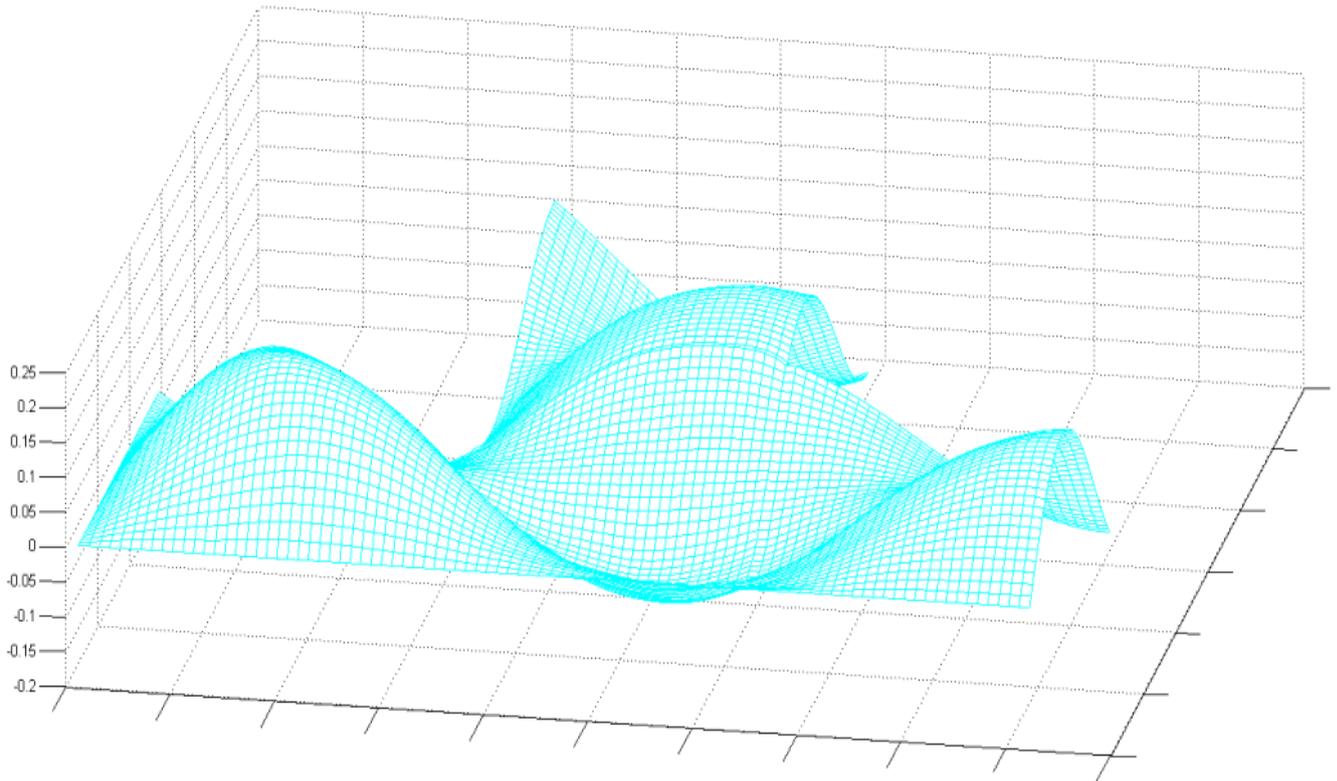


Рис. 4.47. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 7.38$

4.3.4 Задачи колебаний упругих сложносочлененных конструкций в трехмерной сети

Задача 1. Пусть область $\mathfrak{V} \subset R^3$ структурирована подобластями \mathfrak{V}_k ($k = 1, 2$) вместе с поверхностью S (рис. 4.48).

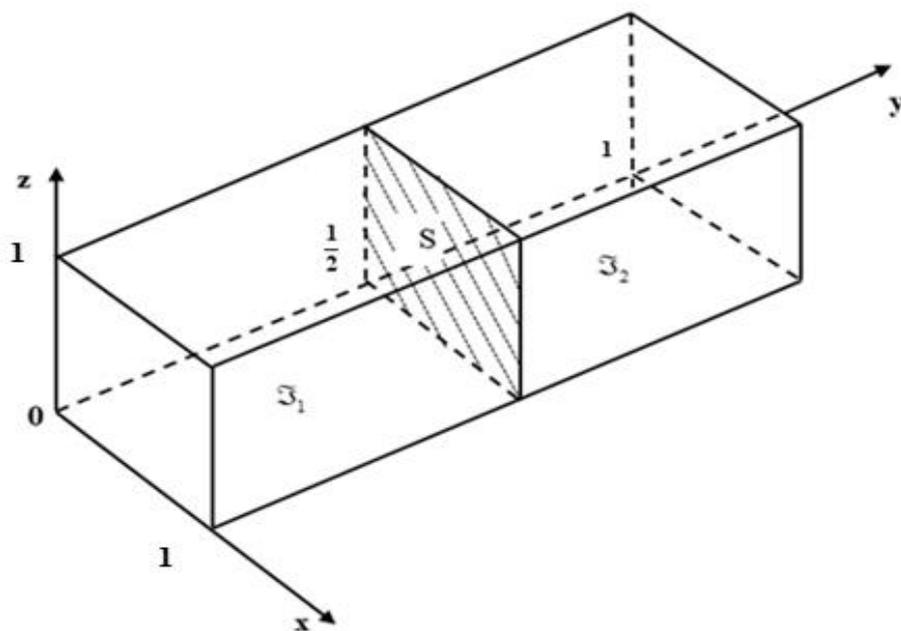


Рис. 4.48. Область \mathfrak{V}

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ волнового процесса в носителе процесса определяются уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = a(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + b(x, y, z)u(x, y, z, t), \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, t \in (0, T], \end{aligned} \quad (1.144)$$

соотношениями на S

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{1}{2} \in S^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{1}{2} \in S^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{1}{2} \in S^+} = \alpha \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{1}{2} \in S^-}, \end{aligned} \quad (1.145)$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) e^{-z^2}, \quad \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, \quad (1.146)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{S}_k} = -y^3 \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{6} \right), \quad (1.147)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=1 \in \mathfrak{S}_k} = \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad (1.148)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad (1.149)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=1 \in \mathfrak{S}_2} = \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad (1.150)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = e^{-t^2} \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right), \quad (1.151)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=1 \in \mathfrak{S}_k} = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(1+t)^2} + e^{-(1-t)^2}}{2} \right). \quad (1.152)$$

Соотношения (4.97) и (4.98), (4.99), (4.100), (4.101), (4.102), (4.103) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.95) –

(4.97) формирует разностную схему:

$$\frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3}^{j-1})_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} + \frac{(u_{i_1, i_2, i_3+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_3^2} \right) + \\ + (b_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, i_3 = \overline{1, N_3 - 1}, j = \overline{1, K - 1}, k = 1, 2,$$

$$(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S^-} = (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S^-} - (u_{i_1, N_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S^+}}{h_2},$$

$$(u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k} = \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) e^{-z_{i_3}^2}, \quad \frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^1)_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = 0,$$

$$i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}, i_3 = \overline{0, N_3}, k = 1, 2,$$

$$(u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = -\frac{1}{6} y_{i_2}^3 \left(e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2} \right),$$

$$(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = \left(y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right),$$

$$(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = 0, \quad (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} = \left(x_{i_1} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right),$$

$$(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = e^{-t_j^2} \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right),$$

$$(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(1+t_j)^2} + e^{-(1-t_j)^2}}{2} \right).$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$, $h_1 = 0.0333$, $h_2 = 0.0333$, $h_3 = 0.0333$, $\tau = 0.0185$, $\alpha = 1$. Графическое изображение волнового поля – на рис. 4.49, 4.50 для временных значений t ; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.6.1 и 2.6.1, соответственно.

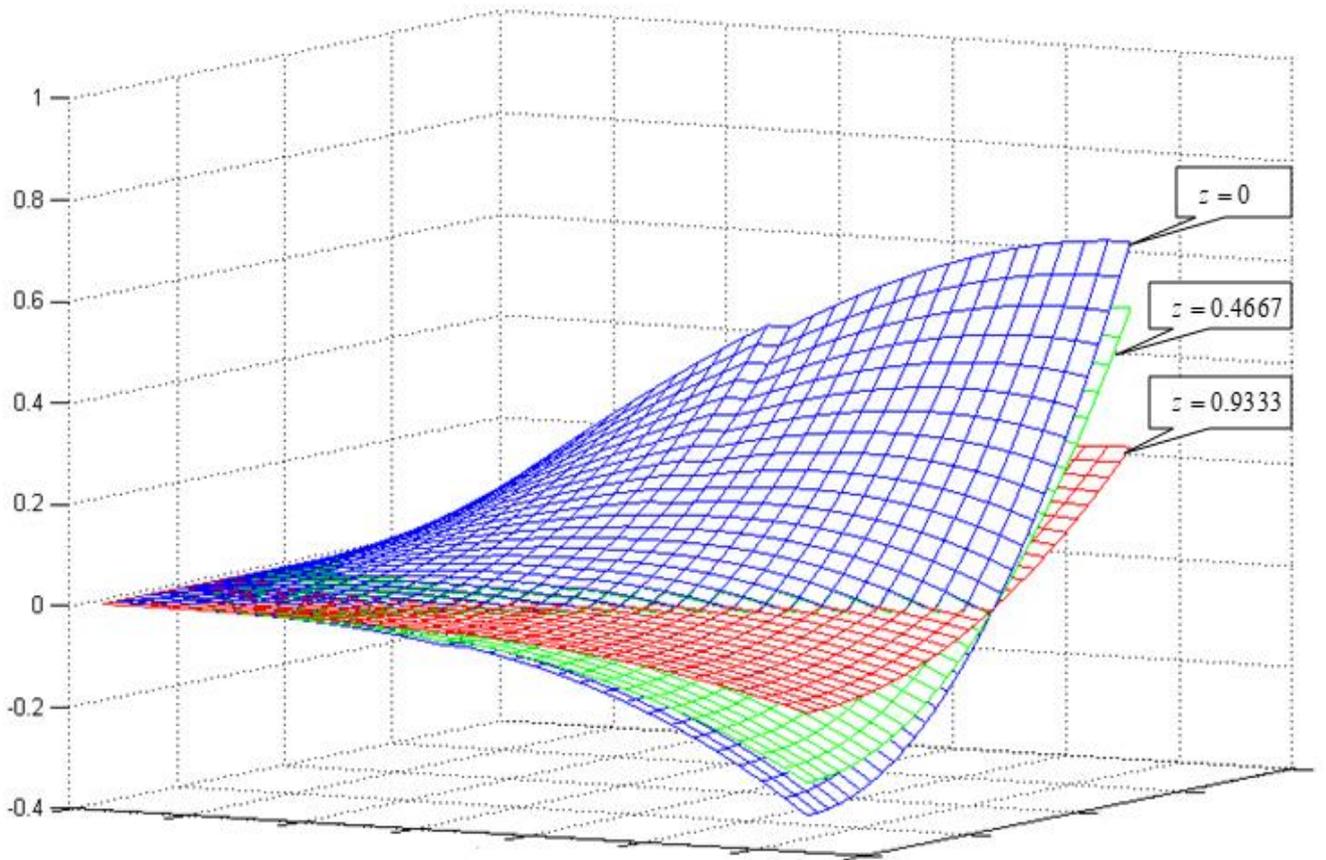


Рис. 4.49. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, z, t)$ при $t=0$ в сечении z

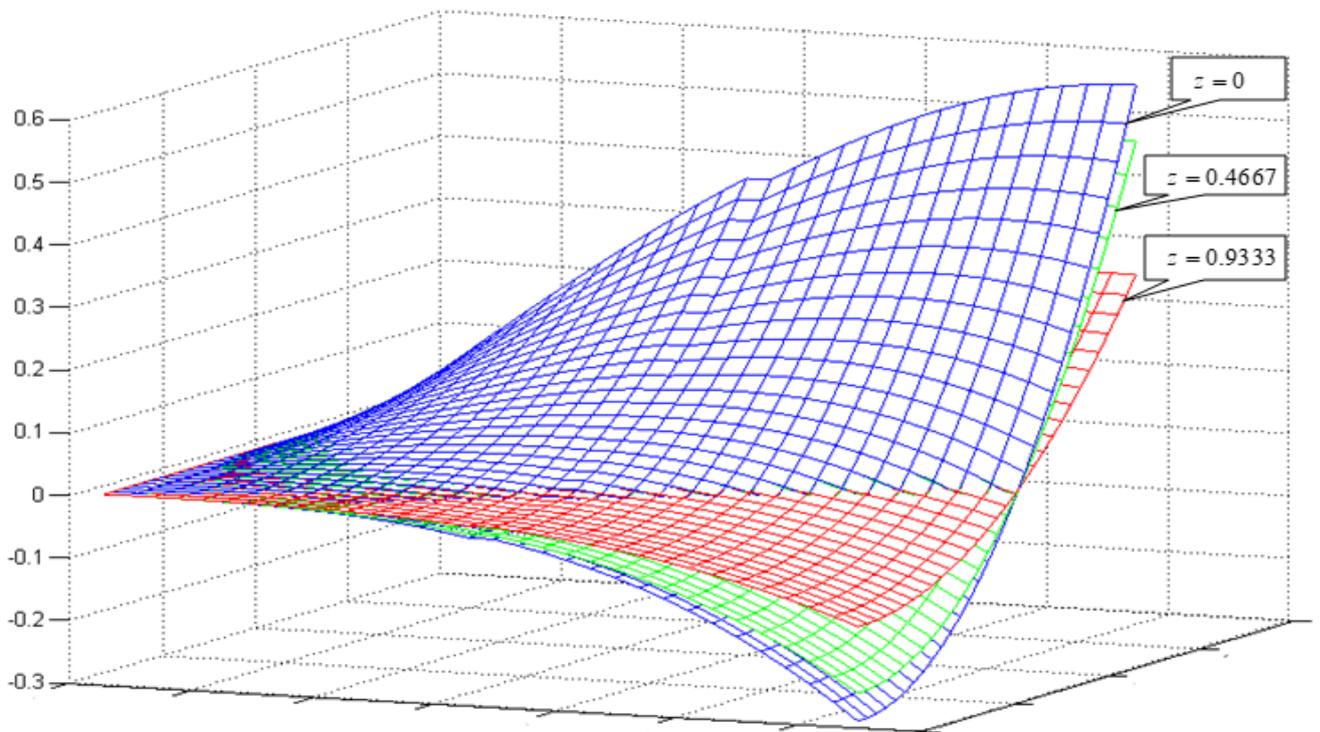


Рис. 4.50. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, z, t)$ при $t=0.352$ в сечении z

Задача 2. Пусть область $\mathfrak{V} \subset R^3$ структурирована подобластями \mathfrak{V}_k ($k = \overline{1, 3}$) вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 4.51).

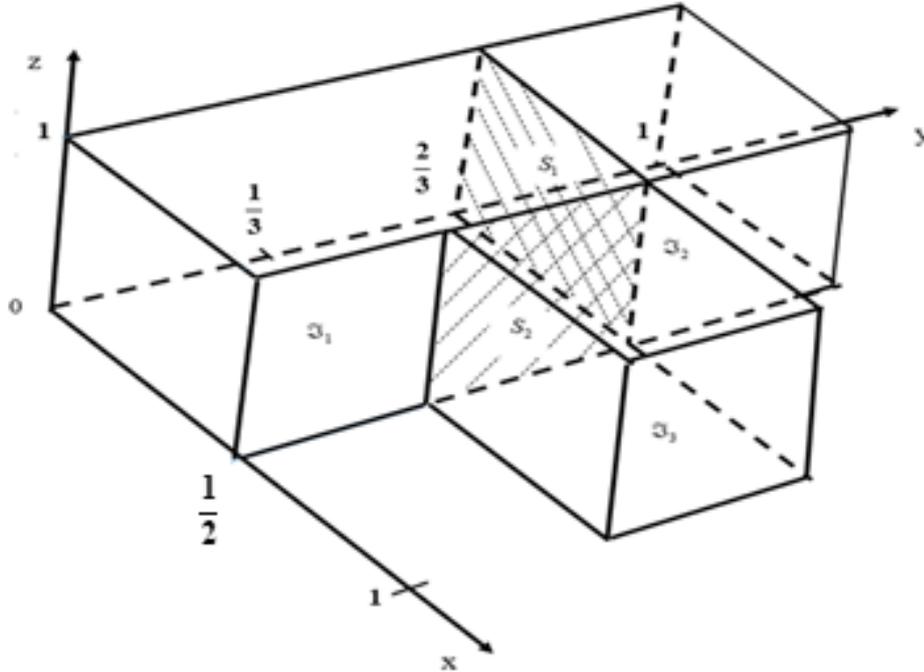


Рис. 4.51. Область \mathfrak{V}

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ волнового процесса в носителе процесса определяются уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = a(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + b(x, y, z)u(x, y, z, t), \quad x, y, z \in \mathfrak{V}, t \in (0, T], \end{aligned} \quad (1.153)$$

соотношениями на S_1 и S_2

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^-}, \end{aligned} \quad (1.154)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^-}, \end{aligned} \quad (1.155)$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) e^{-z^2}, \quad \left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x, y, z \in \mathfrak{S}, \quad (1.156)$$

$$u(x, y, z, t)|_{x=0 \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = -y^3 \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{6} \right), \quad (1.157)$$

$$u(x, y, z, t)|_{x=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \left(\frac{1}{4} y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad (1.158)$$

$$u(x, y, z, t)|_{x=1 \in \mathfrak{S}_3} = \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad u(x, y, z, t)|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad (1.159)$$

$$u(x, y, z, t)|_{y=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_3} = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad (1.160)$$

$$u(x, y, z, t)|_{y=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3} = \left(\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad (1.161)$$

$$u(x, y, z, t)|_{y=1 \in \mathfrak{S}_2} = \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad (1.162)$$

$$u(x, y, z, t)|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = e^{-t^2} \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right), \quad (1.163)$$

$$u(x, y, z, t)|_{z=1 \in \mathfrak{S}_k} = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(1+t)^2} + e^{-(1-t)^2}}{2} \right). \quad (1.164)$$

Соотношения (4.107) и (4.108), (4.109), (4.110), (4.111), (4.112), (4.113), (4.114), (4.115) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.104) – (4.107) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3}^{j-1})_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_2^2} + \frac{(u_{i_1, i_2, i_3+1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}}{h_3^2} \right) + \\ & + (b_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{S}_k} (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \quad i_3 = \overline{1, N_3 - 1}, \quad j = \overline{1, K - 1}, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_1^-} = \left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{S_1^+}, \quad \frac{\left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_1^-} - \left(u_{i_1, N_2-1, i_3}^{j+1}\right)_{S_1^-}}{h_2} = \alpha_1 \frac{\left(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1}\right)_{S_2} - \left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{S_1^+}}{h_2},$$

$$\left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_2^-} = \left(u_{0, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_2^+}, \quad \frac{\left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_2^-} - \left(u_{N_1-1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_1^-}}{h_1} = \alpha_2 \frac{\left(u_{1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_3} - \left(u_{0, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_2^+}}{h_1},$$

$$\left(u_{i_1, i_2, i_3}^0\right)_{S_k} = \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3}\right) e^{-z_{i_3}^2}, \quad \frac{\left(u_{i_1, i_2, i_3}^1\right)_{S_k} - \left(u_{i_1, i_2, i_3}^0\right)_{S_k}}{\tau} = 0,$$

$$i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\left(u_{0, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_1 \cup S_2} = -\frac{1}{6} y_{i_2}^3 \left(e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2} \right),$$

$$\left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_1 \cup S_2} = \left(\frac{1}{4} y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right),$$

$$\left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_3} = \left(y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right), \quad \left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{S_1} = 0,$$

$$\left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{S_3} = \left(\frac{1}{3} x_{i_1}^2 - \frac{1}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right),$$

$$\left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_3} = \left(\frac{2}{3} x_{i_1}^2 - \frac{8}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right),$$

$$\left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_2} = \left(x_{i_1} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3} + t_j)^2} + e^{-(z_{i_3} - t_j)^2}}{2} \right),$$

$$\left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_k} = e^{-t_j^2} \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right), \quad \left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_k} = \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(1+t_j)^2} + e^{-(1-t_j)^2}}{2} \right).$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$, $h_1 = 0.0333$, $h_2 = 0.0333$, $h_3 = 0.0333$, $\tau = 0.0185$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение волнового поля — на рис. 4.52, 4.53 для временных значений t в сечении z ; числовые характеристики

и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.6.2 и 2.6.2, соответственно.

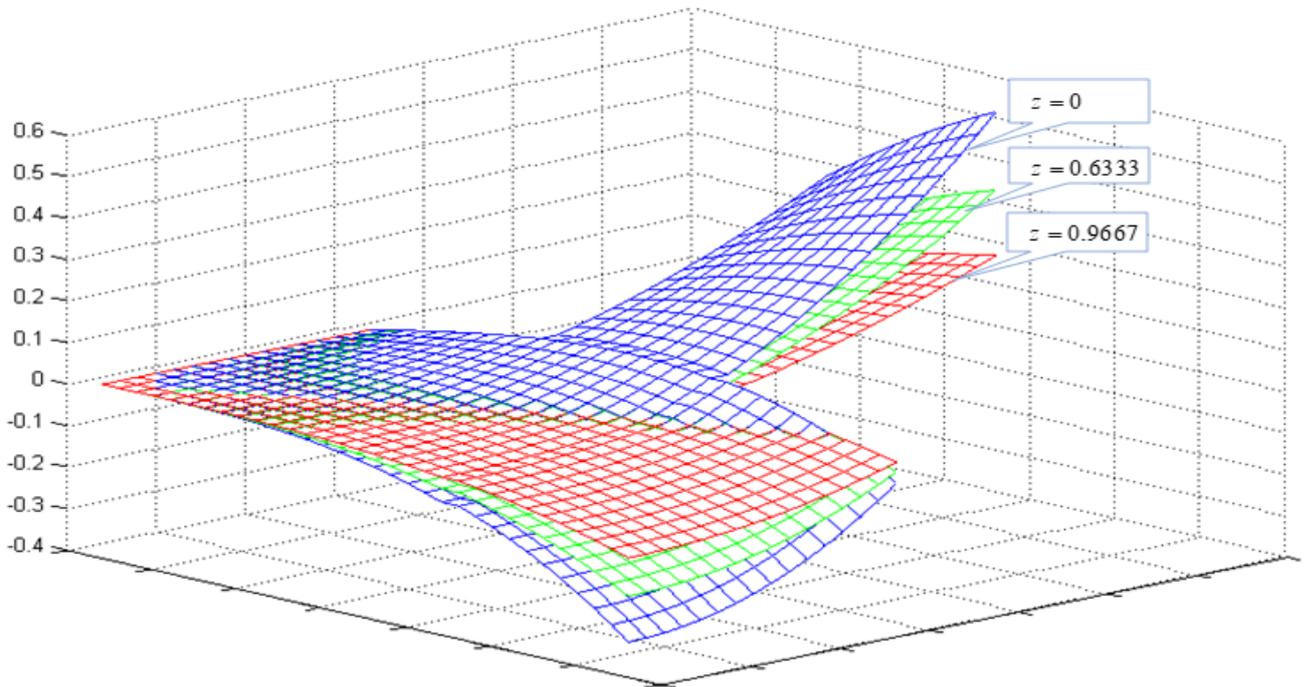


Рис. 4.52. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, z, t)$ при $t=0$ в сечении z

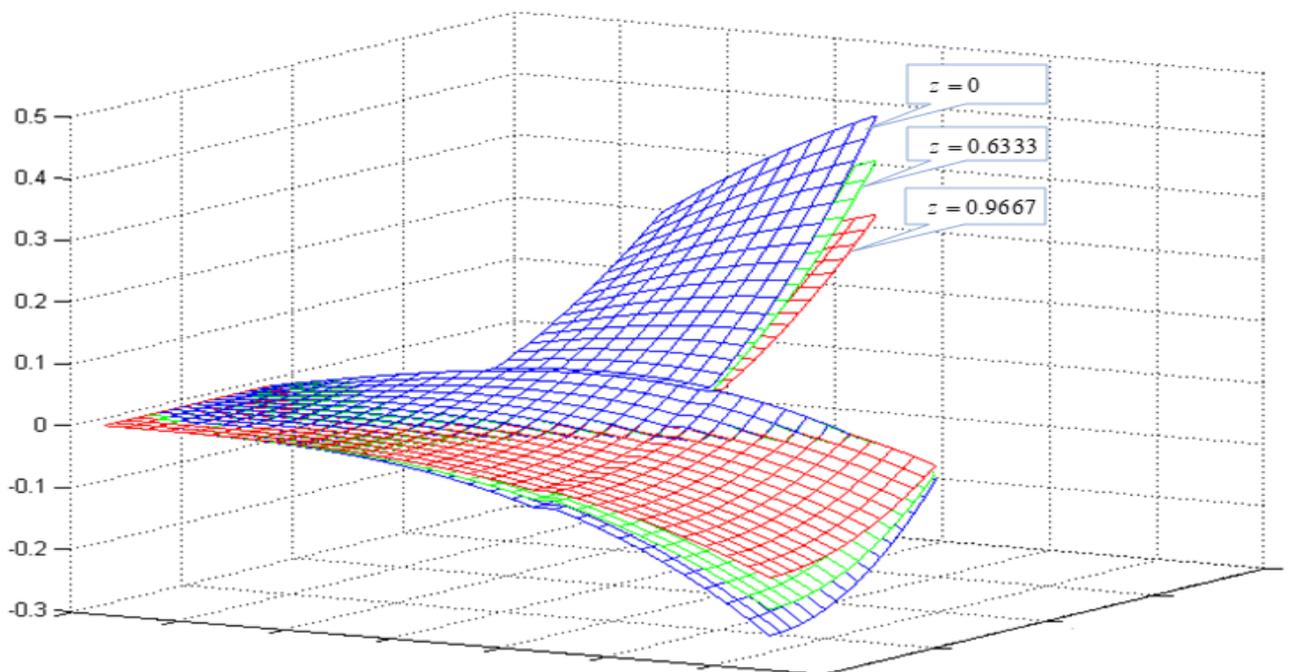


Рис. 4.53. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, z, t)$ при $t=0.537$ в сечении z

4.3.5 Задача переноса теплоты в слоистой области

Задача 1. Пусть слоистая область $\mathfrak{Z} \subset R^3$ структурирована подобластями $\mathfrak{Z}_k (k = \overline{1,4})$ вместе с поверхностями S_1, S_2 и S_3 (рис. 4.54).

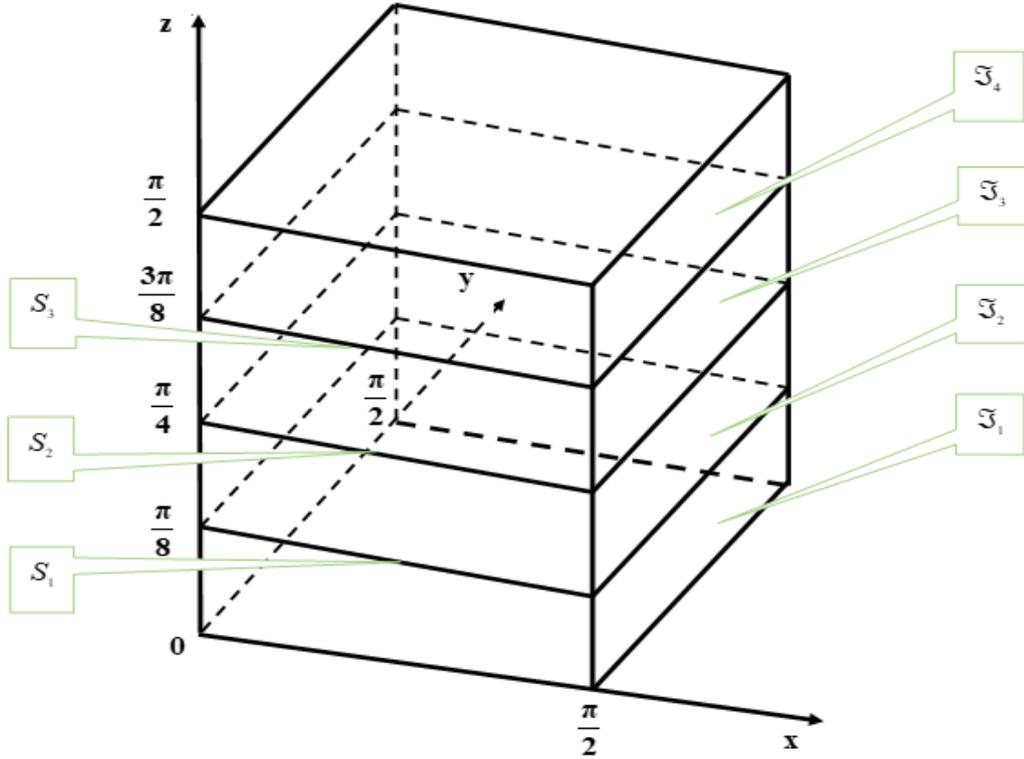


Рис. 4.54. Слоистая область \mathfrak{Z}

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = a(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + b(x, y, z)u(x, y, z, t), \quad x, y, z \in \mathfrak{Z}, t \in (0, T], \quad (1.165)$$

соотношениями на S_1, S_2 и S_3

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^+} &= u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^+} &= \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^-}, \end{aligned} \quad (1.166)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} &= u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} &= \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \end{aligned} \quad (1.167)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^+} &= u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^-}, \\ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^+} &= \alpha_3 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^-}, \end{aligned} \quad (1.168)$$

И СООТНОШЕНИЯМИ

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = xyz \cos x, \quad x, y, z \in \mathfrak{I}, \quad (1.169)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{I}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2te^{-t}yz, \quad (1.170)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{I}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{I}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xz \cos x - \pi t e^{-t}z \sin x, \quad (1.171)$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=0 \in \mathfrak{I}_1} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{I}_4} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xy \cos x - \pi t e^{-t}y \sin x. \quad (1.172)$$

Соотношения (4.120) и (4.121), (4.122), (4.123) – начальные и граничные условия, соответственно.

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений (4.116) – (4.119) формирует разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - (u_{i_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{I}_k}}{\tau} = (a_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{I}_k} \left(\frac{(u_{i_1+1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} + (u_{i_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}}{h_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(u_{i_1, i_2+1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} + (u_{i_1, i_2-1, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}}{h_2^2} + \frac{(u_{i_1, i_2, i_3+1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} - 2(u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k} + (u_{i_1, i_2, i_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}}{h_3^2} \right) + \\ & + (b_{i_1, i_2, i_3})_{\mathfrak{I}_k} (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{I}_k}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \quad i_3 = \overline{1, N_3 - 1}, \quad j = \overline{1, K - 1}, \quad k = \overline{1, 4}, \\ & (u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{S_1^-} = (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, i_2, N_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_1}}{h_3} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, i_2, 1}^{j+1})_{S_2} - (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{S_1^+}}{h_3}, \\ & (u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{S_2^-} = (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{i_1, i_2, N_3-1}^{j+1})_{\mathfrak{I}_2}}{h_3} = \alpha_2 \frac{(u_{i_1, i_2, 1}^{j+1})_{S_3} - (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{S_2^+}}{h_3}, \end{aligned}$$

$$\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_3^-} = \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_3^+}, \quad \frac{\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_3^-} - \left(u_{i_1, i_2, N_3-1}^{j+1}\right)_{S_3^-}}{h_3} = \alpha_3 \frac{\left(u_{i_1, i_2, 1}^{j+1}\right)_{S_4} - \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_3^+}}{h_3},$$

$$\left(u_{i_1, i_2, i_3}^0\right)_{S_k} = x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} \cos(x_{i_1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad k = \overline{1, 4},$$

$$\left(u_{0, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} = 0, \quad \left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} = -2t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3},$$

$$\left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} = 0, \quad \left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}),$$

$$\left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_1} = 0, \quad \left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_4} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} y_{i_2} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} \sin(x_{i_1}).$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$, $h_1 = 0.0561$, $h_2 = 0.0561$, $h_3 = 0.0561$, $\tau = 10^{-3}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 4.55 для временных значений t в сечении x ; числовые характеристики и листинг ЭВМ-программы представлены в приложениях 1.7.1 и 2.7.1, соответственно (регистрация ЭВМ-программы [66]).

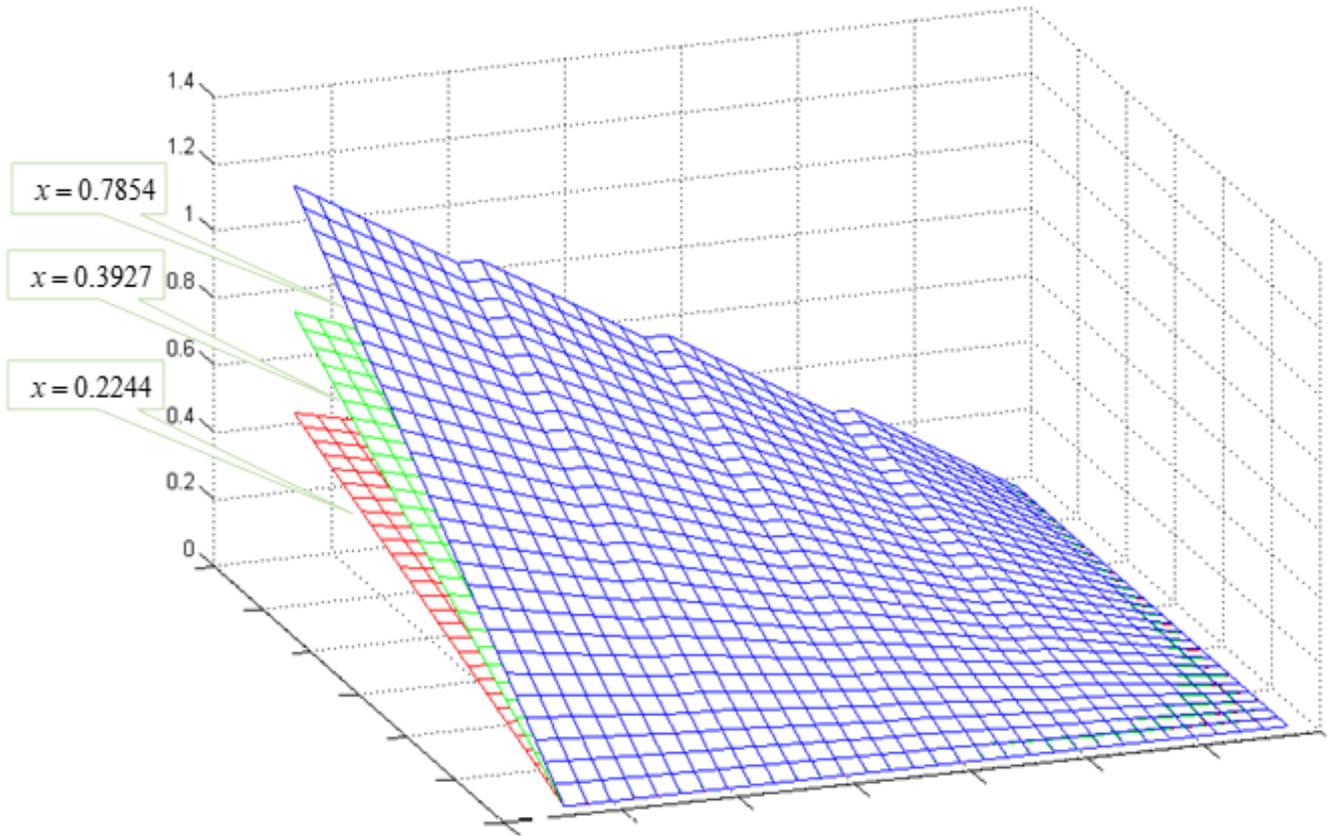


Рис. 4.55. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 5 \cdot 10^{-2}$ в сечении x

Выводы

1. Сформированы и обоснованы модули программного комплекса для решения серии ориентированных на прикладные задачи, относящиеся к анализу эволюционных процессов переноса сплошных сред и процессов колебаний в сложноструктурированных носителях.
2. Представлено подробное описание функционалов и модулей программного комплекса, рекомендации их применимости.
3. Проведены численные расчеты задач прикладного характера по разработанным алгоритмам, сформированных на базе устойчивых и условно устойчивых разностных схем. Численные результаты представлены в виде графиков и таблиц.

Заключение

В процессе исследования получены следующие новые результаты:

1. Разработаны модифицируемые средства математического описания и анализа сетеподобных носителей различных видов эволюционных волновых процессов и процессов переноса сплошных и дискретных сред, осуществлено представление конечномерных аналогов этих процессов.

2. Разработаны средства построения конечномерных аналогов начально-краевых задач уравнения переноса и волнового уравнения с сетеподобными носителями, разработаны методы аппроксимаций на основе формализмов разностных схем с учетом многофазности среды.

3. Проведено описание двухслойных и трехслойных разностных схем, обосновано их использование (погрешность, устойчивость, сходимость) при математическом моделировании формализмами начально-краевых задач уравнения переноса и волнового уравнения с сетеподобными носителями с учетом свойства многофазности среды.

4. На базе разработанных алгоритмов представлен программный комплекс, используемый при решении проблемно-ориентированных задач промышленного назначения, содержащий структурное описание функционалов и модулей программного комплекса, рекомендации их применимости.

5. Проведены численные расчеты задач прикладного характера по разработанным алгоритмам, сформированных на базе устойчивых и условно устойчивых разностных схем. Численные результаты представлены в виде графиков и таблиц, осуществлена сертификация программной продукции для ЭВМ в установленном порядке Российской Федерации.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

Рекомендации при численном анализе многофазных процессов: использование классов суммируемых функций, для которых выбирается пространство в соответствии с отличительными физическими свойствами изучаемых процессов (в том числе явлений в местах ветвлений сетеподобного носителя процесса), построение сеточных функций разностных схем основано на

формировании усреднений исходных (заданных) функций в точках полученной сетки области определений исходных функций (значения усреднений приближают значения исходных функций в норме выбранного пространства с любой наперед заданной точностью). Аппроксимации дифференциальных выражений, используемых в символическом описании моделей изучаемого процесса, являются классическими, используемыми в инженерной практике.

Рекомендации при использовании разностных схем конечномерных аналогов процессов переноса: используются двух- и трехслойные разностные схемы, при этом следует выбирать значение весового параметра схемы из интервала изменения его в соответствии с указаниями пунктов 3.2 и 3.3.

Рекомендации при использовании разностных схем конечномерных аналогов волновых процессов: разностные схемы должны содержать не менее трех слоев, симметричные разностные схемы (устойчивость их имеет место для выбранного значения весового параметра схемы из интервала изменения его в соответствии с указаниями пункта 3.4, как показывают численные эксперименты, можно рекомендовать пользоваться безусловно устойчивой симметричной схемой с весовым параметром, равным $\frac{1}{4}$ (гарантируется достаточная точность при малых ресурсах времени работы ЭВМ-программы).

Рекомендации при использовании алгоритмического языка: алгоритмы программного комплекса допускают использование любого алгоритмического языка уровня PascalABC.NET и выше.

Перспективы дальнейшей разработки темы: развитие исследуемой задачи имеет следующие естественные направления: 1) формирование совокупности кластеров пространств для использования изучаемых типов физических процессов; 2) разработка разностных схем для изучаемых типов физических процессов; 3) оптимизационные задачи изучаемых типов физических процессов (задачи параметрической оптимизации, стартовой оптимизации, задачи распределенного и точечного управления).

Список литературы

1. Белишев, М. И. О граничной управляемости динамической системы, описываемой волновым уравнением на одном классе графов (на деревьях) / М. И. Белишев // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004. – Т. 308. – С. 23-47.
2. Боровских, А. В. Формула распространения волн для одномерной неоднородной среды / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 758-767.
3. Буничева, А. Я. Вычислительный эксперимент в гемодинамике / А. Я. Буничева, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. П. Фаворский // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 920-935.
4. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
5. Бутковский, А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
6. Балабан, О. Р. Разностная схема численного анализа динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях / О. Р. Балабан, А. В. Иванов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2016. – № 2. – С. 481-489.
7. Волкова, А. С. Единственность решения одной задачи Дирихле на графе / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2012. – Т. 17, Вып. 2. – С. 527-529.
8. Волкова, А. С. Задача граничного управления сложносочлененной упругой системой струн / А. С. Волкова // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 4(50). – С. 79-83.
9. Волкова, А. С. Задача граничного управления дифференциальной системой на графе / А. С. Волкова, В. В. Провоторов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2012, Вып. 1(39). – С. 30-32.
10. Волкова, А. С. Обобщенные решения краевой задачи для волнового уравнения на графе / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия:

Естественные и технические науки. – 2011. – Т. 16, Вып. 4. – С. 1050-1052.

11. Волкова, А. С. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе / А. С. Волкова, В. В. Провоторов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2014. – №3. – С. 3-18.

12. Волкова, А. С. Математическая модель переноса вещества по графу кровеносных сосудов при наличии диффузии / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – Т. 19, Вып. 2. – С. 597-599.

13. Волкова, А. С. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе / А. С. Волкова, Ю. А. Гнилицкая, В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – №1 (51). – С. 11-15.

14. Волкова, А. С. Обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе / А. С. Волкова // Вестник С.-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2013. – № 3. – С. 39-47.

15. Волкова, А. С. Обобщенное решение краевой задачи для эллиптического уравнения на графе / А. С. Волкова // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2012. – № 1(39). – С. 28-30.

16. Волкова, А. С. Однозначная разрешимость начально-краевых задач с распределенными параметрами на графе / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 5. – С. 2473-2475.

17. Волкова, А. С. Обобщенные решения краевой задачи для уравнения параболического типа на произвольном графе / А. С. Волкова // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. – СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. – С. 14-19.

18. Волкова, А. С. Фредгольмова разрешимость в классе задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа на графе-звезде / А. С. Волкова // Математика и ее приложения, ЖИМО. – 1(8). – 2011. – С.15-28.

19. Гнилицкая, Ю. А. Граничное управление колебаниями системы струн / Ю. А. Гнилицкая // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. – СПб.: Издат. Дом С.-Петербургского гос. ун-та, 2012. – С. 21-25.

20. Жабко, А. П. Устойчивость дифференциально-разностных систем с неопределенными параметрами / А. П. Жабко, Д. В. Зарецкий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. – 2004, № 1. – С. 3-5.

21. Завгородний, М. Г. Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе / М. Г. Завгородний // Доклады РАН. – 1994. – Т.335, № 3. – С.281-285.

22. Завгородний, М. Г. Об эволюционных задачах на графе / М. Г. Завгородний // Успехи математических наук. – 1991. – Т.46, № 6. – С.199-200.

23. Знаменская, Л. Н. Управление упругими колебаниями / Л. Н. Знаменская. – М.: Физматлит, 2004. – 175 с.

24. Зубов, В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

25. Зубов, В. И. Проблема устойчивости процессов управления / В. И. Зубов. – Л.: Судпромгиз, 1980. – 253 с.

26. Ильин, В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1517-1534.

27. Кошелев, В. Б. Математические модели квази-одномерной гемодинамики / В. Б. Кошелев, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. П. Фаворский. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 114 с.

28. Ладыженская, О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения

/ О. А. Ладыженская. – М.: Гостехиздат, 1953. – 279 с.

29. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973. – 407 с.

30. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

31. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс / пер. с фр. Н. Х. Розова, под ред. Р. В. Гамкрелидзе. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

32. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

33. Марченко, В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 384 с.

34. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1977. – 454 с.

35. Махинова, О. А. Аппроксимация одномерного оператора Лапласа на графе-звезде / О. А. Махинова // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия естественных и технических наук. – 2011. – Т. 16, Вып. 4. – С. 1124-1126.

36. Махинова, О. А. Конечная проблема моментов для краевых задач на графе / О. А. Махинова // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия естественных и технических наук. – 2011. – Т. 16, Вып. 5. – С. 1264-1269.

37. Махинова, О.А. Свойства конечно-разностного аналога одномерного оператора Лапласа на графе / О. А. Махинова // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Серия 10. – 2012. – № 1. – С. 54 – 60.

38. Махинова, О. А. Устойчивость разностной схемы для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе / О. А. Махинова, А. С. Волкова // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – №1(55). – С. 19-22.

39. Назипова, Н. Н. Расчёт скоростей метаболических реакций в живой растущей клетке методом баланса стационарных метаболических потоков (метод

БСМП) / Н. Н. Назипова, Ю. Е. Елькин, В. В. Панюков, Л. Н. Дроздов-Тихомиров // Матем. биолог. и биоинформ. – 2007. – 2:1. – С.98-119.

40. Пенкин, О. М. Эллиптические уравнения на стратифицированных множествах : дис д-ра физ.-мат. наук: 1.2.2 / Пенкин Олег Михайлович. – Воронеж, 2004. – 191 с.

41. Пенкин, О. М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах / О. М. Пенкин, Е. М. Богатов // Математические заметки. – 2000. – № 6. – С. 874-886.

42. Подвальный, С. Л. Моделирование промышленных процессов полимеризации / С. Л. Подвальный. – М.: Химия, 1979. – 256 с.

43. Подвальный, С. Л. Точечная оптимизация ламинарного течения вязкой жидкости в сетевом носителе / С. Л. Подвальный, В. В. Провоторов, В. Н. Хоанг, З. Тран // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18, № 5. – С. 7-16.

44. Провоторов, В. В. Математическое моделирование колебательных процессов поддерживающих растяжек упругой мачты / В. В. Провоторов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2006. – № 2. – С. 28-35.

45. Провоторов, В. В. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке / В. В. Провоторов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – № 3. – С. 50-62.

46. Провоторов, В. В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы "мачта-растяжки" / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – Т. 32, № 2-2. – С. 293-297.

47. Провоторов В. В. Дифференциально-разностная система Навье - Стокса в классе суммируемых функций с носителями в сетеподобной области / В. В. Провоторов, А. П. Жабко // сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж. 2022 г . С. 109–114.

48. Провоторов, В. В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде / В. В. Провоторов // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, №

10. – С. 105-126.

49. Провоторов, В. В. Устойчивость разностных схем граничных задач на графе / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 2.2(36). – С. 280-285.

50. Провоторов, В. В. Разностные схемы граничных задач на графе / В. В. Провоторов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 10. – С. 14-18.

51. Провоторов, В. В. Спектральная задача на графе с циклом / В. В. Провоторов // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1665-1666.

52. Провоторов, В. В. Управление колебаниями механической системы «мачта-растяжки» / В. В. Провоторов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 2. – С. 57-61.

53. Провоторов В. В. Дифференциально-разностная система в анализе эволюционной системы Навье-Стокса с носителем в сетеподобной области / В. В. Провоторов, А. П. Жабко // Вестник Воронежского государственного технического университета. Серия: физика. Математика – 2023. № 2. – С. 83-94.

54. Провоторов, В. В. Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе / В. В. Провоторов, Ю. А. Гнилицкая // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2013. – № 3. – С. 112-120.

55. Провоторов В. В. Эволюционная система Навье-Стокса с пространственной переменной в сетеподобной области / В. В. Провоторов, С. Л. Подвальный // сборник трудов Международной научной конференции, Иркутск – 2022 г. С. 92–94.

56. Провоторов, В. В. Аппроксимация эволюционных задач с носителем на графе // Провоторов В. В., Махинова О. А. // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 74-80.

57. Провоторов В. В. Оптимальное управление тепловыми и волновыми процессами в слоистых композитных материалах / А. П. Жабко, В. В. Карелин, В.

В. Провоторов, С. М. Сергеев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2023. –Т. 19. Вып. 3. – С. 403–418.

58. Ризниченко, Г. Ю. Математические модели биологических производственных процессов / Г.Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 300 с.

59. Рябенко, А. С. Определение скорости стабилизации решения одной начальной задачи для уравнения теплопроводности / А. С. Рябенко, З. Тран// Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. –Т. 10. – № 4(39). – С. 20-21 – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1268>.

60. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

61. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

62. Сергеев, С. М. Математическое моделирование работы коммерческих сетей в условиях инноваций / С. М. Сергеев // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 4(50). – С.27-32.

63. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022611905. Программный комплекс для решения задач переноса методом конечных разностей на графе. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ / З. Тран; заявл. 11.11.21; регистр. 04.02.2022.

64. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022661064. Программа для решения задач транспортировки сплошных сред по двумерным сетеподобным носителям / О. Р. Балабан, З. Тран; заявл. 30.05.22; регистр. 14.06.2022.

65. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023662808. Программа построения решения уравнения колебания сложносочленёной двумерной механической конструкций / О. Р. Корчагина, З. Тран, В.В. Провоторов, И.В. Приходько; заявл. 17.05.2023; регистр. 14.06.2023.

66. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

№2023662664. Программа построения решения уравнения переноса сплошной среды в трехмерной сетеподобной области / О. Р. Корчагина, З. Тран, В.В. Провоторов, И.В. Приходько; заявл. 29.05.2023; регистр. 09.06.2023.

67. Тран, З. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети / З. Тран, В. В. Провоторов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 3(34). – С. 28. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1019>.

68. Тран, З. Параметрическая оптимизация процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю / З. Тран, А. А Парт // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4(35). – С. 36. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1090>.

69. Тран, З. Локально-одномерный метод для уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области / З. Тран // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 2(37). – С. 18 – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1141>.

70. Тран, З. Оптимизация дискретно-временной системы переноса сплошной среды по сетевому носителю / З. Тран, А. С Гунькина // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 2(37). – С. 28 – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1190>.

71. Тран, З. Аппроксимация дифференциального уравнения переноса конечно-разностными аналогами на графе / З. Тран // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. Всероссийской научной конференции «ПМТУКТ-2021». Воронеж: ВГУ. – 2021. – С. 154-155.

72. Тран, З. Начально-краевая задача для математической модели колебаний с распределенными параметрами на сетеподобной области / З. Тран // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. междунар. конф. «ПМТУКТ-2022». Воронеж: ВГУ. – 2022. – С. 71-73.

73. Тран, З. Программный комплекс для решения уравнения переноса

сплошной среды с распределенными параметрами в сетеподобной области / З. Тран // Процессы управления и устойчивость: LIII международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнов. – СПб.: Изд-во «Дом Федоровой Г. В.». – 2022. – Т. 9. – № 1. – С. 108-112.

74. Тран, З. Алгоритм определения приближенного решения уравнения переноса с распределёнными параметрами на графе-звезда / З. Тран // Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2022». Воронеж, – 2022. – С. 208-212.

75. Тран, З. Программный комплекс для решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения с распределенными параметрами в сетеподобной области / З. Тран // Процессы управления и устойчивость: LIV международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнов. – СПб.: Изд-во «Дом Федоровой Г. В.». – 2023. – Т. 10. – № 26. – С. 100-104.

76. Тран, З. Устойчивость двухслойных разностных схем с весовым параметром для параболических систем / З. Тран // «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий»: сб. тр. междунар. конф. «ПМТУКТ-2023». Воронеж: ВГУ, 2023. С. 96-98.

77. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной / В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов // Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 116-138.

78. Хоанг, В. Н. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах / В. Н. Хоанг, А. А. Парт, И. В. Перова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11. – № 2. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1326>.

79. Хоанг, В. Н. Конечномерные аналоги дифференциальных операторов переноса с носителями на пространственных сетях / В. Н. Хоанг, О. А. Махинова, В. В. Тимошенко // Моделирование, оптимизация и информационные технологии.

– 2023. – Т. 11. – № 2. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1363>.

80. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость: Труды 51-й Международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнов. – СПб.: Изд-во «Дом Федоровой Г. В.», 2020. – Т. 7, № 1. – С. 127-132.

81. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностное уравнение с распределенными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость : Труды 52-й Международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнов. – СПб.: Изд-во «Дом Федоровой Г. В.», 2021. – Т. 8, № 1. – С. 155-160.

82. Хоанг, В. Н. Приближенное решение дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. между-нар. конф. «ПМТУКТ-2021». – Воронеж: Изд-во «Научная книга». – 2021. – С. 179-182.

83. Хоанг, В. Н. Счетная устойчивость слабого решения дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна. – Воронеж: Изд-во «Дом ВГУ», 2022. – С. 168-172.

84. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностная система в соболевском пространстве функций с носителями на сетеподобной области / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2022. – Т. 9, № 1. – С. 113-117.

85. Хоанг, В. Н. Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2023. – Т. 10, № 1. – С. 161-165.

86. Филлипов, А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений / А. Ф. Филлипов // Доклады РАН. – 1955. – Т. 100, № 6. – С.81-87.

87. Юрко, В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В. А. Юрко. – Саратов:Изд-во Саратовского педагогического института, 2001. – 499 с.

88. Юрко, В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В. А. Юрко. - М.: Физматлит, 2007. – С. 384.

89. Artemov, M. A. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov // Journal of Physics. Conference Series. 1203 (2019). Article ID 012094.

90. Baranovskii, E. S. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results / E. S. Baranovskii, V. V. Provotorov, M. A. Artemov, A. P. Zhabko // Symmetry. – 2021, 13(7), 1300.

91. Borisoglebskaya, L. N. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks / L. N. Borisoglebskaya, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, E. S. Kosinov // IPO Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 537, Iss. 4.

92. Borisoglebskaya, L. N. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university / L. N. Borisoglebskaya, S. M. Sergeev // Journal of Applied Economic Sciences. – 2018. – Vol. 12, No 8. – С. 2423-2448.

93. Krasnov, S. V. Methodical forming business competencies for private label / S. V. Krasnov, S. M. Sergeev, N. V. Mukhanova, A. N. Grushkin // 6th International Conference on Reliability, Infocom Technologies and Optimization (Trends and Future Directions) ICRITO. – 2017. – P. 569-574.

94. Neuman, J. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks / J. Neuman, R. D. Richtmyer // Journal of Applied Physics. – Vol. 21, Iss. 3. – P. 232-237.

95. Yurko, V. A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graphs. Analysis on graphs and its applications / V. A. Yurko, G. Freiling, M. Ignatiev // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. – 2008. – Vol. 77. – P. 397-408.

96. Friedrichs, K. O. Spectraltheorie halbbeschränkten Operatoren und ihre Anwendung auf Spectralzerlegung von Differentialoperatoren. Part 1 / K. O. Friedrichs // Math. Ann. – 1934. – Vol. 109. – P. 465-487.

97. Provotorov, V. V. Point control of differential-difference system with

distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. – 2021. – Vol. 17, No 3. – P. 277-286.

98. Provotorov, V. V. Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, E. N. Provotorova // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2017. – Vol. 13, No 2. – P. 209-224.

99. Provotorov, V. V. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2020. – Vol. 16, No 4. – P. 402-414.

100. Provotorov, V. V. Unique weak solvability of nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in the netlike domain / V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. A. Gnilitzkaya // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2017. – Vol. 13. – Iss. 3. – P. 264-277.

101. Provotorov, V. V. Optimization problem of external dynamic influences for the elimination of vibration phenomena in composite elastic building structures / V. V. Provotorov, Y. O. Lebedeva, D. Tran, L. N. Borisoglebskaya, E. I. Vorobyov // Journal of Physics: Conference Series. Engineering and Materials Science. – 2021. – Vol. 2094. – Iss. 4. – P. 7.

102. Podvalny, S. L. The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph / S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, E. S. Podvalny // Procedia Computer Science. – 103(2017). – C. 324-330.

103. Podvalny, S. L. The Problem of Optimal Control of the Laminar Flow of a Viscous Liquid in a Network Carrier / S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, V. N. Hoang // 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).IEEE, 2022. – C. 125-128.

104. Sergeev, S. M. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas

processes / S. M. Sergeev, L. B. Raijhelgauz, V. N. Hoang, I. N. Pantelev // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1679: 022015.

105. Tkachova, S. A. Analysis of the Stability of Stationary Technological Transfer Processes in the Oil-Gas and Mechanical Engineering Areas of Production/ S. A. Tkachova, D. Tran, A. A. Part, A. S. Gunkina // AIP Conference Proceedings. III international conference on advanced technologies in materials science, mechanical and automation engineering. – 2021. – Vol. 2402. – Iss. 1. – P. 6.

106. Volkova, A. S. On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs / A. S. Volkova, Yu. A. Gnilitckaya, V. V. Provotorov // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, No 2. – P. 405-412.

107. Zhabko, A. P. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2019. – Vol. 15, No 2. – P. 187-198.

108. Zhabko, A. P. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation / A. P. Zhabko, K. B. Nurtazina, V. V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2019. – Vol. 15, No 3. – P. 322-335.

109. Zhabko, A. P. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, A. I. Shindyapin // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2021. – Vol. 17, No 4. – P. 433-448.

110. Zhabko, A. P. Stability of operator-difference schemes with weights for the hyperbolic equation in the space of summable functions with carriers in the network-like domain / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. – 2022. – Vol. 18, No 3. – P. 425-437.

Приложение 1. Численные расчеты прикладных задач главы 4

Приложение 1.1 Таблицы численных расчетов задач переноса сплошных сред в сети (п. 4.2.1)

Приложение 1.1.1 Таблицы численных расчетов задачи 1

Таблица 1.1.1-1. Численный расчет задачи 1 на ребре γ_1

t \ x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.000	0.399	0.792	1.173	1.536	1.875	2.184	2.457	2.688	2.871	3.000
0.1	0.000	0.339	0.671	0.992	1.294	1.572	1.819	2.029	2.195	2.312	2.374
0.2	0.000	0.278	0.550	0.809	1.051	1.270	1.458	1.613	1.728	1.800	1.824
0.3	0.000	0.221	0.436	0.641	0.830	0.999	1.142	1.257	1.339	1.385	1.395
0.4	0.000	0.172	0.340	0.499	0.645	0.775	0.884	0.970	1.030	1.062	1.066
0.5	0.000	0.133	0.263	0.385	0.497	0.596	0.680	0.745	0.789	0.813	0.814
0.6	0.000	0.102	0.202	0.296	0.382	0.458	0.521	0.570	0.604	0.622	0.622
0.7	0.000	0.078	0.154	0.226	0.292	0.350	0.399	0.436	0.462	0.475	0.475
0.8	0.000	0.060	0.118	0.173	0.224	0.268	0.305	0.334	0.353	0.363	0.363
0.9	0.000	0.046	0.090	0.132	0.171	0.205	0.233	0.255	0.270	0.278	0.278
1.0	0.000	0.035	0.069	0.101	0.131	0.157	0.178	0.195	0.206	0.212	0.212

Таблица 1.1.1-2. Численный расчет задачи 1 на ребре γ_2

t \ x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	3.000	3.069	3.072	3.003	2.856	2.625	2.304	1.887	1.368	0.741	0.000
0.1	2.374	2.404	2.371	2.271	2.106	1.876	1.586	1.242	0.854	0.435	0.000
0.2	1.824	1.836	1.798	1.709	1.572	1.389	1.165	0.906	0.620	0.315	0.000
0.3	1.395	1.400	1.366	1.295	1.187	1.046	0.875	0.679	0.464	0.235	0.000
0.4	1.066	1.068	1.041	0.985	0.901	0.793	0.663	0.514	0.351	0.178	0.000
0.5	0.814	0.815	0.794	0.750	0.686	0.604	0.504	0.391	0.267	0.135	0.000
0.6	0.622	0.623	0.606	0.573	0.524	0.460	0.384	0.298	0.203	0.103	0.000
0.7	0.475	0.476	0.463	0.437	0.400	0.351	0.293	0.227	0.155	0.079	0.000
0.8	0.363	0.363	0.353	0.334	0.305	0.268	0.224	0.174	0.118	0.060	0.000
0.9	0.278	0.278	0.270	0.255	0.233	0.205	0.171	0.133	0.090	0.046	0.000

1.0	0.212	0.212	0.206	0.195	0.178	0.157	0.131	0.101	0.069	0.035	0.000
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Приложение 1.1.2 Таблицы численных расчетов задачи 2

Таблица 1.1.2-1. Численный расчет задачи 2 на ребре γ_1

t \ x	0.000	0.133	0.200	0.333	0.400	0.533	0.600	0.733	0.800	0.933	1.000
0	0.000	0.208	0.309	0.500	0.588	0.743	0.809	0.914	0.951	0.995	1.000
0.1	0.000	0.162	0.241	0.389	0.457	0.577	0.627	0.704	0.730	0.757	0.757
0.2	0.000	0.125	0.186	0.301	0.353	0.445	0.483	0.542	0.563	0.583	0.583
0.3	0.000	0.097	0.144	0.232	0.272	0.343	0.372	0.418	0.434	0.449	0.449
0.4	0.000	0.075	0.111	0.179	0.210	0.264	0.287	0.322	0.334	0.346	0.346
0.5	0.000	0.057	0.085	0.138	0.162	0.204	0.221	0.248	0.258	0.267	0.267
0.6	0.000	0.044	0.066	0.106	0.125	0.157	0.171	0.191	0.199	0.206	0.206
0.7	0.000	0.034	0.051	0.082	0.096	0.121	0.131	0.148	0.153	0.159	0.159
0.8	0.000	0.026	0.039	0.063	0.074	0.093	0.101	0.114	0.118	0.122	0.122
0.9	0.000	0.020	0.030	0.049	0.057	0.072	0.078	0.088	0.091	0.094	0.094
1.0	0.000	0.016	0.023	0.037	0.044	0.055	0.060	0.068	0.070	0.073	0.073

Таблица 1.1.2-2. Численный расчет задачи 2 на ребрах γ_2 и γ_3

t \ x	1.000	1.067	1.200	1.267	1.400	1.467	1.600	1.667	1.800	1.867	2.000
0	1.000	0.995	0.951	0.914	0.809	0.743	0.588	0.500	0.309	0.208	0.000
0.1	0.757	0.757	0.730	0.704	0.627	0.577	0.457	0.389	0.241	0.162	0.000
0.2	0.583	0.583	0.563	0.542	0.483	0.445	0.353	0.301	0.186	0.125	0.000
0.3	0.449	0.449	0.434	0.418	0.372	0.343	0.272	0.232	0.144	0.097	0.000
0.4	0.346	0.346	0.334	0.322	0.287	0.264	0.210	0.179	0.111	0.075	0.000
0.5	0.267	0.267	0.258	0.248	0.221	0.204	0.162	0.138	0.085	0.057	0.000
0.6	0.206	0.206	0.199	0.191	0.171	0.157	0.125	0.106	0.066	0.044	0.000
0.7	0.159	0.159	0.153	0.148	0.131	0.121	0.096	0.082	0.051	0.034	0.000
0.8	0.122	0.122	0.118	0.114	0.101	0.093	0.074	0.063	0.039	0.026	0.000
0.9	0.094	0.094	0.091	0.088	0.078	0.072	0.057	0.049	0.030	0.020	0.000

1.0	0.073	0.073	0.070	0.068	0.060	0.055	0.044	0.037	0.023	0.016	0.000
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Приложение 1.1.3 Таблицы численных расчетов задачи 3

Таблица 1.1.3-1. Численный расчет задачи 3 на ребре γ_1

$x \backslash t$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0	0.000	0.105	0.208	0.309	0.407	0.500	0.588	0.669	0.743	0.809	0.866
0.1	0.000	0.094	0.188	0.279	0.366	0.450	0.528	0.599	0.663	0.719	0.765
0.2	0.000	0.085	0.168	0.249	0.328	0.402	0.471	0.534	0.591	0.640	0.680
0.3	0.000	0.075	0.150	0.222	0.292	0.358	0.419	0.475	0.525	0.567	0.602
0.4	0.000	0.067	0.133	0.198	0.259	0.318	0.372	0.421	0.464	0.501	0.531
0.5	0.000	0.059	0.118	0.175	0.229	0.281	0.329	0.372	0.410	0.442	0.468
0.6	0.000	0.052	0.104	0.154	0.203	0.248	0.290	0.328	0.361	0.389	0.412
0.7	0.000	0.046	0.092	0.136	0.178	0.218	0.255	0.288	0.317	0.342	0.362
0.8	0.000	0.041	0.081	0.120	0.157	0.192	0.224	0.253	0.279	0.300	0.318
0.9	0.000	0.036	0.071	0.105	0.138	0.169	0.197	0.223	0.245	0.264	0.279
1.0	0.000	0.031	0.062	0.092	0.121	0.148	0.173	0.195	0.215	0.231	0.244

Таблица 1.1.3-2. Численный расчет задачи 3 на ребре γ_2

$x \backslash t$	1.047	1.152	1.257	1.361	1.466	1.571	1.676	1.780	1.885	1.990	2.094
0	0.866	0.914	0.951	0.978	0.995	1.000	0.995	0.978	0.951	0.914	0.866
0.1	0.765	0.812	0.848	0.873	0.887	0.889	0.878	0.854	0.817	0.767	0.704
0.2	0.680	0.721	0.751	0.772	0.782	0.780	0.768	0.744	0.709	0.663	0.607
0.3	0.602	0.637	0.663	0.680	0.687	0.684	0.672	0.650	0.618	0.576	0.526
0.4	0.531	0.561	0.584	0.598	0.603	0.600	0.588	0.568	0.539	0.502	0.457
0.5	0.468	0.494	0.513	0.525	0.529	0.526	0.515	0.496	0.470	0.437	0.398
0.6	0.412	0.434	0.451	0.461	0.464	0.461	0.451	0.434	0.411	0.382	0.347
0.7	0.362	0.382	0.396	0.404	0.407	0.404	0.395	0.380	0.359	0.333	0.303
0.8	0.318	0.335	0.347	0.355	0.357	0.354	0.346	0.332	0.314	0.291	0.264
0.9	0.279	0.294	0.304	0.311	0.313	0.310	0.303	0.291	0.275	0.255	0.231

Продолжение таблицы 1.1.3-2

1.0	0.244	0.258	0.267	0.272	0.274	0.271	0.265	0.255	0.240	0.223	0.202
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Таблица 1.1.3-3. Численный расчет задачи 3 на ребрах γ_3 и γ_4

x \ t	2.094	2.199	2.304	2.409	2.513	2.618	2.723	2.827	2.932	3.037	3.142
0	0.866	0.809	0.743	0.669	0.588	0.500	0.407	0.309	0.208	0.105	0.000
0.1	0.704	0.672	0.629	0.575	0.511	0.439	0.359	0.274	0.185	0.093	0.000
0.2	0.607	0.579	0.541	0.495	0.440	0.378	0.310	0.237	0.160	0.081	0.000
0.3	0.526	0.501	0.468	0.427	0.380	0.326	0.268	0.205	0.138	0.070	0.000
0.4	0.457	0.435	0.406	0.370	0.329	0.282	0.232	0.177	0.120	0.060	0.000
0.5	0.398	0.378	0.352	0.321	0.285	0.245	0.201	0.153	0.104	0.052	0.000
0.6	0.347	0.329	0.307	0.280	0.248	0.213	0.175	0.133	0.090	0.045	0.000
0.7	0.303	0.287	0.267	0.244	0.216	0.185	0.152	0.116	0.078	0.039	0.000
0.8	0.264	0.251	0.233	0.213	0.189	0.162	0.132	0.101	0.068	0.034	0.000
0.9	0.231	0.219	0.204	0.186	0.165	0.141	0.116	0.088	0.060	0.030	0.000
1.0	0.202	0.191	0.178	0.162	0.144	0.123	0.101	0.077	0.052	0.026	0.000

**Приложение 1.2 Таблицы численных расчетов задач колебаний упругих
сложносочлененных конструкций в сети (п. 4.2.2)**

Приложение 1.2.1 Таблицы численных расчетов задачи 1

Таблица 1.2.1-1. Численный расчет задачи 1 на ребре γ_1

x \ t	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.80	2.10	2.40	2.70	3.00
0	0.000	0.566	0.380	0.031	0.118	0.500	0.470	-0.340	-1.331	-1.375	0.000
0.1	0.000	0.526	0.372	0.055	0.134	0.478	0.428	-0.351	-1.282	-1.300	0.102
0.2	0.000	0.404	0.346	0.127	0.183	0.411	0.301	-0.381	-1.128	-1.061	0.196
0.3	0.000	0.225	0.302	0.231	0.253	0.306	0.107	-0.420	-0.882	-0.682	0.319
0.4	0.000	0.029	0.240	0.346	0.325	0.172	-0.124	-0.452	-0.563	-0.206	0.434
0.5	0.000	-0.138	0.165	0.444	0.381	0.023	-0.355	-0.457	-0.192	0.298	0.509
0.6	0.000	-0.243	0.086	0.499	0.401	-0.127	-0.551	-0.419	0.203	0.759	0.521
0.7	0.000	-0.272	0.015	0.492	0.369	-0.263	-0.679	-0.322	0.591	1.118	0.455

Продолжение таблицы 1.2.1-1

0.8	0.000	-0.235	-0.030	0.412	0.275	-0.373	-0.713	-0.159	0.933	1.332	0.306
0.9	0.000	-0.150	-0.043	0.260	0.120	-0.446	-0.642	0.069	1.192	1.378	0.078
1.0	0.000	-0.038	-0.027	0.055	-0.086	-0.475	-0.463	0.348	1.337	1.250	-0.210

Таблица 1.2.1-2. Численный расчет задачи 1 на ребре γ_2

t \ x	3.00	3.30	3.60	3.90	4.20	4.50	4.80	5.10	5.40	5.70	6.00
0	0.000	1.861	2.473	0.896	-1.881	-3.500	-2.234	1.267	4.185	3.802	0.000
0.1	0.102	1.797	2.358	0.832	-1.821	-3.349	-2.116	1.238	4.012	3.623	0.000
0.2	0.196	1.601	2.001	0.636	-1.634	-2.879	-1.751	1.144	3.476	3.067	0.000
0.3	0.319	1.296	1.443	0.335	-1.330	-2.139	-1.184	0.987	2.626	2.203	0.000
0.4	0.434	0.904	0.743	-0.028	-0.931	-1.201	-0.481	0.770	1.546	1.140	0.000
0.5	0.509	0.443	-0.021	-0.402	-0.461	-0.158	0.276	0.499	0.337	0.007	0.000
0.6	0.521	-0.065	-0.766	-0.734	0.048	0.891	1.000	0.185	-0.883	-1.067	0.000
0.7	0.455	-0.587	-1.414	-0.974	0.560	1.844	1.608	-0.159	-1.989	-1.978	0.000
0.8	0.306	-1.083	-1.906	-1.082	1.041	2.612	2.030	-0.511	-2.869	-2.650	0.000
0.9	0.078	-1.510	-2.202	-1.034	1.456	3.123	2.218	-0.843	-3.437	-3.037	0.000
1.0	-0.210	-1.829	-2.283	-0.828	1.774	3.330	2.151	-1.121	-3.646	-3.117	0.000

Приложение 1.2.2 Таблицы численных расчетов задачи 2

Таблица 1.2.2-1. Численный расчет задачи 2 на ребре γ_1

t \ x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0	0.000	0.118	0.380	0.571	0.470	0.000	-0.705	-1.331	-1.522	-1.058	0.000
0.1	0.000	0.133	0.372	0.538	0.429	-0.026	-0.696	-1.283	-1.447	-0.916	0.773
0.2	0.000	0.171	0.346	0.439	0.304	-0.104	-0.666	-1.129	-1.196	-0.497	0.958
0.3	0.000	0.207	0.298	0.284	0.114	-0.217	-0.610	-0.877	-0.755	0.096	1.183
0.4	0.000	0.212	0.223	0.093	-0.113	-0.343	-0.521	-0.527	-0.140	0.736	1.356
0.5	0.000	0.167	0.112	-0.116	-0.342	-0.453	-0.388	-0.080	0.585	1.304	1.402
0.6	0.000	0.068	-0.042	-0.322	-0.540	-0.515	-0.191	0.452	1.309	1.713	1.285
0.7	0.000	-0.073	-0.236	-0.512	-0.675	-0.500	0.086	1.029	1.910	1.913	1.006

Продолжение таблицы 1.2.2-1

0.8	0.000	-0.234	-0.456	-0.672	-0.724	-0.380	0.450	1.580	2.288	1.887	0.590
0.9	0.000	-0.389	-0.669	-0.789	-0.675	-0.140	0.883	2.017	2.390	1.640	0.078
1.0	0.000	-0.515	-0.839	-0.845	-0.520	0.219	1.335	2.260	2.217	1.194	-0.482

Таблица 1.2.2-2. Численный расчет задачи 2 на ребрах γ_2 и γ_3

x \ t	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	0.000	1.293	2.283	2.473	1.646	0.000	-1.881	-3.234	-3.424	-2.234	0.000
0.1	0.773	1.335	2.196	2.360	1.555	-0.026	-1.822	-3.104	-3.270	-2.118	0.000
0.2	0.958	1.443	1.943	2.010	1.274	-0.104	-1.636	-2.700	-2.793	-1.769	0.000
0.3	1.183	1.545	1.589	1.468	0.839	-0.217	-1.335	-2.060	-2.047	-1.241	0.000
0.4	1.356	1.562	1.196	0.810	0.305	-0.343	-0.939	-1.244	-1.113	-0.614	0.000
0.5	1.402	1.435	0.797	0.132	-0.256	-0.453	-0.473	-0.328	-0.100	0.036	0.000
0.6	1.285	1.143	0.388	-0.470	-0.761	-0.515	0.030	0.599	0.880	0.637	0.000
0.7	1.006	0.703	-0.047	-0.929	-1.124	-0.500	0.535	1.445	1.721	1.137	0.000
0.8	0.590	0.157	-0.512	-1.219	-1.280	-0.380	1.006	2.127	2.344	1.497	0.000
0.9	0.078	-0.442	-0.979	-1.352	-1.200	-0.140	1.408	2.580	2.700	1.693	0.000
1.0	-0.482	-1.041	-1.399	-1.356	-0.900	0.219	1.715	2.771	2.777	1.720	0.000

Приложение 1.3 Таблицы численных расчетов задач переноса сплошных сред в двумерной сети (п. 4.3.1)

Приложение 1.3.1 Таблицы численных расчетов задачи 1

Таблица 1.3.1-1. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$

x \ y	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	1.000	0.997	0.988	0.972	0.951	0.924	0.891	0.853	0.809	0.760	0.707
0.157	0.988	0.985	0.976	0.960	0.939	0.913	0.880	0.842	0.799	0.751	0.698
0.314	0.951	0.948	0.939	0.925	0.905	0.879	0.847	0.811	0.769	0.723	0.673
0.471	0.891	0.888	0.880	0.866	0.847	0.823	0.794	0.760	0.721	0.678	0.630
0.628	0.809	0.807	0.799	0.787	0.769	0.747	0.721	0.690	0.655	0.615	0.572
0.785	0.707	0.705	0.698	0.688	0.673	0.653	0.630	0.603	0.572	0.538	0.500

Продолжение таблицы 1.3.1-1

0.942	0.588	0.586	0.581	0.572	0.559	0.543	0.524	0.501	0.476	0.447	0.416
1.100	0.454	0.453	0.448	0.441	0.432	0.419	0.405	0.387	0.367	0.345	0.321
1.257	0.309	0.308	0.305	0.301	0.294	0.286	0.275	0.264	0.250	0.235	0.219
1.414	0.156	0.156	0.155	0.152	0.149	0.145	0.139	0.133	0.127	0.119	0.111
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.1-2. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.707	0.649	0.588	0.523	0.454	0.383	0.309	0.233	0.156	0.079	0.000
0.157	0.698	0.642	0.581	0.516	0.448	0.378	0.305	0.231	0.155	0.078	0.000
0.314	0.673	0.618	0.559	0.497	0.432	0.364	0.294	0.222	0.149	0.075	0.000
0.471	0.630	0.579	0.524	0.466	0.405	0.341	0.275	0.208	0.139	0.070	0.000
0.628	0.572	0.525	0.476	0.423	0.367	0.310	0.250	0.189	0.127	0.064	0.000
0.785	0.500	0.459	0.416	0.370	0.321	0.271	0.219	0.165	0.111	0.056	0.000
0.942	0.416	0.382	0.346	0.307	0.267	0.225	0.182	0.137	0.092	0.046	0.000
1.100	0.321	0.295	0.267	0.237	0.206	0.174	0.140	0.106	0.071	0.036	0.000
1.257	0.219	0.201	0.182	0.162	0.140	0.118	0.096	0.072	0.048	0.024	0.000
1.414	0.111	0.102	0.092	0.082	0.071	0.060	0.048	0.037	0.025	0.012	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.1-3. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.2$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.670	0.668	0.662	0.652	0.638	0.619	0.597	0.572	0.542	0.510	0.474
0.157	0.662	0.660	0.654	0.644	0.630	0.611	0.589	0.564	0.535	0.502	0.466
0.314	0.638	0.636	0.630	0.620	0.606	0.588	0.567	0.542	0.514	0.483	0.448
0.471	0.597	0.595	0.590	0.581	0.568	0.551	0.531	0.508	0.481	0.452	0.419
0.628	0.542	0.541	0.536	0.527	0.515	0.500	0.482	0.461	0.437	0.410	0.380
0.785	0.474	0.473	0.468	0.461	0.450	0.437	0.421	0.403	0.382	0.358	0.332
0.942	0.394	0.393	0.389	0.383	0.374	0.363	0.350	0.335	0.317	0.298	0.276
1.100	0.304	0.303	0.300	0.296	0.289	0.281	0.270	0.259	0.245	0.230	0.213

Продолжение таблицы 1.3.1-3

1.257	0.207	0.207	0.205	0.201	0.197	0.191	0.184	0.176	0.167	0.157	0.145
1.414	0.105	0.105	0.104	0.102	0.100	0.097	0.093	0.089	0.084	0.079	0.074
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.1-4. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.2$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.474	0.435	0.394	0.350	0.304	0.257	0.207	0.157	0.105	0.053	0.000
0.157	0.466	0.428	0.388	0.345	0.300	0.253	0.204	0.154	0.103	0.052	0.000
0.314	0.448	0.412	0.373	0.332	0.288	0.243	0.196	0.148	0.100	0.050	0.000
0.471	0.419	0.385	0.349	0.311	0.270	0.228	0.184	0.139	0.093	0.047	0.000
0.628	0.380	0.350	0.317	0.282	0.245	0.207	0.167	0.126	0.085	0.042	0.000
0.785	0.332	0.306	0.277	0.246	0.214	0.180	0.146	0.110	0.074	0.037	0.000
0.942	0.276	0.254	0.230	0.205	0.178	0.150	0.121	0.092	0.061	0.031	0.000
1.100	0.213	0.196	0.178	0.158	0.137	0.116	0.094	0.071	0.047	0.024	0.000
1.257	0.145	0.133	0.121	0.108	0.094	0.079	0.064	0.048	0.032	0.016	0.000
1.414	0.074	0.068	0.061	0.054	0.047	0.040	0.032	0.024	0.016	0.008	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.1-5. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.449	0.448	0.444	0.437	0.427	0.415	0.400	0.383	0.364	0.342	0.318
0.157	0.444	0.442	0.438	0.431	0.422	0.410	0.395	0.378	0.358	0.336	0.312
0.314	0.427	0.426	0.422	0.415	0.406	0.394	0.380	0.363	0.344	0.323	0.300
0.471	0.400	0.399	0.395	0.389	0.380	0.369	0.356	0.340	0.322	0.303	0.281
0.628	0.364	0.362	0.359	0.353	0.345	0.335	0.323	0.309	0.292	0.274	0.255
0.785	0.318	0.317	0.314	0.309	0.302	0.293	0.282	0.270	0.256	0.240	0.222
0.942	0.264	0.263	0.261	0.257	0.251	0.243	0.234	0.224	0.212	0.199	0.185
1.100	0.204	0.203	0.201	0.198	0.194	0.188	0.181	0.173	0.164	0.154	0.143
1.257	0.139	0.138	0.137	0.135	0.132	0.128	0.123	0.118	0.112	0.105	0.097
1.414	0.070	0.070	0.069	0.068	0.067	0.065	0.062	0.060	0.057	0.053	0.049

Таблица 1.3.2-2. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$

$y \backslash x$	0.524	0.559	0.628	0.663	0.733	0.768	0.838	0.873	0.942	0.977	1.047
0.000	0.866	0.848	0.809	0.788	0.743	0.719	0.669	0.643	0.588	0.559	0.500
0.157	0.855	0.838	0.799	0.778	0.734	0.711	0.661	0.635	0.581	0.552	0.494
0.314	0.824	0.807	0.769	0.749	0.707	0.684	0.636	0.611	0.559	0.532	0.476
0.471	0.772	0.756	0.721	0.702	0.662	0.641	0.596	0.573	0.524	0.498	0.446
0.628	0.701	0.686	0.655	0.638	0.601	0.582	0.541	0.520	0.476	0.452	0.405
0.785	0.612	0.600	0.572	0.557	0.526	0.509	0.473	0.455	0.416	0.395	0.354
0.942	0.509	0.499	0.476	0.463	0.437	0.423	0.393	0.378	0.346	0.329	0.294
1.100	0.393	0.385	0.367	0.358	0.337	0.327	0.304	0.292	0.267	0.254	0.227
1.257	0.268	0.262	0.250	0.244	0.230	0.222	0.207	0.199	0.182	0.173	0.155
1.414	0.136	0.133	0.127	0.123	0.116	0.113	0.105	0.101	0.092	0.088	0.078
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-3. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0$

$y \backslash x$	1.047	1.117	1.152	1.222	1.257	1.326	1.361	1.431	1.466	1.536	1.571
0.000	0.500	0.438	0.407	0.342	0.309	0.242	0.208	0.139	0.105	0.035	0.000
0.157	0.494	0.433	0.402	0.338	0.305	0.239	0.205	0.138	0.103	0.035	0.000
0.314	0.476	0.417	0.387	0.325	0.294	0.230	0.198	0.132	0.099	0.033	0.000
0.471	0.446	0.391	0.362	0.305	0.275	0.216	0.185	0.124	0.093	0.031	0.000
0.628	0.405	0.355	0.329	0.277	0.250	0.196	0.168	0.113	0.085	0.028	0.000
0.785	0.354	0.310	0.288	0.242	0.219	0.171	0.147	0.098	0.074	0.025	0.000
0.942	0.294	0.258	0.239	0.201	0.182	0.142	0.122	0.082	0.061	0.021	0.000
1.100	0.227	0.199	0.185	0.155	0.140	0.110	0.094	0.063	0.048	0.016	0.000
1.257	0.155	0.136	0.126	0.106	0.096	0.075	0.064	0.043	0.032	0.011	0.000
1.414	0.078	0.069	0.064	0.054	0.048	0.038	0.033	0.022	0.016	0.006	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-4. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.2$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.070	0.105	0.175	0.209	0.279	0.314	0.384	0.419	0.489	0.524
0.000	0.670	0.669	0.667	0.660	0.656	0.644	0.638	0.622	0.612	0.592	0.581
0.157	0.662	0.660	0.658	0.652	0.647	0.636	0.629	0.612	0.603	0.582	0.571
0.314	0.638	0.636	0.634	0.627	0.623	0.612	0.605	0.589	0.580	0.560	0.549
0.471	0.597	0.596	0.594	0.587	0.583	0.573	0.566	0.551	0.543	0.524	0.513
0.628	0.542	0.541	0.539	0.533	0.529	0.520	0.514	0.500	0.493	0.475	0.466
0.785	0.474	0.473	0.471	0.466	0.463	0.454	0.449	0.437	0.430	0.415	0.407
0.942	0.394	0.393	0.391	0.387	0.384	0.377	0.373	0.363	0.358	0.345	0.338
1.100	0.304	0.303	0.302	0.299	0.297	0.292	0.288	0.281	0.276	0.267	0.261
1.257	0.207	0.207	0.206	0.204	0.202	0.198	0.196	0.191	0.188	0.181	0.178
1.414	0.105	0.105	0.104	0.103	0.102	0.100	0.099	0.097	0.095	0.092	0.090
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-5. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_2 при $t = 0.2$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.524	0.559	0.628	0.663	0.733	0.768	0.838	0.873	0.942	0.977	1.047
0.000	0.581	0.569	0.542	0.528	0.498	0.482	0.449	0.431	0.394	0.375	0.335
0.157	0.571	0.559	0.534	0.520	0.491	0.475	0.442	0.424	0.388	0.369	0.329
0.314	0.549	0.537	0.513	0.500	0.471	0.456	0.424	0.408	0.373	0.354	0.316
0.471	0.513	0.503	0.480	0.468	0.441	0.427	0.397	0.381	0.348	0.331	0.296
0.628	0.466	0.456	0.436	0.424	0.400	0.387	0.360	0.346	0.316	0.301	0.268
0.785	0.407	0.399	0.380	0.371	0.350	0.338	0.315	0.302	0.276	0.263	0.234
0.942	0.338	0.331	0.316	0.308	0.290	0.281	0.261	0.251	0.229	0.218	0.195
1.100	0.261	0.256	0.244	0.238	0.224	0.217	0.202	0.194	0.177	0.168	0.150
1.257	0.178	0.174	0.166	0.162	0.153	0.148	0.137	0.132	0.121	0.115	0.102
1.414	0.090	0.088	0.084	0.082	0.077	0.075	0.070	0.067	0.061	0.058	0.052
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-6. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_3 при $t = 0.2$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.117	1.152	1.222	1.257	1.326	1.361	1.431	1.466	1.536	1.571
0.000	0.335	0.294	0.273	0.229	0.207	0.162	0.139	0.093	0.070	0.023	0.000
0.157	0.329	0.289	0.268	0.226	0.204	0.160	0.137	0.092	0.069	0.023	0.000

Продолжение таблицы 1.3.2-6

0.314	0.316	0.278	0.258	0.217	0.196	0.153	0.132	0.088	0.066	0.022	0.000
0.471	0.296	0.260	0.241	0.203	0.183	0.143	0.123	0.083	0.062	0.021	0.000
0.628	0.268	0.235	0.219	0.184	0.166	0.130	0.112	0.075	0.056	0.019	0.000
0.785	0.234	0.206	0.191	0.161	0.145	0.114	0.098	0.065	0.049	0.016	0.000
0.942	0.195	0.171	0.159	0.133	0.121	0.094	0.081	0.054	0.041	0.014	0.000
1.100	0.150	0.132	0.122	0.103	0.093	0.073	0.063	0.042	0.032	0.011	0.000
1.257	0.102	0.090	0.083	0.070	0.063	0.050	0.043	0.029	0.021	0.007	0.000
1.414	0.052	0.045	0.042	0.036	0.032	0.025	0.022	0.015	0.011	0.004	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-7. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.4$

$y \backslash x$	0.000	0.070	0.105	0.175	0.209	0.279	0.314	0.384	0.419	0.489	0.524
0.000	0.449	0.448	0.447	0.443	0.440	0.432	0.427	0.417	0.411	0.397	0.389
0.157	0.444	0.443	0.441	0.437	0.434	0.426	0.421	0.410	0.404	0.390	0.382
0.314	0.427	0.426	0.425	0.420	0.417	0.410	0.405	0.395	0.389	0.375	0.367
0.471	0.400	0.399	0.398	0.394	0.391	0.384	0.379	0.369	0.364	0.351	0.344
0.628	0.364	0.362	0.361	0.357	0.355	0.348	0.344	0.335	0.330	0.318	0.312
0.785	0.318	0.317	0.316	0.312	0.310	0.304	0.301	0.293	0.288	0.278	0.272
0.942	0.264	0.263	0.262	0.259	0.258	0.253	0.250	0.243	0.239	0.231	0.226
1.100	0.204	0.203	0.203	0.200	0.199	0.195	0.193	0.188	0.185	0.178	0.175
1.257	0.139	0.138	0.138	0.136	0.135	0.133	0.131	0.128	0.126	0.121	0.119
1.414	0.070	0.070	0.070	0.069	0.069	0.067	0.067	0.065	0.064	0.061	0.060
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-8. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.2$

$y \backslash x$	0.524	0.559	0.628	0.663	0.733	0.768	0.838	0.873	0.942	0.977	1.047
0.000	0.389	0.381	0.364	0.354	0.334	0.323	0.301	0.289	0.264	0.251	0.225
0.157	0.382	0.375	0.358	0.348	0.329	0.318	0.296	0.284	0.260	0.247	0.221
0.314	0.367	0.360	0.344	0.335	0.316	0.306	0.284	0.273	0.249	0.237	0.212
0.471	0.344	0.337	0.321	0.313	0.295	0.286	0.266	0.255	0.233	0.222	0.198

Продолжение таблицы 1.3.2-8

0.628	0.312	0.305	0.291	0.284	0.268	0.259	0.241	0.231	0.211	0.201	0.179
0.785	0.272	0.267	0.254	0.248	0.234	0.226	0.210	0.202	0.185	0.175	0.157
0.942	0.226	0.222	0.211	0.206	0.194	0.188	0.175	0.168	0.153	0.146	0.130
1.100	0.175	0.171	0.163	0.159	0.150	0.145	0.135	0.130	0.118	0.113	0.100
1.257	0.119	0.116	0.111	0.108	0.102	0.099	0.092	0.088	0.081	0.077	0.068
1.414	0.060	0.059	0.056	0.055	0.052	0.050	0.046	0.045	0.041	0.039	0.035
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.2-9. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.117	1.152	1.222	1.257	1.326	1.361	1.431	1.466	1.536	1.571
0.000	0.225	0.197	0.183	0.154	0.139	0.109	0.093	0.063	0.047	0.016	0.000
0.157	0.221	0.194	0.180	0.151	0.137	0.107	0.092	0.062	0.046	0.015	0.000
0.314	0.212	0.186	0.172	0.145	0.131	0.103	0.088	0.059	0.044	0.015	0.000
0.471	0.198	0.174	0.161	0.136	0.123	0.096	0.082	0.055	0.042	0.014	0.000
0.628	0.179	0.157	0.146	0.123	0.111	0.087	0.075	0.050	0.038	0.013	0.000
0.785	0.157	0.137	0.128	0.107	0.097	0.076	0.065	0.044	0.033	0.011	0.000
0.942	0.130	0.114	0.106	0.089	0.081	0.063	0.054	0.036	0.027	0.009	0.000
1.100	0.100	0.088	0.082	0.069	0.062	0.049	0.042	0.028	0.021	0.007	0.000
1.257	0.068	0.060	0.056	0.047	0.042	0.033	0.029	0.019	0.014	0.005	0.000
1.414	0.035	0.030	0.028	0.024	0.021	0.017	0.014	0.010	0.007	0.002	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Приложение 1.3.3 Таблицы численных расчетов задачи 3

Таблица 1.3.3-1. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	1.000	0.995	0.978	0.951	0.914	0.866	0.809	0.743	0.669	0.588	0.500
0.052	0.999	0.993	0.977	0.950	0.912	0.865	0.808	0.742	0.668	0.587	0.499
0.157	0.988	0.982	0.966	0.939	0.902	0.855	0.799	0.734	0.661	0.581	0.494
0.209	0.978	0.973	0.957	0.930	0.894	0.847	0.791	0.727	0.655	0.575	0.489
0.314	0.951	0.946	0.930	0.905	0.869	0.824	0.769	0.707	0.636	0.559	0.476

Продолжение таблицы 1.3.3-1

0.367	0.934	0.929	0.913	0.888	0.853	0.809	0.755	0.694	0.625	0.549	0.467
0.471	0.891	0.886	0.872	0.847	0.814	0.772	0.721	0.662	0.596	0.524	0.446
0.524	0.866	0.861	0.847	0.824	0.791	0.750	0.701	0.644	0.580	0.509	0.433
0.628	0.809	0.805	0.791	0.769	0.739	0.701	0.655	0.601	0.541	0.476	0.405
0.681	0.777	0.773	0.760	0.739	0.710	0.673	0.629	0.578	0.520	0.457	0.389
0.785	0.707	0.703	0.692	0.673	0.646	0.612	0.572	0.526	0.473	0.416	0.354

Таблица 1.3.3-2. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.117	1.152	1.222	1.257	1.326	1.361	1.431	1.466	1.536	1.571
0.000	0.500	0.438	0.407	0.342	0.309	0.242	0.208	0.139	0.105	0.035	0.000
0.052	0.499	0.438	0.406	0.342	0.309	0.242	0.208	0.139	0.104	0.035	0.000
0.157	0.494	0.433	0.402	0.338	0.305	0.239	0.205	0.138	0.103	0.035	0.000
0.209	0.489	0.429	0.398	0.335	0.302	0.237	0.203	0.136	0.102	0.034	0.000
0.314	0.476	0.417	0.387	0.325	0.294	0.230	0.198	0.132	0.099	0.033	0.000
0.367	0.467	0.409	0.380	0.319	0.289	0.226	0.194	0.130	0.098	0.033	0.000
0.471	0.446	0.391	0.362	0.305	0.275	0.216	0.185	0.124	0.093	0.031	0.000
0.524	0.433	0.380	0.352	0.296	0.268	0.210	0.180	0.121	0.091	0.030	0.000
0.628	0.405	0.355	0.329	0.277	0.250	0.196	0.168	0.113	0.085	0.028	0.000
0.681	0.389	0.341	0.316	0.266	0.240	0.188	0.162	0.108	0.081	0.027	0.000
0.785	0.354	0.310	0.288	0.242	0.219	0.171	0.147	0.098	0.074	0.025	0.000

Таблица 1.3.3-3. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.524	0.559	0.628	0.663	0.733	0.768	0.838	0.873	0.942	0.977	1.047
0.785	0.612	0.600	0.572	0.557	0.526	0.509	0.473	0.455	0.416	0.395	0.354
0.838	0.580	0.568	0.541	0.527	0.497	0.481	0.448	0.430	0.393	0.374	0.335
0.942	0.509	0.499	0.476	0.463	0.437	0.423	0.393	0.378	0.346	0.329	0.294
0.995	0.472	0.462	0.441	0.429	0.405	0.392	0.364	0.350	0.320	0.305	0.272
1.100	0.393	0.385	0.367	0.358	0.337	0.327	0.304	0.292	0.267	0.254	0.227
1.152	0.352	0.345	0.329	0.321	0.302	0.293	0.272	0.261	0.239	0.227	0.203
1.257	0.268	0.262	0.250	0.244	0.230	0.222	0.207	0.199	0.182	0.173	0.155

Продолжение таблицы 1.3.3-3

1.309	0.224	0.220	0.209	0.204	0.192	0.186	0.173	0.166	0.152	0.145	0.129
1.414	0.136	0.133	0.127	0.123	0.116	0.113	0.105	0.101	0.092	0.088	0.078
1.466	0.091	0.089	0.085	0.082	0.078	0.075	0.070	0.067	0.061	0.059	0.052
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.3-4. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.1$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	0.819	0.814	0.801	0.779	0.748	0.709	0.662	0.608	0.548	0.481	0.409
0.052	0.818	0.813	0.799	0.777	0.746	0.706	0.658	0.601	0.536	0.460	0.368
0.157	0.809	0.804	0.790	0.767	0.735	0.695	0.645	0.587	0.518	0.439	0.347
0.209	0.801	0.796	0.782	0.759	0.727	0.687	0.637	0.578	0.509	0.429	0.337
0.314	0.779	0.774	0.760	0.737	0.706	0.666	0.616	0.558	0.489	0.410	0.321
0.367	0.764	0.759	0.745	0.723	0.692	0.653	0.604	0.546	0.478	0.401	0.313
0.471	0.730	0.724	0.711	0.689	0.660	0.622	0.575	0.520	0.455	0.381	0.298
0.524	0.709	0.704	0.691	0.670	0.641	0.604	0.559	0.505	0.443	0.371	0.291
0.628	0.662	0.657	0.644	0.625	0.598	0.564	0.522	0.473	0.415	0.350	0.277
0.681	0.636	0.630	0.618	0.600	0.575	0.542	0.502	0.455	0.401	0.340	0.271
0.785	0.579	0.576	0.566	0.551	0.529	0.501	0.464	0.422	0.374	0.322	0.290

Таблица 1.3.3-5. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.1$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.117	1.152	1.222	1.257	1.326	1.361	1.431	1.466	1.536	1.571
0.000	0.409	0.359	0.333	0.280	0.253	0.198	0.170	0.114	0.086	0.029	0.000
0.052	0.368	0.332	0.312	0.266	0.242	0.191	0.164	0.111	0.083	0.028	0.000
0.157	0.347	0.312	0.293	0.251	0.228	0.181	0.156	0.105	0.079	0.026	0.000
0.209	0.337	0.304	0.285	0.244	0.222	0.176	0.152	0.102	0.077	0.026	0.000
0.314	0.321	0.289	0.271	0.232	0.211	0.167	0.145	0.098	0.073	0.025	0.000
0.367	0.313	0.282	0.264	0.226	0.206	0.163	0.141	0.095	0.072	0.024	0.000
0.471	0.298	0.268	0.252	0.216	0.196	0.156	0.135	0.091	0.068	0.023	0.000
0.524	0.291	0.262	0.246	0.211	0.192	0.152	0.131	0.089	0.067	0.022	0.000
0.628	0.277	0.250	0.235	0.202	0.183	0.145	0.126	0.085	0.064	0.021	0.000

Продолжение таблицы 1.3.3-5

0.681	0.271	0.245	0.231	0.198	0.180	0.142	0.123	0.083	0.062	0.021	0.000
0.785	0.290	0.254	0.236	0.198	0.179	0.140	0.120	0.081	0.061	0.020	0.000

Таблица 1.3.3-6. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.1$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.524	0.559	0.628	0.663	0.733	0.768	0.838	0.873	0.942	0.977	1.047
0.785	0.501	0.489	0.464	0.450	0.422	0.406	0.374	0.357	0.322	0.304	0.290
0.838	0.474	0.463	0.438	0.425	0.398	0.385	0.356	0.342	0.313	0.299	0.274
0.942	0.417	0.407	0.386	0.375	0.353	0.341	0.316	0.304	0.278	0.266	0.241
0.995	0.386	0.377	0.359	0.349	0.328	0.317	0.294	0.283	0.259	0.247	0.223
1.100	0.322	0.315	0.300	0.291	0.274	0.265	0.246	0.237	0.217	0.207	0.186
1.152	0.288	0.282	0.269	0.261	0.246	0.238	0.221	0.212	0.195	0.185	0.167
1.257	0.219	0.214	0.204	0.199	0.187	0.181	0.168	0.162	0.148	0.141	0.127
1.309	0.184	0.180	0.171	0.167	0.157	0.152	0.141	0.136	0.124	0.118	0.106
1.414	0.111	0.109	0.104	0.101	0.095	0.092	0.085	0.082	0.075	0.072	0.064
1.466	0.074	0.073	0.069	0.067	0.063	0.061	0.057	0.055	0.050	0.048	0.043
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.3-7. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.3$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	0.549	0.546	0.537	0.522	0.501	0.475	0.444	0.408	0.367	0.323	0.274
0.052	0.548	0.545	0.536	0.520	0.499	0.472	0.440	0.402	0.358	0.307	0.245
0.157	0.542	0.538	0.529	0.513	0.491	0.463	0.429	0.390	0.344	0.291	0.229
0.209	0.537	0.533	0.523	0.507	0.485	0.457	0.423	0.383	0.337	0.283	0.222
0.314	0.522	0.518	0.508	0.492	0.470	0.442	0.408	0.368	0.322	0.269	0.210
0.367	0.512	0.508	0.498	0.482	0.460	0.433	0.399	0.360	0.314	0.262	0.204
0.471	0.489	0.485	0.475	0.459	0.438	0.412	0.380	0.342	0.298	0.249	0.194
0.524	0.475	0.471	0.461	0.446	0.426	0.400	0.369	0.332	0.290	0.243	0.190
0.628	0.444	0.440	0.431	0.417	0.398	0.374	0.345	0.311	0.273	0.230	0.182
0.681	0.427	0.422	0.414	0.401	0.383	0.360	0.332	0.300	0.264	0.223	0.178
0.785	0.388	0.386	0.380	0.369	0.355	0.336	0.307	0.278	0.246	0.212	0.194

Таблица 1.3.3-8. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.3$

$y \backslash x$	1.047	1.117	1.152	1.222	1.257	1.326	1.361	1.431	1.466	1.536	1.571
0.000	0.274	0.241	0.223	0.188	0.170	0.133	0.114	0.076	0.057	0.019	0.000
0.052	0.245	0.222	0.208	0.178	0.161	0.127	0.110	0.074	0.055	0.019	0.000
0.157	0.229	0.206	0.194	0.166	0.151	0.119	0.103	0.069	0.052	0.017	0.000
0.209	0.222	0.200	0.187	0.160	0.146	0.116	0.100	0.067	0.051	0.017	0.000
0.314	0.210	0.189	0.177	0.151	0.138	0.109	0.094	0.064	0.048	0.016	0.000
0.367	0.204	0.184	0.172	0.147	0.134	0.106	0.092	0.062	0.047	0.016	0.000
0.471	0.194	0.175	0.164	0.140	0.128	0.101	0.087	0.059	0.044	0.015	0.000
0.524	0.190	0.171	0.160	0.137	0.125	0.099	0.085	0.058	0.043	0.015	0.000
0.628	0.182	0.164	0.154	0.132	0.120	0.095	0.082	0.055	0.042	0.014	0.000
0.681	0.178	0.162	0.152	0.130	0.119	0.094	0.081	0.055	0.041	0.014	0.000
0.785	0.194	0.170	0.158	0.133	0.120	0.094	0.081	0.054	0.041	0.014	0.000

Таблица 1.3.3-9. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.3$

$y \backslash x$	0.524	0.559	0.628	0.663	0.733	0.768	0.838	0.873	0.942	0.977	1.047
0.785	0.336	0.325	0.307	0.298	0.278	0.268	0.246	0.235	0.212	0.201	0.194
0.838	0.318	0.309	0.292	0.283	0.264	0.255	0.236	0.227	0.208	0.199	0.184
0.942	0.279	0.272	0.258	0.250	0.235	0.227	0.210	0.202	0.185	0.177	0.161
0.995	0.259	0.253	0.239	0.232	0.218	0.211	0.196	0.188	0.173	0.165	0.150
1.100	0.216	0.211	0.200	0.195	0.183	0.177	0.164	0.158	0.145	0.138	0.125
1.152	0.193	0.189	0.180	0.175	0.164	0.159	0.147	0.142	0.130	0.124	0.112
1.257	0.147	0.144	0.137	0.133	0.125	0.121	0.112	0.108	0.099	0.094	0.085
1.309	0.123	0.120	0.114	0.111	0.105	0.101	0.094	0.091	0.083	0.079	0.071
1.414	0.074	0.073	0.069	0.067	0.063	0.061	0.057	0.055	0.050	0.048	0.043
1.466	0.050	0.049	0.046	0.045	0.042	0.041	0.038	0.037	0.034	0.032	0.029
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Приложение 1.3.4 Таблицы численных расчетов задачи 4

Таблица 1.3.4-1. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	1.000	0.997	0.988	0.972	0.951	0.924	0.891	0.853	0.809	0.760	0.707
0.079	0.997	0.994	0.985	0.969	0.948	0.921	0.888	0.850	0.807	0.758	0.705
0.157	0.988	0.985	0.976	0.960	0.939	0.913	0.880	0.842	0.799	0.751	0.698
0.236	0.972	0.969	0.960	0.946	0.925	0.898	0.866	0.829	0.787	0.739	0.688
0.314	0.951	0.948	0.939	0.925	0.905	0.879	0.847	0.811	0.769	0.723	0.673
0.393	0.924	0.921	0.913	0.898	0.879	0.854	0.823	0.788	0.747	0.703	0.653
0.471	0.891	0.888	0.880	0.866	0.847	0.823	0.794	0.760	0.721	0.678	0.630
0.550	0.853	0.850	0.842	0.829	0.811	0.788	0.760	0.727	0.690	0.648	0.603
0.628	0.809	0.807	0.799	0.787	0.769	0.747	0.721	0.690	0.655	0.615	0.572
0.707	0.760	0.758	0.751	0.739	0.723	0.703	0.678	0.648	0.615	0.578	0.538
0.785	0.707	0.705	0.698	0.688	0.673	0.653	0.630	0.603	0.572	0.538	0.500

Таблица 1.3.4-2. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{S}_2 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.707	0.649	0.588	0.523	0.454	0.383	0.309	0.233	0.156	0.079	0.000
0.079	0.705	0.647	0.586	0.521	0.453	0.382	0.308	0.233	0.156	0.078	0.000
0.157	0.698	0.642	0.581	0.516	0.448	0.378	0.305	0.231	0.155	0.078	0.000
0.236	0.688	0.632	0.572	0.508	0.441	0.372	0.301	0.227	0.152	0.076	0.000
0.314	0.673	0.618	0.559	0.497	0.432	0.364	0.294	0.222	0.149	0.075	0.000
0.393	0.653	0.600	0.543	0.483	0.419	0.354	0.286	0.216	0.145	0.073	0.000
0.471	0.630	0.579	0.524	0.466	0.405	0.341	0.275	0.208	0.139	0.070	0.000
0.550	0.603	0.554	0.501	0.446	0.387	0.326	0.264	0.199	0.133	0.067	0.000
0.628	0.572	0.525	0.476	0.423	0.367	0.310	0.250	0.189	0.127	0.064	0.000
0.707	0.538	0.494	0.447	0.397	0.345	0.291	0.235	0.178	0.119	0.060	0.000
0.785	0.500	0.459	0.416	0.370	0.321	0.271	0.219	0.165	0.111	0.056	0.000

Таблица 1.3.4-3. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{S}_3 при $t = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.785	0.500	0.459	0.416	0.370	0.321	0.271	0.219	0.165	0.111	0.056	0.000
0.864	0.459	0.422	0.382	0.339	0.295	0.249	0.201	0.152	0.102	0.051	0.000

Продолжение таблицы 1.3.4-3

0.942	0.416	0.382	0.346	0.307	0.267	0.225	0.182	0.137	0.092	0.046	0.000
1.021	0.370	0.339	0.307	0.273	0.237	0.200	0.162	0.122	0.082	0.041	0.000
1.100	0.321	0.295	0.267	0.237	0.206	0.174	0.140	0.106	0.071	0.036	0.000
1.178	0.271	0.249	0.225	0.200	0.174	0.146	0.118	0.089	0.060	0.030	0.000
1.257	0.219	0.201	0.182	0.162	0.140	0.118	0.096	0.072	0.048	0.024	0.000
1.335	0.165	0.152	0.137	0.122	0.106	0.089	0.072	0.055	0.037	0.018	0.000
1.414	0.111	0.102	0.092	0.082	0.071	0.060	0.048	0.037	0.025	0.012	0.000
1.492	0.056	0.051	0.046	0.041	0.036	0.030	0.024	0.018	0.012	0.006	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.4-4. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.2$

y \ x	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.670	0.668	0.662	0.652	0.638	0.619	0.597	0.572	0.542	0.510	0.474
0.079	0.668	0.666	0.660	0.650	0.635	0.617	0.595	0.569	0.540	0.507	0.471
0.157	0.662	0.660	0.654	0.643	0.629	0.611	0.589	0.563	0.534	0.501	0.466
0.236	0.652	0.650	0.643	0.633	0.619	0.601	0.579	0.554	0.525	0.493	0.458
0.314	0.638	0.635	0.629	0.619	0.605	0.588	0.566	0.541	0.513	0.482	0.447
0.393	0.619	0.617	0.611	0.601	0.587	0.570	0.550	0.526	0.498	0.468	0.434
0.471	0.597	0.595	0.589	0.579	0.566	0.550	0.530	0.506	0.480	0.451	0.418
0.550	0.572	0.569	0.563	0.554	0.541	0.525	0.506	0.484	0.459	0.431	0.400
0.628	0.542	0.539	0.534	0.525	0.513	0.498	0.480	0.459	0.435	0.408	0.379
0.707	0.510	0.506	0.501	0.492	0.481	0.467	0.450	0.431	0.409	0.384	0.356
0.785	0.474	0.473	0.468	0.461	0.451	0.438	0.422	0.404	0.384	0.360	0.335

Таблица 1.3.4-5. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.2$

y \ x	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.474	0.435	0.394	0.350	0.304	0.257	0.207	0.157	0.105	0.053	0.000
0.079	0.471	0.433	0.392	0.349	0.303	0.255	0.206	0.156	0.104	0.052	0.000
0.157	0.466	0.428	0.388	0.345	0.300	0.253	0.204	0.154	0.103	0.052	0.000
0.236	0.458	0.421	0.381	0.339	0.295	0.249	0.201	0.152	0.102	0.051	0.000

Продолжение таблицы 1.3.4-5

0.314	0.447	0.411	0.372	0.331	0.288	0.243	0.196	0.148	0.099	0.050	0.000
0.393	0.434	0.399	0.361	0.321	0.279	0.236	0.190	0.144	0.096	0.048	0.000
0.471	0.418	0.384	0.348	0.310	0.269	0.227	0.183	0.139	0.093	0.047	0.000
0.550	0.400	0.368	0.333	0.296	0.257	0.217	0.175	0.133	0.089	0.045	0.000
0.628	0.379	0.349	0.316	0.281	0.244	0.206	0.166	0.126	0.084	0.042	0.000
0.707	0.356	0.328	0.297	0.264	0.229	0.193	0.156	0.118	0.079	0.040	0.000
0.785	0.335	0.308	0.279	0.248	0.215	0.181	0.146	0.111	0.074	0.037	0.000

Таблица 1.3.4-6. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.2$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.785	0.335	0.308	0.279	0.248	0.215	0.181	0.146	0.111	0.074	0.037	0.000
0.864	0.308	0.282	0.255	0.226	0.196	0.165	0.133	0.101	0.068	0.034	0.000
0.942	0.279	0.255	0.231	0.205	0.178	0.150	0.121	0.091	0.061	0.031	0.000
1.021	0.248	0.227	0.205	0.182	0.158	0.133	0.108	0.081	0.054	0.027	0.000
1.100	0.215	0.197	0.178	0.159	0.138	0.116	0.094	0.071	0.047	0.024	0.000
1.178	0.181	0.166	0.151	0.134	0.116	0.098	0.079	0.060	0.040	0.020	0.000
1.257	0.147	0.134	0.122	0.108	0.094	0.079	0.064	0.048	0.032	0.016	0.000
1.335	0.111	0.102	0.092	0.082	0.071	0.060	0.048	0.036	0.024	0.012	0.000
1.414	0.074	0.068	0.062	0.055	0.048	0.040	0.032	0.024	0.016	0.008	0.000
1.492	0.037	0.034	0.031	0.027	0.024	0.020	0.016	0.012	0.008	0.004	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.4-7. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.449	0.448	0.444	0.437	0.427	0.415	0.400	0.383	0.364	0.342	0.318
0.079	0.448	0.447	0.442	0.435	0.426	0.414	0.399	0.381	0.362	0.340	0.315
0.157	0.444	0.442	0.438	0.431	0.422	0.410	0.395	0.378	0.358	0.336	0.312
0.236	0.437	0.435	0.431	0.424	0.415	0.403	0.388	0.371	0.352	0.330	0.307
0.314	0.427	0.426	0.422	0.415	0.406	0.394	0.380	0.363	0.344	0.323	0.300
0.393	0.415	0.414	0.409	0.403	0.394	0.382	0.368	0.352	0.334	0.313	0.291

Продолжение таблицы 1.3.4-7

0.471	0.400	0.399	0.395	0.388	0.379	0.368	0.355	0.339	0.322	0.302	0.280
0.550	0.383	0.381	0.377	0.371	0.363	0.352	0.339	0.324	0.308	0.289	0.268
0.628	0.364	0.362	0.358	0.352	0.344	0.334	0.322	0.308	0.292	0.274	0.254
0.707	0.342	0.340	0.336	0.330	0.323	0.313	0.302	0.289	0.274	0.257	0.239
0.785	0.318	0.317	0.314	0.309	0.302	0.294	0.283	0.271	0.257	0.242	0.225

Таблица 1.3.4-8. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.318	0.292	0.264	0.235	0.204	0.172	0.139	0.105	0.070	0.035	0.000
0.079	0.315	0.290	0.263	0.234	0.203	0.171	0.138	0.104	0.070	0.035	0.000
0.157	0.312	0.287	0.260	0.231	0.201	0.169	0.137	0.103	0.069	0.035	0.000
0.236	0.307	0.282	0.255	0.227	0.197	0.167	0.135	0.102	0.068	0.034	0.000
0.314	0.300	0.275	0.250	0.222	0.193	0.163	0.131	0.099	0.067	0.033	0.000
0.393	0.291	0.267	0.242	0.215	0.187	0.158	0.128	0.096	0.065	0.032	0.000
0.471	0.280	0.258	0.233	0.207	0.180	0.152	0.123	0.093	0.062	0.031	0.000
0.550	0.268	0.246	0.223	0.198	0.172	0.145	0.117	0.089	0.059	0.030	0.000
0.628	0.254	0.234	0.212	0.188	0.163	0.138	0.111	0.084	0.056	0.028	0.000
0.707	0.239	0.219	0.199	0.177	0.154	0.129	0.105	0.079	0.053	0.027	0.000
0.785	0.225	0.206	0.187	0.166	0.144	0.121	0.098	0.074	0.050	0.025	0.000

Таблица 1.3.4-9. Численный расчет задачи 4 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.785	0.225	0.206	0.187	0.166	0.144	0.121	0.098	0.074	0.050	0.025	0.000
0.864	0.206	0.189	0.171	0.151	0.131	0.111	0.089	0.067	0.045	0.023	0.000
0.942	0.187	0.171	0.155	0.137	0.119	0.100	0.081	0.061	0.041	0.021	0.000
1.021	0.166	0.152	0.138	0.122	0.106	0.089	0.072	0.054	0.036	0.018	0.000
1.100	0.144	0.132	0.120	0.106	0.092	0.078	0.063	0.047	0.032	0.016	0.000
1.178	0.122	0.112	0.101	0.090	0.078	0.066	0.053	0.040	0.027	0.013	0.000
1.257	0.098	0.090	0.082	0.072	0.063	0.053	0.043	0.032	0.022	0.011	0.000
1.335	0.074	0.068	0.062	0.055	0.048	0.040	0.032	0.024	0.016	0.008	0.000
1.414	0.050	0.046	0.041	0.037	0.032	0.027	0.022	0.016	0.011	0.006	0.000

Продолжение таблицы 1.3.4-9

1.492	0.025	0.023	0.021	0.018	0.016	0.013	0.011	0.008	0.006	0.003	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Приложение 1.3.5 Таблицы численных расчетов задачи 5

Таблица 1.3.5-1. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$

$y \backslash x$	0.000	0.037	0.075	0.150	0.187	0.262	0.299	0.374	0.411	0.486	0.524
0.000	1.000	0.999	0.997	0.989	0.983	0.966	0.956	0.931	0.917	0.884	0.866
0.075	0.997	0.997	0.994	0.986	0.980	0.963	0.953	0.928	0.914	0.882	0.864
0.150	0.989	0.988	0.986	0.978	0.972	0.955	0.945	0.921	0.906	0.874	0.856
0.224	0.975	0.974	0.972	0.964	0.958	0.942	0.932	0.908	0.894	0.862	0.844
0.299	0.956	0.955	0.953	0.945	0.939	0.923	0.913	0.890	0.876	0.845	0.828
0.374	0.931	0.930	0.928	0.921	0.915	0.899	0.890	0.867	0.853	0.823	0.806
0.449	0.901	0.900	0.898	0.891	0.885	0.870	0.861	0.839	0.826	0.797	0.780
0.524	0.866	0.865	0.864	0.856	0.851	0.837	0.828	0.806	0.794	0.766	0.750
0.598	0.826	0.826	0.824	0.817	0.812	0.798	0.790	0.769	0.757	0.731	0.716
0.673	0.782	0.781	0.780	0.773	0.768	0.755	0.747	0.728	0.717	0.691	0.677
0.748	0.733	0.733	0.731	0.725	0.720	0.708	0.701	0.682	0.672	0.648	0.635
0.785	0.707	0.707	0.705	0.699	0.695	0.683	0.676	0.658	0.648	0.625	0.612

Таблица 1.3.5-2. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$

$y \backslash x$	0.524	0.561	0.636	0.673	0.748	0.785	0.860	0.898	0.972	1.010	1.047
0.000	0.866	0.847	0.805	0.782	0.733	0.707	0.652	0.624	0.563	0.532	0.500
0.075	0.864	0.844	0.802	0.780	0.731	0.705	0.651	0.622	0.562	0.531	0.499
0.150	0.856	0.837	0.796	0.773	0.725	0.699	0.645	0.617	0.557	0.526	0.494
0.224	0.844	0.826	0.784	0.762	0.715	0.689	0.636	0.608	0.549	0.519	0.488
0.299	0.828	0.809	0.769	0.747	0.701	0.676	0.623	0.596	0.538	0.508	0.478
0.374	0.806	0.788	0.749	0.728	0.682	0.658	0.607	0.580	0.524	0.495	0.465
0.449	0.780	0.763	0.725	0.704	0.661	0.637	0.588	0.562	0.508	0.479	0.451
0.524	0.750	0.733	0.697	0.677	0.635	0.612	0.565	0.540	0.488	0.461	0.433
0.598	0.716	0.700	0.665	0.646	0.606	0.584	0.539	0.515	0.465	0.440	0.413

Продолжение таблицы 1.3.5-2

0.673	0.677	0.662	0.629	0.611	0.573	0.553	0.510	0.488	0.440	0.416	0.391
0.748	0.635	0.621	0.590	0.573	0.537	0.518	0.478	0.457	0.413	0.390	0.367
0.785	0.612	0.599	0.569	0.553	0.518	0.500	0.461	0.441	0.398	0.376	0.354

Таблица 1.3.5-3. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0$

$y \backslash x$	1.047	1.085	1.159	1.197	1.272	1.309	1.384	1.421	1.496	1.533	1.571
0.000	0.500	0.467	0.400	0.365	0.295	0.259	0.186	0.149	0.075	0.037	0.000
0.075	0.499	0.466	0.399	0.364	0.294	0.258	0.185	0.149	0.075	0.037	0.000
0.150	0.494	0.462	0.395	0.361	0.292	0.256	0.184	0.147	0.074	0.037	0.000
0.224	0.488	0.456	0.390	0.356	0.287	0.252	0.181	0.145	0.073	0.037	0.000
0.299	0.478	0.447	0.382	0.349	0.282	0.247	0.178	0.142	0.071	0.036	0.000
0.374	0.465	0.435	0.372	0.340	0.274	0.241	0.173	0.139	0.070	0.035	0.000
0.449	0.451	0.421	0.360	0.329	0.266	0.233	0.168	0.134	0.067	0.034	0.000
0.524	0.433	0.405	0.346	0.316	0.255	0.224	0.161	0.129	0.065	0.032	0.000
0.598	0.413	0.386	0.330	0.302	0.244	0.214	0.154	0.123	0.062	0.031	0.000
0.673	0.391	0.365	0.313	0.286	0.230	0.202	0.145	0.117	0.058	0.029	0.000
0.748	0.367	0.343	0.293	0.268	0.216	0.190	0.136	0.109	0.055	0.027	0.000
0.785	0.354	0.330	0.283	0.258	0.208	0.183	0.132	0.105	0.053	0.026	0.000

Таблица 1.3.5-4. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_4 при $t = 0$

$y \backslash x$	1.047	1.085	1.159	1.197	1.272	1.309	1.384	1.421	1.496	1.533	1.571
0.785	0.354	0.330	0.283	0.258	0.208	0.183	0.132	0.105	0.053	0.026	0.000
0.860	0.326	0.305	0.261	0.238	0.192	0.169	0.121	0.097	0.049	0.024	0.000
0.935	0.297	0.278	0.238	0.217	0.175	0.154	0.110	0.089	0.044	0.022	0.000
1.010	0.266	0.249	0.213	0.194	0.157	0.138	0.099	0.079	0.040	0.020	0.000
1.085	0.234	0.218	0.187	0.171	0.138	0.121	0.087	0.070	0.035	0.018	0.000
1.159	0.200	0.187	0.160	0.146	0.118	0.104	0.074	0.060	0.030	0.015	0.000
1.234	0.165	0.154	0.132	0.121	0.097	0.086	0.061	0.049	0.025	0.012	0.000
1.309	0.129	0.121	0.104	0.095	0.076	0.067	0.048	0.039	0.019	0.010	0.000
1.384	0.093	0.087	0.074	0.068	0.055	0.048	0.035	0.028	0.014	0.007	0.000

Продолжение таблицы 1.3.5-4

1.459	0.056	0.052	0.045	0.041	0.033	0.029	0.021	0.017	0.008	0.004	0.000
1.533	0.019	0.018	0.015	0.014	0.011	0.010	0.007	0.006	0.003	0.001	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.5-5. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.1$

$y \backslash x$	0.000	0.037	0.075	0.150	0.187	0.262	0.299	0.374	0.411	0.486	0.524
0.000	0.819	0.818	0.816	0.810	0.805	0.791	0.782	0.762	0.750	0.724	0.709
0.075	0.816	0.816	0.814	0.807	0.802	0.788	0.779	0.759	0.747	0.720	0.704
0.150	0.810	0.809	0.807	0.800	0.795	0.781	0.772	0.752	0.740	0.713	0.698
0.224	0.798	0.798	0.796	0.789	0.783	0.770	0.761	0.741	0.729	0.702	0.687
0.299	0.782	0.782	0.780	0.773	0.768	0.754	0.746	0.726	0.714	0.688	0.673
0.374	0.762	0.761	0.759	0.752	0.747	0.734	0.726	0.706	0.695	0.669	0.655
0.449	0.738	0.737	0.735	0.728	0.723	0.710	0.702	0.683	0.672	0.647	0.633
0.524	0.709	0.708	0.706	0.699	0.694	0.682	0.674	0.656	0.646	0.622	0.608
0.598	0.677	0.675	0.673	0.667	0.662	0.650	0.643	0.625	0.615	0.593	0.580
0.673	0.640	0.639	0.637	0.630	0.626	0.614	0.607	0.591	0.582	0.560	0.548
0.748	0.600	0.598	0.596	0.590	0.586	0.575	0.569	0.553	0.545	0.525	0.514
0.785	0.579	0.579	0.577	0.573	0.569	0.559	0.553	0.539	0.531	0.512	0.501

Таблица 1.3.5-6. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.1$

$y \backslash x$	0.524	0.561	0.636	0.673	0.748	0.785	0.860	0.898	0.972	1.010	1.047
0.000	0.709	0.693	0.659	0.640	0.600	0.579	0.534	0.511	0.461	0.436	0.409
0.075	0.704	0.689	0.655	0.637	0.597	0.576	0.532	0.508	0.459	0.433	0.407
0.150	0.698	0.683	0.649	0.631	0.592	0.571	0.527	0.503	0.454	0.429	0.403
0.224	0.687	0.672	0.639	0.621	0.583	0.562	0.519	0.496	0.447	0.422	0.396
0.299	0.673	0.658	0.626	0.608	0.571	0.551	0.508	0.485	0.438	0.413	0.388
0.374	0.655	0.641	0.609	0.592	0.555	0.536	0.494	0.472	0.426	0.402	0.378
0.449	0.633	0.620	0.589	0.573	0.537	0.518	0.478	0.457	0.412	0.389	0.365
0.524	0.608	0.595	0.566	0.550	0.516	0.498	0.459	0.439	0.396	0.374	0.351
0.598	0.580	0.567	0.539	0.524	0.492	0.474	0.438	0.418	0.378	0.356	0.335

Продолжение таблицы 1.3.5-6

0.673	0.548	0.536	0.510	0.496	0.465	0.449	0.414	0.395	0.357	0.337	0.317
0.748	0.514	0.503	0.478	0.465	0.436	0.420	0.388	0.371	0.335	0.316	0.297
0.785	0.501	0.490	0.466	0.453	0.424	0.409	0.378	0.361	0.326	0.308	0.290

Таблица 1.3.5-7. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.1$

$y \backslash x$	1.047	1.085	1.159	1.197	1.272	1.309	1.384	1.421	1.496	1.533	1.571
0.000	0.409	0.383	0.327	0.299	0.241	0.212	0.152	0.122	0.061	0.031	0.000
0.075	0.407	0.380	0.326	0.298	0.240	0.211	0.152	0.122	0.061	0.031	0.000
0.150	0.403	0.376	0.322	0.295	0.238	0.209	0.150	0.120	0.060	0.030	0.000
0.224	0.396	0.371	0.318	0.290	0.234	0.206	0.148	0.119	0.059	0.030	0.000
0.299	0.388	0.363	0.311	0.284	0.229	0.202	0.145	0.116	0.058	0.029	0.000
0.374	0.378	0.353	0.303	0.277	0.223	0.196	0.141	0.113	0.057	0.028	0.000
0.449	0.365	0.342	0.293	0.268	0.216	0.190	0.136	0.109	0.055	0.027	0.000
0.524	0.351	0.328	0.281	0.257	0.207	0.182	0.131	0.105	0.053	0.026	0.000
0.598	0.335	0.313	0.268	0.245	0.198	0.174	0.125	0.100	0.050	0.025	0.000
0.673	0.317	0.296	0.254	0.232	0.187	0.164	0.118	0.095	0.048	0.024	0.000
0.748	0.297	0.277	0.238	0.217	0.175	0.154	0.111	0.089	0.045	0.022	0.000
0.785	0.290	0.271	0.232	0.212	0.171	0.150	0.108	0.086	0.043	0.022	0.000

Таблица 1.3.5-8. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_4 при $t = 0.1$

$y \backslash x$	1.047	1.085	1.159	1.197	1.272	1.309	1.384	1.421	1.496	1.533	1.571
0.785	0.290	0.271	0.232	0.212	0.171	0.150	0.108	0.086	0.043	0.022	0.000
0.860	0.267	0.249	0.213	0.194	0.157	0.138	0.099	0.079	0.040	0.020	0.000
0.935	0.243	0.227	0.194	0.177	0.143	0.125	0.090	0.072	0.036	0.018	0.000
1.010	0.218	0.203	0.174	0.159	0.128	0.112	0.081	0.065	0.032	0.016	0.000
1.085	0.191	0.179	0.153	0.140	0.113	0.099	0.071	0.057	0.029	0.014	0.000
1.159	0.164	0.153	0.131	0.120	0.096	0.085	0.061	0.049	0.024	0.012	0.000
1.234	0.135	0.126	0.108	0.099	0.080	0.070	0.050	0.040	0.020	0.010	0.000
1.309	0.106	0.099	0.085	0.077	0.062	0.055	0.039	0.032	0.016	0.008	0.000
1.384	0.076	0.071	0.061	0.056	0.045	0.039	0.028	0.023	0.011	0.006	0.000

Продолжение таблицы 1.3.5-8

1.459	0.046	0.043	0.037	0.034	0.027	0.024	0.017	0.014	0.007	0.003	0.000
1.533	0.015	0.014	0.012	0.011	0.009	0.008	0.006	0.005	0.002	0.001	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.3.5-9. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.037	0.075	0.150	0.187	0.262	0.299	0.374	0.411	0.486	0.524
0.000	0.449	0.449	0.448	0.444	0.442	0.434	0.429	0.418	0.412	0.397	0.389
0.075	0.448	0.448	0.447	0.443	0.440	0.432	0.428	0.416	0.410	0.395	0.386
0.150	0.444	0.444	0.443	0.439	0.436	0.428	0.424	0.412	0.406	0.391	0.383
0.224	0.438	0.438	0.437	0.433	0.430	0.422	0.417	0.406	0.400	0.385	0.377
0.299	0.429	0.429	0.428	0.424	0.421	0.413	0.409	0.398	0.391	0.377	0.369
0.374	0.418	0.418	0.417	0.413	0.410	0.403	0.398	0.387	0.381	0.367	0.359
0.449	0.405	0.404	0.403	0.399	0.397	0.389	0.385	0.374	0.368	0.355	0.347
0.524	0.389	0.389	0.387	0.384	0.381	0.374	0.370	0.360	0.354	0.341	0.333
0.598	0.371	0.371	0.369	0.366	0.363	0.357	0.352	0.343	0.337	0.325	0.318
0.673	0.351	0.351	0.349	0.346	0.343	0.337	0.333	0.324	0.319	0.307	0.301
0.748	0.329	0.328	0.327	0.324	0.321	0.316	0.312	0.304	0.299	0.288	0.282
0.785	0.318	0.318	0.317	0.314	0.312	0.307	0.304	0.296	0.291	0.281	0.275

Таблица 1.3.5-10. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.4$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.524	0.561	0.636	0.673	0.748	0.785	0.860	0.898	0.972	1.010	1.047
0.000	0.389	0.381	0.362	0.351	0.329	0.318	0.293	0.280	0.253	0.239	0.225
0.075	0.386	0.378	0.360	0.349	0.328	0.316	0.292	0.279	0.252	0.238	0.223
0.150	0.383	0.374	0.356	0.346	0.324	0.313	0.289	0.276	0.249	0.235	0.221
0.224	0.377	0.369	0.350	0.341	0.319	0.308	0.284	0.272	0.245	0.231	0.217
0.299	0.369	0.361	0.343	0.333	0.313	0.302	0.278	0.266	0.240	0.226	0.213
0.374	0.359	0.351	0.334	0.324	0.304	0.293	0.271	0.259	0.233	0.220	0.207
0.449	0.347	0.340	0.323	0.314	0.294	0.284	0.262	0.250	0.226	0.213	0.200
0.524	0.333	0.326	0.310	0.301	0.283	0.273	0.251	0.240	0.217	0.205	0.192
0.598	0.318	0.311	0.296	0.287	0.270	0.260	0.240	0.229	0.207	0.195	0.183

Продолжение таблицы 1.3.5-10

0.673	0.301	0.294	0.280	0.272	0.255	0.246	0.227	0.217	0.196	0.185	0.173
0.748	0.282	0.276	0.262	0.255	0.239	0.231	0.213	0.203	0.184	0.173	0.163
0.785	0.275	0.269	0.256	0.248	0.233	0.225	0.207	0.198	0.179	0.169	0.159

Таблица 1.3.5-11. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.4$

$y \backslash x$	1.047	1.085	1.159	1.197	1.272	1.309	1.384	1.421	1.496	1.533	1.571
0.000	0.225	0.210	0.180	0.164	0.132	0.116	0.084	0.067	0.034	0.017	0.000
0.075	0.223	0.209	0.179	0.163	0.132	0.116	0.083	0.067	0.033	0.017	0.000
0.150	0.221	0.206	0.177	0.162	0.130	0.115	0.082	0.066	0.033	0.017	0.000
0.224	0.217	0.203	0.174	0.159	0.128	0.113	0.081	0.065	0.033	0.016	0.000
0.299	0.213	0.199	0.170	0.156	0.126	0.110	0.079	0.064	0.032	0.016	0.000
0.374	0.207	0.193	0.166	0.151	0.122	0.107	0.077	0.062	0.031	0.016	0.000
0.449	0.200	0.187	0.160	0.146	0.118	0.104	0.075	0.060	0.030	0.015	0.000
0.524	0.192	0.180	0.154	0.141	0.114	0.100	0.072	0.057	0.029	0.014	0.000
0.598	0.183	0.171	0.147	0.134	0.108	0.095	0.068	0.055	0.028	0.014	0.000
0.673	0.173	0.162	0.139	0.127	0.102	0.090	0.065	0.052	0.026	0.013	0.000
0.748	0.163	0.152	0.130	0.119	0.096	0.084	0.061	0.049	0.024	0.012	0.000
0.785	0.159	0.149	0.127	0.116	0.094	0.082	0.059	0.047	0.024	0.012	0.000

Таблица 1.3.5-12. Численный расчет задачи 5 в области \mathfrak{Z}_4 при $t = 0.4$

$y \backslash x$	1.047	1.085	1.159	1.197	1.272	1.309	1.384	1.421	1.496	1.533	1.571
0.785	0.159	0.149	0.127	0.116	0.094	0.082	0.059	0.047	0.024	0.012	0.000
0.860	0.147	0.137	0.117	0.107	0.086	0.075	0.054	0.043	0.022	0.011	0.000
0.935	0.133	0.125	0.106	0.097	0.078	0.069	0.049	0.040	0.020	0.010	0.000
1.010	0.120	0.112	0.095	0.087	0.070	0.062	0.044	0.036	0.018	0.009	0.000
1.085	0.105	0.098	0.084	0.077	0.062	0.054	0.039	0.031	0.016	0.008	0.000
1.159	0.090	0.084	0.072	0.066	0.053	0.046	0.033	0.027	0.013	0.007	0.000
1.234	0.074	0.069	0.059	0.054	0.044	0.038	0.028	0.022	0.011	0.006	0.000
1.309	0.058	0.054	0.047	0.042	0.034	0.030	0.022	0.017	0.009	0.004	0.000
1.384	0.042	0.039	0.033	0.031	0.025	0.022	0.016	0.012	0.006	0.003	0.000

Продолжение таблицы 1.3.5-12

1.459	0.025	0.024	0.020	0.018	0.015	0.013	0.009	0.008	0.004	0.002	0.000
1.533	0.008	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.003	0.001	0.001	0.000
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Приложение 1.4 Таблицы численных расчетов задач переноса сплошных сред в трехмерной сети (п. 4.3.2)

Приложение 1.4.1 Таблицы численных расчетов задачи 1

Таблица 1.4.1-1. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$, $z = 0.7069$

y \ x	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.000	0.009	0.017	0.026	0.035	0.043	0.052	0.060	0.069	0.078	0.086
0.314	0.000	0.017	0.033	0.050	0.066	0.083	0.100	0.116	0.133	0.149	0.166
0.471	0.000	0.023	0.047	0.070	0.093	0.117	0.140	0.163	0.187	0.210	0.233
0.628	0.000	0.028	0.056	0.085	0.113	0.141	0.169	0.198	0.226	0.254	0.282
0.785	0.000	0.031	0.062	0.093	0.123	0.154	0.185	0.216	0.247	0.278	0.308
0.942	0.000	0.031	0.062	0.092	0.123	0.154	0.185	0.215	0.246	0.277	0.308
1.100	0.000	0.028	0.055	0.083	0.111	0.139	0.166	0.194	0.222	0.249	0.277
1.257	0.000	0.022	0.043	0.065	0.086	0.108	0.129	0.151	0.173	0.194	0.216
1.414	0.000	0.012	0.025	0.037	0.049	0.061	0.074	0.086	0.098	0.111	0.123
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.4.1-2. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$, $z = 0.7069$

y \ x	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.086	0.095	0.103	0.112	0.121	0.129	0.138	0.146	0.155	0.164	0.172
0.314	0.166	0.183	0.199	0.216	0.232	0.249	0.265	0.282	0.299	0.315	0.332
0.471	0.233	0.256	0.280	0.303	0.326	0.350	0.373	0.396	0.420	0.443	0.466
0.628	0.282	0.310	0.339	0.367	0.395	0.423	0.452	0.480	0.508	0.536	0.564
0.785	0.308	0.339	0.370	0.401	0.432	0.463	0.493	0.524	0.555	0.586	0.617
0.942	0.308	0.338	0.369	0.400	0.431	0.461	0.492	0.523	0.554	0.584	0.615

Продолжение таблицы 1.4.1-2

1.100	0.277	0.305	0.333	0.360	0.388	0.416	0.443	0.471	0.499	0.527	0.554
1.257	0.216	0.237	0.259	0.280	0.302	0.323	0.345	0.367	0.388	0.410	0.431
1.414	0.123	0.135	0.147	0.160	0.172	0.184	0.196	0.209	0.221	0.233	0.246
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.4.1-3. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t=0$, $z=1.0996$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.000	0.013	0.027	0.040	0.054	0.067	0.080	0.094	0.107	0.121	0.134
0.314	0.000	0.026	0.052	0.077	0.103	0.129	0.155	0.181	0.206	0.232	0.258
0.471	0.000	0.036	0.073	0.109	0.145	0.181	0.218	0.254	0.290	0.326	0.363
0.628	0.000	0.044	0.088	0.132	0.176	0.220	0.263	0.307	0.351	0.395	0.439
0.785	0.000	0.048	0.096	0.144	0.192	0.240	0.288	0.336	0.384	0.432	0.480
0.942	0.000	0.048	0.096	0.144	0.191	0.239	0.287	0.335	0.383	0.431	0.478
1.100	0.000	0.043	0.086	0.129	0.172	0.216	0.259	0.302	0.345	0.388	0.431
1.257	0.000	0.034	0.067	0.101	0.134	0.168	0.201	0.235	0.268	0.302	0.335
1.414	0.000	0.019	0.038	0.057	0.076	0.096	0.115	0.134	0.153	0.172	0.191
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.4.1-4. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t=0$, $z=1.0996$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.134	0.147	0.161	0.174	0.188	0.201	0.214	0.228	0.241	0.255	0.268
0.314	0.258	0.284	0.310	0.335	0.361	0.387	0.413	0.439	0.464	0.490	0.516
0.471	0.363	0.399	0.435	0.471	0.508	0.544	0.580	0.616	0.653	0.689	0.725
0.628	0.439	0.483	0.527	0.571	0.615	0.659	0.702	0.746	0.790	0.834	0.878
0.785	0.480	0.528	0.576	0.624	0.671	0.719	0.767	0.815	0.863	0.911	0.959
0.942	0.478	0.526	0.574	0.622	0.670	0.718	0.766	0.813	0.861	0.909	0.957
1.100	0.431	0.474	0.517	0.560	0.604	0.647	0.690	0.733	0.776	0.819	0.862
1.257	0.335	0.369	0.402	0.436	0.470	0.503	0.537	0.570	0.604	0.637	0.671

Продолжение таблицы 1.4.1-4

1.414	0.191	0.210	0.229	0.248	0.267	0.287	0.306	0.325	0.344	0.363	0.382
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.4.1-5. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.02$, $z = 0.7069$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.000	0.008	0.016	0.024	0.032	0.040	0.048	0.056	0.063	0.070	0.076
0.314	0.000	0.016	0.031	0.047	0.062	0.078	0.093	0.108	0.122	0.135	0.147
0.471	0.000	0.022	0.044	0.066	0.087	0.109	0.130	0.151	0.171	0.190	0.206
0.628	0.000	0.026	0.053	0.079	0.105	0.132	0.157	0.183	0.207	0.229	0.248
0.785	0.000	0.029	0.057	0.086	0.115	0.143	0.171	0.199	0.225	0.249	0.270
0.942	0.000	0.028	0.057	0.085	0.113	0.142	0.169	0.196	0.222	0.246	0.267
1.100	0.000	0.025	0.051	0.076	0.101	0.126	0.151	0.175	0.198	0.219	0.237
1.257	0.000	0.019	0.038	0.057	0.076	0.095	0.114	0.132	0.149	0.165	0.179
1.414	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.049	0.059	0.068	0.077	0.086	0.093
1.571	0.000	-0.002	-0.004	-0.007	-0.009	-0.011	-0.013	-0.015	-0.017	-0.020	-0.022

Таблица 1.4.1-6. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.02$, $z = 0.7069$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.076	0.082	0.093	0.103	0.112	0.121	0.130	0.138	0.146	0.154	0.162
0.314	0.147	0.158	0.179	0.199	0.216	0.233	0.249	0.265	0.281	0.296	0.312
0.471	0.206	0.222	0.252	0.279	0.303	0.327	0.349	0.372	0.393	0.415	0.437
0.628	0.248	0.268	0.304	0.336	0.366	0.394	0.422	0.448	0.475	0.501	0.528
0.785	0.270	0.291	0.330	0.365	0.398	0.429	0.458	0.487	0.516	0.545	0.574
0.942	0.267	0.288	0.327	0.362	0.394	0.424	0.454	0.482	0.511	0.539	0.568
1.100	0.237	0.256	0.290	0.321	0.350	0.377	0.403	0.429	0.454	0.479	0.505
1.257	0.179	0.193	0.219	0.243	0.265	0.285	0.305	0.324	0.343	0.362	0.381
1.414	0.093	0.100	0.114	0.126	0.137	0.148	0.158	0.168	0.178	0.188	0.198
1.571	-0.022	-0.024	-0.026	-0.028	-0.031	-0.033	-0.035	-0.037	-0.039	-0.041	-0.044

Таблица 1.4.1-7. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.02$, $z = 1.0996$

$x \backslash y$	0.000	0.079	0.157	0.236	0.314	0.393	0.471	0.550	0.628	0.707	0.785
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.000	0.013	0.025	0.038	0.050	0.063	0.075	0.087	0.099	0.109	0.119
0.314	0.000	0.024	0.049	0.073	0.097	0.121	0.145	0.168	0.190	0.210	0.228
0.471	0.000	0.034	0.068	0.102	0.136	0.170	0.203	0.235	0.266	0.295	0.320
0.628	0.000	0.041	0.082	0.123	0.164	0.205	0.245	0.284	0.321	0.356	0.386
0.785	0.000	0.045	0.089	0.134	0.178	0.223	0.266	0.309	0.349	0.387	0.420
0.942	0.000	0.044	0.088	0.132	0.176	0.220	0.263	0.306	0.346	0.383	0.416
1.100	0.000	0.039	0.079	0.118	0.157	0.196	0.234	0.272	0.307	0.340	0.369
1.257	0.000	0.030	0.059	0.089	0.119	0.148	0.177	0.205	0.232	0.257	0.279
1.414	0.000	0.015	0.031	0.046	0.061	0.077	0.092	0.106	0.120	0.133	0.145
1.571	0.000	-0.003	-0.007	-0.010	-0.014	-0.017	-0.020	-0.024	-0.027	-0.031	-0.034

Таблица 1.4.1-8. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.02$, $z = 1.0996$

$x \backslash y$	0.785	0.864	0.942	1.021	1.100	1.178	1.257	1.335	1.414	1.492	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.157	0.119	0.128	0.145	0.161	0.175	0.188	0.201	0.214	0.227	0.240	0.252
0.314	0.228	0.246	0.279	0.309	0.336	0.362	0.387	0.412	0.436	0.461	0.485
0.471	0.320	0.345	0.392	0.433	0.472	0.508	0.543	0.578	0.612	0.646	0.680
0.628	0.386	0.417	0.473	0.523	0.570	0.613	0.656	0.697	0.739	0.780	0.821
0.785	0.420	0.453	0.514	0.569	0.619	0.667	0.713	0.758	0.803	0.848	0.892
0.942	0.416	0.448	0.508	0.563	0.613	0.660	0.706	0.750	0.795	0.839	0.883
1.100	0.369	0.398	0.452	0.500	0.545	0.587	0.627	0.667	0.706	0.746	0.785
1.257	0.279	0.301	0.341	0.378	0.412	0.443	0.474	0.504	0.534	0.563	0.593
1.414	0.145	0.156	0.177	0.196	0.213	0.230	0.246	0.261	0.277	0.292	0.308
1.571	-0.034	-0.037	-0.041	-0.044	-0.047	-0.051	-0.054	-0.058	-0.061	-0.064	-0.068

Приложение 1.4.2 Таблицы численных расчетов задачи 2

Таблица 1.4.2-1. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$, $z = 1.0472$

Таблица 1.4.2-7. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.02$, $z = 1.0472$

$x \backslash y$	0.000	0.075	0.150	0.224	0.299	0.374	0.449	0.524
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.150	0.000	0.011	0.022	0.032	0.043	0.053	0.062	0.071
0.299	0.000	0.021	0.042	0.062	0.083	0.102	0.120	0.137
0.449	0.000	0.030	0.059	0.088	0.117	0.144	0.170	0.193
0.598	0.000	0.036	0.072	0.107	0.142	0.176	0.207	0.235
0.748	0.000	0.040	0.080	0.119	0.157	0.194	0.228	0.260
0.898	0.000	0.040	0.081	0.120	0.159	0.197	0.231	0.263
1.047	0.000	0.037	0.075	0.111	0.147	0.182	0.214	0.244
1.197	0.000	0.031	0.061	0.091	0.121	0.149	0.175	0.199
1.346	0.000	0.020	0.040	0.059	0.079	0.097	0.114	0.130
1.496	0.000	0.006	0.011	0.016	0.022	0.027	0.031	0.035
1.571	0.000	-0.003	-0.006	-0.009	-0.012	-0.015	-0.018	-0.022

Таблица 1.4.2-8. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.02$, $z = 1.0472$

$x \backslash y$	0.524	0.598	0.673	0.748	0.823	0.898	0.972	1.047
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.150	0.071	0.079	0.093	0.106	0.117	0.127	0.136	0.143
0.299	0.137	0.153	0.180	0.204	0.226	0.246	0.262	0.275
0.449	0.193	0.216	0.254	0.288	0.319	0.347	0.370	0.389
0.598	0.235	0.263	0.310	0.352	0.389	0.423	0.451	0.474
0.748	0.260	0.291	0.342	0.388	0.430	0.467	0.498	0.523
0.898	0.263	0.295	0.347	0.394	0.436	0.473	0.505	0.531
1.047	0.244	0.273	0.321	0.364	0.403	0.438	0.468	0.491
1.197	0.199	0.223	0.262	0.298	0.330	0.358	0.382	0.402
1.346	0.130	0.145	0.171	0.194	0.215	0.233	0.249	0.262
1.496	0.035	0.039	0.047	0.053	0.059	0.064	0.068	0.071
1.571	-0.022	-0.025	-0.028	-0.031	-0.034	-0.037	-0.040	-0.043

Таблица 1.4.2-9. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.02$, $z = 1.0472$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.122	1.197	1.272	1.346	1.421	1.496	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.150	0.143	0.150	0.166	0.181	0.194	0.206	0.218	0.229
0.299	0.275	0.289	0.321	0.349	0.374	0.398	0.420	0.442
0.449	0.389	0.408	0.453	0.493	0.529	0.562	0.593	0.624
0.598	0.474	0.497	0.552	0.601	0.645	0.685	0.723	0.761
0.748	0.523	0.549	0.610	0.664	0.712	0.756	0.799	0.840
0.898	0.531	0.556	0.618	0.673	0.722	0.767	0.810	0.852
1.047	0.491	0.515	0.572	0.623	0.668	0.710	0.750	0.788
1.197	0.402	0.421	0.468	0.509	0.546	0.581	0.613	0.645
1.346	0.262	0.274	0.305	0.332	0.356	0.378	0.400	0.420
1.496	0.071	0.074	0.083	0.091	0.098	0.104	0.110	0.116
1.571	-0.043	-0.046	-0.049	-0.052	-0.055	-0.058	-0.061	-0.065

Таблица 1.4.2-10. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.02$, $z = 1.4960$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.075	0.150	0.224	0.299	0.374	0.449	0.524
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.150	0.000	0.016	0.031	0.047	0.062	0.077	0.092	0.105
0.299	0.000	0.030	0.060	0.090	0.119	0.149	0.177	0.202
0.449	0.000	0.042	0.085	0.127	0.169	0.210	0.249	0.285
0.598	0.000	0.052	0.103	0.155	0.206	0.256	0.304	0.348
0.748	0.000	0.057	0.114	0.171	0.227	0.282	0.336	0.384
0.898	0.000	0.058	0.116	0.173	0.230	0.286	0.341	0.389
1.047	0.000	0.054	0.107	0.160	0.213	0.265	0.315	0.360
1.197	0.000	0.044	0.088	0.131	0.174	0.217	0.258	0.295
1.346	0.000	0.029	0.057	0.085	0.114	0.141	0.168	0.192
1.496	0.000	0.008	0.016	0.024	0.031	0.039	0.046	0.053
1.571	0.000	-0.004	-0.009	-0.013	-0.018	-0.022	-0.026	-0.031

Таблица 1.4.2-11. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.02$, $z = 1.4960$

$x \backslash y$	0.524	0.598	0.673	0.748	0.823	0.898	0.972	1.047
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.150	0.105	0.119	0.137	0.154	0.170	0.185	0.199	0.210
0.299	0.202	0.229	0.265	0.297	0.328	0.357	0.384	0.406
0.449	0.285	0.323	0.374	0.420	0.463	0.504	0.542	0.573
0.598	0.348	0.394	0.456	0.512	0.565	0.615	0.661	0.699
0.748	0.384	0.435	0.503	0.565	0.624	0.679	0.730	0.772
0.898	0.389	0.441	0.510	0.573	0.632	0.688	0.740	0.782
1.047	0.360	0.408	0.472	0.530	0.585	0.637	0.685	0.724
1.197	0.295	0.334	0.386	0.434	0.479	0.521	0.560	0.592
1.346	0.192	0.218	0.252	0.283	0.312	0.339	0.365	0.386
1.496	0.053	0.060	0.069	0.078	0.086	0.093	0.100	0.106
1.571	-0.031	-0.035	-0.040	-0.044	-0.048	-0.053	-0.057	-0.061

Таблица 1.4.2-12. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.02$, $z = 1.4960$

$x \backslash y$	1.047	1.122	1.197	1.272	1.346	1.421	1.496	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.150	0.210	0.223	0.244	0.262	0.279	0.295	0.311	0.327
0.299	0.406	0.431	0.471	0.506	0.539	0.570	0.601	0.631
0.449	0.573	0.608	0.665	0.715	0.761	0.805	0.849	0.891
0.598	0.699	0.741	0.811	0.872	0.928	0.982	1.035	1.087
0.748	0.772	0.818	0.895	0.963	1.025	1.084	1.143	1.200
0.898	0.782	0.830	0.908	0.976	1.039	1.099	1.158	1.217
1.047	0.724	0.768	0.840	0.903	0.961	1.017	1.072	1.126
1.197	0.592	0.628	0.687	0.739	0.787	0.832	0.877	0.921
1.346	0.386	0.409	0.448	0.481	0.512	0.542	0.571	0.600
1.496	0.106	0.112	0.123	0.133	0.141	0.150	0.158	0.166
1.571	-0.061	-0.066	-0.070	-0.075	-0.079	-0.083	-0.088	-0.092

Приложение 1.4.3 Таблицы численных расчетов задачи 3

Таблица 1.4.3-1. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$, $z = 0.8901$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.024	0.029	0.034	0.039	0.044	0.049
0.157	0.000	0.015	0.029	0.043	0.058	0.072	0.087	0.101	0.116	0.130	0.145
0.209	0.000	0.019	0.038	0.057	0.076	0.096	0.115	0.134	0.153	0.172	0.191
0.314	0.000	0.028	0.056	0.084	0.111	0.139	0.167	0.195	0.223	0.251	0.279
0.367	0.000	0.032	0.064	0.096	0.128	0.160	0.191	0.223	0.255	0.287	0.319
0.471	0.000	0.039	0.078	0.117	0.157	0.196	0.235	0.274	0.313	0.352	0.391
0.524	0.000	0.042	0.085	0.127	0.169	0.211	0.254	0.296	0.338	0.380	0.423
0.628	0.000	0.047	0.095	0.142	0.190	0.237	0.284	0.332	0.379	0.426	0.474
0.681	0.000	0.049	0.099	0.148	0.197	0.247	0.296	0.345	0.395	0.444	0.493
0.785	0.000	0.052	0.104	0.155	0.207	0.259	0.311	0.362	0.414	0.466	0.518

Таблица 1.4.3-2. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t=0$, $z=0.8901$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.100	1.152	1.204	1.257	1.309	1.361	1.414	1.466	1.518	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.049	0.051	0.054	0.056	0.059	0.061	0.063	0.066	0.068	0.071	0.073
0.157	0.145	0.152	0.159	0.166	0.174	0.181	0.188	0.195	0.203	0.210	0.217
0.209	0.191	0.201	0.210	0.220	0.229	0.239	0.248	0.258	0.267	0.277	0.286
0.314	0.279	0.292	0.306	0.320	0.334	0.348	0.362	0.376	0.390	0.404	0.418
0.367	0.319	0.335	0.351	0.367	0.383	0.399	0.415	0.431	0.447	0.463	0.478
0.471	0.391	0.411	0.431	0.450	0.470	0.489	0.509	0.528	0.548	0.568	0.587
0.524	0.423	0.444	0.465	0.486	0.507	0.528	0.550	0.571	0.592	0.613	0.634
0.628	0.474	0.498	0.521	0.545	0.569	0.592	0.616	0.640	0.663	0.687	0.711
0.681	0.493	0.518	0.542	0.567	0.592	0.616	0.641	0.666	0.690	0.715	0.740
0.785	0.518	0.544	0.569	0.595	0.621	0.647	0.673	0.699	0.725	0.751	0.777

Таблица 1.4.3-3. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_3 при $t=0$, $z=0.8901$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.524	0.576	0.628	0.681	0.733	0.785	0.838	0.890	0.942	0.995	1.047
0.785	0.259	0.285	0.311	0.337	0.362	0.388	0.414	0.440	0.466	0.492	0.518
0.838	0.261	0.287	0.314	0.340	0.366	0.392	0.418	0.444	0.470	0.496	0.523

Продолжение таблицы 1.4.3-3

0.942	0.258	0.284	0.310	0.336	0.362	0.387	0.413	0.439	0.465	0.491	0.516
0.995	0.253	0.278	0.303	0.328	0.354	0.379	0.404	0.429	0.455	0.480	0.505
1.100	0.233	0.256	0.279	0.303	0.326	0.349	0.372	0.396	0.419	0.442	0.465
1.152	0.218	0.240	0.262	0.284	0.306	0.328	0.349	0.371	0.393	0.415	0.437
1.257	0.181	0.199	0.217	0.235	0.253	0.272	0.290	0.308	0.326	0.344	0.362
1.309	0.158	0.174	0.190	0.205	0.221	0.237	0.253	0.268	0.284	0.300	0.316
1.414	0.103	0.113	0.124	0.134	0.144	0.155	0.165	0.175	0.186	0.196	0.206
1.466	0.071	0.079	0.086	0.093	0.100	0.107	0.114	0.121	0.129	0.136	0.143
1.571	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.4.3-4. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$, $z = 1.1519$

y \ x	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.000	0.006	0.013	0.019	0.025	0.032	0.038	0.044	0.051	0.057	0.063
0.157	0.000	0.019	0.037	0.056	0.075	0.094	0.112	0.131	0.150	0.168	0.187
0.209	0.000	0.025	0.049	0.074	0.099	0.124	0.148	0.173	0.198	0.222	0.247
0.314	0.000	0.036	0.072	0.108	0.144	0.180	0.216	0.252	0.288	0.324	0.360
0.367	0.000	0.041	0.083	0.124	0.165	0.206	0.248	0.289	0.330	0.372	0.413
0.471	0.000	0.051	0.101	0.152	0.203	0.253	0.304	0.355	0.405	0.456	0.507
0.524	0.000	0.055	0.109	0.164	0.219	0.274	0.328	0.383	0.438	0.492	0.547
0.628	0.000	0.061	0.123	0.184	0.245	0.307	0.368	0.429	0.491	0.552	0.613
0.681	0.000	0.064	0.128	0.191	0.255	0.319	0.383	0.447	0.511	0.574	0.638
0.785	0.000	0.067	0.134	0.201	0.268	0.335	0.402	0.469	0.536	0.603	0.670

Таблица 1.4.3-5. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$, $z = 1.1519$

y \ x	1.047	1.100	1.152	1.204	1.257	1.309	1.361	1.414	1.466	1.518	1.571
0.000	0.335	0.369	0.402	0.435	0.469	0.502	0.536	0.569	0.603	0.636	0.670
0.052	0.338	0.372	0.406	0.440	0.473	0.507	0.541	0.575	0.609	0.642	0.676
0.157	0.334	0.368	0.401	0.434	0.468	0.501	0.535	0.568	0.601	0.635	0.668
0.209	0.327	0.360	0.392	0.425	0.458	0.490	0.523	0.556	0.588	0.621	0.654

Продолжение таблицы 1.4.3-5

0.314	0.301	0.331	0.361	0.391	0.422	0.452	0.482	0.512	0.542	0.572	0.602
0.367	0.283	0.311	0.339	0.367	0.396	0.424	0.452	0.480	0.509	0.537	0.565
0.471	0.234	0.258	0.281	0.305	0.328	0.351	0.375	0.398	0.422	0.445	0.468
0.524	0.204	0.225	0.245	0.266	0.286	0.307	0.327	0.347	0.368	0.388	0.409
0.628	0.133	0.147	0.160	0.173	0.187	0.200	0.213	0.227	0.240	0.253	0.267
0.681	0.092	0.102	0.111	0.120	0.129	0.139	0.148	0.157	0.166	0.176	0.185
0.785	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1.4.3-6. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_3 при $t=0$, $z=1.1519$

$y \backslash x$	0.524	0.576	0.628	0.681	0.733	0.785	0.838	0.890	0.942	0.995	1.047
0.785	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.838	0.063	0.066	0.069	0.073	0.076	0.079	0.082	0.085	0.088	0.092	0.095
0.942	0.187	0.197	0.206	0.215	0.225	0.234	0.243	0.253	0.262	0.271	0.281
0.995	0.247	0.260	0.272	0.284	0.297	0.309	0.321	0.334	0.346	0.358	0.371
1.100	0.360	0.378	0.397	0.415	0.433	0.451	0.469	0.487	0.505	0.523	0.541
1.152	0.413	0.433	0.454	0.475	0.495	0.516	0.537	0.557	0.578	0.599	0.619
1.257	0.507	0.532	0.557	0.583	0.608	0.633	0.658	0.684	0.709	0.734	0.760
1.309	0.547	0.574	0.602	0.629	0.656	0.684	0.711	0.738	0.766	0.793	0.821
1.414	0.613	0.644	0.675	0.705	0.736	0.767	0.797	0.828	0.859	0.889	0.920
1.466	0.638	0.670	0.702	0.734	0.766	0.798	0.830	0.861	0.893	0.925	0.957
1.571	0.670	0.703	0.737	0.770	0.804	0.837	0.871	0.904	0.938	0.971	1.005

Таблица 1.4.3-7. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t=0.02$, $z=0.8901$

$y \backslash x$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.000	0.005	0.009	0.014	0.018	0.023	0.027	0.032	0.035	0.038	0.039
0.157	0.000	0.014	0.027	0.041	0.054	0.068	0.081	0.094	0.105	0.113	0.116
0.209	0.000	0.019	0.036	0.054	0.072	0.090	0.107	0.124	0.139	0.149	0.153
0.314	0.000	0.027	0.053	0.079	0.105	0.131	0.156	0.181	0.202	0.217	0.223
0.367	0.000	0.031	0.060	0.090	0.120	0.150	0.179	0.207	0.231	0.249	0.255

Продолжение таблицы 1.4.3-7

0.471	0.000	0.038	0.074	0.110	0.147	0.183	0.219	0.253	0.284	0.306	0.314
0.524	0.000	0.041	0.080	0.119	0.158	0.198	0.236	0.273	0.306	0.330	0.340
0.628	0.000	0.045	0.089	0.133	0.177	0.221	0.264	0.306	0.344	0.373	0.386
0.681	0.000	0.047	0.092	0.138	0.184	0.229	0.274	0.318	0.358	0.390	0.409
0.785	0.000	0.048	0.096	0.145	0.193	0.241	0.286	0.332	0.376	0.418	0.482

Таблица 1.4.3-8. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.02$, $z = 0.8901$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.100	1.152	1.204	1.257	1.309	1.361	1.414	1.466	1.518	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.039	0.039	0.044	0.048	0.052	0.055	0.058	0.061	0.064	0.066	0.069
0.157	0.116	0.116	0.131	0.144	0.155	0.165	0.174	0.182	0.190	0.197	0.204
0.209	0.153	0.154	0.173	0.190	0.205	0.218	0.229	0.240	0.250	0.260	0.269
0.314	0.223	0.224	0.252	0.277	0.298	0.317	0.334	0.350	0.365	0.379	0.393
0.367	0.255	0.257	0.289	0.317	0.341	0.363	0.383	0.401	0.417	0.434	0.449
0.471	0.314	0.316	0.355	0.389	0.419	0.446	0.469	0.491	0.512	0.531	0.551
0.524	0.340	0.342	0.385	0.422	0.454	0.482	0.507	0.530	0.552	0.573	0.594
0.628	0.386	0.391	0.439	0.478	0.512	0.542	0.569	0.594	0.618	0.642	0.664
0.681	0.409	0.416	0.465	0.504	0.537	0.566	0.593	0.619	0.643	0.667	0.691
0.785	0.482	0.506	0.530	0.554	0.578	0.602	0.626	0.650	0.674	0.698	0.722

Таблица 1.4.3-9. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.02$, $z = 0.8901$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.524	0.576	0.628	0.681	0.733	0.785	0.838	0.890	0.942	0.995	1.047
0.785	0.241	0.262	0.286	0.309	0.332	0.354	0.376	0.397	0.418	0.437	0.482
0.838	0.243	0.266	0.291	0.314	0.337	0.361	0.384	0.407	0.430	0.455	0.485
0.942	0.238	0.263	0.287	0.310	0.333	0.356	0.380	0.403	0.427	0.451	0.477
0.995	0.232	0.256	0.279	0.302	0.325	0.348	0.371	0.394	0.417	0.441	0.464
1.100	0.212	0.234	0.255	0.276	0.297	0.318	0.339	0.360	0.381	0.402	0.424
1.152	0.197	0.218	0.238	0.257	0.277	0.296	0.316	0.336	0.355	0.375	0.395
1.257	0.160	0.177	0.193	0.209	0.225	0.240	0.256	0.272	0.288	0.304	0.320
1.309	0.137	0.152	0.165	0.179	0.192	0.206	0.220	0.233	0.247	0.261	0.274

Продолжение таблицы 1.4.3-9

1.414	0.083	0.092	0.100	0.108	0.117	0.125	0.133	0.141	0.149	0.158	0.166
1.466	0.052	0.057	0.063	0.068	0.073	0.078	0.083	0.088	0.093	0.099	0.104
1.571	-0.018	-0.020	-0.022	-0.024	-0.026	-0.027	-0.029	-0.031	-0.033	-0.035	-0.037

Таблица 1.4.3-10. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.02$, $z = 1.1519$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.105	0.209	0.314	0.419	0.524	0.628	0.733	0.838	0.942	1.047
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.000	0.006	0.012	0.018	0.024	0.030	0.035	0.041	0.046	0.049	0.050
0.157	0.000	0.018	0.035	0.053	0.070	0.088	0.105	0.122	0.136	0.146	0.150
0.209	0.000	0.024	0.047	0.070	0.093	0.116	0.139	0.161	0.180	0.193	0.198
0.314	0.000	0.035	0.068	0.102	0.136	0.169	0.202	0.234	0.262	0.282	0.289
0.367	0.000	0.040	0.078	0.117	0.155	0.194	0.232	0.268	0.300	0.322	0.331
0.471	0.000	0.049	0.096	0.143	0.190	0.237	0.284	0.328	0.367	0.396	0.406
0.524	0.000	0.053	0.103	0.154	0.205	0.256	0.306	0.354	0.397	0.428	0.440
0.628	0.000	0.059	0.115	0.172	0.229	0.286	0.342	0.396	0.445	0.483	0.501
0.681	0.000	0.061	0.120	0.179	0.238	0.297	0.355	0.411	0.463	0.506	0.530
0.785	0.000	0.062	0.125	0.187	0.249	0.312	0.370	0.429	0.487	0.541	0.623

Таблица 1.4.3-11. Численный расчет задачи 3 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.02$, $z = 1.1519$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1.047	1.100	1.152	1.204	1.257	1.309	1.361	1.414	1.466	1.518	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.052	0.050	0.051	0.057	0.063	0.068	0.072	0.076	0.079	0.083	0.086	0.089
0.157	0.150	0.151	0.170	0.186	0.201	0.213	0.225	0.235	0.245	0.255	0.264
0.209	0.198	0.199	0.224	0.246	0.265	0.282	0.297	0.311	0.324	0.336	0.349
0.314	0.289	0.290	0.327	0.359	0.386	0.411	0.433	0.453	0.472	0.490	0.508
0.367	0.331	0.333	0.374	0.411	0.442	0.470	0.496	0.519	0.540	0.561	0.582
0.471	0.406	0.409	0.460	0.505	0.543	0.577	0.608	0.636	0.662	0.688	0.713
0.524	0.440	0.443	0.499	0.546	0.587	0.624	0.656	0.686	0.715	0.742	0.769
0.628	0.501	0.506	0.568	0.619	0.663	0.702	0.737	0.769	0.800	0.830	0.860
0.681	0.530	0.539	0.602	0.652	0.695	0.733	0.768	0.801	0.832	0.863	0.894

Продолжение таблицы 1.5.1-1

4.5	0.000	0.271	0.500	0.653	0.707	0.653	0.500	0.271	0.000	-0.271	-0.500
5.0	0.000	0.383	0.707	0.924	1.000	0.924	0.707	0.383	0.000	-0.383	-0.707

Таблица 1.5.1-2. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$

x \ y	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	-0.500	-0.653	-0.707	-0.653	-0.500	-0.271	0.000	0.271	0.500	0.653	0.707
1.0	-0.707	-0.924	-1.000	-0.924	-0.707	-0.383	0.000	0.383	0.707	0.924	1.000
1.5	-0.500	-0.653	-0.707	-0.653	-0.500	-0.271	0.000	0.271	0.500	0.653	0.707
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.500	0.653	0.707	0.653	0.500	0.271	0.000	-0.271	-0.500	-0.653	-0.707
3.0	0.707	0.924	1.000	0.924	0.707	0.383	0.000	-0.383	-0.707	-0.924	-1.000
3.5	0.500	0.653	0.707	0.653	0.500	0.271	0.000	-0.271	-0.500	-0.653	-0.707
4.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	-0.500	-0.653	-0.707	-0.653	-0.500	-0.271	0.000	0.271	0.500	0.653	0.707
5.0	-0.707	-0.924	-1.000	-0.924	-0.707	-0.383	0.000	0.383	0.707	0.924	1.000

Таблица 1.5.1-3. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.6369$

x \ y	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.000	-0.252	-0.465	-0.608	-0.658	-0.607	-0.456	-0.238	0.012	0.257	0.459
1.0	0.000	-0.356	-0.658	-0.859	-0.930	-0.859	-0.645	-0.337	0.017	0.363	0.649
1.5	0.000	-0.252	-0.465	-0.608	-0.658	-0.607	-0.456	-0.238	0.012	0.257	0.459
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.252	0.465	0.608	0.658	0.607	0.456	0.238	-0.012	-0.257	-0.459
3.0	0.000	0.356	0.658	0.859	0.930	0.859	0.645	0.337	-0.017	-0.363	-0.649
3.5	0.000	0.252	0.465	0.608	0.658	0.607	0.456	0.238	-0.012	-0.257	-0.459
4.0	0.000	-0.013	-0.025	-0.032	-0.035	-0.032	-0.025	-0.013	-0.001	0.011	0.021
4.5	0.000	-0.271	-0.500	-0.653	-0.707	-0.653	-0.493	-0.266	-0.002	0.260	0.477
5.0	0.000	-0.364	-0.673	-0.879	-0.952	-0.879	-0.673	-0.364	0.000	0.364	0.673

Таблица 1.5.1-4. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.6369$

x \ y	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.459	0.613	0.670	0.621	0.474	0.251	-0.027	-0.287	-0.501	-0.636	-0.673
1.0	0.649	0.866	0.947	0.878	0.671	0.354	-0.038	-0.406	-0.709	-0.899	-0.952
1.5	0.459	0.613	0.670	0.621	0.474	0.251	-0.027	-0.287	-0.501	-0.636	-0.673
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	-0.459	-0.613	-0.670	-0.621	-0.474	-0.251	0.027	0.287	0.501	0.636	0.673
3.0	-0.649	-0.866	-0.947	-0.878	-0.671	-0.354	0.038	0.406	0.709	0.899	0.952
3.5	-0.459	-0.613	-0.670	-0.621	-0.474	-0.251	0.027	0.287	0.501	0.636	0.673
4.0	0.021	0.030	0.034	0.032	0.025	0.013	0.000	-0.013	-0.017	-0.011	0.000
4.5	0.477	0.642	0.705	0.658	0.507	0.270	-0.018	-0.276	-0.490	-0.629	-0.673
5.0	0.673	0.879	0.952	0.879	0.673	0.364	0.000	-0.364	-0.673	-0.879	-0.952

Таблица 1.5.1-5. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.9554$

x \ y	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.000	-0.139	-0.257	-0.332	-0.353	-0.327	-0.255	-0.147	-0.019	0.110	0.220
1.0	0.000	-0.197	-0.363	-0.470	-0.499	-0.462	-0.360	-0.207	-0.027	0.156	0.312
1.5	0.000	-0.139	-0.257	-0.332	-0.353	-0.327	-0.255	-0.147	-0.019	0.110	0.220
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.139	0.257	0.332	0.353	0.327	0.255	0.147	0.019	-0.110	-0.220
3.0	0.000	0.196	0.363	0.469	0.498	0.461	0.359	0.207	0.026	-0.155	-0.311
3.5	0.000	0.124	0.228	0.295	0.312	0.289	0.225	0.129	0.015	-0.100	-0.198
4.0	0.000	-0.008	-0.014	-0.018	-0.020	-0.024	-0.024	-0.020	-0.013	-0.006	0.000
4.5	0.000	-0.129	-0.239	-0.309	-0.336	-0.317	-0.250	-0.146	-0.021	0.103	0.207
5.0	0.000	-0.173	-0.319	-0.416	-0.451	-0.416	-0.319	-0.173	0.000	0.173	0.319

Таблица 1.5.1-6. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.9554$

$x \backslash y$	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.220	0.307	0.345	0.317	0.233	0.123	-0.005	-0.134	-0.239	-0.302	-0.319
1.0	0.312	0.434	0.487	0.449	0.330	0.174	-0.006	-0.190	-0.338	-0.428	-0.451
1.5	0.220	0.307	0.345	0.317	0.233	0.123	-0.005	-0.134	-0.239	-0.302	-0.319
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	-0.220	-0.307	-0.345	-0.317	-0.233	-0.123	0.005	0.134	0.239	0.302	0.319
3.0	-0.311	-0.433	-0.487	-0.448	-0.329	-0.173	0.006	0.190	0.337	0.427	0.451
3.5	-0.198	-0.275	-0.308	-0.282	-0.205	-0.107	0.007	0.132	0.237	0.302	0.319
4.0	0.000	0.005	0.006	0.006	0.006	0.022	0.034	0.035	0.028	0.015	0.000
4.5	0.207	0.285	0.316	0.287	0.229	0.139	0.029	-0.092	-0.204	-0.283	-0.319
5.0	0.319	0.416	0.451	0.416	0.319	0.173	0.000	-0.173	-0.319	-0.416	-0.451

Приложение 1.5.2 Таблицы численных расчетов задачи 2

Таблица 1.5.2-1. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0$

$x \backslash y$	0.00	0.33	0.67	1.00	1.33	1.67	2.00	2.33	2.67	3.00	3.33
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	0.000	0.191	0.331	0.383	0.331	0.191	0.000	-0.191	-0.331	-0.383	-0.331
0.50	0.000	0.354	0.612	0.707	0.612	0.354	0.000	-0.354	-0.612	-0.707	-0.612
0.75	0.000	0.462	0.800	0.924	0.800	0.462	0.000	-0.462	-0.800	-0.924	-0.800
1.00	0.000	0.500	0.866	1.000	0.866	0.500	0.000	-0.500	-0.866	-1.000	-0.866
1.25	0.000	0.462	0.800	0.924	0.800	0.462	0.000	-0.462	-0.800	-0.924	-0.800
1.50	0.000	0.354	0.612	0.707	0.612	0.354	0.000	-0.354	-0.612	-0.707	-0.612
1.75	0.000	0.191	0.331	0.383	0.331	0.191	0.000	-0.191	-0.331	-0.383	-0.331
2.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.25	0.000	-0.191	-0.331	-0.383	-0.331	-0.191	0.000	0.191	0.331	0.383	0.331
2.50	0.000	-0.354	-0.612	-0.707	-0.612	-0.354	0.000	0.354	0.612	0.707	0.612

Таблица 1.5.2-2. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$

$x \backslash y$	3.33	3.50	3.67	3.83	4.00	4.17	4.33	4.50	4.67	4.83	5.00
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	-0.331	-0.271	-0.191	-0.099	0.000	0.099	0.191	0.271	0.331	0.370	0.383
0.50	-0.612	-0.500	-0.354	-0.183	0.000	0.183	0.354	0.500	0.612	0.683	0.707
0.75	-0.800	-0.653	-0.462	-0.239	0.000	0.239	0.462	0.653	0.800	0.892	0.924
1.00	-0.866	-0.707	-0.500	-0.259	0.000	0.259	0.500	0.707	0.866	0.966	1.000
1.25	-0.800	-0.653	-0.462	-0.239	0.000	0.239	0.462	0.653	0.800	0.892	0.924
1.50	-0.612	-0.500	-0.354	-0.183	0.000	0.183	0.354	0.500	0.612	0.683	0.707
1.75	-0.331	-0.271	-0.191	-0.099	0.000	0.099	0.191	0.271	0.331	0.370	0.383
2.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.25	0.331	0.271	0.191	0.099	0.000	-0.099	-0.191	-0.271	-0.331	-0.370	-0.383
2.50	0.612	0.500	0.354	0.183	0.000	-0.183	-0.354	-0.500	-0.612	-0.683	-0.707

Таблица 1.5.2-3. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0$

$x \backslash y$	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50	2.67	2.83	3.00	3.17	3.33
2.50	-0.354	-0.183	0.000	0.183	0.354	0.500	0.612	0.683	0.707	0.683	0.612
2.75	-0.462	-0.239	0.000	0.239	0.462	0.653	0.800	0.892	0.924	0.892	0.800
3.00	-0.500	-0.259	0.000	0.259	0.500	0.707	0.866	0.966	1.000	0.966	0.866
3.25	-0.462	-0.239	0.000	0.239	0.462	0.653	0.800	0.892	0.924	0.892	0.800
3.50	-0.354	-0.183	0.000	0.183	0.354	0.500	0.612	0.683	0.707	0.683	0.612
3.75	-0.191	-0.099	0.000	0.099	0.191	0.271	0.331	0.370	0.383	0.370	0.331
4.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.25	0.191	0.099	0.000	-0.099	-0.191	-0.271	-0.331	-0.370	-0.383	-0.370	-0.331
4.50	0.354	0.183	0.000	-0.183	-0.354	-0.500	-0.612	-0.683	-0.707	-0.683	-0.612
4.75	0.462	0.239	0.000	-0.239	-0.462	-0.653	-0.800	-0.892	-0.924	-0.892	-0.800
5.00	0.500	0.259	0.000	-0.259	-0.500	-0.707	-0.866	-0.966	-1.000	-0.966	-0.866

Таблица 1.5.2-4. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 1.85$

$x \backslash y$	0.00	0.33	0.67	1.00	1.33	1.67	2.00	2.33	2.67	3.00	3.33
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	0.000	-0.061	-0.123	-0.174	-0.180	-0.144	-0.069	0.010	0.069	0.097	0.083

Продолжение таблицы 1.5.2-4

0.50	0.000	-0.115	-0.233	-0.313	-0.325	-0.255	-0.118	0.029	0.142	0.191	0.163
0.75	0.000	-0.162	-0.312	-0.399	-0.396	-0.304	-0.128	0.064	0.213	0.276	0.231
1.00	0.000	-0.191	-0.349	-0.424	-0.396	-0.277	-0.082	0.120	0.272	0.332	0.284
1.25	0.000	-0.180	-0.321	-0.382	-0.344	-0.219	-0.025	0.174	0.318	0.366	0.306
1.50	0.000	-0.141	-0.247	-0.287	-0.245	-0.133	0.033	0.199	0.311	0.337	0.270
1.75	0.000	-0.080	-0.136	-0.151	-0.112	-0.032	0.077	0.183	0.251	0.254	0.191
2.00	0.000	-0.006	-0.008	0.001	0.026	0.054	0.098	0.139	0.154	0.133	0.083
2.25	0.000	0.068	0.118	0.144	0.142	0.118	0.105	0.077	0.033	-0.018	-0.051
2.50	0.000	0.129	0.224	0.258	0.224	0.129	0.102	0.016	-0.090	-0.173	-0.224

Таблица 1.5.2-5. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 1.85$

y \ x	3.33	3.50	3.67	3.83	4.00	4.17	4.33	4.50	4.67	4.83	5.00
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	0.083	0.067	0.044	0.014	-0.022	-0.063	-0.099	-0.126	-0.141	-0.145	-0.140
0.50	0.163	0.132	0.088	0.028	-0.039	-0.106	-0.167	-0.218	-0.252	-0.264	-0.258
0.75	0.231	0.186	0.123	0.048	-0.035	-0.118	-0.195	-0.260	-0.308	-0.334	-0.337
1.00	0.284	0.234	0.165	0.081	-0.010	-0.102	-0.189	-0.264	-0.321	-0.356	-0.365
1.25	0.306	0.251	0.181	0.098	0.009	-0.080	-0.163	-0.235	-0.289	-0.322	-0.337
1.50	0.270	0.219	0.159	0.092	0.020	-0.051	-0.116	-0.172	-0.214	-0.242	-0.258
1.75	0.191	0.152	0.112	0.070	0.027	-0.015	-0.053	-0.085	-0.109	-0.127	-0.140
2.00	0.083	0.059	0.043	0.033	0.026	0.020	0.016	0.013	0.010	0.006	0.000
2.25	-0.051	-0.054	-0.041	-0.016	0.016	0.048	0.080	0.106	0.127	0.138	0.140
2.50	-0.224	-0.183	-0.129	-0.067	0.000	0.067	0.129	0.183	0.224	0.249	0.258

Таблица 1.5.2-6. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 1.85$

y \ x	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50	2.67	2.83	3.00	3.17	3.33
2.50	0.129	0.130	0.102	0.063	0.016	-0.037	-0.090	-0.136	-0.173	-0.203	-0.224
2.75	0.169	0.141	0.101	0.051	-0.009	-0.074	-0.136	-0.193	-0.237	-0.272	-0.292
3.00	0.183	0.149	0.103	0.047	-0.016	-0.083	-0.149	-0.209	-0.259	-0.297	-0.316
3.25	0.169	0.141	0.100	0.051	-0.006	-0.067	-0.128	-0.185	-0.233	-0.273	-0.292

Продолжение таблицы 1.5.2-6

3.50	0.129	0.116	0.092	0.059	0.019	-0.028	-0.076	-0.124	-0.166	-0.202	-0.224
3.75	0.070	0.074	0.072	0.062	0.045	0.021	-0.007	-0.038	-0.069	-0.097	-0.121
4.00	0.000	0.020	0.037	0.051	0.058	0.059	0.054	0.045	0.032	0.017	0.000
4.25	-0.070	-0.030	0.016	0.060	0.098	0.127	0.146	0.155	0.155	0.144	0.121
4.50	-0.129	-0.056	0.023	0.092	0.151	0.197	0.229	0.248	0.254	0.249	0.224
4.75	-0.169	-0.081	0.014	0.106	0.186	0.246	0.289	0.318	0.332	0.325	0.292
5.00	-0.183	-0.095	0.000	0.095	0.183	0.258	0.316	0.353	0.365	0.353	0.316

Таблица 1.5.2-7. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 7.38$

$y \backslash x$	0.00	0.33	0.67	1.00	1.33	1.67	2.00	2.33	2.67	3.00	3.33
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	0.000	0.049	0.086	0.113	0.109	0.082	0.044	0.007	-0.017	-0.029	-0.025
0.50	0.000	0.088	0.162	0.203	0.185	0.131	0.063	-0.004	-0.046	-0.060	-0.043
0.75	0.000	0.112	0.207	0.247	0.209	0.135	0.046	-0.031	-0.081	-0.096	-0.068
1.00	0.000	0.126	0.220	0.241	0.188	0.103	0.006	-0.072	-0.113	-0.129	-0.097
1.25	0.000	0.122	0.212	0.219	0.150	0.055	-0.038	-0.103	-0.139	-0.142	-0.109
1.50	0.000	0.097	0.163	0.162	0.102	0.023	-0.065	-0.118	-0.140	-0.129	-0.098
1.75	0.000	0.056	0.094	0.086	0.044	-0.008	-0.064	-0.094	-0.097	-0.080	-0.057
2.00	0.000	0.021	0.030	0.013	-0.011	-0.037	-0.051	-0.051	-0.034	-0.013	-0.003
2.25	0.000	-0.019	-0.038	-0.054	-0.062	-0.058	-0.036	-0.007	0.024	0.048	0.051
2.50	0.000	-0.056	-0.097	-0.112	-0.097	-0.056	-0.012	0.042	0.083	0.103	0.097

Таблица 1.5.2-8. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 7.38$

$y \backslash x$	3.33	3.50	3.67	3.83	4.00	4.17	4.33	4.50	4.67	4.83	5.00
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	-0.025	-0.016	-0.007	0.006	0.022	0.038	0.047	0.055	0.060	0.063	0.061
0.50	-0.043	-0.027	-0.009	0.011	0.037	0.063	0.085	0.100	0.112	0.116	0.112
0.75	-0.068	-0.045	-0.017	0.013	0.043	0.077	0.106	0.128	0.142	0.148	0.146
1.00	-0.097	-0.071	-0.037	0.000	0.038	0.076	0.107	0.131	0.147	0.157	0.158
1.25	-0.109	-0.084	-0.052	-0.021	0.010	0.042	0.074	0.100	0.121	0.136	0.146

Продолжение таблицы 1.5.2-8

1.50	-0.098	-0.075	-0.051	-0.028	-0.009	0.013	0.035	0.055	0.077	0.095	0.112
1.75	-0.057	-0.044	-0.031	-0.017	-0.008	0.004	0.014	0.023	0.037	0.051	0.061
2.00	-0.003	-0.003	-0.006	-0.008	-0.010	-0.012	-0.012	-0.013	-0.008	-0.004	0.000
2.25	0.051	0.042	0.030	0.013	-0.007	-0.022	-0.034	-0.046	-0.054	-0.060	-0.061
2.50	0.097	0.079	0.056	0.029	0.000	-0.029	-0.056	-0.079	-0.097	-0.108	-0.112

Таблица 1.5.2-9. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 7.38$

$y \backslash x$	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50	2.67	2.83	3.00	3.17	3.33
2.50	-0.056	-0.041	-0.012	0.017	0.042	0.066	0.083	0.095	0.103	0.108	0.097
2.75	-0.073	-0.040	-0.002	0.032	0.061	0.086	0.105	0.117	0.126	0.130	0.127
3.00	-0.079	-0.036	0.007	0.045	0.075	0.100	0.120	0.133	0.141	0.142	0.137
3.25	-0.073	-0.034	0.004	0.035	0.060	0.082	0.101	0.116	0.125	0.128	0.127
3.50	-0.056	-0.030	-0.009	0.009	0.023	0.038	0.051	0.063	0.075	0.086	0.097
3.75	-0.030	-0.024	-0.019	-0.016	-0.013	-0.007	0.002	0.014	0.028	0.043	0.052
4.00	0.000	-0.013	-0.024	-0.034	-0.043	-0.044	-0.039	-0.031	-0.021	-0.010	0.000
4.25	0.030	0.002	-0.023	-0.044	-0.063	-0.072	-0.072	-0.070	-0.064	-0.059	-0.052
4.50	0.056	0.015	-0.024	-0.057	-0.082	-0.095	-0.100	-0.102	-0.103	-0.101	-0.097
4.75	0.073	0.030	-0.015	-0.056	-0.088	-0.107	-0.119	-0.129	-0.135	-0.135	-0.127
5.00	0.079	0.041	0.000	-0.041	-0.079	-0.112	-0.137	-0.153	-0.158	-0.153	-0.137

**Приложение 1.6 Таблицы численных расчетов задач колебаний упругих
сложносочлененных конструкций в трехмерной сети (п. 4.3.4)**

Приложение 1.6.1 Таблицы численных расчетов задачи 1

Таблица 1.6.1-1. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0, z = 0$

$y \backslash x$	0.000	0.067	0.100	0.167	0.200	0.267	0.300	0.367	0.400	0.467	0.500
0.0	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.003	-0.006	-0.009	-0.016	-0.021	-0.034	-0.042
0.1	0.000	0.002	0.002	0.003	0.003	0.001	-0.001	-0.006	-0.010	-0.021	-0.028
0.2	0.000	0.007	0.011	0.017	0.020	0.023	0.024	0.024	0.023	0.018	0.014
0.3	0.000	0.017	0.025	0.040	0.047	0.060	0.066	0.075	0.079	0.083	0.083
0.4	0.000	0.030	0.044	0.073	0.086	0.112	0.124	0.147	0.156	0.174	0.181

Продолжение таблицы 1.6.1-1

0.5	0.000	0.046	0.069	0.114	0.136	0.179	0.199	0.238	0.256	0.290	0.306
0.6	0.000	0.067	0.100	0.165	0.197	0.260	0.291	0.350	0.379	0.433	0.458
0.7	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.003	-0.006	-0.009	-0.016	-0.021	-0.034	-0.042
0.8	0.000	0.002	0.002	0.003	0.003	0.001	-0.001	-0.006	-0.010	-0.021	-0.028
0.9	0.000	0.007	0.011	0.017	0.020	0.023	0.024	0.024	0.023	0.018	0.014
1.0	0.000	0.017	0.025	0.040	0.047	0.060	0.066	0.075	0.079	0.083	0.083

Таблица 1.6.1-2. Численный расчет задачи 1 в области Ξ_2 при $t = 0$, $z = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.500	0.533	0.600	0.633	0.700	0.733	0.800	0.833	0.900	0.933	1.000
0.0	-0.042	-0.051	-0.072	-0.085	-0.114	-0.132	-0.171	-0.193	-0.243	-0.271	-0.333
0.1	-0.028	-0.036	-0.055	-0.067	-0.095	-0.111	-0.148	-0.170	-0.218	-0.245	-0.306
0.2	0.014	0.009	-0.005	-0.014	-0.037	-0.050	-0.082	-0.100	-0.143	-0.167	-0.222
0.3	0.083	0.083	0.078	0.074	0.061	0.052	0.029	0.015	-0.018	-0.038	-0.083
0.4	0.181	0.187	0.195	0.197	0.197	0.195	0.185	0.178	0.157	0.144	0.111
0.5	0.306	0.320	0.345	0.355	0.372	0.378	0.385	0.386	0.382	0.377	0.361
0.6	0.458	0.483	0.528	0.549	0.586	0.602	0.629	0.640	0.657	0.662	0.667
0.7	-0.042	-0.051	-0.072	-0.085	-0.114	-0.132	-0.171	-0.193	-0.243	-0.271	-0.333
0.8	-0.028	-0.036	-0.055	-0.067	-0.095	-0.111	-0.148	-0.170	-0.218	-0.245	-0.306
0.9	0.014	0.009	-0.005	-0.014	-0.037	-0.050	-0.082	-0.100	-0.143	-0.167	-0.222
1.0	0.083	0.083	0.078	0.074	0.061	0.052	0.029	0.015	-0.018	-0.038	-0.083

Таблица 1.6.1-3. Численный расчет задачи 1 в области Ξ_1 при $t = 0$, $z = 0.467$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.067	0.100	0.167	0.200	0.267	0.300	0.367	0.400	0.467	0.500
0.0	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.005	-0.007	-0.013	-0.017	-0.027	-0.034
0.1	0.000	0.001	0.001	0.000	-0.001	-0.003	-0.005	-0.010	-0.014	-0.024	-0.030
0.2	0.000	0.002	0.003	0.004	0.004	0.004	0.002	-0.001	-0.004	-0.012	-0.017
0.3	0.000	0.005	0.007	0.011	0.012	0.014	0.015	0.013	0.012	0.007	0.003
0.4	0.000	0.009	0.013	0.020	0.024	0.029	0.031	0.034	0.034	0.033	0.031
0.5	0.000	0.013	0.020	0.032	0.038	0.049	0.053	0.061	0.063	0.067	0.067
0.6	0.000	0.019	0.029	0.047	0.056	0.072	0.080	0.093	0.099	0.108	0.111

Продолжение таблицы 1.6.1-3

0.7	0.000	0.026	0.039	0.064	0.077	0.100	0.111	0.131	0.141	0.157	0.164
0.8	0.000	0.034	0.051	0.085	0.101	0.132	0.147	0.176	0.189	0.213	0.224
0.9	0.000	0.043	0.065	0.107	0.128	0.169	0.188	0.226	0.243	0.277	0.292
1.0	0.000	0.054	0.080	0.133	0.159	0.209	0.234	0.282	0.305	0.348	0.369

Таблица 1.6.1-4. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0$, $z = 0.467$

$x \backslash y$	0.500	0.533	0.600	0.633	0.700	0.733	0.800	0.833	0.900	0.933	1.000
0.0	-0.034	-0.041	-0.058	-0.068	-0.092	-0.106	-0.137	-0.155	-0.195	-0.218	-0.268
0.1	-0.030	-0.036	-0.053	-0.063	-0.086	-0.100	-0.131	-0.148	-0.188	-0.211	-0.260
0.2	-0.017	-0.024	-0.039	-0.048	-0.069	-0.082	-0.112	-0.128	-0.167	-0.188	-0.236
0.3	0.003	-0.002	-0.015	-0.022	-0.041	-0.053	-0.079	-0.095	-0.130	-0.150	-0.196
0.4	0.031	0.028	0.019	0.013	-0.002	-0.011	-0.034	-0.048	-0.080	-0.098	-0.139
0.5	0.067	0.067	0.063	0.059	0.049	0.042	0.024	0.012	-0.015	-0.030	-0.067
0.6	0.111	0.114	0.116	0.115	0.111	0.107	0.094	0.086	0.065	0.052	0.021
0.7	0.164	0.170	0.179	0.182	0.184	0.183	0.178	0.173	0.159	0.150	0.126
0.8	0.224	0.234	0.251	0.258	0.268	0.272	0.275	0.274	0.268	0.263	0.247
0.9	0.292	0.307	0.333	0.345	0.364	0.372	0.384	0.388	0.391	0.390	0.383
1.0	0.369	0.388	0.425	0.441	0.471	0.484	0.506	0.515	0.528	0.533	0.536

Таблица 1.6.1-5. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.352$, $z = 0$

$x \backslash y$	0.000	0.067	0.100	0.167	0.200	0.267	0.300	0.367	0.400	0.467	0.500
0.0	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.006	-0.008	-0.015	-0.019	-0.030	-0.037
0.1	0.000	0.001	0.001	0.000	-0.001	-0.003	-0.005	-0.011	-0.015	-0.026	-0.032
0.2	0.000	0.002	0.003	0.005	0.005	0.004	0.003	-0.002	-0.005	-0.013	-0.019
0.3	0.000	0.005	0.008	0.012	0.014	0.016	0.016	0.015	0.013	0.007	0.003
0.4	0.000	0.009	0.014	0.022	0.026	0.032	0.035	0.037	0.038	0.036	0.034
0.5	0.000	0.015	0.022	0.036	0.042	0.053	0.058	0.067	0.070	0.073	0.074
0.6	0.000	0.021	0.032	0.052	0.061	0.079	0.088	0.102	0.108	0.119	0.122
0.7	0.000	0.029	0.043	0.071	0.084	0.110	0.122	0.144	0.154	0.172	0.180
0.8	0.000	0.038	0.056	0.093	0.111	0.145	0.162	0.193	0.207	0.234	0.246

Продолжение таблицы 1.6.1-5

0.9	0.000	0.048	0.071	0.118	0.141	0.185	0.207	0.248	0.267	0.304	0.321
1.0	0.000	0.059	0.088	0.146	0.174	0.230	0.257	0.310	0.335	0.382	0.405

Таблица 1.6.1-6. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.352$, $z = 0$

x \ y	0.500	0.533	0.600	0.633	0.700	0.733	0.800	0.833	0.900	0.933	1.000
0.0	-0.037	-0.045	-0.064	-0.075	-0.101	-0.116	-0.151	-0.170	-0.215	-0.240	-0.295
0.1	-0.032	-0.040	-0.058	-0.069	-0.095	-0.110	-0.144	-0.163	-0.207	-0.231	-0.286
0.2	-0.019	-0.026	-0.042	-0.052	-0.076	-0.090	-0.123	-0.141	-0.183	-0.207	-0.259
0.3	0.003	-0.002	-0.016	-0.025	-0.045	-0.058	-0.087	-0.104	-0.143	-0.165	-0.215
0.4	0.034	0.031	0.021	0.015	-0.002	-0.013	-0.038	-0.053	-0.088	-0.108	-0.153
0.5	0.074	0.073	0.069	0.065	0.054	0.046	0.026	0.014	-0.016	-0.033	-0.074
0.6	0.122	0.125	0.127	0.127	0.122	0.117	0.104	0.095	0.072	0.057	0.024
0.7	0.180	0.186	0.196	0.199	0.202	0.201	0.196	0.190	0.175	0.165	0.138
0.8	0.246	0.257	0.276	0.283	0.295	0.299	0.302	0.301	0.294	0.288	0.271
0.9	0.321	0.337	0.366	0.378	0.400	0.409	0.422	0.426	0.429	0.429	0.421
1.0	0.405	0.427	0.467	0.485	0.518	0.532	0.556	0.566	0.581	0.585	0.589

Таблица 1.6.1-7. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.352$, $z = 0.467$

x \ y	0.000	0.067	0.100	0.167	0.200	0.267	0.300	0.367	0.400	0.467	0.500
0.0	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.005	-0.007	-0.012	-0.016	-0.025	-0.031
0.1	0.000	0.000	0.001	0.000	-0.001	-0.004	-0.005	-0.011	-0.015	-0.024	-0.030
0.2	0.000	0.002	0.003	0.004	0.004	0.002	0.001	-0.004	-0.007	-0.015	-0.020
0.3	0.000	0.004	0.007	0.010	0.011	0.012	0.012	0.010	0.008	0.002	-0.002
0.4	0.000	0.008	0.012	0.019	0.022	0.026	0.028	0.029	0.029	0.027	0.024
0.5	0.000	0.013	0.019	0.030	0.035	0.044	0.048	0.054	0.056	0.058	0.058
0.6	0.000	0.018	0.027	0.044	0.052	0.066	0.073	0.084	0.089	0.097	0.100
0.7	0.000	0.025	0.037	0.060	0.071	0.092	0.102	0.120	0.128	0.142	0.148
0.8	0.000	0.032	0.048	0.079	0.094	0.122	0.136	0.162	0.174	0.195	0.205
0.9	0.000	0.040	0.061	0.100	0.119	0.156	0.175	0.209	0.225	0.256	0.270
1.0	0.000	0.050	0.075	0.124	0.148	0.195	0.218	0.262	0.284	0.324	0.343

Таблица 1.6.1-8. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{S}_2 при $t = 0.352$, $z = 0.467$

$x \backslash y$	0.500	0.533	0.600	0.633	0.700	0.733	0.800	0.833	0.900	0.933	1.000
0.0	-0.031	-0.038	-0.054	-0.064	-0.086	-0.099	-0.128	-0.145	-0.182	-0.203	-0.250
0.1	-0.030	-0.036	-0.051	-0.060	-0.081	-0.094	-0.122	-0.138	-0.175	-0.196	-0.242
0.2	-0.020	-0.025	-0.039	-0.047	-0.066	-0.078	-0.104	-0.120	-0.155	-0.175	-0.220
0.3	-0.002	-0.006	-0.017	-0.024	-0.040	-0.051	-0.074	-0.088	-0.121	-0.140	-0.182
0.4	0.024	0.022	0.015	0.010	-0.004	-0.012	-0.032	-0.045	-0.074	-0.091	-0.130
0.5	0.058	0.058	0.056	0.053	0.044	0.038	0.022	0.012	-0.013	-0.028	-0.062
0.6	0.100	0.102	0.105	0.105	0.102	0.098	0.088	0.080	0.061	0.049	0.020
0.7	0.148	0.154	0.164	0.167	0.170	0.170	0.166	0.161	0.148	0.140	0.117
0.8	0.205	0.215	0.232	0.238	0.249	0.252	0.255	0.255	0.250	0.245	0.230
0.9	0.270	0.284	0.309	0.320	0.338	0.346	0.357	0.361	0.364	0.363	0.357
1.0	0.343	0.362	0.396	0.411	0.439	0.451	0.472	0.480	0.492	0.496	0.500

Приложение 1.6.2 Таблицы численных расчетов задачи 2

Таблица 1.6.2-1. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_1 при $t = 0$, $z = 0$

$x \backslash y$	0.000	0.067	0.133	0.200	0.267	0.333	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667
0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.003	-0.006	-0.012	-0.021	-0.034	-0.051	-0.072	-0.099
0.033	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.006	-0.012	-0.021	-0.033	-0.050	-0.071	-0.098
0.100	0.000	0.001	0.001	-0.001	-0.004	-0.009	-0.017	-0.029	-0.045	-0.066	-0.092
0.133	0.000	0.001	0.002	0.001	-0.002	-0.006	-0.014	-0.026	-0.041	-0.061	-0.087
0.200	0.000	0.003	0.005	0.005	0.004	0.001	-0.005	-0.015	-0.029	-0.048	-0.072
0.233	0.000	0.004	0.007	0.008	0.008	0.006	0.000	-0.009	-0.022	-0.039	-0.063
0.300	0.000	0.006	0.011	0.015	0.018	0.018	0.015	0.008	-0.003	-0.018	-0.039
0.333	0.000	0.007	0.014	0.020	0.023	0.025	0.023	0.018	0.009	-0.005	-0.025
0.400	0.000	0.011	0.021	0.029	0.036	0.041	0.043	0.041	0.035	0.024	0.008
0.433	0.000	0.012	0.024	0.035	0.044	0.050	0.054	0.054	0.050	0.041	0.026
0.500	0.000	0.017	0.033	0.047	0.060	0.071	0.079	0.083	0.083	0.078	0.068

Таблица 1.6.2-2. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0, z = 0$

$x \backslash y$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000
0.000	-0.099	-0.114	-0.132	-0.150	-0.171	-0.193	-0.217	-0.243	-0.271	-0.301	-0.333
0.033	-0.098	-0.114	-0.131	-0.149	-0.170	-0.192	-0.216	-0.242	-0.270	-0.300	-0.332
0.100	-0.092	-0.107	-0.124	-0.143	-0.163	-0.185	-0.208	-0.234	-0.262	-0.291	-0.323
0.133	-0.087	-0.102	-0.118	-0.137	-0.156	-0.178	-0.202	-0.227	-0.254	-0.284	-0.316
0.200	-0.072	-0.086	-0.102	-0.120	-0.139	-0.160	-0.182	-0.207	-0.234	-0.262	-0.293
0.233	-0.063	-0.076	-0.092	-0.109	-0.127	-0.148	-0.170	-0.194	-0.220	-0.249	-0.279
0.300	-0.039	-0.051	-0.066	-0.081	-0.099	-0.118	-0.139	-0.162	-0.187	-0.214	-0.243
0.333	-0.025	-0.037	-0.050	-0.065	-0.082	-0.100	-0.121	-0.143	-0.167	-0.194	-0.222
0.400	0.008	-0.002	-0.014	-0.028	-0.043	-0.060	-0.078	-0.099	-0.122	-0.146	-0.173
0.433	0.026	0.017	0.006	-0.006	-0.020	-0.036	-0.054	-0.074	-0.096	-0.120	-0.146
0.500	0.068	0.061	0.052	0.042	0.029	0.015	0.000	-0.018	-0.038	-0.059	-0.083

Таблица 1.6.2-3. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0, z = 0$

$x \backslash y$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667
0.500	0.071	0.075	0.079	0.081	0.083	0.083	0.083	0.081	0.078	0.074	0.068
0.533	0.083	0.088	0.092	0.096	0.099	0.101	0.101	0.101	0.099	0.096	0.091
0.600	0.108	0.116	0.123	0.129	0.134	0.138	0.141	0.143	0.144	0.143	0.141
0.633	0.121	0.131	0.139	0.147	0.153	0.159	0.163	0.167	0.169	0.169	0.169
0.700	0.151	0.163	0.175	0.185	0.195	0.203	0.211	0.217	0.222	0.226	0.228
0.733	0.167	0.181	0.194	0.206	0.217	0.227	0.236	0.244	0.251	0.256	0.260
0.800	0.201	0.218	0.235	0.250	0.265	0.278	0.291	0.302	0.312	0.321	0.328
0.833	0.219	0.238	0.256	0.274	0.290	0.306	0.320	0.333	0.345	0.355	0.364
0.900	0.258	0.281	0.303	0.324	0.344	0.363	0.381	0.398	0.414	0.428	0.441
0.933	0.278	0.303	0.327	0.350	0.373	0.394	0.414	0.433	0.451	0.467	0.482
1.000	0.321	0.350	0.379	0.406	0.433	0.458	0.483	0.506	0.528	0.549	0.568

Таблица 1.6.2-4. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0, z = 0.633$

$x \backslash y$	0.000	0.067	0.133	0.200	0.267	0.333	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667
0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.004	-0.008	-0.014	-0.023	-0.034	-0.048	-0.066
0.033	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.004	-0.008	-0.014	-0.022	-0.034	-0.048	-0.066

Продолжение таблицы 1.6.2-4

0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.006	-0.012	-0.020	-0.030	-0.044	-0.062
0.133	0.000	0.001	0.001	0.001	-0.001	-0.004	-0.010	-0.017	-0.028	-0.041	-0.058
0.200	0.000	0.002	0.003	0.004	0.003	0.001	-0.004	-0.010	-0.020	-0.032	-0.048
0.233	0.000	0.002	0.004	0.006	0.006	0.004	0.000	-0.006	-0.014	-0.026	-0.042
0.300	0.000	0.004	0.008	0.010	0.012	0.012	0.010	0.005	-0.002	-0.012	-0.026
0.333	0.000	0.005	0.009	0.013	0.016	0.017	0.016	0.012	0.006	-0.004	-0.017
0.400	0.000	0.007	0.014	0.020	0.024	0.027	0.029	0.027	0.023	0.016	0.005
0.433	0.000	0.008	0.016	0.023	0.029	0.034	0.036	0.036	0.033	0.027	0.018
0.500	0.000	0.017	0.033	0.047	0.060	0.071	0.079	0.083	0.083	0.078	0.068

Таблица 1.6.2-5. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_2 при $t = 0$, $z = 0.633$

y \ x	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000
0.000	-0.066	-0.077	-0.088	-0.101	-0.114	-0.129	-0.145	-0.163	-0.182	-0.202	-0.223
0.033	-0.066	-0.076	-0.088	-0.100	-0.114	-0.129	-0.145	-0.162	-0.181	-0.201	-0.222
0.100	-0.062	-0.072	-0.083	-0.095	-0.109	-0.124	-0.140	-0.157	-0.175	-0.195	-0.217
0.133	-0.058	-0.068	-0.079	-0.092	-0.105	-0.119	-0.135	-0.152	-0.170	-0.190	-0.211
0.200	-0.048	-0.058	-0.068	-0.080	-0.093	-0.107	-0.122	-0.139	-0.157	-0.176	-0.196
0.233	-0.042	-0.051	-0.061	-0.073	-0.085	-0.099	-0.114	-0.130	-0.147	-0.166	-0.187
0.300	-0.026	-0.034	-0.044	-0.054	-0.066	-0.079	-0.093	-0.109	-0.125	-0.143	-0.163
0.333	-0.017	-0.025	-0.034	-0.044	-0.055	-0.067	-0.081	-0.096	-0.112	-0.130	-0.149
0.400	0.005	-0.002	-0.010	-0.018	-0.029	-0.040	-0.052	-0.066	-0.082	-0.098	-0.116
0.433	0.018	0.012	0.004	-0.004	-0.014	-0.024	-0.036	-0.050	-0.064	-0.080	-0.098
0.500	0.046	0.041	0.035	0.028	0.020	0.010	0.000	-0.012	-0.025	-0.040	-0.056

Таблица 1.6.2-6. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_3 при $t = 0$, $z = 0.633$

y \ x	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667
0.500	0.048	0.050	0.053	0.054	0.055	0.056	0.055	0.054	0.052	0.049	0.046
0.533	0.055	0.059	0.062	0.064	0.066	0.067	0.068	0.067	0.066	0.064	0.061
0.600	0.072	0.077	0.082	0.086	0.090	0.093	0.095	0.096	0.096	0.096	0.095
0.633	0.081	0.088	0.093	0.098	0.103	0.106	0.109	0.112	0.113	0.113	0.113

Продолжение таблицы 1.6.2-6

0.700	0.101	0.109	0.117	0.124	0.130	0.136	0.141	0.145	0.149	0.151	0.153
0.733	0.112	0.121	0.130	0.138	0.145	0.152	0.158	0.163	0.168	0.171	0.174
0.800	0.135	0.146	0.157	0.168	0.177	0.186	0.195	0.202	0.209	0.215	0.220
0.833	0.147	0.160	0.172	0.183	0.194	0.205	0.214	0.223	0.231	0.238	0.244
0.900	0.173	0.188	0.203	0.217	0.230	0.243	0.255	0.267	0.277	0.287	0.295
0.933	0.186	0.203	0.219	0.235	0.250	0.264	0.277	0.290	0.302	0.313	0.323
1.000	0.215	0.235	0.254	0.272	0.290	0.307	0.323	0.339	0.354	0.367	0.380

Таблица 1.6.2-7. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.537$, $z = 0$

$x \backslash y$	0.000	0.067	0.133	0.200	0.267	0.333	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667
0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.005	-0.009	-0.016	-0.025	-0.038	-0.054	-0.074
0.033	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.005	-0.009	-0.016	-0.025	-0.038	-0.054	-0.074
0.100	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.003	-0.007	-0.013	-0.022	-0.034	-0.050	-0.069
0.133	0.000	0.001	0.001	0.001	-0.001	-0.005	-0.011	-0.019	-0.031	-0.046	-0.065
0.200	0.000	0.002	0.003	0.004	0.003	0.001	-0.004	-0.011	-0.022	-0.036	-0.054
0.233	0.000	0.003	0.005	0.006	0.006	0.004	0.000	-0.006	-0.016	-0.030	-0.047
0.300	0.000	0.004	0.008	0.012	0.013	0.013	0.011	0.006	-0.002	-0.014	-0.029
0.333	0.000	0.006	0.011	0.015	0.018	0.019	0.017	0.014	0.007	-0.004	-0.019
0.400	0.000	0.008	0.015	0.022	0.027	0.031	0.032	0.031	0.026	0.018	0.006
0.433	0.000	0.009	0.018	0.026	0.033	0.038	0.040	0.040	0.037	0.031	0.020
0.500	0.000	0.012	0.024	0.036	0.045	0.053	0.059	0.062	0.062	0.059	0.051

Таблица 1.6.2-8. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 0.537$, $z = 0$

$x \backslash y$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000
0.000	-0.074	-0.086	-0.099	-0.113	-0.128	-0.145	-0.163	-0.182	-0.203	-0.226	-0.250
0.033	-0.074	-0.085	-0.098	-0.112	-0.127	-0.144	-0.162	-0.181	-0.202	-0.225	-0.249
0.100	-0.069	-0.080	-0.093	-0.107	-0.122	-0.138	-0.156	-0.175	-0.196	-0.218	-0.242
0.133	-0.065	-0.076	-0.089	-0.102	-0.117	-0.134	-0.151	-0.170	-0.191	-0.213	-0.237
0.200	-0.054	-0.065	-0.077	-0.090	-0.104	-0.120	-0.137	-0.155	-0.175	-0.197	-0.220
0.233	-0.047	-0.057	-0.069	-0.081	-0.095	-0.111	-0.127	-0.145	-0.165	-0.186	-0.209

Продолжение таблицы 1.6.2-8

0.300	-0.029	-0.039	-0.049	-0.061	-0.074	-0.088	-0.104	-0.121	-0.140	-0.161	-0.182
0.333	-0.019	-0.027	-0.038	-0.049	-0.061	-0.075	-0.091	-0.107	-0.125	-0.145	-0.167
0.400	0.006	-0.002	-0.011	-0.021	-0.032	-0.045	-0.059	-0.074	-0.091	-0.110	-0.130
0.433	0.020	0.013	0.005	-0.005	-0.015	-0.027	-0.041	-0.056	-0.072	-0.090	-0.109
0.500	0.051	0.046	0.039	0.031	0.022	0.012	0.000	-0.014	-0.028	-0.045	-0.063

Таблица 1.6.2-9. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 0.537$, $z = 0$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667
0.500	0.053	0.056	0.059	0.061	0.062	0.063	0.062	0.061	0.059	0.055	0.051
0.533	0.062	0.066	0.069	0.072	0.074	0.075	0.076	0.075	0.074	0.072	0.068
0.600	0.081	0.087	0.092	0.097	0.101	0.104	0.106	0.107	0.108	0.107	0.106
0.633	0.091	0.098	0.104	0.110	0.115	0.119	0.122	0.125	0.126	0.127	0.126
0.700	0.113	0.122	0.131	0.139	0.146	0.152	0.158	0.163	0.166	0.169	0.171
0.733	0.125	0.136	0.145	0.154	0.163	0.170	0.177	0.183	0.188	0.192	0.195
0.800	0.151	0.164	0.176	0.188	0.198	0.209	0.218	0.226	0.234	0.240	0.246
0.833	0.164	0.179	0.192	0.205	0.218	0.229	0.240	0.250	0.258	0.266	0.273
0.900	0.193	0.210	0.227	0.243	0.258	0.272	0.286	0.299	0.310	0.321	0.331
0.933	0.208	0.227	0.245	0.263	0.279	0.295	0.310	0.325	0.338	0.350	0.361
1.000	0.241	0.263	0.284	0.304	0.324	0.344	0.362	0.379	0.396	0.411	0.426

Таблица 1.6.2-10. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 0.537$, $z = 0.633$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.000	0.067	0.133	0.200	0.267	0.333	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667
0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.004	-0.008	-0.013	-0.021	-0.032	-0.045	-0.062
0.033	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.004	-0.008	-0.013	-0.021	-0.031	-0.045	-0.062
0.100	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.003	-0.006	-0.011	-0.019	-0.029	-0.042	-0.059
0.133	0.000	0.001	0.001	0.000	-0.002	-0.005	-0.009	-0.017	-0.027	-0.040	-0.056
0.200	0.000	0.002	0.003	0.003	0.002	0.000	-0.004	-0.011	-0.020	-0.032	-0.048
0.233	0.000	0.002	0.004	0.005	0.004	0.003	-0.001	-0.007	-0.015	-0.027	-0.042
0.300	0.000	0.004	0.007	0.009	0.010	0.010	0.008	0.004	-0.003	-0.013	-0.027
0.333	0.000	0.005	0.009	0.012	0.014	0.014	0.013	0.010	0.004	-0.005	-0.018

Продолжение таблицы 1.6.2-10

0.400	0.000	0.007	0.013	0.018	0.022	0.025	0.026	0.024	0.020	0.013	0.003
0.433	0.000	0.008	0.015	0.022	0.027	0.031	0.033	0.033	0.030	0.024	0.014
0.500	0.000	0.010	0.020	0.030	0.038	0.044	0.049	0.052	0.051	0.049	0.042

Таблица 1.6.2-11. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_2 при $t = 0.537$, $z = 0.633$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000
0.000	-0.062	-0.071	-0.082	-0.094	-0.106	-0.120	-0.135	-0.151	-0.169	-0.187	-0.208
0.033	-0.062	-0.071	-0.082	-0.093	-0.106	-0.120	-0.135	-0.151	-0.168	-0.187	-0.207
0.100	-0.059	-0.068	-0.079	-0.090	-0.102	-0.116	-0.130	-0.146	-0.163	-0.182	-0.201
0.133	-0.056	-0.065	-0.075	-0.086	-0.099	-0.112	-0.126	-0.142	-0.159	-0.177	-0.196
0.200	-0.048	-0.056	-0.066	-0.076	-0.088	-0.100	-0.114	-0.129	-0.145	-0.163	-0.183
0.233	-0.042	-0.050	-0.059	-0.069	-0.081	-0.093	-0.106	-0.121	-0.137	-0.155	-0.174
0.300	-0.027	-0.035	-0.043	-0.052	-0.063	-0.075	-0.087	-0.101	-0.116	-0.133	-0.152
0.333	-0.018	-0.025	-0.033	-0.042	-0.052	-0.064	-0.076	-0.089	-0.104	-0.121	-0.138
0.400	0.003	-0.003	-0.010	-0.019	-0.028	-0.038	-0.049	-0.062	-0.076	-0.091	-0.108
0.433	0.014	0.009	0.003	-0.005	-0.014	-0.023	-0.034	-0.046	-0.060	-0.075	-0.091
0.500	0.042	0.038	0.032	0.026	0.018	0.010	0.000	-0.011	-0.024	-0.037	-0.052

Таблица 1.6.2-12. Численный расчет задачи 2 в области \mathfrak{S}_3 при $t = 0.537$, $z = 0.633$

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667
0.500	0.044	0.047	0.049	0.051	0.052	0.052	0.051	0.050	0.049	0.046	0.042
0.533	0.051	0.055	0.058	0.060	0.061	0.062	0.063	0.062	0.061	0.059	0.057
0.600	0.067	0.072	0.076	0.080	0.083	0.086	0.088	0.089	0.089	0.089	0.088
0.633	0.076	0.081	0.086	0.091	0.095	0.098	0.101	0.103	0.105	0.105	0.105
0.700	0.094	0.102	0.108	0.115	0.121	0.126	0.131	0.135	0.138	0.140	0.142
0.733	0.104	0.112	0.120	0.128	0.135	0.141	0.147	0.152	0.156	0.159	0.162
0.800	0.125	0.136	0.146	0.156	0.165	0.173	0.181	0.188	0.194	0.200	0.204
0.833	0.136	0.148	0.160	0.170	0.181	0.190	0.199	0.207	0.215	0.221	0.227
0.900	0.160	0.175	0.189	0.202	0.215	0.227	0.238	0.248	0.258	0.267	0.275
0.933	0.173	0.189	0.204	0.218	0.232	0.246	0.258	0.270	0.281	0.291	0.300

1.000	0.200	0.218	0.236	0.253	0.269	0.285	0.301	0.315	0.329	0.342	0.354
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Приложение 1.7 Таблицы численных расчетов задачи переноса теплоты в слоистой области (п. 4.3.5)

Приложение 1.7.1 Таблицы численных расчетов задачи 1

Таблица 1.7.1-1. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.2244$

$y \backslash z$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.056	0.000	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.012	0.015	0.017	0.019	0.019
0.112	0.000	0.004	0.008	0.012	0.017	0.021	0.025	0.029	0.033	0.037	0.039
0.168	0.000	0.006	0.012	0.019	0.025	0.031	0.037	0.043	0.050	0.056	0.058
0.224	0.000	0.008	0.017	0.025	0.033	0.041	0.050	0.058	0.066	0.074	0.077
0.280	0.000	0.010	0.021	0.031	0.041	0.052	0.062	0.072	0.083	0.093	0.096
0.337	0.000	0.012	0.025	0.037	0.050	0.062	0.074	0.087	0.099	0.112	0.116
0.393	0.000	0.015	0.029	0.043	0.058	0.072	0.087	0.101	0.116	0.130	0.135

Таблица 1.7.1-2. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.2244$

$y \backslash z$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
0.393	0.000	0.015	0.029	0.043	0.058	0.072	0.087	0.101	0.116	0.130	0.135
0.449	0.000	0.017	0.033	0.050	0.066	0.083	0.099	0.116	0.132	0.149	0.154
0.505	0.000	0.019	0.037	0.056	0.074	0.093	0.112	0.130	0.149	0.167	0.174
0.561	0.000	0.021	0.041	0.062	0.083	0.103	0.124	0.145	0.165	0.186	0.193
0.617	0.000	0.023	0.045	0.068	0.091	0.114	0.136	0.159	0.182	0.205	0.212
0.673	0.000	0.025	0.050	0.074	0.099	0.124	0.149	0.174	0.198	0.223	0.231
0.729	0.000	0.027	0.054	0.081	0.107	0.134	0.161	0.188	0.215	0.242	0.251
0.785	0.000	0.029	0.058	0.087	0.116	0.145	0.174	0.202	0.231	0.260	0.270

Таблица 1.7.1-3. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.2244$

$y \backslash z$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
0.785	0.000	0.029	0.058	0.087	0.116	0.145	0.174	0.202	0.231	0.260	0.270

Продолжение таблицы 1.7.1-3

0.841	0.000	0.031	0.062	0.093	0.124	0.155	0.186	0.217	0.248	0.279	0.289
0.898	0.000	0.033	0.066	0.099	0.132	0.165	0.198	0.231	0.264	0.297	0.309
0.954	0.000	0.035	0.070	0.105	0.141	0.176	0.211	0.246	0.281	0.316	0.328
1.010	0.000	0.037	0.074	0.112	0.149	0.186	0.223	0.260	0.297	0.335	0.347
1.066	0.000	0.039	0.079	0.118	0.157	0.196	0.236	0.275	0.314	0.353	0.366
1.122	0.000	0.041	0.083	0.124	0.165	0.207	0.248	0.289	0.331	0.372	0.386
1.178	0.000	0.043	0.087	0.130	0.174	0.217	0.260	0.304	0.347	0.390	0.405

Таблица 1.7.1-4. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_4 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.2244$

$\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
1.178	0.000	0.043	0.087	0.130	0.174	0.217	0.260	0.304	0.347	0.390	0.405
1.234	0.000	0.045	0.091	0.136	0.182	0.227	0.273	0.318	0.364	0.409	0.424
1.290	0.000	0.048	0.095	0.143	0.190	0.238	0.285	0.333	0.380	0.428	0.443
1.346	0.000	0.050	0.099	0.149	0.198	0.248	0.297	0.347	0.397	0.446	0.463
1.402	0.000	0.052	0.103	0.155	0.207	0.258	0.310	0.362	0.413	0.465	0.482
1.459	0.000	0.054	0.107	0.161	0.215	0.269	0.322	0.376	0.430	0.483	0.501
1.515	0.000	0.056	0.112	0.167	0.223	0.279	0.335	0.390	0.446	0.502	0.521
1.571	0.000	0.058	0.116	0.174	0.231	0.289	0.347	0.405	0.463	0.521	0.540

Таблица 1.7.1-5. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_1 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.7854$

$\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.056	0.000	0.005	0.011	0.016	0.021	0.026	0.032	0.037	0.042	0.047	0.049
0.112	0.000	0.011	0.021	0.032	0.042	0.052	0.063	0.073	0.084	0.094	0.098
0.168	0.000	0.016	0.032	0.047	0.063	0.079	0.094	0.110	0.126	0.142	0.147
0.224	0.000	0.021	0.042	0.063	0.084	0.105	0.126	0.147	0.168	0.189	0.196
0.280	0.000	0.026	0.052	0.079	0.105	0.131	0.157	0.184	0.210	0.236	0.245
0.337	0.000	0.032	0.063	0.094	0.126	0.157	0.189	0.220	0.252	0.283	0.294
0.393	0.000	0.037	0.073	0.110	0.147	0.184	0.220	0.257	0.294	0.330	0.343

Таблица 1.7.1-6. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_2 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.7854$

$y \backslash z$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
0.393	0.000	0.037	0.073	0.110	0.147	0.184	0.220	0.257	0.294	0.330	0.343
0.449	0.000	0.042	0.084	0.126	0.168	0.210	0.252	0.294	0.336	0.378	0.392
0.505	0.000	0.047	0.094	0.142	0.189	0.236	0.283	0.330	0.378	0.425	0.441
0.561	0.000	0.052	0.105	0.157	0.210	0.262	0.315	0.367	0.420	0.472	0.489
0.617	0.000	0.058	0.115	0.173	0.231	0.288	0.346	0.404	0.461	0.519	0.538
0.673	0.000	0.063	0.126	0.189	0.252	0.315	0.378	0.441	0.503	0.566	0.587
0.729	0.000	0.068	0.136	0.205	0.273	0.341	0.409	0.477	0.545	0.614	0.636
0.785	0.000	0.073	0.147	0.220	0.294	0.367	0.441	0.514	0.587	0.661	0.685

Таблица 1.7.1-7. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_3 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.7854$

$y \backslash z$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
0.785	0.000	0.073	0.147	0.220	0.294	0.367	0.441	0.514	0.587	0.661	0.685
0.841	0.000	0.079	0.157	0.236	0.315	0.393	0.472	0.551	0.629	0.708	0.734
0.898	0.000	0.084	0.168	0.252	0.336	0.420	0.503	0.587	0.671	0.755	0.783
0.954	0.000	0.089	0.178	0.267	0.357	0.446	0.535	0.624	0.713	0.802	0.832
1.010	0.000	0.094	0.189	0.283	0.378	0.472	0.566	0.661	0.755	0.849	0.881
1.066	0.000	0.100	0.199	0.299	0.399	0.498	0.598	0.697	0.797	0.897	0.930
1.122	0.000	0.105	0.210	0.315	0.420	0.524	0.629	0.734	0.839	0.944	0.979
1.178	0.000	0.110	0.220	0.330	0.441	0.551	0.661	0.771	0.881	0.991	1.028

Таблица 1.7.1-8. Численный расчет задачи 1 в области \mathfrak{Z}_4 при $t = 5 \cdot 10^{-2}$, $x = 0.7854$

$y \backslash z$	0.000	0.168	0.337	0.505	0.673	0.841	1.010	1.178	1.346	1.515	1.571
1.178	0.000	0.110	0.220	0.330	0.441	0.551	0.661	0.771	0.881	0.991	1.028
1.234	0.000	0.115	0.231	0.346	0.461	0.577	0.692	0.808	0.923	1.038	1.077
1.290	0.000	0.121	0.241	0.362	0.482	0.603	0.724	0.844	0.965	1.085	1.126
1.346	0.000	0.126	0.252	0.378	0.503	0.629	0.755	0.881	1.007	1.133	1.175
1.402	0.000	0.131	0.262	0.393	0.524	0.655	0.787	0.918	1.049	1.180	1.224
1.459	0.000	0.136	0.273	0.409	0.545	0.682	0.818	0.954	1.091	1.227	1.272
1.515	0.000	0.142	0.283	0.425	0.566	0.708	0.849	0.991	1.133	1.274	1.321
1.571	0.000	0.147	0.294	0.441	0.587	0.734	0.881	1.028	1.175	1.321	1.370

Приложение 2. Листинги программ для решения прикладных задач главы 4

Приложение 2.1 Листинг программ для решения задач переноса сплошных сред в сети (п. 4.2.1)

Приложение 2.1.1 Текст программы для решения задачи 1

```

%Создание сетки
N=10;%количество точек разбиений ребра
M=100;%количество точек разбиений временного интервала
L=1;%длина ребра
T=1;%окончание по времени
h=L/N;%шаг сетки по пространственной координате
tau=T/M;%шаг сетки по времени
a=2;
x=zeros(1,2*N+2);
for i=1:N+1
    x(i)=h*(i-1);
end
for i=N+2:2*N+2
    x(i)=h*(i-2);
end
t=zeros(1,M+1);
for j=1:M+1
    t(j)=tau*(j-1);
end
u=zeros(M+1,2*N+2);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:2*N+2
    u(1,i)=x(i)*(4-x(i)^2);
end
%определяем значение u на границах
for j=1:M+1
    u(j,1)=0;
    u(j,2*N+2)=0;
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ai=tau/(h*h);
Bi=2*tau/(h*h)+1;
Ci=tau/(h*h);
F=zeros(M+1,2*N+2);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alf=zeros(M+1,2*N+2);
bet=zeros(M+1,2*N+2);
%начальные прогоночные коэффициенты
alf(1)=0;
bet(1)=0;
for j=2:M+1
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 1
    for i=2:N
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте
    alf(j,N+1)=a/(a+1-alf(j,N));
    bet(j,N+1)=bet(j,N)/(a+1-alf(j,N));
    alf(j,N+2)=alf(j,N+1);
    bet(j,N+2)=bet(j,N+1);
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 2
    for i=N+3:2*N+1

```

```

    F(j,i)=-u(j-1,i);
    alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
end
%определяем неизвестное значение u на ребре 2
for i= 2*N+1:-1:N+2
    u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
end
u(j,N+1)=u(j,N+2);
%определяем неизвестное значение u на ребре 1
for i= N:-1:1
    u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.1.2 Текст программы для решения задачи 2

```

%Создание сетки
N=15;%количество точек разбиений ребра
M=100;%количество точек разбиений временного интервала
L=1;%длина ребра
t_end=1;%окончание по времени
h=L/N;%шаг сетки по пространственной координате
tau=t_end/M;%шаг сетки по времени
a1=1/2;
a2=2;
x=zeros(3*N+3,1);
t=zeros(M+1,1);
for i=1:N+1
    x(i)=(i-1)*h;
end
for i=N+2:2*N+2
    x(i)=(i-2)*h;
end
for i=2*N+3:3*N+3
    x(i)=(i-N-3)*h;
end
for j=1:M
    t(j)=(j-1)*tau;
end
u=zeros(M+1,3*N+3);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:3*N+3
    u(1,i)=sin(pi/2*x(i));
end
%определяем значение u на границах
for j=1:M+1
    u(j,1)=0;
    u(j,2*N+2)=0;
    u(j,3*N+3)=0;
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ai=tau/(h*h);
Bi=2*tau/(h*h)+1;
Ci=tau/(h*h);
F=zeros(M+1,3*N+3);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alf=zeros(M+1,3*N+3);
bet=zeros(M+1,3*N+3);
%начальные прогоночные коэффициенты
alf(1)=0;
bet(1)=0;

```

```

for j=2:M+1
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 1
    for i=2:N
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте
    alf(j,N+1)=(a1+a2)/(a1+a2+1-alf(j,N));
    bet(j,N+1)=bet(j,N)/(a1+a2+1-alf(j,N));
    alf(j,N+2)=alf(j,N+1);
    bet(j,N+2)=bet(j,N+1);
    alf(j,2*N+3)=alf(j,N+1);
    bet(j,2*N+3)=bet(j,N+1);
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 2
    for i=N+3:2*N+1
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 3
    for i=2*N+4:3*N+2
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем неизвестное значение u на ребре 3
    for i=3*N+2:-1:2*N+3
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
    %определяем неизвестное значение u на ребре 2
    for i=2*N+1:-1:N+2
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
    u(j,N+1)=u(j,N+2);
    %определяем неизвестное значение u на ребре 1
    for i=N:-1:1
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.1.3 Текст программы для решения задачи 3

```

%Создание сетки
N=10;%количество точек разбиений ребра
M=100;%количество точек разбиений временного интервала
L=pi/3;%длина ребра
t_end=1;%окончание по времени
h=L/N;%шаг сетки по пространственной координате
tau=t_end/M;%шаг сетки по времени
a1=1;
a2=1;
a=1;
x=zeros(4*N+4,1);
t=zeros(M+1,1);
for i=1:N+1
    x(i)=(i-1)*h;
end
for i=N+2:2*N+2
    x(i)=(i-2)*h;
end
for i=2*N+3:3*N+3

```

```

    x(i)=(i-3)*h;
end
for i=3*N+4:4*N+4
    x(i)=(i-N-4)*h;
end
for j=1:M
    t(j)=(j-1)*tau;
end
u=zeros(M+1,4*N+4);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:4*N+4
    u(1,i)=sin(x(i));
end
%определяем значение u на границах
for j=1:M+1
    u(j,1)=0;
    u(j,3*N+3)=0;
    u(j,4*N+4)=0;
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ai=tau/(h*h);
Bi=2*tau/(h*h)+1;
Ci=tau/(h*h);
F=zeros(M+1,4*N+4);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alf=zeros(M+1,4*N+4);
bet=zeros(M+1,4*N+4);
%начальные прогоночные коэффициенты
alf(1)=0;
bet(1)=0;
for j=2:M+1
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 1
    for i=2:N
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 1
    alf(j,N+1)=a/(a+1-alf(j,N));
    bet(j,N+1)=bet(j,N)/(a+1-alf(j,N));
    alf(j,N+2)=alf(j,N+1);
    bet(j,N+2)=bet(j,N+1);
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 2
    for i=N+3:2*N+1
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 2
    alf(j,2*N+2)=(a1+a2)/(a1+a2+1-alf(j,2*N+1));
    bet(j,2*N+2)=bet(j,2*N+1)/(a1+a2+1-alf(j,2*N+1));
    alf(j,2*N+3)=alf(j,2*N+2);
    bet(j,2*N+3)=bet(j,2*N+2);
    alf(j,3*N+4)=alf(j,2*N+2);
    bet(j,3*N+4)=bet(j,2*N+2);
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 3
    for i=2*N+4:3*N+2
        F(j,i)=-u(j-1,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 4
    for i=3*N+5:4*N+3

```

```

F(j,i)=-u(j-1,i);
alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
end
%определяем неизвестное значение u на ребре 4
for i= 4*N+3:-1:3*N+4
    u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
end
%определяем неизвестное значение u на ребре 3
for i= 3*N+2:-1:2*N+3
    u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
end
u(j,2*N+2)=u(j,2*N+3);
%определяем неизвестное значение u на ребре 2
for i= 2*N+1:-1:N+2
    u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
end
u(j,N+1)=u(j,N+2);
%определяем неизвестное значение u на ребре 1
for i= N:-1:1
    u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.2 Листинг программ для решения задач колебаний упругих сложносочлененных конструкций в сети (п. 4.2.2)

Приложение 2.2.1 Текст программы для решения задачи 1

```

%Создание сетки
N=20;%количество точек разбиений ребра
M=100;%количество точек разбиений временного интервала
L=3;%длина ребра
T=1;%окончание по времени
h=L/N;%шаг сетки по пространственной координате
tau=T/M;%шаг сетки по времени
a=1;
x=zeros(1,2*N+2);
t=zeros(1,M+1);
for i=1:N+1
    x(i)=h*(i-1);
end
for i=N+2:2*N+2
    x(i)=h*(i-2);
end
for j=1:M+1
    t(j)=tau*(j-1);
end
u=zeros(M+1,2*N+2); %численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:2*N+2
    u(1,i)=(1-x(i))*sin(pi*x(i));
    u(2,i)=u(1,i);
end
%определяем значение u на границах
for j=1:M+1
    u(j,1)=0;
    u(j,2*N+2)=0;
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ai=tau*tau/(h*h);
Bi=2*tau*tau/(h*h)+1;

```

```

Ci=tau*tau/(h*h);
F=zeros(M+1,2*N+2);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alf=zeros(M+1,2*N+2);
bet=zeros(M+1,2*N+2);
%начальные прогоночные коэффициенты
alf(1)=0;
bet(1)=0;
for j=3:M+1
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 1
    for i=2:N
        F(j,i)=-2*u(j-1,i)+u(j-2,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте
    alf(j,N+1)=a/(a+1-alf(j,N));
    bet(j,N+1)=bet(j,N)/(a+1-alf(j,N));
    alf(j,N+2)=alf(j,N+1);
    bet(j,N+2)=bet(j,N+1);
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 2
    for i=N+3:2*N+1
        F(j,i)=-2*u(j-1,i)+u(j-2,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем неизвестное значение u на ребре 2
    for i=2*N+1:-1:N+2
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
    u(j,N+1)=u(j,N+2);
    %определяем неизвестное значение u на ребре 1
    for i=N:-1:1
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.2.2 Текст программы для решения задачи 2

```

%Создание сетки
N=10;%количество точек разбиений ребра
M=100;%количество точек разбиений временного интервала
L=2;%длина ребра
t_end=1;%окончание по времени
h=L/N;%шаг сетки по пространственной координате
tau=t_end/M;%шаг сетки по времени
a1=1;
a2=2;
x=zeros(3*N+3,1);
t=zeros(M+1,1);
for i=1:N+1
    x(i)=(i-1)*h;
end
for i=N+2:2*N+2
    x(i)=(i-2)*h;
end
for i=2*N+3:3*N+3
    x(i)=(i-N-3)*h;
end
for j=1:M
    t(j)=(j-1)*tau;

```

```

end
u=zeros(M+1,3*N+3);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=2:3*N+2
    u(1,i)=x(i)*sin(pi*x(i));
    u(2,i)=u(1,i);
end
%определяем значение u на границах
for j=1:M+1
    u(j,1)=0;
    u(j,3*N+3)=0;
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ai=tau*tau/(h*h);
Bi=2*tau*tau/(h*h)+1;
Ci=tau*tau/(h*h);
F=zeros(M+1,3*N+3);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alf=zeros(M+1,3*N+3);
bet=zeros(M+1,3*N+3);
%начальные прогоночные коэффициенты
alf(1)=0;
bet(1)=0;
for j=3:M+1
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 1
    for i=2:N
        F(j,i)=-2*u(j-1,i)+u(j-2,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте
    alf(j,N+1)=(a1+a2)/(a1+a2+1-alf(j,N));
    bet(j,N+1)=bet(j,N)/(a1+a2+1-alf(j,N));
    alf(j,N+2)=alf(j,N+1);
    bet(j,N+2)=bet(j,N+1);
    alf(j,2*N+3)=alf(j,N+1);
    bet(j,2*N+3)=bet(j,N+1);
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 2
    for i=N+3:2*N+1
        F(j,i)=-2*u(j-1,i)+u(j-2,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов на ребре 3
    for i=2*N+4:3*N+2
        F(j,i)=-2*u(j-1,i)+u(j-2,i);
        alf(j,i)=Ai/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
        bet(j,i)=(Ci*bet(j,i-1)-F(j,i))/(Bi-Ci*alf(j,i-1));
    end
    %определяем неизвестное значение u на ребре 3
    for i=3*N+2:-1:2*N+3
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
    %определяем неизвестное значение u на ребре 2
    for i=2*N+1:-1:N+2
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
    u(j,N+1)=u(j,N+2);
    %определяем неизвестное значение u на ребре 1
    for i=N:-1:1
        u(j,i)=alf(j,i)*u(j,i+1)+bet(j,i);
    end
end

```

```
end %Работа программы закончена
```

Приложение 2.3 Листинг программ для решения задач переноса сплошных сред в двумерной сети (п. 4.3.1)

Приложение 2.3.1 Текст программы для решения задачи 1

```
%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Nx=40;
Ny=20;
t_end=1;
Nt=10^2;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/Nx;
hy=Ly/(2*Ny);
%определяем расчетный шаг сетки по времени
tau=t_end/Nt;
ay=1;
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(2*Ny+2,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:2*Ny+2
        u(i,j,1)=cos(x(i))*cos(y(j));
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        u(1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(y(j));
        u(Nx+1,j,k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i,1,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i));
        u(i,2*Ny+2,k)=0;
    end
end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx);
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
```

```

Fix=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);
Fiy=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);
beta_x=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);
alfa_y=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);
beta_y=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        alfa_x(1,j,k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        alfa_y(i,1,k)=0;
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Ox для определения значения u на
    промежуточном временном слое
    for j=2:Ny
        beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
        for i= 2:Nx
            Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
            alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
            beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
        end
    end
    %определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в
    области 1
    for i=Nx:-1:2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
end
for j=Ny+3:2*Ny+1
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
    for i= 2:Nx
        Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
        alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
        beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    end
    %определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в
    области 2
    for i=Nx:-1:2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на целом
временном слое
for i=2:Nx
    beta_y(i,1,k)=exp(-2*(t(k-1)+tau))*cos(x(i));
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
    for j= 2:Ny
        Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
        alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
        beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте
    alfa_y(i,Ny+1,k)=ay/(ay+1- alfa_y(i,Ny,k));

```

```

beta_y(i,Ny+1,k)=beta_y(i,Ny,k)/(ay+1- alfa_y(i,Ny,k));
alfa_y(i,Ny+2,k)=alfa_y(i,Ny+1,k);
beta_y(i,Ny+2,k)=beta_y(i,Ny+1,k);
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for j= Ny+3:2*Ny+1
    Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
    alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 2
for j=2*Ny+1:-1:Ny+2
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
u(i,Ny+1,k)=u(i,Ny+2,k);
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 1
for j=Ny:-1:1
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.3.2 Текст программы для решения задачи 2

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Nx=30;
Ny=15;
t_end=1;
Nt=10^2;
a1=1;
a2=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/Nx;
hy=Ly/(3*Ny);
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(3*Ny+3,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for j=2*Ny+3:3*Ny+3
    y(j)=(j-3)*hy;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:3*Ny+3
        u(i,j,1)= cos(x(i))*cos(y(j)) ;
    end
end
end
%определяем значение u на границах

```

```

for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+3
        u(1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(y(j));
        u(Nx+1,j,k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i,1,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i));
        u(i,3*Ny+3,k)=0;
    end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx) ;
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
Fix=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);
Fiy=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);
beta_x=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);
alfa_y=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);
beta_y=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+3
        alfa_x(1,j,k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        alfa_y(i,1,k)=0;
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
    промежуточном временном слое
    for j=2:Ny
        beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
        for i= 2:Nx
            Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
            alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
            beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
        end
        %определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 1
        for i=Nx:-1:2
            u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
        end
    end
    for j=Ny+3:2*Ny+1
        beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
        for i= 2:Nx
            Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
            alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
            beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
        end
        %определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 2

```

```

for i=Nx:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
end
for j=2*Ny+4:3*Ny+2
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
    %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
    for i= 2:Nx
        Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
        alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
        beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    end
    %определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 3
    for i=Nx:-1:2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
end
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на целом
    %временном слое
    for i=2:Nx
        beta_y(i,1,k)=exp(-2*(t(k-1)+tau))*cos(x(i));
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
        for j= 2:Ny
            Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
            alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
            beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
        end
        %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 1
        alfa_y(i,Ny+1,k)=a1/(a1+1- alfa_y(i,Ny,k));
        beta_y(i,Ny+1,k)=beta_y(i,Ny,k)/(a1+1- alfa_y(i,Ny,k));
        alfa_y(i,Ny+2,k)=alfa_y(i,Ny+1,k);
        beta_y(i,Ny+2,k)=beta_y(i,Ny+1,k);
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
        for j= Ny+3:2*Ny+1
            Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
            alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
            beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
        end
        %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 2
        alfa_y(i,2*Ny+2,k)=a2/(a2+1- alfa_y(i,2*Ny+1,k));
        beta_y(i,2*Ny+2,k)=beta_y(i,2*Ny+1,k)/(a2+1- alfa_y(i,2*Ny+1,k));
        alfa_y(i,2*Ny+3,k)=alfa_y(i,2*Ny+2,k);
        beta_y(i,2*Ny+3,k)=beta_y(i,2*Ny+2,k);
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
        for j= 2*Ny+4:3*Ny+2
            Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
            alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
            beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
        end
        %определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 3
        for j=3*Ny+2:-1:2*Ny+3
            u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
        end
        u(i,2*Ny+2,k)=u(i,2*Ny+3,k);
        %определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 2
        for j=2*Ny+1:-1:Ny+2
            u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
        end
        u(i,Ny+1,k)=u(i,Ny+2,k);
        %определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 1
        for j=Ny:-1:1

```

```

        u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
    end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.3.3 Текст программы для решения задачи 3

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
t_end=1;
ax=1;
ay=2;
Nx=7;
Ny=7;
Nt=100;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(2*Nx);
hy=Ly/(3*Ny);
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(2*Nx+2,1);
y=zeros(3*Ny+2,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1;
    x(i)=hx*(i-1);
end
for i=Nx+2:2*Nx+2;
    x(i)=hx*(i-2);
end
for j=1:2*Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end

for j=2*Ny+2:3*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nt+1); %численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for k=1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+2
            u(i,j,k)=cos(x(i))*cos(y(j));
        end
    end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        for j=Ny+1:2*Ny+1
            u(i,j,k)=cos(x(i))*cos(y(j));
        end
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:Ny+1
        u(Nx+1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(Nx+1))*cos(y(j));
    end
    for j=2*Ny+1:3*Ny+2
        u(Nx+1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(Nx+1))*cos(y(j));
    end
    for j=1:3*Ny+2
        u(1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(y(j));
    end
end

```

```

        u(2*Nx+2, j, k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i, 1, k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i));
        u(i, 3*Ny+2, k)=0;
    end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        u(i, Ny+1, k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(Ny+1));
        u(i, 2*Ny+1, k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(2*Ny+1));
    end

end

A=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
Ax=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
Bx=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
Cx=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
Ay=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
By=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
Cy=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2);
%Усреднения для коэффициента a(x,y)
for i=1:2*Nx+1
    for j= 1:3*Ny+1
        A(i, j)=( (y(j+1)-y(j))*(x(i+1)^2-x(i)^2)+(x(i+1)-x(i))*(y(j+1)^2-
y(j)^2))/(2*hx*hy);
    end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
for i=1:2*Nx+2
    for j= 1:3*Ny+2
        Ax(i, j)=A(i, j)*tau/(hx*hx) ;
        Bx(i, j)=A(i, j)*2*tau/(hx*hx)+1;
        Cx(i, j)=A(i, j)*tau/(hx*hx);
        Ay(i, j)=A(i, j)*tau/(hy*hy);
        By(i, j)=A(i, j)*2*tau/(hy*hy)+1;
        Cy(i, j)=A(i, j)*tau/(hy*hy);
    end
end
%создание массивов прогоночных коэффициентов
Fix=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2, Nt+1);
Fiy=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2, Nt+1);
alfa_x=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2, Nt+1);
beta_x=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2, Nt+1);
alfa_y=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2, Nt+1);
beta_y=zeros(2*Nx+2, 3*Ny+2, Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+2
        alfa_x(1, j, k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:2*Nx+2
        alfa_y(i, 1, k)=0;
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
промежуточном временном слое

```

```

for j=1:2*Ny
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
    for i= 2:Nx
        Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
        alfa_x(i,j,k)=Ax(i,j)/(Bx(i,j)-Cx(i,j)*alfa_x(i-1,j,k));
        beta_x(i,j,k)=(Cx(i,j)*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx(i,j)-
Cx(i,j)*alfa_x(i-1,j,k));
    end
end
for j=2:Ny+1
    for i=Nx:-1:2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
end
for j=2*Ny+3:3*Ny+1
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
    for i= 2:Nx
        Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
        alfa_x(i,j,k)=Ax(i,j)/(Bx(i,j)-Cx(i,j)*alfa_x(i-1,j,k));
        beta_x(i,j,k)=(Cx(i,j)*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx(i,j)-
Cx(i,j)*alfa_x(i-1,j,k));
    end
    for i=Nx:-1:2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
end
for j=Ny+2:2*Ny
    alfa_x(Nx+1,j,k)=ax/(ax+1-alfa_x(Nx,j,k));
    beta_x(Nx+1,j,k)= beta_x(Nx,j,k)/(ax+1-alfa_x(Nx,j,k));
    alfa_x(Nx+2,j,k)=alfa_x(Nx+1,j,k);
    beta_x(Nx+2,j,k)=beta_x(Nx+1,j,k);
    for i= Nx+3:2*Nx+1
        Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
        alfa_x(i,j,k)=Ax(i,j)/(Bx(i,j)-Cx(i,j)*alfa_x(i-1,j,k));
        beta_x(i,j,k)=(Cx(i,j)*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx(i,j)-
Cx(i,j)*alfa_x(i-1,j,k));
    end
    for i=2*Nx+1:-1:Nx+2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
    u(Nx+1,j,k)=u(Nx+2,j,k);
    for i=Nx:-1:2
        u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
    end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на целом
временном слое
for i=2:Nx
    beta_y(i,1,k)=exp(-2*(t(k-1)+tau))*cos(x(i));
    for j= 2:2*Ny
        Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
        alfa_y(i,j,k)=Ay(i,j)/(By(i,j)-Cy(i,j)*alfa_y(i,j-1,k));
        beta_y(i,j,k)=(Cy(i,j)*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By(i,j)-
Cy(i,j)*alfa_y(i,j-1,k));
    end
    alfa_y(i,2*Ny+1,k)=ay/(ay+1-alfa_y(i,2*Ny,k));
    beta_y(i,2*Ny+1,k)= beta_y(i,2*Ny,k)/(ay+1-alfa_y(i,2*Ny,k));
    alfa_y(i,2*Ny+2,k)=alfa_y(i,2*Ny+1,k);
    beta_y(i,2*Ny+2,k)=beta_y(i,2*Ny+1,k);
    for j= 2*Ny+3:3*Ny+1
        Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
        alfa_y(i,j,k)=Ay(i,j)/(By(i,j)-Cy(i,j)*alfa_y(i,j-1,k));
        beta_y(i,j,k)=(Cy(i,j)*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By(i,j)-
Cy(i,j)*alfa_y(i,j-1,k));

```

```

end
for j= 3*Ny+1:-1:2*Ny+2
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
u(i,2*Ny+1,k)=u(i,2*Ny+2,k);
for j= 2*Ny:-1:1
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
end
for i=Nx+3:2*Nx+1
    alfa_y(i,Ny+1,k)=0;
    beta_y(i,Ny+1,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(Ny+1));
    for j=Ny+2:2*Ny
        Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
        alfa_y(i,j,k)=Ay(i,j)/(By(i,j)-Cy(i,j)*alfa_y(i,j-1,k));
        beta_y(i,j,k)=(Cy(i,j)*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By(i,j)-
Cy(i,j)*alfa_y(i,j-1,k));
    end
    for j= 2*Ny:-1:Ny+2
        u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
    end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.3.4 Текст программы для решения задачи 4

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Nx=20;
Ny=20;
t_end=1;
Nt=10^2;
ax=1;
by=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(2*Nx);
hy=Ly/(2*Ny);
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(2*Nx+2,1);
y=zeros(2*Ny+2,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    x(i)=(i-2)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1); %численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for k=1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:2*Ny+2
            u(i,j,k)=cos(x(i))*cos(y(j));

```

```

    end
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    for j=Ny+2:2*Ny+2
        u(i,j,k)=cos(x(i))*cos(y(j));
    end
end
end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        u(1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(y(j));
    end
    for j=Ny+2:2*Ny+2
        u(2*Nx+2,j,k)=0;
    end
    for j=1:Ny+2
        u(Nx+1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(Nx+1))*cos(y(j));
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i,1,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i));
    end
    for i=1:2*Nx+2
        u(i,2*Ny+2,k)=0;
    end
    for i=Nx+1:2*Nx+2
        u(i,Ny+2,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(Ny+2));
    end
end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx) ;
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
Fix=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1);
Fiy=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1);
beta_x=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1);
alfa_y=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1);
beta_y=zeros(2*Nx+2,2*Ny+2,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        alfa_x(1,j,k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:2*Nx+2
        alfa_y(i,1,k)=0;
    end
end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
    %промежуточном временном слое
    for j=2:Ny
        beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
        %цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов

```

```

for i= 2:Nx
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 1
for i=Nx:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
end
for j=Ny+3:2*Ny+1
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for i= 2:Nx
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 1
alfa_x(Nx+1,j,k)=ax/(ax+1-alfa_x(Nx,j,k));
beta_x(Nx+1,j,k)=beta_x(Nx,j,k)/(ax+1-alfa_x(Nx,j,k));
alfa_x(Nx+2,j,k)=alfa_x(Nx+1,j,k);
beta_x(Nx+2,j,k)=beta_x(Nx+1,j,k);
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for i= Nx+3:2*Nx+1
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 2
for i=2*Nx+1:-1:Nx+2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
    u(Nx+1,j,k)=u(Nx+2,j,k);
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 1
for i=Nx:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на целом
временном слое
for i=2:Nx
    beta_y(i,1,k)=exp(-2*(t(k-1)+tau))*cos(x(i));
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for j= 2:Ny
    Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
    alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 2
alfa_y(i,Ny+1,k)=by/(1+by- alfa_y(i,Ny,k));
beta_y(i,Ny+1,k)=beta_y(i,Ny,k)/(1+by- alfa_y(i,Ny,k));
alfa_y(i,Ny+2,k)=alfa_y(i,Ny+1,k);
beta_y(i,Ny+2,k)=beta_y(i,Ny+1,k);
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for j= Ny+3:2*Ny+1
    Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
    alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 2
for j=2*Ny+1:-1:Ny+2
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);

```

```

end
u(i,Ny+1,k)=u(i,Ny+2,k);
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 1
for j=Ny:-1:1
u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
end
for i=Nx+3:2*Nx+1
alfa_y(i,Ny+2,k)=0;
beta_y(i,Ny+2,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(Ny+2));
for j=Ny+3:2*Ny+1
Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 3
for j= 2*Ny+1:-1:Ny+2
u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.3.5 Текст программы для решения задачи 5

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Nx=21;
Ny=14;
t_end=1;
Nt=10^2;
ax=1;
by1=1;
by2=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(2*Nx);
hy=Ly/(3*Ny);
tau=t_end/Nt; %определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(2*Nx+2,1);
y=zeros(3*Ny+3,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
x(i)=(i-1)*hx;
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
x(i)=(i-2)*hx;
end
for j=1:Ny+1
y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
y(j)=(j-2)*hy;
end
for j=2*Ny+3:3*Ny+3
y(j)=(j-3)*hx;
end
for k=1:Nt+1
t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for k=1
for i=1:Nx+1

```

```

    for j=1:3*Ny+3
        u(i,j,k)=cos(x(i))*cos(y(j));
    end
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    for j=2*Ny+3:3*Ny+3
        u(i,j,k)=cos(x(i))*cos(y(j));
    end
end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+3
        u(1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(y(j));
    end
    for j=2*Ny+3:3*Ny+3
        u(2*Nx+2,j,k)=0;
    end
    for j=1:2*Ny+3
        u(Nx+1,j,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(Nx+1))*cos(y(j));
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i,1,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i));
    end
    for i=1:2*Nx+2
        u(i,3*Ny+3,k)=0;
    end
    for i=Nx+1:2*Nx+2
        u(i,2*Ny+3,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(2*Ny+3));
    end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx) ;
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
Fix=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);
Fiy=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);
beta_x=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);
alfa_y=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);
beta_y=zeros(2*Nx+2,3*Ny+3,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        alfa_x(1,j,k)=0;
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:2*Nx+2
        alfa_y(i,1,k)=0;
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
    промежуточном временном слое
    for j=2:Ny

```

```

beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for i= 2:Nx
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 1
for i=Nx:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
end
for j=Ny+3:2*Ny+1
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for i= 2:Nx
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 2
for i=Nx:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
end
for j=2*Ny+4:3*Ny+2
    beta_x(1,j,k)=exp(-2*(t(k-1)+0.5*tau))*cos(y(j));
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for i= 2:Nx
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 3
alfa_x(Nx+1,j,k)=ax/(ax+1-alfa_x(Nx,j,k));
beta_x(Nx+1,j,k)=beta_x(Nx,j,k)/(ax+1-alfa_x(Nx,j,k));
alfa_x(Nx+2,j,k)=alfa_x(Nx+1,j,k);
beta_x(Nx+2,j,k)=beta_x(Nx+1,j,k);
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for i= Nx+3:2*Nx+1
    Fix(i,j,k)=-u(i,j,k-1);
    alfa_x(i,j,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
    beta_x(i,j,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,k)-Fix(i,j,k))/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,k));
end
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 4
for i=2*Nx+1:-1:Nx+2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
    u(Nx+1,j,k)=u(Nx+2,j,k);
%определяем неизвестное значение u на промежуточном временном слое в области 3
for i=Nx:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_x(i,j,k)*u(i+1,j,k)+beta_x(i,j,k);
end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на целом
временном слое
for i=2:Nx
    beta_y(i,1,k)=exp(-2*(t(k-1)+tau))*cos(x(i));
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for j= 2:Ny
    Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);

```

```

    alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 1
alfa_y(i,Ny+1,k)=by1/(1+by1- alfa_y(i,Ny,k));
beta_y(i,Ny+1,k)=beta_y(i,Ny,k)/(1+by1- alfa_y(i,Ny,k));
alfa_y(i,Ny+2,k)=alfa_y(i,Ny+1,k);
beta_y(i,Ny+2,k)=beta_y(i,Ny+1,k);
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for j= Ny+3:2*Ny+1
    Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
    alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 2
alfa_y(i,2*Ny+2,k)=by2/(1+by2- alfa_y(i,2*Ny+1,k));
beta_y(i,2*Ny+2,k)=beta_y(i,2*Ny+1,k)/(1+by2- alfa_y(i,2*Ny+1,k));
alfa_y(i,2*Ny+3,k)=alfa_y(i,2*Ny+2,k);
beta_y(i,2*Ny+3,k)=beta_y(i,2*Ny+2,k);
%цикл с параметром для определения прогоночных коэффициентов
for j= 2*Ny+4:3*Ny+2
    Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
    alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
end
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 3
for j=3*Ny+2:-1:2*Ny+3
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
u(i,2*Ny+2,k)=u(i,2*Ny+3,k);
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 2
for j=2*Ny+1:-1:Ny+2
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
u(i,Ny+1,k)=u(i,Ny+2,k);
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 1
for j=Ny:-1:2
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
end
for i=Nx+3:2*Nx+1
    alfa_y(i,2*Ny+3,k)=0;
    beta_y(i,2*Ny+3,k)=exp(-2*t(k))*cos(x(i))*cos(y(2*Ny+3));
    for j=2*Ny+4:3*Ny+3
        Fiy(i,j,k)=-u(i,j,k);
        alfa_y(i,j,k)=Ay/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
        beta_y(i,j,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,k)-Fiy(i,j,k))/(By-Cy*alfa_y(i,j-1,k));
    end
%определяем неизвестное значение u на целом временном слое в области 4
for j= 3*Ny+2:-1:2*Ny+4
    u(i,j,k)=alfa_y(i,j,k)*u(i,j+1,k)+beta_y(i,j,k);
end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.4 Листинг программ для решения задач переноса сплошных сред в трехмерной сети (п. 4.3.2)

Приложение 2.4.1 Текст программы для решения задачи 1

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;

```

```

Ly=pi/2;
Lz=pi/2;
t_end=0.1;
Nx=20;
Ny=10;
Nz=20;
Nt=100;
by=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(Nx);
hy=Ly/(2*Ny);
hz=Lz/Nz;
tau=t_end/Nt; %определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(2*Ny+2,1);
z=zeros(Nz+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for p=1:Nz+1
    z(p)=(p-1)*hz;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1); %численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:2*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(i,j,p,1)=x(i)*y(j)*z(p)*cos(x(i));
        end
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(1,j,p,k)=0;
            u(Nx+1,j,p,k)=-2*t(k)*exp(-t(k))*y(j)*z(p);
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            u(i,1,p,k)=0;
            u(i,2*Ny+2,p,k)=exp(-t(k))*pi/2*z(p)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*z(p)*sin(x(i));
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:2*Ny+2
            u(i,j,1,k)=0;

```

```

        u(i,j,Nz+1,k)=exp(-t(k))*pi/2*y(j)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*y(j)*sin(x(i));
    end
end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx) ;
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
Az=tau/(hz*hz);
Bz=2*tau/(hz*hz)+1;
Cz=tau/(hz*hz);
Fix=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
Fiy=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
Fiz=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
beta_x=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
alfa_y=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
beta_y=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            alfa_x(1,j,p,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            alfa_y(i,1,p,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:2*Ny+2
            alfa_z(i,j,1,k)=0;
        end
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Ox для определения значения u на
промежуточном временном слое
    for j=2:Ny
        for p=2:Nz
            beta_x(1,j,p,k)=0;
            for i=2:Nx
                Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
                alfa_x(i,j,p,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
                beta_x(i,j,p,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,p,k)-Fix(i,j,p,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
            end
            for i=Nx:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
            end
        end
    end
end
end

```

```

for j=Ny+3:2*Ny+1
  for p=2:Nz
    beta_x(1,j,p,k)=0;
    for i=2:Nx
      Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
      alfa_x(i,j,p,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
      beta_x(i,j,p,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,p,k)-Fix(i,j,p,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
    end
    for i=Nx:-1:1
      u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
    end
  end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на
промежуточном временном слое
for i=2:Nx
  for p=2:Nz
    beta_y(i,1,p,k)=0;
    for j=2:Ny
      Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
      alfa_y(i,j,p,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(i,j-1,p,k));
      beta_y(i,j,p,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,p,k)-Fiy(i,j,p,k))/(By-
Cy*alfa_y(i,j-1,p,k));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте
    alfa_y(i,Ny+1,p,k)=by/(by+1-alfa_y(i,Ny,p,k));
    beta_y(i,Ny+1,p,k)=beta_y(i,Ny,p,k)/(by+1-alfa_y(i,Ny,p,k));
    beta_y(i,Ny+2,p,k)=beta_y(i,Ny+1,p,k);
    alfa_y(i,Ny+2,p,k)=alfa_y(i,Ny+1,p,k);
    for j=Ny+3:2*Ny+1
      Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
      alfa_y(i,j,p,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(i,j-1,p,k));
      beta_y(i,j,p,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,p,k)-Fiy(i,j,p,k))/(By-
Cy*alfa_y(i,j-1,p,k));
    end
    for j=2*Ny+1:-1:Ny+2
      u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
    end
    u(i,Ny+1,p,k)= u(i,Ny+2,p,k);
    for j=Ny:-1:1
      u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
    end
  end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oz для определения значения u на целом
временном слое
for i=2:Nx
  for j=2:Ny
    beta_z(i,j,1,k)=0;
    for p=2:Nz
      Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
      alfa_z(i,j,p,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
      beta_z(i,j,p,k)=(Cz*beta_z(i,j,p-1,k)-Fiz(i,j,p,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
    end
    for p=Nz:-1:1
      u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
    end
  end
end
for j=Ny+3:2*Ny+1
  beta_z(i,j,1,k)=0;

```

```

    for p=2:Nz
        Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
        alfa_z(i,j,p,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
        beta_z(i,j,p,k)=(Cz*beta_z(i,j,p-1,k)-Fiz(i,j,p,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
    end
    for p=Nz:-1:1
        u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
    end
end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.4.2 Текст программы для решения задачи 2

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Lz=pi/2;
t_end=0.1;
by1=1;
by2=1;
Nx=21;
Ny=7;
Nz=21;
Nt=100;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(Nx);
hy=Ly/(3*Ny);
hz=Lz/Nz;
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(3*Ny+3,1);
z=zeros(Nz+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for j=2*Ny+3:3*Ny+3
    y(j)=(j-3)*hy;
end
for p=1:Nz+1
    z(p)=(p-1)*hz;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:3*Ny+3
        for p=1:Nz+1
            u(i,j,p,1)=x(i)*y(j)*z(p)*cos(x(i));
        end
    end
end
end

```

```

%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+3
            for p=1:Nz+1
                u1(i,j,p,k)=exp(-t(k))*y(j)*z(p)*x(i)*cos(x(i))-2*t(k)*exp(-
t(k))*y(j)*z(p)*sin(x(i));
            end
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+3
        for p=1:Nz+1
            u(1,j,p,k)=0;
            u(Nx+1,j,p,k)=-2*t(k)*exp(-t(k))*y(j)*z(p);
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            u(i,1,p,k)=0;
            u(i,3*Ny+3,p,k)=exp(-t(k))*pi/2*z(p)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*z(p)*sin(x(i));
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+3
            u(i,j,1,k)=0;
            u(i,j,Nz+1,k)=exp(-t(k))*pi/2*y(j)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*y(j)*sin(x(i));
        end
    end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx) ;
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
Az=tau/(hz*hz);
Bz=2*tau/(hz*hz)+1;
Cz=tau/(hz*hz);
Fix=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
Fiy=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
Fiz=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
beta_x=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
alfa_y=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
beta_y=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
alfa_z=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
beta_z=zeros(Nx+1,3*Ny+3,Nz+1,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+3
        for p=1:Nz+1
            alfa_x(1,j,p,k)=0;
        end
    end
end

```

```

end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            alfa_y(i,1,p,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+3
            alfa_z(i,j,1,k)=0;
        end
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
    %промежуточном временном слое
    for j=2:Ny
        for p=2:Nz
            beta_x(1,j,p,k)=0;
            for i=2:Nx
                Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
                alfa_x(i,j,p,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
                beta_x(i,j,p,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,p,k)-Fix(i,j,p,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
            end
            for i=Nx:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
            end
        end
    end
    for j=Ny+3:2*Ny+1
        for p=2:Nz
            beta_x(1,j,p,k)=0;
            for i=2:Nx
                Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
                alfa_x(i,j,p,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
                beta_x(i,j,p,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,p,k)-Fix(i,j,p,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
            end
            for i=Nx:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
            end
        end
    end
    for j=2*Ny+4:3*Ny+2
        for p=2:Nz
            beta_x(1,j,p,k)=0;
            for i=2:Nx
                Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
                alfa_x(i,j,p,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
                beta_x(i,j,p,k)=(Cx*beta_x(i-1,j,p,k)-Fix(i,j,p,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(i-1,j,p,k));
            end
            for i=Nx:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
            end
        end
    end
end
end

```

%решаем СЛАУ в направлении оси Oy для определения значения u на промежуточном временном слое

```

for i=2:Nx
    for p=2:Nz
        beta_y(i,1,p,k)=0;
        for j=2:Ny
            Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_y(i,j,p,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(i,j-1,p,k));
            beta_y(i,j,p,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,p,k)-Fiy(i,j,p,k))/(By-
Cy*alfa_y(i,j-1,p,k));
        end
        %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 1
        alfa_y(i,Ny+1,p,k)=by1/(by1+1-alfa_y(i,Ny,p,k));
        beta_y(i,Ny+1,p,k)=beta_y(i,Ny,p,k)/(by1+1-alfa_y(i,Ny,p,k));
        beta_y(i,Ny+2,p,k)=beta_y(i,Ny+1,p,k);
        alfa_y(i,Ny+2,p,k)=alfa_y(i,Ny+1,p,k);
        for j=Ny+3:2*Ny+1
            Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_y(i,j,p,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(i,j-1,p,k));
            beta_y(i,j,p,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,p,k)-Fiy(i,j,p,k))/(By-
Cy*alfa_y(i,j-1,p,k));
        end
        %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 2
        alfa_y(i,2*Ny+2,p,k)=by2/(by2+1-alfa_y(i,2*Ny+1,p,k));
        beta_y(i,2*Ny+2,p,k)=beta_y(i,2*Ny+1,p,k)/(by2+1-
alfa_y(i,2*Ny+1,p,k));
        beta_y(i,2*Ny+3,p,k)=beta_y(i,2*Ny+2,p,k);
        alfa_y(i,2*Ny+3,p,k)=alfa_y(i,2*Ny+2,p,k);
        for j=2*Ny+4:3*Ny+2
            Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_y(i,j,p,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(i,j-1,p,k));
            beta_y(i,j,p,k)=(Cy*beta_y(i,j-1,p,k)-Fiy(i,j,p,k))/(By-
Cy*alfa_y(i,j-1,p,k));
        end
        for j=3*Ny+2:-1:2*Ny+3
            u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
        end
        u(i,2*Ny+2,p,k)=u(i,2*Ny+3,p,k);
        for j=2*Ny+1:-1:Ny+2
            u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
        end
        u(i,Ny+1,p,k)=u(i,Ny+2,p,k);
        for j=Ny:-1:1
            u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
        end
    end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oz для определения значения u на целом временном слое
for i=2:Nx
    for j=2:Ny
        beta_z(i,j,1,k)=0;
        for p=2:Nz
            Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_z(i,j,p,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
            beta_z(i,j,p,k)=(Cz*beta_z(i,j,p-1,k)-Fiz(i,j,p,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
        end
        for p=Nz:-1:1
            u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
        end
    end
end
for j=Ny+3:2*Ny+1

```

```

        beta_z(i,j,1,k)=0;
        for p=2:Nz
            Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_z(i,j,p,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
            beta_z(i,j,p,k)=(Cz*beta_z(i,j,p-1,k)-Fiz(i,j,p,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
        end
        for p=Nz:-1:1
            u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
        end
    end
    for j=2*Ny+4:3*Ny+2
        beta_z(i,j,1,k)=0;
        for p=2:Nz
            Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_z(i,j,p,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
            beta_z(i,j,p,k)=(Cz*beta_z(i,j,p-1,k)-Fiz(i,j,p,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(i,j,p-1,k));
        end
        for p=Nz:-1:1
            u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
        end
    end
end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.4.3 Текст программы для решения задачи 3

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Lz=pi/2;
t_end=0.1;
Nx=15;
Ny=10;
Nz=30;
Nt=100;
ax=1;
by=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(2*Nx);
hy=Ly/(3*Ny);
hz=Lz/Nz;
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(2*Nx+2,1);
y=zeros(3*Ny+2,1);
z=zeros(Nz+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    x(i)=(i-2)*hx;
end
for j=1:2*Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=2*Ny+2:3*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for p=1:Nz+1
    z(p)=(p-1)*hz;
end
end

```

```

for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1); %численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for k=1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+2
            for p=1:Nz+1
                u(i,j,p,k)=x(i)*y(j)*z(p)*cos(x(i));
            end
        end
    end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        for j=Ny+1:2*Ny+1
            for p=1:Nz+1
                u(i,j,p,k)=x(i)*y(j)*z(p)*cos(x(i));
            end
        end
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(1,j,p,k)=0;
        end
    end
    for j=Ny+1:2*Ny+1
        for p=1:Nz+1
            u(2*Nx+2,j,p,k)=-2*t(k)*exp(-t(k))*y(j)*z(p);
        end
    end
    for j=1:Ny+1
        for p=1:Nz+1
            u(Nx+1,j,p,k)=exp(-t(k))*cos(pi/4)*pi/4*y(j)*z(p)-2*t(k)*exp(-
t(k))*y(j)*z(p)*sin(pi/4);
        end
    end
    for j=2*Ny+1:3*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(Nx+1,j,p,k)=exp(-t(k))*cos(pi/4)*pi/4*y(j)*z(p)-2*t(k)*exp(-
t(k))*y(j)*z(p)*sin(pi/4);
        end
    end
end

for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            u(i,1,p,k)=0;
            u(i,3*Ny+2,p,k)=exp(-t(k))*pi/2*z(p)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*z(p)*sin(x(i));
        end
    end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        for p=1:Nz+1
            u(i,Ny+1,p,k)=exp(-t(k))*pi/6*z(p)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi/3*z(p)*sin(x(i));
            u(i,2*Ny+1,p,k)=exp(-t(k))*pi/3*z(p)*x(i)*cos(x(i))-2*t(k)*exp(-
t(k))*pi/3*z(p)*sin(x(i));
        end
    end
end

```

```

    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+2
            u(i,j,1,k)=0;
            u(i,j,Nz+1,k)=exp(-t(k))*pi/2*y(j)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*y(j)*sin(x(i));
        end
    end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        for j=Ny+1:2*Ny+1
            u(i,j,1,k)=0;
            u(i,j,Nz+1,k)=exp(-t(k))*pi/2*y(j)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*y(j)*sin(x(i));
        end
    end
end

A=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
Ax=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
Bx=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
Cx=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);

Ay=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
By=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
Cy=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);

Az=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
Bz=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
Cz=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1);
%Усреднения для коэффициента а(x,y,z)
for i=1:2*Nx+1
    for j=1:3*Ny+1
        for p=1:Nz
            A(i,j,p)=(x(i+1)^2-x(i)^2)*(y(j+1)^2-y(j)^2)*(z(p+1)^2-
z(p)^2)/(8*hx*hy*hz);
        end
    end
end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
for i=1:2*Nx+1
    for j=1:3*Ny+1
        for p=1:Nz
            Ax(i,j,p)=A(i,j,p)*tau/(hx*hx) ;
            Bx(i,j,p)=A(i,j,p)*2*tau/(hx*hx)+1;
            Cx(i,j,p)=A(i,j,p)*tau/(hx*hx);
            Ay(i,j,p)=A(i,j,p)*tau/(hy*hy);
            By(i,j,p)=A(i,j,p)*2*tau/(hy*hy)+1;
            Cy(i,j,p)=A(i,j,p)*tau/(hy*hy);
            Az(i,j,p)=A(i,j,p)*tau/(hz*hz);
            Bz(i,j,p)=A(i,j,p)*2*tau/(hz*hz)+1;
            Cz(i,j,p)=A(i,j,p)*tau/(hz*hz);
        end
    end
end
end
%создание массивов прогоночных коэффициентов
Fix=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
Fiy=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
Fiz=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
alfa_x=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
beta_x=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);

```

```

alfa_y=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
beta_y=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
alfa_z=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
beta_z=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            alfa_x(1,j,p,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:2*Nx+2
        for p=1:Nz+1
            alfa_y(i,1,p,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:2*Nx+2
        for j=1:3*Ny+2
            alfa_z(i,j,1,k)=0;
        end
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
    промежуточном временном слое
    for j= 1:2*Ny
        for p=1:Nz
            beta_x(1,j,p,k)=0;
            for i=2:Nx
                Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
                alfa_x(i,j,p,k)=Ax(i,j,p)/(Bx(i,j,p)-Cx(i,j,p)*alfa_x(i-1,j,p,k));
                beta_x(i,j,p,k)=(Cx(i,j,p)*beta_x(i-1,j,p,k)-
                Fix(i,j,p,k))/(Bx(i,j,p)-Cx(i,j,p)*alfa_x(i-1,j,p,k));
            end
        end
    end
    for j= 2:Ny+1
        for p=2:Nz
            for i=Nx:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
            end
        end
    end
    for j= 2*Ny+3:3*Ny+1
        for p=1:Nz
            beta_x(1,j,p,k)=0;
            for i=2:Nx
                Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
                alfa_x(i,j,p,k)=Ax(i,j,p)/(Bx(i,j,p)-Cx(i,j,p)*alfa_x(i-1,j,p,k));
                beta_x(i,j,p,k)=(Cx(i,j,p)*beta_x(i-1,j,p,k)-
                Fix(i,j,p,k))/(Bx(i,j,p)-Cx(i,j,p)*alfa_x(i-1,j,p,k));
            end
            for i=Nx:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
            end
        end
    end
end
end

```

```

for j=Ny+2:2*Ny
  for p=1:Nz
    alfa_x(Nx+1,j,p,k)=ax/(ax+1-alfa_x(Nx,j,p,k));
    beta_x(Nx+1,j,p,k)=beta_x(Nx,j,p,k)/(ax+1-alfa_x(Nx,j,p,k));
    alfa_x(Nx+2,j,p,k)=alfa_x(Nx+1,j,p,k);
    beta_x(Nx+2,j,p,k)=beta_x(Nx+1,j,p,k);
    for i=Nx+3:2*Nx+1
      Fix(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k-1);
      alfa_x(i,j,p,k)=Ax(i,j,p)/(Bx(i,j,p)-Cx(i,j,p)*alfa_x(i-1,j,p,k));
      beta_x(i,j,p,k)=(Cx(i,j,p)*beta_x(i-1,j,p,k)-
Fix(i,j,p,k))/(Bx(i,j,p)-Cx(i,j,p)*alfa_x(i-1,j,p,k));
    end
    for i=2*Nx+1:-1:Nx+2
      u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
    end
    u(Nx+1,j,p,k)=u(Nx+2,j,p,k);
    for i=Nx:-1:1
      u(i,j,p,k)=alfa_x(i,j,p,k)*u(i+1,j,p,k)+beta_x(i,j,p,k);
    end
  end
end
end
%решаем СЛАНУ в направлении оси Oy для определения значения u на
промежуточном временном слое
for i=1:Nx
  for p=1:Nz
    beta_y(i,1,p,k)=0;
    for j=2:2*Ny
      Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
      alfa_y(i,j,p,k)=Ay(i,j,p)/(By(i,j,p)-Cy(i,j,p)*alfa_x(i,j-1,p,k));
      beta_y(i,j,p,k)=(Cy(i,j,p)*beta_y(i,j-1,p,k)-
Fiy(i,j,p,k))/(By(i,j,p)-Cy(i,j,p)*alfa_y(i,j-1,p,k));
    end
    alfa_y(i,2*Ny+1,p,k)=by/(by+1-alfa_y(i,2*Ny,p,k));
    beta_y(i,2*Ny+1,p,k)=beta_y(i,2*Ny,p,k)/(by+1-alfa_y(i,2*Ny,p,k));
    beta_y(i,2*Ny+2,p,k)=beta_y(i,2*Ny+1,p,k);
    alfa_y(i,2*Ny+2,p,k)=alfa_y(i,2*Ny+1,p,k);
    for j=2*Ny+3:3*Ny+1
      Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
      alfa_y(i,j,p,k)=Ay(i,j,p)/(By(i,j,p)-Cy(i,j,p)*alfa_x(i,j-1,p,k));
      beta_y(i,j,p,k)=(Cy(i,j,p)*beta_y(i,j-1,p,k)-
Fiy(i,j,p,k))/(By(i,j,p)-Cy(i,j,p)*alfa_y(i,j-1,p,k));
    end
    for j=3*Ny+1:-1:2*Ny+2
      u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
    end
    u(i,2*Ny+1,p,k)=u(i,2*Ny+2,p,k);
    for j=2*Ny:-1:1
      u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
    end
  end
end
end
end
for i=Nx+3:2*Nx+1
  for p=1:Nz
    alfa_y(i,Ny+1,p,k)=0;
    beta_y(i,Ny+1,p,k)=exp(-t(k-1)+2/3*tau)*pi/6*z(p)*x(i)*cos(x(i))-
(t(k-1)+2/3*tau)*exp(-t(k-1)+2/3*tau)*pi/3*z(p)*sin(x(i));
    for j=Ny+2:2*Ny
      Fiy(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
      alfa_y(i,j,p,k)=Ay(i,j,p)/(By(i,j,p)-Cy(i,j,p)*alfa_x(i,j-1,p,k));
      beta_y(i,j,p,k)=(Cy(i,j,p)*beta_y(i,j-1,p,k)-
Fiy(i,j,p,k))/(By(i,j,p)-Cy(i,j,p)*alfa_y(i,j-1,p,k));
    end
  end
end

```

```

        for j=2*Ny:-1:Ny+2
            u(i,j,p,k)=alfa_y(i,j,p,k)*u(i,j+1,p,k)+beta_y(i,j,p,k);
        end
    end
end
%решаем СЛАУ в направлении оси Oz для определения значения u на целом
временном слое
for i=1:Nx
    for j=1:2*Ny
        beta_z(i,j,1,k)=0;
        for p=2:Nz
            Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_z(i,j,p,k)=Az(i,j,p)/(Bz(i,j,p)-Cz(i,j,p)*alfa_z(i,j,p-1,k));
            beta_z(i,j,p,k)=(Cz(i,j,p)*beta_z(i,j,p-1,k)-
Fiz(i,j,p,k))/(Bz(i,j,p)-Cz(i,j,p)*alfa_z(i,j,p-1,k));
        end
        for p=Nz:-1:1
            u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
        end
    end
    for j=2*Ny+3:3*Ny+1
        beta_z(i,j,1,k)=0;
        for p=2:Nz
            Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
            alfa_z(i,j,p,k)=Az(i,j,p)/(Bz(i,j,p)-Cz(i,j,p)*alfa_z(i,j,p-1,k));
            beta_z(i,j,p,k)=(Cz(i,j,p)*beta_z(i,j,p-1,k)-
Fiz(i,j,p,k))/(Bz(i,j,p)-Cz(i,j,p)*alfa_z(i,j,p-1,k));
        end
        for p=Nz:-1:1
            u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
        end
    end
end
end

    for i=Nx+3:2*Nx+1
        for j=Ny+2:2*Ny
            beta_z(i,j,1,k)=0;
            for p=2:Nz
                Fiz(i,j,p,k)=-u(i,j,p,k);
                alfa_z(i,j,p,k)=Az(i,j,p)/(Bz(i,j,p)-Cz(i,j,p)*alfa_z(i,j,p-1,k));
                beta_z(i,j,p,k)=(Cz(i,j,p)*beta_z(i,j,p-1,k)-
Fiz(i,j,p,k))/(Bz(i,j,p)-Cz(i,j,p)*alfa_z(i,j,p-1,k));
            end
            for p=Nz:-1:1
                u(i,j,p,k)=alfa_z(i,j,p,k)*u(i,j,p+1,k)+beta_z(i,j,p,k);
            end
        end
    end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.5 Листинг программ для решения задач колебаний упругих сложносочлененных конструкций в двумерной сети (п. 4.3.3)

Приложение 2.5.1 Текст программы для решения задачи 1

```

%Создание сетки
Lx=5;
Ly=5;
Nx=50;
Ny=30;
a=1;
t_end=15;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/Nx;

```

```

hy=Ly/(2*Ny);
Nt=2+round(2*t_end*sqrt(1/hx^2+1/hy^2));
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(Ny+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(Ny+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(Nx+1,2*Ny+1,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:2*Ny+2
        u(i,j,1)=sin(pi*x(i)/2)*sin(pi*y(j)/2);
        u(i,j,2)=u(i,j,1);
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        u(1,j,k)=0;
        u(Nx+1,j,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*y(j)/2);
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i,1,k)=0;
        u(i,2*Ny+2,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*x(i)/2);
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=3:Nt+1
    for i=2:Nx
        %определяем неизвестное значение u в области 1
        for j=2:Ny
            u(i,j,k)=2*u(i,j,k-1)-u(i,j,k-2)+4*tau^2*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/(hy*hy));
        end
        %определяем неизвестное значение u в области 2
        for j=Ny+3:2*Ny+1
            u(i,j,k)=2*u(i,j,k-1)-u(i,j,k-2)+4*tau^2*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/(hy*hy));
        end
        for i=2:Nx
            u(i,Ny+1,k)=(a*u(i,Ny+3,k)+u(i,Ny,k))/(a+1);
            u(i,Ny+2,k)=u(i,Ny+1,k);
        end
    end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.5.2 Текст программы для решения задачи 2

```

%Создание сетки
Lx=5;
Ly=5;
Nx=50;
Ny=30;
t_end=10;
ax=2;
ay=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(2*Nx);
hy=Ly/(3*Ny);
Nt=2+round(2*t_end*sqrt(1/hx^2+1/hy^2));
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(2*Nx+2,1);
y=zeros(3*Ny+2,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1;
    x(i)=hx*(i-1);
end
for i=Nx+2:2*Nx+2;
    x(i)=hx*(i-2);
end
for j=1:2*Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end

for j=2*Ny+2:3*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:3*Ny+2
        u(i,j,1)=sin(pi*x(i)/2)*sin(pi*y(j)/2);
        u(i,j,2)=u(i,j,1);
    end
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    for j=Ny+1:2*Ny+1
        u(i,j,1)=sin(pi*x(i)/2)*sin(pi*y(j)/2);
        u(i,j,2)=u(i,j,1);
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=3:Nt+1
    for j=1:3*Ny+2
        u(Nx+1,j,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*y(j)/2)*sin(pi*x(Nx+1)/2);
    end
    for j=2*Ny+1:3*Ny+2
        u(Nx+1,j,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*y(j)/2)*sin(pi*x(Nx+1)/2);
    end
end
for k=3:Nt+1
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        u(i,Ny+1,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*y(Ny+1)/2)*sin(pi*x(i)/2);
        u(i,2*Ny+1,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*y(2*Ny+1)/2)*sin(pi*x(i)/2);
    end
end
for k=3:Nt+1
    for j=1:3*Ny+2

```

```

        u(1,j,k)=0;
    end
    for j=Ny+1:2*Ny+1
        u(2*Nx+2,j,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*y(j)/2);
    end
end
for k=3:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        u(i,1,k)=0;
        u(i,3*Ny+2,k)=cos(pi*sqrt(2)*t(k))*sin(pi*x(i)/2);
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=3:Nt+1
    for i=2:Nx
        %определяем неизвестное значение u в области 1
        for j=2:2*Ny
            u(i,j,k)=2*u(i,j,k-1)-u(i,j,k-2)+4*tau^2*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/(hy*hy));
        end
        %определяем неизвестное значение u в области 2
        for j=2*Ny+3:3*Ny+1
            u(i,j,k)=2*u(i,j,k-1)-u(i,j,k-2)+4*tau^2*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/(hy*hy));
        end
        end
        for i=2:Nx
            u(i,2*Ny+1,k)=(ay*u(i,2*Ny+3,k)+u(i,2*Ny,k))/(ay+1);
            u(i,2*Ny+2,k)=u(i,2*Ny+1,k);
        end
        %определяем неизвестное значение u в области 3
        for j=Ny+2:2*Ny
            for i=Nx+3:2*Nx+1
                u(i,j,k)=2*u(i,j,k-1)-u(i,j,k-2)+4*tau^2*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/(hy*hy));
            end
        end
        for j=Ny+2:2*Ny
            u(Nx+1,j,k)=(ax*u(Nx+3,j,k)+u(Nx,j,k))/(ax+1);
            u(Nx+2,j,k)=u(Nx+1,j,k);
        end
    end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.6 Листинг программ для решения задач колебаний упругих сложносочлененных конструкций в трехмерной сети (п. 4.3.4)

Приложение 2.6.1 Текст программы для решения задачи 1

```

%Создание сетки
Lx=1;
Ly=1;
Lz=1;
t_end=1;
a=1;
Nx=30;
Ny=15;
Nz=30;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(Nx);
hy=Ly/(2*Ny);
hz=Lz/Nz;
Nt=2+round(t_end*sqrt(1/hx^2+1/hy^2+1/hz^2));

```

```

tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(2*Ny+2,1);
z=zeros(Nz+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=Ny+2:2*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for p=1:Nz+1
    z(p)=(p-1)*hz;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
u=zeros(Nx+1,2*Ny+2,Nz+1,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:2*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(i,j,p,1)=(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*exp(-(z(p)^2));
            u(i,j,p,2)=u(i,j,p,1);
        end
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:2*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(1,j,p,k)=-1/6*y(j)^3*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
            u(Nx+1,j,p,k)=1/2*(y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-
((z(p)-t(k))^2));
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            u(i,1,p,k)=0;
            u(i,2*Ny+2,p,k)=1/2*(x(i)^2-1/3)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-
t(k))^2));
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:2*Ny+2
            u(i,j,1,k)=(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*exp(-(t(k))^2);
            u(i,j,Nz+1,k)=1/2*(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(1+t(k))^2))+exp(-
((1-t(k))^2));
        end
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=3:Nt+1
    for i=2:Nx
        %определяем неизвестное значение u в области 1
        for j=2:Ny

```

```

        for p=2:Nz
            u(i,j,p,k)=2*u(i,j,p,k-1)-u(i,j,p,k-2)+tau^2*((u(i+1,j,p,k-1)-
2*u(i,j,p,k-1)+u(i-1,j,p,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,p,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j-1,p,k-
1))/(hy*hy)+(u(i,j,p+1,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j,p-1,k-1))/(hz*hz));
        end
    end
    end
    %определяем неизвестное значение u в области 2
    for j=Ny+3:2*Ny+1
        for p=2:Nz
            u(i,j,p,k)=2*u(i,j,p,k-1)-u(i,j,p,k-2)+tau^2*((u(i+1,j,p,k-1)-
2*u(i,j,p,k-1)+u(i-1,j,p,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,p,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j-1,p,k-
1))/(hy*hy)+(u(i,j,p+1,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j,p-1,k-1))/(hz*hz));
        end
    end
    end
    for i=2:Nx
        for p=2:Nz
            u(i,Ny+1,p,k)=(a*u(i,Ny+3,p,k)+u(i,Ny,p,k))/(a+1);
            u(i,Ny+2,p,k)=u(i,Ny+1,p,k);
        end
    end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.6.2 Текст программы для решения задачи 2

```

%Создание сетки
Lx=1;
Ly=1;
Lz=1;
t_end=1;
Nx=15;
Ny=10;
Nz=30;
ax=1;
ay=1;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(2*Nx);
hy=Ly/(3*Ny);
hz=Lz/Nz;
Nt=2+round(t_end*sqrt(1/hx^2+1/hy^2+1/hz^2));
tau=t_end/Nt;%определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(2*Nx+2,1);
y=zeros(3*Ny+2,1);
z=zeros(Nz+1,1);
t=zeros(Nt+1,1);
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    x(i)=(i-2)*hx;
end
for j=1:2*Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for j=2*Ny+2:3*Ny+2
    y(j)=(j-2)*hy;
end
for p=1:Nz+1
    z(p)=(p-1)*hz;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end

```

```

u=zeros(2*Nx+2,3*Ny+2,Nz+1,Nt+1);%численное решение
%определяем значение u в начальный момент времени
for i=1:Nx+1
    for j=1:3*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(i,j,p,1)=(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*exp(-(z(p)^2));
            u(i,j,p,2)=u(i,j,p,1);
        end
    end
end
for i=Nx+2:2*Nx+2
    for j=Ny+1:2*Ny+1
        for p=1:Nz+1
            u(i,j,p,1)=(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*exp(-(z(p)^2));
            u(i,j,p,2)=u(i,j,p,1);
        end
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for j=1:3*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(1,j,p,k)=-1/6*y(j)^3*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
        end
    end
    for j=Ny+1:2*Ny+1
        for p=1:Nz+1
            u(2*Nx+2,j,p,k)=1/2*(y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
        end
    end
    for j=1:Ny+1
        for p=1:Nz+1
            u(Nx+1,j,p,k)=1/2*(1/4*y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
        end
    end
    for j=2*Ny+1:3*Ny+2
        for p=1:Nz+1
            u(Nx+1,j,p,k)=1/2*(1/4*y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for p=1:Nz+1
            u(i,1,p,k)=0;
            u(i,3*Ny+2,p,k)=1/2*(x(i)^2-1/3)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
        end
    end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        for p=1:Nz+1
            u(i,Ny+1,p,k)=1/2*(x(i)^2*1/3-1/81)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
            u(i,2*Ny+1,p,k)=1/2*(x(i)^2*2/3-8/81)*(exp(-(z(p)+t(k))^2))+exp(-(z(p)-t(k))^2));
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for i=1:Nx+1
        for j=1:3*Ny+2

```

```

        u(i,j,1,k)=(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*exp(-(t(k))^2);
        u(i,j,Nz+1,k)=1/2*(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(1+t(k))^2))+exp(-
((1-t(k))^2));
    end
end
    for i=Nx+2:2*Nx+2
        for j=Ny+1:2*Ny+1
            u(i,j,1,k)=(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*exp(-(t(k))^2);
            u(i,j,Nz+1,k)=1/2*(x(i)^2*y(j)-1/3*y(j)^3)*(exp(-(1+t(k))^2))+exp(-
((1-t(k))^2));
        end
    end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=3:Nt+1
    for i=2:Nx
        %определяем неизвестное значение u в области 1
        for j=2:2*Ny
            for p=2:Nz
                u(i,j,p,k)=2*u(i,j,p,k-1)-u(i,j,p,k-2)+tau^2*((u(i+1,j,p,k-1)-
2*u(i,j,p,k-1)+u(i-1,j,p,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,p,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j-1,p,k-
1))/(hy*hy)+(u(i,j,p+1,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j,p-1,k-1))/(hz*hz));
            end
        end
        %определяем неизвестное значение u в области 2
        for j=2*Ny+3:3*Ny+1
            for p=2:Nz
                u(i,j,p,k)=2*u(i,j,p,k-1)-u(i,j,p,k-2)+tau^2*((u(i+1,j,p,k-1)-
2*u(i,j,p,k-1)+u(i-1,j,p,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,p,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j-1,p,k-
1))/(hy*hy)+(u(i,j,p+1,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j,p-1,k-1))/(hz*hz));
            end
        end
    end
    for i=2:Nx
        for p=2:Nz
            u(i,2*Ny+1,p,k)=(ay*u(i,2*Ny+3,p,k)+u(i,2*Ny,p,k))/(ay+1);
            u(i,2*Ny+2,p,k)=u(i,2*Ny+1,p,k);
        end
    end
    %определяем неизвестное значение u в области 3
    for j=Ny+2:2*Ny
        for i=Nx+3:2*Nx+1
            for p=2:Nz
                u(i,j,p,k)=2*u(i,j,p,k-1)-u(i,j,p,k-2)+tau^2*((u(i+1,j,p,k-1)-
2*u(i,j,p,k-1)+u(i-1,j,p,k-1))/(hx*hx)+(u(i,j+1,p,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j-1,p,k-
1))/(hy*hy)+(u(i,j,p+1,k-1)-2*u(i,j,p,k-1)+u(i,j,p-1,k-1))/(hz*hz));
            end
        end
    end
    for j=Ny+2:2*Ny
        for p=2:Nz
            u(Nx+1,j,p,k)=(ax*u(Nx+3,j,p,k)+u(Nx,j,p,k))/(ax+1);
            u(Nx+2,j,p,k)=u(Nx+1,j,p,k);
        end
    end
end
end%Работа программы закончена

```

Приложение 2.7 Листинг программ для решения задачи переноса теплоты в слоистой области (п. 4.3.5)

Приложение 2.7.1 Текст программы для решения задачи 1

```

%Создание сетки
Lx=pi/2;
Ly=pi/2;
Lz=pi/2;
t_end=0.1;
bz1=1;
bz2=1;
bz3=1;
Nx=28;
Ny=28;
Nz=7;
Nt=100;
%определяем расчетные шаги сетки по пространственным координатам
hx=Lx/(Nx);
hy=Ly/(Ny);
hz=Lz/(4*Nz);
tau=t_end/Nt; %определяем расчетный шаг сетки по времени
x=zeros(Nx+1,1);
y=zeros(Ny+1,1);
z=zeros(4*Nz+4,1);
t=zeros(Nt+1,1);
u=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1); %численное решение
for i=1:Nx+1
    x(i)=(i-1)*hx;
end
for j=1:Ny+1
    y(j)=(j-1)*hy;
end
for p=1:Nz+1
    z(p)=(p-1)*hz;
end
for p=Nz+2:2*Nz+2
    z(p)=(p-2)*hz;
end
for p=2*Nz+3:3*Nz+3
    z(p)=(p-3)*hz;
end
for p=3*Nz+4:4*Nz+4
    z(p)=(p-4)*hz;
end
for k=1:Nt+1
    t(k)=(k-1)*tau;
end
%определяем значение u в начальный момент времени
for p=1:4*Nz+4
    for j=1:Ny+1
        for i=1:Nx+1
            u(p,j,i,1)=x(i)*y(j)*z(p)*cos(x(i));
        end
    end
end
%определяем значение u на границах
for k=1:Nt+1
    for p=1:4*Nz+4
        for j=1:Ny+1
            u(p,j,1,k)=0;
            u(p,j,Nx+1,k)=-2*t(k)*exp(-t(k))*y(j)*z(p);
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for p=1:4*Nz+4
        for i=1:Nx+1

```

```

        u(p,1,i,k)=0;
        u(p,Ny+1,i,k)=exp(-t(k))*pi/2*z(p)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*z(p)*sin(x(i));
    end
end
end
for k=1:Nt+1
    for j=1:Ny+1
        for i=1:Nx+1
            u(1,j,i,k)=0;
            u(4*Nz+4,j,i,k)=exp(-t(k))*pi/2*y(j)*x(i)*cos(x(i))-t(k)*exp(-
t(k))*pi*y(j)*sin(x(i));
        end
    end
end
end
%коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
Ax=tau/(hx*hx) ;
Bx=2*tau/(hx*hx)+1;
Cx=tau/(hx*hx);
Ay=tau/(hy*hy);
By=2*tau/(hy*hy)+1;
Cy=tau/(hy*hy);
Az=tau/(hz*hz);
Bz=2*tau/(hz*hz)+1;
Cz=tau/(hz*hz);
Fix=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
Fiy=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
Fiz=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
%создание массивов прогоночных коэффициентов
alfa_x=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
beta_x=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
alfa_y=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
beta_y=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
alfa_z=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
beta_z=zeros(4*Nz+4,Ny+1,Nx+1,Nt+1);
%начальные прогоночные коэффициенты
for k=1:Nt+1
    for p=1:4*Nz+4
        for j=1:Ny+1
            alfa_x(p,j,1,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for p=1:4*Nz+4
        for i=1:Nx+1
            alfa_y(p,1,i,k)=0;
        end
    end
end
for k=1:Nt+1
    for j=1:Ny+1
        for i=1:Nx+1
            alfa_z(1,j,i,k)=0;
        end
    end
end
end
%цикл с параметром для определения численного решения
for k=2:Nt+1
%решаем СЛАУ в направлении оси Oх для определения значения u на
промежуточном временном слое
    for p=2:Nz
        for j=2:Ny

```

```

beta_y(p,j,1,k)=0;
for i=2:Nx
    Fix(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k-1);
    alfa_x(p,j,i,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(p,j,i-1,k));
    beta_x(p,j,i,k)=(Cx*beta_x(p,j,i-1,k)-Fix(p,j,i,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(p,j,i,k));
end
for i=Nx:-1:1
    u(p,j,i,k)=alfa_x(p,j,i,k)*u(p,j,i+1,k)+beta_x(p,j,i,k);
end
end
end
for p=Nz+3:2*Nz+1
    for j=2:Ny
        beta_y(p,j,1,k)=0;
        for i=2:Nx
            Fix(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k-1);
            alfa_x(p,j,i,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(p,j,i-1,k));
            beta_x(p,j,i,k)=(Cx*beta_x(p,j,i-1,k)-Fix(p,j,i,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(p,j,i,k));
        end
        for i=Nx:-1:1
            u(p,j,i,k)=alfa_x(p,j,i,k)*u(p,j,i+1,k)+beta_x(p,j,i,k);
        end
    end
end
for p=2*Nz+4:3*Nz+2
    for j=2:Ny
        beta_y(p,j,1,k)=0;
        for i=2:Nx
            Fix(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k-1);
            alfa_x(p,j,i,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(p,j,i-1,k));
            beta_x(p,j,i,k)=(Cx*beta_x(p,j,i-1,k)-Fix(p,j,i,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(p,j,i,k));
        end
        for i=Nx:-1:1
            u(p,j,i,k)=alfa_x(p,j,i,k)*u(p,j,i+1,k)+beta_x(p,j,i,k);
        end
    end
end
for p=3*Nz+5:4*Nz+3
    for j=2:Ny
        beta_y(p,j,1,k)=0;
        for i=2:Nx
            Fix(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k-1);
            alfa_x(p,j,i,k)=Ax/(Bx-Cx*alfa_x(p,j,i-1,k));
            beta_x(p,j,i,k)=(Cx*beta_x(p,j,i-1,k)-Fix(p,j,i,k))/(Bx-
Cx*alfa_x(p,j,i,k));
        end
        for i=Nx:-1:1
            u(p,j,i,k)=alfa_x(p,j,i,k)*u(p,j,i+1,k)+beta_x(p,j,i,k);
        end
    end
end
end

```

%решаем СЛДУ в направлении оси Oy для определения значения u на промежуточном временном слое

```

for p=2:Nz
    for i=2:Nx
        beta_y(p,1,i,k)=0;
        for j=2:Ny
            Fiy(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
            alfa_y(p,j,i,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(p,j-1,i,k));
            beta_y(p,j,i,k)=(Cy*beta_y(p,j-1,i,k)-Fiy(p,j,i,k))/(By-
Cy*alfa_y(p,j-1,i,k));
        end
    end
end

```

```

        end
        for j=Ny:-1:1
            u(p,j,i,k)=alfa_y(p,j,i,k)*u(p,j+1,i,k)+beta_y(p,j,i,k);
        end
    end
    end
    for p=Nz+3:2*Nz+1
        for i=2:Nx
            beta_y(p,1,i,k)=0;
            for j=2:Ny
                Fiy(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
                alfa_y(p,j,i,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(p,j-1,i,k));
                beta_y(p,j,i,k)=(Cy*beta_y(p,j-1,i,k)-Fiy(p,j,i,k))/(By-
Cy*alfa_y(p,j-1,i,k));
            end
            for j=Ny:-1:1
                u(p,j,i,k)=alfa_y(p,j,i,k)*u(p,j+1,i,k)+beta_y(p,j,i,k);
            end
        end
    end
    for p=2*Nz+4:3*Nz+2
        for i=2:Nx
            beta_y(p,1,i,k)=0;
            for j=2:Ny
                Fiy(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
                alfa_y(p,j,i,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(p,j-1,i,k));
                beta_y(p,j,i,k)=(Cy*beta_y(p,j-1,i,k)-Fiy(p,j,i,k))/(By-
Cy*alfa_y(p,j-1,i,k));
            end
            for j=Ny:-1:1
                u(p,j,i,k)=alfa_y(p,j,i,k)*u(p,j+1,i,k)+beta_y(p,j,i,k);
            end
        end
    end
    for p=3*Nz+5:4*Nz+3
        for i=2:Nx
            beta_y(p,1,i,k)=0;
            for j=2:Ny
                Fiy(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
                alfa_y(p,j,i,k)=Ay/(By-Cy*alfa_x(p,j-1,i,k));
                beta_y(p,j,i,k)=(Cy*beta_y(p,j-1,i,k)-Fiy(p,j,i,k))/(By-
Cy*alfa_y(p,j-1,i,k));
            end
            for j=Ny:-1:1
                u(p,j,i,k)=alfa_y(p,j,i,k)*u(p,j+1,i,k)+beta_y(p,j,i,k);
            end
        end
    end
    end
    end
    %решаем СЛАУ в направлении оси Oz для определения значения u на целом
    %временном слое
    for j=2:Ny
        for i=2:Nx
            beta_z(1,j,i,k)=0;
            for p=2:Nz
                Fiz(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
                alfa_z(p,j,i,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
                beta_z(p,j,i,k)=(Cz*beta_z(p-1,j,i,k)-Fiz(p,j,i,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
            end
            %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 1
            alfa_z(Nz+1,j,i,k)=bz1/(bz1+1-alfa_z(Nz,j,i,k));
            beta_z(Nz+1,j,i,k)=beta_z(Nz,j,i,k)/(bz1+1-alfa_z(Nz,j,i,k));
            beta_z(Nz+2,j,i,k)=beta_z(Nz+1,j,i,k);
            alfa_z(Nz+2,j,i,k)=alfa_z(Nz+1,j,i,k);
        end
    end

```

```

for p=Nz+3:2*Nz+1
    Fiz(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
    alfa_z(p,j,i,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
    beta_z(p,j,i,k)=(Cz*beta_z(p-1,j,i,k)-Fiz(p,j,i,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 2
    alfa_z(2*Nz+2,j,i,k)=bz2/(bz2+1-alfa_z(2*Nz+1,j,i,k));
    beta_z(2*Nz+2,j,i,k)=beta_z(2*Nz+1,j,i,k)/(bz2+1-
alfa_z(2*Nz+1,j,i,k));
    beta_z(2*Nz+3,j,i,k)=beta_z(2*Nz+2,j,i,k);
    alfa_z(2*Nz+3,j,i,k)=alfa_z(2*Nz+2,j,i,k);
    for p=2*Nz+4:3*Nz+2
        Fiz(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
        alfa_z(p,j,i,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
        beta_z(p,j,i,k)=(Cz*beta_z(p-1,j,i,k)-Fiz(p,j,i,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
    end
    %определяем прогоночные коэффициенты на узловом месте 3
    alfa_z(3*Nz+3,j,i,k)=bz3/(bz3+1-alfa_z(3*Nz+2,j,i,k));
    beta_z(3*Nz+3,j,i,k)=beta_z(3*Nz+2,j,i,k)/(bz3+1-
alfa_z(3*Nz+2,j,i,k));
    beta_z(3*Nz+4,j,i,k)=beta_z(3*Nz+3,j,i,k);
    alfa_z(3*Nz+4,j,i,k)=alfa_z(3*Nz+3,j,i,k);
    for p=3*Nz+5:4*Nz+3
        Fiz(p,j,i,k)=-u(p,j,i,k);
        alfa_z(p,j,i,k)=Az/(Bz-Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
        beta_z(p,j,i,k)=(Cz*beta_z(p-1,j,i,k)-Fiz(p,j,i,k))/(Bz-
Cz*alfa_z(p-1,j,i,k));
    end
    for p=4*Nz+3:-1:3*Nz+4
        u(p,j,i,k)=alfa_z(p,j,i,k)*u(p+1,j,i,k)+beta_z(p,j,i,k);
    end
    u(3*Nz+3,j,i,k)= u(3*Nz+4,j,i,k);
    for p=3*Nz+2:-1:2*Nz+3
        u(p,j,i,k)=alfa_z(p,j,i,k)*u(p+1,j,i,k)+beta_z(p,j,i,k);
    end
    u(2*Nz+2,j,i,k)= u(2*Nz+3,j,i,k);
    for p=2*Nz+1:-1:Nz+2
        u(p,j,i,k)=alfa_z(p,j,i,k)*u(p+1,j,i,k)+beta_z(p,j,i,k);
    end
    u(Nz+1,j,i,k)= u(Nz+2,j,i,k);
    for p=Nz:-1:1
        u(p,j,i,k)=alfa_z(p,j,i,k)*u(p+1,j,i,k)+beta_z(p,j,i,k);
    end
end
end
end
end%Работа программы закончена

```

**Приложение 3 Свидетельства о государственной регистрации программ для
ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2022611905

**Программный комплекс для решения задач переноса
методом конечных разностей на графе**

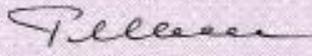
Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный университет» (ФГБОУ
ВО «ВГУ») (RU)*

Автор(ы): *Тран Зуи (VN)*

Заявка № **2021668000**
Дата поступления **11 ноября 2021 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **04 февраля 2022 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*


Г.П. Иванов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023662664

**«Программа построения решения уравнения переноса
сплошной среды в трехмерной сетеподобной области»**Правообладатель: **Корчагина Олеся Руслановна (RU)**Авторы: **Корчагина Олеся Руслановна (RU), Тран Зуй (VN),
Провоторов Вячеслав Васильевич (RU), Приходько Инна
Владимировна (RU)**Заявка № **2023661019**Дата поступления **29 мая 2023 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **09 июня 2023 г.**Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023662808

«Программа построения решения уравнения колебания
сложносочлененной двумерной механической
конструкции»

Правообладатель: *Корчагина Олеся Руслановна (RU)*Авторы: *Корчагина Олеся Руслановна (RU), Тран Зуй (VN),
Провоторов Вячеслав Васильевич (RU), Приходько Инна
Владимировна (RU)*

Заявка № 2023660277

Дата поступления 17 мая 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 14 июня 2023 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов