

**УТВЕРЖДАЮ**

Ректор Петрозаводского  
университета,

д-р технических наук,  
профессор



 А.В. Воронин

19» июня 2024 г.

## **ОТЗЫВ**

ведущей организации федерального бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Петрозаводский государственный университет» на диссертационную работу **Тран Зуя** «Численные методы анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов», представленную на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

### **Актуальность темы диссертации**

Диссертационная работа Тран Зуя посвящена развитию аппарата математического моделирования и численных методов анализа эволюционных процессов переноса сплошных сред и волновых процессов, возникающих в их сетеподобных носителях. Причиной тому является характерная особенность искусственных и природных носителей указанных процессов, имеющими сетеподобную структуру (сетевые гидросистемы летательных аппаратов, машин и механизмов, нефте- и газотрубопроводы, сетеподобные гемодинамические, биологические и биофизические процессы в живых организмах и пр.) – наличие в этих носителях мест ветвлений, где соединяются отдельные фрагменты носителей. Наличием таких особенностей объясняется возникновение нестандартных потоковых и волновых явлений указанных местах, которые в свою очередь приносят свои особенности при моделировании явлений в местах ветвлений носителей – математическое

описание таких явлений выходит за рамки классических формализмов конечномерных аналогов дифференциальных уравнений. К сказанному следует добавить еще одной существенной особенности – свойство многофазности эволюционных сетеподобных процессов, наличие которого необходимо влияет на выбор класса функций, используемых при установлении конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений процессов переноса и волновых процессов, т. е. конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов. Следует отметить, что несмотря на разнообразие истоков происхождения потоковых и волновых явлений со свойственными им особенностями (следствие разнообразия сетеподобных процессов), существует необходимость отыскания общих закономерностей построения разностных аналогов изучаемых процессов, дающих возможности систематизировать подходы и методы при их численном анализе.

С появлением достаточно глубоко разработанной теории эволюционных дифференциальных уравнений в классе суммируемых (интегрируемых) функций с пространственными переменными и параметрами, распределенными в сетеподобной области (работы А.П. Жабко, В.В. Провоторова, Е.С. Барановского, А.С. Волковой, Ю.А. Гнилицкой, А.А. Парт), открылся путь развития методов численного анализа эволюционных уравнений процессов переноса и волновых процессов, который осуществляется переходом к конечно-разностным аналогам этих уравнений. Сказанное означает, что классический инструмент численного анализа требует своего развития (выбор существующих и введение новых аппроксимаций для формирования устойчивых разностных схем) и адаптации при описании конечномерных аналогов математических моделей изучаемых процессов и явлений. Отсюда вытекает необходимость разработки новых алгоритмов и, как следствие, проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента с целью практического анализа изучаемых процессов в сетеподобных носителях. Следовательно, актуальность тематики диссертационного исследования вытекает из необходимости развития численных методов анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов, разработки и обоснования эффективных алгоритмов для анализа решения прикладных задач. Все упомянутые вопросы составили предмет исследования диссертационной работы.

### **Структура и содержание диссертационной работы диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа содержит 266 страниц текста 70 рисунков и 131 таблиц, список цитированной литературы состоит из 110 источников.

Во **введении** приведено обоснование актуальности избранного направления исследования, представлены цель и задачи исследования,

положения, выносимые на защиту, отмечена научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

**В первой главе** представлены основные подходы и методы, используемые в исследовании, приводится подробное описание различного вида сетеподобных носителей процессов переноса и волновых процессов, приведены геометрические свойства этих носителей с поясняющими иллюстрациями. Глава содержит серию примеров с подробными описаниями явлений, возникающих в местах ветвления носителей, предложен общий подход математического описания этих явлений для сетеподобных физических, гемодинамических, биологических и иных процессов. Сформулированы выводы, содержащие информацию о возможностях использования классических методов моделирования с помощью формализмов начально-краевых задач для описания эволюционных сетевых потоковых и волновых явлений в сетеподобных объектах.

**Во второй главе** осуществляется подготовка к формированию неклассических численных методов: представлено подробное описание сеток, соответствующих сетеподобным областям различной структуры (носителям процесса), устанавливаются основные обозначения и вводятся соответствующие понятия, в том числе понятие сеточных функций, определенных на сетках сетеподобных областей. Здесь же рассматривается аппроксимация функций и дифференциальных выражений от них, как общепринятая классическая, используемая на частях сетки, каждая из которых является сеткой соответствующей подобласти сетеподобной области, так и предложенная (неклассическая), аппроксимирующая условия примыкания попарных подобластей на общих границах, устанавливаются погрешности аппроксимаций. Рассмотрен основной вопрос метода конечных разностей для математических моделей процессов переноса сплошных сред и волновых процессов – построение устойчивых разностных схем для эволюционных дифференциальных систем с распределенными параметрами на сетеподобных областях, т. е. конечномерных аналогов этих систем. При этом для реализации свойства многофазности изучаемых процессов (численные методы реализуются в классе суммируемых функций) сеточные функции, соответствующие всем исходным определяются им соответствующими усреднениями по достаточно малыми окрестностями точек сетки сетеподобной области изучаемого процесса. Анализируются как двух- и трехслойные разностные схемы (аналогичные распространенным классическим устойчивым схемам), так и те же схемы с весовыми параметрами, т.е. совокупности разностных схем. Для последних представлен анализ устойчивости и сходимости разработанных разностных схем и формируются множества изменений параметров, гарантирующих устойчивость (условную устойчивость) разностных схем. Выводы главы содержат детальные пояснения и рекомендации при использовании метода конечных разностей с приведением достаточного числа примеров (глава 4 и приложения).

**Третья глава** посвящена обоснованию разработанных численных методов и алгоритмов, а именно, отысканию достаточных условий устойчивости разностных схем и корректности построения конечномерных аналогов для конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов, математические модели которых имеют пространственную переменную, изменяющуюся в сетеподобной области. Приведены точные определения устойчивости по начальным данным и распределенным внешним воздействиям, проведен достаточно глубокий анализ устойчивости (условной устойчивости) и установлены достаточные условия устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем с весовыми параметрами и без весовых параметров. Выполнение свойства устойчивости разностных схем дает возможность определить также границы изменения весовых параметров, если от таких зависит разностная схема, т.е. дается возможность на практике рассматривать параметрическую совокупность корректных разностных схем с целью выбора оптимального значения параметра (параметров) для конечномерных аналогов.

Особый интерес вызывают результаты **четвертой главы**, где представлена реализация численных методов и алгоритмов в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента, учитывая различные типы носителей сетеподобных процессов. Следует отметить, что для проверки качества и адекватности разработанных автором диссертации численных методов и алгоритмов представлены численные решения и анализ тестовых задач (на базе серии вычислительных экспериментов), для которых известны точные аналитические решения и которые являются типичными представителями круга решаемых задач организациями, в интересах которых использованы приложения данного исследования (Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж) и концерн «Созвездие» (г. Воронеж)). Здесь же представлен программный комплекс для численного решения и анализа задач переноса сплошных сред по носителям различного вида и сопутствующих волновых процессов, подробно описаны его структура и функции всех модулей с указанием используемых разработанных программных средств. Результаты работы программного комплекса представлены в виде таблиц числовых данных, графической интерпретации результатов решений серии тестовых задач, а также представлены выводы и рекомендации для пользователей программным продуктом.

**Заключение** диссертационной работы содержит основные результаты, в **приложениях** представлены таблицы, содержащие числовые данные серии вычислительных экспериментов, листинги программ количественного анализа эволюционных потоковых явлений в сетеподобных носителях и сопутствующих волновых процессов.

## **Новизна исследований и полученных результатов, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**

Предложенный соискателем новый подход численного анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов развивает классические численные методы и указывает пути адаптации традиционных численных методов к численному исследованию различного типа процессов, математические модели которых содержат изменяющуюся в сетеподобных областях пространственную переменную. При этом представленные методы ориентированы на использование класса суммируемых функций (расширение класса непрерывных функций), а значит, допускают численный анализ многофазных процессов. В результате проведенных исследований в диссертационной работе Тран Зуя получены следующие характеризующиеся научной новизной результаты:

- модификация подхода к реализации численных методов анализа многофазных эволюционных процессов различного типа, отличающаяся возможностью адекватного описания неклассических динамических свойств процессов и явлений в местах ветвления сложноструктурированных носителей;

- формализация построения конечно-разностных аналогов начально-краевых задач многофазных эволюционных процессов, отличающаяся наличием особенностей разветвленной структуры носителей процессов;

- подходы и методы построения разностных схем для конечно-разностных аналогов многофазных эволюционных процессов, отличающихся наличием свойств ветвлений носителей процессов и использованием класса суммируемых функций при описании свойств многофазности;

- анализ устойчивости (условной устойчивости) и сходимости разностных схем многофазных эволюционных процессов, алгоритмы реализации этих схем, отличительной особенностью которых является общность использования для разностных схем сетеподобных процессов переноса и волновых процессов;

- программный комплекс численного анализа, отличающийся наличием модуля выбора сетеподобных носителей процессов, учитывающих характер ветвлений, а также наличием модуля формирования аппроксимаций и разностных схем моделей для численного анализа процессов, учитывающий свойство многофазности этих процессов.

Полученные новые результаты определили комплекс выводов и рекомендаций, представленных автором в диссертационной работе.

## **Значимость полученных результатов для науки и производства**

Разработанный новый подход численного анализа конечномерных аналогов многофазных эволюционных сетеподобных процессов переноса и волновых процессов в сетевых и сетеподобных носителях процессов является развитием классического метода конечных разностей как в направлении усложнения области изменения пространственной переменной (переход к сетеподобным областям, структурированным по типу пространственной сети), так и использовании класса функций, не являющихся непрерывными, а только интегрируемыми, при моделировании многофазных процессов. При этом, как того требует теория приближенных аналитических методов исследования математических моделей, анализируются точности аппроксимаций, устойчивость (условная устойчивость) и сходимость разработанных новых разностных схем. Последнее определяет теоретическую значимость исследования.

**Практическая значимость** заключается в разработке программного комплекса, реализующего вычислительные алгоритмы количественного описания свойств процессов переноса сплошных сред и присущим им волновым процессам с учетом характерных структурных особенностей сетеподобных носителей. Разработанные алгоритмы применимы к задачам транспортировки нефти и нефтепродуктов по магистральным и сетевым трубопроводам, а также к анализу волновых процессов при этом возникающих. Эти же алгоритмы адаптированы к анализу композиционных материалов (композитов), которые, имея слоистую внутреннюю структуру носителя тепловых и волновых процессов, являются частным случаем сетеподобных процессов. При этом предусмотрена возможность определения эффективности каждого из разработанных алгоритмов. Результаты диссертационного исследования реализованы в учебном процессе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» в рамках образовательной программы по направлению 01.04.01 «Математика» при проведении спецкурсов по дисциплинам «Математические модели гидродинамики», а также при подготовке магистерских выпускных квалификационных работ. Результаты могут быть использованы для разработок спецкурсов Института математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета и ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), а также при решении прикладных задач технического характера, определяемых научным направлением концерна «Созвездие» (г. Воронеж). Разработанный программный комплекс также может быть использован в научно-исследовательских организациях, занимающихся разработкой средств численного анализа сложноструктурированных физических и искусственных процессов. На специализированные программные средства получены свидетельства о государственной регистрации Российской Федерации.

## Степень достоверности полученных результатов

Достоверность научных результатов и выводов обусловлена корректным использованием современных методов теории математического моделирования и методов численного анализа, подтверждается сравнительным анализом полученных в работе результатов с известными в периодической печати результатами российских и зарубежных исследователей по представляемой тематике, сравнением полученных теоретических результатов с серией вычислительных экспериментов на тестовых задачах прикладного характера с применением современных компьютерных технологий. Результаты диссертационной работы прошли необходимую апробацию, о чем свидетельствуют доклады на научных конференциях и семинарах, в том числе российских, международных и с международным участием, а также публикации в периодической печати результатов исследования.

## Рекомендации по использованию результатов диссертационной работы

Математические модели и разработанный программный комплекс рекомендуются к использованию в научно-исследовательской работе Института математики, физики, информатики Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина при подготовке студентов-магистров по специальностям «Прикладная математика», в учебном процессе факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета и факультета прикладной математики–процессов управления С.-Петербургского государственного университета.

## Замечания по диссертационной работе

1. В главе 4 текста диссертации используется начальная функция  $\varphi$  (например, стр. 90, 92 и 94), однако, в тексте не представлено пояснений о способе её построения.

2. В тексте диссертации представлена трехслойная разностная схема с весовыми параметрами для волнового уравнения (стр. 68 главы 2), но не предоставлен детальный анализ её устойчивости.

3. На рис. 4.10, 4.14 главы 4 должно быть использовано обозначение  $u(x,t)$ , а не  $Q(x,t)$ , на рис. 4.18, 4.19 главы 4 также должно быть использовано обозначение  $u(x,t)$ , а не  $\Omega(x,t)$ , на рис. 4.25 главы 4 надо было указать обозначения координатных осей  $Ox, Oy$ .

4. В главе 4 текста диссертации технические опечатки в нумерации формул. Необходимо изменить нумерацию соотношений (1.50) – (1.172) на (4.1) – (4.123).

5. В главе 4 текста диссертации необходимо было дать дополнительные пояснения, объясняющие выбор для этих задач исходных данных:  $a(x, y) = x + y$  (стр. 103) и  $a(x, y, z) = xyz$  (стр. 118).

6. На стр. 8 текста автореферата используется обозначение « $x_i$ », которое предварительно не описано в тексте.

7. На стр. 19 текста автореферата приведен пример переноса теплоты в слоистой области, однако, в тексте отсутствует описание этой области.

8. В тексте автореферата при описании структуры программного комплекса (стр. 10-12) следовало бы дать информацию о двухслойных и трехслойных разностных схемах.

Указанные недостатки (вместе с незначительным числом грамматических описок и неточностей) не влияют на полученные результаты, не снижают положительного впечатления о работе и не умаляют ее научной значимости.

### **Заключение**

Диссертационная работа Тран Зуя посвящена актуальной теме, является самостоятельным и завершенным научным исследованием, выполненным на высоком научном и теоретическом уровне, содержит теоретические и практические результаты, совокупность которых можно квалифицировать как новое решение актуальной задачи в области математического моделирования и численного анализа эволюционных процессов переноса сплошных сред и волновых процессов, возникающих в их сетеподобных носителях. Полученные соискателем научные результаты соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, в том числе 6 статей в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 2 статьи в журнале, индексируемом библиографической и реферативной базой данных SCOPUS. По результатам выполненной работы получено 4 свидетельства о государственной регистрации программных продуктов в реестре Федеральной службы по интеллектуальной собственности. В работах, выполненных с соавторами, произведено необходимое разделение результатов.

Диссертационная работа написана современным естественно-научным языком с использованием общепотребляемых специальных терминов.



Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертационной работы, содержит список работ, опубликованных по теме исследования.

Диссертационная работа полностью соответствует критериям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, а ее автор, Тран Зуй, заслуживает присуждения ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Диссертация и отзыв обсуждены на совместном научном семинаре кафедр «Теории вероятностей и анализа данных» и «Прикладной математики и кибернетики» и одобрены на заседании кафедры «Теории вероятностей и анализа данных» ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет», протокол № 7 от 17 июня 2024 г.

Заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных  
ФГБОУ ВО «Петрозаводский  
государственный университет»,  
д.т.н., профессор

Рогов Александр Александрович

 А.А. Рогов

И.О. заведующего кафедрой прикладной математики и кибернетики  
ФГБОУ ВО «Петрозаводский  
государственный университет»,  
к. ф.-м. н., доцент

Пешкова Ирина Валерьевна



И.В. Пешкова

185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, просп. Ленина, д. 33

Контакты:

Телефон: 8 (814-2) 71-10-21

e-mail: rogov@petsu.ru