

На правах рукописи



Тран Зуй

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ МНОГОФАЗНЫХ
ЭВОЛЮЦИОННЫХ СЕТЕПОДОБНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА И ВОЛНОВЫХ
ПРОЦЕССОВ**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Воронеж – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель:

Провоторов Вячеслав Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Жабко Алексей Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», заведующий кафедрой теории управления факультета прикладной математики – процессов управления

Тихомиров Сергей Германович,
доктор технических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», профессор кафедры информационных и управляющих систем

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет», (г. Петрозаводск)

Защита состоится «05» июля 2024 года в 14⁰⁰ часов в конференц-зале на заседании диссертационного совета 24.2.286.04, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», по адресу: г. Воронеж, Московский просп., д. 14, ауд. 216.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» и на сайте <https://cchgeu.ru/>

Автореферат разослан «08» мая 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.т.н., доцент



Гусев Константин Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Численные методы анализа математических моделей всегда были и остаются в поле зрения исследователей прежде всего применительно к многофазным сетеподобным процессам различного типа, отличительная особенность которых характеризуется 1) наличием сложноструктурированных носителей процессов и 2) использованием функций с принадлежащей сетеподобной области многомерной пространственной переменной для описания количественных характеристик этих процессов. Теоретические основы анализа математических моделей различных сетеподобных процессов, прежде всего относящиеся к теории управления системами с распределенными параметрами, заложены в работах М. И. Белишева, А. Г. Бутковского, Л. Н. Знаменской, В. И. Зубова, Ж. -Л. Лионса, В. В. Провоторова, Ю. А. Гнилицкой, а также в работах А. В. Боровских, А. П. Жабко, В. А. Ильина, О. М. Пенкина, С. М. Сергеева, А. Ф. Филлипова в направлении анализа разрешимости краевых задач математических моделей. Исследования в направлении численных методов анализа для последующей числовой интерпретации полученных теоретических результатов пока не приобрели систематического характера, существуют только фрагментарные результаты – численный анализ эволюционных сетевых процессов возник только с появлением работ О. Р. Балабан. Численные методы анализа развиваются плодотворно и приводят к цели, если удастся осуществить редукцию исходной начально-краевой задачи, описывающую математическую модель сетеподобного процесса, к соответствующей конечномерной алгебраической системе, аппроксимирующую исходную задачу и дающую достаточно точное приближение решение ее. Универсальным методом приближенного решение дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики. Широко распространенным с глубоко развитым математическим аппаратом является метод конечных разностей, приводящий последовательности вспомогательных конечномерных задач. Такое сведение исходной задачи к последовательности вспомогательных конечномерных задач неоднозначно и неединственно для задач различных типов и зависит прежде всего от пространств функций, в которых рассматриваются исходные задачи (работы А. А. Самарского, Г. И. Марчука, А. Н. Тихонова, А. Ф. Филиппова). Тематика исследования диссертационной работы находится в рамках актуального направления, определяемого численными методами анализа эволюционных сетеподобных процессов, в рамках которого начало исследований было положено работами О. А. Махиновой, А. С. Волковой, О. Р. Балабан, В. Н. Хоанга, где носителями процессов явилась сеть – совокупность одномерных, ограниченных кривых, математическое описание которой осуществлялось инструментами пространственных графов, ребра которых (фрагменты сети) параметризованы отрезками числовой оси. Данная работа продолжает исследование указанных авторов в направлении увеличения размерности фрагментов сети, моделируя их двумерными и трехмерными областями и переходя к численному анализу процессов, осуществляемых в сетеподобных носителях, каковыми в приложениях являются тепловоды, гидро- и газонефтепроводы, волноводы. Особенный интерес исследования (и особенную сложность) представляет случай многофазной сплошной среды, в которой развивается тот или иной процесс. Предметом исследования явились также процессы в композиционных материалах (композитах), моделируемые слоистыми областями. При этом используется инструментарий теории разностных схем дифференциальных уравнений в частных производных. Полученные результаты применимы в анализе сетеподобных процессов промышленности и экономики, а также маркетинговой и дистрибьюторской политике. Исследование содержит результаты в следующих актуальных направлениях численного анализа сложноструктурированных эволюционных процессов переноса и волновых процессов: разработка методов и принципов построения разностных схем для математических моделей, анализ устойчивости и сходимости разностных схем, численный анализ прикладных задач промышленности, биомедицины и экономики, формирование программного комплекса для количественного описания свойств сетеподобных процессов.

С учетом вышеизложенного актуальность темы диссертационного исследования заключается в необходимости дальнейшего развития средств анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов. Работа

подготовлена в соответствии с одним из научных направлений «Математические модели гидродинамики», осуществляемым математическим факультетом Воронежского государственного университета.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка модифицируемых средств моделирования носителей сетеподобных процессов, методов построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, образующих основу моделей эволюционных процессов, разработка разностных схем и алгоритмов, сформированных на базе устойчивых (условно устойчивых) разностных схем, разработка программного комплекса, ориентированного на решение ряда проблемно-ориентированных задач, относящиеся к анализу эволюционных процессов.

Достижение цели диссертационного исследования осуществляется решением следующих задач:

1. Разработка средств моделирования носителей сетеподобных процессов с учетом особенности структуры этих носителей, состоящей в наличии мест ветвления линейных фрагментов носителей.

2. Разработка средств построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, образующих основу моделей эволюционных процессов, с учетом особенностей разветвленной структуры носителей процессов.

3. Формирование разностных схем для сетеподобных процессов, учитывающих особенности структуры носителей этих процессов, многофазность сплошной среды, анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости таких схем, разработка алгоритмов, сформированных на базе устойчивых (условно устойчивых) разностных схем.

4. Разработка программного комплекса, ориентированного на решение серии проблемно-ориентированных задач, относящиеся к анализу эволюционных процессов переноса сплошных сред и процессов колебаний в сложноструктурированных носителях.

Объект исследования: многофазные сетеподобные процессы с учетом особенности структуры этих носителей, конечномерные сеточные функции с особенностями, порожденные структурой носителей процесса и многофазностью среды, дискретные аналоги начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, алгоритмов для реализации разностных схем.

Предмет исследования: численные методы анализа дискретных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, учитывающих особенности структуры носителей этих процессов, анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости соответствующих разностных схем, алгоритмы для реализации таких схем, направленных на решение серии проблемно-ориентированных задач.

Научная новизна. В диссертационном исследовании достигнуты следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

- предложена модификация подхода к реализации численных методов анализа многофазных эволюционных процессов различного типа, отличающаяся возможностью адекватного описания неклассических динамических свойств процессов и явлений в местах ветвления сложноструктурированных носителей;

- разработана формализация к построению конечно-разностных аналогов начально-краевых задач многофазных эволюционных процессов, отличающаяся наличием особенностей разветвленной структуры носителей процессов;

- разработаны формальные средства построения разностных схем для конечно-разностных аналогов многофазных эволюционных процессов, отличающиеся наличием свойств ветвлений носителей процессов;

- предложен подход анализа устойчивости (условной устойчивости) и сходимости соответствующих разностных схем, алгоритмы для реализации таких схем, отличительной особенностью которых является общность использования для разностных схем иных процессов;

- предложена структура программного комплекса численного анализа, отличающаяся реализацией механизмов построения программных систем численного анализа в соответствии с описанием характера ветвлений сетеподобных носителей исследуемых процессов и учитывающая

свойство многофазности этих процессов.

Практическая значимость работы. Разработанные алгоритмы применимы к задачам транспортировки нефти и нефтепродуктов по магистральным и сетевым трубопроводам, а также к анализу волновых процессов при этом возникающих. Эти же алгоритмы адаптированы к анализу композиционных материалов (композитов), которые, имея слоистую внутреннюю структуру носителя тепловых и волновых процессов, являются частным случаем сетеподобных процессов. Разработанный программный комплекс может быть использован в научно-исследовательских организациях, занимающихся разработкой средств численного анализа сложноструктурированных физических и искусственных процессов.

Внедрение результатов. Результаты диссертационного исследования реализованы в учебном процессе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» в рамках образовательной программы по направлению 01.04.01 «Математика» при проведении спецкурсов по дисциплинам «Математические модели гидродинамики», а также при подготовке магистерских выпускных квалификационных работ. Результаты могут быть использованы для разработок спецкурсов Института математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета и ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), а также при решении прикладных задач технического характера, определяемых научным направлением концерна «Созвездие» (г. Воронеж). На специализированные программные средства получены свидетельства о государственной регистрации Российской Федерации.

Теоретическая значимость. Результаты анализа устойчивости предложенных двухслойных и трехслойных разностных схем дискретных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов являются важным вкладом в развитие теории устойчивости разностных схем. Разработка новых алгоритмов, описывающих различного типа явления в местах ветвления сетевых носителей и определяющих выбор балансных соотношений в этих местах, могут стать теоретическим инструментом для формирования информативной базы математического описания аналогичных явлений иных сетеподобных процессов, например, кровотоков и волновых эффектов в сердечно-сосудистой системе живого организма, сетевых клеточных метаболизмов различного типа.

Методология и методы исследования. В диссертационном исследовании для достижения цели и решении поставленных задач использованы теория дифференциальных уравнений с частными производными, методы теории моделирования сложных систем, краевых задач с многомерной пространственной переменной, теории аппроксимаций и приближений, теории разностных схем (устойчивость, сходимость и корректность).

Положения, выносимые на защиту:

1. Особенности символьного описания явлений в местах ветвления сетеподобного носителя процесса, позволяющие формирование математической модели этого процесса.

2. Развитие аппарата конечно-разностных аналогов для эволюционных уравнений переноса и волновых уравнений, образующих основу моделей эволюционных процессов, с учетом особенностей разветвленной структуры носителей процессов и многофазности среды.

3. Развитие методов построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач уравнений переноса и волновых уравнений, обеспечивающие формализацию особенностей разветвленной структуры носителей процессов и многофазность среды.

4. Формирование новых разностных схем для сетеподобных процессов, учитывающих особенности структуры носителей процессов и многофазность среды, анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости схем, разработка алгоритмов для этих схем.

5. Программный комплекс, включающий в себя модули классификации носителей процессов, модули вычислительных алгоритмов для количественного описания характеристик и свойств этих процессов, обеспечивающий решение проблемно-ориентированных задач прикладного характера. Результаты численного анализа актуальных задач процессов переноса сплошных сред и волновых процессов.

Достоверность научных результатов и выводов исследования обусловлена

корректным использованием теоретических методов исследования и подтверждается сравнительным анализом полученных в работе результатов с известными в периодической печати результатами российских и зарубежных исследователей по представляемой тематике, сравнением полученных теоретических результатов с серией вычислительных экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты исследования докладывались и обсуждались на Международных научных конференциях «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» ПМТУКТ (Воронеж, 2021, 2022, 2023), Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2022» (Воронеж, 2022), LIII и LIV Международных научных конференциях аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2022, 2023), а также на научных семинарах проф. А.В. Глушко и проф. В.В. Провоторова (Воронежский государственный университет, 2021, 2022, 2023, 2024), проф. О.Н. Мосиной (Елецкий государственный университет, 2022), проф. А.П. Жабко (Санкт-Петербургский государственный университет, 2022, 2023), проф. Е.С. Жуковского (Институт математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета, 2023).

Тематика работы соответствует следующим пунктам Паспорта специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: п. 2 – Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; п. 3 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; п. 7. – Качественные или аналитические методы исследования математических моделей (технические науки); п. 8 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, в том числе 6 статей в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 2 статьи в журнале, индексируемом библиографической и реферативной базой данных SCOPUS, получено 4 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад. В перечисленных работах, которые опубликованы в соавторстве, соискателю принадлежат: [1] – построение разностной схемы конечно-разностного аналога дифференциальной системы; [2] – построение и обоснование двухслойной разностной схемы по временному переменному; [4] – алгоритм отыскания приближенного решения двухслойной разностной схемы по временному переменному; [5] – пути построения разностных схем начальной задачи для неоднородного уравнения переноса тепла; [6] – построение и обоснование трехслойной разностной схемы по временному переменному.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа содержит 266 страницы текста, 70 рисунков и 131 таблиц, список литературы состоит из 110 источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, указаны теоретическая и практическая значимость исследования, изложена научная новизна, сформулирована цель и поставлены задачи исследования, приведены положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** рассматриваются примеры природных и искусственных физических, биологических и иных процессов, которые будем определять как сетеподобные эволюционные процессы. Предложены новые пути исследования многофазных физических процессов, прежде всего процессов переноса и волновых процессов, а также различного рода процессы, проходящие в слоистых (многослойных) сплошных средах. Эти пути включают в себя новые принципы формирования математических моделей указанных процессов в терминах разностных схем дискретных аналогов краевых задач для дифференциальных уравнений, физические переменные которых изменяются в сетеподобной области евклидова пространства R^n , $n = 1, 2, 3$.

Во **второй главе** рассматриваются аппроксимации эволюционных процессов переноса и волновых процессов применительно к дифференциальным системам с распределенными параметрами на сетях $\mathfrak{Z} \subset R^1$ и сетеподобных областях $\mathfrak{Z} \subset R^n$, $n = 2, 3$.

Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^n$, $n = 1, 2, 3$, которая представляет собой связное множество подобластей \mathfrak{Z}_k , $k = \overline{1, M}$; $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$, $\partial \mathfrak{Z}_T = \partial \mathfrak{Z} \times (0, T)$, $\partial \mathfrak{Z}$ – граница \mathfrak{Z} (рис. 1). Частями границ $\partial \mathfrak{Z}_k$ осуществляется примыкание подобластей \mathfrak{Z}_k друг к другу.

Поместим начало $O(0, \dots, 0)$ системы координат $(0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, 3$) в область \mathfrak{Z} и построим гиперплоскости координатных осей Ox_κ ($\kappa = \overline{1, n}$) вида

$$\begin{aligned} Ox_1 : x_1 = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, \\ Ox_2 : x_2 = i_2 h_2, i_2 = \overline{0, N_2}, \\ \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$Ox_n : x_n = i_n h_n, i_n = \overline{0, N_n},$$

где h_n ($n = 1, 2, 3$) – шаги разбиений осей (для простоты считаем $h_1 = h_2 = h_3 = h$).

Сетками $\omega^{\mathfrak{Z}}$, $\omega^{\mathfrak{Z}_k}$ и ω^{S_l} областей \mathfrak{Z} , \mathfrak{Z}_k и поверхностей S_l называются множество точек пересечения гиперплоскостей вида (1), принадлежащих областям \mathfrak{Z} , \mathfrak{Z}_k и поверхностям S_l , соответственно (здесь $k = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, L}$); сеткой $\omega^{\partial \mathfrak{Z}}$ границы $\partial \mathfrak{Z}$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей (1), принадлежащих этой границе. Таким образом, $\omega^{\mathfrak{Z}} = \omega^{\mathfrak{Z}_k} \cup \omega^{S_l}$, $\omega^{\partial \mathfrak{Z}} = \omega^{\mathfrak{Z}} \cup \omega^{\partial \mathfrak{Z}}$. С шагом $\tau = T/K$ вводится сетка $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, K}\}$ на отрезке $[0, T]$ и сетка $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, K-1}\}$ на интервале $(0, T)$, тогда для \mathfrak{Z}_T , $\bar{\mathfrak{Z}}_T$ вводятся сетки $\omega^{\mathfrak{Z}_T} = \omega^{\mathfrak{Z}} \times \omega_\tau$, $\omega^{\bar{\mathfrak{Z}}_T} = \omega^{\bar{\mathfrak{Z}}} \times \bar{\omega}_\tau$. Функции, определенные на сетке $\omega^{\mathfrak{Z}_T}$ или $\omega^{\bar{\mathfrak{Z}}_T}$, называются сеточными функциями.

Все рассуждения проводятся для сетеподобной области $\mathfrak{Z} \subset R^n$, $n = 2, 3$. Аналогичные рассуждения справедливы и для $\mathfrak{Z} \subset R^1$ ($n = 1$).

Учитывая свойство многофазности эволюционных процессов, для математического описания используется класс суммируемых (интегрируемых) функций – допускается отсутствие непрерывности в области \mathfrak{Z} исходных фиксированных функций.

Представлены конечномерные или дискретные аналоги (двух- и трехслойные разностные схемы) для дифференциальных систем в области $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad (L1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Lu = f(x, t), \quad (L2)$$

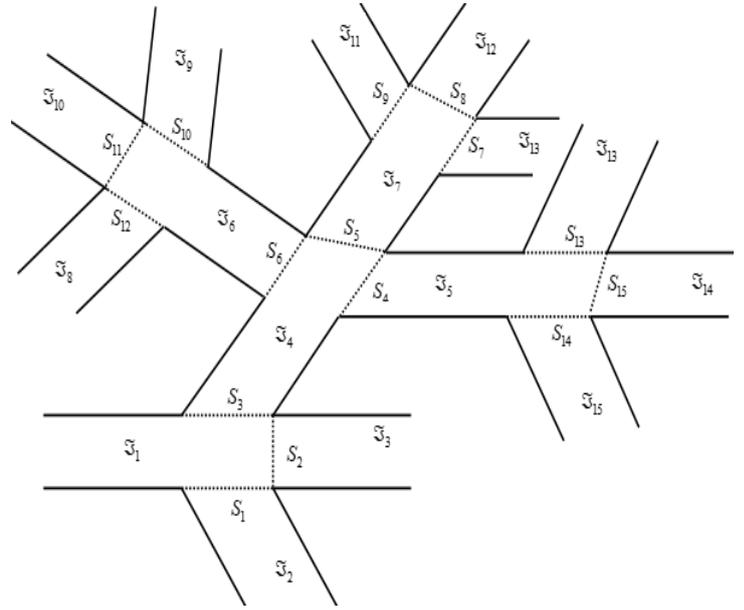


Рис. 1. Структура области \mathfrak{Z}

формализмами которых описываются сетеподобные эволюционные процессы переноса и волновые процессы;
$$Lu = - \sum_{\kappa, l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left(a_{\kappa l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + b(x)u, \quad a_{\kappa l}(x) = a_{l\kappa}(x), \quad 0 < a_* \leq a_{\kappa l}(x) \leq a^*,$$

 $|b(x)| \leq \beta < \infty.$

В целях упрощения представления дальнейших рассуждений символьные обозначения сеточных функций остаются неизменными для обозначений функций, которые используются в дифференциальных выражениях. К примеру, используются символика сеточной функции $(u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j)$ и ее элементов $u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $i_{\kappa} = \overline{0, N_{\kappa}}$, $\kappa = \overline{1, n}$, для функции $u(x, t)$, а также представление

$$Lu_{\mathfrak{S}_k} \sim L_h u_{\mathfrak{S}_k} = \sum_{\kappa, l=1}^n \frac{1}{h} \left[a_{\kappa l i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} \frac{u_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j - u_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}, \dots, i_{l-1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j}{h} - a_{\kappa l i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} \frac{u_{i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j - u_{i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_{l-1}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j}{h} \right] + b_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j,$$

$$i_{\kappa} = \overline{1, N_{\kappa} - 1}, i_l = \overline{1, N_l}, k = \overline{1, M}.$$

Сеточные функции $a_{\kappa l i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}$, $b_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}$, соответствующие исходным фиксированным функциям $a_{\kappa l}(x)_{\mathfrak{S}_k}$, $b(x)_{\mathfrak{S}_k}$, формируются в силу соотношений

$$a_{\kappa l i_1, \dots, i_{\kappa}, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} a_{\kappa l}(x)_{\mathfrak{S}_k} dx, \quad b_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} b(x)_{\mathfrak{S}_k} dx,$$

здесь $R_{ih}^{\mathfrak{S}_k} = \{x \in \mathfrak{S}_k : |x - x_i| < h\}$, $|x - x_i|$ – норма в R^n .

1. Для системы переноса ($L1$) рассмотрен конечномерный аналог – двухслойная разностная схема с вещественным весом (параметром) σ , т.е. множество разностных схем:

$$u_{t \mathfrak{S}_k} + L_h u_{\mathfrak{S}_k}^{(\sigma)} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M}, \quad (2)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \partial \mathfrak{S}_k}^j = 0, \quad (3)$$

где $f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k} \tau} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} f(x, t)_{\mathfrak{S}_k} dx dt$, $\varphi_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \varphi(x)_{\mathfrak{S}_k} dx$; параметр σ

определен выражением $u^{(\sigma)} = \sigma \hat{u} + (1 - \sigma) \bar{u}$, где $\hat{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j+1}$, $\bar{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$, $u_t = (\hat{u} - \bar{u})/\tau$, а также – конечномерный аналог (трехслойная разностная симметричная схема с вещественным весом σ):

$$u_{t \mathfrak{S}_k}^{(\sigma)} + L_h u_{\mathfrak{S}_k}^{(\sigma)} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M}, \quad (4)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^0 = \varphi_{0 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}, \quad u_{i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k}^1 = \varphi_{1 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k},$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \partial \mathfrak{S}_k}^j = 0, \quad (5)$$

$\varphi_{0 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \varphi_0(x)_{\mathfrak{S}_k} dx$, $\varphi_{1 i_1, i_2, \dots, i_n \mathfrak{S}_k} = \frac{1}{meas R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \int_{R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}} \varphi_1(x)_{\mathfrak{S}_k} dx$, имеют место обозначения

$u^{(\sigma)} = \sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma) \bar{u} + \sigma \check{u}$, $\check{u} = u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j-1}$, $u_{t \mathfrak{S}_k} = (\hat{u} - \check{u})/2\tau$.

2. Для волновой системы ($L2$) рассмотрен конечномерный аналог (трехслойная разностная симметричная схема) вида

$$u_{\bar{\pi}\bar{\mathfrak{S}}_k} + L_h \hat{u}_{\bar{\mathfrak{S}}_k} = f_{i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\mathfrak{S}}_k}^j, \quad j = \overline{1, K-1}, k = \overline{1, M}, \quad (6)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\mathfrak{S}}_k}^0 = \varphi_{0, i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\mathfrak{S}}_k}, \quad u_{i_0 \bar{\mathfrak{S}}_k} = \varphi_{1, i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\mathfrak{S}}_k}, \quad (7)$$

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n \bar{\mathfrak{S}}_k}^j = 0,$$

где $u_{\bar{\pi}} = (\hat{u} - 2\bar{u} + \bar{\bar{u}})/\tau^2$, $u_{i_0} = (u^1 - u^0)/\tau$.

Замечание 1. Использование окрестностей $R_{ih}^{\bar{\mathfrak{S}}_k}$ в представлениях конечномерных аналогов (разностных схем) определяет усреднения исходных функций и является результатом свойства многофазности изучаемого процесса. В классическом случае значения исходных сеточных функций определяются в силу свойства непрерывности этих функций.

Третья глава посвящена обоснованию разработанных числительных методов и алгоритмов, а именно, отысканию достаточных условий устойчивости разностных схем и корректности построения конечномерных аналогов для систем (L1) и (L2) с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области $\mathfrak{S} \subset R^n$ ($n=1,2,3$). В разделах 3.2 и 3.3 данной главы приведено точные определение и анализ устойчивости двухслойной¹⁾ и трехслойной²⁾ разностных схем, здесь же ограничимся основополагающим в приложениях свойством устойчивости по исходным данным, к каковым относятся функции $a_{\kappa l}(x)_{\bar{\mathfrak{S}}_k}$, $b(x)_{\bar{\mathfrak{S}}_k}$ ($\kappa, l=1,2,3$, $k = \overline{1, M}$) и $f(x, t)$.

1. Двухслойная разностная схема (2) называется устойчивой

1) по начальным данным φ , если для задачи $u_t + L_h u^{(\sigma)} = 0$, $u^0 = \varphi$,

$$\|u^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|\varphi\|_{(1,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) по правой части f^j , если для задачи $u_t + L_h u^{(\sigma)} = f^j$, $u^0 = 0$,

$$\|u^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

здесь через $\|u^{j+1}\|_{(1,h)}$, $\|\varphi\|_{(1,h)}$, $\|f^j\|_{(2,h)}$ обозначены используемые нормы в пространствах исходных данных, шаги h , τ , $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от h , τ , φ , f^j . Двухслойная разностная схема (2) называется устойчивой по исходным данным, если для нее имеет место устойчивость по начальным данным и правой части.

Для изучения устойчивости трехслойной схемы (4) используется составная норма вида

$$\|U^{j+1}\|^2 = \frac{1}{4} \|u^{j+1} + u^j\|_{(1,h)}^2 + \|u^{j+1} - u^j\|_{(2,h)}^2, \quad j = \overline{1, K-1},$$

$$\|U^1\|^2 = \frac{1}{4} \|u^1 + u^0\|_{(1,h)}^2 + \|u^1 - u^0\|_{(2,h)}^2,$$

как и выше, через $\|u^{j+1} + u^j\|_{(1,h)}$, $\|u^{j+1} - u^j\|_{(2,h)}$ ($j = \overline{0, K-1}$) обозначены используемые нормы в пространствах исходных данных.

2. Трехслойная схема (4) называется устойчивой

1) по начальным данным φ_0 , φ_1 , если для задачи $u_{t^0} + L_h u^{(\sigma)} = 0$, $u^0 = \varphi_0$, $u^1 = \varphi_1$

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_1 \|U^1\|_{(2,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

2) по правой части f^j , если для задачи $u_{t^0} + L_h u^{(\sigma)} = f^j$, $u^0 = u^1 = 0$

$$\|U^{j+1}\|_{(1,h)} \leq C_2 \|f^j\|_{(3,h)}, \quad j = \overline{1, K-1},$$

¹⁾Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – с.357

²⁾Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – с.385

$C_1 = const > 0$, $C_2 = const > 0$ не зависят от h , τ , φ_0 , φ_1 , f^j . Трехслойная разностная схема (4) называется устойчивой по исходным данным, если для нее имеет место устойчивость по начальным данным и правой части.

3. Для трехслойная схема (6) вводится определение устойчивости, аналогичное 2.

Следует отметить, как вытекает из определений, что по сути своей устойчивая разностная схема обладает следующим свойством: малые изменения исходных данных (к таковым относятся начальные данные, внешние воздействия, иные априорные данные) влекут малое изменение решения разностной схемы.

Установлены следующие достаточные условия устойчивости однопараметрических множеств двух- и трехслойных разностных схем (2) и (4): если $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|L_h\|}$, где $\|L_h\|$ – определенная (выбранная) матричная норма конечномерного аналога дифференциального оператора L , то схема (2) устойчива по исходным данным φ и f^j ; если $\sigma > \frac{1}{4}$, то схемы (4) и (6) устойчивы по исходным данным φ_0 , φ_1 и f^j .

Как показывают численные эксперименты при достаточно малом выборе шагов для пространственных и временной переменных (или выполнений определенных условий, связующих эти шаги) из устойчивости разностной схемы и из достаточной точности аппроксимации схемы следует сходимость (условная сходимость) разностной схемы, т.е. ее корректность (условная корректность) построения конечномерных аналогов для ($L1$) и ($L2$). Выполнение свойства устойчивости дает возможность определить также границы изменения весовых параметров, если от таковых зависит разностная схема (т.е. на практике рассматривается параметрическая совокупность разностных схем с целью выбора оптимального значения параметра для конечномерных аналогов).

В четвертой главе представлена реализация численных методов и алгоритмов в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента, учитывая разного типа носителей сетеподобных процессов; используется среда Matlab.

Структура программного комплекса

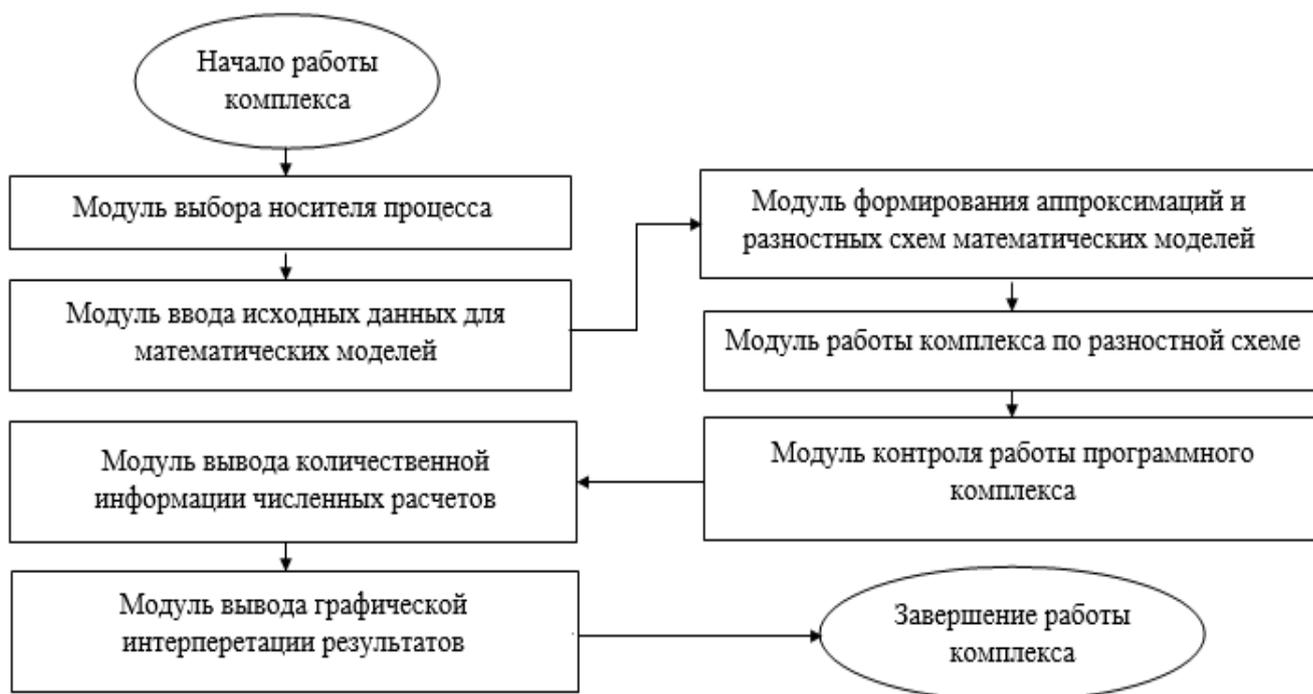
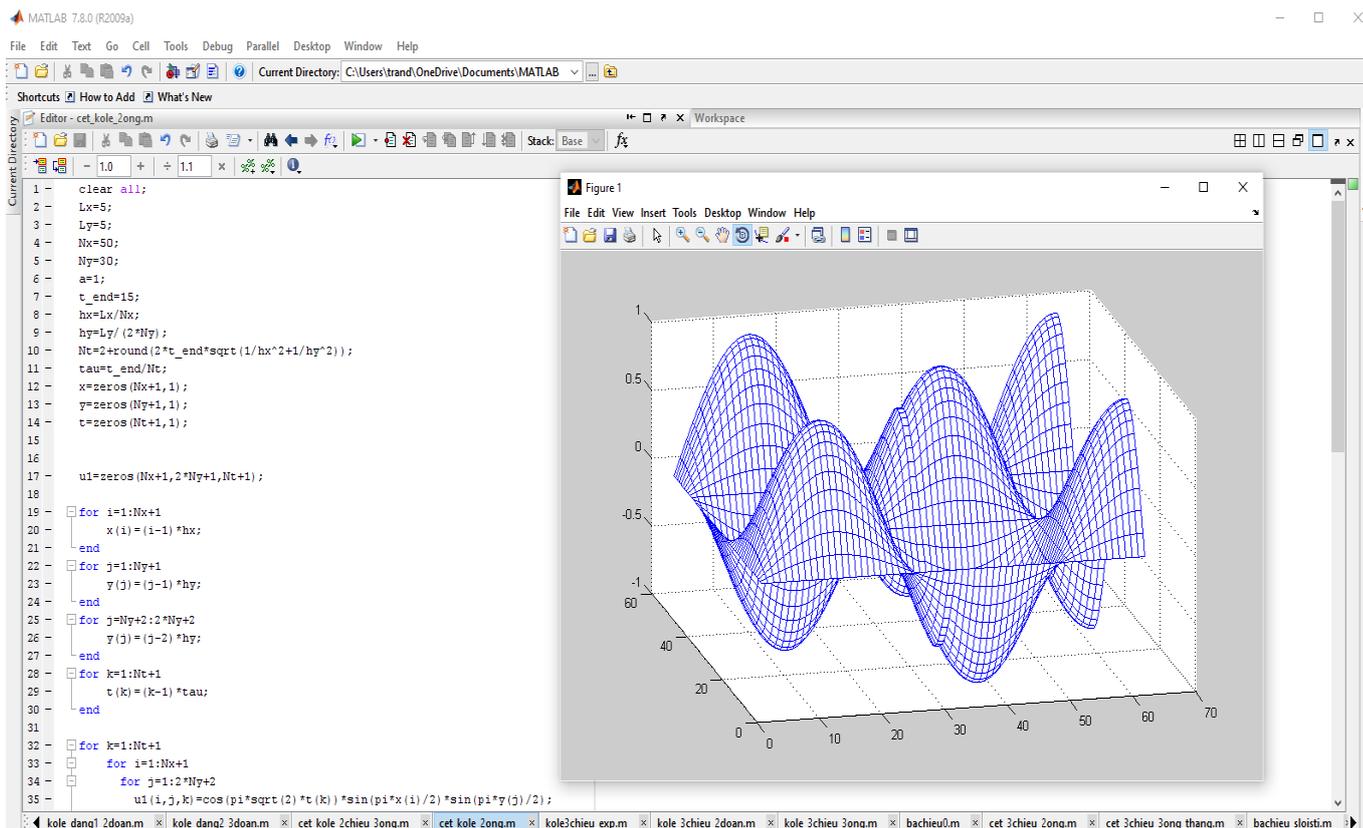


Рис. 2. Общая схема программного комплекса

Пользовательский интерфейс



Структура основных модулей программного комплекса

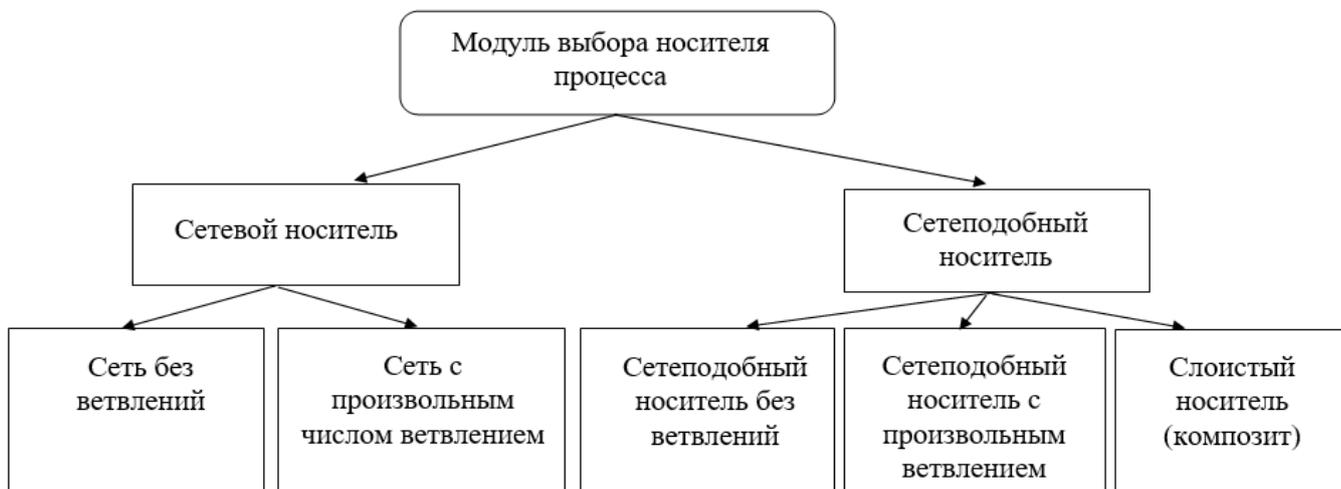


Рис. 3. Модуль выбора носителя процесса

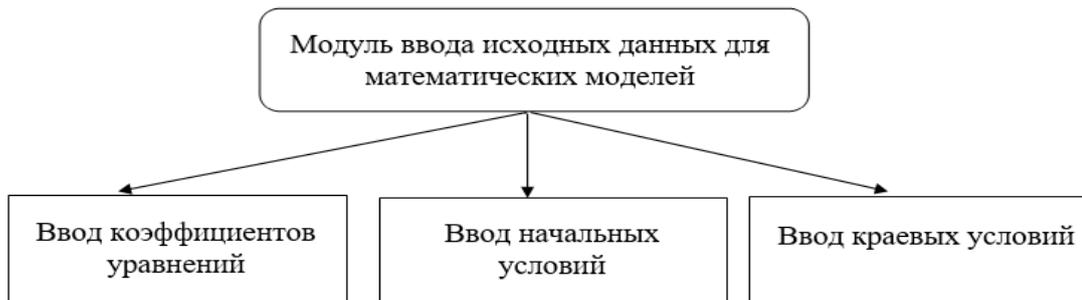


Рис. 4. Модуль ввода исходных данных для математических моделей

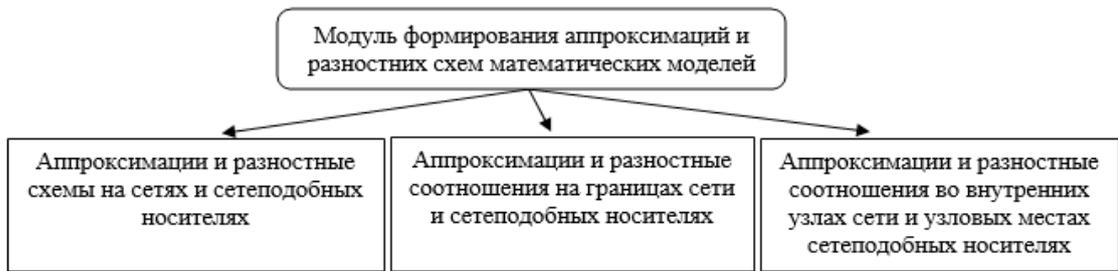


Рис. 5. Модуль формирования аппроксимаций и разностных схем математических моделей

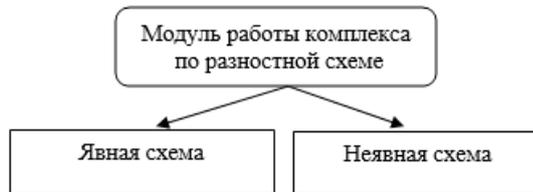


Рис. 6. Модуль разностной схемы

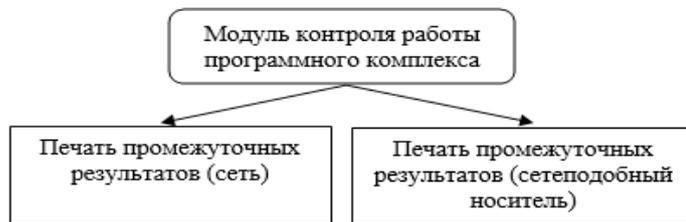


Рис. 7. Модуль контроля



Рис. 8. Модуль вывода численных расчетов



Рис. 9. Модуль графической интерперетации результатов

Ниже приведены примеры для иллюстрации работы программного комплекса в части построения приближенных решений различных задач численного анализа математических моделей эволюционных процессов с пространственной переменной в R^n ($n=2, 3$). В диссертационной работе рассмотрены и частные случаи, когда переменная принадлежит R^1 .

Результаты практической апробации

Перенос сплошной среды в двухмерной сети

Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^2$ (рис. 10), состоящая из подобластей \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1, 3}$) и двух поверхностей примыкания S_1 и S_2 .

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением (L1) при $n=2$, соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

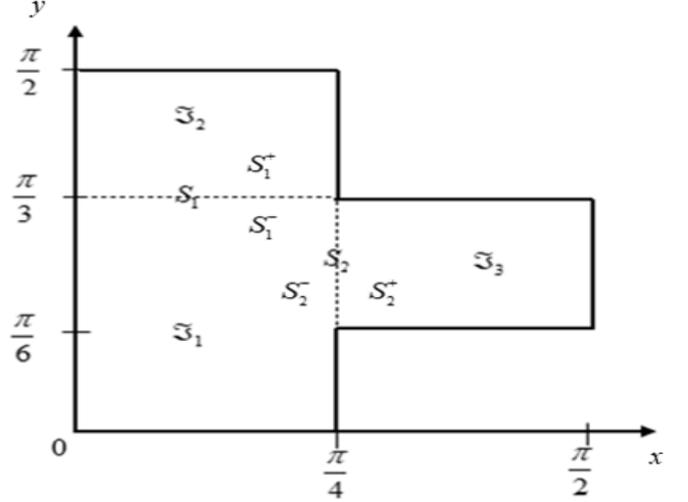


Рис. 10. Структура области \mathfrak{Z}

$$u(x, y, t)|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} = u(x, y, t)|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-},$$

$$u(x, y, t)|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = u(x, y, t)|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-},$$

и соотношениями

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \cos x \cos y, \quad x, y \in \mathfrak{Z}, \quad u(x, y, t)|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = e^{-2t} \cos y, \quad u(x, y, t)|_{x=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} \cos y,$$

$$u(x, y, t)|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{Z}_3} = 0, \quad u(x, y, t)|_{y=0 \in \mathfrak{Z}_1} = e^{-2t} \cos x, \quad u(x, y, t)|_{y=\frac{\pi}{6} \in \mathfrak{Z}_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2t} \cos x,$$

$$u(x, y, t)|_{y=\frac{\pi}{3} \in \mathfrak{Z}_3} = \frac{1}{2} e^{-2t} \cos x, \quad u(x, y, t)|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{Z}_2} = 0.$$

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи формирует разностную схему (2) при $n=2$, разностные отношения на поверхностях S_1 и S_2 , начальные и краевые условия:

$$\left(u_{i, N_2}^{j+1}\right)_{S_1^-} = \left(u_{i, 0}^{j+1}\right)_{S_1^+}, \quad \frac{\left(u_{i, N_2}^{j+1}\right)_{S_1^-} - \left(u_{i, N_2-1}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{\left(u_{i, 1}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_2} - \left(u_{i, 0}^{j+1}\right)_{S_1^+}}{h_2},$$

$$\left(u_{N_1, i_2}^{j+1}\right)_{S_2^-} = \left(u_{0, i_2}^{j+1}\right)_{S_2^+}, \quad \frac{\left(u_{N_1, i_2}^{j+1}\right)_{S_2^-} - \left(u_{N_1-1, i_2}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{\left(u_{1, i_2}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_3} - \left(u_{0, i_2}^{j+1}\right)_{S_2^+}}{h_1},$$

$$\left(u_{i, i_2}^0\right)_{\mathfrak{Z}_k} = \cos(x_{i_1}) \cos(y_{i_2}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\left(u_{0, i_2}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), \quad \left(u_{N_1, i_2}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(y_{i_2}), \quad \left(u_{N_1, i_2}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_3} = 0,$$

$$\left(u_{i, 0}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_1} = e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad \left(u_{i, 0}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad \left(u_{i, N_2}^{j+1}\right)_{\mathfrak{Z}_3} = \frac{1}{2} e^{-2t_{j+1}} \cos(x_{i_1}), \quad \left(u_{i, N_2}^{j+1}\right)_{S_2} = 0.$$

Используемые параметры следующие: $a(x, y) = x + y$, $b(x, y) = 0$, $f(x, y, t) = 0$, $h_1 = 0.0524$, $h_2 = 0.0349$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Сеточная функция a_{i_1, i_2} строится по заданной функции $a(x, y)$ в соответствии с соотношением (усреднение по окрестностям $R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}$): $a_{i_1, i_2} = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{i_1 h_1}^{(i_1+1)h_1} \int_{i_2 h_2}^{(i_2+1)h_2} a(x, y) dx dy$.

Графическое изображение температурного поля – на рис. 11.

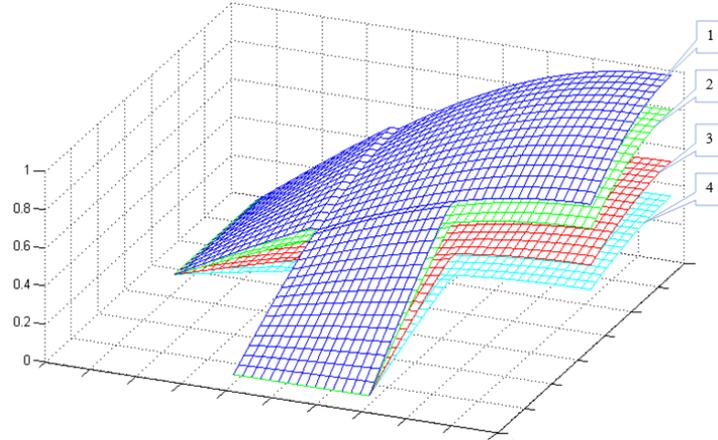


Рис. 11. Распределение температур на подобластях \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1,3}$) при различных значениях t : [1]–0; [2]–0.1; [3]–0.3; [4]–0.5

Перенос сплошной среды в трехмерной сети

Пусть область $\mathfrak{S} \subset R^3$ структурирована подобластями \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1,3}$) вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 12).

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением (L1) при $n = 3$, соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

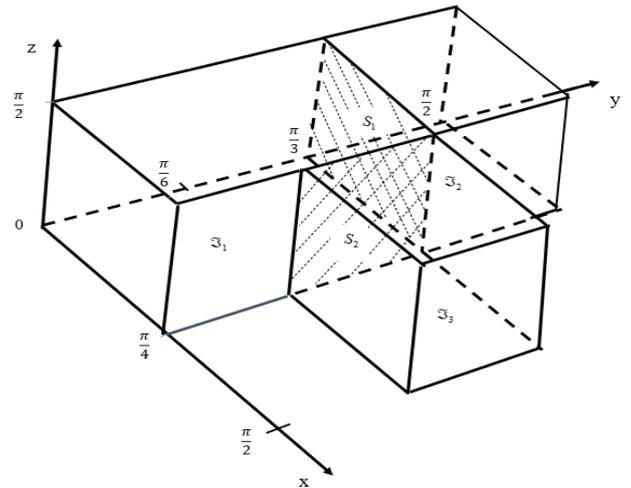


Рис. 12. Структура области \mathfrak{S}

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-}, \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in S_1^-},$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in S_2^-},$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = xyz \cos x, \quad x, y, z \in \mathfrak{S},$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad k = \overline{1,3}, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{4} \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{4} e^{-t} zy \cos \frac{\pi}{4} - 2te^{-t} zy \sin \frac{\pi}{4},$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_3} = -2te^{-t} yz, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{6} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{6} e^{-t} zx \cos x - \frac{\pi}{3} te^{-t} z \sin x,$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{3} \in \mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{3} e^{-t} z x \cos x - \frac{2\pi}{3} t e^{-t} z \sin x, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_2} = \frac{\pi}{2} e^{-t} z x \cos x - \pi t e^{-t} z \sin x,$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t) \Big|_{z=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t} y x \cos x - \pi t e^{-t} y \sin x.$$

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи формирует разностную схему (2) при $n = 3$, разностные отношения на поверхностях S_1 и S_2 , начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned} (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_1^-} &= (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1, i_3}^{j+1})_{S_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^{j+1})_{S_2} - (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{S_1^+}}{h_2}, \\ (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^-} &= (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^-} - (u_{N_1-1, i_2, i_3}^{j+1})_{S_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2, i_3}^{j+1})_{S_3} - (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{S_2^+}}{h_1}, \\ (u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k} &= x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} \cos(x_{i_1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad k = \overline{1, 3}, \\ (u_{0, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} &= 0, \quad (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3} - \sqrt{2}\pi e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3}, \\ (u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} &= -2t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3}, \quad (u_{i_1, 0, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_1} = 0, \quad (u_{i_1, i_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} = \frac{\pi}{6} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \frac{\pi}{3} t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\ (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_3} &= \frac{\pi}{3} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \frac{2\pi}{3} t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\ (u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_2} &= \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\ (u_{i_1, i_2, 0}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} &= 0, \quad (u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1})_{\mathfrak{S}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} y_{i_2} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} \sin(x_{i_1}). \end{aligned}$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = xyz$, $b(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z, t) = 0$, $h_1 = 0.0524$, $h_2 = 0.0524$, $h_3 = 0.0524$, $\tau = 10^{-3}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Сеточная функция a_{i_1, i_2, i_3} строится по заданной функции $a(x, y, z)$ в соответствии с соотношением (усреднение по окрестностям $R_{ih}^{\mathfrak{S}_k}$):

$$a_{i_1, i_2, i_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \int_{i_1 h_1}^{(i_1+1)h_1} \int_{i_2 h_2}^{(i_2+1)h_2} \int_{i_3 h_3}^{(i_3+1)h_3} a(x, y, z) dx dy dz.$$

Графическое изображение температурного поля – на рис. 13 и 14 для временных значений t в сечении z .

Замечание 2. В диссертационном исследовании для примеров 2 и 3 использовались также трехслойные схемы (4).

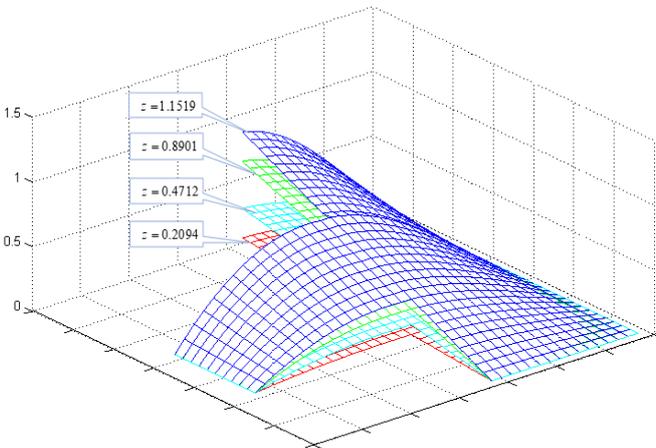


Рис. 13. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 0$ в сечении z

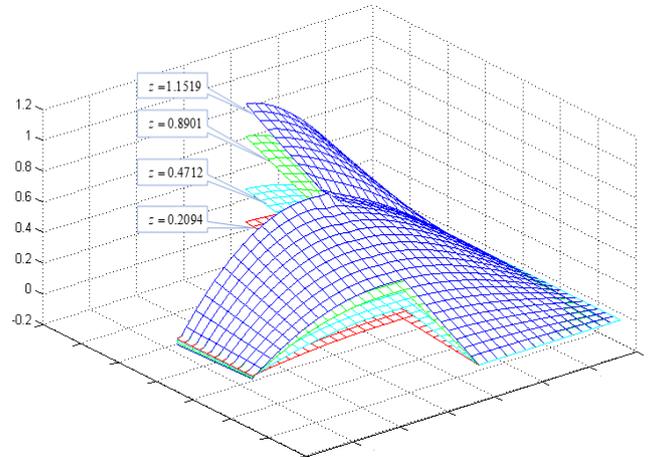


Рис. 14. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 0.02$ в сечении z

Колебания упругой сложносочлененной конструкции в двумерной сети

Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^2$ структурирована подобластями $\mathfrak{Z}_k (k = \overline{1,3})$ вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 15).

Количественные характеристики $u(x, y, t)$ волнового процесса в носителе процесса определяются уравнением (L2) при $n=2$, соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

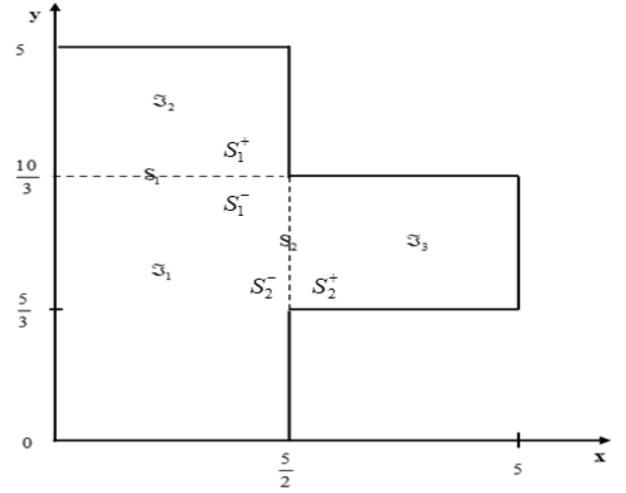


Рис. 15. Структура области \mathfrak{Z}

$$u(x, y, t)|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^+} = u(x, y, t)|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{10}{3} \in S_1^-},$$

$$u(x, y, t)|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^+} = u(x, y, t)|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{5}{2} \in S_2^-},$$

и соотношениями

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x, y \in \mathfrak{Z},$$

$$u(x, y, t)|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = 0, \quad u(x, y, t)|_{x=\frac{5}{2} \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right),$$

$$u(x, y, t)|_{x=5 \in \mathfrak{Z}_3} = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad u(x, y, t)|_{y=0 \in \mathfrak{Z}_1} = 0, \quad u(x, y, t)|_{y=\frac{5}{3} \in \mathfrak{Z}_3} = \frac{1}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

$$u(x, y, t)|_{y=\frac{10}{3} \in \mathfrak{Z}_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad u(x, y, t)|_{y=5 \in \mathfrak{Z}_2} = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи формирует разностную схему (6) при $n=2$, разностные отношения на поверхностях S_1 и S_2 , начальные и краевые условия:

$$(u_{i_1, N_2}^j)_{S_1^-} = (u_{i_1, 0}^j)_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2}^j)_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1}^j)_{\mathfrak{Z}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1}^j)_{\mathfrak{Z}_2} - (u_{i_1, 0}^j)_{S_1^+}}{h_2},$$

$$(u_{N_1, i_2}^j)_{S_2^-} = (u_{0, i_2}^j)_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{N_1, i_2}^j)_{S_2^-} - (u_{N_1-1, i_2}^j)_{\mathfrak{Z}_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2}^j)_{\mathfrak{Z}_3} - (u_{0, i_2}^j)_{S_2^+}}{h_1},$$

$$(u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{Z}_k} = \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right), \quad \frac{(u_{i_1, i_2}^1)_{\mathfrak{Z}_k} - (u_{i_1, i_2}^0)_{\mathfrak{Z}_k}}{\tau} = 0, \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{1,3}$$

$$(u_{0, i_2}^j)_{\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = 0, \quad (u_{N_1, i_2}^j)_{\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right),$$

$$(u_{N_1, i_2}^j)_{\mathfrak{Z}_3} = \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi y_{i_2}}{2}\right), \quad (u_{i_1, 0}^j)_{\mathfrak{Z}_1} = 0, \quad (u_{i_1, 0}^j)_{\mathfrak{Z}_3} = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right),$$

$$(u_{i_1, N_2}^j)_{\mathfrak{Z}_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right), \quad (u_{i_1, N_2}^j)_{\mathfrak{Z}_2} = \cos(\sqrt{2}\pi t_j) \sin\left(\frac{\pi x_{i_1}}{2}\right).$$

Исходные параметры: $a(x, y) = 4$, $b(x, y) = 0$, $f(x, y, t) = 0$, $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.0556$, $\tau = 0.0185$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение волнового поля – на рис. 16, 17 для временных значений t .

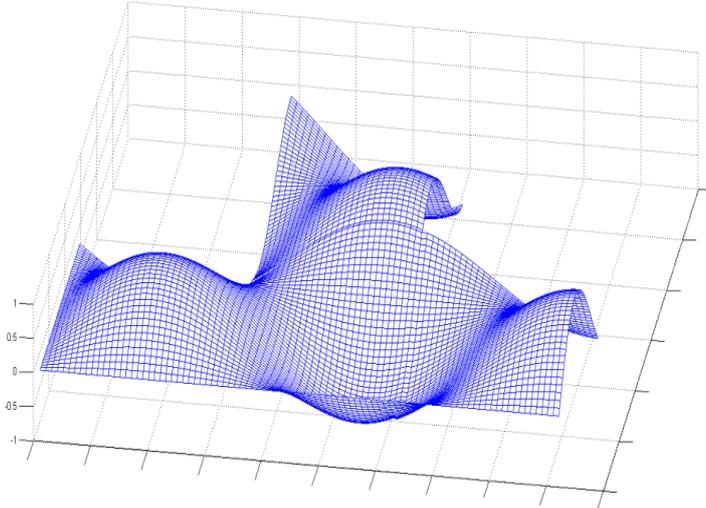


Рис. 16. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 0$

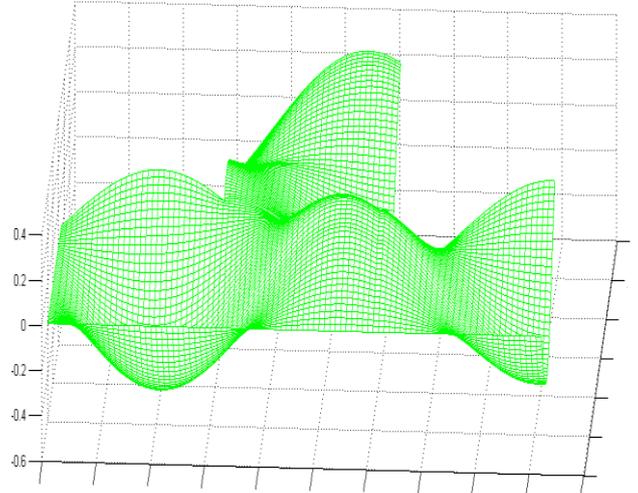


Рис. 17. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, t)$ при $t = 1.85$

Колебания упругой сложносочлененной конструкции в трехмерной сети

Пусть область $\mathfrak{Z} \subset R^3$ структурирована подобластями \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1, 3}$) вместе с поверхностями S_1 и S_2 (рис. 18).

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ волнового процесса в носителе процесса определяются уравнением (L2) при $n = 3$, соотношениями на поверхностях S_1 и S_2

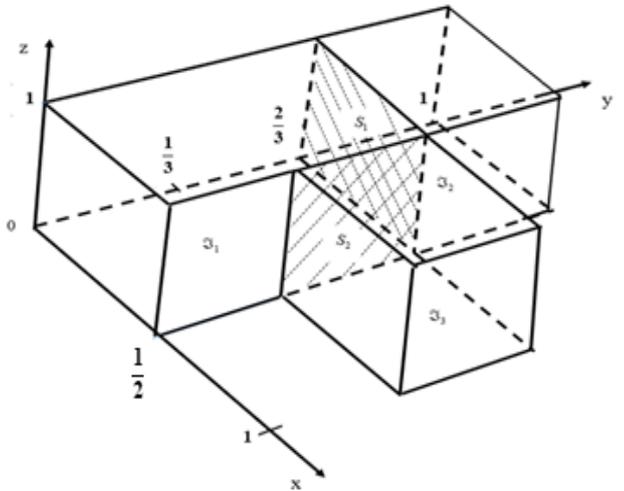


Рис. 18. Структура области \mathfrak{Z}

$$u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{2}{3} \in S_1^-},$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^+} = u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in S_2^-}$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) e^{-z^2}, \quad \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x, y, z \in \mathfrak{Z},$$

$$u(x, y, z, t) \Big|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = -y^3 \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{6}\right), \quad u(x, y, z, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2} = \left(\frac{1}{4} y - \frac{y^3}{3}\right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t)|_{x=1 \in \mathfrak{S}_3} &= \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad u(x, y, z, t)|_{y=0 \in \mathfrak{S}_1} = 0, \\
u(x, y, z, t)|_{y=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_3} &= \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \\
u(x, y, z, t)|_{y=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3} &= \left(\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \\
u(x, y, z, t)|_{y=1 \in \mathfrak{S}_2} &= \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \right), \quad u(x, y, z, t)|_{z=0 \in \mathfrak{S}_k} = e^{-t^2} \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right), \\
u(x, y, z, t)|_{z=1 \in \mathfrak{S}_k} &= \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(1+t)^2} + e^{-(1-t)^2}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи формирует разностную схему (6) при $n=3$, разностные отношения на поверхностях S_1 и S_2 , начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned}
(u_{i_1, N_2, i_3}^j)_{S_1^-} &= (u_{i_1, 0, i_3}^j)_{S_1^+}, \quad \frac{(u_{i_1, N_2, i_3}^j)_{S_1^-} - (u_{i_1, N_2-1, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_1}}{h_2} = \alpha_1 \frac{(u_{i_1, 1, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_2} - (u_{i_1, 0, i_3}^j)_{S_1^+}}{h_2}, \\
(u_{N_1, i_2, i_3}^j)_{S_2^-} &= (u_{0, i_2, i_3}^j)_{S_2^+}, \quad \frac{(u_{N_1, i_2, i_3}^j)_{S_2^-} - (u_{N_1-1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_1}}{h_1} = \alpha_2 \frac{(u_{1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_3} - (u_{0, i_2, i_3}^j)_{S_2^+}}{h_1}, \\
(u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k} &= \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) e^{-z_{i_3}^2}, \quad \frac{(u_{i_1, i_2, i_3}^1)_{\mathfrak{S}_k} - (u_{i_1, i_2, i_3}^0)_{\mathfrak{S}_k}}{\tau} = 0, \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad k = \overline{1, 3}, \\
(u_{0, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} &= -\frac{1}{6} y_{i_2}^3 \left(e^{-(z_{i_3}+t_j)^2} + e^{-(z_{i_3}-t_j)^2} \right), \quad (u_{N_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2} = \left(\frac{1}{4} y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3}+t_j)^2} + e^{-(z_{i_3}-t_j)^2}}{2} \right), \\
(u_{N_1, i_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_3} &= \left(y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3}+t_j)^2} + e^{-(z_{i_3}-t_j)^2}}{2} \right), \quad (u_{i_1, 0, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_1} = 0, \\
(u_{i_1, 0, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_3} &= \left(\frac{1}{3} x_{i_1}^2 - \frac{1}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3}+t_j)^2} + e^{-(z_{i_3}-t_j)^2}}{2} \right), \\
(u_{i_1, N_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_3} &= \left(\frac{2}{3} x_{i_1}^2 - \frac{8}{81} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3}+t_j)^2} + e^{-(z_{i_3}-t_j)^2}}{2} \right), \\
(u_{i_1, N_2, i_3}^j)_{\mathfrak{S}_2} &= \left(x_{i_1} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{e^{-(z_{i_3}+t_j)^2} + e^{-(z_{i_3}-t_j)^2}}{2} \right), \\
(u_{i_1, i_2, 0}^j)_{\mathfrak{S}_k} &= e^{-t_j^2} \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right), \quad (u_{i_1, i_2, N_3}^j)_{\mathfrak{S}_k} = \left(x_{i_1}^2 y_{i_2} - \frac{y_{i_2}^3}{3} \right) \left(\frac{e^{-(1+t_j)^2} + e^{-(1-t_j)^2}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z, t) = 0$, $h_1 = 0.0333$, $h_2 = 0.0333$, $h_3 = 0.0333$, $\tau = 0.0185$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Графическое изображение волнового поля – на рис. 19, 20 для временных значений t в сечении z .

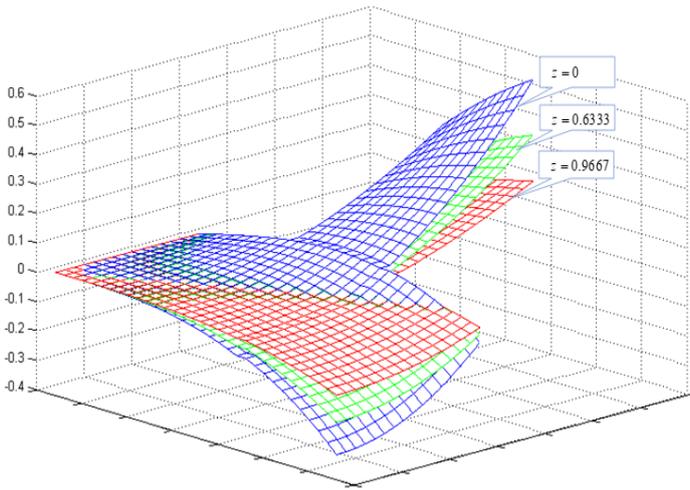


Рис. 19. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, z, t)$ при $t=0$ в сечении z

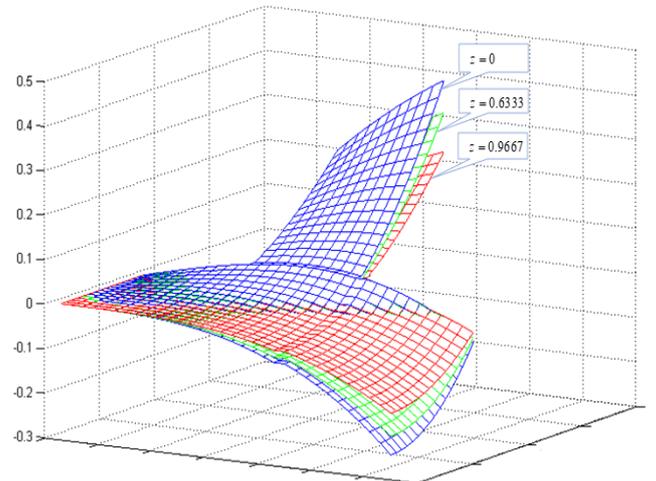


Рис. 20. Изменение амплитуд колебаний $u(x, y, z, t)$ при $t=0.537$ в сечении z

Перенос теплоты в слоистой области

Пусть слоистая область $\mathfrak{Z} \subset R^3$ структурирована подобластями \mathfrak{Z}_k ($k = \overline{1,4}$) вместе с поверхностями S_1 , S_2 и S_3 (рис. 21).

Количественные характеристики $u(x, y, z, t)$ процесса переноса в носителе процесса определяются уравнением (L1) при $n=3$, соотношениями на S_1 , S_2 и S_3

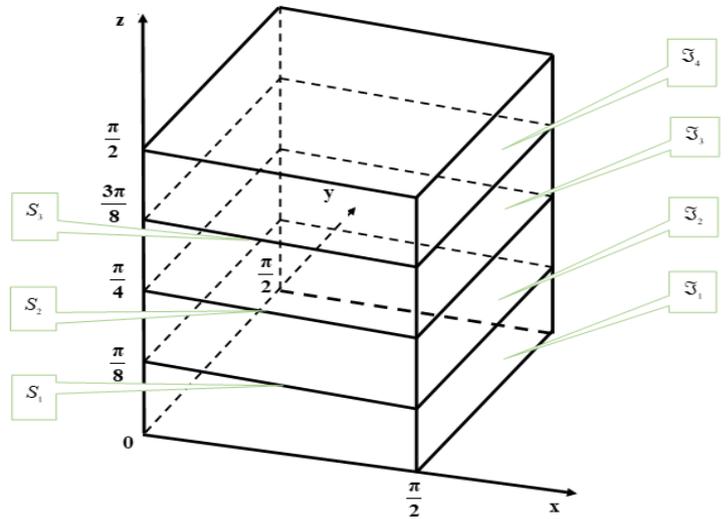


Рис. 21. Структура области \mathfrak{Z}

$$u(x, y, z, t)|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^+} = u(x, y, z, t)|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^-}, \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^+} = \alpha_1 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{8} \in S_1^-},$$

$$u(x, y, z, t)|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = u(x, y, z, t)|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^-}, \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^+} = \alpha_2 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4} \in S_2^-},$$

$$u(x, y, z, t)|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^+} = u(x, y, z, t)|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^-}, \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^+} = \alpha_3 \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{3\pi}{8} \in S_3^-},$$

и соотношениями

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = xyz \cos x, \quad x, y, z \in \mathfrak{Z}, \quad u(x, y, z, t)|_{x=0 \in \mathfrak{Z}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t)|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2te^{-t}yz,$$

$$u(x, y, z, t)|_{y=0 \in \mathfrak{Z}_k} = 0, \quad u(x, y, z, t)|_{y=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{Z}_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xz \cos x - \pi te^{-t}z \sin x,$$

$$u(x, y, z, t)|_{z=0 \in \mathfrak{Z}_1} = 0, \quad u(x, y, z, t)|_{z=\frac{\pi}{2} \in \mathfrak{Z}_4} = \frac{\pi}{2} e^{-t}xy \cos x - \pi te^{-t}y \sin x.$$

Установленная аппроксимация дифференциальных выражений задачи формирует разностную схему (4) при $n=3$, разностные отношения на поверхностях S_1 , S_2 и S_3 , начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned}
\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_1^-} &= \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_1^+}, \quad \frac{\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_1^-} - \left(u_{i_1, i_2, N_3-1}^{j+1}\right)_{S_1^-}}{h_3} = \alpha_1 \frac{\left(u_{i_1, i_2, 1}^{j+1}\right)_{S_2} - \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_1^+}}{h_3}, \\
\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_2^-} &= \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_2^+}, \quad \frac{\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_2^-} - \left(u_{i_1, i_2, N_3-1}^{j+1}\right)_{S_2^-}}{h_3} = \alpha_2 \frac{\left(u_{i_1, i_2, 1}^{j+1}\right)_{S_3} - \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_2^+}}{h_3}, \\
\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_3^-} &= \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_3^+}, \quad \frac{\left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_3^-} - \left(u_{i_1, i_2, N_3-1}^{j+1}\right)_{S_3^-}}{h_3} = \alpha_3 \frac{\left(u_{i_1, i_2, 1}^{j+1}\right)_{S_4} - \left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_3^+}}{h_3}, \\
\left(u_{i_1, i_2, i_3}^0\right)_{S_k} &= x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} \cos(x_{i_1}), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad k = \overline{1, 4}, \\
\left(u_{0, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} &= 0, \quad \left(u_{N_1, i_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} = -2t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} z_{i_3}, \\
\left(u_{i_1, 0, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} &= 0, \quad \left(u_{i_1, N_2, i_3}^{j+1}\right)_{S_k} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} z_{i_3} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} z_{i_3} \sin(x_{i_1}), \\
\left(u_{i_1, i_2, 0}^{j+1}\right)_{S_1} &= 0, \quad \left(u_{i_1, i_2, N_3}^{j+1}\right)_{S_4} = \frac{\pi}{2} e^{-t_{j+1}} x_{i_1} y_{i_2} \cos(x_{i_1}) - \pi t_{j+1} e^{-t_{j+1}} y_{i_2} \sin(x_{i_1}).
\end{aligned}$$

Исходные параметры: $a(x, y, z) = 1$, $b(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z, t) = 0$, $h_1 = 0.0561$, $h_2 = 0.0561$, $h_3 = 0.0561$, $\tau = 10^{-3}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Графическое изображение температурного поля – на рис. 22 для временных значений t в сечении x .

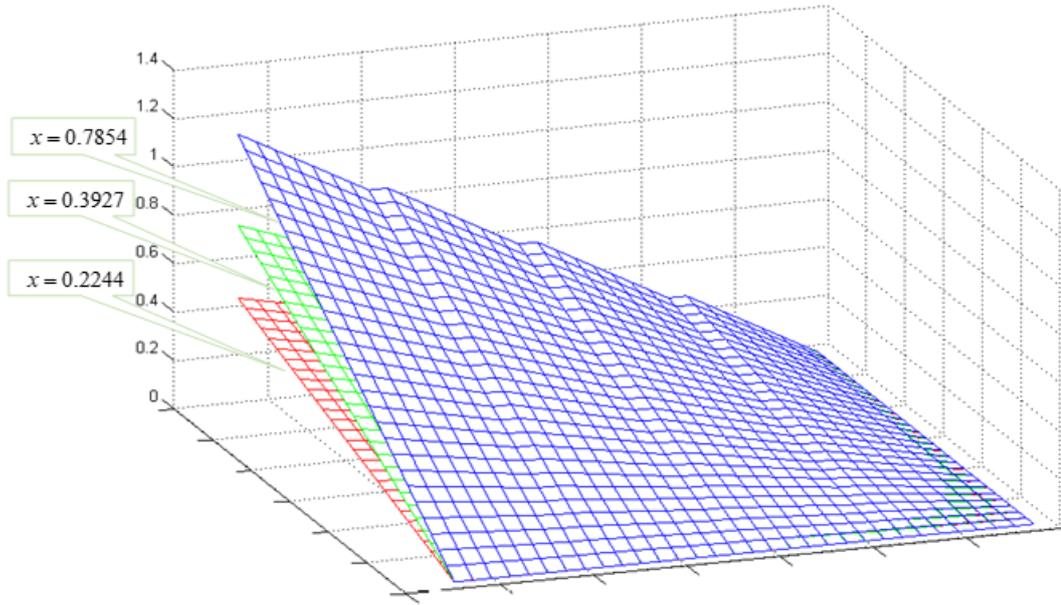


Рис. 22. Распределение температур $u(x, y, z, t)$ при $t = 5 \cdot 10^{-2}$ в сечении x

Подробные результаты вычислительных экспериментов в виде таблиц и листингов программ приведены **в приложении**.

В заключении представлены основные результаты диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В процессе исследования получены следующие новые результаты:

1. Разработаны модифицируемые средства математического описания и анализа сетеподобных носителей различных видов эволюционных волновых процессов и процессов переноса сплошных и дискретных сред, осуществлено представление конечномерных аналогов этих процессов.

2. Разработаны средства построения конечномерных аналогов начально-краевых задач уравнения переноса и волнового уравнения с сетеподобными носителями, разработаны методы аппроксимаций на основе формализмов разностных схем с учетом многофазности среды.

3. Проведено описание двухслойных и трехслойных разностных схем, обосновано их использование (погрешность, устойчивость, сходимость) при математическом моделировании формализмами начально-краевых задач уравнения переноса и волнового уравнения с сетеподобными носителями с учетом свойства многофазности среды.

4. На базе разработанных алгоритмов представлен программный комплекс, используемый при решении проблемно-ориентированных задач промышленного назначения, содержащий структурное описание функционалов и модулей программного комплекса, рекомендации их применимости.

5. Проведены численные расчеты задач прикладного характера по разработанным алгоритмам, сформированных на базе устойчивых и условно устойчивых разностных схем. Численные результаты представлены в виде графиков и таблиц, осуществлена сертификация программной продукции для ЭВМ в установленном порядке Российской Федерации.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

Рекомендации при численном анализе многофазных процессов: использование классов суммируемых функций, для которых выбирается пространство в соответствии с отличительными физическими свойствами изучаемых процессов (в том числе явлений в местах ветвлений сетеподобного носителя процесса), построение сеточных функций разностных схем основано на формировании усреднений исходных (заданных) функций в точках полученной сетки области определений исходных функций (значения усреднений приближают значения исходных функций в норме выбранного пространства с любой наперед заданной точностью). Аппроксимации дифференциальных выражений, используемых в символическом описании моделей изучаемого процесса, являются классическими, используемыми в инженерной практике.

Рекомендации при использовании разностных схем конечномерных аналогов процессов переноса: используются двух- и трехслойные разностные схемы, при этом следует выбирать значение весового параметра схемы из интервала изменения его в соответствии с указаниями пунктов 3.2 и 3.3 главы 3.

Рекомендации при использовании разностных схем конечномерных аналогов волновых процессов: разностные схемы должны содержать не менее трех слоев, симметричные разностные схемы (устойчивость их имеет место для выбранного значения весового параметра схемы из интервала изменения его в соответствии с указаниями пункта 3.4 главы 3, как показывают численные эксперименты, можно рекомендовать пользоваться безусловно устойчивой симметричной схемой с весовым параметром, равным $1/4$ (гарантируется достаточная точность при малых ресурсах времени работы ЭВМ-программы).

Рекомендации при использовании алгоритмического языка: алгоритмы программного комплекса допускают использование любого алгоритмического языка уровня PascalABC.NET и выше.

Перспективы дальнейшей разработки темы: развитие исследуемой задачи имеет следующие естественные направления: 1) формирование совокупности кластеров пространств для использования изучаемых типов физических процессов; 2) разработка разностных схем для изучаемых типов физических процессов; 3) оптимизационные задачи изучаемых типов физических процессов (задачи параметрической оптимизации, стартовой оптимизации, задачи распределенного и точечного управления).

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Тран, З. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети / **З. Тран, В.В. Провоторов** // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – №3(34). – С. 28. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1019> DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012.

2. Тран, З. Параметрическая оптимизация процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю / **З. Тран, А.А. Парт** // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. –

2021. – Т. 9. – №4(35). – С. 36. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1090> DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.037.

3. Тран, З. Локально-одномерный метод для уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области / **З. Тран** // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т.10. – №2(37). – С. 18. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1141> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.008.

4. Тран, З. Оптимизация дискретно-временной системы переноса сплошной среды по сетевому носителю / **З. Тран**, А.С. Гунькина // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – №2(37). – С. 28. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1190> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.029.

5. Рябенко, А.С. Определение скорости стабилизации решения одной начальной задачи для уравнения теплопроводности / А.С. Рябенко, **З. Тран** // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – №4(39). – С. 20-21. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1268> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.39.4.014.

6. Подвальный, С.Л., Точечная оптимизация ламинарного течения вязкой жидкости в сетевом носителе / С.Л. Подвальный, В.В. Провоторов, В.Н. Хоанг, **З. Тран** // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18. – № 5. – С. 7-16.

Публикации в научных изданиях, индексируемых библиографической и реферативной базой данных SCOPUS

7. Tkachova S.A., Tran D., Part A.A., Gunkina A.S. Analysis of the Stability of Stationary Technological Transfer Processes in the Oil-Gas and Mechanical Engineering Areas of Production // AIP Conference Proceedings. III international conference on advanced technologies in materials science, mechanical and automation engineering. 2021, vol. 2402, iss. 1. pp. 6.

8. Provotorov V.V., Lebedeva Y.O., Tran D., Borisoglebskaya L.N., Vorobyov E.I. Optimization problem of external dynamic influences for the elimination of vibration phenomena in composite elastic building structures // Journal of Physics: Conference Series. Engineering and Materials Science. 2021, vol. 2094, iss. 4, pp. 7. Available from: doi:10.1088/1742-6596/2094/4/042065.

Регистрация программных продуктов

9. Программный комплекс для решения задач переноса методом конечных разностей на графе: программа для ЭВМ №2022611905 / З. Тран // заяв. 11.11.2021; регистр. 04.02.2022.

10. Программа для решения задач транспортировки сплошных сред по двумерным сетеподобным носителям: программа для ЭВМ №2022661064 / О.Р. Балабан, З. Тран // заяв. 30.05.2022; регистр. 14.06.2022.

11. Программа построения решения уравнения переноса сплошной среды в трехмерной сетеподобной области: программа для ЭВМ №2023662664 / О.Р. Корчагина, З. Тран, В.В. Провоторов, И.В. Приходько // заяв. 29.05.2023; регистр. 09.06.2023.

12. Программа построения решения уравнения колебания сложносочленённой двумерной механической конструкции: программа для ЭВМ №2023662808 / О.Р. Корчагина, З. Тран, В.В. Провоторов, И.В. Приходько // заяв. 17.05.2023; регистр. 14.06.2023.

Статьи и материалы конференций

13. Тран, З. Аппроксимация дифференциального уравнения переноса конечно-разностными аналогами на графе // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. Всероссийской научной конференции «ПМТУКТ-2021». – Воронеж: ВГУ, 2021. – С. 154-155.

14. Тран, З. Начально-краевая задача для математической модели колебаний с распределенными параметрами на сетеподобной области // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. междунар. конф. «ПМТУКТ-2022». – Воронеж: ВГУ, 2022. – С. 71-73.

15. Тран, З. Программный комплекс для решения уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами в сетеподобной области // Материалы LIII международной

научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» – 2022. – Т.9. – №1. – С. 108-112.

16. Тран, З. Алгоритм определения приближенного решения уравнения переноса с распределёнными параметрами на графе-звезда // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2022». – Воронеж, 2022. – С. 208-212.

17. Тран, З. Программный комплекс для решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения с распределёнными параметрами в сетеподобной области // Материалы LIV международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» – 2023. – Т.10. – №26. – С. 100-104.

18. Тран, З. Устойчивость двухслойных разностных схем с весовым параметром для параболических систем // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. междунар. конф. «ПМТУКТ-2023». – Воронеж: ВГУ, 2023. – С. 96-98.

Подписано в печать 03.05.2024. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,30. Тираж 100 экз. Заказ 85.
Отпечатано в типографии ООО ИПЦ «Научная книга».
394026, г. Воронеж, Московский пр-т, 11/5
Тел. +7 (473) 229-32-87
<http://www.n-kniga.ru>. E-mail: nautyp@yandex.ru