

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию **Тран Зуя** «Численные методы анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов», представленную на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

### Актуальность темы диссертационной работы

Необходимость всестороннего исследования эволюционных сетеподобных процессов переноса, волновых процессов и сопутствующих им явлений, возникающих в сетях или сетеподобных объектах, заметно усилила интерес к математическим моделям с пространственными переменными, изменяющимися на одномерной сети (геометрический граф является математической моделью одномерной сети), двухмерной и трехмерной сетях (сетеподобные области являются математической моделью двухмерной и трехмерной сети). Здесь следует отметить, что исследования в направлении качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений на графах (сетях) имеют достаточно обширную историю (см., например, библиографию в монографии Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с. и монографии Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.). Однако исследования процессов, математическое описание (математические модели) которых определяются формализмами эволюционных уравнений с распределенными параметрами на сети (графах) и сетеподобных областях, начались сравнительно недавно с появлением математического инструмента качественного анализа дифференциальных уравнений с частными производными, пространственные переменные которых изменяются на сетеподобных областях (см., библиографию Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. – Воронеж: Научная книга, 2014. – 188 с.), а также серии статей, где пространственные переменные изменяются на сетеподобных областях (см. работу Baranovskii E.S., Provotorov V.V., Artemov M.A., Zhabko A.P. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. V. 13. Article ID 1300, и работу Провоторов В.В., Жабко А.П. Дифференциально-разностная система в анализе эволюционной системы

Навье-Стокса с носителем в сетеподобной области, Вестник Воронежского университета. Серия: Физика. Математика. 2023, № 2. С. 83–94. и представленную там библиографию). Численные же методы анализа эволюционных сетеподобных процессов находятся в начальной стадии формирования и представлены на сегодняшний момент в научной литературе лишь результатами довольно узкой направленности (см. работу Хоанг В. Н. Дифференциально-разностная система в соболевском пространстве функций с носителями на сетеподобной области / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2022. – Т. 9. – № 1. – С. 113-117). Именно этим обусловлена цель диссертационного исследования Тран Зуя – разработка и обоснование численных средств для численного анализа конечномерных аналогов моделей эволюционных сетеподобных процессов различного типа, формирование и обоснование численных алгоритмов (разностные схемы, устойчивость, сходимости, анализ погрешностей) для использования в прикладных задачах. Следует отметить при этом, что в исследовании достаточное место уделено анализу сетеподобных процессов, которые формируются либо многофазной переносимой сплошной средой, либо сложной внутренней реологией носителей процессов, которые инициируют волновые явления. Это дало импульс развитию классических численных методов анализа в направлении использования более широкого класса функций, чем класс непрерывных функций, – суммируемые (интегрируемые) функции. Указанный класс функций в большей степени точности отражает физическую сущность сетеподобных процессов. Кроме того, в работе Тран Зуя проведён достаточно глубокий анализ разностных схем конечномерных аналогов моделей разного типа процессов в слоистых средах (композитах) с изменяющимися на слоистой области пространственными переменными. Сказанное выше в полной мере поясняет **актуальность** выбранного направления и темы исследования.

### **Структура и содержание диссертационной работы**

Представленная диссертационная работа Тран Зуя состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и трёх приложений. Работа структурирована тремя основополагающими разделами:

- описание эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях и примеры моделирования сетеподобных процессов переноса и волновых процессов – глава 1;
- развитие численных методов анализа конечномерных аналогов математических моделей сетеподобных процессов, базирующихся на использовании класса суммируемых (интегрируемых) функций. Проработаны также вопросы аппроксимации, построения

усреднений функций и конструирования двух и трехслойных разностных схем (в том числе схем с весовыми параметрами) – главы 2 и 3,

- программный комплекс, содержащий проблемно-ориентированные программы для проведения серии вычислительных экспериментов тестовых задач (типичных представителей задач прикладного характера) – глава 4 и приложения.

Во **введении** автор приводит детальное описание актуальности диссертационного исследования, включая предысторию развития выбранного научного направления, указывает цель и задачи исследования, формулирует научную новизну, представляет информацию о теоретической и практической значимости, а также об использовании полученных результатов.

**Первая глава** диссертационного исследования посвящена вопросам математического описания эволюционных сетеподобных процессов. Рассматривается общий подход построения математических моделей, адаптированный к описанию сетеподобных процессов различных типов. Указаны возможности использования классических формализмов начально-краевых задач для эволюционных уравнений с распределенными параметрами по неклассическим областям, установлены отличительные особенности описания сетевых потоковых и волновых явлений в узлах (узловых местах) носителей процессов и показаны возможности реализации существующих современных концепций моделирования, адаптированных к математическому описанию сетеподобных процессов с учетом этих особенностей. Представлены и описаны основные сетеподобные и слоистые носители различных видов и типов природных и искусственных явлений. Представлены математические модели сетеподобных процессов, имеющие достаточно широкие возможности для использования в прикладных задачах естествознания, приведены примеры моделирования сетеподобных процессов (в том числе процессов переноса сплошных сред в композиционных материалах).

Содержание **второй главы** посвящено вопросам построения и обоснования неклассических численных методов конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов. Численные методы базируются на анализе разностных схем, соответствующих конечномерным аналогам указанных процессов. При математическом описании процессов используется класс измеримых и ограниченных (а значит, суммируемых, т. е. интегрируемых) функций. Разностные схемы формируются в процессе дискретизации по временной и пространственной переменным математических моделей процессов применительно к различного типа сетеподобных и слоистых носителей. Получены достаточные условия устойчивости множества

разработанных двухслойных и трехслойных разностных схем, в том числе и зависящих от весовых параметров. В последнем случае указываются области изменения весовых параметров. В терминах изменений весовых параметров схем сформированы множества устойчивых и сходящихся двух- и трехслойных дифференциально-разностных схем, разработана совокупность пошаговых действий, имеющих прикладной и конструктивный характер, использование которых определяет решение исходной задачи.

**Третья глава** посвящена обоснованию разностных схем эволюционных процессов в сетеподобных и слоистых носителях, которое базируется на свойстве устойчивости разностных схем. Особое внимание при этом уделено анализу устойчивости разностных схем уравнений переноса и волновых уравнений с пространственными переменными, изменяющимися в слоистой области. Для этих уравнений устанавливается устойчивость двухслойных и трехслойных разностных схем, аналогичных схемам, которые часто используются в приложениях с пространственными переменными, изменяющимися в классической области (под классической областью понимается область, структура которой определена только одной подобластью). Здесь же приведен глубокий анализ двухслойных и трехслойных разностных схем с весовыми параметрами и установлены области изменения этих параметров, гарантирующие устойчивость (условную устойчивость) этих схем. Выводы и рекомендации для использования разностных схем, разработанные вычислительные алгоритмы численных методов легли в основу решения различного типа прикладных задач для сетеподобных процессов переноса и волновых процессов с носителями произвольной структуры. При этом рекомендации обладают свойством универсальности применения технологии численного анализа для указанных процессов.

Реализация разработанных численных методов и алгоритмов по исследуемой тематике осуществлена в **четвертой главе** в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента – программного комплекса для одномерных и многомерных носителей сетеподобных процессов переноса и волновых процессов. В п. 4.1 представлено подробное описание структуры программного комплекса, в последующих пунктах решения тестовых задач процессов переноса и волновых процессов: в п. 4.2 – решение тестовых задач процессов переноса и волновых процессов в одномерном носителе (одномерной сети) вместе с иллюстрациями, в п. 4.3 – решение тестовых задач процессов переноса и волновых процессов в сетеподобных носителях (двухмерной и трехмерной сетях) вместе с иллюстрациями, в том числе решение задачи переноса сплошной среды в слоистой области (п. 4.3.5). Численные результаты представлены в виде распределений температур и количественных изменений волновых характеристик сетеподобных

процессов в отдельные моменты времени. Следует отметить, что полученные результаты практического характера могут быть использованы в задачах оптимального управления потоковыми и волновыми явлениями в сетях различного типа.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационного исследования. Подробные результаты работы программного комплекса в виде числовых таблиц, содержащие решения типичных представителей задач прикладного характера и им соответствующие листинги ЭВМ-программ содержатся в приложениях.

### **Научная новизна диссертационной работы**

Научная новизна работы заключается в разработке новых подходов и методов для численного анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов. В диссертационном исследовании проведена следующая работа в отличающихся научной новизной направлениях:

- предложена модификация подхода к реализации численных методов анализа многофазных эволюционных процессов различного типа, отличающаяся возможностью адекватного описания неклассических динамических свойств процессов и явлений в местах ветвления сложноструктурированных носителей,

- разработана формализация к построению конечно-разностных аналогов начально-краевых задач многофазных эволюционных процессов, отличающаяся наличием особенностей в виде разветвленной структуры носителей процессов,

- разработаны формальные средства построения разностных схем для конечно-разностных аналогов многофазных эволюционных процессов, отличающиеся наличием свойств ветвлений носителей процессов,

- предложен подход анализа устойчивости (условной устойчивости) и сходимости соответствующих разностных схем, алгоритмы для реализации таких схем, отличительной особенностью которых является общность использования для разностных схем иных процессов,

- предложена структура программного комплекса численного анализа, отличающаяся реализацией механизмов построения программных систем численного анализа в соответствии с описанием характера ветвлений сетеподобных носителей исследуемых процессов и учитывающая свойство многофазности этих процессов.

–

## **Достоверность проведенного исследования**

Достоверность исследования подтверждена строгим следованием закономерностям и утверждениям теории математического моделирования естественнонаучных явлений, корректным использованием методов вычислительной математики, проведением вычислительного эксперимента, основанного на расчете серии вариантов конечномерных аналогов многофазных математических моделей эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов, апробацией разработанных моделей и алгоритмов на научных семинарах, всероссийских и международных конференциях, публикациями в рецензируемых изданиях из перечня ВАК и изданий, индексируемых в базе Scopus, а также наличием четырех свидетельств о регистрации программ для ЭВМ.

## **Степень обоснованности и достоверности научных положений, выводов и рекомендаций**

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов диссертационной работы подтверждена сравнительным анализом полученных в работе результатов с опубликованными в периодических изданиях результатами ведущих отечественных ученых по изучаемой теме (результатов зарубежных ученых по изучаемой теме не обнаружено), анализом результатов вычислительного эксперимента, а также использованием ранее апробированных методов теории численного моделирования пространственно-распределенных объектов, теории графов, теории приближений и аппроксимаций дифференциальных уравнений с частными производными. На базе разработанного метода полной дискретизации по всем переменным исходной математической модели в классе суммируемых функций строго обосновано использование численных методов, а именно, изучены вопросы аппроксимации математических моделей, проведен анализ устойчивости (условной устойчивости) разработанных двух- и трехслойных разностных схем, в том числе множеств разностных схем с весовыми параметрами. Для последних указаны области изменения весовых параметров.

## **Теоретическая и практическая значимость полученных результатов**

*Теоретическая значимость.* Предложенные в диссертационной работе численные методы анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов существенно расширяют возможности анализа конечномерных аналогов

процессов подобного типа и могут рассматриваться как развитие приближенных аналитических методов исследования моделей, описываемых формализмами начально-краевых задач для эволюционных уравнений с распределенными параметрами в сетеподобных областях. Основными значимыми теоретическими результатами являются:

- математическое описание различного типа потоковых и волновых явлений в местах ветвления сетевых носителей,
- анализ устойчивости предложенных двухслойных и трехслойных разностных схем дискретных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов,
- разработка новых алгоритмов, описывающих различные типы явлений в местах ветвления сетевых носителей и определяющих выбор балансных соотношений в этих местах.

Теоретические результаты диссертационной работы могут быть использованы в научных разработках, проводимых в Институте математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета, Воронежском государственном университете и других научных центрах, где ведутся научные исследования в направлении анализа многофазных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов.

**Ценность работы для практики.** Полученные в работе результаты являются развитием численных методов анализа, приближенных к реальным многофазным сетеподобным эволюционным процессам переноса сплошных сред и волновым процессам их сопровождающих. Разработанные численные методы составили алгоритмическую основу для программного комплекса, позволяющего проводить анализ задач, актуальных не только в областях сетевой гидродинамики вязких многофазных сред и теплопереноса по сетевым теплоносителям, но и при изучении волновых явлений в носителях указанных процессов. Практическая ценность работы определена также представленными решениями тестовых задач прикладного характера, выводами и рекомендациями, использование которых обеспечит повышение эффективности деятельности промышленных предприятий, функционирующих в направлении, отвечающем избранной тематике диссертационной работы. Результаты используются в качестве базовой информации для научных разработок ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), при решении прикладных задач технического характера концерна «Созвездие» (г. Воронеж), а также могут быть использованы в организациях, практическая деятельность которых ориентирована на решение задач, соответствующих тематике диссертационной работы.

## Замечания по диссертационной работе

По текстам диссертационной работы и автореферата имеются следующие замечания:

1. В тексте главы 2 диссертационной работы (стр. 62) и тексте автореферата (стр. 8) есть неточность в представлении аппроксимации  $Lu_{\Sigma_k} \approx L_h u_{\Sigma_k}$ . Надо было бы добавить знак минус «-» перед символом суммы  $\sum_{k, l=1}^n$ .
2. В тексте главы 2 диссертационной работы (стр. 65) представлена трехслойная разностная несимметричная схема на многомерной сети для уравнения переноса. Следовало бы указать, как применять её в конкретных задачах.
3. В тексте главы 4 диссертационной работы (стр. 100, 125, 132) индекс  $k$  изменяется следующим образом  $k = \overline{1,3}$ , а не  $k = \overline{1,2}$ .
4. В главе 4 диссертационной работы (стр. 85) было бы полезно представить дополнительные рисунки, поясняющие работу пользовательского интерфейса.

Следует отметить также наличие опечаток и погрешностей технического характера в оформлении диссертационной работы и автореферата, количество которых, однако, не превышает разумного предела.

Наличие указанных недостатков не приводит к недоразумениям или неверному толкованию представленных в ней результатов исследования и не снижают общего высокого мнения о диссертационной работе.

## Заключение

Диссертационная работа **Тран Зуя** выполнена на достаточно высоком научном и теоретическом уровнях. Соискателем предложен новый подход численного анализа сетеподобных процессов различных типов, представлены программные комплексы численных методов и алгоритмов для решения разного типа задач практического инжиниринга.

Диссертационная работа является завершённой научно-квалификационной работой и самостоятельным исследованием, содержащим совокупность новых научных результатов и положений, выдвигаемых автором для публичной защиты. Все основные результаты достаточно полно отражены в 18 научных статьях, в том числе 6 в изданиях из Перечня ВАК и 2 в журналах, входящих в международную



базу научного цитирования Scopus, получено 4 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ; автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В тексте диссертации даны корректные ссылки на авторов и источники. Язык и стиль текстов диссертации и автореферата соответствуют общепринятым нормам по специальности. Методология и структура диссертационной работы полностью соответствуют трем основным компонентам специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа **Тран Зуя** «Численные методы анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Положением о присуждении ученых степеней ВАК при Минобрнауки РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

12 июня 2024 г.

**Официальный оппонент**

**А.П. Жабко**

**Алексей Петрович Жабко**

Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации,  
Почётный профессор Санкт-Петербургского государственного университета,  
доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой теории управления, профессор  
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»  
Служебный адрес: 199034. Санкт-Петербург, Университетская наб., д.7/9  
Телефон: +7 911 7796 701 e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru



Документ подготовлен  
в порядке исполнения  
трудовых обязанностей

Текст документа размещен  
в открытом доступе  
на сайте СПбГУ по адресу  
<http://spbu.ru/science/expert.htm>