

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I» (ФГБОУ ВО ПГУПС)

На правах рукописи



БОЛЬ ДМИТРИЙ ВИКТОРОВИЧ

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОПОР МОСТОВ
НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ**

Специальность 2.1.8. Проектирование и строительство дорог,
метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Кандидат технических наук, доцент
Г. И. Богданов

Санкт-Петербург 2026

Введение.....	3
Глава 1. Анализ научных и технических исследований в области расчета железобетонных конструкций	20
1.1. История развития теории расчета железобетонных конструкций.....	20
1.2. Диаграммы предельных состояний в научной и технической литературе	24
1.3. Анализ учета ограничения предельной относительной высоты сжатой зоны бетона в рамках деформационной модели	50
1.4. Выводы по первой главе.....	59
Глава 2. Совершенствование метода расчета железобетонных опор мостов по нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений	62
2.1. Сопоставление методов расчета железобетонных опор мостов при построении диаграмм предельных состояний	62
2.2. Разработка методики учета ограничения предельной относительной высоты сжатой зоны бетона при расчете железобетонных опор мостов по нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений	87
2.3. Выводы по второй главе.....	106
Глава 3. Разработка алгоритма и обоснование параметров методики расчета железобетонных опор мостов	109
3.1. Алгоритм построения диаграмм предельных состояний по разработанной методике.....	110
3.2. Обоснование параметров аппроксимирующей зависимости $a(\varepsilon_s)$ при расчете железобетонных опор мостов с сечением прямоугольной формы	114
3.3. Выводы по главе.....	135
Глава 4. Верификация и практическое применение результатов исследования	137

4.1. Верификация разработанной методики на основе численного моделирования.....	137
4.2. Сравнительный анализ алгоритмов построения диаграмм предельных состояний	153
4.3. Практическое применение результатов исследования.....	166
4.4. Выводы по четвертой главе	184
Основные выводы	186
Список литературы	189

Введение

Актуальность темы исследования.

В условиях современного развития транспортной инфраструктуры и повышения требований к архитектурной выразительности мостовых сооружений наблюдается устойчивая тенденция к увеличению пролетов и усложнению конструктивных решений. Это приводит к широкому применению железобетонных опор со сложной формой поперечного сечения, включающей элементы переменной толщины, полости, развитые ребра и иные геометрические особенности. Одновременно такие конструкции воспринимают значительные продольные силы в сочетании с изгибающими моментами, в том числе при косом изгибе, что существенно усложняет оценку их напряженно-деформированного состояния и несущей способности.

Проектирование подобных конструкций таких как опоры Западного скоростного диаметра и моста Бетанкура в г. Санкт-Петербурге, а также Центрального моста в г. Новосибирске (Рисунок 1 –) подразумевает необходимость выполнения большого числа расчетов прочности нормальных сечений для различных сочетаний усилий, вариантов армирования и геометрических параметров в ограниченные сроки. В связи с этим возрастает требование к расчетным методам, которые должны обеспечивать, с одной стороны, учет реальной геометрии сечения и физической нелинейности работы материалов, а с другой – обладать достаточной вычислительной эффективностью для применения в рамках многовариантного проектирования.

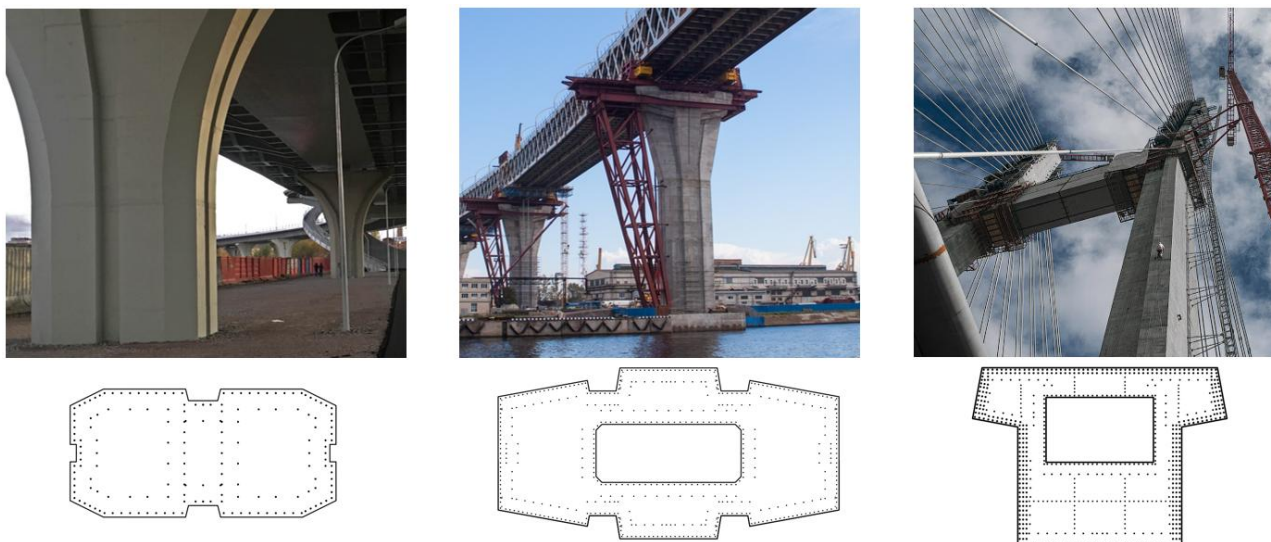


Рисунок 1 – Примеры мостовых сооружений со сложной формой поперечных сечений железобетонных опор (слева направо: мост Бетанкура и ЗСД в г. Санкт-Петербург, Центральный мост в г. Новосибирск)

В действующей нормативной практике расчет железобетонных элементов по прочности нормальных сечений основывается на двух подходах: методе предельного равновесия и нелинейной деформационной модели. Метод предельного равновесия является широко апробированным и регламентированным, однако ориентирован преимущественно на расчет элементов с типовыми сечениями. При анализе конструкций сложной геометрии его применение требует введения упрощающих предположений, связанных с приведением реального сечения к расчетным схемам, допускающим аналитическое решение. При этом отсутствует универсальная формализованная процедура расчета для произвольных сечений, особенно в условиях косого изгиба. В результате при проектировании железобетонных опор сложной формы нередко используются условные расчетные схемы, что может влиять на точность оценки несущей способности.

Нелинейная деформационная модель, допускаемая нормативными документами (в том числе СП 35.13330.2011 в актуализированной редакции с 2021 года), позволяет учитывать реальную диаграмму деформирования бетона и арматуры, а также фактическую геометрию поперечного сечения. Это обеспечивает более полное описание напряженно-деформированного состояния

конструкций. Вместе с тем применение данной модели связано с необходимостью выполнения итерационных процедур при определении предельного состояния, что увеличивает трудоемкость расчетов и ограничивает ее использование при необходимости выполнения большого числа расчетных проверок.

В мировой инженерной практике для повышения эффективности расчетов используются подходы, основанные на построении диаграмм предельных состояний в координатах «продольная сила – изгибающий момент» ($N-M$) (Рисунок 2 –). Применение таких диаграмм позволяет выполнять оценку несущей способности сечений произвольной формы без проведения итерационных расчетов на стадии проверки. Вместе с тем анализ научно-технической литературы показывает, что данный подход не получил широкого распространения при проектировании железобетонных опор мостов, несмотря на его потенциальные преимущества.

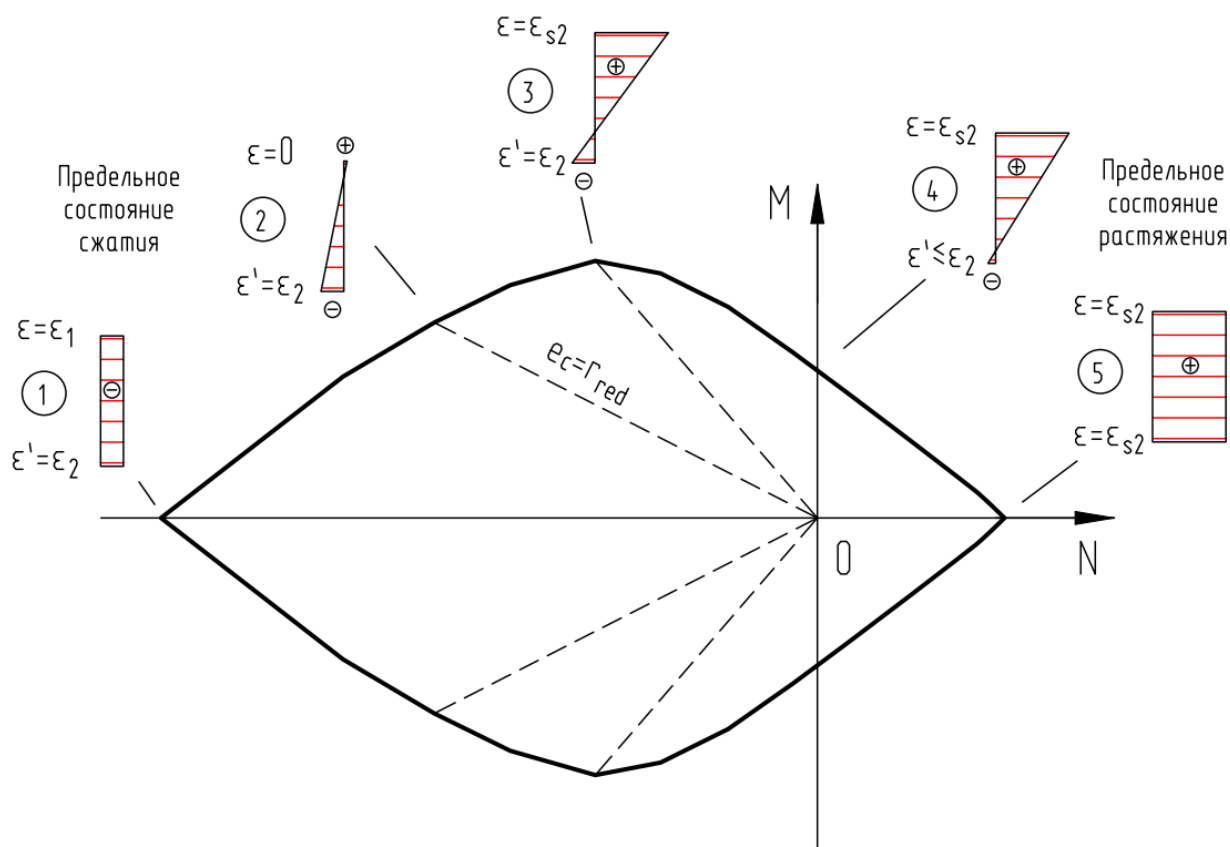


Рисунок 2 – Общая форма диаграммы предельных состояний

Анализ существующих подходов к расчету железобетонных опор мостов показывает наличие ограничений, связанных либо с упрощением геометрии сечения, либо с повышенной трудоемкостью расчетных процедур. Это обуславливает необходимость совершенствования методов расчета, обеспечивающих учет реальной формы сечения и нелинейной работы материалов при приемлемых вычислительных затратах, что определяет актуальность настоящего исследования.

Степень разработанности темы исследования.

Вопросы построения диаграмм предельных состояний железобетонных элементов в координатах «продольная сила – изгибающий момент» длительное время находятся в центре внимания отечественных и зарубежных исследований. Данный подход рассматривается как эффективный инструмент анализа совместного действия продольной силы и изгибающего момента, позволяющий представить предельные состояния сечения в обобщенном виде и использовать их при расчетах конструкций различного назначения.

В отечественной научной школе существенный вклад в развитие методов построения диаграмм предельных состояний и областей сопротивления внесли работы Э.Н. Кодыша, А.М. Болдышева, В.С. Плевкова, И.В. Балдина, Е.В. Онащенко и других исследователей. В этих работах сформированы основные теоретические положения, связанные с описанием предельных состояний железобетонных сечений, предложены различные способы построения областей сопротивления и их использования при расчетах. Полученные результаты позволили заложить основу для практического применения диаграмм предельных состояний в инженерных расчетах.

Вместе с тем анализ отечественных исследований показывает, что большинство разработок ориентировано на элементы с типовыми поперечными сечениями и базируется на ряде упрощающих предположений, в том числе относительно распределения напряжений и формы диаграмм деформирования материалов. При переходе к конструкциям сложной геометрии, характерным, в

частности, для современных мостовых опор, применение данных подходов затруднено.

Отдельной проблемой является учет ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона ($\xi \leq \xi_R$) при использовании нелинейной деформационной модели. В рамках метода предельного равновесия данное условие вводится непосредственно в расчетную схему и используется как один из критериев предельного состояния. Однако при переходе к деформационной модели, основанной на использовании диаграмм деформирования материалов, единый формализованный подход к учету данного ограничения отсутствует. Это связано с различием в постановке задач: если в методе предельного равновесия ограничение задается геометрически, то в деформационной модели параметры состояния определяются через деформации и соответствующие им напряжения. Положение границы сжатой зоны определяется в результате решения системы уравнений, и явное ограничение вида $\xi \leq \xi_R$ не вводится. Это приводит к тому, что при высоких уровнях продольной силы и изгибающего момента расчет может допускать развитие чрезмерно глубокой сжатой зоны, что не соответствует требованиям обеспечения надежности и вызывает расхождения с результатами метода предельного равновесия, особенно в области предельных усилий.

Между тем учет данного ограничения является принципиально важным при расчете железобетонных опор мостов, поскольку он обеспечивает требуемый уровень надежности и направлен на предотвращение хрупкого разрушения сечения, связанного с достижением предельных деформаций сжатого бетона при недостаточном вовлечении растянутой арматуры. Игнорирование этого условия может приводить к завышению несущей способности и, как следствие, к снижению эксплуатационной безопасности и риску прогрессирующего разрушения конструкции.

В связи с различием физических предпосылок методов предельного равновесия и нелинейной деформационной модели в работе выдвигается **гипотеза** о возможности устранения указанного противоречия путем перехода от прямого

геометрического ограничения к эквивалентному деформационно-напряженному критерию.

Целью настоящего исследования является совершенствование метода расчета железобетонных опор мостовых сооружений на основе нелинейной деформационной модели и диаграмм предельных состояний, направленное на повышение надежности оценки несущей способности нормальных сечений за счет согласованного учета ограничением предельной высоты сжатой зоны бетона при рациональной вычислительной трудоемкости.

Область исследования соответствует паспорту научной специальности 2.1.8. Проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей, пункту 6 :«**Совершенствование методов расчета конструкций**, сооружений и их элементов: земляного полотна, пути, оснований, **опор**, дорожного и аэродромного покрытий, пролетных строений, защитных покрытий, тоннельной обделки, несущих, подпорных и ограждающих конструкций, средств организации движения, водопропускных труб, галерей и т.п., на статические и динамические воздействия природного и техногенного происхождения, включая расчеты напряженно-деформированного состояния и водно-теплового режима, грунтовых массивов, металлических, бетонных и **железобетонных конструкций**, гидравлического и ледового режимов акваторий **мостовых переходов**».

Для достижения поставленной цели в работе решается комплекс взаимосвязанных **задач**, направленных на устранение выявленных методических противоречий и формирование согласованного расчетного подхода.

1. Выполнить анализ отечественных и зарубежных методов расчета железобетонных опор мостов и выявить причины расхождений диаграмм предельных состояний, полученных различными расчетными подходами;

2. Выполнить расчетно-аналитическое исследование влияния способа учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона на форму и предельные параметры диаграмм предельных состояний на основе сопоставления результатов

расчета по методу предельного равновесия и нелинейной деформационной модели при различных значениях продольной силы;

3. Совершенствовать метод расчета железобетонных опор мостов на основе нелинейной деформационной модели путем разработки деформационно-прочностной модели учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона без применения итерационных вычислений;

4. Разработать алгоритм построения диаграмм предельных состояний железобетонных опор мостов на основе нелинейной деформационной модели с учетом разработанной модели;

5. Выполнить верификацию разработанного подхода на основе сопоставления результатов расчетов с методом предельного равновесия и результатами численного моделирования, а также количественно оценить повышение надежности результатов расчета по нелинейной деформационной модели по величине расхождений и разбросу результатов;

6. Осуществить практическую реализацию разработанного подхода и оценить его эффективность при расчетах реальных мостовых сооружений.

Объектом исследования являются железобетонные опоры мостовых сооружений.

Предметом исследования является метод расчета железобетонных опор мостовых сооружений в рамках нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений на основе диаграмм предельных состояний.

Научная новизна выполненного исследования заключается в развитии методических положений расчета железобетонных опор мостовых сооружений на основе нелинейной деформационной модели и диаграмм предельных состояний, направленных на устранение выявленных противоречий между существующими расчетными подходами и повышение надежности определения несущей способности. В рамках исследования получены следующие новые научные результаты.

Во-первых, установлены ограничения применимости нелинейной деформационной модели при учете условия ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона ($\xi \leq \xi_R$). Показано, что прямое заимствование геометрического ограничения, используемого в методе предельного равновесия, и его включение в расчетную схему деформационной модели не соответствует ее теоретическим предпосылкам, основанным на описании состояния сечения через деформации и соответствующие им напряжения. В результате такого подхода формируется область некорректных расчетных решений, проявляющаяся в несогласованности предельных параметров, нарушении физической интерпретации напряженно-деформированного состояния и появлении разрывов или нехарактерных участков на диаграммах предельных состояний. Тем самым впервые дано системное объяснение причин расхождений результатов расчетов, получаемых различными методами, которые ранее фиксировались, но не имели однозначной интерпретации.

Во-вторых, предложена деформационно-прочностная методика учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, представляющая собой новое расчетное решение в рамках нелинейной деформационной модели. В отличие от традиционного геометрического подхода, в предложенной модели ограничение формулируется через параметры напряженно-деформированного состояния сечения, что обеспечивает его согласованное включение в расчет без нарушения базовых принципов деформационной теории. Реализация данного подхода позволяет отказаться от формального задания предельной высоты сжатой зоны и перейти к ее косвенному учету через изменение характеристик работы бетона. Это обеспечивает непрерывность расчетного процесса, устраняет необходимость введения дополнительных эмпирических допущений и создает основу для формализованного описания предельных состояний в рамках единой модели.

В-третьих, разработана система критериев применения предложенной деформационно-прочностной модели, позволяющая определить условия начала и завершения действия ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона в зависимости от параметров напряженно-деформированного состояния сечения.

Установлена функциональная зависимость, описывающая изменение расчетного сопротивления бетона в рассматриваемой области, что обеспечивает количественное описание перехода между различными режимами работы сечения. Введение данной зависимости позволило формализовать учет ограничения в расчетной процедуре, исключить неопределенность при выборе расчетных параметров и обеспечить непрерывность и устойчивость получаемых результатов.

Реализация указанных положений обеспечила согласование результатов, получаемых по нелинейной деформационной модели, с результатами метода предельного равновесия в области предельных состояний. Это, в свою очередь, позволило повысить надежность расчетов за счет устранения методических расхождений и обеспечения физически обоснованного описания работы железобетонного сечения при совместном действии продольной силы и изгибающего момента.

Положения, выносимые на защиту

1. Критерии начала и окончания действия ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, основанные на параметрах напряженно-деформированного состояния сечения.

Научная новизна заключается в переходе от традиционного геометрического задания ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона к его определению через параметры напряженно-деформированного состояния сечения. Сформулированы количественные критерии, позволяющие установить границы применимости данного ограничения в рамках нелинейной деформационной модели и устранить неопределенность, возникающую при его использовании.

Теоретическая значимость состоит в развитии положений нелинейной деформационной модели применительно к расчету железобетонных опор мостов. Использование критериев, выраженных через деформационные параметры, обеспечивает согласование геометрического и деформационного подходов к описанию предельного состояния, а также устраняет противоречия между методом предельного равновесия и деформационной моделью.

Практическая значимость определяется возможностью формализованного учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона в инженерных расчетах без введения дополнительных допущений. Это повышает достоверность оценки несущей способности железобетонных опор мостов при действии значительных продольных усилий и обеспечивает применение единого подхода при расчете сечений различной формы.

2. Методика построения диаграмм предельных состояний железобетонных опор мостов на основе нелинейной деформационной модели без использования итерационных вычислений с учетом ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона.

Научная новизна заключается в разработке методики построения диаграмм предельных состояний ($N-M$), учитывающей нелинейную работу материалов и ограничения предельного состояния без применения итерационных процедур. В отличие от существующих подходов, предложенная методика включает деформационно-прочностной критерий непосредственно в расчетный алгоритм и обеспечивает непрерывное описание предельных состояний сечения.

Теоретическая значимость заключается в совершенствовании методов анализа предельных состояний железобетонных опор мостов и расширении области применения нелинейной деформационной модели. Разработанная методика устанавливает связь между параметрами напряженно-деформированного состояния и предельными усилиями, формируя единый расчетный аппарат для построения диаграмм предельных состояний сечений произвольной формы.

Практическая значимость состоит в снижении трудоемкости расчетов за счет исключения итерационных процедур, а также в возможности многократного использования полученных диаграмм при анализе различных расчетных ситуаций. Это повышает эффективность применения методики в задачах многовариантного проектирования мостовых конструкций и способствует повышению устойчивости результатов расчета.

3. Степенная зависимость коэффициента понижения расчетного сопротивления бетона от деформаций растянутой арматуры, учитывающая взаимосвязь параметров напряженно-деформированного состояния и направленная на предотвращение хрупкого разрушения.

Научная новизна заключается в установлении функциональной зависимости, связывающей изменение расчетного сопротивления бетона с деформациями растянутой арматуры. Предложена аналитическая форма этой зависимости, позволяющая учитывать влияние перераспределения деформаций в сечении на предельные характеристики бетона в рамках нелинейной деформационной модели.

Теоретическая значимость определяется развитием представлений о взаимосвязи параметров напряженно-деформированного состояния железобетонного сечения. Введение данной зависимости обеспечивает количественное описание процесса достижения предельного состояния и уточняет механизм учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона.

Практическая значимость заключается в возможности использования предложенной зависимости при расчетах железобетонных опор мостов для снижения вероятности хрупкого разрушения. Это обеспечивает более корректное определение предельных параметров сечения и согласование результатов расчета с реальным характером работы конструкции.

Методология исследования основана на системном подходе к повышению надежности расчетных решений железобетонных опор мостов, в рамках которого рассматривается взаимосвязь между принятыми расчетными предпосылками, фактическим напряженно-деформированным состоянием элементов и характером их предельного состояния. В качестве критерия оценки эффективности и обоснованности расчетных решений принимается сопоставление показателей несущей способности, запаса прочности и расхода арматуры, полученных при использовании различных расчетных методик, а также анализ характера разрушения сечения.

Аналитическая часть исследования включает сравнительный анализ действующих нормативных подходов, в частности метода предельного равновесия с использованием условных приведенных сечений и нелинейной деформационной модели. В ходе анализа выявляются противоречия, связанные с введением ограничений на относительную высоту сжатой зоны бетона и использованием пониженных расчетных сопротивлений, что приводит к формированию избыточных запасов прочности и перерасходу арматуры. На основе этого формулируются предпосылки для уточнения расчетной модели.

Аналитико-математическое моделирование направлено на исследование влияния ограничения относительной высоты сжатой зоны на параметры напряженно-деформированного состояния. Рассматривается перераспределение напряжений между бетоном и арматурой, изменение положения нейтральной оси, а также условия достижения предельных деформаций в сжатой зоне бетона.

Численная часть исследования реализована в виде параметрического эксперимента с использованием нелинейной деформационной модели. В расчетах учитываются реальные геометрические характеристики сечений пилонов, многорядное расположение арматуры, а также нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры. Варьируемыми параметрами являются количество рядов рабочей арматуры, коэффициент армирования, а также уровень действующих нагрузок. Это позволяет проследить изменение несущей способности, запаса прочности и характера работы сечения при различных расчетных предпосылках.

Для количественной оценки достоверности и сходимости результатов применяются методы параметрического и статистического анализа. Выполняется сопоставление результатов, полученных различными методами, анализируются отклонения по ключевым показателям, а также оценивается устойчивость расчетных решений к изменению исходных параметров. Это позволяет установить наличие систематического завышения требуемого армирования при использовании упрощенных расчетных схем.

Обоснование предложенных решений осуществляется на основе численного эксперимента в Midas FEA NX и сопоставительного анализа, в рамках которого демонстрируется, что применение нелинейной деформационной модели обеспечивает более адекватное описание работы железобетонного сечения и позволяет выявить скрытые резервы несущей способности. Это, в свою очередь, подтверждает возможность корректировки расчетных подходов с целью повышения их экономической эффективности при сохранении требуемого уровня надежности.

Практическая значимость исследования

Практическая значимость выполненного исследования заключается в повышении надежности проектных решений при расчете железобетонных опор мостовых сооружений на основе нелинейной деформационной модели за счет обоснованного учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона и предотвращения хрупкого характера разрушения в условиях внецентренного сжатия.

Разработанный в работе подход позволяет устранить неопределенность, возникающую при использовании формул, связанных с прямым применением геометрического ограничения, и обеспечивает его согласованное включение в расчетную процедуру через параметры напряженно-деформированного состояния. Это позволяет повысить достоверность определения предельных усилий и исключить получение некорректных расчетных результатов в области высоких уровней продольных сил.

Предложенная методика построения диаграмм предельных состояний обеспечивает согласование результатов расчета, получаемых по методу предельного равновесия и нелинейной деформационной модели, без применения итерационных процедур. Это существенно снижает трудоемкость расчетов и делает возможным эффективное использование деформационной модели в условиях многовариантного проектирования, когда требуется выполнение большого числа расчетных проверок.

Практическая реализация разработанного подхода позволяет:

- обеспечить более обоснованный выбор конструктивных решений за счет согласованности расчетных моделей;
- использовать полученные диаграммы предельных состояний при оценке несущей способности для различных сочетаний нагрузок без повторного выполнения итерационных расчетных процедур.

Теоретическая значимость исследования

Теоретическая значимость работы заключается в развитии и уточнении методических положений расчета железобетонных элементов на основе нелинейной деформационной модели путем установления закономерностей учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона и определения границ применимости данной модели.

В работе обоснован переход от геометрического представления ограничения к его деформационно-прочностной интерпретации, что обеспечивает согласование различных подходов к описанию предельного состояния железобетонного сечения. Это позволяет устранить методическое противоречие между методом предельного равновесия и нелинейной деформационной моделью и формирует основу для их совместного применения в рамках единого расчетного подхода.

Разработанные критерии и зависимости, связывающие параметры напряженно-деформированного состояния с предельными характеристиками сечения, уточняют представления о механизме работы железобетона в условиях внецентренного сжатия. Это обеспечивает более полное описание перехода к предельному состоянию и позволяет формализовать расчетные процедуры без использования эмпирических допущений.

Апробация результатов

Основные положения диссертационной работы прошли апробацию в рамках научных и научно-практических мероприятий, где они были представлены, обсуждены и получили профессиональную оценку. Результаты исследования

докладывались на практической конференции Midas Conf²⁴ (2024, Москва), где рассматривались вопросы применения численных методов и программных комплексов при расчете конструкций. Отдельные положения работы были представлены на Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные вопросы строительства и развития инженерной школы» (2025, Новосибирск), а также на Международной научно-практической конференции «Инженерное образование XXI века» (2024, 2025, Санкт-Петербург), что позволило обсудить предложенные решения в контексте развития современных подходов к расчету и проектированию железобетонных конструкций.

Внедрение результатов

Результаты диссертационного исследования внедрены в практику проектирования и использованы при расчетах реальных инженерных объектов. В частности, разработанные методические положения применялись в АО «Институт Стройпроект» при расчетах конструкций Центрального моста в г. Новосибирске, а также искусственных сооружений высокоскоростной железнодорожной магистрали Москва – Санкт-Петербург. Кроме того, результаты работы использованы в АО «Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург» при проектировании Широкой магистрали скоростного движения в г. Санкт-Петербурге.

При выполнении расчетов применялись разработанные деформационные критерии учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, зависимость коэффициента понижения расчетного сопротивления бетона, а также положения метода построения диаграмм предельных состояний без использования итерационных процедур.

Применение предложенного подхода в инженерной практике обеспечило повышение надежности расчетов железобетонных опор мостов, позволило обосновать рациональные решения по армированию и снизить трудоемкость

расчетных процедур, что в совокупности привело к снижению материалоемкости проектируемых конструкций без потери их эксплуатационной надежности.

Публикации

По теме диссертационного исследования опубликованы 4 научные работы, в которых отражены основные положения и результаты выполненного исследования. В частности, подготовлено четыре статьи в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК Минобрнауки России и относящихся к 1 и 2 категориям.

Кроме того, получены два свидетельства о государственной регистрации программ для электронных вычислительных машин, непосредственно связанных с тематикой диссертации и реализующих разработанные расчетные алгоритмы. Указанные результаты соответствуют требованиям пункта 12.1 постановления Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842, в соответствии с которым такие свидетельства приравниваются к публикациям, содержащим основные научные результаты диссертационной работы.

Личный вклад автора заключается в самостоятельном формировании научной основы исследования и получении основных результатов диссертационной работы. Автором сформулированы цель и рабочая гипотеза исследования, определены задачи, направленные на решение проблемы повышения надежности расчетов железобетонных опор мостов при использовании нелинейной деформационной модели.

В рамках работы автором выполнен всесторонний анализ отечественных и зарубежных научных источников, что позволило выявить существующие методические противоречия в подходах к расчету железобетонных элементов и обосновать направление дальнейших исследований.

Теоретическая часть исследования реализована автором на основе математического анализа уравнений равновесия нормального сечения с учетом нелинейной работы материалов. На этой основе проведены параметрические численные исследования, направленные на выявление закономерностей влияния

ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона на параметры напряженно-деформированного состояния и предельные характеристики сечения.

Автором разработаны функциональная зависимость коэффициента понижения расчетного сопротивления бетона, деформационные критерии учета ограничения относительной высоты сжатой зоны, а также алгоритм построения диаграмм предельных состояний железобетонных опор мостов без применения итерационных процедур. Полученные решения позволили обеспечить согласование результатов расчета по методу предельного равновесия и нелинейной деформационной модели.

Заключительный этап работы включает выполненные автором анализ, верификацию и обобщение полученных результатов, формулирование выводов и основных положений диссертационного исследования. Кроме того, автором обеспечено внедрение разработанных методических решений в практику проектирования, что подтверждает их прикладную значимость и работоспособность.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 202 страницы, включая 81 рисунок, 9 таблиц и 3 приложения. Список литературы составляет 125 наименований.

Глава 1. Анализ научных и технических исследований в области расчета железобетонных конструкций

1.1. История развития теории расчета железобетонных конструкций

Бетон и железобетон занимают ведущие позиции среди строительных материалов, широко применяемых при строительстве мостовых сооружений. Их популярность объясняется значительными технологическими достижениями в производстве, такими как разработка высокопрочных бетонов и сталей, а также совершенствование методов изготовления и монтажа.

Внедрение современных опалубочных систем и эффективных методов транспортировки бетона привело к значительному увеличению объемов строительства с использованием железобетонных конструкций.

В отечественной инженерной науке сформировались и успешно развивались научные школы, внесшие значительный вклад в развитие строительной отрасли. Среди их основателей можно отметить таких выдающихся ученых, как А.Ф. Лолейт, Я.В. Столяров, П.Л. Пастернак, А.А. Гвоздев, О.Я. Берг, В.И. Мурашев, В.Н. Байков, Г.И. Бердичевский, А.П. Васильев, Н.Н. Складнев, А.В. Забегаев, П.Ф. Дроздов, Б.Ф. Васильев и других.

Их научное наследие продолжает находить отражение в современных исследованиях, которые развивают ведущие специалисты, среди которых В.М. Бондаренко, Н.И. Карпенко, А.С. Залесов, Э.Н. Кодыш, О.В. Радайкин, В.С. Плевков и другие.

Актуальные научные разработки способствуют дальнейшему совершенствованию строительных технологий и нормативной базы, что играет ключевую роль в обеспечении надежности и качества строительных объектов.

Формирование нормативных документов и технических условий для проектирования железобетонных конструкций началось в начале XX века в различных странах. Как отмечается в работе Колмогорова А.Г. и Плевкова В.С. [1],

в 1920-х годах были предложены подходы к расчету железобетона с учетом неупругих деформаций, что позволило разработать методику расчета по разрушающим усилиям, легшую в основу строительных норм [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Ключевым принципом данной методики являлось достижение предельных напряжений одновременно в растянутой арматуре и сжатом бетоне, что позволило сформировать расчетные зависимости на основе равновесия внутренних и внешних усилий без использования гипотезы плоских сечений.

Значительный этап развития связан с внедрением в СССР в 1955 году метода расчета по предельным состояниям, закрепленного в нормативных документах НГТУ 123-55, СН 10-57 [9, 10] и СНиП II-B.1-62 [11]. В дальнейшем данный метод получил распространение в США (с 1965 года) и странах Европы, заменив расчет по разрушающим усилиям. Развитие нормативной базы сопровождалось ее пересмотром, включая принятие СНиП II-21-75 [12] и последующие изменения [13, 14], а также гармонизацию с рекомендациями ЕКБ/ФИП [15].

Дальнейшее развитие связано с переходом к расчетам на основе нелинейной деформационной модели, учитывающей гипотезу плоских сечений и диаграммы деформирования бетона и арматуры. В отечественной практике данный подход был внедрен с задержкой и окончательно закреплен в мостостроении лишь в 2021 году с введением Изменения 3 к СП 35.13330.2011 [16].

До этого расчеты в значительной степени основывались на эмпирических зависимостях, полученных по результатам экспериментов, что было характерно также для стран СЭВ и Китая. При этом в западной практике расчеты базировались на аналитических моделях и гипотезе плоских сечений.

В настоящее время выявляются недостатки существующих отечественных методик: несогласованность расчетов по различным предельным состояниям и ограниченная область применимости эмпирических зависимостей, что может приводить к противоречивым результатам и затрудняет их программную реализацию.

Одним из факторов развития расчетных методов является необходимость гармонизации отечественных норм с международными стандартами. В настоящее время применение нелинейной деформационной модели обеспечивает универсальный подход к расчету железобетонных конструкций, позволяя учитывать различные предельные состояния, формы сечений и схемы армирования [17].

Метод расчета прочности железобетонного элемента по предельному изгибающему моменту основан на сравнении действующего изгибающего момента с его предельным значением. В расчете принимается гипотеза плоских сечений, при этом бетон в растянутой зоне не учитывается.

Определяется изгибающий момент M от расчетных нагрузок. При внецентренном сжатии он принимается равным произведению продольной силы на эксцентриситет Ne_0 . Нагрузка включает постоянные и временные составляющие с учетом коэффициентов надежности и геометрии элемента.

Предельный изгибающий момент определяется по прочностным характеристикам бетона и арматуры с учетом высоты сжатой зоны. В расчетах применяются различные аппроксимации эпюры напряжений в бетоне (прямоугольная, трапецеидальная, параболо-прямоугольная). Проверка выполняется сравнением M и M_{lim} .

В работе А. М. Болдышев и В. С. Плевков [18] рассмотрена методика оценки прочности нормальных сечений с использованием областей относительной прочности, ограниченных двумя кривыми и четырьмя прямыми. Подход позволяет учитывать полный диапазон сочетаний продольной силы и изгибающего момента и эффективен при программной реализации.

Диаграмма $N-M$ (диаграмма взаимодействия, диаграмма предельных состояний) представляет зависимость между продольной силой и изгибающим моментом, соответствующую предельной несущей способности сечения [19]. Точки на границе диаграммы соответствуют предельным состояниям, внутри области – допустимым сочетаниям, за пределами – разрушению.

Для изотропных материалов взаимодействие может быть описано линейной зависимостью:

$$\frac{P}{R_{max}A} + \frac{My}{R_{max}I} = 1$$

$$\frac{P}{P_{max}} + \frac{M}{M_{max}} = 1$$

Для анизотропного материала различие прочности при сжатии и растяжении приводит к смещению диаграммы (Рисунок 3 –).

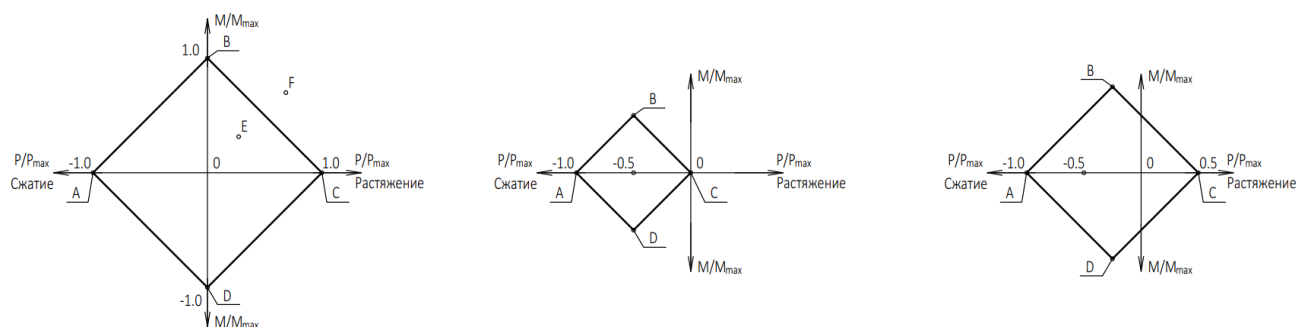


Рисунок 3 – Диаграмма взаимодействия для упругих материалов (слева – для изотропного материала, по середине – для анизотропного материала с $R_{t,max} = 0$, справа - $R_{t,max} = 0,5R_{max}$)

Геометрия диаграммы определяется соотношением армирования и характеристиками материалов. При увеличении продольной силы возрастает высота сжатой зоны, а разрушение переходит от изгибного к сжатию.

Использование диаграмм взаимодействия позволяет учитывать весь спектр сочетаний усилий, обеспечивая более корректную оценку несущей способности по сравнению с отдельными проверками. Современные программные комплексы автоматически формируют такие диаграммы с учетом параметров сечения и нагружения.

1.2. Диаграммы предельных состояний в научной и технической литературе

1.2.1. Отечественная литература

В разработке методики расчета железобетонных элементов с использованием областей сопротивления, построенных в координатах относительных значений продольных усилий и изгибающих моментов, принимали участие А. А. Гвоздев, В. М. Келдыш, Э. Н. Кодыш, И. К. Никитин, Н. Н. Трекин, А. М. Болдышев, В. С. Плевков, И. В. Балдин, А. А. Тарасов и др. Данный подход позволил сформировать удобные графические методы расчета железобетонных элементов.

Впервые способ оценки несущей способности железобетонных элементов с применением диаграмм в отечественной литературе был предложен А. А. Гвоздев [20]. На диаграмме выделены области равномерного сжатия, внецентренного сжатия, внецентренного растяжения и линия чистого изгиба для прямоугольного сечения. Диаграммы строятся в относительных координатах:

$$x = \frac{\bar{T}}{R_u b h_0};$$

$$y = \frac{\bar{T}^*}{R_u b h_0};$$

$\bar{T}$ – сила, разрушающая сечение и приложенная в уровне центра тяжести нижней арматуры;

$\bar{T}^*$ – сила, разрушающая сечение и приложенная в уровне центра тяжести верхней арматуры;

Анализ диаграммы показывает, что характер деформирования сечения изменяется по мере перехода между областями: при внецентренном сжатии второго рода поведение элемента теряет пластический характер и возрастает вероятность хрупкого разрушения [21, 22]. Это накладывает ограничения на применение метода предельного равновесия.

В рамках предложенного подхода А.А. Гвоздев рассматривает несущую способность как функцию внутренних (собственных) напряжений. В зависимости от их влияния нагрузки разделяются на три класса: исключаящие разрушение, неизбежно приводящие к разрушению и допускающие его при определенных условиях. Соответственно вводятся внутренняя и внешняя границы несущей способности, ограничивающие область допустимых состояний конструкции.

Дальнейшее развитие метод получил в руководстве [23], где предельные состояния формализуются в виде неравенств, определяющих допустимые усилия. Область прочности рассматривается как выпуклая область в координатах $M-N$ с характерными точками, соответствующими различным видам напряженного состояния. Для практических расчетов криволинейные границы заменяются линейными аппроксимациями, что обеспечивает некоторый запас прочности.

Существенный вклад в развитие метода внес Э. Н. Кодыш [24], предложивший использовать зависимости вида $\alpha_m = f(\alpha_n)$ для прямоугольных сечений с симметричным армированием. Это позволило упростить проверку прочности, сводя ее к определению коэффициента α_m и проверке условия $M \leq \alpha_m R_b b h^2_0$.

В той же работе рассматривается применение кривых взаимодействия при расчете кососжатых элементов. При совместном действии изгибающих моментов в двух направлениях и продольной силы задача существенно усложняется, поскольку требует учета всех уравнений предельного равновесия и нелинейных свойств материалов.

Данный подход особенно эффективен при сложных схемах армирования, когда заранее определить распределение напряжений в арматуре затруднительно. Кроме того, применение заранее построенных или обобщенных кривых взаимодействия позволяет существенно сократить трудоемкость расчетов при анализе различных комбинаций нагрузок (M_x , M_y и N), что имеет важное значение при проектировании и проверке типовых конструкций.

Работы А. Г. Колмогорова и В. С. Плевкова [1] посвящены исследованию областей относительной прочности и трещиностойкости элементов прямоугольного сечения. Представленные зависимости отражают влияние принятых диаграмм деформирования бетона и арматуры на границы несущей способности. При этом выделяются две характерные области: область «А», соответствующая работе элемента без трещин, и область «В», характеризующая состояние с трещинами.

В докторской диссертации В. С. Плевков [25] выполнено комплексное исследование применения границ областей относительной прочности и трещиностойкости при расчете железобетонных конструкций. Для нормальных сечений рассмотрены случаи отсутствия арматуры, армирования только сжатой зоны, симметричного и несимметричного армирования, что позволяет проследить закономерности трансформации областей прочности при изменении параметров сечения.

Полученные зависимости подтверждаются обширными экспериментальными данными, приведенными в работе В. С. Плевков [30], что свидетельствует о корректности применения деформационной модели при построении границ относительной прочности.

В исследовании, представленном в кандидатской диссертации С. В. Балдин [31], рассматривается применение диаграмм несущей способности, интерпретируемых как границы областей относительной прочности. Автор анализирует принципы расчета железобетонных элементов с учетом данных областей и приводит результаты экспериментальных исследований при статическом нагружении, на основе которых построены соответствующие границы.

В дальнейшем развитии подхода В. С. Плевков рассматривает построение замкнутой выпуклой поверхности в пространстве относительных параметров, ограничивающей область относительной прочности нормального сечения железобетонного элемента. Анализ зависимостей, определяющих форму и

положение данной поверхности, позволяет учитывать особенности напряженно-деформированного состояния при различных схемах армирования и нагружения, обеспечивая более точную оценку несущей способности и расширяя возможности применения метода в численных расчетах.

В исследовании [26] предложены аналитические зависимости для определения минимально допустимой прочности бетона и минимальных геометрических параметров сечения изгибаемых железобетонных элементов. Рассматриваются условия выбора схем армирования в зависимости от уровня внешнего воздействия и расположения арматуры по высоте сечения. Отдельно отмечается возможность применения зависимостей для расчета элементов со смешанным армированием растянутой зоны, что имеет практическое значение при усилении конструкций. Показано, что предложенные зависимости позволяют решать как прямые, так и обратные задачи расчета нормальных сечений.

В работе В.М. Попова и М.Г. Плюснина [27] рассматривается влияние деформационных характеристик бетона на результаты расчета железобетонных элементов в рамках нелинейной деформационной модели. Результаты численных экспериментов показали, что изменчивость этих характеристик оказывает существенное влияние на несущую способность изгибаемых элементов, а также на предельные значения процента армирования и высоты сжатой зоны, особенно при повышенном армировании. Авторы отмечают, что действующие нормативные документы содержат лишь усредненные значения деформационных характеристик, без учета их изменчивости, что может существенно повлиять на результаты расчетов.

Диаграммы предельных состояний применяются при расчете типовых конструктивных элементов, таких как колонны и сваи [28]. В зависимости от решаемой задачи используются различные наименования графических зависимостей (прочности, трещиностойкости, выносливости).

Различия в терминологии, используемой для обозначения графических зависимостей, отражающих работу железобетонных элементов, обусловлены

ориентацией на различные критерии предельных состояний. Отсутствие единого подхода к наименованию приводит к методической неоднозначности.

Согласно ГОСТ 27751–2014, расчет конструкций выполняется по предельным состояниям первой и второй групп, что требует однозначной идентификации используемых расчетных критериев. Графические зависимости в координатах относительных параметров могут описывать как предельные состояния по несущей способности, так и по эксплуатационной пригодности.

В качестве обобщающего в данной работе используется термин «диаграмма предельных состояний», отражающий связь графических методов с нормативной базой и позволяющий унифицировать подход к их применению.

1.2.2. Зарубежная литература

Развитие методов проектирования железобетонных конструкций в странах Западной Европы и США связано с экспериментальными исследованиями армированного бетона, начатыми в середине XIX века [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. С расширением применения железобетона в строительстве возникла необходимость стандартизации расчетных подходов, что привело к разработке нормативных документов, в частности ACI 318.

Формирование теории расчета внецентренно сжатых элементов происходило параллельно в зарубежной и отечественной научных школах [39, 40, 41]. Ранние методы основывались на приведенном сечении и использовании соотношения модулей упругости бетона и стали, однако такие подходы не учитывали неупругое поведение бетона и оказались ограниченными с точки зрения точности и надежности.

Развитие неупругих методов расчета сопровождалось уточнением ключевых положений расчетных моделей, включая характер распределения напряжений в бетоне, предельные деформации, положение нейтральной оси, учет растянутого бетона, применимость гипотезы плоских сечений, а также условия совместной работы бетона и арматуры. В большинстве моделей принималось отсутствие

сопротивления бетона растяжению, линейное распределение деформаций по высоте сечения и идеальное сцепление арматуры с бетоном. Для стали использовалась диаграмма с площадкой текучести, для бетона – различные нелинейные зависимости «напряжение–деформация».

В зарубежной практике [42] выделяются характерные типы разрушения изгибаемых железобетонных элементов: разрушение по сжатому бетону, по растянутой арматуре, сбалансированное состояние, разрушение при превышении текучести арматуры и хрупкое разрушение. Эти классификации отражают различные соотношения деформаций и напряжений в материалах сечения.

Неупругие методы расчета основываются на системе уравнений равновесия и совместности деформаций при допущении отсутствия работы бетона на растяжение, что позволяет определять напряженно-деформированное состояние сечения и условия достижения предельных состояний.

Развитие графических методов расчета привело к формированию диаграмм взаимодействия, отражающих совместное влияние продольной силы и изгибающего момента на несущую способность сечения [43]. Экспериментальные [42, 44, 45] исследования показали, что данная зависимость носит нелинейный характер, что обусловило применение диаграмм для разграничения допустимых и предельных сочетаний усилий и анализа различных режимов работы железобетонных элементов.

С развитием теории предельных состояний и численных методов расчета диаграммы взаимодействия были интегрированы в нормативные документы по проектированию железобетонных конструкций. Современные программные комплексы позволяют учитывать нелинейные свойства материалов, параметры армирования и геометрию сечения, что расширяет возможности применения Р–М диаграмм при анализе несущей способности элементов, работающих при сложных сочетаниях усилий.

В работах Дж. К. Уайта и Дж. Г. МакГрегора [41, 46], выполненных на основе требований ACI 318 [47], приведены характерные точки диаграммы

взаимодействия для внецентренно сжатых железобетонных элементов (Рисунок 4 –). Эти точки соответствуют различным предельным состояниям и отражают изменение механизма работы сечения при варьировании соотношения продольной силы и изгибающего момента.

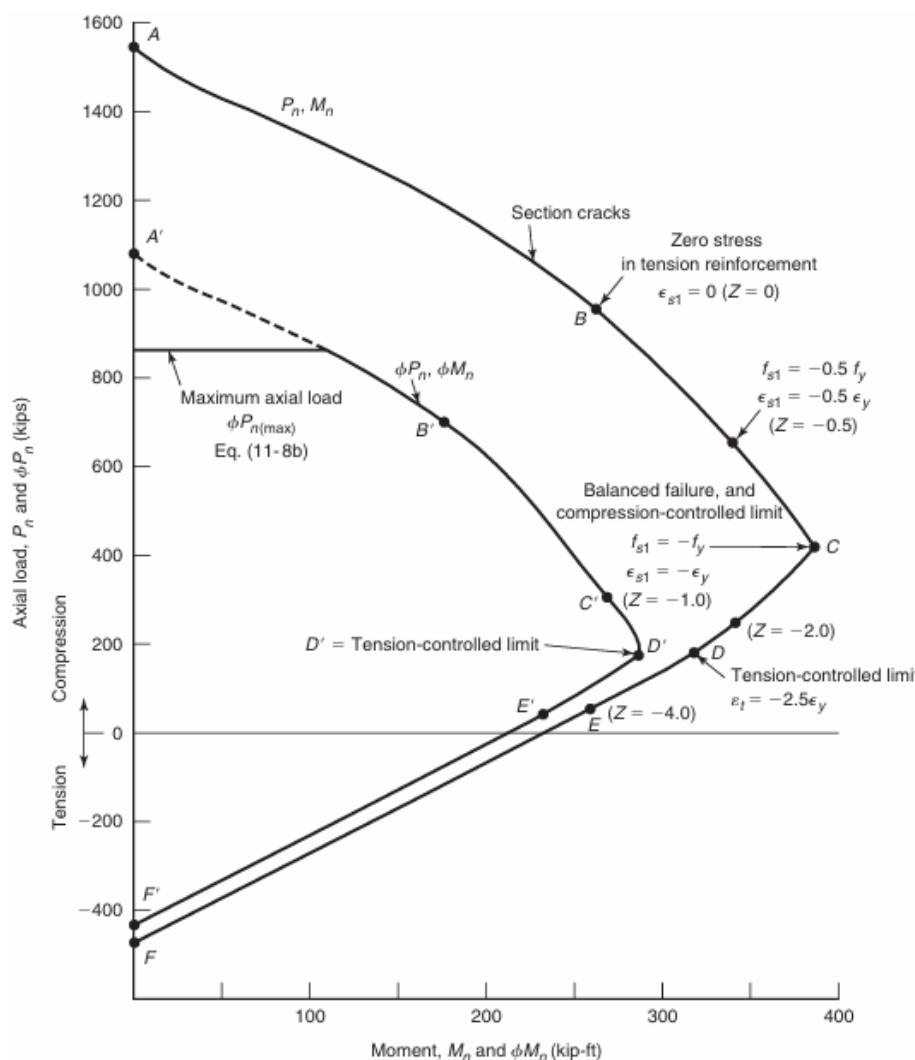


Fig. 11-18
Interaction diagram—
Example 11-1.

Рисунок 4 – Описание основных точек диаграммы (стр. 510) [41]

В зарубежной практике для описания работы сжатого бетона широко применяется упрощенная модель прямоугольной эпюры напряжений [48]. Согласно подходу, предложенному Ч. Уитни [49], напряжения в сжатой зоне принимаются равномерно распределенными и равными 0,85 от предельной прочности бетона, а высота эквивалентной зоны сжатия определяется через коэффициент β_1 и положение нейтральной оси. Значение коэффициента β_1 зависит от прочности бетона и уменьшается с ее ростом (Рисунок 5 –).

Экспериментальные исследования [50, 51] показывают, что применение прямоугольной эпюры обеспечивает достаточную точность при расчете изгибаемых элементов и внецентренно сжатых элементов при умеренных значениях прочности бетона. При высоких прочностях и малых эксцентриситетах возможно завышение расчетной несущей способности.

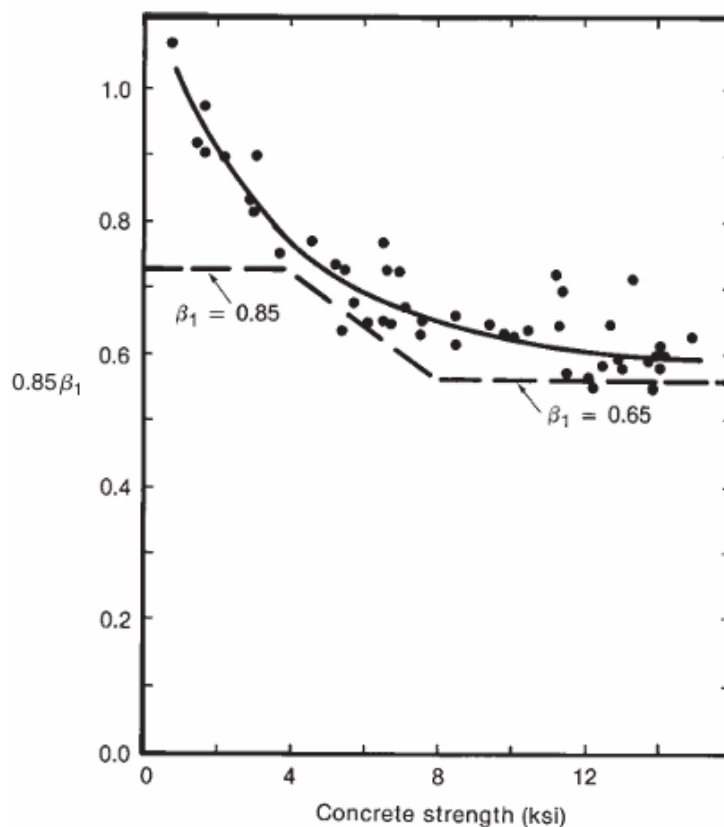


Fig. 4-17
Values of β_1 from tests of
concrete prisms. (From [4-7].)

Рисунок 5 – Значения коэффициентов β_1 , полученные в результате экспериментов [50]

Использование диаграмм взаимодействия в рамках нормативных методик позволяет упростить расчет, исключив необходимость решения уравнений равновесия для каждого сочетания нагрузок, и повысить наглядность анализа предельных состояний.

Диаграммы взаимодействия получили широкое распространение в научных исследованиях и инженерной практике, где применяются для анализа и проектирования железобетонных элементов с учетом различных факторов, влияющих на их напряженно-деформированное состояние [52, 53].

В работе [54] рассматривается построение диаграмм взаимодействия типа $P-M$ для железобетонных сечений различной формы. Представлена методика формирования расчетных зависимостей на основе теоретических поверхностей взаимодействия, позволяющая сократить объем вычислений. Показано влияние коэффициента армирования, прочности бетона и уровня осевой нагрузки на конфигурацию диаграмм, а также учтены особенности переходных зон.

В исследовании [55] анализируется влияние высоких температур на несущую способность железобетонных элементов. Установлено, что температурные воздействия приводят к изменению формы диаграмм взаимодействия вследствие снижения прочностных характеристик материалов и возникновения дополнительных деформаций.

В работе [56] рассматривается построение и анализ диаграмм взаимодействия для колонн сложного сечения с сопоставлением аналитических решений и численных результатов, полученных в программных комплексах в соответствии с SP 16 (1980): Design Aids for Reinforced Concrete to IS 456:1978 [CED 2: Cement and Concrete] [57]. Показана сопоставимость результатов при корректном учете геометрии и характеристик материалов.

Работа [58] посвящена оптимизации армирования железобетонных колонн с использованием диаграмм взаимодействия. Проектирование сведено к задаче нелинейной оптимизации, что позволяет учитывать различные сочетания усилий и повышать эффективность конструктивных решений.

В исследовании [59] разработана аналитическая модель диаграмм взаимодействия для колонн из геополимерного бетона с неметаллической арматурой (GPC). Подтверждена высокая точность модели при сопоставлении с экспериментальными данными и выявлено влияние прочности бетона и степени армирования на несущую способность.

В работе [60] диаграммы взаимодействия применяются для анализа оснований колонн в стальных конструкциях с учетом их конечной жесткости. Учет реальной работы основания позволяет уточнить распределение усилий в системе.

В исследованиях [61], [62] диаграммы взаимодействия используются для анализа фундаментов при комбинированном нагружении. Показано, что такие диаграммы позволяют учитывать влияние изгибающего момента на несущую способность основания и формализовать условия предельных состояний для различных типов грунтов.

1.2.3. Расчетные комплексы и программные реализации построения диаграмм предельных состояний

В настоящее время для расчета железобетонных элементов широко применяются специализированные программные комплексы, реализующие различные подходы к построению и использованию диаграмм предельных состояний. Эти системы обеспечивают выполнение расчетов в соответствии с действующими нормативными документами, включая СП 63.13330.2012 [63] и ACI 318-19 [47], а также позволяют учитывать нелинейные свойства материалов и особенности работы сечений.

Анализ программных комплексов показывает, что ключевыми характеристиками являются поддерживаемые нормативные базы, типы реализуемых диаграмм и поверхностей предельных состояний, учет диаграмм деформирования материалов и возможности настройки расчетных параметров. Данные критерии определяют применимость программ для решения практических задач проектирования.

Среди отечественных программных комплексов выделяются SCAD Office и ЛИРА, ориентированные на расчет железобетонных конструкций в соответствии с российскими и международными стандартами. В SCAD Office [64, 65, 66], в частности в модуле «АРБАТ», реализовано построение диаграмм (Рисунок 6 –) и поверхностей взаимодействия (Рисунок 7 –), позволяющих учитывать совместное действие продольной силы и изгибающих моментов в различных плоскостях. Использование трехмерных поверхностей взаимодействия обеспечивает более полное представление о несущей способности элементов при сложных сочетаниях нагрузок.

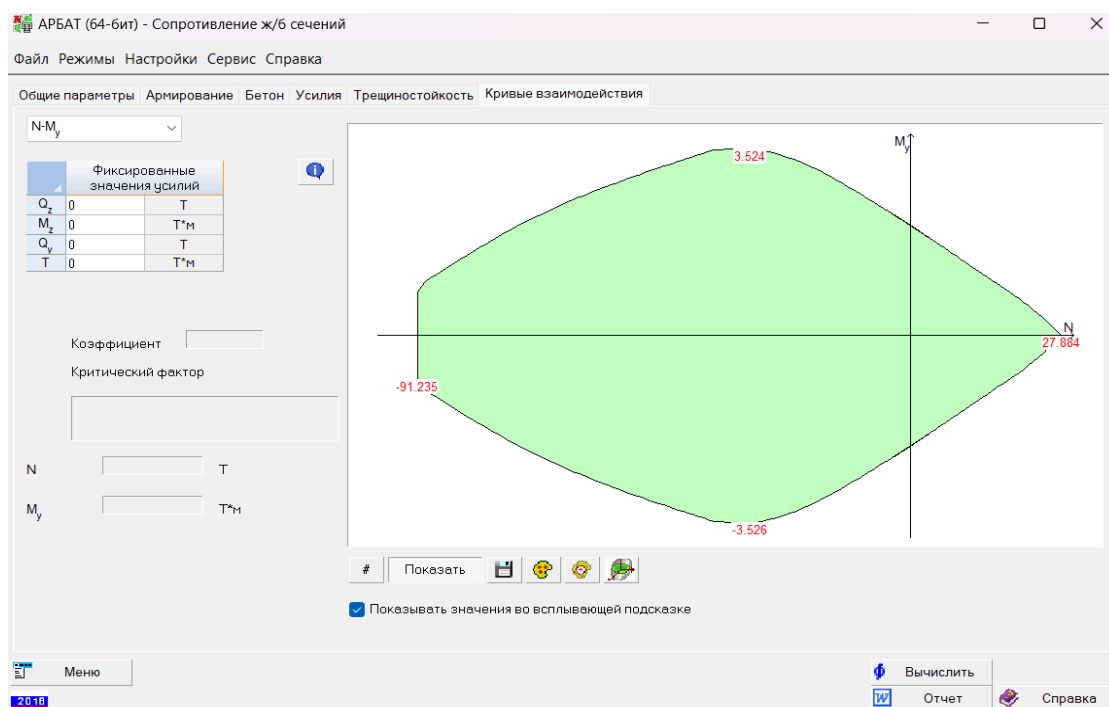


Рисунок 6 – Диаграмма взаимодействия в программе «АРБАТ» SCAD Office

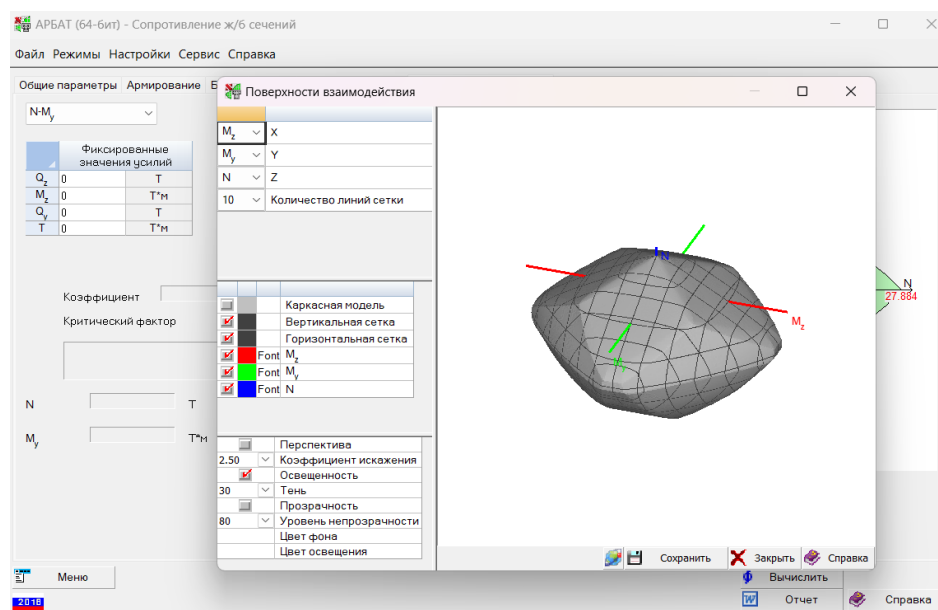


Рисунок 7 – Поверхность взаимодействия в программе «АРБАТ» SCAD Office

Программный комплекс ЛИРА 10.8 [67] реализует расчеты железобетонных конструкций по СП 63.13330.2012 и позволяет выполнять анализ сечений произвольной формы с подбором армирования (Рисунок 8 –). В системе предусмотрены проверки по различным видам предельных состояний, а также

инструменты для оценки несущей способности при комбинированном действии усилий на основе поверхностей прочности.

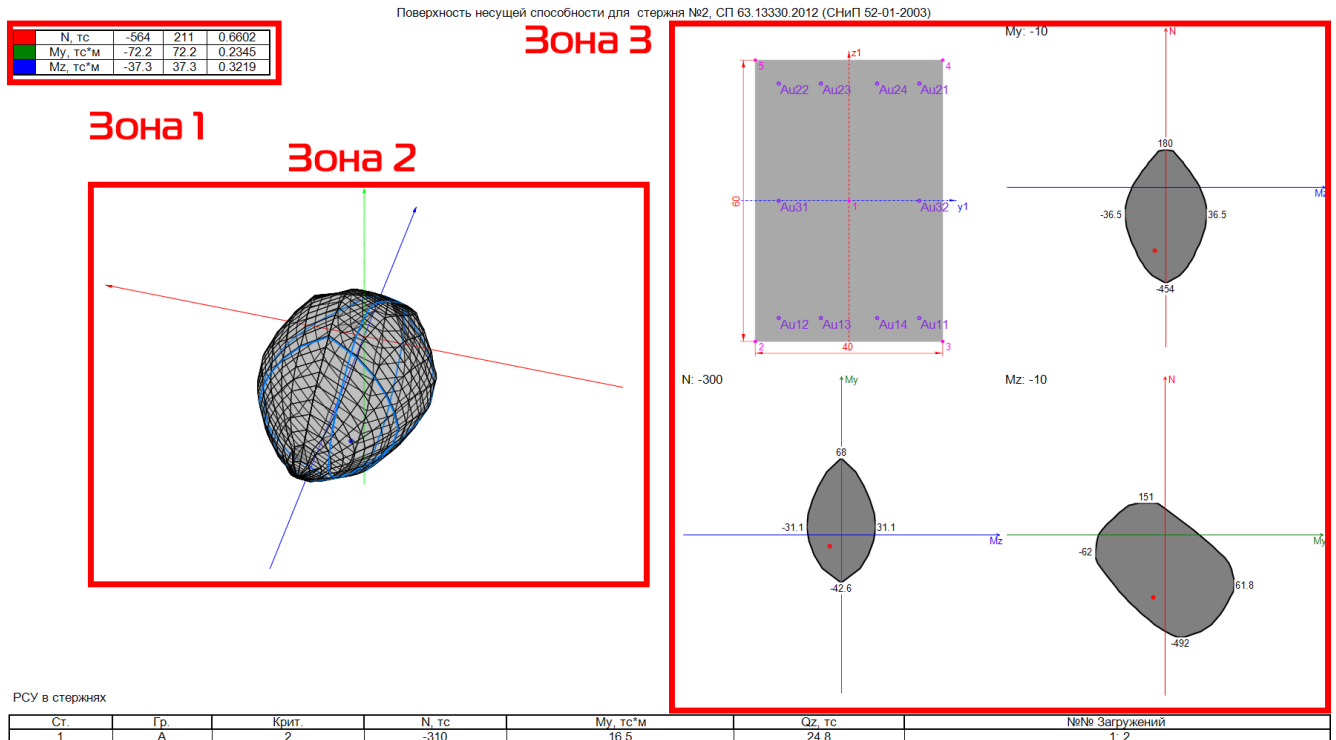


Рисунок 8 – Поверхность несущей способности в программе ЛИРА 10.8

Отдельное направление представляют программные разработки, созданные в рамках научных исследований под руководством В.С. Плевкова [25, 68, 1], в которых реализована теория диаграмм несущей способности с учетом нелинейного деформирования бетона и арматуры.

Российские программные комплексы обеспечивают высокую степень соответствия требованиям СП 63.13330.2012 [63], что делает их эффективным инструментом для проектирования железобетонных конструкций в рамках отечественной нормативной базы. Они широко применяются в проектных организациях и образовательной среде, обеспечивая решение задач расчета и анализа с учетом действующих стандартов.

Вместе с тем данные программные продукты характеризуются ограниченной гибкостью в настройке расчетных параметров, что может снижать их эффективность при решении нестандартных или исследовательских задач.

Дополнительные сложности связаны с необходимостью регулярного обновления программного обеспечения в связи с изменениями нормативных документов.

Следует учитывать, что требования СП 35.13330.2011 [16], применяемого при расчете мостовых сооружений, в ряде аспектов отличаются от СП 63.13330. Это требует корректировки расчетных алгоритмов и параметров при использовании программных комплексов, ориентированных преимущественно на общестроительные нормы.

Ограничения также проявляются в недостаточной интеграции с международными стандартами, что усложняет применение российских программ в рамках зарубежных проектов.

На международном рынке представлены программные комплексы, реализующие более гибкие подходы к расчету железобетонных элементов. Программа *spColumn* [69] позволяет выполнять расчет стержневых элементов с использованием диаграмм и поверхностей несущей способности в соответствии с требованиями ACI 318-19, включая анализ сечений произвольной формы и различных схем армирования.

Программный комплекс *Midas Civil* (модуль *GSD*) [70, 71] предоставляет расширенные возможности моделирования, включая использование различных диаграмм деформирования, настройку расчетных параметров и визуализацию результатов в виде диаграмм взаимодействия (Рисунок 9 –), поверхностей несущей способности (Рисунок 10 –) и кривых «момент–кривизна» (Рисунок 11 –). Это обеспечивает более глубокий анализ напряженно-деформированного состояния элементов.

Зарубежные программные комплексы, такие как *SkyCiv* [72], *SAP2000* [73] и *RFEM* от *Dlubal Software* [74, 75], также обладают широким функционалом, однако использование закрытого исходного кода ограничивает возможности модификации расчетных алгоритмов и их адаптации под специфические задачи.

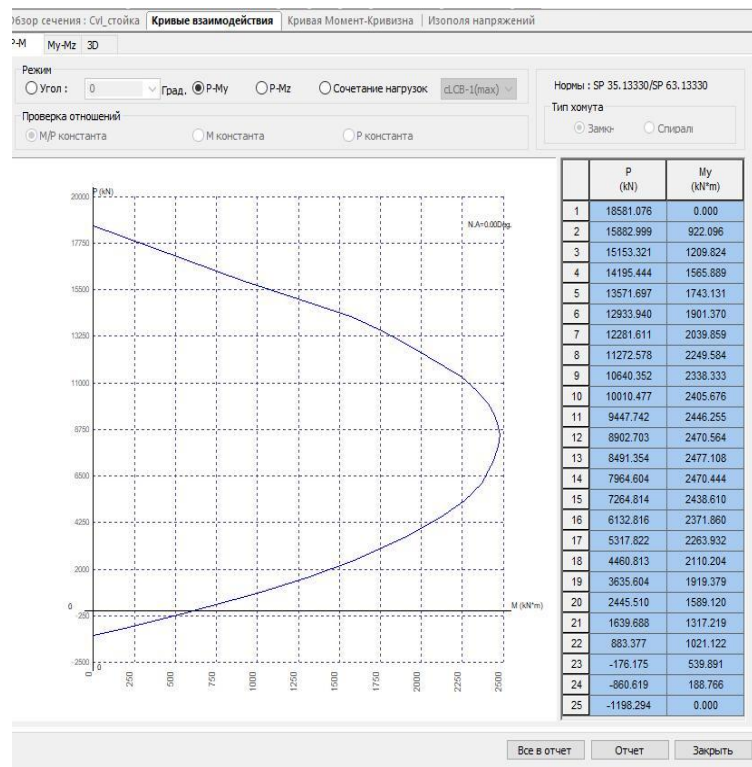


Рисунок 9 – Диаграмма взаимодействия в модуле GSD Midas Civil

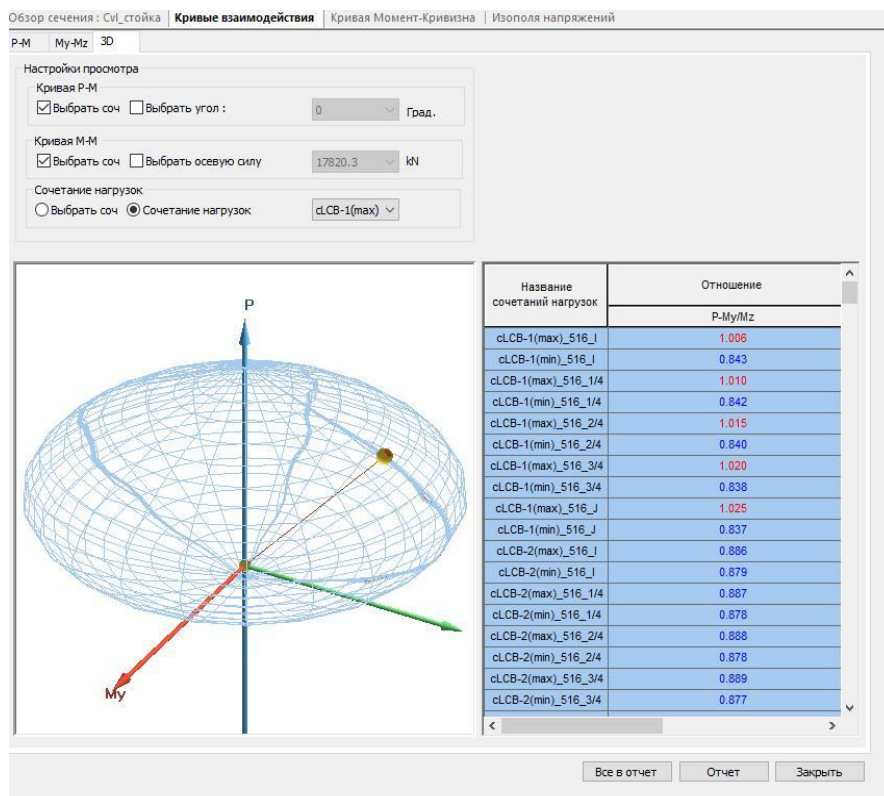


Рисунок 10 – Поверхность взаимодействия в программе GSD Midas Civil

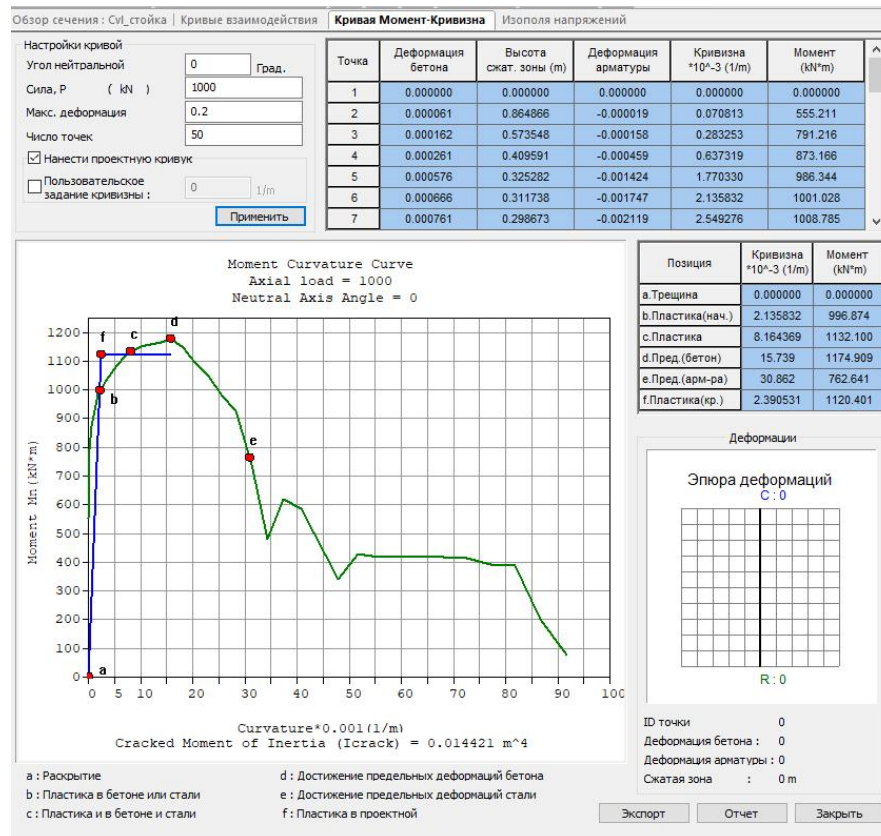


Рисунок 11 – Кривая Момент-Кривизна в программе Midas Civil

1.2.4. Учет ограничения предельной относительной высоты сжатой зоны бетона в существующих методах расчета

Ограничение предельной высоты сжатой зоны в железобетонных элементах при внецентренном сжатии исторически связано с необходимостью предотвращения хрупкого разрушения конструкций, особенно в случаях перearмирования.

Необходимость рассмотрения данного ограничения в настоящей работе в первую очередь обусловлена результатами анализа диаграмм предельных состояний, выполненного в предыдущем разделе. Сопоставление подходов, представленных в отечественной и зарубежной литературе, а также реализованных в современных программных комплексах, показало наличие существенных различий в форме диаграмм в области внецентренного сжатия при малых эксцентриситетах. Установлено, что указанные расхождения связаны с различными способами учета предельной высоты сжатой зоны бетона и критериев

достижения предельного состояния. В ряде методик данное ограничение задается непосредственно, тогда как в других реализуется косвенно через параметры деформационной модели или не реализуется вообще, что приводит к отличиям в оценке несущей способности и характере предельных кривых.

Возникновение хрупких форм разрушения, при которых деформационная способность сечения оказывается недостаточной для перераспределения усилий, предопределило внедрение расчетных ограничений, направленных на обеспечение пластичности и предсказуемости предельного состояния [76, 77, 78].

Допущение хрупкого разрушения бетона сжатой зоны напрямую связано с возможным прогрессирующим разрушением. Теме прогрессирующего разрушения и живучести мостовых сооружений посвящены следующие работы [79, 80, 81].

Теоретическое обоснование соответствующих ограничений впервые было систематизировано в работе Гвоздева А.А. (1978) [82], положения которой легли в основу современных расчетных моделей и нормативных требований.

Вопросы, связанные с нормативным обоснованием и практической реализацией данного ограничения в расчетах по диаграммам предельных состояний, регламентируемым СП 63.13330 [63], нашли отражение в научных публикациях В.С. Плевкова, И.В. Балдина, Р.А. Плевкова и др. [26, 83, 77]. В указанных работах рассматриваются особенности применения ограничений в зависимости от характеристик сечения и видов армирования, а также приводятся предложения по уточнению расчетных моделей, повышающих соответствие проектных решений реальному поведению железобетонных элементов в условиях сложного напряженного состояния.

Далее будет приведено обоснование исходного ограничения из работы Гвоздева А.А. [82] с целью показать его влияние на развитие методов расчета и нормативных положений, направленных на предотвращение хрупкого разрушения.

Использование высоты сжатой зоны в качестве исходного параметра для определения напряжения в арматуре при расчете железобетонных элементов методом предельного равновесия имеет ряд преимуществ, поскольку высота

сжатой зоны качественно отражает особенности напряженного состояния сечения – она учитывает совокупность влияния многих параметров (вид и количество арматуры, прочность и деформативность бетона, эксцентриситет и т.п.). Поэтому зависимость $\sigma_a - \xi$ принимает универсальный характер, будучи пригодной как для внецентренно-сжатых и растянутых, так и для изгибаемых элементов.

Обработка результатов экспериментов показала, что в предельном состоянии связь между приращением деформаций арматуры $\Delta \varepsilon_a$ от внешних воздействий и относительной высотой сжатой зоны ξ (при прямоугольной эпюре напряжений в сжатом бетоне) имеет в целом гиперболический характер.

Существует зависимость, при которой при увеличении прочности бетона уменьшается приращение деформаций арматуры $\Delta \varepsilon_a$ при одинаковых значениях ξ . Это объясняется двумя причинами. Первая – различие в высоте сжатой зоны при фактической и условной прямоугольной эпюрах напряжений в бетоне и вторая – различие в предельной деформации наиболее напряженной грани сечения элемента из бетона разных классов. В исследованиях Хогнестеда [84] и В. В. Беликова (НИИЖБ) обобщены результаты различных исследований, которые показали, что с уменьшением прочности бетона деформация сжатой грани внецентренно-сжатых элементов увеличивается [85].

Связь между деформациями арматуры в предельном состоянии и относительной высотой сжатой зоны, учитывая ее характер, может быть приближенно описана единой зависимостью $\Delta \varepsilon_a = A / \xi - B$, которая в графической форме представлена ниже (Рисунок 12 –). Здесь деформации удлинения приняты со знаком плюс, а деформации укорочения – со знаком минус. Принимая эту зависимость, исходили из того, что некоторая ошибка в определении деформации арматуры в области их малых значений (порядка $\pm 0,0005$) практически не влияет на точность расчета прочности нормальных сечений.

Рис. 6. Зависимости приращения деформации арматуры $\Delta \varepsilon_a$ (1) и полных деформаций ε_a (2) при предварительном напряжении арматуры ε_0 от высоты сжатой зоны ξ

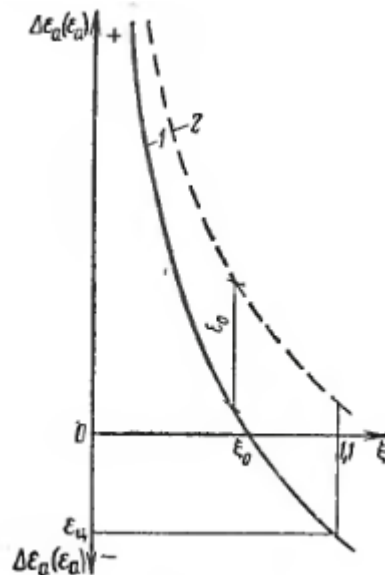


Рисунок 12 – Зависимости приращения деформации арматуры $\Delta \varepsilon_a$ (1) и полных деформаций ε_a (2) при предварительном напряжении арматуры ε_0 от высоты сжатой зоны ξ (стр. 43 [82])

Коэффициенты A и B определяли эмпирическим путем из условия, чтобы опытные значения ε_a и вычисленные по формуле $\Delta \varepsilon_a = A / \xi - B$ достаточно хорошо соответствовали друг другу.

Как видно из графика выше (Рисунок 12 –) на графике имеются две характерные точки. Одной из них соответствуют приращение деформаций арматуры от внешних воздействий, равное нулю, и относительная высота сжатой зоны, обозначенная ξ_0 , а второй – приращение деформаций арматуры, равное предельному укорочению бетона при центральном сжатии $\Delta \varepsilon_a = \varepsilon_{ц}$. Как правило, арматура в железобетонных элементах располагается на расстоянии, примерно равном 0,1 высоты сечения h от грани элемента. Поэтому при центральном сжатии, когда все сечение сжато и $x = h$, значение $\xi = h / h_0$ оказывается примерно равным 1,1. Чтобы не усложнять расчет, учитывая переменное значение ξ для состояния $\Delta \varepsilon_a = \varepsilon_{ц}$, было решено принять постоянное значение ξ , равное 1,1.

Выражая коэффициенты A и B через параметры ξ_0 и $\varepsilon_{ц}$, получим:

$$\Delta \varepsilon_a = \frac{\varepsilon_{ц}}{1 - \frac{\xi_0}{1,1}} \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right)$$

Параметр ξ_0 , как отмечалось выше, представляет собой относительную высоту сжатой зоны бетона, при которой приращение деформаций арматуры от внешних воздействий равно нулю. Это значит, что фактическая нейтральная ось проходит по арматуре ($x_\phi = h_0$). В этом случае отношение высоты сжатой зоны при прямоугольной эпюре напряжений в бетоне ξ_0 к фактической $\xi_\phi = x_\phi / h_0 = 1$ численно равно ξ_0 . Поэтому значение ξ_0 в какой-то мере можно рассматривать как коэффициент полноты эпюры напряжений в бетоне, когда фактическая нейтральная ось находится в пределах сечения, и в этом смысле параметр ξ_0 отвечает определению, данному ему в нормах: «характеристика сжатой зоны бетона». Значение полноты эпюры напряжений и величина ε_u зависят главным образом от деформативных свойств бетона и поэтому они определяют специфику расчета элементов из бетона разного вида и марок.

Следовательно, применение данной методики определения деформаций арматуры, а значит, методики расчета прочности сечений к элементам из различного бетона связано с установлением соответствующих значений ξ_0 и ε_u для данных вида или марки бетона.

Учесть различие в деформативных свойствах бетона одного вида, зависящее от ряда причин, в том числе от технологии приготовления бетона, очень сложно (тем более проектировщику). Поэтому, допустив, что деформативные свойства бетона связаны с прочностью бетона и что с увеличением прочности бетона доля неупругих деформаций снижается, была предложена упрощенная линейная зависимость для параметра ξ_0 , полученная с учетом результатов обработки опытов и принятой зависимости $\Delta\varepsilon_a$:

$$\xi_0 = a - 0,0008R_{\text{пр}}$$

Коэффициент a принимается для тяжелого бетона равным 0,85, а для бетона на пористых заполнителях несколько меньшим – 0,8, в связи с относительно меньше долей неупругих деформаций в полных деформациях по сравнению с тяжелым бетоном.

Предельные деформации укорочения тяжелого бетона и бетона на пористых заполнителях ε_c принимаются с некоторой обеспеченностью равными 2 или 2,5‰, если в расчетах используется коэффициент условия работы $m_{\delta l} = 0,85$, учитывая тем самым более высокую деформативность бетона в этих условиях. Таким образом, появляется возможность применения ненапрягаемой высокопрочной арматуры в сжатых элементах, что позволит повысить их несущую способность [86, 87].

С помощью зависимости для $\Delta\varepsilon_a$ определяются приращения деформаций арматуры от внешних воздействий. Для ненапрягаемой арматуры они равны полным деформациям арматуры, если пренебречь очень небольшими начальными деформациями от усадки бетона.

При расчете прочности сечений, нормальных к продольной оси элемента, усилие предварительного напряжения арматуры, имеющей сцепление с бетоном, рассматривают как внутреннее усилие. Поэтому в полной деформации арматуры таких элементов учитывается также деформация предварительного напряжения ε_0 :

$$\varepsilon_a = \Delta\varepsilon_a + \varepsilon_0$$

Тогда зависимость, связывающая полные деформации арматуры и относительную высоту сжатой зоны, будет иметь вид:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_c}{1 - \frac{\xi_0}{1,1}} \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right) + \varepsilon_0$$

Кривая 2 (Рисунок 12 –) показывает зависимость полных деформаций в предварительно-напряженной арматуре ε_a от относительной высоты сжатой зоны ξ в предельном состоянии.

Если правую и левую части равенства умножить на модуль упругости арматуры, то получим выражение, связывающее напряжение в упруго работающей арматуре с относительной высотой сжатой зоны

$$\sigma_a = \frac{\sigma_A}{1 - \frac{\xi_0}{1,1}} \left(\frac{\xi_0}{\xi} - 1 \right) + \sigma_0$$

где

$$\sigma_A = \varepsilon_u E_a; \sigma_0 = \varepsilon_0 E_a$$

Эта зависимость справедлива только до тех значений напряжений, при которых начинается развитие неупругих деформаций арматуры.

Таким образом, предельная относительная высота сжатой зоны ξ_R , при которой в растянутой арматуре достигается расчетное сопротивление R_a одновременно с наступлением предельного состояния сечения, определяется на основе ранее приведенной зависимости. Эта высота соответствует такому напряженному состоянию, при котором перераспределение усилий между бетоном и арматурой полностью исчерпано, и элемент переходит в стадию разрушения без дополнительного запаса несущей способности. Формальное выражение для ξ_R имеет следующий вид:

$$\xi_R = \frac{\xi_0}{1 + \frac{R_A - \sigma_0}{\sigma_A} \left(1 - \frac{\xi_0}{1,1}\right)}$$

При расчете прочности железобетонных элементов в случае, когда относительная высота сжатой зоны превышает значение ξ_R , рекомендуется ограничивать расчетное значение x пределом $x = \xi_R h_0$. Это означает, что при $\xi > \xi_R$ исключается возможность увеличения несущей способности за счет вовлечения в работу дополнительных участков сечения, как это происходит, например, у перearмированных элементов. Такой подход позволяет предотвратить переоценку прочности, особенно в тех случаях, когда напряженное состояние выходит за рамки расчетной модели. В работе [77] обобщены результаты экспериментальной проверки зависимостей предельной относительной высоты сжатой зоны в Полтавском инженерно-строительном институте. Из 98 образцов 76 разрушились по сжатой зоне.

В соответствии с требованиями СП 35.13330 [16] формула для определения значения граничной относительной высоты сжатой зоны имеет следующий вид:

$$\xi_y = \frac{45 \omega}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (1 - \frac{\omega}{1,1})}$$

где $\omega = 0,85 - 0,008R_b$ – для элементов с обычным армированием;

$\omega = 0,85 - 0,008R_b + \delta \leq 0,9$ – для элементов с косвенным армированием;

При этом расчетное сопротивление бетона R_b следует принимать в МПа, а значение δ равным 10μ , но не более 0,15 (где μ коэффициент армирования, принимаемый согласно 7.72 СП35.13330);

Напряжения в арматуре σ_1 , МПа, следует принимать равными:

R_s – для ненапрягаемой арматуры;

$R_p + 500 - \sigma_p$ – для напрягаемой арматуры;

В ходе изменений нормативного документа СП 63.13330 [63] структура расчетной формулы претерпела изменения. Первоначально она была модифицирована в сторону формального учета относительных деформаций бетона и арматуры, что позволило перейти от эмпирических зависимостей к более обоснованной геометрической интерпретации. В дальнейшем, в актуальной редакции СП 63.13330, действующей на момент подготовки настоящей диссертации, формула была окончательно приведена к виду, основанному на предельных деформационных характеристиках материалов. Выражение имеет следующий вид:

$$\xi_R = \frac{0,8}{1 + \frac{\varepsilon_{s,el}}{\varepsilon_{b2}}}$$

где $\varepsilon_{s,el} = \frac{R_s}{E_s}$ – относительная деформация растянутой арматуры при напряжениях, равных R_s ;

ε_{b2} – относительная деформация сжатого бетона при напряжениях, равных R_b , принимаемая в соответствии с 6.1.20 [63] при непродолжительном действии нагрузки.

В работе В.С. Плевкова [25] показано, что при расположении арматуры только в сжатой зоне результаты, полученные по областям относительной прочности, совпадают с нормативными расчетами. При наличии растянутой арматуры возникают расхождения, преимущественно в области малых эксцентриситетов $\xi_r < \xi_{r1}$.

здесь: ξ_r – значение ξ , выше которого напряжение в растянутой арматуре становится меньшими значений R_{sd} , определяемое зависимостями:

$$\xi_r = \frac{\omega_d}{1 + \frac{R_{sd}}{\sigma_{sc,u} \left(1 - \frac{\omega_d}{1.1}\right)}}$$

ξ_{r1} – значение ξ , при котором напряжение в продольной арматуре сечения достигает значений равных R_{sd} :

$$\xi_r = \frac{\omega_d}{1 - \frac{R_{sd}}{\sigma_{sc,u} \left(1 - \frac{\omega_d}{1.1}\right)}}$$

Коэффициент ω_d характеризует относительную высоту сжатой зоны при нулевых деформациях растянутой арматуры [14]. Параметр ω_d связан с формой эпюры напряжений и определяется эмпирически через зависимость вида:

$$\omega = \frac{x_\omega}{h_0} = \alpha - \beta R_{bi} + \gamma \geq \delta$$

где коэффициенты α , β и γ учитывают тип бетона, уровень неупругих деформаций и условия армирования [88].

Показано, что значения ξ_r и ξ_{r1} зависят от класса материалов, формы сечения и режима нагружения [89]. С увеличением армирования растянутой зоны расхождения между расчетами по нормативам и экспериментальными данными возрастают и достигают 3–8% (Рисунок 13 –). При этом нормативные методики, как правило, занижают несущую способность в области малых эксцентриситетов [24, 90, 91, 89, 18].

Для упрощения расчетов при $\xi > \xi_r$ несущая способность сечения принимается постоянной. Однако работа сечения в этой области является неэффективной, так как увеличение армирования не приводит к пропорциональному росту изгибающего момента.

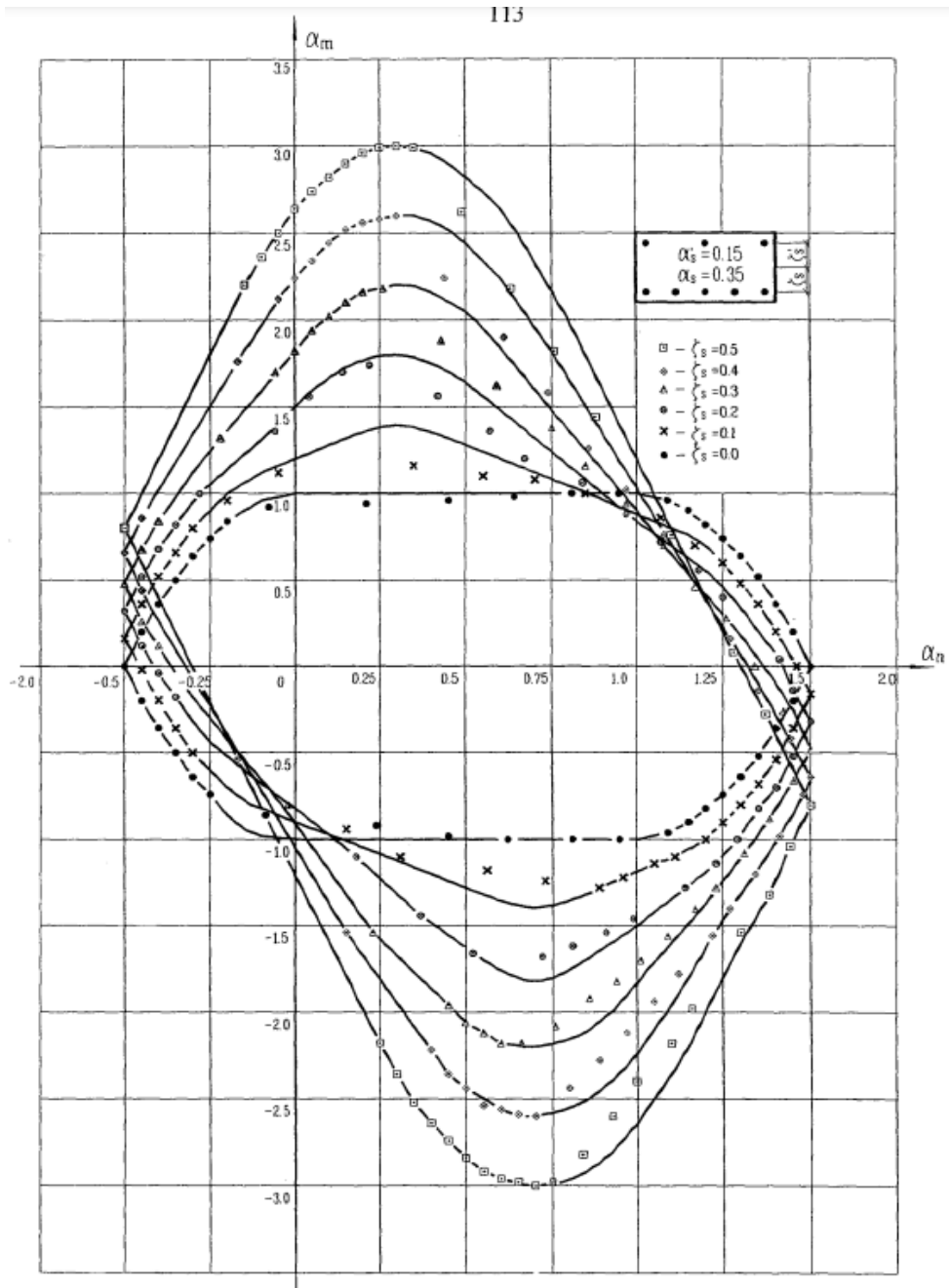


Рис. 2.25.а. Области относительной прочности (сопротивления) нормальных сечений железобетонных элементов с несимметричным армированием согласно предложениям параграфа 2.3.1 (при $\psi_b = \rho_b = \eta = 1$ показаны сплошными линиями) и СНиП 2.03.01-84 (отдельные точки)

Рисунок 13 – Области относительной прочности с учетом требований по ограничению высоты сжатой зоны [25]

Экспериментальные исследования, выполненные в Полтавском инженерно-строительном институте, показывают, что из 98 испытанных образцов 76 разрушились по сжатой зоне, что указывает на преобладание данного механизма разрушения в области малых эксцентриситетов [77]. При этом характер разрушения в большинстве случаев был малодеформативным, без выраженной стадии перераспределения усилий, что косвенно свидетельствует о недоиспользовании прочностного потенциала растянутой арматуры.

В работе В.С. Плевкова [25], с. 112 приведены результаты сопоставления экспериментальной и теоретической несущей способности при различных значениях относительной высоты сжатой зоны. Показано, что в области малых эксцентриситетов наблюдается увеличение разброса экспериментальных данных, а при значениях ξ , приближающихся к 0,5...0,6, возрастает вариативность как экспериментальных, так и расчетных результатов. Автор связывает это с особенностями напряженно-деформированного состояния, при котором сечение работает преимущественно на сжатие, а влияние растянутой арматуры снижается.

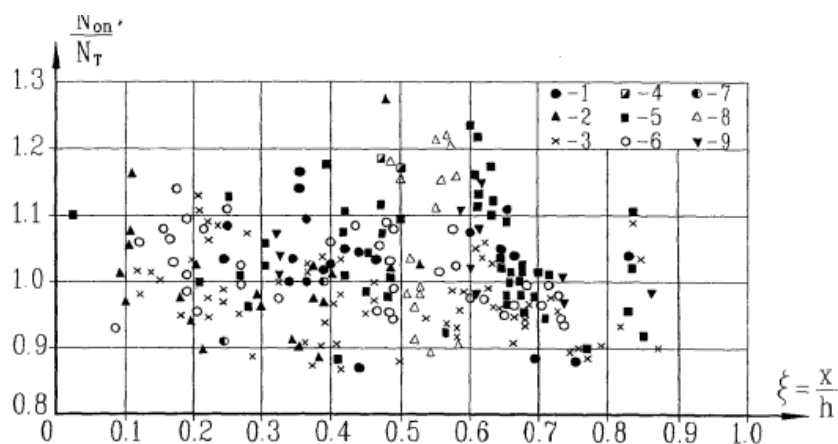


Рис. 2.26 Сравнение опытной и расчетной по СНиП 2.03.01-84 несущей способности внецентренно-сжатых железобетонных элементов по данным: [360,362]: 1-В.А. Великова; 2-К.В.Петровой; 3-Е.Хогнестеда; 4-К.Салаи; 5- К.Э.Таля, Е.А.Чистякова; 6-Е.А.Чистякова, С.С.Мамедова; 7- Баха; 8 -В.С.Булгакова, а также - 9-В.С.Плевкова, Е.А.Бояринцева, А.В.Кудякова

Рисунок 14 – Сравнение опытной и расчетной по СНиП 2.03.01-84 несущей способности внецентренно-сжатых железобетонных элементов, представленное в работе Плевкова В.С. [25]

Аналогичные закономерности отмечены в работе Н.Я. Сапожникова [90], с. 40, где также фиксируется значительный разброс экспериментальных значений предельных изгибающих моментов при увеличении относительной высоты сжатой зоны. Отмечается, что при переходе к большим значениям ξ расчетные зависимости хуже описывают фактическую работу сечения, особенно в условиях, близких к центральному сжатию.

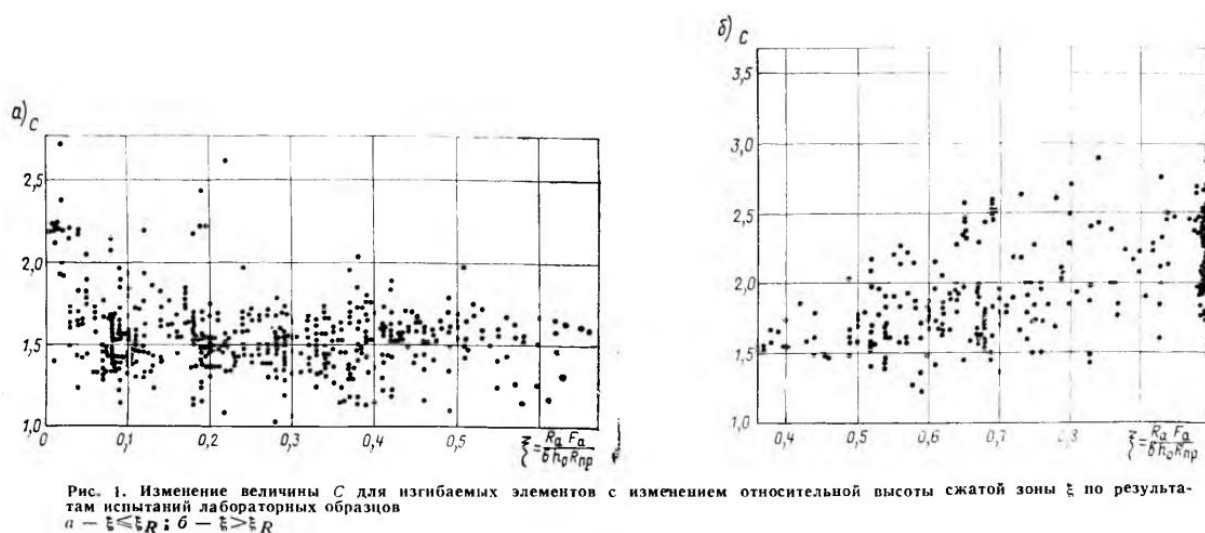


Рисунок 15 — Сравнение опытной и расчетной несущей способности изгибаемых железобетонных элементов, представленное в работе Сапожникова Н.Я. [90]

В работе В.И. Майорова [76] приведены результаты сопоставления опытных и теоретических значений предельного изгибающего момента при превышении граничных значений относительной высоты сжатой зоны. Показано, что в этих условиях разрушение происходит по сжатому бетону, а расчетные значения без учета ограничения могут завышать несущую способность. При этом отмечается, что учет граничного значения ξ позволяет приблизить результаты расчета к экспериментальным данным, несмотря на ограниченный объем проведенных испытаний.

1.3. Анализ учета ограничения предельной относительной высоты сжатой зоны бетона в рамках деформационной модели

Как показывают результаты, ключевую роль в рассматриваемой области играет ограничение относительной высоты сжатой зоны бетона $\xi \leq \xi_R$, используемое в методе предельного равновесия для предотвращения хрупкого разрушения бетона до развития пластических деформаций арматуры. В этой связи представляется необходимым проанализировать, каким образом данное ограничение может учитываться в расчетах по нелинейной деформационной модели, а также как данный вопрос освещен в существующих российских исследованиях.

Анализ отечественных научных публикаций, посвященных применению нелинейной деформационной модели к расчету внецентренно сжатых железобетонных элементов, показывает, что в работах, направленных на исследование деформационной модели, основное внимание сосредоточено на выборе диаграмм деформирования бетона и арматуры, алгоритмах итерационного или прямого интегрирования напряжений по сечению, а также на сопоставлении результатов с нормативными методами. При этом ограничение относительной высоты сжатой зоны бетона, как правило, не вводится в расчет в качестве самостоятельного управляющего параметра [92, 93]. Формализованного алгоритма ограничения $\xi \leq \xi_R$ при определении предельных усилий в рамках НДМ в данных публикациях не приводится.

Отдельную группу составляют исследования, в которых предпринимаются попытки аналитического определения высоты сжатой зоны бетона с учетом предельных деформаций и заданной формы диаграммы деформирования [94, 95, 96]. В таких работах граничная высота сжатой зоны учитывается непосредственно в аналитических выражениях для определения предельных усилий, что позволяет отказаться от итерационных процедур и обеспечить сходимость с результатами деформационного расчета. Вместе с тем данные подходы, как правило, ориентированы на строго заданную форму диаграммы деформирования и

определенный класс сечений и не представляют собой универсальную реализацию нормативного ограничения ξ_R в рамках общей нелинейной деформационной модели при построении диаграмм предельных состояний.

Для корректного понимания выявленных расхождений необходимо подчеркнуть принципиальные методологические различия между методом предельного равновесия и нелинейной деформационной моделью.

В методе предельного равновесия относительная высота сжатой зоны бетона ξ является исходным расчетным параметром. Напряжения в бетоне и арматуре задаются априори как расчетные сопротивления материалов, а внутренние усилия определяются аналитически через геометрические характеристики сечения, напряжения и выбранное значение ξ_R . Ограничение $\xi \leq \xi_R$ вводится непосредственно в расчетную схему и прямо влияет на определение предельных изгибающих моментов и продольных сил, как было показано в Приложении 1.

В нелинейной деформационной модели, напротив, исходными параметрами расчета являются относительные деформации бетона и арматуры. Напряженно-деформированное состояние сечения формируется на основе гипотезы плоских сечений и суперпозиции деформаций, при этом нормальные напряжения определяются через материальные диаграммы деформирования:

$$\varepsilon x = \varepsilon_0 + \kappa y z,$$

$$\sigma x = \sigma(\varepsilon x);$$

Внутренние усилия находятся путем интегрирования напряжений по площади сечения:

$$N = \int_A \sigma_x dA, M_z = \int_A y \sigma_x dA, M_y = \int_A z \sigma_x dA;$$

В рамках данного подхода относительная высота сжатой зоны бетона является производной величиной, определяемой через распределение деформаций, то есть $\xi = \xi(\varepsilon_b, \varepsilon_s)$ и не используется в качестве управляющего параметра при формировании расчетной схемы.

Для более детального анализа поведения диаграммы предельных состояний (Рисунок 16 –) от ограничения предельной высоты сжатой зоны были построены графики предельных изгибающих моментов на основе метода предельного равновесия, которые наглядно демонстрируют характерные особенности формирования внутренних усилий. Для метода предельного равновесия использовались кусочно-аппроксимирующие функции, по которым вычислялись производные, при этом коэффициент детерминации аппроксимации не превышал 0,9988, что обеспечивало высокую точность представления локальных изменений графика.

Сопоставление графиков метода предельного равновесия и НДМ позволяет выделить области малых эксцентриситетов продольной силы, где расхождения наиболее заметны. Именно здесь предельные моменты по методу предельного равновесия занижены по сравнению с НДМ, что служит наглядным подтверждением методологических различий между подходами. Таким образом, построенные графики являются ключевым инструментом для анализа причин расхождения диаграмм предельных состояний и подтверждают вывод о производной роли ξ в рамках деформационной модели.

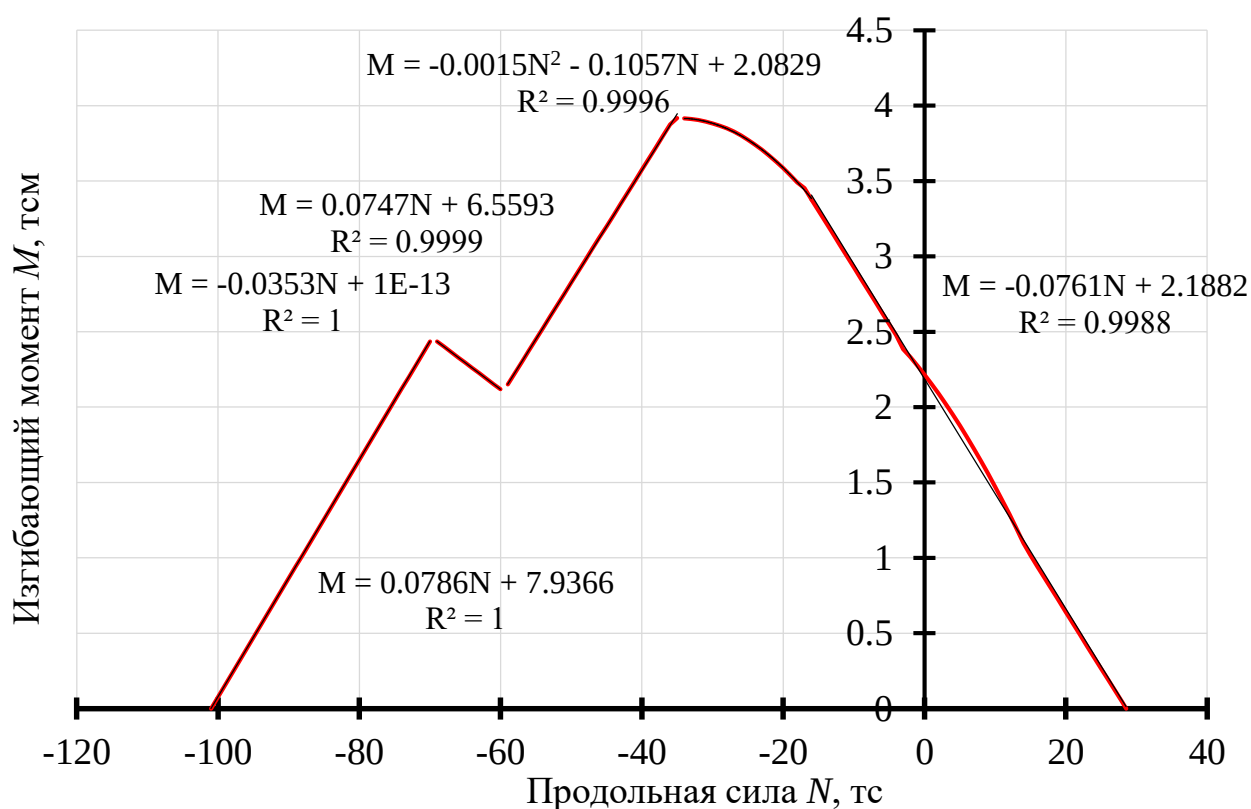


Рисунок 16 – Аппроксимирующие функции диаграммы по методу
предельного равновесия

Выявленные расхождения между диаграммами предельных состояний, полученными по методу предельного равновесия и по нелинейной деформационной модели прямого построения, обусловлены принципиально различной логикой параметризации напряженно-деформированного состояния. В методе предельного равновесия ограничение относительной высоты сжатой зоны бетона непосредственно участвует в формировании предельных усилий, тогда как в деформационном подходе оно выступает лишь как результирующая характеристика уже сформированного состояния.

Указанное методологическое различие требует отдельного математического анализа условий, при которых учет нормативного ограничения $\xi \leq \xi_R$ может быть согласован с деформационным описанием напряженно-деформированного состояния сечения.

Рассматривается нормальное сечение железобетонного элемента, работающего в условиях внецентренного сжатия. Расчет выполняется в рамках нелинейной деформационной модели прямого построения диаграмм предельных состояний, в которой деформационное состояние сечения задается непосредственно, без решения уравнений равновесия относительно деформаций. В основе расчетной схемы принята гипотеза плоских сечений, согласно которой после деформирования плоские сечения остаются плоскими. В этом случае распределение продольных относительных деформаций по высоте сечения является линейным и может быть представлено в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + k z,$$

где $\varepsilon(z)$ – продольная относительная деформация волокна, расположенного на расстоянии z от выбранной оси отсчета;

ε_0 – относительная деформация в исходной точке (как правило, в центре тяжести сечения);

k – кривизна сечения;

z – координата по высоте сечения.

Таким образом, деформационное состояние нормального сечения полностью определяется парой параметров (ε_0, κ) .

Относительные деформации бетона и арматуры в каждом волокне сечения определяются из выражения $\varepsilon(z)$, а соответствующие нормальные напряжения вычисляются по нелинейным диаграммам деформирования материалов:

$$\sigma_b = \sigma_b(\varepsilon_b), \sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_s),$$

где σ_b и σ_s – напряжения в бетоне и арматуре, ε_b и ε_s – соответствующие относительные деформации. Внутренние усилия определяются прямым интегрированием напряжений по площади сечения:

$$N(\varepsilon_0, k) = \int_A \sigma(\varepsilon_0 + kz) dA, \quad M(\varepsilon_0, k) = \int_A \sigma(\varepsilon_0 + kz) z dA$$

где N – продольная сила, M – изгибающий момент, A – площадь поперечного сечения. В рамках методологии прямого построения диаграмм значения (ε_0, k) задаются априори, а диаграмма предельных состояний формируется как параметрическое отображение $(\varepsilon_0, \kappa) \rightarrow (N, M)$.

Положение нейтральной оси определяется из условия нулевой деформации:

$$\varepsilon(z_0) = 0,$$

Подставляя линейное распределение деформаций, получаем

$$\varepsilon_0 + kz_0 = 0,$$

откуда

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_0}{k}.$$

Относительная высота сжатой зоны бетона определяется как

$$\xi(\varepsilon_0, k) = \frac{z_0}{h},$$

где h – полная высота сечения. Подставляя выражение для z_0 , получаем

$$\xi(\varepsilon_0, k) = -\frac{\varepsilon_0}{kh}.$$

Следовательно, относительная высота сжатой зоны бетона является производной характеристикой напряженно-деформированного состояния и полностью определяется параметрами ε_0 .

Нормативное требование ограничивает относительную высоту сжатой зоны условием

$$\xi \leq \xi_R,$$

где ξ_R – установленное предельное значение. Рассматривая граничный случай $\xi = \xi_R$ и подставляя его в выражение для ξ , получаем кинематическое соотношение

$$\xi_R = -\frac{\varepsilon_0}{kh},$$

откуда следует

$$\varepsilon_0 = -kh\xi_R.$$

Таким образом, при фиксации ограничения параметры ε_0 и k перестают быть независимыми, и деформационное состояние сечения описывается одним свободным параметром.

В предельном состоянии дополнительно предполагается достижение предельной деформации бетона в крайнем сжатом волокне:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{b2},$$

где ε_{b2} – предельная относительная деформация бетона при сжатии,

h_b – расстояние от выбранной оси отсчета до крайнего сжатого волокна.

Деформация в этом волокне определяется как:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 + kh_b.$$

Подставляя выражение для ε_0 , получаем

$$\varepsilon_b = -kh\xi_R + kh_b = k(h_b - h\xi_R).$$

Приравнивание к ε_{b2} приводит к выражению

$$k = \frac{\varepsilon_{b2}}{h_b - h\xi_R}.$$

Следовательно, при одновременной фиксации условий $\xi = \xi_R$ и $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2}$ кривизна k определяется однозначно, а вместе с ней однозначно определяется и параметр ε_0 . Подстановка найденных значений в интегральные выражения для внутренних усилий приводит к конкретной паре $N = N^*$, $M = M^*$, соответствующей данному граничному деформационному состоянию. Таким образом, в рамках деформационной модели прямого построения диаграмм предельных состояний учет нормативного ограничения в сочетании с условием предельной деформации бетона приводит к выделению отдельного граничного состояния в пространстве внутренних усилий.

Рассмотрим задачу определения предельного изгибающего момента нормального сечения железобетонного элемента при заданной продольной силе с учетом ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона. В отличие от параметрического построения диаграмм предельных состояний, при котором внутренние усилия определяются как функция заданных деформационных параметров, в данной постановке исходной величиной является внешняя продольная сила $N_{\text{внешн.}}$, а предельный изгибающий момент M_{ult} подлежит определению в процессе расчета.

В рамках нелинейной деформационной модели деформационное состояние нормального сечения описывается линейным распределением продольных относительных деформаций по высоте сечения, определяемым параметрами ε_0 и k . Введение нормативного ограничения на относительную высоту сжатой зоны бетона $\xi \leq \xi_R$ приводит к дополнительному кинематическому условию, связывающему указанные параметры. В предельном случае, соответствующем исчерпанию нормативного требования, принимается равенство $\xi = \xi_R$.

Относительная высота сжатой зоны определяется положением нейтральной оси, которое, в свою очередь, задается условием нулевой деформации, откуда положение нейтральной оси выражается в виде:

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_0}{k}.$$

$$\varepsilon_0 = -kh\xi_R.$$

Таким образом, введение ограничения устраняет независимость параметров ε_0 и k деформационное состояние нормального сечения при $\xi = \xi_R$ полностью определяется одним параметром – кривизной k .

Внутренние усилия в нормальном сечении определяются интегрированием напряжений по площади сечения. Продольная сила выражается соотношением

$$N(\varepsilon_0, k) = \int_A \sigma(\varepsilon_0 + kz) dA,$$

где напряжения σ определяются по нелинейным диаграммам деформирования бетона и арматуры.

С учетом полученной кинематической связи выражение для продольной силы принимает вид функции одного аргумента:

$$N(k) = \int_A \sigma(-kh\xi_R + kz) dA.$$

В рассматриваемой постановке величина $N_{\text{внешн.}}$ задана как исходная нагрузка. Следовательно, значение кривизны k , соответствующее предельному состоянию при выполнении нормативного ограничения, должно удовлетворять уравнению равновесия по продольной силе:

$$N(k) = N_{\text{внешн.}}$$

Полученное уравнение является нелинейным интегральным уравнением относительно параметра k . Нелинейность обусловлена тем, что функция напряжений $\sigma(\varepsilon)$ определяется по физически нелинейным, как правило кусочно-заданным диаграммам деформирования бетона и арматуры. Кроме того, интегрирование выполняется по всей площади сечения с учетом различного характера работы материалов в сжатой и растянутой зонах. Вследствие этого

аналитическое решение уравнения $N(k) = N_{\text{внешн.}}$ в замкнутом виде при выбранных характеристиках параметризации невозможно.

Определение значения кривизны k , соответствующего заданной продольной силе при выполнении условия $\xi = \xi_R$, требует применения численных методов, основанных на последовательном подборе параметра k до достижения равновесия по продольной силе.

После определения искомого значения k предельный изгибающий момент вычисляется непосредственно из выражения

$$M_{ult} = \int_A \sigma(-kh\xi_R + kz)z dA.$$

Следовательно, величина предельного изгибающего момента определяется не напрямую, а как результат решения нелинейной задачи согласования деформационного состояния сечения с условиями равновесия при заданной продольной силе и фиксированном нормативном ограничении.

Таким образом, учет ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона в рамках нелинейной деформационной модели при заданной продольной силе приводит к задаче, в которой определение предельного изгибающего момента возможно только после решения нелинейного уравнения равновесия относительно деформационного параметра. Это обстоятельство принципиально отличает рассматриваемую постановку от методологии прямого параметрического построения диаграмм предельных состояний, при которой внутренние усилия определяются непосредственно по заданным деформационным параметрам без необходимости итерационного поиска.

Проведенный в разделе анализ показал, что расхождения между диаграммами предельных состояний, полученными по методу предельного равновесия и по нелинейной деформационной модели прямого построения, обусловлены различием в способе параметризации напряженно-деформированного состояния нормального сечения.

Выявленные особенности указывают на то, что ограничение относительной высоты сжатой зоны бетона и деформационная параметризация напряженно-деформированного состояния опираются на различные методологические основания. Графически это проявляется в характерных особенностях диаграмм предельных состояний в области малых эксцентриситетов продольной силы (Рисунок 17 –).

Полученные результаты обосновывают необходимость разработки специальной методики учета нормативного ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона в рамках нелинейной деформационной модели, ориентированной на сохранение параметрического характера построения диаграмм предельных состояний и сопоставимости с нормативными расчетными зависимостями при обеспечении вычислительной эффективности метода.

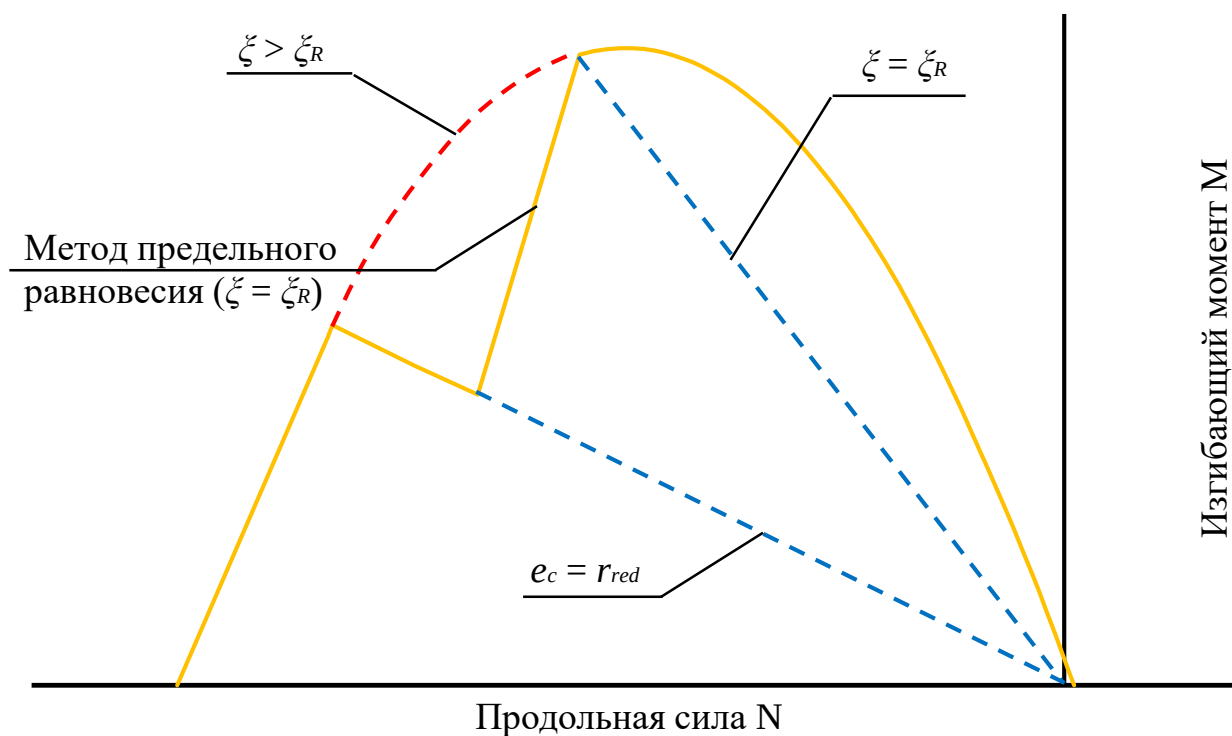


Рисунок 17 – Диаграммы предельных состояний с учетом ограничения высоты сжатой зоны бетона

1.4. Выводы по первой главе

В результате анализа научной и технической литературы установлено, что развитие методов расчета железобетонных конструкций характеризуется

последовательным переходом от эмпирических и полуэмпирических зависимостей к методу предельных состояний и далее к нелинейной деформационной модели, обеспечивающей более полное описание напряженно-деформированного состояния элементов. При этом выявлено, что, несмотря на формальное развитие нормативной базы, сохраняется методологическая несогласованность между различными расчетными подходами, особенно при оценке несущей способности элементов при совместном действии продольной силы и изгибающего момента.

Проведенный анализ отечественных и зарубежных исследований показал, что диаграммы предельных состояний являются эффективным инструментом комплексной оценки несущей способности железобетонных элементов, однако их форма и интерпретация существенно зависят от принятых расчетных предпосылок. Установлено, что в методе предельного равновесия существенное влияние на конфигурацию диаграммы оказывает ограничение относительной высоты сжатой зоны бетона $\xi \leq \xi_R$, введенное с целью обеспечения требуемого уровня надежности и предотвращения хрупкого разрушения.

На основе сопоставления нормативных положений и экспериментальных данных показано, что при превышении граничной относительной высоты сжатой зоны возрастает разброс разрушающих усилий, что свидетельствует о повышенной неопределенности работы сжатого бетона. В этой связи введение ограничения $\xi \leq \xi_R$ в методе предельного равновесия приводит к изменению расчетной схемы работы сечения и отражается на характере диаграммы предельных состояний, в частности – к появлению изломов зависимости $M(N)$.

В то же время установлено, что в нелинейной деформационной модели данное ограничение явно не учитывается, что приводит к более гладкому характеру диаграмм предельных состояний и отличиям в их конфигурации по сравнению с результатами, получаемыми по методу предельного равновесия.

Научная новизна результатов первой главы заключается в выявлении механизма влияния ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона на форму диаграммы предельных состояний и установлении его роли как одного из

ключевых факторов, определяющих расхождение между методом предельного равновесия и нелинейной деформационной моделью.

Теоретическая значимость работы состоит в уточнении взаимосвязи между силовыми и деформационными критериями предельных состояний и в обосновании возможности их согласования в рамках единого подхода.

Практическая значимость заключается в обосновании необходимости учета данного ограничения в расчетах по нелинейной деформационной модели, что создает предпосылки для разработки уточненных расчетных методик и повышения надежности проектирования железобетонных опор мостов.

Глава 2. Совершенствование метода расчета железобетонных опор мостов по нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений

2.1. Сопоставление методов расчета железобетонных опор мостов при построении диаграмм предельных состояний

В целях дальнейшего обоснования разработанной методики рассмотрены существующие подходы к построению диаграмм предельных состояний железобетонных элементов. Такой анализ необходим для выявления особенностей формирования расчетных зависимостей в рамках различных методов, а также для определения тех этапов расчета, на которых возникает необходимость учета ограничения относительной высоты сжатой зоны.

В данном разделе последовательно рассматриваются метод предельного равновесия, нелинейная деформационная модель с итерационным определением положения нейтральной оси и без итераций. Сопоставление указанных подходов позволяет установить различия в учете нелинейной работы материалов и предельных состояний сечения.

В отечественной практике метод предельного равновесия получил наибольшее распространение, обладает длительной нормативной историей и экспериментально обоснован для типовых сечений, прежде всего прямоугольных. В связи с этим на начальном этапе исследования он принят в качестве базового при сравнении результатов расчета.

В качестве первого объекта исследования принят условный железобетонный элемент прямоугольного сечения размером 200х200 мм и длиной 1 м (Рисунок 18 –). Выбор такой схемы обусловлен ее наибольшей изученностью и наличием обширной экспериментальной базы, что позволяет анализировать различия расчетных методов без влияния дополнительных геометрических факторов.

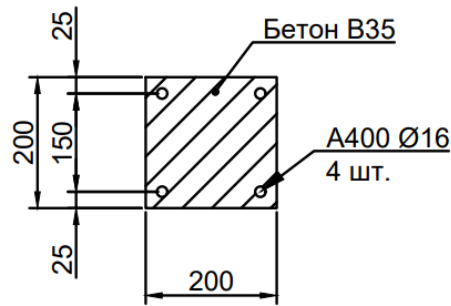


Рисунок 18 – Поперечное сечение исследуемого условного железобетонного элемента

Принятые размеры обеспечивают реалистичное соотношение площади бетона и арматуры. Длина элемента (1 м) позволяет рассматривать его как расчетное сечение, исключая влияние гибкости. Армирование выполнено четырьмя стержнями диаметром 16 мм, равномерно расположенными по контуру, что соответствует типовой симметричной схеме и исключает влияние эксцентриситета армирования. Применение бетона класса В35 и арматуры класса А400 обеспечивает соответствие распространенным инженерным решениям.

Использование такого элемента позволяет рассматривать метод предельного равновесия в качестве эталонного подхода, поскольку для прямоугольных сечений его предпосылки реализуются наиболее полно, а влияние расчетных упрощений минимально. Это создает условия для выявления различий между методами, обусловленных прежде всего учетом ограничений высоты сжатой зоны.

2.1.1. Метод предельного равновесия

В данном разделе представлена методика построения диаграмм предельных состояний по методу предельного равновесия в соответствии с требованиями нормативной документации СП 35.13330.2011 (с Изменениями 1, 2, 3) [16]. Метод расчета железобетонных элементов по предельному равновесию, лежащий в основе действующих нормативных требований, обладает высокой степенью экспериментальной обоснованности и длительной историей практического применения. Его точность и надежность не вызывают сомнений при расчетах

элементов с простыми прямоугольными сечениями, армированными по контуру. Именно такие сечения рассматриваются в настоящем разделе.

В связи с тем, что усилия для расчета железобетонного элемента могут быть получены различными способами (вручную или с помощью специальных расчетных программ), особенно важно понимать в какой точке сечения они получены. Как правило, расчетные программы выдают силы в середине сечения железобетонного элемента. Такие силы в данной работе обозначаются как продольная сила N и изгибающий момент M , именно они требуются в качестве исходных данных для расчета. Эти силы используются для расчета элементов на действие растягивающей продольной силы N , с помощью них определяется эксцентриситет продольной силы относительно середины сечения бетона $e_{h/2} = M/N$.

Однако для расчета элементов на действие сжимающей продольной силы N используются силы относительно центра тяжести приведенного сечения, для того чтобы разделить случаи расчета по прочности (продольная сила приложена за пределами ядра сечения) и устойчивости (продольная сила приложена в пределах ядра сечения). При этом величина N остается неизменной, а вместо изгибающего момента M используется момент относительно центра тяжести приведенного сечения $M_c = M + N(h/2 - y_0)$. Эксцентриситет продольной силы относительно центра тяжести приведенного сечения определяется соответственно как $e_c = M_c/N = M/N + (h/2 - y_0)$.

Обозначения $e_{h/2}$ и M_c отсутствуют в СП, однако они необходимы для понимания того, как правильно приложить внешние силы к сечению.

Значения M и N на диаграммах предельных состояний, полученные в данной работе, относятся ко внешним силам, приложенным в середине сечения. Далее в работе будет описана методика построения диаграмм предельных состояний. Расчетные предпосылки с конкретными значениями для рассматриваемого железобетонного элемента будут приведены в приложении (Приложение 1).

Для соблюдения требований расчета железобетонных элементов в соответствии с требованиями СП 35 процесс построения диаграммы делится на несколько этапов:

Расчет внецентренно сжатого элемента при:

1) Эксцентриситет приложения продольной силы не превышает величины ядрового расстояния ($e_c = M_c/N \leq r$), все сечение сжато ($x = h$);

2) Продольная сила приложена за пределами ядра сечения ($e_c > r$), в сечении имеется растянутая зона, высота сжатой зоны x не достигает граничной высоты x_R ($x < x_R$);

3) Продольная сила приложена за пределами ядра сечения ($e_c > r$), в сечении имеется растянутая зона, высота сжатой зоны x ограничена величиной x_R ($x = x_R$), сечение перearмировано.

Расчет внецентренно растянутого элемента:

1) Если продольная сила N приложена между равнодействующими усилиями в соответствующей арматуре, причем все сечение растянуто, то в этом случае вся расчетная сила должна быть полностью воспринята арматурой и расчет следует производить, используя условия:

$$Ne \leq R_s A'_s (h_0 - a'_s)$$

$$Ne' \leq R_s A_s (h - a_s - a'_s)$$

2) Если продольная сила N приложена за пределами расстояний между равнодействующими усилий в соответствующей арматуре, то прочность сечения следует устанавливать из условия:

$$Ne \leq R_b b x (h_0 - 0.5x) + R_s A'_s (h_0 - a'_s)$$

Ниже представлен результат совмещения диаграмм для внецентренно растянутого и внецентренно сжатого элементов.

На диаграмме (Рисунок 19 –) показана зависимость допускаемого изгибающего момента от приложенной продольной силы, а также расчетные значения усилий, попадающие в область допускаемых усилий.

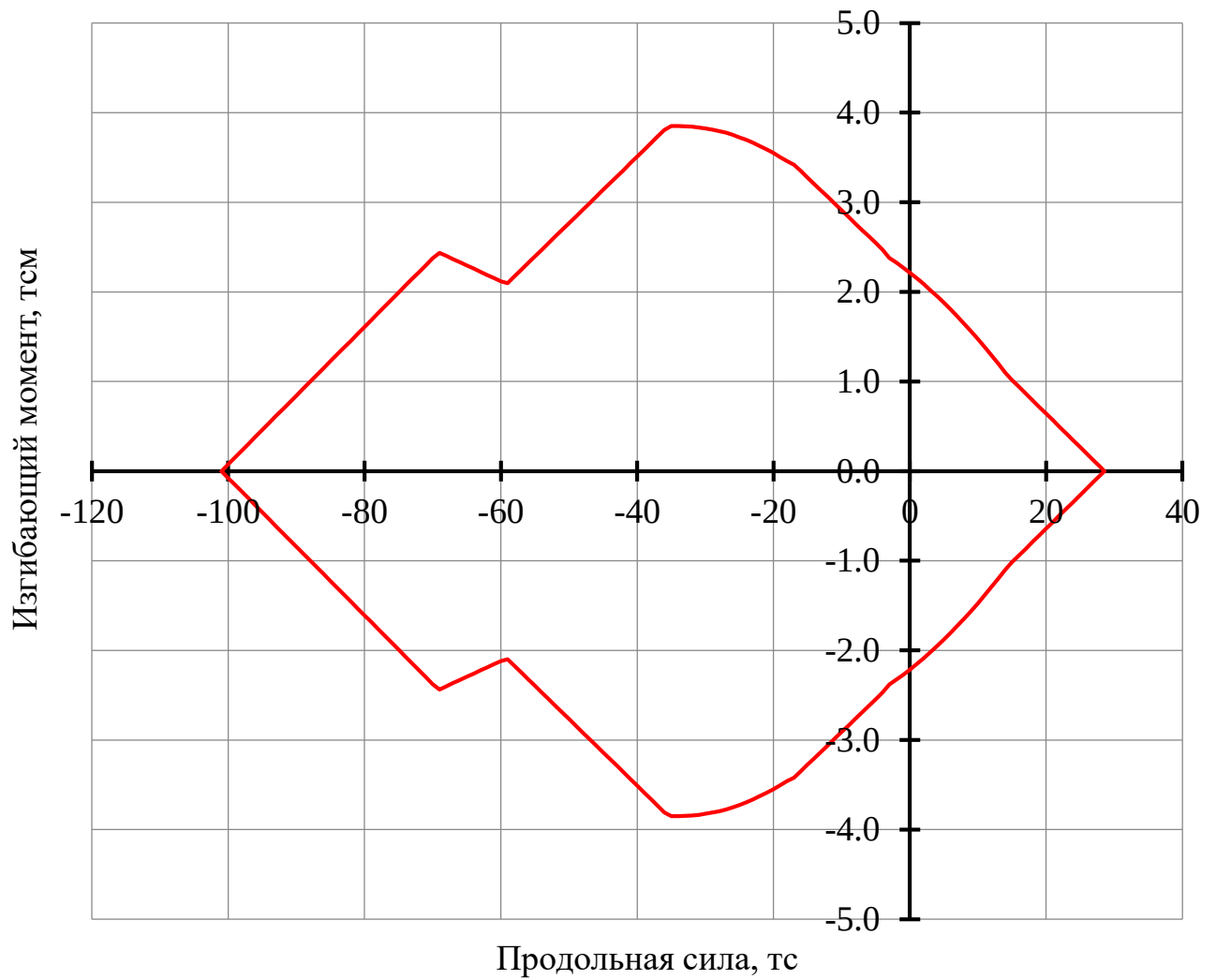


Рисунок 19 – Диаграмма предельных состояний по условию прочности построенной по методу предельного равновесия

2.1.2. Нелинейная деформационная модель с итерационным поиском предельного изгибающего момента

Актуальность применения диаграмм деформирования бетона и арматуры при расчете железобетонных конструкций подтверждается широким кругом отечественных исследований и публикаций [101, 102, 103, 92, 27, 104, 105, 106, 107]. В указанных работах показано, что использование физически корректных диаграмм «напряжение–деформация» позволяет повысить точность расчетов и учесть нелинейные свойства материалов на различных стадиях напряженно-деформированного состояния.

Настоящий раздел посвящен реализации расчета прочности железобетонного элемента на основе нелинейной деформационной модели. Данный подход основан на использовании диаграмм деформирования бетона и арматуры и обеспечивает возможность анализа элементов с поперечными сечениями произвольной формы как по условиям прочности, так и по условиям трещиностойкости. Методика расчета опирается на принципы, изложенные в методических рекомендациях по применению СП 35.13330.2011, утвержденных Министерством строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации [108].

На рисунке ниже (Рисунок 20 –) представлена схема алгоритма расчета железобетонного сечения при действии изгибающих моментов и продольной силы. Алгоритм начинается с задания геометрических и материальных характеристик сечения, включая расположение арматуры и параметры диаграмм деформирования бетона и стали. На втором этапе формируются нелинейная система уравнений относительно неизвестных значений относительной осевой деформации ε_0 и кривизны κ_y и κ_z . На данном этапе итерационно определяется положение нейтральной оси: начальное приближение задается, после чего выполняется расчет деформаций и напряжений в бетоне и арматуре. На каждом шаге проверяется условие равновесия внутренних и внешних сил. Если условие не выполняется, положение нейтральной оси корректируется, и процесс повторяется до достижения сходимости.

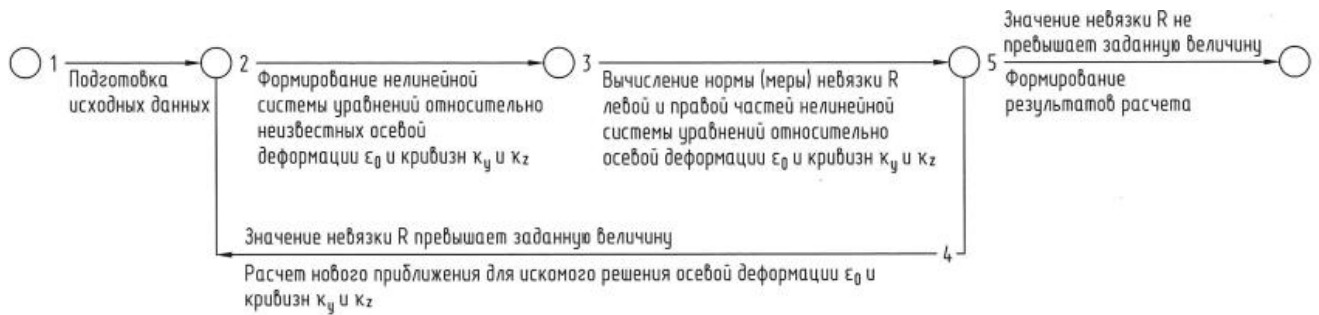


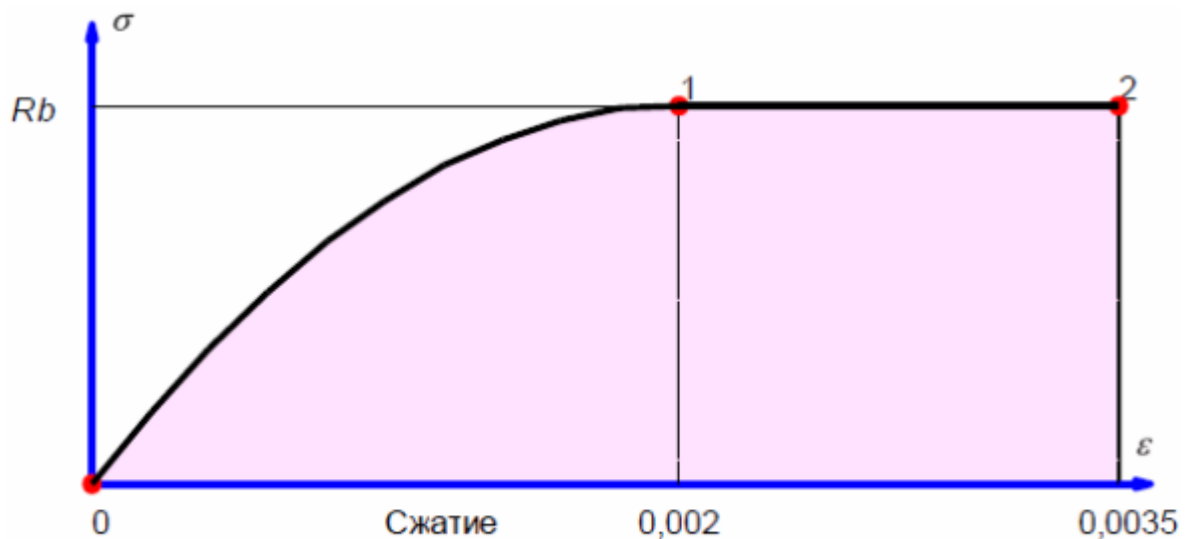
Рисунок 20 – Общий вид алгоритма

Расчетные параметры материалов и геометрии в настоящем разделе определяются в соответствии с требованиями свода правил СП 35.13330.2011 «Мосты и трубы» [16].

Класс бетона для проектирования конструктивных элементов мостовых сооружений принимается в соответствии с пунктом 7.19 СП 35.13330.2011. Марка ненапрягаемой арматурной стали устанавливается по Таблице 7.14 указанного документа. Расчетное сопротивление бетона осевому сжатию R_b определяется по Таблице 7.6, исходя из заданного класса бетона. Аналогично, расчетное сопротивление арматурной стали R_s принимается в соответствии с маркой стали согласно Таблице 7.16.

Модуль упругости бетона E_b и модуль упругости арматуры E_s принимаются, соответственно, по Таблицам 7.11 и 7.19 того же нормативного документа, исходя из соответствующих характеристик материалов.

Для моделирования работы материалов в процессе деформирования применяются расчетные диаграммы состояния, устанавливающие зависимость между напряжениями и относительными деформациями. В расчетах используются как упрощенные двухлинейные, так и более точные нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры в соответствии с Приложением 8 СП 35.13330.2011. Графическое представление используемой диаграммы деформирования бетона приведено ниже (Рисунок 21 –).



1, 2 - базовые точки диаграммы

Рисунок 21 – Диаграмма деформирования бетона, используемая при оценке прочности нормального сечения по Приложению 8 СП 35.13330.2011 (с Изм. 1, 2, 3)

Рассматриваемое железобетонное сечение подвергается совместному воздействию продольной силы N_{ext} , а также изгибающих моментов $M_{Y_{\text{ext}}}$ и $M_{Z_{\text{ext}}}$, действующих относительно координатных осей OY и OZ , соответственно. Эти усилия приведены к началу координат условной системы отсчета OYZ , совпадающему с центроидом исходного сечения.

Алгоритм расчета позволяет оценивать напряженно-деформированное состояние железобетонных элементов по первой группе предельных состояний сечения произвольной геометрической формы и с произвольным расположением арматуры. Для реализации численной процедуры расчета исходное сечение дискретизируется – оно представляется в виде совокупности конечных элементов (ячейковой сетки), что позволяет интегрировать внутренние усилия по сечению и точно определять положение нейтральной оси на каждом шаге итерационного процесса.

Расчет по прочности нормальных сечений по НДМ для определения усилий, деформаций и напряжений в сечении основывается на следующих предпосылках:

- Уравнения равновесия внутренних и внешних сил в нормальном сечении:

$$\int_A \sigma dA = N^{ext}$$

$$\int_A \sigma Z dA = M_Y^{ext}$$

$$\int_A \sigma Y dA = M_Z^{ext}$$

Левая часть уравнения представляет собой соответствующее внутреннее усилие в сечении N^{int} , M_y^{int} и M_z^{int} ; σ – напряжение в элементе; Y , Z – координаты центра тяжести;

- Уравнение, определяющее распределение деформаций по сечению:

$$\varepsilon_x = \varepsilon + k_z y + k_y z;$$

- Зависимости, связывающие напряжения и относительные деформации бетона и арматуры:

$$\sigma = \sigma_b(\varepsilon)$$

$$\sigma = \sigma_s(\varepsilon)$$

Вышеуказанные уравнения и зависимости представляют собой нелинейную систему уравнений, для решения которой необходимо вычислять интегралы определенных функций по площади элемента A .

Для упрощения решения задачи интегрирования по области сечения используется алгоритм решения нелинейной системы численным интегрированием с применением метода конечных элементов (МКЭ).

Суть применяемого метода состоит в том, что исходная область сечения с площадью A разбивается на n_e конечных элементов простой формы – треугольники и четырехугольники с площадью Ω_e – при этом $\sum \Omega_e \approx A$ (Рисунок 22 –), и

интегрирование функции $g(Y, Z)$ производится по площади конечных элементов Ω_e с последующим суммированием значений:

$$\int_A g(Y, Z) dA \approx \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} g(Y, Z) dA$$

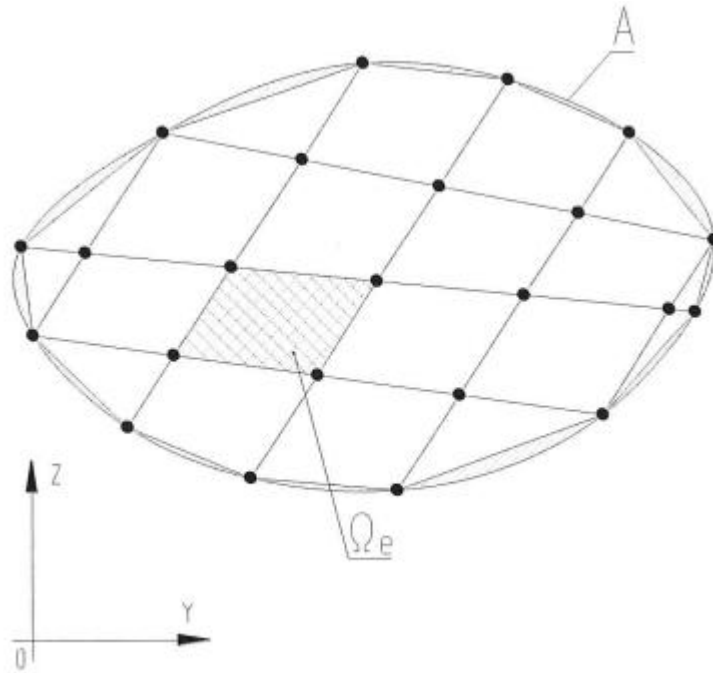


Рисунок 22 – Пример произвольного ж.б. сечения, разбитого на конечные элементы

Для вычисления интеграла производится замена переменных:

$$Y = \sum Y_I N_I(\xi, \eta)$$

$$Z = \sum Z_I N_I(\xi, \eta)$$

Таким образом, интегрирование по площади конечного элемента Ω_e в ГСК $Y0Z$ заменяется интегрирование по площади конечного элемента $\Omega_{\square}$ в локальной системе координат $\xi0\eta$ (ЛСК) посредством введения функций формы $N_I(\xi, \eta)$ (Рисунок 23 –). В конечных элементах $\Omega_{\square}$ узлы имеют координаты 0 или ± 1 .

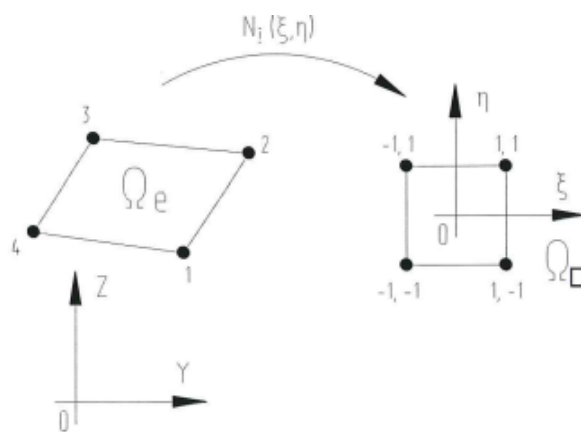


Рисунок 23 – Определение конечного элемента в ЛСК

Важнейшими являются следующие свойства функций формы $N_I(\xi, \eta)$:

1. Функция N_I равна единице в узле I и нулю во всех других узлах.
2. Функция N_I отлична от нуля только для элементов, содержащих узел I .

При этом каждая точка, принадлежащая области конечного элемента с площадью Ω_e , будет также принадлежать и области конечного элемента с площадью $\Omega_\square$.

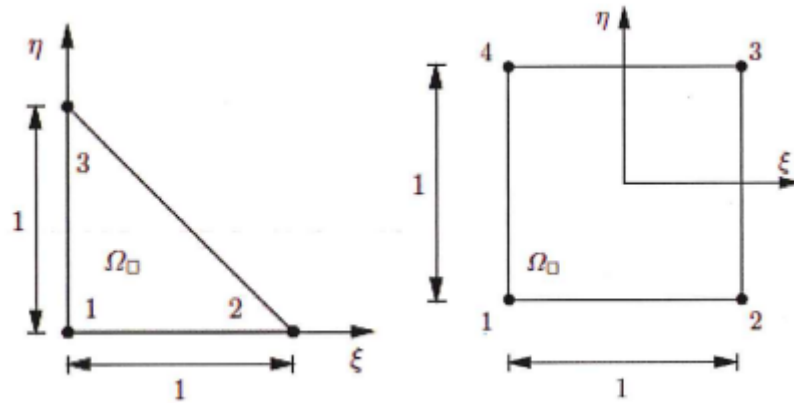


Рисунок 24 – Треугольный и четырехугольный конечный элемент $\Omega_\square$.

Интеграл от функции в ГСК может быть вычислен в ЛСК с помощью соотношения:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} g(Y, Z) dA = \sum_{e=1}^{n_e} \iint_{-1}^1 g(\xi, \eta) \det J_e(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $\det J_e(\xi, \eta)$ – определитель матрицы Якоби преобразования системы координат.

Матрица Якоби – это матрица первых частных производных векторной функции, где каждая строка соответствует градиенту одной из компонент функции. Она описывает локальное линейное приближение отображения в точке и используется для анализа изменения координат, объема и других геометрических свойств при преобразованиях. Определитель этой матрицы (якобиан) характеризует коэффициент изменения объема или площади.

Матрица Якоби в данном случае имеет следующий вид:

$$J_e = \begin{pmatrix} \frac{\delta Y}{\delta \xi} & \frac{\delta Z}{\delta \xi} \\ \frac{\delta Y}{\delta \eta} & \frac{\delta Z}{\delta \eta} \end{pmatrix}$$

Численное интегрирование функции σ в данном случае выполняется с помощью формулы Гаусса, в соответствии с которой вычисление функции производится в специальных узлах ξ_p, η_p элемента $\Omega_\square$, называемых гауссовыми точками, оптимально расположенных узлах внутри элемента, обеспечивающих максимальную точность при минимальном количестве вычислений.

$$\sum_{e=1}^{n_e} \iint_{-1}^1 g(Y, Z) (\xi, \eta) \det J_e(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{p=1}^{n_p} g(Y, Z) (\xi_p, \eta_p) \det J_e(\xi_p, \eta_p) W_p$$

Гауссовы точки в контексте метода конечных элементов (МКЭ) представляют собой специально выбранные узлы внутри локальной системы координат (ЛСК) конечного элемента, используемые для высокоточной аппроксимации интегралов.

Количество гауссовых точек n_p в элементе может быть назначено от 1 до 4 для треугольных плоских элементов и от 1 до 9 для четырехугольных плоских элементов. В общем случае, используя n_p точек, можно получить метод с порядком точности $2n_p - 1$.

Координаты этих точек и связанные с ними весовые коэффициенты W_p подобраны так, чтобы точно интегрировать полиномы высокой степени (порядок точности $2n_p - 1$). В задаче для треугольных элементов используется 3 точки, а для четырехугольных – 4, что позволяет эффективно решать систему нелинейных

уравнений с сохранением баланса между вычислительной затратностью и точностью. Локальные координаты и веса определяются таблицами, разработанными на основе квадратур Гаусса, гарантируя оптимальную аппроксимацию интегралов даже для сложных геометрий и нелинейных зависимостей.

Координаты гауссовых точек и т.н. весовых коэффициентов (параметров) в этих точках W_p подобраны Гауссом таким образом, чтобы вычисления функции соответствовали наивысшей степени точности. Локальные координаты p -й гауссовой точки, а также соответствующие им весовые коэффициенты для 3-х и 4-х узловых элемента сечения определяются по таблицам ниже.

Таблица 1 – Положение гауссовых точек треугольного конечного элемента

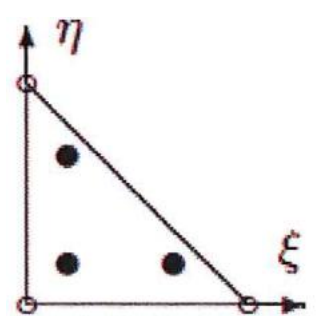
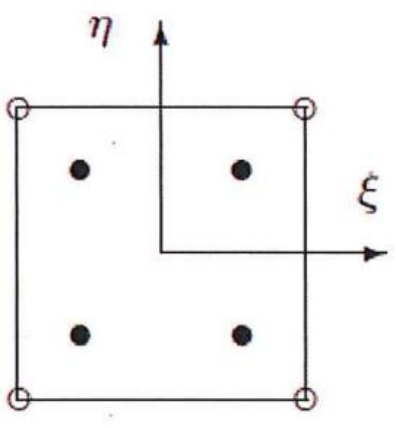
n_p	p	ξ_p	η_p	W_p	Положение гауссовых точек
3	1	1/6	1/6	1/6	
	2	2/3	1/6	1/6	
	3	1/6	2/3	1/6	

Таблица 2 – Положение гауссовых точек четырехугольного конечного элемента

n_p	p	ξ_p	η_p	W_p	Положение гауссовых точек
4	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	

	3	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
	4	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	

С учетом вышеуказанной замены переменных при реализации алгоритма используется следующая запись матрицы Якоби:

$$J_{ep} = \begin{pmatrix} Y\xi_p & Y\eta_p \\ Z\xi_p & Z\eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_I \frac{\delta N_I}{\delta \xi}(\xi_p, \eta_p) & \sum Z_I \frac{\delta N_I}{\delta \xi}(\xi_p, \eta_p) \\ \sum Y_I \frac{\delta N_I}{\delta \eta}(\xi_p, \eta_p) & \sum Z_I \frac{\delta N_I}{\delta \eta}(\xi_p, \eta_p) \end{pmatrix}$$

Таким образом, значения напряжений и деформаций вычисляются уже в гауссовых точках, приведенных к конечным элементам Ω_e в ГСК.

В результате реализации алгоритма должно быть получено разбитое на конечные элементы исходное железобетонное сечение с распределением деформаций (ε_{GP_p} , ε_{R_j}) и напряжений (σ_{GP_p} , σ_{R_j}) в каждой гауссовой точке бетонных элементов сечения и в каждом арматурном стержне.

После дискретизации сечения производится определение усилий во всех конечных элементах по действующим напряжениям первого приближения распределения относительных деформаций по высоте сечения. После определения внутренних сил производится проверка равенства внутренних и внешних сил. При превышении данной разницы невязки R производится уточнение расположения нейтральной оси и повторение действий по определению усилий.

$$R = \sqrt{(M_y^{ext} - M_y^{int})^2 + (M_z^{ext} - M_z^{int})^2 + (N^{ext} - N^{int})^2}$$

В соответствии с описанной выше методикой определения напряжений конечных элементов сечения с использованием MS Excel, VBA и модуля Solver

была построена диаграмма предельных состояний по условию прочности, представленная ниже.

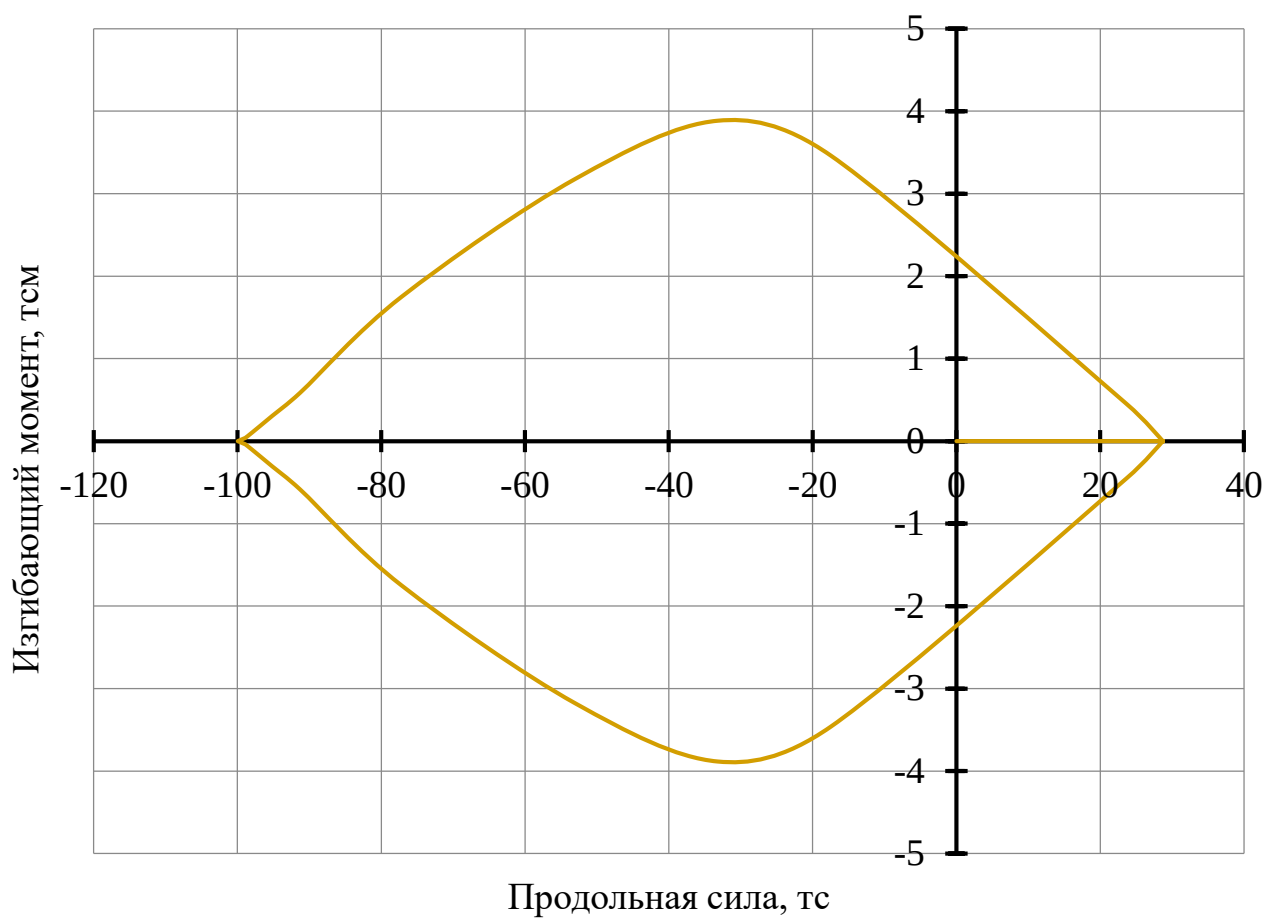


Рисунок 25 – Диаграмма предельных состояний по условию прочности построенной по НДМ с итерационными вычислениями

2.1.3. Нелинейная деформационная модель без итерационных вычислений

Методика построения диаграмм предельных состояний без итерационных вычислений основан на определении напряженно-деформированного состояния (НДС) сечения элемента конструкции при различных вариантах распределения относительных деформаций по высоте сечения [109, 110].

Внутренние продольные силы N и изгибающие моменты M_z , M_y при расчете стержневого элемента в общем случае являются результатом действия нормальных напряжений. Если принять оси x и y за главные, то:

$$\sigma_x(N) = \frac{N}{A}, \sigma_x(M_z) = \frac{M_z}{I_z} y, \sigma_x(M_y) = \frac{M_y}{I_y} x$$

При одновременном действии N , M_z , M_y нормальные напряжения складываются алгебраически, так как все они действуют вдоль оси x .

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z) + \sigma_x(M_y) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

В зависимости от направления действующих сил в общем виде напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_x = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

На основе принципа суперпозиции деформации в стержне, соответствующие гипотезе плоских сечений, могут быть представлены как наложение трех простых деформационных составляющих:

$$\varepsilon_x = \varepsilon + k_z y + k_y x;$$

Для упругого тела в силу закона Гука нормальное напряжение связано с относительными деформациями через модуль упругости:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E(\varepsilon + k_z y + k_y x)$$

Связь между осевыми деформациями стержня и его кривизной с внутренними силовыми факторами N , M_z , M_y задается интегральными выражениями:

$$N = \int_A \sigma_x dA, M_z = \int_A y \sigma_x dA, M_y = \int_A z \sigma_x dA$$

Подставляя выражения напряжений, с учетом знаков и направления действия усилий:

$$N = E(A\varepsilon - S_z k_z + S_y k_y)$$

$$M_z = E(-S_z \varepsilon + I_z k_z - I_{zy} k_y)$$

$$M_y = E(S_y \varepsilon - I_{zy} k_z + I_y k_y)$$

В матричной форме эта система записывается так:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & -S_z & S_y \\ -S_z & I_z & -I_{zy} \\ S_y & -I_{zy} & I_y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k_z \\ k_y \end{Bmatrix}$$

$$N = EI * X = D * X$$

Матрица жесткости D формируется из геометрических характеристик сечения и модулей упругости материалов, а матрица X включает компоненты относительных деформаций стержня.

Значения относительных деформаций в арматуре и бетоне при действии изгибающего момента в одной плоскости могут быть определены как:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 + \kappa y * h_s = \varepsilon_0 * 1 + \kappa y * h_s,$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 + \kappa y * h_b = \varepsilon_0 * 1 + \kappa y * h_b,$$

где,

ε_0 – значение предельной относительной осевой деформации;

κ_y – значение предельной кривизны;

h_s, h_b – расстояния от центра сечения до крайних граней арматуры и бетона соответственно;

$\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{b1}$ – значение относительной деформации арматуры и бетона соответственно;

Эти уравнения можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_s \\ 1 & h_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h_s \\ 1 & h_b \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_y \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_b \end{bmatrix}$$

$$E = A * X$$

Решение данной системы уравнений является:

$$X = A^{-1} * E$$

Таким образом определение предельных внутренних усилий при действии изгибающего момента в одной плоскости в общем виде может быть представлено в следующей форме:

$$N = D * A^{-1} * E$$

На основе этой системы возможно определение усилий при различных случаях распределения относительных деформаций в сечении.

Для построения диаграммы предельных состояний необходимо рассмотреть все возможные случаи предельного состояния железобетонного элемента. Основы такого подхода изложены в работах [110, 109, 98, 111, 112].

В общем случае у диаграммы предельных состояний по условию прочности можно выделить несколько характерных участков (Рисунок 26 –), которые определяются следующими контрольными точками:

1. – максимальное осевое усилие сжатия;
2. – нулевые напряжения в растянутой арматуре;
3. – оптимальный случай предельного состояния, при одновременном достижении предельных напряжений в растянутой арматуре и сжатом бетоне;
4. – нулевые напряжения в крайней фибре сжатой грани бетона;

5. – максимальное осевое усилие растяжения.

На основе этих точек выделяются следующие характерные участки диаграммы:

1. Сечение полностью сжато: все относительные деформации отрицательные, в крайней сжатой фибре бетона достигаются предельные значения.
2. В сечении появляется зона растяжения: в крайней сжатой фибре бетона сохраняются предельные деформации.
3. После достижения предельных деформаций в растянутой арматуре максимальные деформации в сжатом бетоне постепенно уменьшаются до нуля.
4. Все сечение работает на растяжение: в растянутой арматуре достигаются предельные деформации.

Между контрольными точками располагается бесконечное множество промежуточных состояний, каждое из которых характеризует определенное напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции. Однако увеличение количества таких промежуточных точек не всегда приводит к повышению точности построения диаграммы предельных состояний, поскольку это зависит от характера изменения НДС в пределах исследуемого участка.

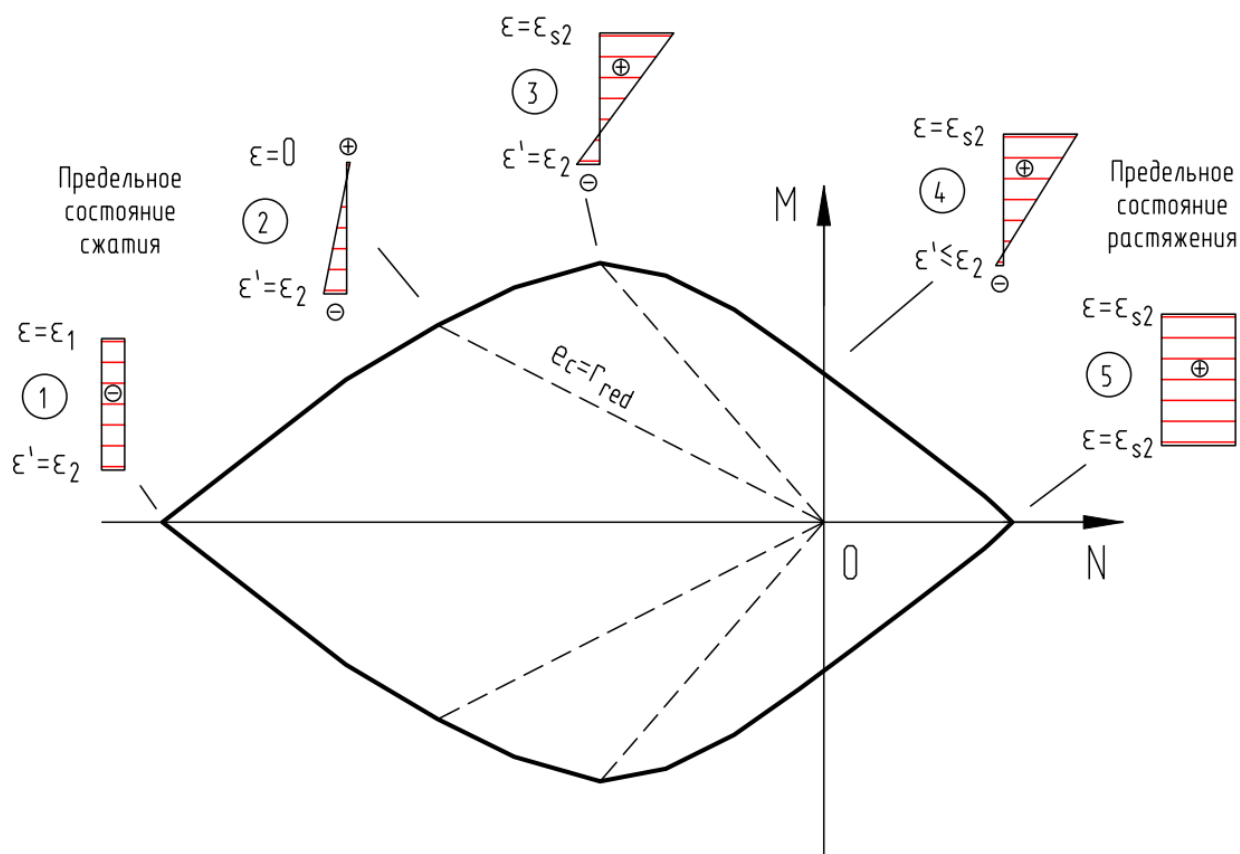


Рисунок 26 – Общий случай диаграммы предельных состояний

В работе автора [112] приведен пример построения диаграммы предельных состояний по данным принципам в соответствии с требованиями зарубежной нормативной литературы [47].

Однако, согласно этим требованиям, в одном из рассматриваемых случаев – при действии изгибающего момента без продольной силы – остается необходимость выполнения итерационных вычислений. Кроме того, в представленных расчетах не учитывается применение нелинейной диаграммы деформирования бетона: используется упрощенная прямоугольная эпюра напряжений, что влечет за собой существенное упрощение методики расчета.

Принципы построения диаграмм предельных состояний без использования итерационных методов были рассмотрены в отечественной литературе [109], где изложен подход, позволяющий упростить расчеты без потери точности. В частности, в работе [110] рассмотрены методы расчета железобетонных элементов

с полигональным поперечным сечением, что расширяет возможности применения данного подхода.

Методика построения диаграммы предельных состояний в общем случае включает следующие этапы:

1. Построение эпюры относительных деформаций в сечении;
2. Построение эпюры напряжений на основании диаграмм деформирования бетона и арматуры;
3. Определение максимально допустимого значения осевой силы;
4. Определение максимально допустимого изгибающего момента;
5. Добавление промежуточных точек на диаграмму предельных состояний.

Ниже приведен пример определения характерных контрольных точек, используемых для построения диаграммы предельных состояний железобетонного элемента, рассмотренного в предыдущих разделах.

Поперечное сечение полностью сжато

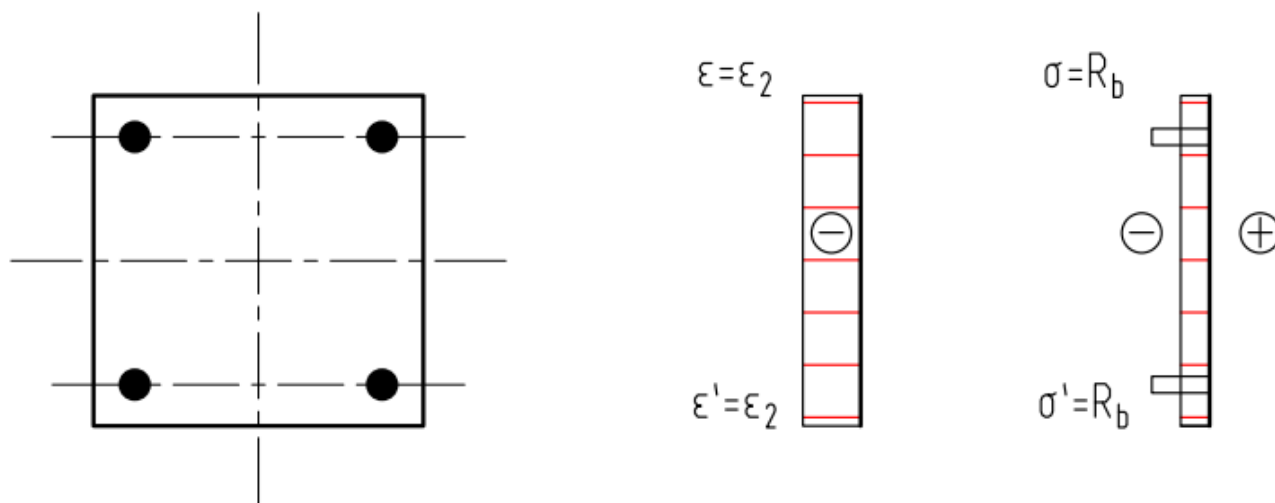


Рисунок 27 – Эпюры относительных деформаций (мм/мм) и напряжений (МПа) в случае, когда поперечное сечение полностью сжато

Деформации в растянутой арматуре отсутствуют

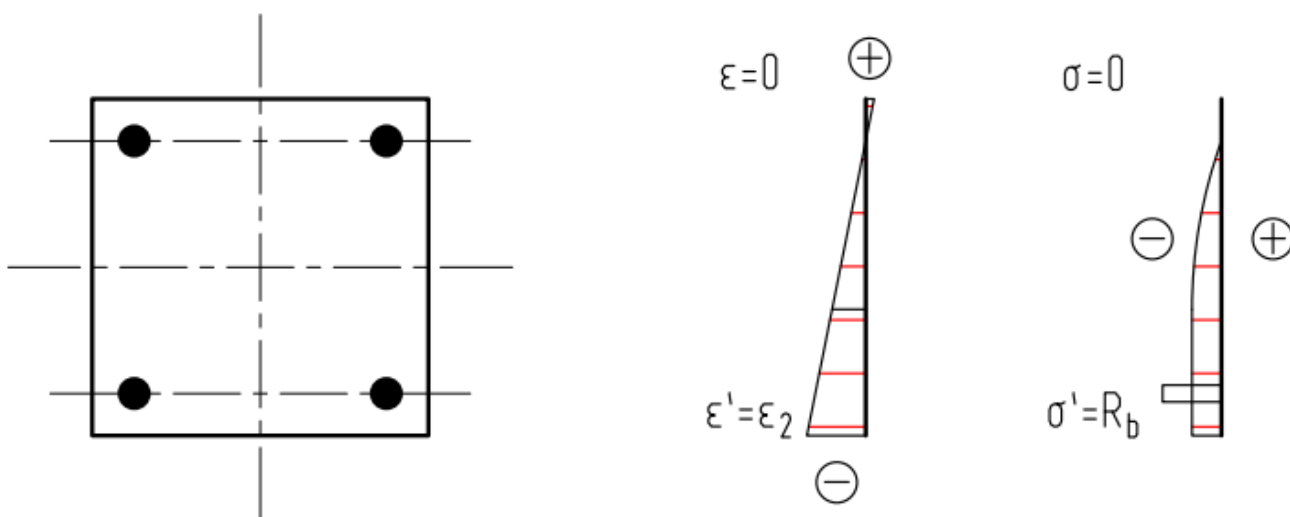


Рисунок 28 – Эпюры относительных деформаций (мм/мм) и напряжений (МПа) в случае, когда в растянутой арматуре отсутствуют деформации

Оптимальный случай предельного состояния

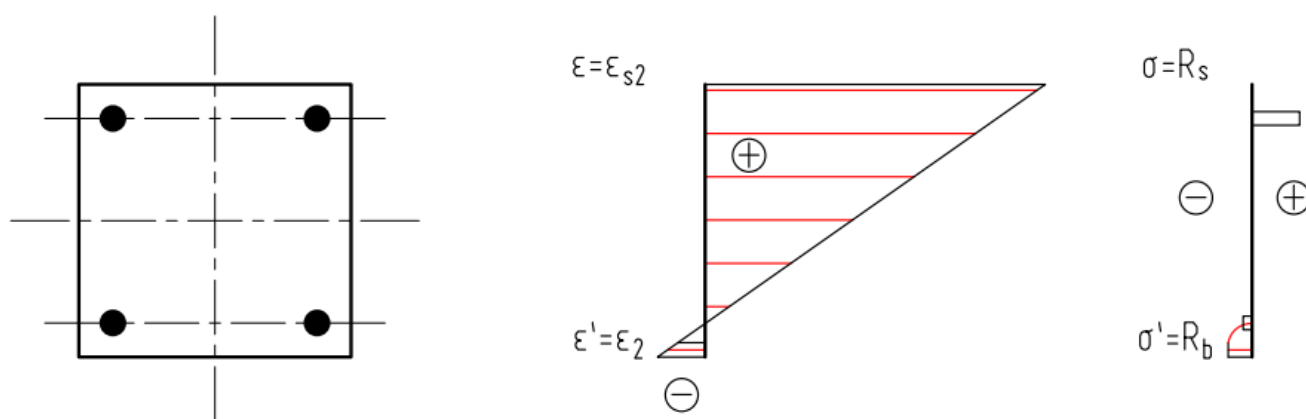


Рисунок 29 – Эпюры относительных деформаций (мм/мм) и напряжений (МПа) в случае, когда предельные деформации достигаются одновременно в растянутой арматуре и сжатом бетоне

Деформации в крайней фибре сжатой грани бетона отсутствуют

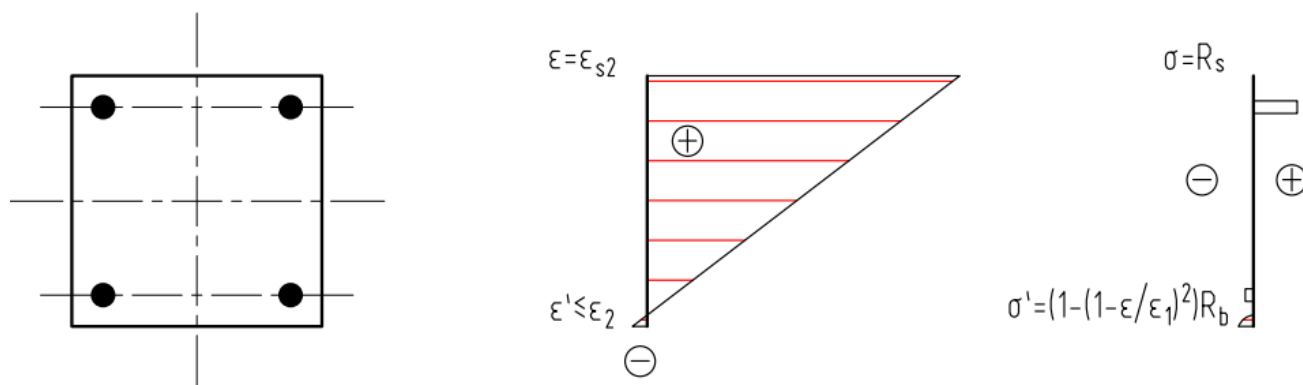


Рисунок 30 – Эпюры относительных деформаций (мм/мм) и напряжений (МПа) в случае, когда в крайней фибре сжатой грани бетона отсутствуют деформации

Поперечное сечение полностью растянуто

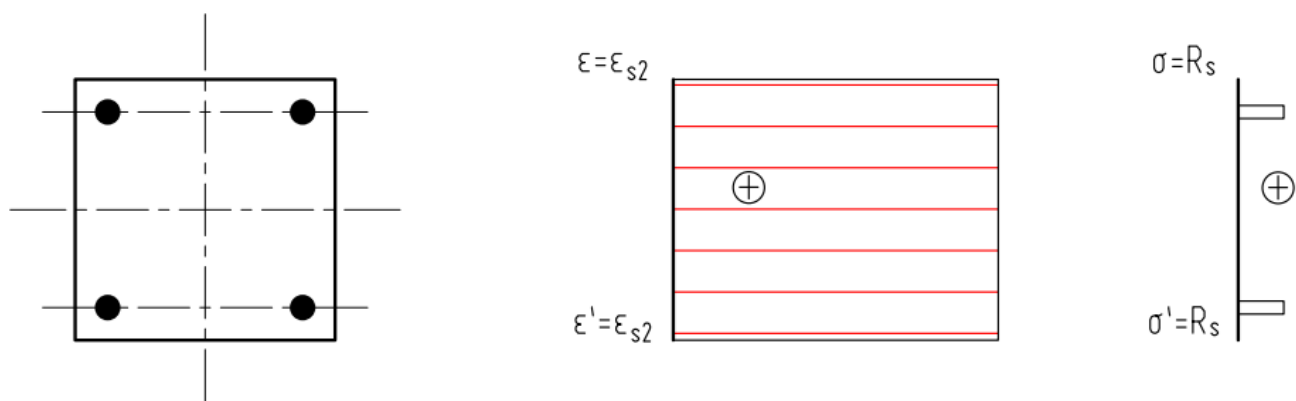


Рисунок 31 – Эпюры относительных деформаций (мм/мм) и напряжений (МПа) в случае, когда поперечное сечение полностью растянуто

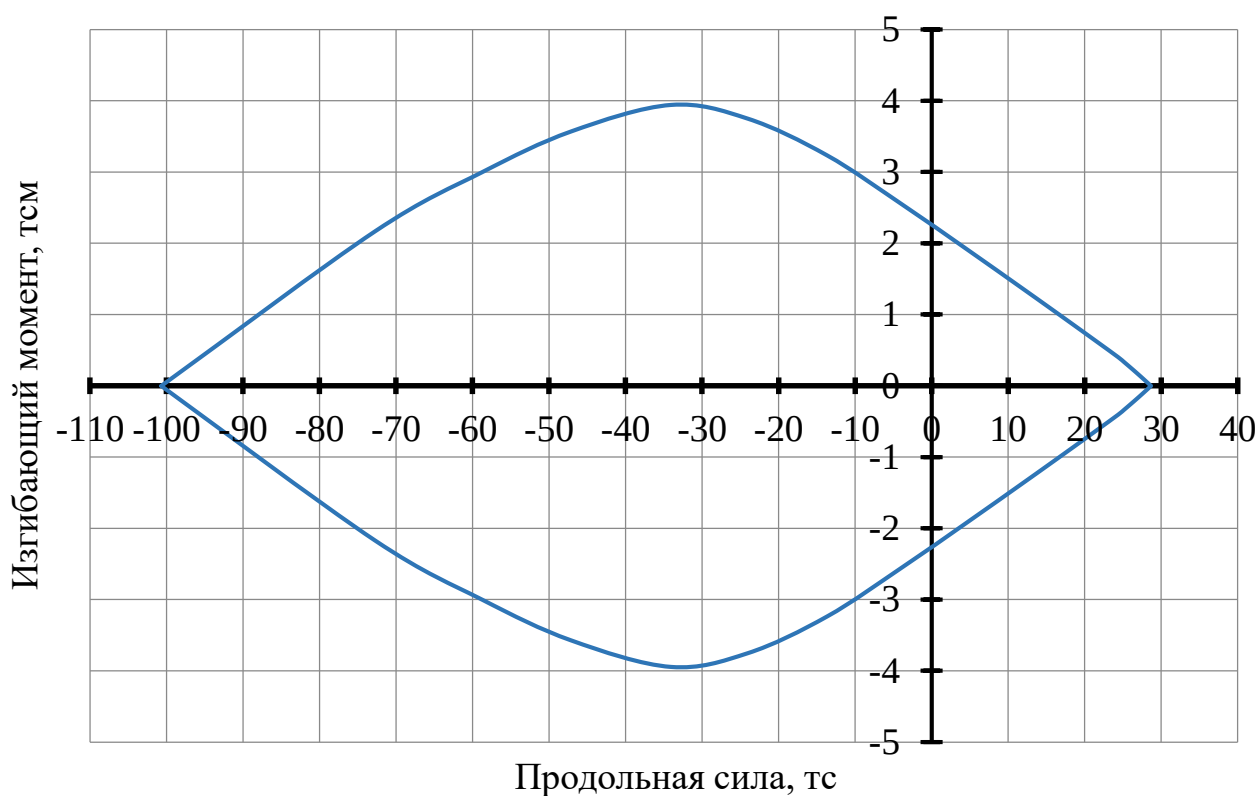


Рисунок 32 – Диаграмма предельных состояний по условию прочности построенной по НДМ без итерационных вычислений

2.1.4. Сравнительный анализ методов расчета при построении диаграмм предельных состояний для условного железобетонного элемента

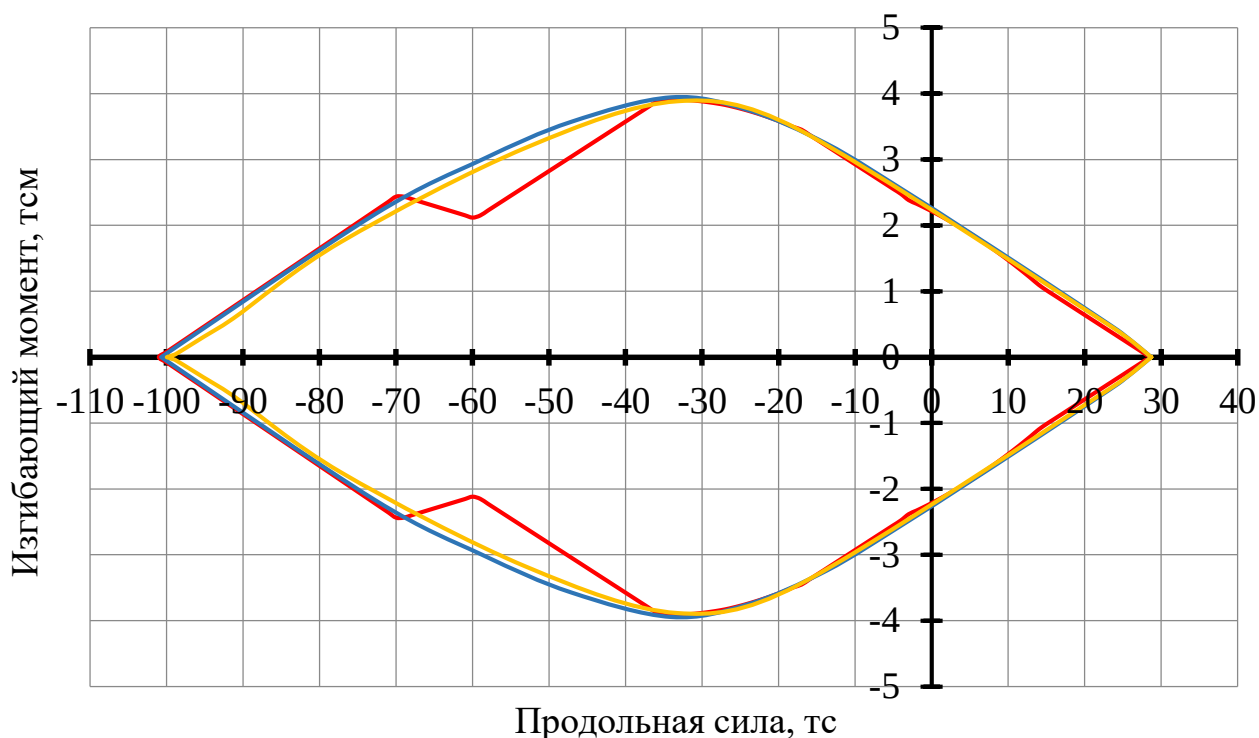


Рисунок 33 – Сводный график диаграмм предельных состояний, полученных по методу предельного равновесия (красный), НДМ с итерационными вычислениями (желтый), без итерационных вычислений (синий)

Метод предельного равновесия, применяемый в нормативной практике проектирования, характеризуется простой расчетной схемой и незначительными вычислительными затратами. В его основе лежат допущения о форме эпюр напряжений и линейном распределении деформаций по высоте сечения. Это обеспечивает возможность реализации метода как в аналитической форме, так и в стандартных расчетных программных средствах. В то же время данный подход имеет ограничения, связанные с невозможностью учета нелинейной работы материалов и ограниченной применимостью к сечениям сложной формы.

Деформационные модели основаны на численном представлении поперечного сечения с учетом реальных диаграмм деформирования материалов. Такой подход позволяет учитывать произвольную геометрию сечения, неравномерное

армирование и особенности напряженно-деформированного состояния. В рамках итерационного алгоритма положение нейтральной оси определяется из условия равновесия внутренних и внешних усилий, что обеспечивает повышенную точность расчета. К недостаткам метода следует отнести увеличение вычислительных затрат, особенно при многократных расчетах.

Деформационная модель без использования итерационного поиска основана на прямом определении положения нейтральной оси при заданных предельных деформациях материалов. В этом случае сохраняются основные предпосылки деформационного подхода, однако снижается вычислительная сложность алгоритма. Результаты сопоставительного анализа показывают, что при корректной реализации данный метод обеспечивает значения, близкие к получаемым при итерационном расчете, при меньших вычислительных затратах.

Таблица 3 – Сводный анализ методик построения диаграмм предельных состояний

Метод расчета	Точность	Трудоемкость	Практическая применимость
Классический метод МПР	Средняя	Низкая	Высокая для типовых сечений
НДМ с итерационными вычислениями	Высокая	Высокая	Высокая для сложных сечений
НДМ без итерационных вычислений	Высокая	Низкая	Очень высокая

Таким образом, сравнительный анализ показал, что каждый из подходов обладает своей областью применимости. Классический метод можно рассматривать как быструю и нормативно одобренную основу для типовых решений, тогда как деформационные модели, особенно в их усовершенствованных численных реализациях, обеспечивают точность, универсальность и высокую инженерную информативность.

2.2. Разработка методики учета ограничения предельной относительной высоты сжатой зоны бетона при расчете железобетонных опор мостов по нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений

2.2.1. Назначение и область применения методики

В связи с отсутствием единых требований к построению диаграмм предельных состояний, в работе сформулированы предложения по их унификации, не затрагивающие расчетные алгоритмы, но регламентирующие представление исходных и результирующих данных. В частности, предлагается использовать терминологию, согласованную с ГОСТ 27751–2014 [97], с указанием группы предельных состояний и расчетного критерия, например, «диаграмма предельных состояний первой группы по условию прочности», что обеспечивает однозначность интерпретации результатов.

Для обеспечения воспроизводимости расчетов предлагается фиксировать минимально необходимый набор характеристик диаграммы, включая контрольные точки и расчетные области [98]. В рамках разработанной методики построение диаграмм предельных состояний железобетонного элемента осуществляется на основе четырех характерных состояний (Рисунок 34 –), соответствующих ключевым этапам напряженно-деформированного состояния сечения:

Точка 1 – полное сжатие: сечение полностью находится в зоне сжатия, достигается максимальная осевая сила;

Точка 2 – граница сжатия: деформации арматуры на растянутой стороне равны нулю, формируется граница между областями полного и частичного сжатия;

Точка 3 – сбалансированное разрушение: одновременно достигаются предельные деформации бетона и арматуры; соответствует максимуму изгибающего момента;

Точка 4 – полное растяжение: бетон выключается из работы, несущая способность определяется арматурой.

Указанные состояния формируют основу построения диаграммы предельных состояний и позволяют выделить характерные расчетные области, соответствующие различным режимам работы сечения.

В соответствии с этим в рамках методики выделяются три основные зоны:

- зона полного сжатия;
- зона частичного сжатия;
- зона внецентренного растяжения и изгиба.

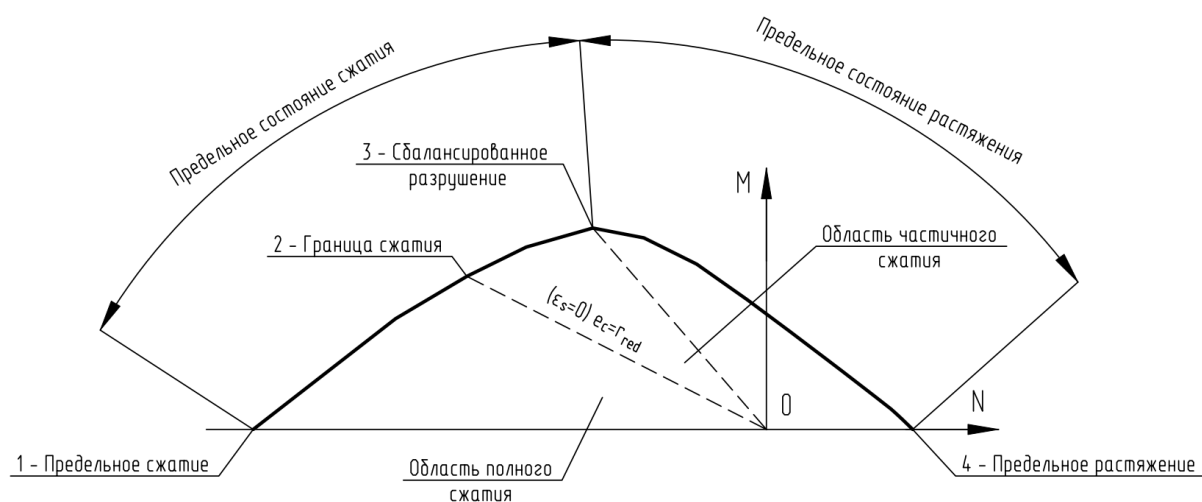


Рисунок 34 – Контрольные точки и области диаграммы предельных состояний

Таблица 4 – Контрольные точки диаграммы предельных состояний железобетонной опоры

№	Контрольная точка	Физический смысл	Состояние бетона	Состояние арматуры	Интерпретация в расчетах
1	Предельное сжатие	Сечение полностью в зоне сжатия, растянутой зоны нет	Достигает предельных деформаций сжатия	Нет растяжения, вся арматура сжата	Максимальное сжимающее усилие
2	Граница сжатия	Нейтральная линия проходит по оси рабочей арматуры, деформации арматуры равны нулю	Достигает предельных деформаций сжатия	Нет напряжений	Характерная точка в переходе между зонами I и II

3	Сбалансированное разрушение	Одновременное достижение предельных деформаций бетона (сжатие) и арматуры (растяжение)	Предел деформаций сжатия	Предел деформаций растяжения	Определяет максимальный изгибающий момент по условию прочности
4	Предельное растяжение	Сечение полностью в растянутой зоне, сжатой зоны бетона нет	Бетон исключен из работы или треснут	Вся арматура растянута	Максимальное растягивающее усилие

2.2.2. Критерий начала действия ограничения – граница сжатия

Учет ограничений по высоте сжатой зоны и влияния гибкости элементов в соответствии с положениями СП 35 напрямую связаны с положением эксцентриситета равнодействующей продольной силы относительно границ ядра сечения. Если равнодействующая приложена снаружи ядра сечения, элемент работает в условии, при которых определяющим становится ограничение по предельной высоте сжатой зоны в соответствии с п. 7.66...67 СП 35. В этом случае обеспечение пластичности сечения и предотвращение хрупкого разрушения требует соблюдения нормативных ограничений, задающих предельное значение относительной высоты сжатой зоны.

При расположении равнодействующей в пределах ядра сечения элемент работает в режиме полного сжатия сечения. В такой ситуации для мостовых конструкций не ограничивается высота сжатой зоны, но добавляется ограничение по устойчивости, зависящее от гибкости элемента, поскольку при наличии эксцентриситета, не выводящего равнодействующую за пределы ядра, элемент сохраняет сжатое состояние по всему сечению, однако подвержен потере устойчивости вследствие продольного изгиба. Это приводит к необходимости учета прогиба и продольного изгиба.

Это позволяет использовать диаграмму предельных состояний не только как расчетный, но и как интерпретационный инструмент анализа режимов работы сечения. Такое изображение позволяет наглядно показать область работы сечения,

в которой решающим фактором является ограничение по высоте сжатой зоны, и область, в которой ключевую роль играет расчет по устойчивости.

Согласно пункту 7.53 СП 35.13330 [16], расчет таких элементов по условиям прочности и устойчивости осуществляется на основании значений эксцентриситета, определяемого как отношение изгибающего момента к продольной силе:

$$e_c = \frac{M}{N}$$

В случаях, когда величина приведенного эксцентриситета удовлетворяет условию $e_c \leq r$, равнодействующая внешних нагрузок располагается внутри ядра сечения, и все сечение работает в условиях сжатия. Для таких ситуаций расчет осуществляется с учетом коэффициента продольного изгиба φ , отражающего влияние гибкости элемента. При этом применяются следующие расчетные условия:

$$\text{Условие устойчивости: } N \leq \varphi(R_b A_b + R_{sc} A'_s)$$

$$\text{Условие прочности: } N \leq R_b A_b + R_{sc} A'_s$$

При превышении значения эксцентриситета над ядровым расстоянием ($e_c > r$), в сечении возникает растянутая зона, и прочность элемента определяется только по условию прочности с учетом дополнительного коэффициента η , корректирующего расчет на влияние прогиба.

Определяющим параметром в данном случае является ядровое расстояние r , которое рассчитывается по приведенному сечению, включающему арматуру с коэффициентами приведения. Расчет этого расстояния опирается на геометрические характеристики приведенного сечения: момент инерции I_{red} , площадь A_{red} , статический момент S_{red} и момент сопротивления W_{red} .

Радиус инерции сечения i определяется по формуле:

$$i = \sqrt{\frac{I_{red}}{A_{red}}}$$

Для определения этих геометрических характеристик необходимо определить положение центра тяжести сечения приведенного сечения:

$$y_0 = S_{red}/A_{red}$$

Гибкость элемента равна

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

Величина ядрового расстояния r .

$$r = W_{red}/A_{red}$$

где I_{red} – момент инерции приведенного сечения;

A_{red} – площадь приведенного сечения.

S_{red} – статический момент приведенного сечения.

W_{red} – момент сопротивления приведенного сечения;

Расчет производится путем определения ядрового расстояния $r = W_{red} / A_{red}$, после чего при известном эксцентриситете $e_c = r$ вычисляются усилия N и M , соответствующие предельному состоянию при полном сжатии по методу предельного равновесия.

Однако прямое использование ядрового расстояния, определяемого по приведенному сечению, в рамках деформационной модели без итерационных вычислений приводит к неоднозначности определения предельного состояния. С целью реализации ограничения в диссертации разработана методика, позволяющая без применения итерационных процедур определить границу сжатия в железобетонных элементах. Метод основан на физически обоснованном и конструктивно простом критерии: условии отсутствия напряжений в арматуре, расположенной у растянутой грани сечения.

Суть критерия заключается в аналитическом определении положения нейтральной оси, при котором в наиболее удаленном от сжатой грани стержне арматуры напряжения становятся равными нулю $\varepsilon_s = 0$ (Рисунок 35 –). Это положение характеризует предельный случай, при котором арматура в растянутой

зоне фактически выключается из работы, и весь элемент функционирует в пределах сжатого состояния.

Данный критерий непосредственно следует из гипотезы плоских сечений

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + kz,$$

и соответствует положению нейтральной оси, при котором деформации на растянутой грани обращаются в ноль. Это состояние является предельным для полностью сжатого сечения и эквивалентно положению равнодействующей на границе ядра.

Если при расчете выполняется условие $\varepsilon_s > 0$, в сечении возникает растянутая зона, что соответствует выходу равнодействующей за пределы ядра и необходимости учета ограничения по высоте сжатой зоны. При $\varepsilon_s = 0$ реализуется предельное состояние полного сжатия, а при $\varepsilon_s < 0$ все сечение находится в сжатом состоянии.

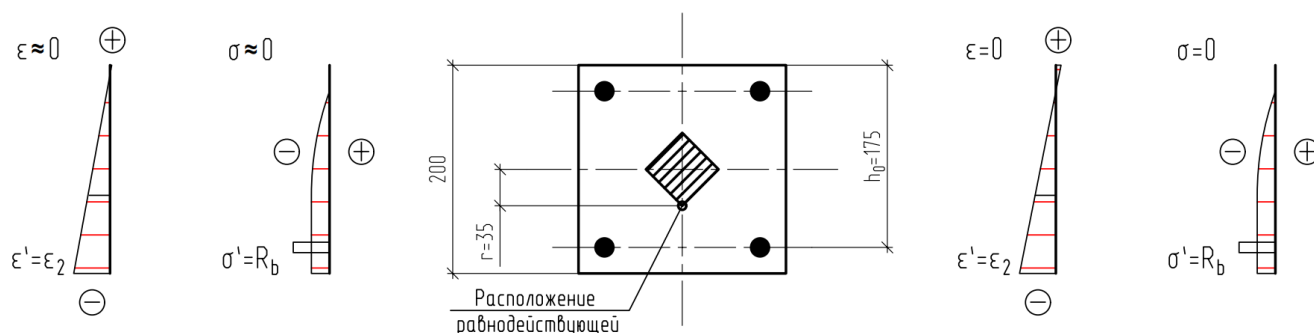


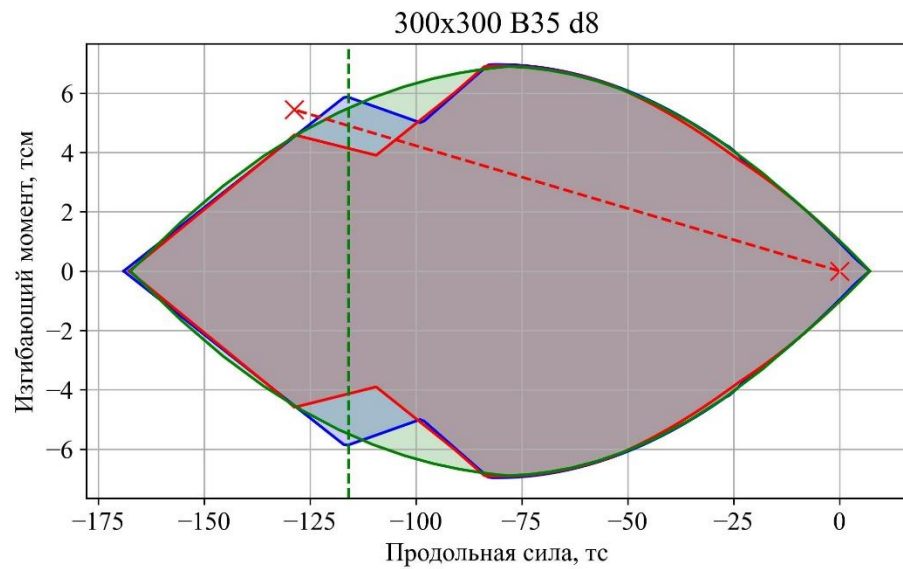
Рисунок 35 – Сравнение эпюр деформаций и напряжений для двух методик (слева – нормативная, справа – предложенная)

Для анализа применимости данного критерия проведены расчеты по методу предельного равновесия, НДМ с предложенным критерием и численное моделирование в Midas GSD. Расчеты выполнены для элементов из бетона класса В35 с различными поперечными сечениями (150x150 мм, 200x200 мм, 300x300 мм) и армированием четырьмя стержнями из арматуры класса А400 диаметром 8 мм и 16 мм. Диапазон процентного армирования варьировался от 0,223 % до 3,574 %, что охватывает значения от минимально допустимых соответствующих п. 7.95 СП 35.13330 [16] до максимально рекомендуемых в технической литературе [99].

В процессе вычислительного эксперимента для каждого сочетания параметров определялись:

- предельные значения продольных усилий и изгибающих моментов;
- положение нейтральной оси при достижении предельного состояния;
- относительные расхождения между диаграммами, построенными двумя методами.

Результаты представлены в графической форме (Рисунок 36 – , Рисунок 37 – , Рисунок 38 –) и в виде обобщающей таблицы с количественными отклонениями между методами расчета. На основании полученных данных выполнен анализ влияния процентного армирования на величину расхождения и дана оценка применимости предложенной методики в инженерной практике.



МПР

НДМ

Midas

Граница эксцентриситетов

Макс ΔM

Площадь графика по МПР: 1526.070

Площадь графика по НДМ: 1453.836

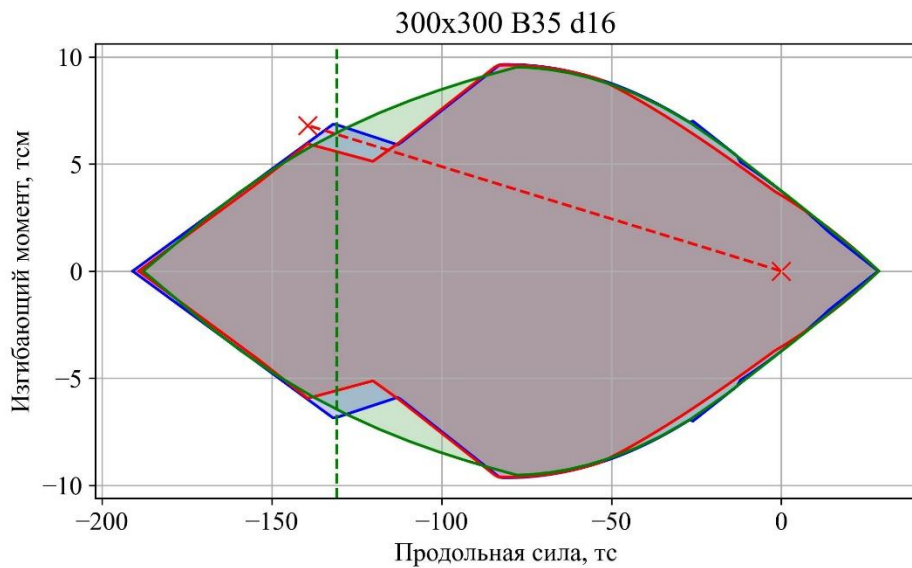
Площадь графика по Midas: 1564.698

Разница площадей МПР и НДМ: 72.234 (4.85%)

Изгибающий момент по МПР, тсм: 5.86

Изгибающий момент по НДМ, тсм: 4.14

Макс ΔM, тсм: 1.72 (34.48%) при N = -115.92, тс



МПР

НДМ

Midas

Граница эксцентриситетов

Макс ΔM

Площадь графика по МПР: 2491.298

Площадь графика по НДМ: 2401.767

Площадь графика по Midas: 2544.265

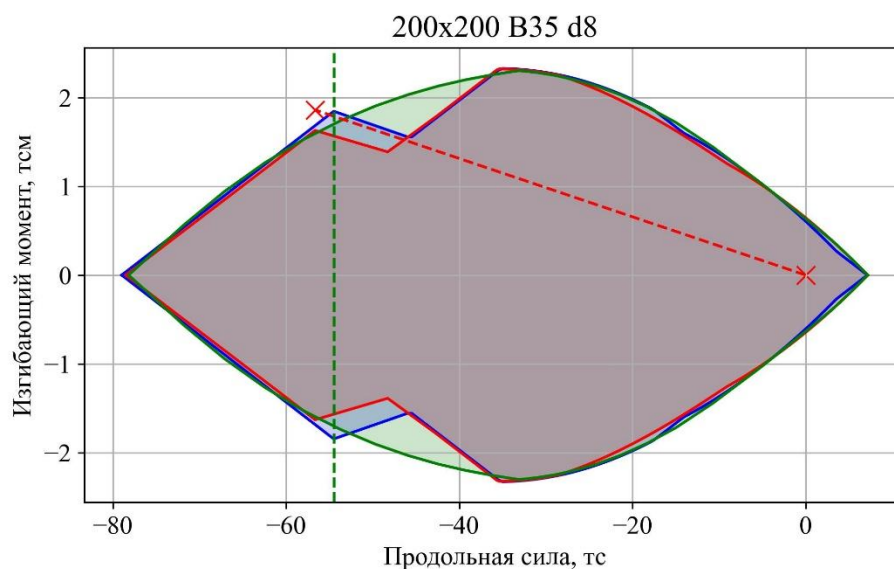
Разница площадей МПР и НДМ: 89.531 (3.66%)

Изгибающий момент по МПР, тсм: 6.83

Изгибающий момент по НДМ, тсм: 5.57

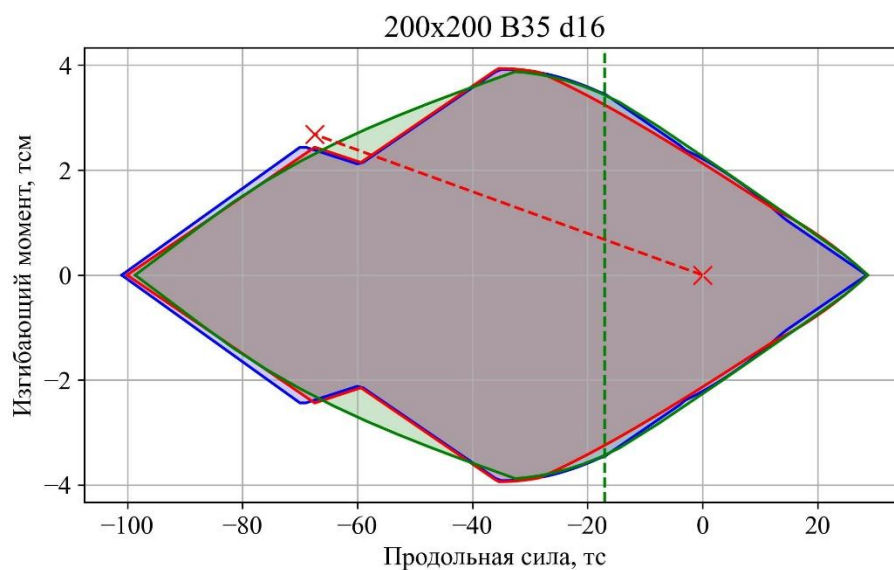
Макс ΔM, тсм: 1.25 (20.23%) при N = -130.84, тс

Рисунок 36 – Диаграммы предельных состояний по условию прочности для железобетонного элемента из бетона В35 с поперечным сечением 300x300 мм с 4-мя стержнями арматуры А400 диаметра 8 и 16 мм.



МПР
НДМ
Midas
Граница эксцентриситетов
Макс ΔM

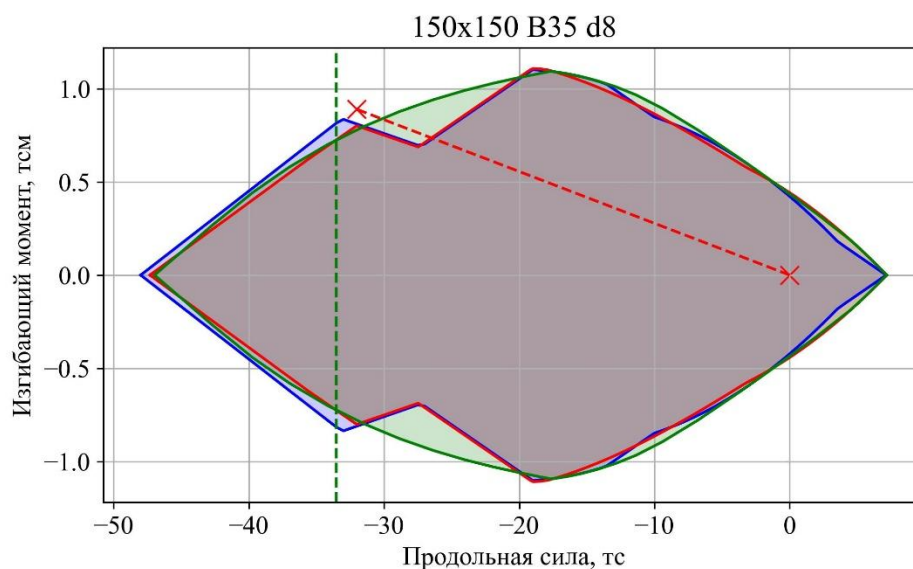
Площадь графика по МПР: 240.775
Площадь графика по НДМ: 233.045
Площадь графика по Midas: 249.198
Разница площадей МПР и НДМ: 7.730 (3.26%)
Изгибающий момент по МПР, тсм: 1.84
Изгибающий момент по НДМ, тсм: 1.57
Макс ΔM , тсм: 0.28 (16.31%) при $N = -54.44$, тс



МПР
НДМ
Midas
Граница эксцентриситетов
Макс ΔM

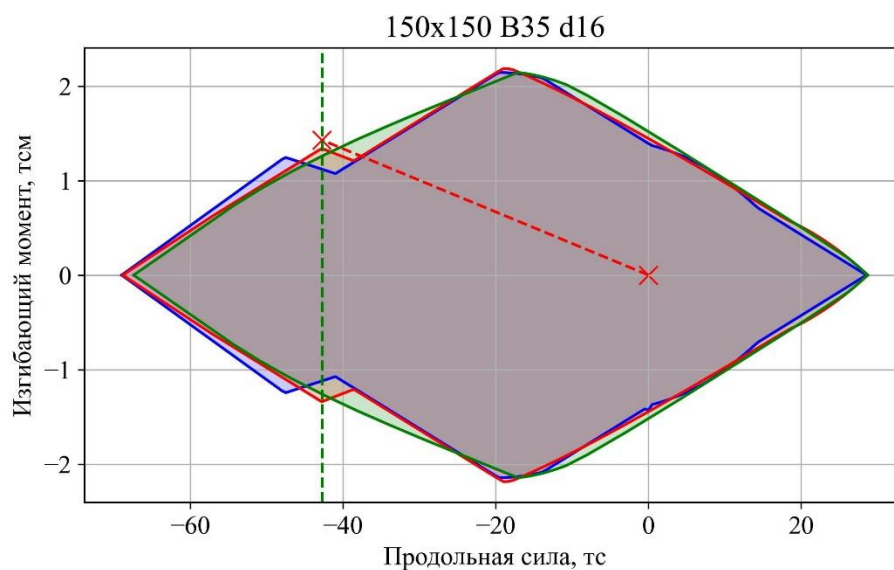
Площадь графика по МПР: 566.647
Площадь графика по НДМ: 555.014
Площадь графика по Midas: 576.333
Разница площадей МПР и НДМ: 11.632 (2.07%)
Изгибающий момент по МПР, тсм: 3.45
Изгибающий момент по НДМ, тсм: 3.24
Макс ΔM , тсм: 0.21 (6.26%) при $N = -17.03$, тс

Рисунок 37 – Диаграммы предельных состояний по условию прочности для железобетонного элемента из бетона В35 с поперечным сечением 200x200 мм с 4-мя стержнями арматуры А400 диаметра 8 и 16 мм.



МПР
НДМ
Midas
Граница эксцентриситетов
Макс ΔМ

Площадь графика по МПР: 70.774
Площадь графика по НДМ: 69.114
Площадь графика по Midas: 73.234
Разница площадей МПР и НДМ: 1.661 (2.37%)
Изгибающий момент по МПР, тсм: 0.82
Изгибающий момент по НДМ, тсм: 0.73
Макс ΔМ, тсм: 0.09 (11.66%) при N = -33.53, тс



МПР
НДМ
Midas
Граница эксцентриситетов
Макс ΔМ

Площадь графика по МПР: 225.514
Площадь графика по НДМ: 226.931
Площадь графика по Midas: 230.958
Разница площадей МПР и НДМ: 1.417 (0.63%)
Изгибающий момент по МПР, тсм: 1.12
Изгибающий момент по НДМ, тсм: 1.34
Макс ΔМ, тсм: 0.22 (17.81%) при N = -42.73, тс

Рисунок 38 – Диаграммы предельных состояний по условию прочности для железобетонного элемента из бетона В35 с поперечным сечением 150x150 мм с 4-мя стержнями арматуры А400 диаметра 8 и 16 мм.

Таблица 5 – Сопоставительная таблица результатов расчетов по методу предельного равновесия и авторскому алгоритму на основе НДМ без итерационных расчетов.

Наименование расчета	Процент армирования, %	Максимальное отклонение, %	Отклонение площади, %	Координата н.о. по МКЭ, м	Теоретическая координата н.о., м	Отклонение координаты н.о., %
300x300 d8	0.22	34.48	4.85	0.291	0.275	5.64
200x200 d8	0.50	16.31	3.26	0.184	0.175	5.00
150x150 d8	0.89	11.66	2.37	0.130	0.125	4.39
300x300 d16	0.89	20.23	3.66	0.287	0.275	4.44
200x200 d16	2.01	6.26	2.07	0.181	0.175	3.17
150x150 d16	3.57	17.81	0.63	0.128	0.125	2.27

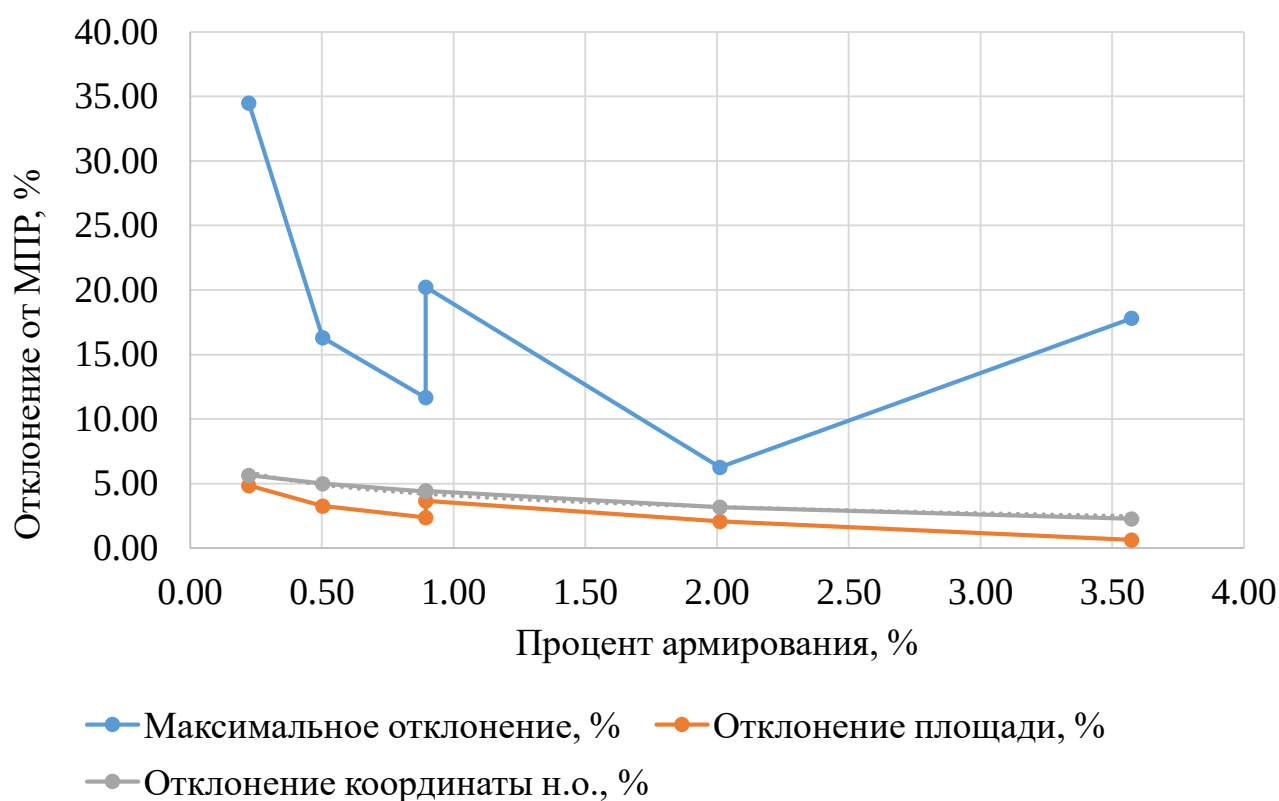


Рисунок 39 – Отклонения результатов расчета с применением предложенного критерия от нормативного в зависимости от процента армирования

В результате выполненных расчетов получены количественные данные, характеризующие расхождения между результатами метода предельного равновесия, предложенной методики на основе нелинейной деформационной

модели без итерационных вычислений и численного моделирования методом конечных элементов. Основные результаты сопоставления приведены в таблице выше.

Установлено, что для всех рассмотренных вариантов сечений и процентов армирования отклонение координаты нейтральной оси, определенной по предложенной методике, от значений, полученных методом конечных элементов, не превышает 5,64%. При этом с увеличением процента армирования наблюдается устойчивая тенденция к снижению относительного отклонения: от 5,64% при минимальном армировании 0,22% до 2,27% при уровне 3,57%. Это свидетельствует о том, что с ростом вклада продольной арматуры напряженно-деформированное состояние сечения определяется более устойчиво, а влияние принятого критерия учета ограничения сжатой зоны снижается.

В то же время отклонения предельных изгибающих моментов при фиксированном продольном усилии изменяются в более широком диапазоне – от 6,26% до 34,48%. Наибольшие расхождения характерны для сечений с низким процентом армирования, что может быть объяснено повышенной чувствительностью предельных моментов к положению нейтральной оси вблизи растянутой зоны. Это связано с тем, что в предложенной методике плечо внутренних сил в случае отсутствия напряжений принимается одинаковым независимо от процента армирования. При этом в традиционном методе ядровое расстояние меняется в соответствии с процентом армирования. Эти обстоятельства приводят к тому, что даже незначительные различия в определении положения нейтральной оси приводят к заметным изменениям величины изгибающего момента.

При этом интегральные характеристики диаграмм предельных состояний, в частности площадь под кривой, отличаются существенно меньше – не более 4,85%. Это указывает на то, что выявленные расхождения носят преимущественно локальный характер и связаны с различиями формы диаграмм в отдельных

диапазонах, тогда как общая несущая способность элемента и характер перераспределения внутренних усилий воспроизводятся сопоставимо.

Предложенный критерий обеспечивает корректное определение положения нейтральной оси и в целом адекватно описывает напряженно-деформированное состояние железобетонного сечения. Наблюдаемые расхождения по предельным усилиям имеют физически объяснимый характер и не приводят к существенному искажению интегральных характеристик работы элемента не более 5,64%, что подтверждает применимость разработанного деформационного критерия для построения диаграмм предельных состояний без использования итерационных процедур.

2.2.3. Критерий окончания действия ограничения

Нормативный параметр предельной относительной высоты сжатой зоны бетона ξ_R , используемый в методе предельного равновесия, формально вводится как геометрическая характеристика напряженного состояния сечения. Вместе с тем анализ его происхождения показывает, что данный параметр имеет деформационную природу и отражает предельное соотношение деформаций бетона и растянутой арматуры в момент достижения расчетного предельного состояния. Нормативное выражение для ξ_R получено из условия одновременного достижения предельной деформации бетона при сжатии при одновременном достижении растянутой арматурой расчетной деформации, соответствующей ее расчетному сопротивлению, с учетом принятых в нормативе допущений о характере распределения напряжений в бетоне. В этом предельном состоянии выполняются соотношения:

$$\xi_R = \frac{0,8}{1 + \frac{\varepsilon_{s,el}}{\varepsilon_{b2}}}$$

где $\varepsilon_{s,el} = \frac{R_s}{E_s}$ – относительная деформация растянутой арматуры при напряжениях, равных R_s ;

ε_{b2} – относительная деформация сжатого бетона при напряжениях, равных R_b , принимаемая в соответствии с 6.1.20 [63] при непродолжительном действии нагрузки.

Для тяжелого бетона классов В70-В100 и для мелкозернистого бетона в числителе формулы вместо 0,8 следует принимать 0,7. Коэффициент 0,8 (0,7) в данном выражении не является чисто геометрическим коэффициентом формы эпюры напряжений, а отражает нормативно зафиксированное предельное деформационное состояние бетона, эквивалентное условию обеспечения пластичности сечения.

Переход от геометрического описания к деформационному осуществляется на основе гипотезы плоских сечений и линейного закона распределения деформаций по высоте сечения. Исходным является нормативное выражение для определения предельной высоты сжатой зоны:

$$\xi_R = \frac{x}{h_0}.$$

Отсюда высота сжатой зоны:

$$x = h_0 \xi_R.$$

Распределение деформаций по высоте сечения принимается линейным, соответственно:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + k z,$$

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b} = \frac{h_0 - x}{x}.$$

Для изгибаемого или внецентренно сжатого элемента это приводит к зависимости между деформациями бетона и растянутой арматуры:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_b \frac{h_0 - x}{x},$$

где x – высота сжатой зоны, h_0 – рабочая высота сечения. Подставляя в это выражение предельную деформацию бетона ε_{b2} и нормативное значение относительной высоты сжатой зоны ξ_R , получают

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{b2} \frac{h_0 - h_0 \xi_R}{h_0 \xi_R} = \varepsilon_{b2} \frac{h_0(1 - \xi_R)}{h_0 \xi_R} = \varepsilon_{b2} \frac{1 - \xi_R}{\xi_R} = \frac{\varepsilon_{b2}}{\xi_R} - \varepsilon_{b2}.$$

Характерное значение деформации растянутой арматуры, соответствующее нормативному предельному деформационному состоянию сечения может быть представлено в виде

$$\varepsilon_{s0} = \frac{\varepsilon_{b2}}{\xi_R} - \varepsilon_{b2},$$

Таким образом, условие

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{s0}$$

принимается в качестве критерия окончания действия ограничения по высоте сжатой зоны.

Введенный деформационный критерий обеспечивает прямую интеграцию нормативного ограничения в нелинейную деформационную модель и позволяет отказаться от явного контроля параметра ξ , заменяя его эквивалентным условием по деформациям. Это устраняет необходимость итерационного определения границы применимости ограничения и обеспечивает согласованность расчета с физической моделью работы сечения.

2.2.4. Формирование критерия ограничения предельной относительной высоты сжатой зоны бетона

Как показано в первой главе исследования, для обеспечения нормативного уровня надежности мостовых опор, проектируемых с использованием результатов расчетов по НДМ без итерационных расчетов необходимо учитывать ограничение предельной высоты сжатой зоны бетона в зоне частичного сжатия. Данное ограничение занижает предельно допускаемые усилия, получаемые по методу предельного равновесия. При этом метод предельного равновесия в зоне действия ограничения предельной высоты сжатой зоны принимается в качестве эталонного показателя проектной надежности результатов расчета в связи с апробированностью и экспериментальной доказанностью метода при расчете элементов с превышением граничной высоты сжатой зоны.

Анализ существующих подходов к учету данного ограничения $\xi \leq \xi_R$ показывает, что возможны три принципиально различных способа: изменение предельных деформаций материалов, ограничение предельных усилий и корректировка расчетных сопротивлений. Подход, основанный на изменении предельных деформаций бетона или арматуры, приводит к искажению физической природы деформационной модели, поскольку предельные деформации являются экспериментально установленными характеристиками материалов и не зависят от напряженного состояния сечения. Их искусственное варьирование в процессе расчета фактически означает изменение диаграмм деформирования или нарушение гипотезы плоских сечений, что противоречит базовым положениям НДМ.

Возможным способом учета рассматриваемого ограничения является подход, реализованный в нормах ACI 318-19 [47], основанный на снижении предельных усилий сечения с использованием коэффициента, зависящего от деформационного состояния. Указанный коэффициент определяется через деформацию растянутой арматуры и тем самым опирается на деформационный критерий, что обеспечивает его физическую обоснованность и применимость в рамках нелинейной деформационной модели. При этом расчет напряженно-деформированного состояния сечения выполняется без учета данного ограничения, а его влияние учитывается на завершающем этапе в виде понижения полученной несущей способности.

В настоящей работе предлагается альтернативный способ учета данного ограничения, заключающийся во введении понижающего коэффициента к расчетному сопротивлению бетона в сжатой зоне. Такой коэффициент зависит от деформационного состояния сечения и применяется непосредственно в уравнениях равновесия при определении предельных усилий. При этом следует отметить, что введение указанного коэффициента не направлено на уточнение действительного распределения напряжений по высоте сечения. Напротив, он приводит к их условному снижению и, как следствие, к отклонению расчетной эпюры напряжений от диаграммы деформирования материала. В связи с этим данный

подход следует рассматривать исключительно как способ определения предельных усилий, а не как инструмент анализа напряженно-деформированного состояния.

Выбор данного метода в работе обусловлен стремлением обеспечить единообразие процедуры расчета предельного состояния. В отличие от подхода, при котором снижение несущей способности вводится на завершающем этапе расчета, предложенный способ позволяет учитывать соответствующее ограничение непосредственно в процессе решения уравнений равновесия без введения дополнительных внешних критериев. По своей сути он является аналогом коэффициентов условий работы, широко применяемых в нормативной практике, и обеспечивает получение предельных усилий в рамках единой расчетной схемы. Несмотря на условный характер описания напряженного состояния, такой подход позволяет корректно учитывать влияние рассматриваемого ограничения при сохранении формальной согласованности расчета, что и обусловило его применение в настоящей работе. Аналогичный подход широко применяется в отечественных и зарубежных нормативных методах расчета и реализуется, в частности, через коэффициенты полноты эпюры напряжений бетона и коэффициенты условий работы [47, 16, 100, 63].

Исходя из этого, в рамках разрабатываемой методики для эквивалентного учета нормативного ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона принимается подход, основанный на введении понижающего коэффициента α к расчетному сопротивлению бетона в сжатой зоне, зависящего от деформационного состояния сечения.

В качестве управляющего параметра данной зависимости принимается относительная деформация растянутой арматуры ε_s , поскольку именно она однозначно характеризует переход от сжатого или слабо растянутого состояния сечения к режиму, в котором реализуется нормативное ограничение, и непосредственно связана с деформационным критерием, лежащим в основе параметра ξ_R .

При формировании зависимости $a(\varepsilon_s)$ необходимо выполнение ряда принципиальных условий.

Понижающий коэффициент должен отличаться от единицы только в диапазоне деформаций, соответствующем области действия нормативного ограничения (Рисунок 40 –). При деформациях растянутой арматуры, превышающих характерное предельное значение ε_{s0} , расчет должен переходить к классической нелинейной деформационной модели без дополнительных модификаций:

$$a(\varepsilon_s) = 1 \text{ при } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{s0}$$

Такое условие обеспечивает корректное воспроизведение поведения сечения в области, где ограничение по относительной высоте сжатой зоны не является определяющим и не должно влиять на результат расчета.

С другой стороны, минимальное значение коэффициента $a_0 = a(\varepsilon_s = 0)$ должно отражать предельное снижение эффективной несущей способности сечения в условиях отсутствия растянутой арматуры, то есть в предельном случае максимального развития сжатой зоны. В этом состоянии несущая способность определяется преимущественно работой бетона при ограниченной пластичности, что требует введения понижающего фактора, аналогичного по смыслу коэффициентам условий работы или коэффициентам полноты эпюры напряжений, применяемым в нормативной практике. При этом значение a_0 должно выбираться таким образом, чтобы обеспечивалась требуемая степень снижения несущей способности для обеспечения требуемого уровня надежности без лишнего понижения.

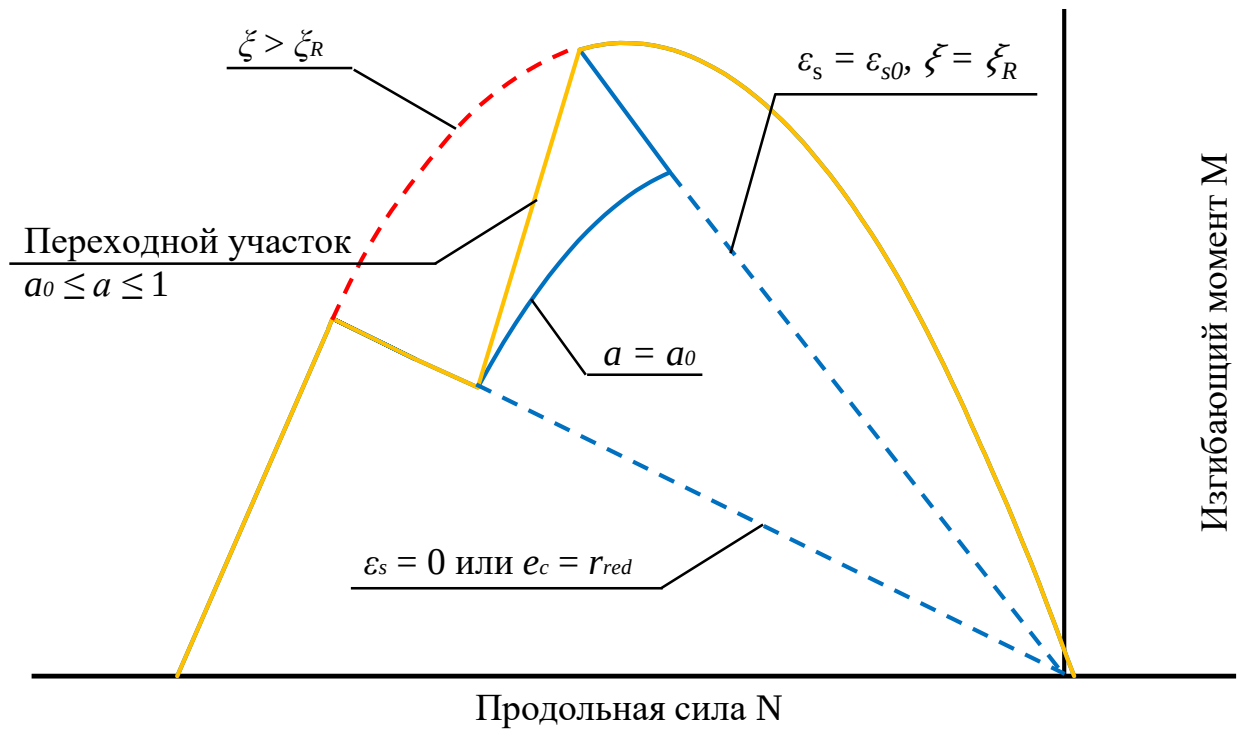


Рисунок 40 – Граничные условия применения ограничения

С учетом положений действующих нормативных документов и их интерпретации в деформационном контексте значение a_0 не может быть ни равным единице, ни произвольно малым.

Функция $a(\varepsilon_s)$ должна быть монотонно возрастающей и непрерывной на всем интервале $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s0}$, что обеспечивает устойчивое формирование диаграмм предельных состояний и исключает скачкообразные изменения расчетных усилий. Форма зависимости должна учитывать нелинейный характер связи между деформационным состоянием сечения и интегральными внутренними усилиями. В частности, линейное восстановление расчетного сопротивления бетона не обеспечивает компенсации кривизны диаграмм $M(N)$, формируемых деформационной моделью, что обосновывает необходимость рассмотрения нелинейных функциональных зависимостей.

С учетом указанных требований в качестве обобщенного класса функций для описания зависимости $a(\varepsilon_s)$ целесообразно рассматривать степенные зависимости вида:

$$a(\varepsilon_s) = a_0 + (1 - a_0) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s0}} = a_0 + (1 - a_0) \left(\frac{\varepsilon_s}{\frac{\varepsilon_{b2}}{\xi_R} - \varepsilon_{b2}} \right)^n$$

где параметр a_0 характеризует предельное снижение расчетного сопротивления бетона, а показатель степени n определяет кинематику восстановления несущей способности по мере вовлечения растянутой арматуры в работу.

2.3. Выводы по второй главе

Во второй главе предложена методика с модификацией нелинейной деформационной модели применительно к построению диаграмм предельных состояний железобетонных опор мостов без использования итерационных вычислений с учетом ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона. Предложен подход к унификации диаграмм, основанный на задании минимально необходимого набора характеристик (контрольных точек и расчетных областей), обеспечивающий воспроизводимость и сопоставимость результатов при различных методах расчета.

Сформулированы деформационные критерии начала и окончания действия ограничения по высоте сжатой зоны. В качестве критерия начала принято условие $\varepsilon_s = 0$, позволяющее аналитически определить положение нейтральной оси без использования геометрических характеристик приведенного сечения. Критерий окончания действия ограничения задан через предельную деформацию растянутой арматуры, что обеспечивает переход от параметра ξ_R к его деформационному представлению и позволяет непосредственно учитывать ограничение в расчетной схеме.

Показано, что традиционные способы учета ограничения нарушают физическую согласованность модели. В связи с этим предложен подход, основанный на введении понижающего коэффициента к расчетному сопротивлению бетона $a(\varepsilon_s)$, зависящего от деформации растянутой арматуры.

Принятая степенная зависимость обеспечивает непрерывность учета ограничения и согласуется с нелинейным характером работы сечения.

Сопоставительный анализ показал, что предложенные деформационные критерии обеспечивают определение положения нейтральной оси с отклонением до 5,64%, а интегральные характеристики диаграмм – до 4,85% по сравнению с численным моделированием.

Научная новизна результатов заключается в разработке способа учета ограничения относительной высоты сжатой зоны в нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений, включающего формулировку критериев его действия и введение функциональной зависимости понижающего коэффициента к расчетному сопротивлению бетона. Новизна также состоит в переходе от геометрической интерпретации параметра ξ_R к деформационной форме, исключающей необходимость его явного контроля.

Теоретическая значимость заключается в развитии нелинейной деформационной модели применительно к расчету железобетонных элементов при внецентренном сжатии, обосновании деформационной природы нормативных ограничений и формировании согласованной расчетной схемы без использования итерационных процедур.

Практическая значимость заключается в возможности применения разработанного подхода для расчета железобетонных опор мостов с снижением вычислительных затрат, а также в обеспечении сопоставимости результатов за счет унификации диаграмм предельных состояний. Методика может быть реализована в расчетных программных комплексах.

Положения, выносимые на защиту:

– деформационные критерии начала ($\varepsilon_s = 0$) и окончания действия ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, обеспечивающие переход от параметра ξ_R к деформационному представлению;

– методика построения диаграмм предельных состояний железобетонных опор мостов на основе нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений с учетом указанного ограничения;

– степенная зависимость коэффициента понижения расчетного сопротивления бетона от деформаций растянутой арматуры, обеспечивающая согласованный учет параметров напряженно-деформированного состояния и предотвращение хрупкого разрушения.

Глава 3. Разработка алгоритма и обоснование параметров методики расчета железобетонных опор мостов

В предыдущих главах была разработана методика с модификацией нелинейной деформационной модели железобетонных опор мостов без применения итерационных процедур, основанная на ограничении относительной высоты сжатой зоны бетона и введении понижающего коэффициента к расчетному сопротивлению бетона. Вместе с тем, полученные решения требуют проверки их корректности, устойчивости и согласованности с методом предельного равновесия, используемым в нормативной практике при расчете железобетонных опор мостов.

В связи с этим основной задачей настоящей главы является расчетно-экспериментальное обоснование предложенной методики и подтверждение ее применимости при расчете железобетонных опор мостов. Целью главы является сопоставление и калибровка разработанной модели и обоснование параметров аппроксимирующей степенной зависимости понижающего коэффициента, обеспечивающих согласование результатов с методом предельного равновесия.

Для достижения поставленной цели формализуется деформационный критерий определения границы сжатой зоны бетона и разрабатывается расчетный алгоритм без итерационных процедур. Проводится численный эксперимент с варьированием основных параметров, выполняется построение диаграмм предельных состояний по нелинейной деформационной модели и методу предельного равновесия, а также их количественное сопоставление с использованием введенных критериев оценки. На основе анализа полученных результатов и их статистической обработки обосновываются параметры степенной зависимости понижающего коэффициента и оценивается влияние этих параметров на точность расчетов.

3.1. Алгоритм построения диаграмм предельных состояний по разработанной методике

Разработанный алгоритм предназначен для построения диаграмм предельных состояний железобетонных опор мостов на основе нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений с эквивалентным учетом нормативного ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона. Алгоритм реализован в виде последовательности вычислительных процедур, каждая из которых имеет однозначную физическую интерпретацию и не требует решения уравнений равновесия методом последовательных приближений.

В отличие от традиционных реализаций, где ограничение вводится через геометрический контроль положения нейтральной оси, в разработанном алгоритме оно учитывается на уровне модели бетона посредством корректировки расчетного сопротивления в зависимости от деформационного состояния. Это позволяет сохранить структуру расчета и обеспечить гладкое формирование диаграммы предельных состояний. Алгоритм реализуется как последовательный перебор деформационных состояний сечения с прямым вычислением внутренних усилий (Рисунок 41 –).

Выполняется ввод исходных данных: геометрия сечения, параметры армирования, характеристики материалов, а также параметры ограничения a_0 и n . Формируются диапазоны деформаций бетона и арматуры для построения диаграммы. Для каждого шага задаются деформации в характерных волокнах, по гипотезе плоских сечений определяется их распределение по высоте сечения и вычисляются деформации во всех расчетных слоях. Проверяется выполнение деформационного критерия активации ограничения по деформации растянутой арматуры. При его невыполнении используются исходные характеристики бетона. При выполнении критерия определяется понижающий коэффициент $a(\varepsilon_s)$ (Рисунок 42 –) и формируется модифицированная диаграмма деформирования бетона для текущего состояния.



Рисунок 41 – Схема алгоритма построения диаграммы предельных состояний первой группы по условию прочности с учетом ограничений сжатой зоны по нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений

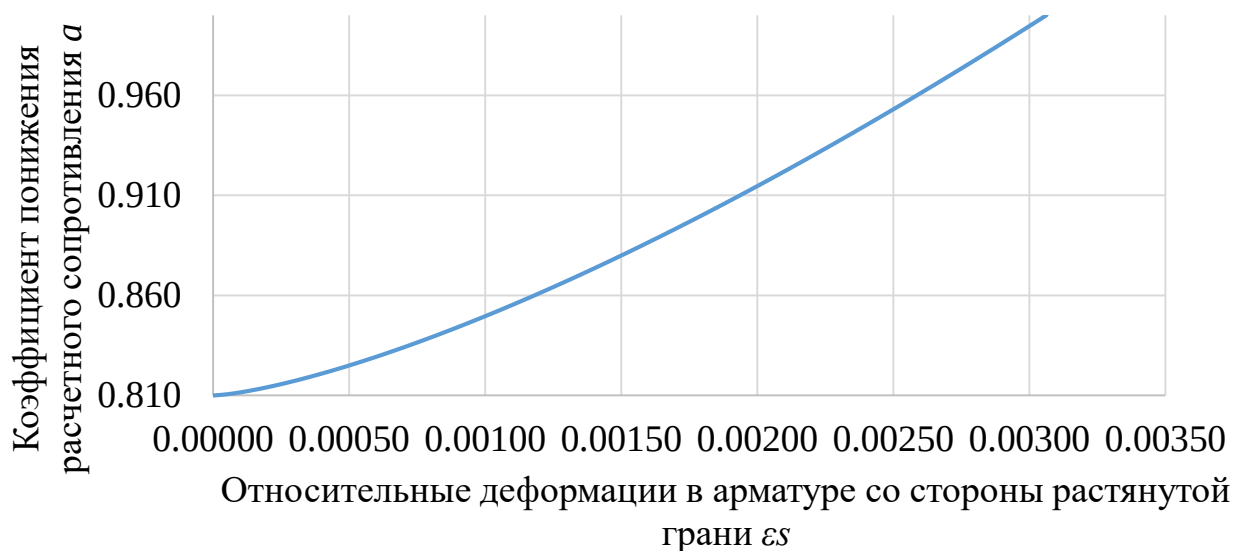


Рисунок 42 – Схема изменения понижающего коэффициента $a(\epsilon_s)$ в зависимости от деформационного состояния

По заданным диаграммам вычисляются напряжения в бетоне и арматуре с последующим интегрированием по сечению для определения усилий (N , M), соответствующих текущему состоянию. По результатам перебора формируется диаграмма предельных состояний, обладающая гладким характером в области действия ограничения и согласующаяся с нормативной зависимостью метода предельного равновесия. При необходимости выполняется фильтрация недопустимых состояний и построение огибающей.

Алгоритм реализован в виде программного продукта на языке Python под названием «Диаграммы предельных состояний по условию прочности и устойчивости для стержневых железобетонных элементов прямоугольного сечения». Ключевой функцией программы является построение диаграмм взаимодействия усилий с учетом ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона. Реализация основана на авторском деформационном критерии, обеспечивающем автоматическое определение границы между областями больших и малых эксцентриситетов. При этом для обеспечения соответствия нормативным требованиям ограничение также может задаваться по методу предельного равновесия. Дополнительно предусмотрен выбор параметров по авторской методике, что приводит к более консервативной оценке несущей способности.

Программа зарегистрирована в государственном Реестре программ для ЭВМ [113, 114], а все диаграммы, приведенные в работе, получены с ее использованием, что подтверждает прикладной характер разработки.

Интерфейс программы (Рисунок 43 –) позволяет задавать геометрию сечения, характеристики материалов, параметры армирования и их расположение, обеспечивая моделирование широкого спектра практических конструкций. Программное решение реализовано в виде веб-интерфейса и не зависит от операционной системы, что позволяет использовать его на различных устройствах без установки. Отсутствие итерационных процедур обеспечивает высокую скорость расчетов, особенно при анализе множества сочетаний нагрузок. Корректность алгоритмов подтверждена сопоставлением с результатами расчетов в сертифицированных комплексах Midas Civil и SCAD: расхождения не превышают 2–3 % в области эксплуатационных нагрузок. Программа поддерживает визуализацию диаграмм и экспорт результатов, что упрощает подготовку проектной документации и проведение сравнительного анализа. Архитектура комплекса ориентирована на развитие и предусматривает расширение функционала, включая учет сечений произвольной формы, предварительного напряжения и температурных воздействий.

Диаграмма предельных состояний по условию прочности

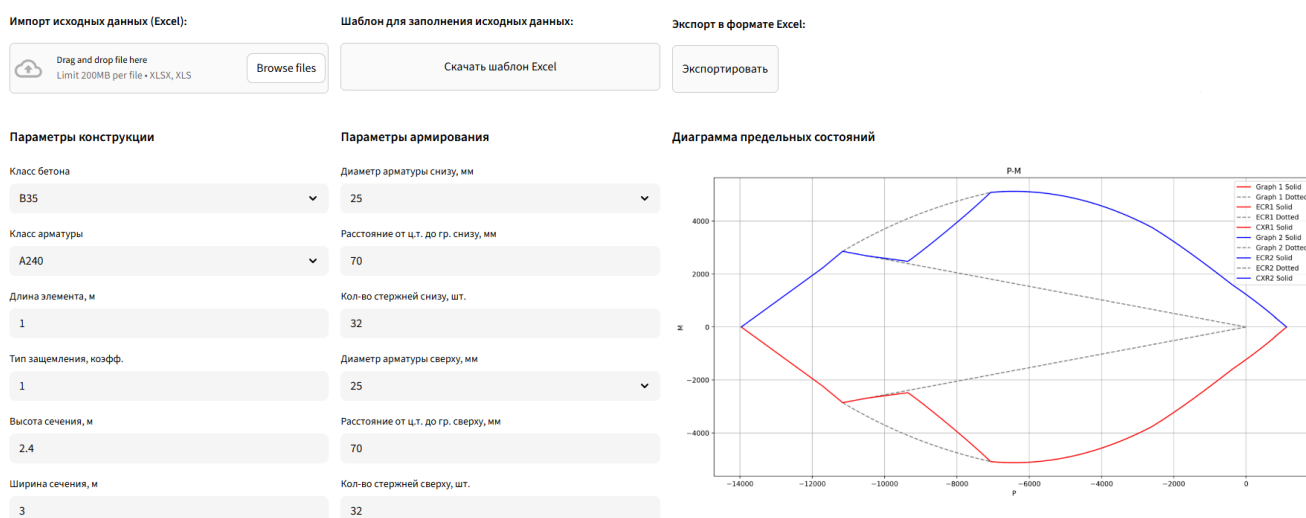


Рисунок 43 – Рабочее окно программы «Диаграммы предельных состояний»

3.2. Обоснование параметров аппроксимирующей зависимости $a(\varepsilon_s)$ при расчете железобетонных опор мостов с сечением прямоугольной формы

3.2.1. Цель и задачи численного анализа

Целью анализа является определение рациональных значений параметров a_0 и n аппроксимирующей зависимости $a(\varepsilon_s)$, при которых достигается наилучшее согласование диаграмм предельных состояний, построенных по нелинейной деформационной модели, с результатами метода предельного равновесия в рассматриваемом параметрическом пространстве. Таким образом решается задача исследования – повышение надежности результатов расчета по нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений.

Для достижения поставленной цели в работе решается комплекс взаимосвязанных **задач**. Выполняется формирование матрицы планирования численного эксперимента, предусматривающей варьирование основных расчетных параметров, включая характеристики материалов, класс бетона, процент продольного армирования, а также параметры аппроксимирующей зависимости a_0 и n в заданных диапазонах.

Для всех расчетных комбинаций проводится серия вычислительных экспериментов с построением диаграмм предельных состояний $M(N)$ по нелинейной деформационной модели с использованием зависимости $a(\varepsilon_s)$, а также соответствующих диаграмм по методу предельного равновесия. Полученные результаты формируют исходную совокупность данных для последующего сопоставления.

Критерием повышения надежности результатов расчета по НДМ являются численные критерии расхождения между диаграммами, включая интегральный показатель ΔS_i , характеризующий различие по всей диаграмме, а также экстремальные отклонения изгибающих моментов $\Delta M_{max,i}$, $\Delta M_{min,i}$ в характерных точках между методом предельного равновесия и НДМ. Сформированная совокупность значений рассматривается как статистическая выборка, по которой

вычисляются обобщенные характеристики, включая средние значения отклонений, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации.

На основе полученных статистических данных выполняется последовательный анализ влияния параметров a_0 и n на величину расхождения диаграмм предельных состояний. Процедура выбора параметров реализуется в два этапа и включает предварительное выявление рационального диапазона изменения показателя степени n по совокупности статистических критериев, а также последующее уточнение параметра a_0 на основе комплексной оценки показателей расхождения.

Дополнительно предусматривается проверка устойчивости выбранных параметров аппроксимирующей зависимости при варьировании исходных данных, включая класс бетона и процент армирования, с оценкой стабильности получаемых статистических характеристик.

Представленный численный анализ рассматривается как инструмент параметрической идентификации, позволяющий обосновать выбор параметров зависимости $a(\varepsilon_s)$ на основе сопоставления результатов расчета с эталонными значениями метода предельного равновесия.

3.2.2. Исходные данные

Объектом численного исследования принято железобетонное сечение квадратной формы с постоянными геометрическими характеристиками, что позволяет исключить влияние масштабного фактора и сосредоточить анализ на параметрах материала, армирования и расчетной модели. Рассматривается сечение размером $b = h = 300$ мм с симметричным контурным армированием и защитным слоем арматуры $a_s = 25$ мм.

Численный анализ предусматривает варьирование параметров трех групп: материальных, конструктивных и модельных. В качестве материального параметра принимается класс бетона по прочности на сжатие, который задается дискретным рядом значений от B20 до B60. Расчетные характеристики бетона, включая

расчетное сопротивление R_b и предельные деформации ε_{b2} , принимаются в соответствии с действующими нормативными документами.

Конструктивные параметры задаются через процент продольного армирования μ , определяемый как отношение площади арматуры к площади бетонного сечения. Варьирование процента армирования осуществляется в заданном диапазоне значений с дискретным шагом, обеспечивающим охват характерных уровней армирования железобетонных элементов. Соответствующие значения площади арматуры формируются за счет изменения диаметра стержней при их равномерном расположении по контуру сечения. Арматура принимается класса А400.

Модельные параметры определяют вид аппроксимирующей зависимости понижающего коэффициента расчетного сопротивления бетона, которая задается в виде степенной функции:

$$a(\varepsilon_s) = a_0 + (1 - a_0) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s0}} = a_0 + (1 - a_0) \left(\frac{\varepsilon_s}{\frac{\varepsilon_{b2}}{\xi_R} - \varepsilon_{b2}} \right)^n$$

В качестве варьируемых параметров рассматриваются начальное значение коэффициента a_0 и показатель степени n , для которых задаются диапазоны изменения с дискретным набором значений, обеспечивающим исследование их влияния на результаты расчета.

Общий план численного эксперимента формируется как полный факторный, включающий все возможные комбинации значений рассматриваемых параметров. Количество расчетных случаев определяется произведением числа уровней варьирования по каждому фактору, включая классы бетона, значения процента армирования и параметры аппроксимирующей зависимости.

Для каждой комбинации параметров выполняется построение диаграмм предельных состояний $M(N)$ по нелинейной деформационной модели с учетом зависимости $a(\varepsilon_s)$, а также соответствующих диаграмм по методу предельного

равновесия. Полученные результаты формируют исходную базу данных для последующего анализа расхождений и статистической обработки.

3.2.3. Критерии оценки и статистические показатели

Сопоставление результатов расчета по нелинейной деформационной модели и методу предельного равновесия выполняется на основе системы интегральных и локальных критериев расхождения диаграмм предельных состояний $M(N)$. Выбор указанных критериев обусловлен необходимостью комплексной оценки как формы диаграммы в целом, так и отдельных экстремальных отклонений, имеющих наибольшее значение с инженерной точки зрения.

В качестве основного критерия используется интегральный показатель расхождения ΔS_i , определяемый как площадь между диаграммами НДМ и метода предельного равновесия по всему диапазону изменения продольной силы:

$$\Delta S_i = \int_{N_{min}}^{N_{max}} M_{НДМ}(N) dN - \int_{N_{min}}^{N_{max}} M_{МПР}(N) dN$$

Данный показатель характеризует совокупное расхождение диаграмм и позволяет учитывать не только различия в отдельных точках, но и особенности формы зависимости в целом. Численное интегрирование выполняется по дискретному набору значений продольной силы с использованием метода трапеций при заданном шаге дискретизации ΔN . Использование интегрального показателя позволяет снизить влияние локальных выбросов и получить устойчивую количественную оценку степени согласования диаграмм.

Для оценки наибольших отклонений дополнительно вводятся локальные экстремальные показатели:

$$\Delta M_{max,i} = \max_j (M_{НДМ,j} - M_{МПР,j}), \Delta M_{min,i} = \min_j (M_{НДМ,j} - M_{МПР,j})$$

Показатель $\Delta M_{max,i}$ характеризует максимальное завышение изгибающего момента при использовании НДМ, тогда как $\Delta M_{min,i}$ отражает максимальное занижение. При необходимости для сопоставления результатов может

использоваться относительная форма указанных показателей, нормированная по максимальному значению момента, полученному по МПР.

Каждой расчетной комбинации параметров ставится в соответствие набор характеристик $\Delta S_i, \Delta M_{max,i}, \Delta M_{min,i}$, где индекс i соответствует номеру расчетного случая, а общее число наблюдений равно числу проведенных вычислительных экспериментов. Сформированная совокупность значений рассматривается как статистическая выборка, подлежащая дальнейшей обработке.

Для перехода к обобщенной оценке по всей совокупности расчетных случаев вводятся усредненные характеристики:

$$\overline{\Delta S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta S_i, \overline{\Delta M_{max}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta M_{max,i}, \overline{\Delta M_{min}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta M_{min,i}$$

Указанные величины характеризуют средний уровень расхождения диаграмм предельных состояний в параметрическом пространстве и используются в качестве целевых функций при выборе параметров зависимости $a(\varepsilon_s)$.

Дополнительно анализируются максимальные значения показателей по всей выборке:

$$\Delta S_{max} = \max_i \Delta S_i, \Delta M_{max}^* = \max_i \Delta M_{max,i}, \Delta M_{min}^* = \max_i \Delta M_{min,i},$$

что позволяет выявить наиболее неблагоприятные сочетания параметров и оценить границы применимости предлагаемой зависимости.

Указанные величины характеризуют типичный уровень расхождения диаграмм предельных состояний по всей совокупности расчетных случаев и используются для оценки общего качества согласования методов.

Для анализа устойчивости результатов и чувствительности модели к изменению параметров вычисляются среднеквадратические отклонения:

$$\sigma \Delta S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta S_i - \overline{\Delta S})^2}$$

$$\sigma \Delta M_{max} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta M_{max,i} - \overline{\Delta M_{max}})^2}$$

$$\sigma \Delta M_{min} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta M_{min,i} - \overline{\Delta M_{min}})^2}$$

Полученные значения позволяют оценить степень разброса показателей относительно их средних значений и, тем самым, характеризуют стабильность результатов при варьировании исходных параметров.

Для сопоставимости разброса различных показателей вводятся коэффициенты вариации:

$$V_{\Delta S} = \frac{\sigma \Delta S}{\overline{\Delta S}}, V_{\Delta M_{max}} = \frac{\sigma \Delta M_{max}}{\overline{\Delta M_{max}}}, V_{\Delta M_{min}} = \frac{\sigma \Delta M_{min}}{\overline{\Delta M_{min}}}$$

Коэффициенты вариации позволяют оценить относительный уровень изменчивости показателей и судить о степени однородности выборки. Низкие значения данных коэффициентов свидетельствуют об устойчивости результатов и слабой зависимости от частных сочетаний параметров.

3.2.4. Обоснование параметров аппроксимирующей зависимости

На начальном этапе анализа выполняется предварительная оценка результатов численного эксперимента, направленная на выявление рациональных диапазонов изменения параметров аппроксимирующей зависимости $a(\varepsilon_s)$ – показателя степени n и начального значения коэффициента a_0 . Данный этап проводится на основе анализа статистических характеристик показателей расхождения диаграмм предельных состояний без использования интегрального функционала, что позволяет выделить области параметрического пространства, обеспечивающие приемлемое качество согласования моделей.

Для всех рассмотренных комбинаций параметров, включая различные значения процента армирования μ , выполнен расчет интегрального показателя ΔS ,

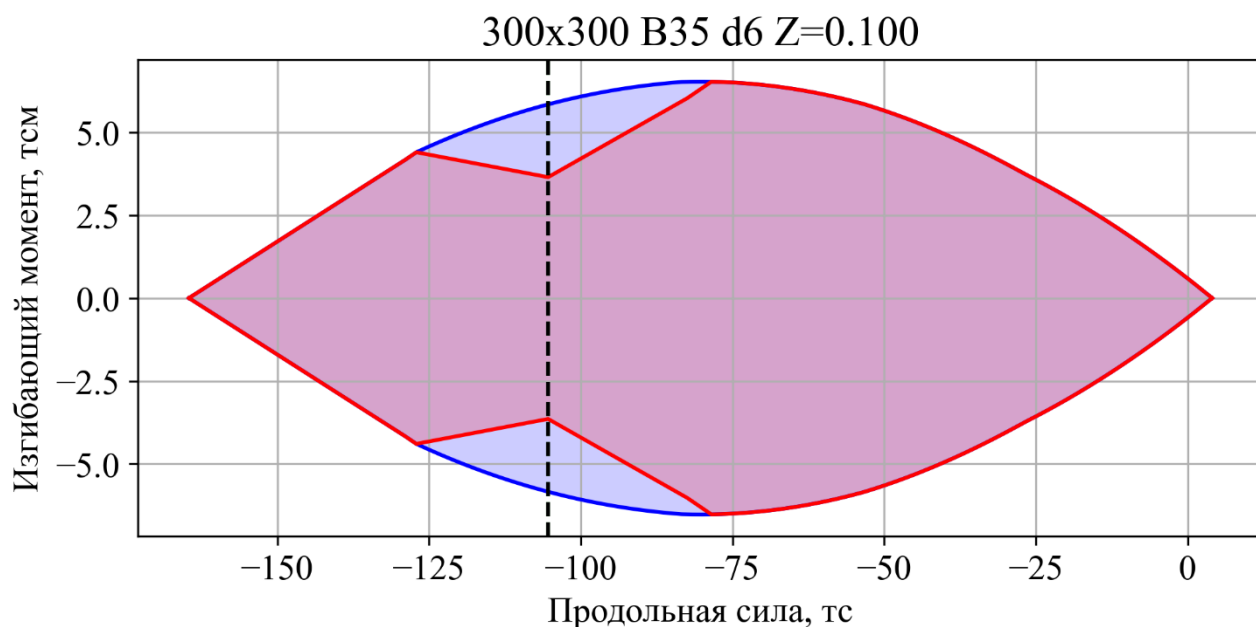
а также экстремальных отклонений изгибающих моментов ΔM_{max} , ΔM_{min} по которым определены средние значения, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации. Сопоставление указанных характеристик позволяет оценить как общий уровень расхождения диаграмм, так и устойчивость получаемых результатов при изменении исходных параметров.

Перед переходом к анализу параметров понижающей функции выполнена оценка исходного уровня расхождений между результатами нелинейной деформационной модели и методом предельного равновесия при отсутствии каких-либо корректирующих зависимостей. Рассмотрение интегрального показателя отклонений по площади диаграммы взаимодействия $M(N)$ показывает, что в базовой постановке наблюдается устойчивое систематическое расхождение между рассматриваемыми подходами. Средние значения показателя ΔS составляют порядка 6,6%, при этом максимальные значения достигают 8,6% в области малых процентов армирования. С увеличением процента армирования прослеживается закономерное снижение отклонений, однако даже при высоких значениях армирования уровень расхождения сохраняется в пределах 2,4...4,9%, что свидетельствует о наличии принципиального несоответствия формы расчетных диаграмм.

Анализ максимальных относительных отклонений изгибающих моментов дополнительно подтверждает указанную тенденцию. Значения ΔM_{max} характеризуются высоким уровнем расхождений: средние значения находятся в диапазоне 23,0...46,2%, а максимальные достигают 46,4%. Несмотря на выраженное снижение указанных отклонений при увеличении процента армирования, их абсолютный уровень остается значительным во всем диапазоне рассмотренных параметров. Это указывает на то, что различия между НДМ и МПР носят не локальный, а систематический характер и обусловлены, прежде всего, различием в форме диаграмм взаимодействия.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что без введения дополнительной понижающей зависимости согласование результатов НДМ с МПР

не обеспечивается ни по интегральным, ни по экстремальным показателям. Это также обосновывает необходимость введения корректирующей функции и проведения последующего параметрического анализа с целью подбора ее рациональных параметров.



- Предложенная методика
- СП 35
- Макс ΔM
- Мин ΔM

Площадь графика по предложенной методике: 1428.326
 Площадь графика по СП 35: 1310.733
 Разница площадей: 117.593 (8.59%)

Максимальные отклонения:

- М предл.: 5.84 тсм
- М СП35: 3.65 тсм
- $\Delta M_{\max}$: 2.19 тсм (46.20%)
- При $N = -105.34$ тс

Максимальное отрицательное отклонение:

- М1: 5.84 тсм
- М2: 3.65 тсм
- $\Delta M_{\min}$: -2.19 тсм (46.20%)
- При $N = -105.34$ тс

Рисунок 44 – Сопоставление диаграмм предельных состояний по методу предельного равновесия (красный) и по НДМ без корректирующей функции (синий)

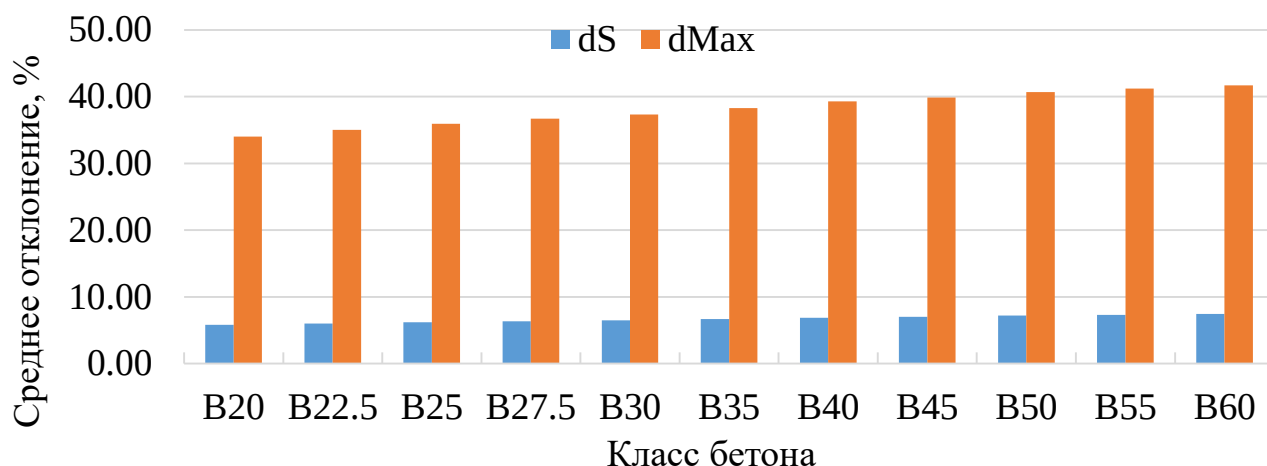


Рисунок 45 – Гистограмма средних отклонений интегральных показателей (синий) и средних максимальные отклонения изгибающих моментов (оранжевый) диаграммы предельных состояний по НДМ и методу предельного равновесия в зависимости от класса бетона

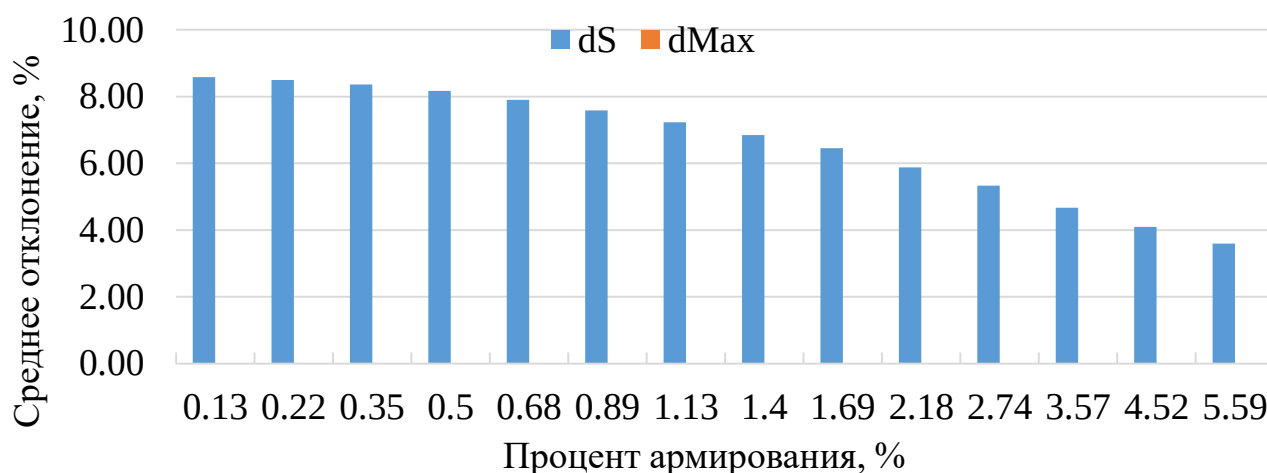


Рисунок 46 – Гистограмма средних отклонений интегральных показателей (синий) и средних максимальные отклонения изгибающих моментов (оранжевый) диаграммы предельных состояний по НДМ и методу предельного равновесия в зависимости от процента армирования

Анализ блока таблиц (Приложение 2), отражающего зависимость средних отклонений от параметров n и a_0 , показывает устойчивую и физически интерпретируемую тенденцию. При малых значениях показателя степени ($n = 1,0...1,1$) отклонения интегрального показателя по площади диаграммы (Рисунок 48 –) остаются значительными и, как правило, превышают 2,2...2,3 %, что

свидетельствует о недостаточной нелинейности понижающей функции. В этом случае снижение расчетного сопротивления бетона происходит практически линейно, что не обеспечивает требуемого «выгибания» диаграммы $M(N)$ в области действия ограничения и приводит к систематическому завышению изгибающих моментов по сравнению с методом предельного равновесия (Рисунок 47 – , а).

При увеличении показателя степени до $n = 1,2...1,3$ наблюдается заметное снижение интегральных отклонений. Однако минимальные значения по площади диаграммы в этом диапазоне по-прежнему составляют порядка 2,1...2,15%, а зависимость отклонений от коэффициента a_0 остается достаточно выраженной, что указывает на повышенную чувствительность результата к выбору параметров.

Наиболее благоприятная картина формируется при $n = 1,4$ (Рисунок 47 – , б). В этом случае интегральное отклонение по площади диаграммы достигает минимальных значений 0,16%, при $a_0 \approx 0,81$. При этом зависимость результата от небольших вариаций a_0 становится существенно менее выраженной, а форма зависимости $M(N)$ в зоне действия ограничения приближается к квазилинейной, что соответствует нормативному характеру диаграмм, получаемых по МПР. Дальнейшее увеличение показателя степени до $n = 1,5$ (Рисунок 47 – , в) не приводит к принципиальному улучшению сходимости и сопровождается локальным ростом максимальных отклонений изгибающих моментов, что указывает на избыточную нелинейность понижающей функции.

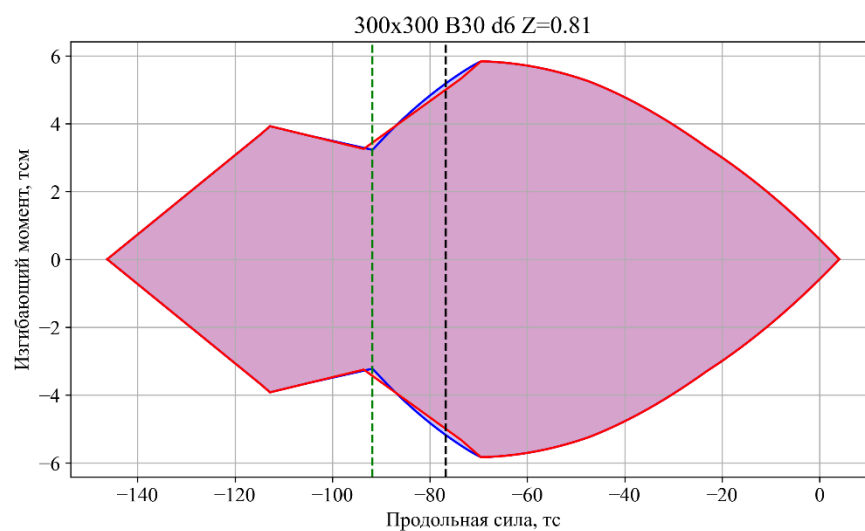
В результате анализа установлено, что рациональные значения показателя степени n находятся в диапазоне 1,15...1,40, в пределах которого обеспечивается приемлемое сочетание малых средних значений показателей расхождения и их ограниченного разброса. Указанный диапазон принимается для дальнейшего уточнения параметра a_0 .

Аналогичный анализ выполнен для параметра a_0 , варьируемого в заданном диапазоне значений. Установлено, что значения a_0 менее 0,78 приводят к увеличению интегрального расхождения и экстремальных отклонений, тогда как при значениях выше 0,82 наблюдается рост чувствительности результатов к

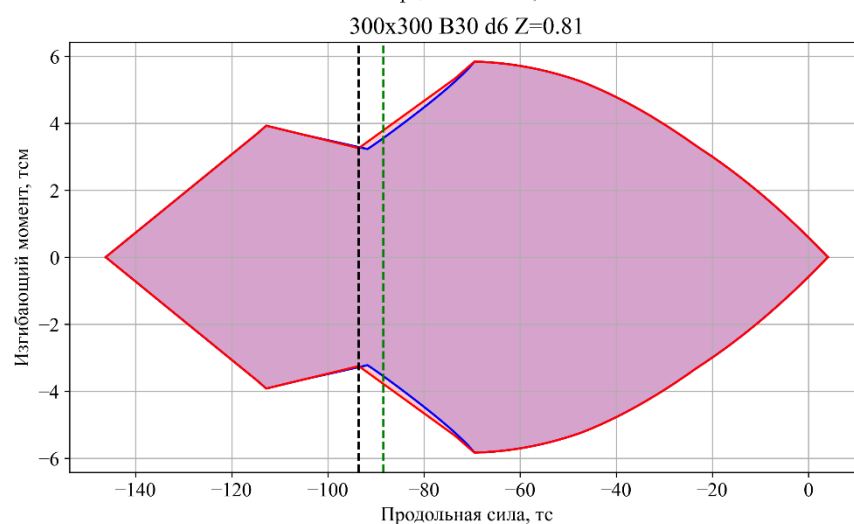
изменению исходных параметров. Наиболее благоприятные сочетания статистических показателей соответствуют диапазону $a_0 \approx 0,80 \dots 0,82$, который рассматривается как предварительно обоснованный.

Из анализа таблиц максимальных относительных отклонений изгибающих моментов (Рисунок 49 –) и максимальных отрицательных отклонений, отражающих возможное занижение несущей способности (Рисунок 50 –), можно сделать вывод, что показатель степени n практически не влияет на максимальное значение отклонения по изгибающему моменту. При этом минимальные отклонения показывает коэффициент $a_0 = 0,81$ при средних значениях максимальных отклонений 4,76% и максимальных отрицательных 4,15%.

а)



б)



в)

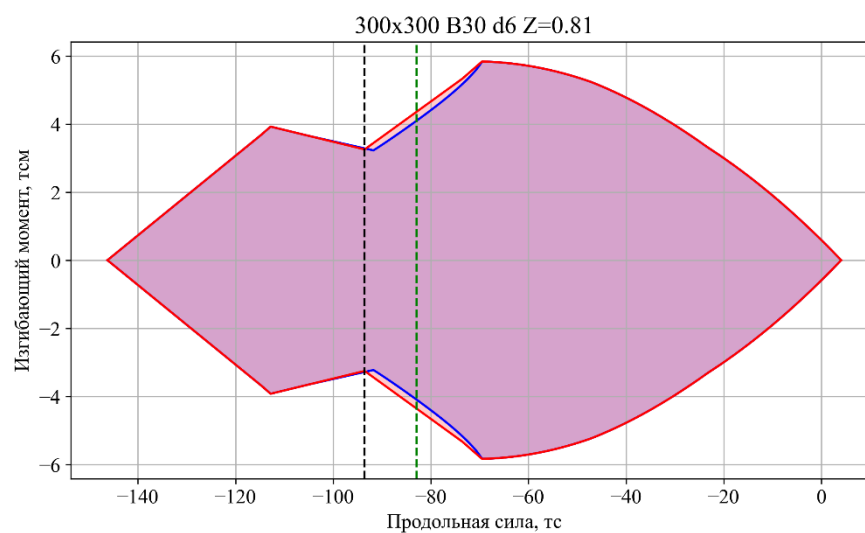


Рисунок 47 – Сопоставление диаграмм предельных состояний по методу предельного равновесия (красный) и по НДМ без итераций с предложенным критерием (синий) с различными показателями степени n (а – 1.0, б – 1.4, в – 1.5)

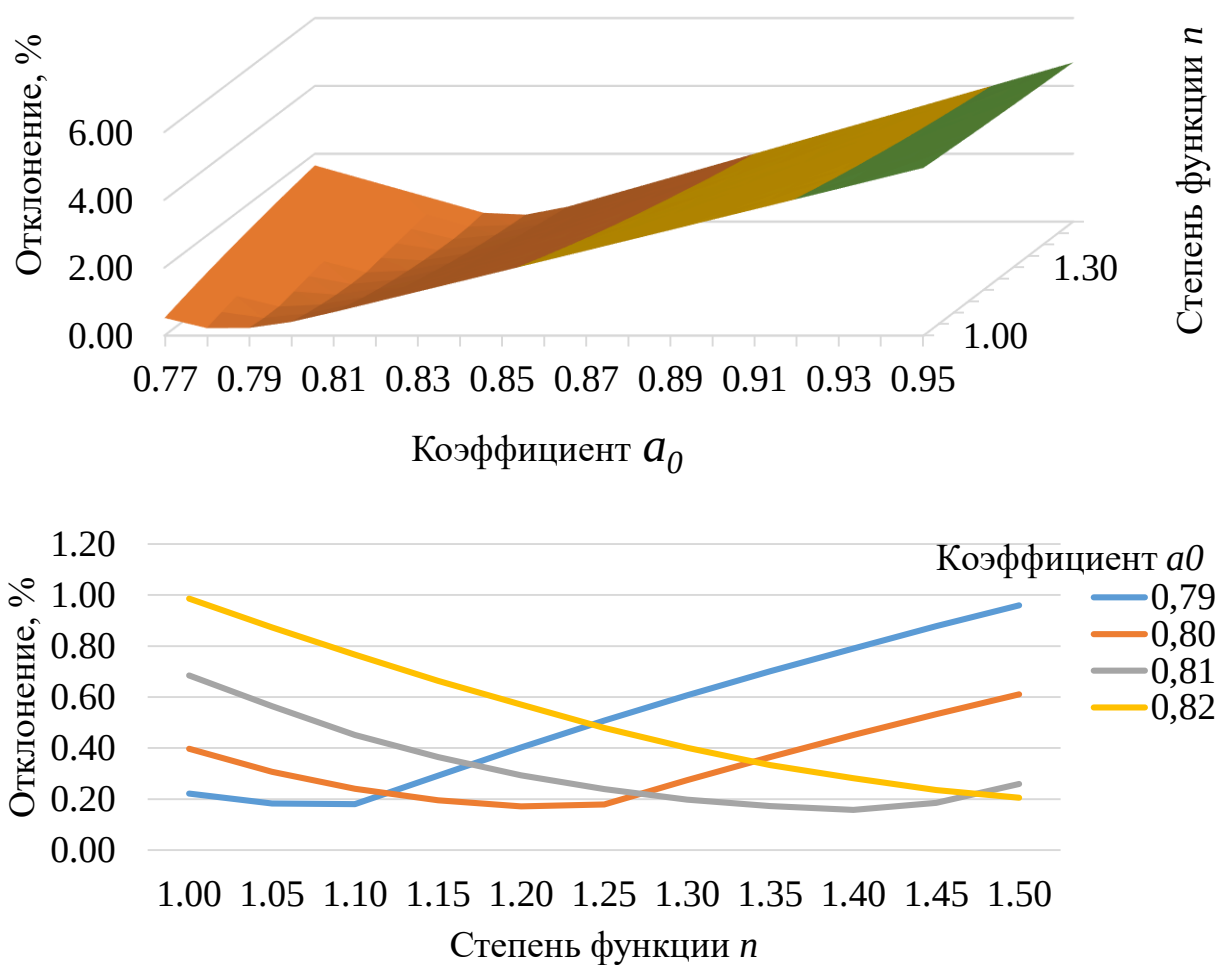


Рисунок 48 – Объемная поверхностная диаграмма и сопоставительная диаграмма средних отклонений интегральных показателей диаграммы предельных состояний, по предлагаемой методике и методу предельного равновесия в зависимости от степенного показателя n и начального коэффициента понижения a_0

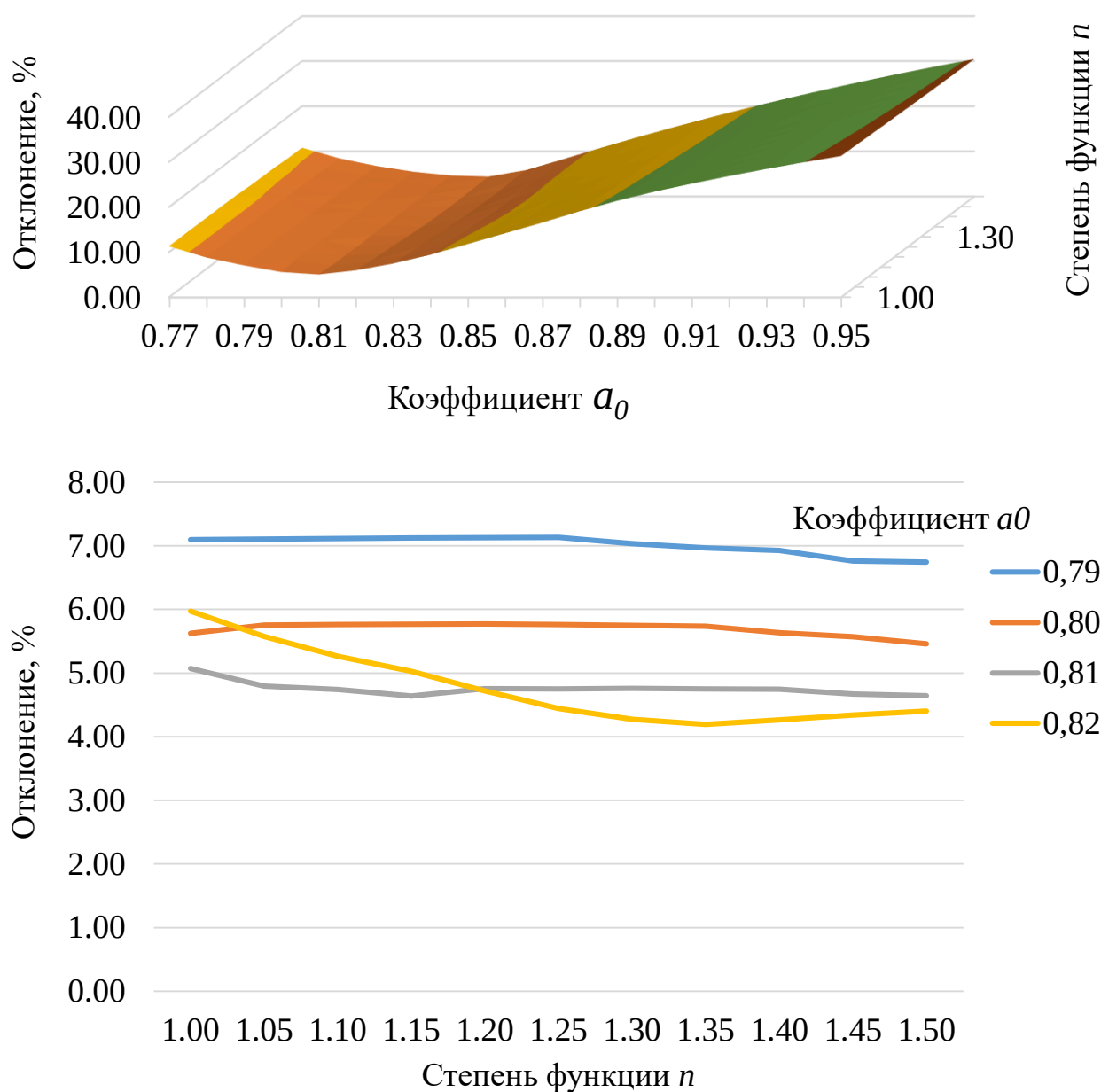


Рисунок 49 – Объемная поверхностная диаграмма и сопоставительная диаграмма средних отклонений максимальных изгибающих моментов диаграммы предельных состояний, по предлагаемой методике и методу предельного равновесия в зависимости от степенного показателя n и начального коэффициента понижения a_0

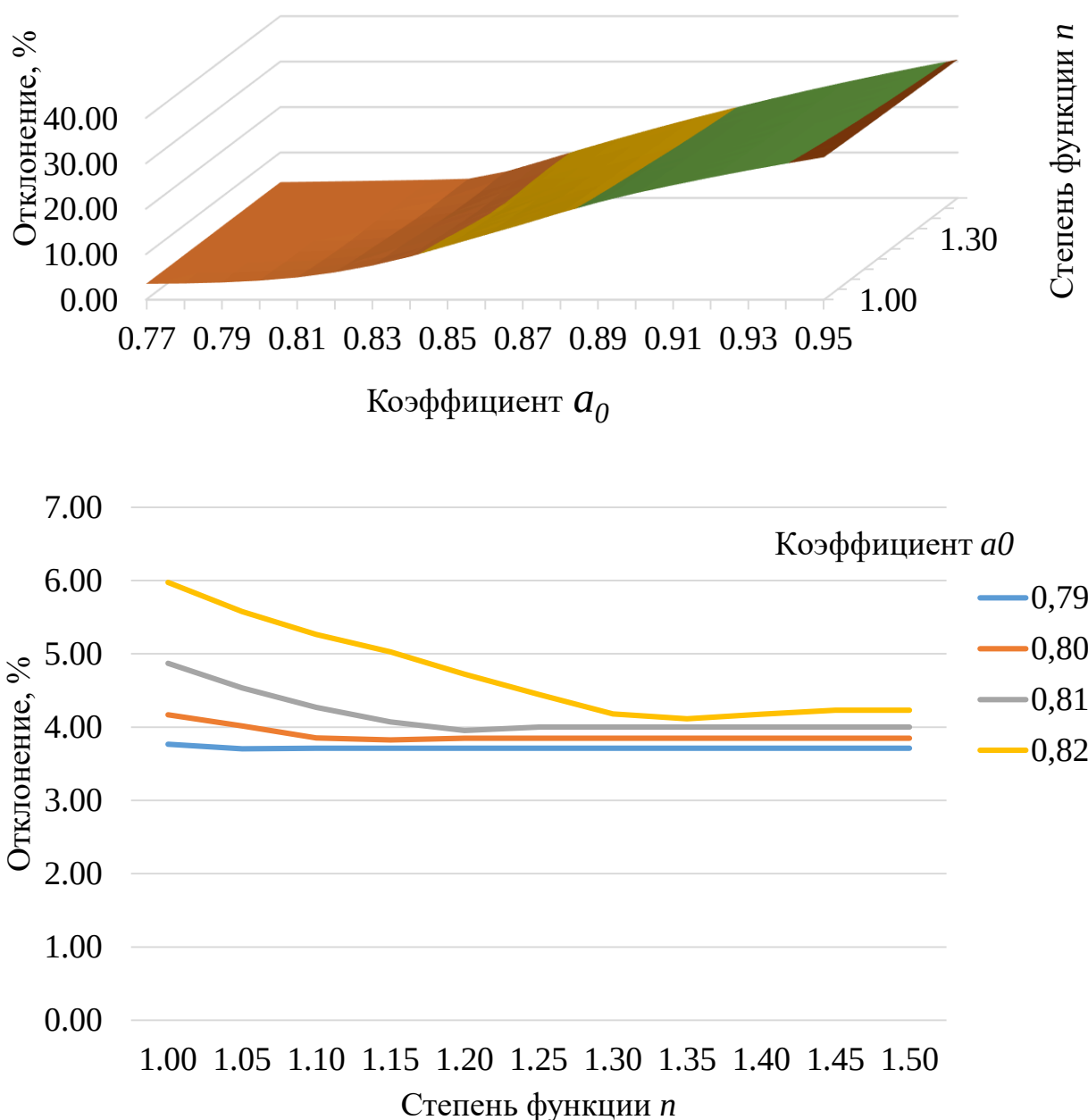


Рисунок 50 – Объемная поверхностная диаграмма и сопоставительная диаграмма средних отрицательных отклонений изгибающих моментов диаграммы предельных состояний, по предлагаемой методике и методу предельного равновесия в зависимости от степенного показателя n и начального коэффициента понижения a_0

По результатам предварительного анализа выделен ряд рациональных значений параметров a_0 и n , обеспечивающий минимальные значения средних, среднеквадратических отклонений и коэффициентов вариации показателей расхождения диаграмм предельных состояний, состоящий из 15 сочетаний

параметров. Полученные значения используются на следующем этапе анализа для детального сопоставления параметров с применением комплексного критерия оценки.

Для обобщенной оценки качества согласования диаграмм предельных состояний и выбора рациональных параметров аппроксимирующей зависимости $a(\varepsilon_s)$ используется взвешенный функционал, позволяющий учитывать одновременно несколько критериев, характеризующих как интегральное, так и локальное расхождение результатов расчета.

Необходимость введения такого функционала обусловлена тем, что отдельные показатели ΔS_i , $\Delta M_{max,i}$, $\Delta M_{min,i}$, а также их статистические характеристики отражают различные аспекты расхождения диаграмм и не могут быть использованы в качестве единственного критерия оптимизации без потери полноты оценки. В частности, минимизация интегрального показателя не гарантирует ограничения экстремальных отклонений, тогда как ориентация только на локальные критерии не обеспечивает согласование формы диаграммы в целом.

В связи с этим выбор параметров a_0 и n осуществляется на основе скалярного функционала J , формируемого в виде взвешенной суммы нормированных статистических показателей:

$$J_i = \sum_{k=1}^{15} w_k P_k$$

где P_k – обобщенные показатели, включающие средние значения, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации для показателей сравнения, а w_k – соответствующие весовые коэффициенты.

Назначение весовых коэффициентов выполняется с учетом инженерной значимости отдельных критериев (Таблица 6 –). Наибольший вклад в функционал вносят показатели, характеризующие экстремальные отклонения изгибающего момента ΔM_{max} , ΔM_{min} , поскольку именно они определяют возможное неблагоприятное завышение несущей способности. Существенное значение также

имеют показатели разброса (среднеквадратические отклонения), отражающие устойчивость расчетной модели. Интегральный показатель ΔS и коэффициенты вариации учитываются с меньшими весами, обеспечивая корректировку формы диаграммы и стабильности результатов без доминирующего влияния на итоговое решение.

Таблица 6 – Весовые коэффициенты

Показатель P_k	w_k	Приоритет	Весовой коэффициент
$\overline{\Delta S}$	w_1	4	0,111
$\sigma \Delta S$	w_2	3	0,083
$\overline{\Delta M_{max}}$	w_3	8	0,222
$\sigma \Delta M_{max}$	w_4	7	0,194
$V_{\Delta M_{max}}$	w_5	2	0,056
$\overline{\Delta M_{min}}$	w_6	6	0,167
$\sigma \Delta M_{min}$	w_7	5	0,139
$V_{\Delta M_{min}}$	w_8	1	0,028

Перед формированием функционала все показатели приводятся к сопоставимому виду, что исключает влияние их размерности и диапазона изменения на результат оптимизации. Взвешивание осуществляется на основе ранжирования критериев по степени их влияния на результаты расчета, в результате чего формируется система нормированных весовых коэффициентов.

Расчет значений функционала J выполняется для 15 принятых к рассмотрению комбинаций параметров a_0 и n , что позволяет получить дискретное поле значений целевой функции в параметрическом пространстве. Результаты расчета представлены в табличной форме, где для каждой комбинации параметров приведены значения статистических показателей и соответствующее значение функционала J (Таблица 7 –).

Таблица 7 – Определение функционала J для различных комбинаций a_0 и n

Показатели функции	S		Mmax			Mmin			J
	$\overline{\Delta S}$	$\sigma \Delta S$	$\overline{\Delta M_{max}}$	$\sigma \Delta M_{max}$	$V_{\Delta M_{max}}$	$\overline{\Delta M_{min}}$	$\sigma \Delta M_{min}$	$V_{\Delta M_{min}}$	
$n = 1, a_0 = 0,77$	0,52	0,37	11,32	6,50	0,57	3,47	1,33	0,38	4,674
$n = 1, a_0 = 0,78$	0,22	0,30	8,85	5,32	0,60	3,56	1,44	0,40	3,886
$n = 1,05, a_0 = 0,79$	0,18	0,19	7,11	3,73	0,53	3,71	1,44	0,39	3,200
$n = 1,1, a_0 = 0,79$	0,18	0,28	7,11	3,74	0,53	3,71	1,43	0,39	3,209
$n = 1,15, a_0 = 0,8$	0,20	0,13	5,77	2,07	0,36	3,83	1,54	0,40	2,600
$n = 1,15, a_0 = 0,81$	0,36	0,16	4,64	1,12	0,24	4,07	1,38	0,34	2,195
$n = 1,2, a_0 = 0,8$	0,17	0,21	5,77	2,08	0,36	3,85	1,49	0,39	2,601
$n = 1,2, a_0 = 0,81$	0,29	0,12	4,76	0,94	0,20	3,95	1,62	0,41	2,188
$n = 1,35, a_0 = 0,82$	0,33	0,15	4,19	1,60	0,38	4,11	1,73	0,42	2,250
$n = 1,4, a_0 = 0,81$	0,16	0,22	4,75	0,92	0,19	4,00	1,55	0,39	2,173
$n = 1,45, a_0 = 0,77$	1,57	0,62	10,81	6,27	0,58	3,47	1,33	0,38	4,652
$n = 1,45, a_0 = 0,78$	1,22	0,53	8,43	5,18	0,61	3,59	1,38	0,38	3,893
$n = 1,5, a_0 = 0,79$	0,96	0,45	6,74	3,44	0,51	3,71	1,43	0,39	3,168
$n = 1,5, a_0 = 0,8$	0,61	0,36	5,46	1,94	0,36	3,85	1,49	0,39	2,568
$n = 1,5, a_0 = 0,82$	0,21	0,10	4,40	1,38	0,31	4,23	1,67	0,40	2,244
Min	0,16	0,10	4,19	0,92	0,19	3,47	1,33	0,34	2,173
a_0 при Min	0,81	0,82	0,82	0,81	0,81	0,77	0,77	0,81	0,81
n при Min	1,40	1,50	1,35	1,40	1,40	1,00	1,00	1,15	1,40

Анализ полученных данных показывает, что минимум функционала достигается при параметрах $a_0 = 0,81$ и $n = 1,40$. В указанной области наблюдается наилучшее согласование диаграмм предельных состояний по совокупности критериев, включая снижение интегрального расхождения, ограничение экстремальных отклонений и уменьшение разброса результатов. Близкие значения функционала также получены для ряда соседних комбинаций параметров, что свидетельствует о наличии устойчивой области рациональных решений в окрестности найденного минимума.

Дополнительную проверку универсальности выбранного показателя степени обеспечивает анализ нижнего блока таблиц, в которых представлены средние отклонения в зависимости от класса бетона при фиксированном значении $n = 1,4$. Полученные результаты демонстрируют высокую устойчивость методики для всего рассмотренного диапазона классов бетона от В20 до В60. Интегральные отклонения по площади диаграммы (Рисунок 51 –) изменяются незначительно и возрастают с увеличением класса бетона в пределах приблизительно от 0,11 до 0,27

%, что может быть объяснено увеличением доли упругой работы бетона и повышением роли криволинейной части диаграммы деформирования.

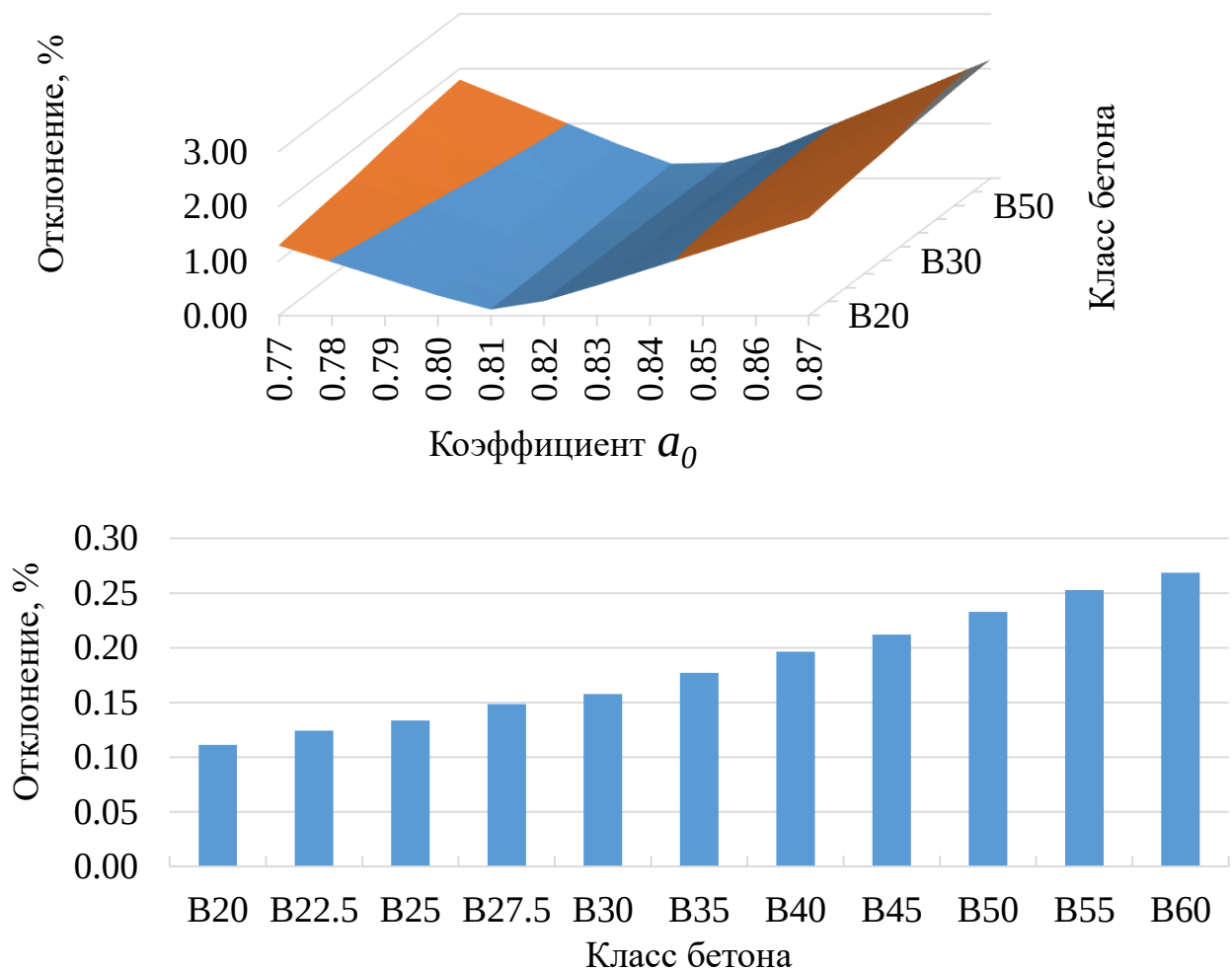


Рисунок 51 – Объемная поверхностная диаграмма и гистограмма средних отклонений интегральных показателей диаграммы предельных состояний, по предлагаемой методике и методу предельного равновесия в зависимости от класса бетона

Максимальные отклонения изгибающих моментов (Рисунок 52 –) при этом также демонстрируют плавный и монотонный рост от примерно 4,57% для бетона класса B20 до 4,84% для класса B60, не выходя за пределы инженерно допустимых значений. Максимальные отрицательные отклонения (Рисунок 53 –) при $n = 1,4$ и $a_0 = 0,81$ остаются практически постоянными и составляют в среднем 3,36 – 4,14% для всех классов бетона, что подтверждает корректность эквивалентного учета

ограничения предельной высоты сжатой зоны без нарушения нормативной надежности расчета.

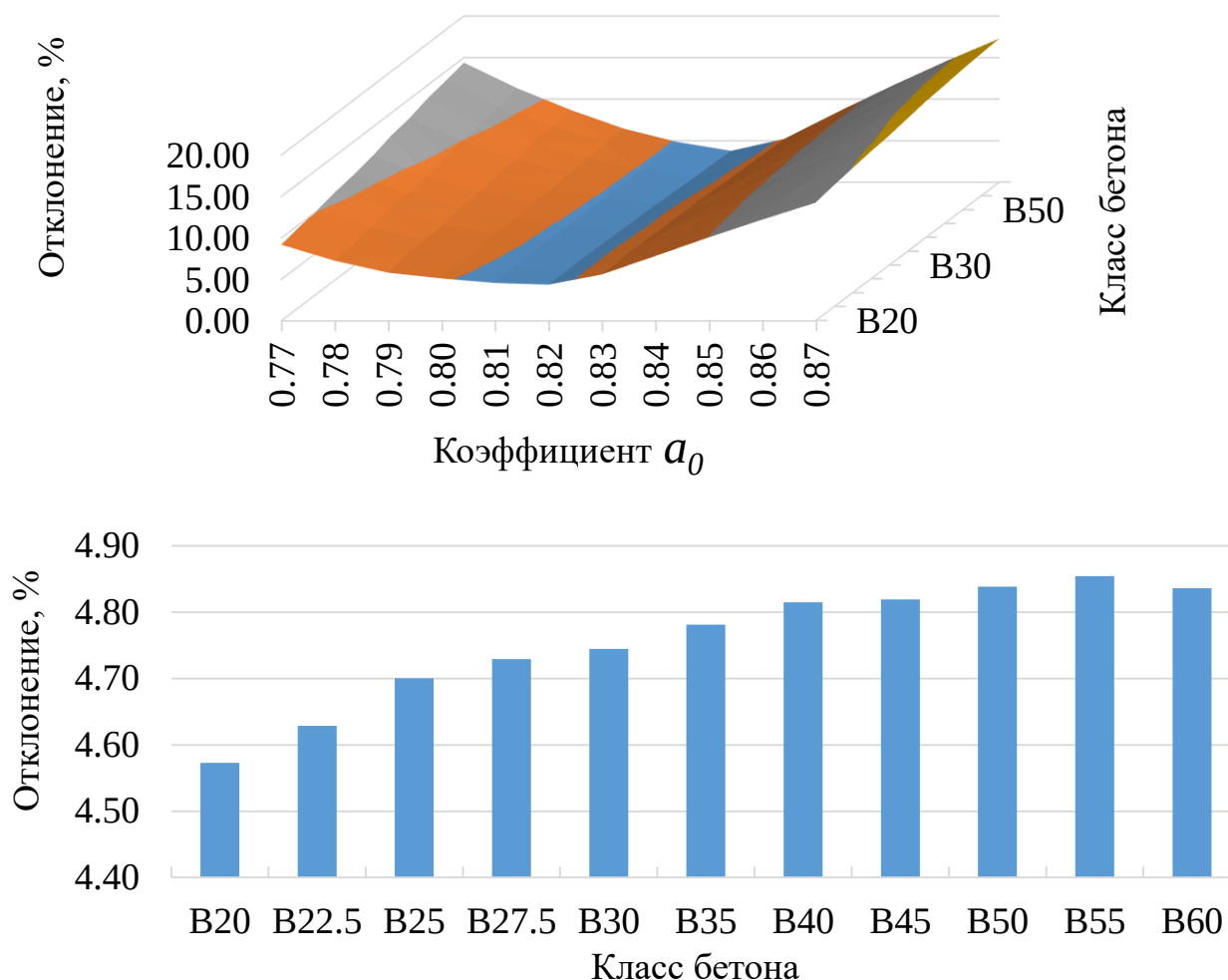


Рисунок 52 – Объемная поверхностная диаграмма и гистограмма средних максимальных отклонений изгибающих моментов диаграммы предельных состояний, по предлагаемой методике и методу предельного равновесия в зависимости от класса бетона

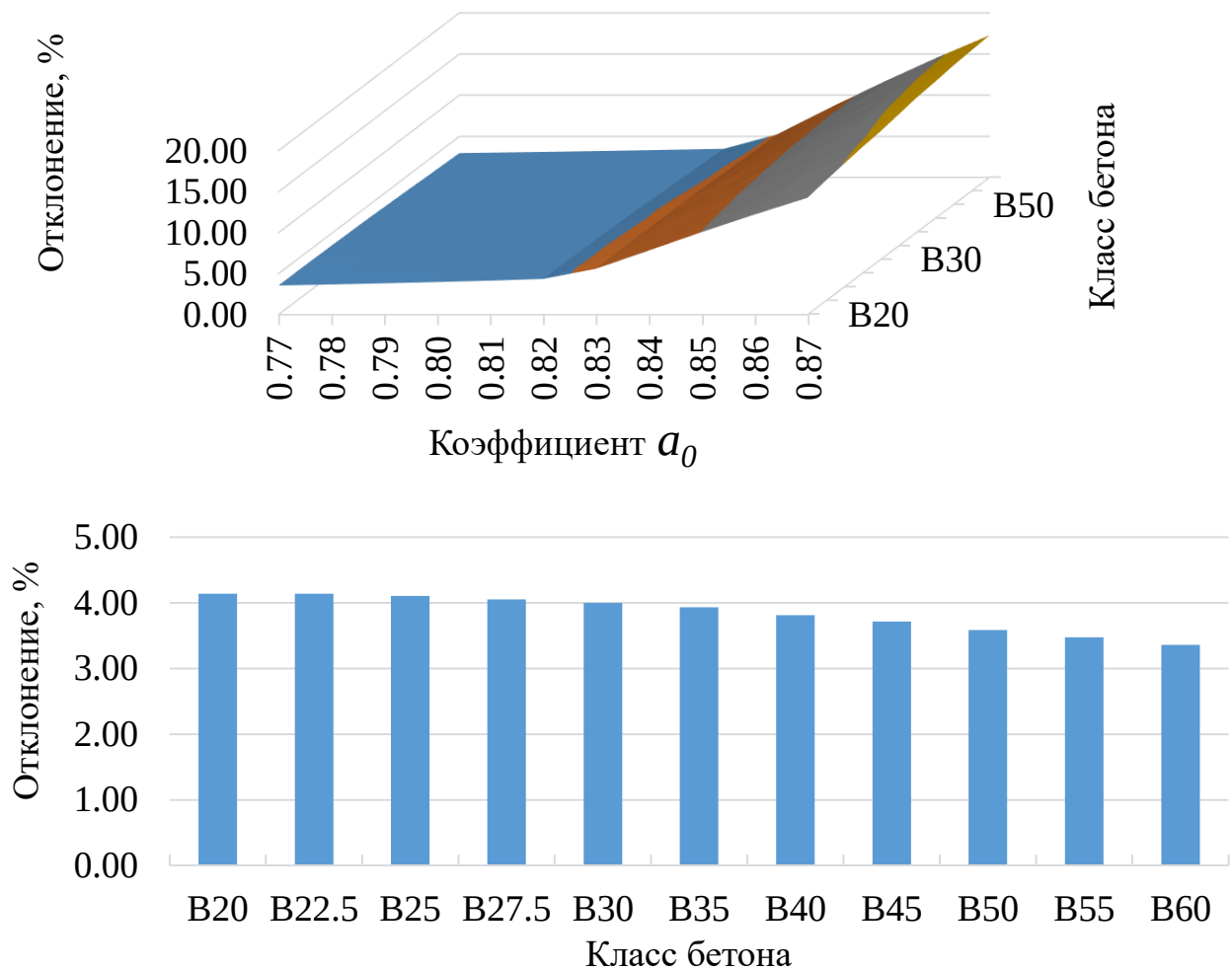


Рисунок 53 – Объемная поверхностная диаграмма и гистограмма средних максимальных отрицательных отклонений изгибающих моментов диаграммы предельных состояний, по предлагаемой методике и методу предельного равновесия в зависимости от класса бетона

При этом не выявлено выраженной зависимости положения минимумов указанных показателей от класса бетона, что свидетельствует о слабой чувствительности параметра n к изменению прочностных характеристик материала.

3.2.5. Выводы по разделу

Выполненный численный анализ позволил установить закономерности влияния параметров аппроксимирующей зависимости $a(\epsilon_s)$ на расхождение

диаграмм предельных состояний, полученных по нелинейной деформационной модели и методу предельного равновесия.

Установлено, что параметр n в рассматриваемом диапазоне обладает слабой чувствительностью к классу бетона, что позволяет принимать его как условно инвариантный и задавать на предварительном этапе анализа. Для параметра a_0 выявлен ограниченный диапазон значений, при котором обеспечивается наилучшее согласование диаграмм; отклонение от него приводит к увеличению расхождений и чувствительности результатов.

На основе комплексной оценки с использованием взвешенного функционала определена область рациональных сочетаний параметров a_0 и n , соответствующая минимальным значениям целевой функции. Показано, что минимум имеет областной характер, что свидетельствует об устойчивости решения.

Определена рациональная комбинация параметров $a(\varepsilon_s)$, обеспечивающая согласование диаграмм при варьировании класса бетона и процента армирования и характеризующаяся минимальными интегральными и экстремальными расхождениями при ограниченном разбросе результатов.

Полученные результаты обосновывают применение предложенной зависимости в расчетах железобетонных опор мостов на основе нелинейной деформационной модели с обеспечением требуемой надежности и устойчивости расчета.

3.3. Выводы по главе

Выполненная оценка исходного уровня расхождений между результатами расчета по нелинейной деформационной модели и методу предельного равновесия показала наличие систематического несоответствия диаграмм предельных состояний. Установлено, что средние значения интегрального показателя расхождения ΔS составляют порядка 6,6% и достигают 8,6% при малых процентах армирования, при этом максимальные отклонения изгибающих моментов доходят до 46%. Это свидетельствует о принципиальном различии форм диаграмм и невозможности их согласования без введения корректирующих зависимостей.

Введение понижающей функции с параметрами a_0 и n позволяет существенно снизить уровень расхождений. При рациональных значениях $a_0 \approx 0,81$ и $n \approx 1,40$ интегральный показатель ΔS уменьшается до 0,16%, а максимальные отклонения изгибающих моментов снижаются до уровня порядка 4,7%. При этом максимальные отрицательные отклонения, характеризующие возможное занижение несущей способности, составляют 3,3...4,1%, что соответствует нормативно допустимому уровню и обеспечивает требуемую надежность расчета.

Установлено, что введение понижающего коэффициента к расчетному сопротивлению бетона в сжатой зоне для понижения предельно допускаемых моментов исключает хрупкий характер разрушения и предотвращает завышение несущей способности. В результате достигается повышение надежности расчета при сохранении согласованности с методом предельного равновесия и обеспечивается корректное воспроизведение формы диаграмм предельных состояний.

Научная новизна заключается в обосновании конкретных параметров функции понижения расчетного сопротивления бетона (a_0 и n) для расчета железобетонных опор мостов на основе комплексного критерия, учитывающего интегральные и экстремальные показатели расхождения диаграмм предельных состояний.

Теоретическая значимость состоит в установлении системного характера расхождений между нелинейной деформационной моделью и методом предельного равновесия и в обосновании необходимости их учета на уровне закона деформирования сжатой зоны бетона.

Практическая значимость заключается в разработке параметров и алгоритма расчета, обеспечивающих нормативную надежность определения несущей способности железобетонных опор мостов без применения итерационных процедур и с исключением завышения допускаемых усилий.

Глава 4. Верификация и практическое применение результатов исследования

В предыдущих главах диссертационной работы были сформулированы теоретические положения и разработана методика построения диаграмм предельных состояний железобетонных элементов с учетом нормативных ограничений в рамках нелинейной деформационной модели. Полученные зависимости и расчетные алгоритмы требуют проверки их корректности и применимости при решении инженерных задач.

Настоящая глава посвящена верификации разработанной методики и анализу возможностей ее практического использования. В главе рассматриваются результаты численных экспериментов, направленных на сопоставление теоретически полученных диаграмм предельных состояний с данными пространственного конечно-элементного моделирования, а также приводятся примеры применения предложенного подхода в расчетной практике.

Целью главы является подтверждение обоснованности выведенных расчетных положений и демонстрация их применимости при проектировании железобетонных опор мостов.

4.1. Верификация разработанной методики на основе численного моделирования

4.1.1. Постановка задачи и расчетная схема

Цель численного эксперимента заключается в проверке корректности, физической обоснованности и области применимости разработанных методических положений по построению диаграмм предельных состояний железобетонных элементов при совместном действии продольной силы и изгибающего момента. В рамках эксперимента верифицируются эквивалентный способ учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, деформационный критерий определения границы сжатия без итерационных вычислений, а также алгоритм расчета в целом.

Численное моделирование в ПК Midas FEA NX используется как независимый инструмент анализа напряженно-деформированного состояния, позволяющий сопоставить теоретически получаемые контрольные точки диаграмм с результатами трехмерного нелинейного конечно-элементного расчета, учитывающего работу бетона, арматуры и процессы трещинообразования.

В ходе эксперимента проверяется, что предложенное эквивалентное ограничение напряжений в сжатой зоне адекватно отражает нормативное требование по ограничению относительной высоты сжатой зоны и соответствует реальному механизму разрушения при внецентренном сжатии, а также подтверждается обоснованность введения понижающего коэффициента расчетного сопротивления.

Параллельно оценивается корректность деформационного критерия определения границы сжатия сечения, основанного на анализе распределения деформаций без использования приведенного сечения, и проверяется воспроизводимость характерных контрольных точек диаграмм предельных состояний, соответствующих последовательной смене стадий работы сечения.

Для достижения поставленной цели в ходе численного эксперимента решаются следующие **задачи**:

1. Формирование пространственной конечно-элементной модели железобетонной стойки промежуточной опоры моста с учетом геометрии сечения, схемы армирования и нелинейных диаграмм работы материалов, включая трещинообразование и деградацию жесткости;
2. Выполнение пошагового расчета при различных сочетаниях продольной силы и изгибающего момента с отслеживанием эволюции напряженно-деформированного состояния вплоть до достижения предельных состояний;
3. Определение усилий и деформационных параметров, соответствующих контрольным точкам диаграмм предельных состояний, и их сопоставление с результатами, полученными по разработанным аналитическим и алгоритмическим методикам;

4. Анализ характера разрушения элемента вблизи границы сжатия сечения и при достижении предельных усилий, а также распределения деформаций в продольной арматуре со стороны растянутой грани для подтверждения физической обоснованности принятых критериев.

В качестве **объекта** исследования выбрана промежуточная опора моста высокоскоростной магистрали ВСЖМ-1 «Москва – Санкт-Петербург», расположенного на участке ПК 2907+66,50 – ПК 2911+05,80 (Рисунок 54 –). Сооружение размещено на плановой кривой радиусом 15 000 м и продольном уклоне 6,5 ‰ и представляет собой десятипролетную систему с длиной пролетов по 32,6 м (общая длина 339,3 м, ширина 12,6 м).

Пролетные строения выполнены из сборных элементов. Главные балки запроектированы в соответствии с требованиями унифицированных конструкций для движения поездов со скоростью до 350 км/ч; высота балки составляет 3015 мм. Поперечное сечение представляет собой предварительно напряженную коробчатую балку с наклонными стенками (уклон 4:1), шириной нижнего пояса 5,4 м и верхней плиты 12,6 м.

Промежуточные опоры приняты монолитными железобетонными на свайных фундаментах из буронабивных свай диаметром 1,2 м с ростверком высотой 2 м. Крайние опоры – массивные, обсыпного типа, с аналогичными фундаментными решениями.

Выбор объекта обусловлен его практической значимостью и особенностями конструктивного решения, влияющими на формирование диаграмм предельных состояний при совместном действии продольной силы и изгибающего момента. Характерной особенностью стойки является низкий процент продольного армирования, близкий к минимально допустимому, что ограничивает вклад арматуры и повышает роль бетона сжатой зоны. В этих условиях возрастает чувствительность результатов к критерию определения границы сжатия, и, как показано в главе 3, наиболее отчетливо проявляются различия между методом предельного равновесия и нелинейной деформационной моделью.

Геометрия стойки задается в соответствии с типовым конструктивным решением опоры ВСЖМ типа 1 и включает призматический железобетонный элемент постоянного поперечного сечения по высоте. Форма поперечного сечения, его основные размеры и конфигурация армирования принимаются в соответствии с проектной документацией (Рисунок 55 –).

Продольная арматура располагается симметрично относительно главных осей сечения и сосредоточена в зонах, соответствующих конструктивному решению опоры. Поперечное армирование принимается в виде хомутов (Рисунок 56 –). Высота рассматриваемого элемента 4 м.

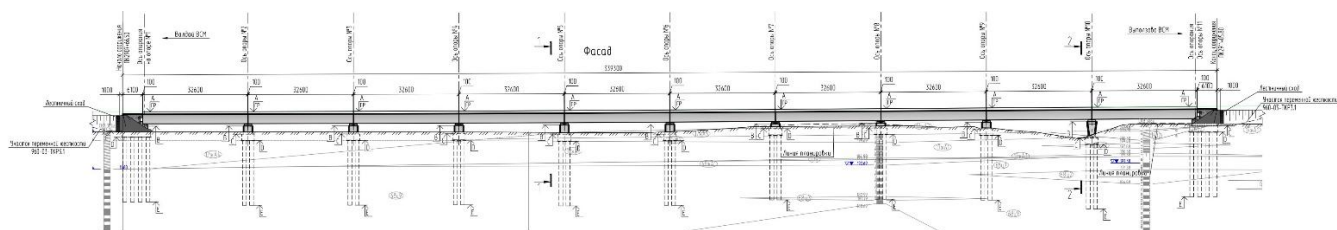


Рисунок 54 – Общий вид проектируемого сооружения на ПК2907+66.50 в составе 3-го этапа ВСЖМ-1 «Москва – Санкт-Петербург»

Общий вид промежуточных опор №2-9 (Тип 1)

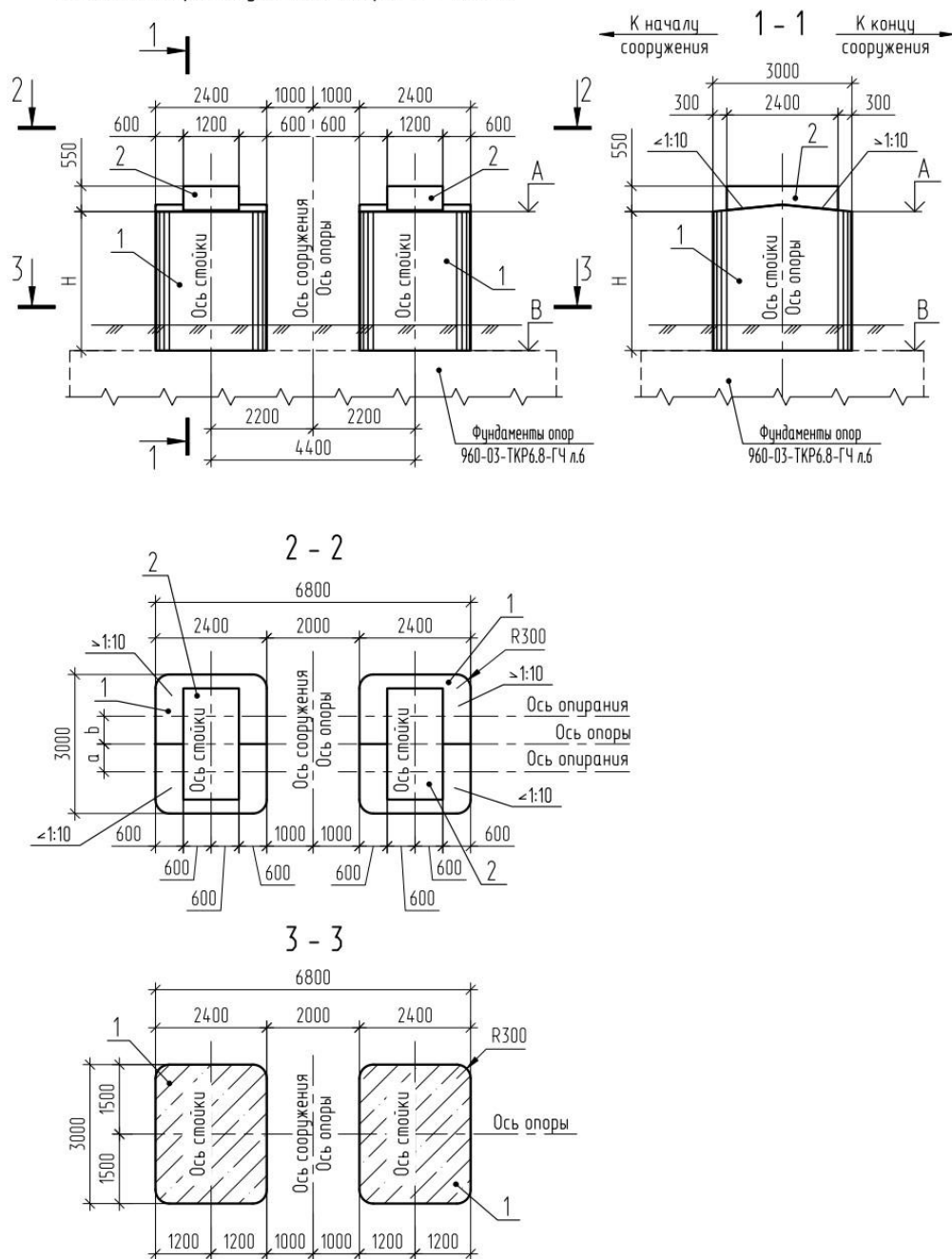


Рисунок 55 – Общий вид промежуточных опор (1 – тело опоры, 2 – подферменные площадки)

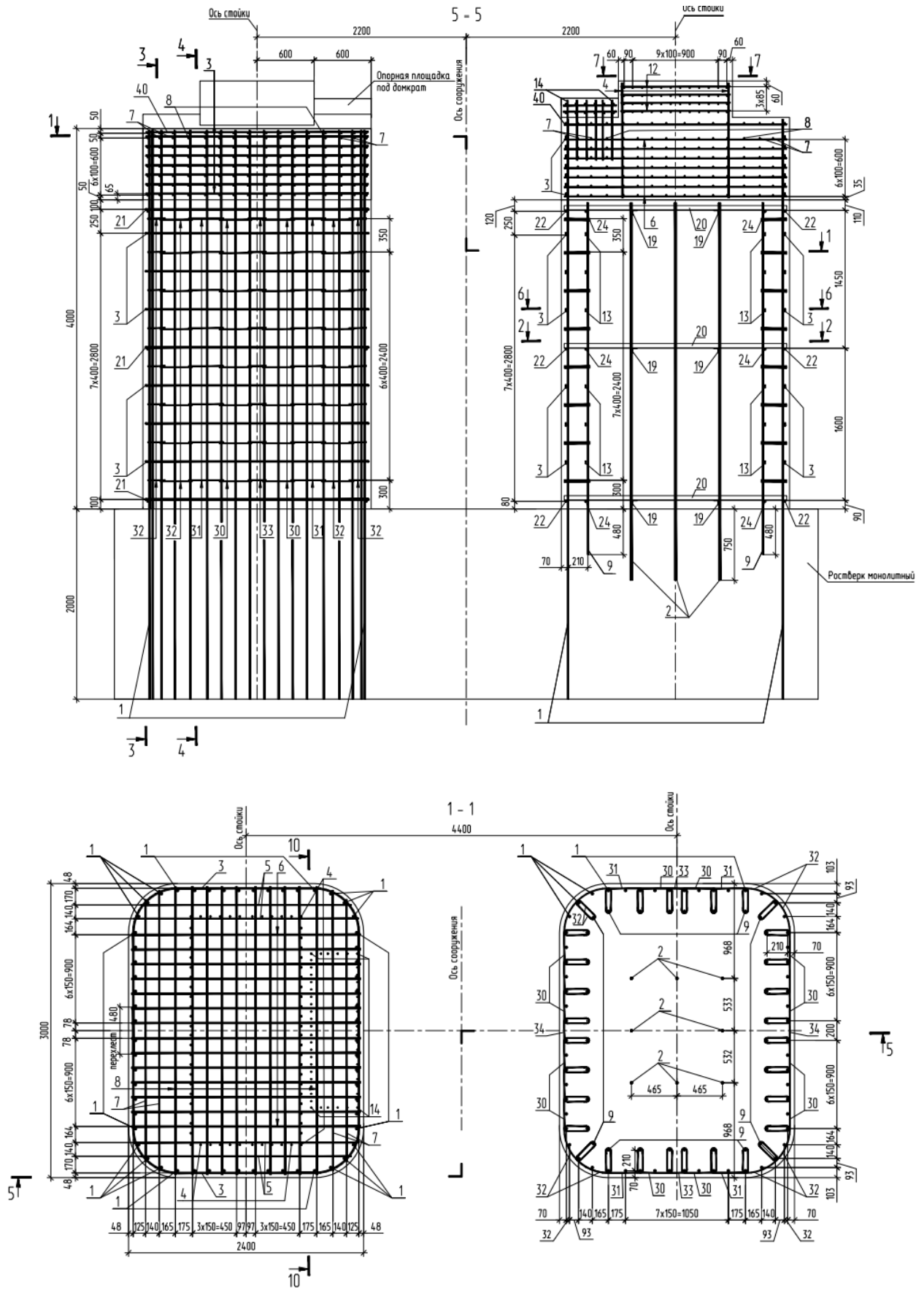


Рисунок 56 – Схема армирования рассматриваемой стойки опоры

4.1.2. Описание численной модели и принятые предположения

Для проведения численного эксперимента и верификации разработанных в диссертации методических положений была сформирована пространственная конечно-элементная модель железобетонной стойки промежуточной опоры моста в программном комплексе *Midas FEA NX* (Рисунок 57 –). Модель воспроизводит работу элемента при совместном действии продольной силы и изгибающего момента с учетом нелинейности материалов и деградации жесткости.

Железобетонная стойка моделировалась как трехмерное тело постоянного поперечного сечения. Бетон представлен объемными конечными элементами *3D SOLID*, обеспечивающими учет пространственного напряженно-деформированного состояния, включая трещинообразование и развитие пластических деформаций.

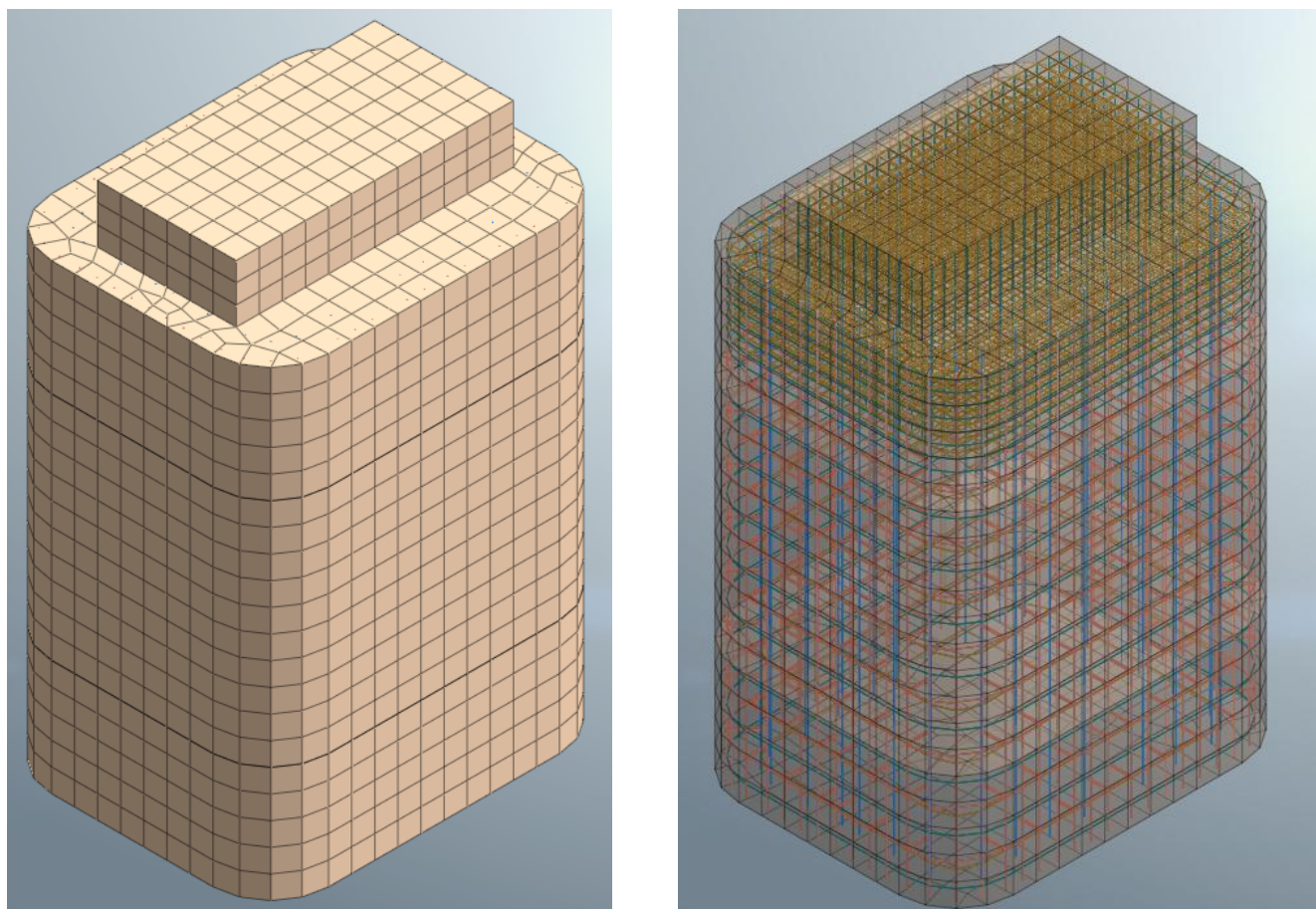


Рисунок 57 – Общий вид модели в Midas FEA NX

Продольная (Рисунок 58 –) и поперечная арматура моделировалась стержневыми элементами с жестким сцеплением с бетоном, что соответствует нормативным предпосылкам и обеспечивает совместную работу материалов до предельных деформаций.



Рисунок 58 – Элементы стержней рабочей и анкерной арматуры в расчетном сечении

Для бетона использовалась нелинейная модель *Concrete Smeared Crack Model*, основанная на концепции распределенного трещинообразования, позволяющая учитывать постепенное развитие и раскрытие трещин без явного задания дискретных разрывов. Диаграммы деформирования принимались с ниспадающей

ветвью при сжатии и растяжении, что позволяет моделировать деградацию жесткости и фиксировать потерю несущей способности.

В расчетах использовались три диаграммы сжатия бетона (Рисунок 59 –): по СП 63.13330, по СП 35.13330 и на основе модели *Thorenfeldt* [115]. Их сопоставление позволяет оценить влияние выбора закона деформирования на постпиковое поведение конструкции.

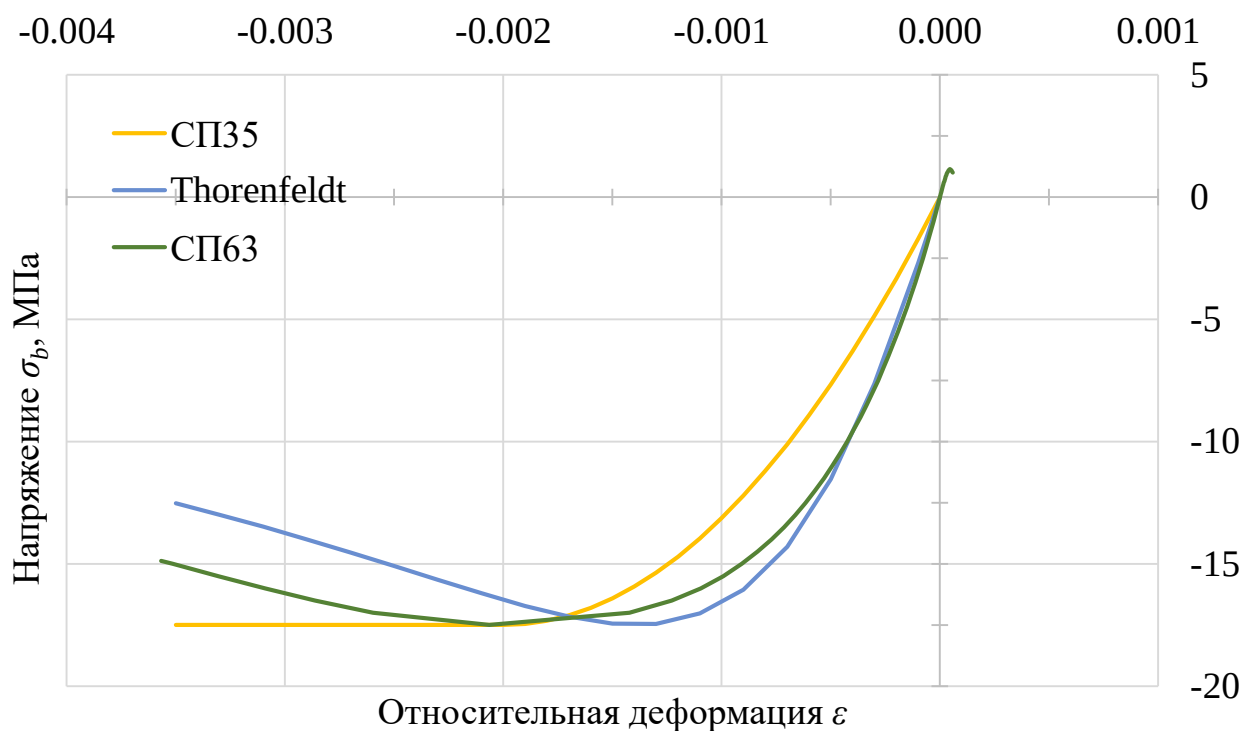


Рисунок 59 – Используемые диаграммы деформирования бетона

Критерии трещинообразования и параметры постпикового поведения задавались в соответствии с нормативными рекомендациями и калибровались для обеспечения устойчивого и физически корректного развития трещин.

Арматура моделировалась упругопластической моделью с площадкой текучести, что позволяет воспроизводить стадию пластического течения стали.

Нагружение задавалось в виде перемещений, что обеспечивает устойчивость численного решения на ниспадающих участках диаграмм и позволяет проследить поведение конструкции вплоть до разрушения. Продольная сила и изгибающий момент формировались через кинематическое задание воздействий с

контролируемым изменением эксцентриситета, что обеспечивает непрерывную траекторию нагружения и фиксацию характерных стадий работы элемента.

4.1.3. Сопоставление результатов расчета по разработанной методике с результатами численного моделирования

Численный эксперимент позволил количественно и качественно сопоставить разработанные в диссертации методические положения по построению диаграмм предельных состояний с результатами трехмерного конечно-элементного моделирования железобетонной стойки мостовой опоры при совместном действии продольной силы и изгибающего момента.

Анализ результатов был направлен на сопоставление диаграмм предельных состояний, полученных на основе физически нелинейных моделей бетона, с теоретическими диаграммами, построенными по нелинейной деформационной модели и методу предельного равновесия, а также на выявление особенностей напряженно-деформированного состояния в характерных областях.

Сравнение диаграмм (Рисунок 60 –), полученных путем объединения предельных усилий по моделям СП 63 и *Thorenfeldt*, показало их качественное совпадение с теоретическими диаграммами. Сохраняется характерная конфигурация с областями центрального сжатия, внецентренного сжатия и чистого изгиба. Полные графики нагружения и распределения напряжений приведены в Приложении 3.

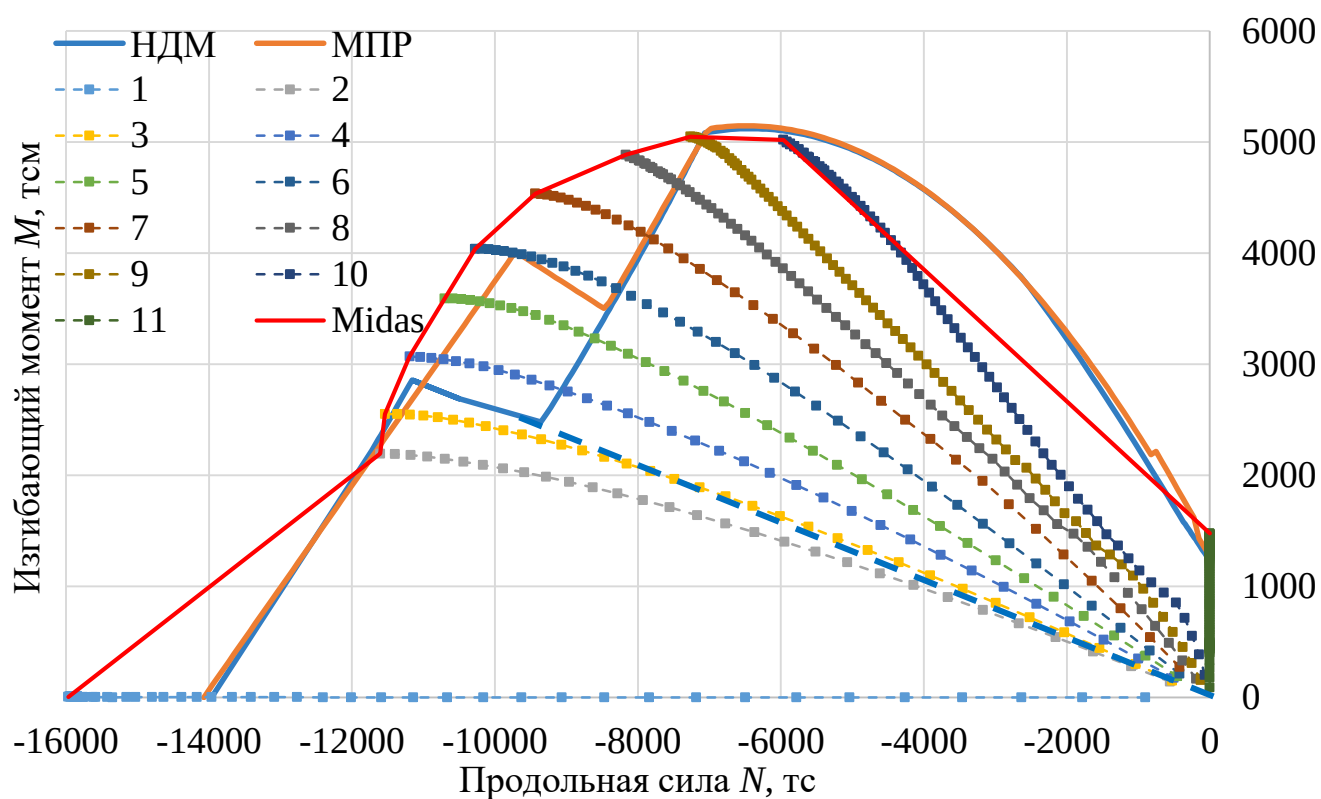
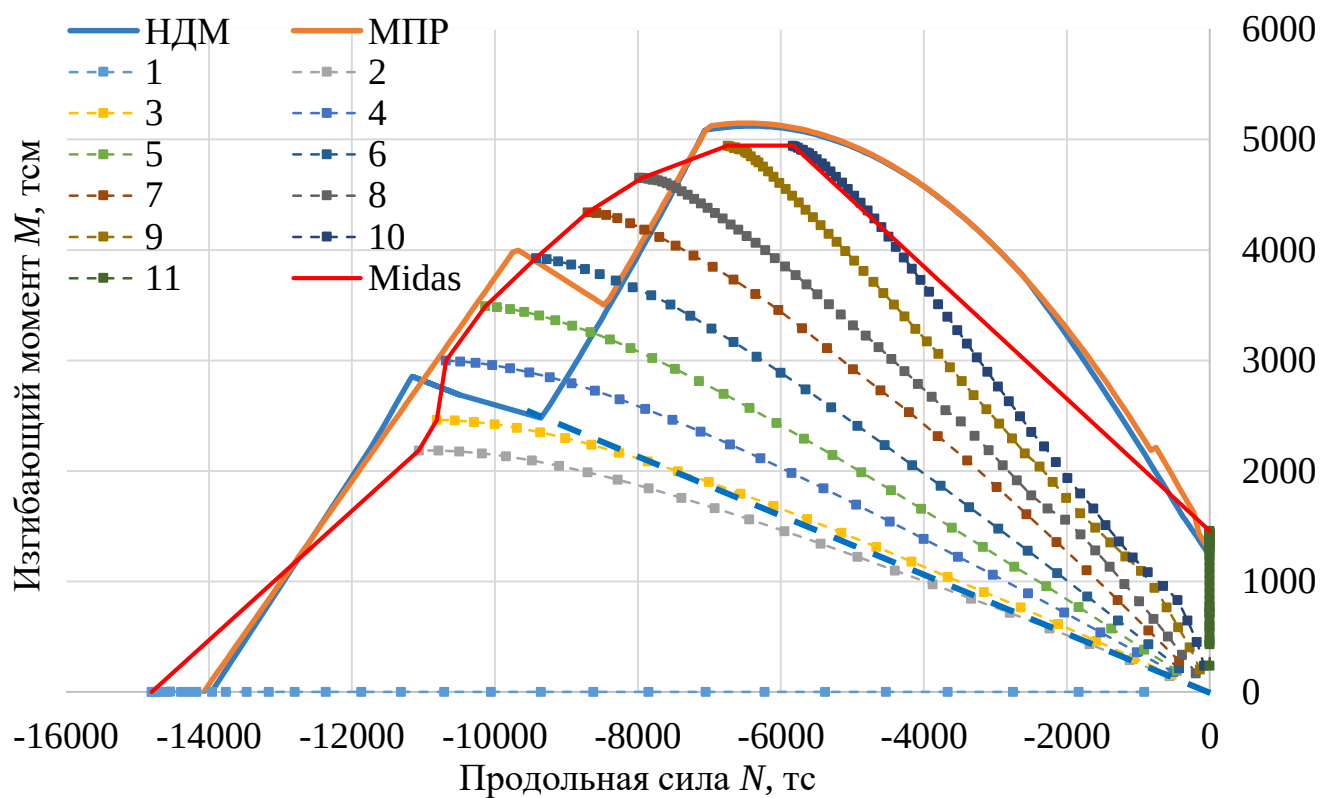


Рисунок 60 – Сопоставление диаграмм предельных состояний по методу предельного равновесия (МПР), НДМ и моделированию в Midas Fea NX (сверху – по модели Thornfeldt, снизу – по СП63)

В области центрального сжатия выявлено количественное расхождение. Предельная продольная сила составила: 15 968 тс по СП 63, 14 801 тс по *Thorenfeldt* и 13 954 тс по теоретической модели. Превышение численных результатов обусловлено учетом в МКЭ-модели перераспределения напряжений, деградации жесткости и более полного вовлечения бетона в работу за пределами нормативных ограничений предельных деформаций.

В остальных контрольных точках наблюдается устойчивая тенденция: модель *Thorenfeldt* дает меньшие значения предельных усилий, тогда как модель по СП 63 – несколько завышенные относительно теоретических результатов.

В точке чистого изгиба предельные значения составили: 1 457 тсм (*Thorenfeldt*), 1 477 тсм (СП 63) и 1 270 тсм по теоретическим методам. Различия обусловлены отличиями в форме диаграмм деформирования и соответствующей оценке жесткости сечения в предельной стадии.

Анализ вблизи границы сжатия (линии нагружения 2–4) показал близость результатов обеих моделей бетона к теоретической границе (Рисунок 61 –). Это подтверждается эпюрами напряжений в растянутой арматуре (Приложение 3).

Установлено, что при линии нагружения 3 арматура остается в сжатии на всех этапах нагружения, тогда как при линии нагружения 4 в предельной стадии возникает растяжение до 20 МПа (СП 63) и до 6 МПа (*Thorenfeldt*). Более низкие значения в модели *Thorenfeldt* указывают на более жесткое поведение системы и смещение переходной зоны к растяжению при больших продольных усилиях.

При этом теоретическая граница сжатия располагается ниже зоны фактического появления растяжения в арматуре, что подтверждает консервативный характер принятого подхода и корректность использования данной границы при построении диаграмм предельных состояний.

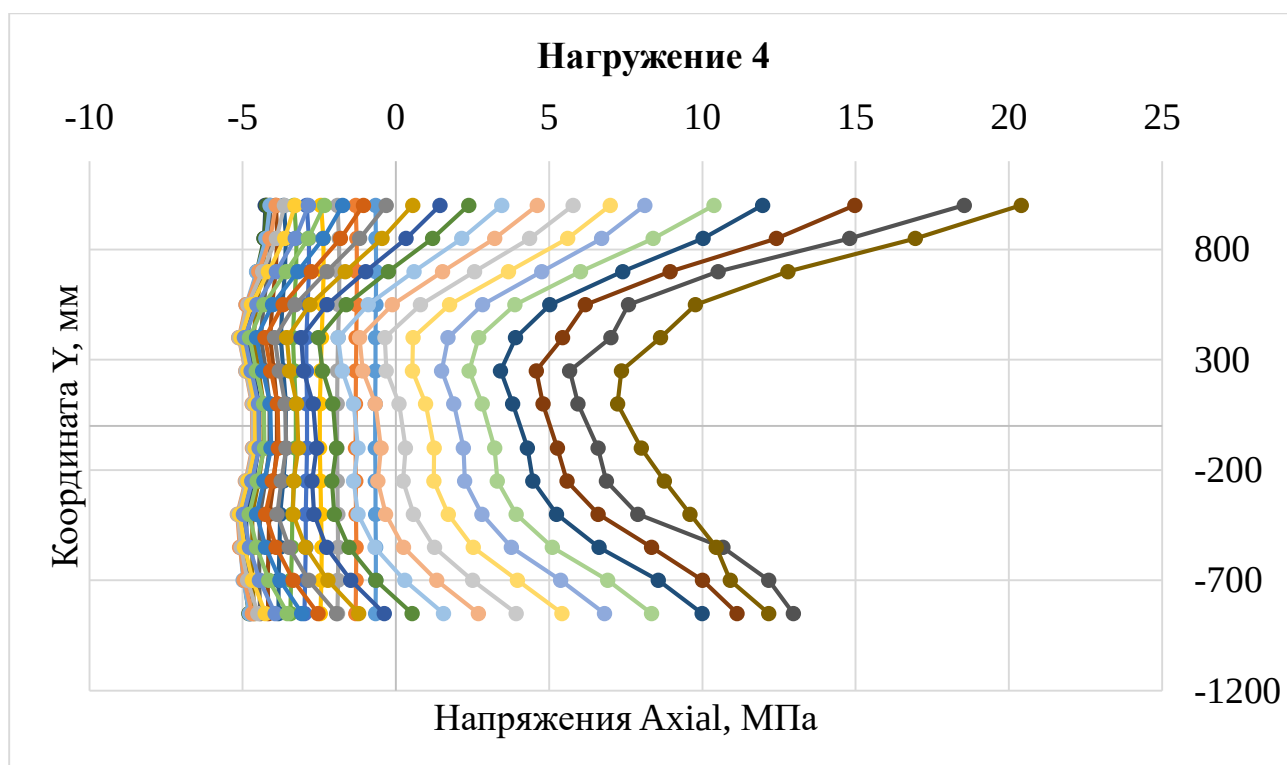
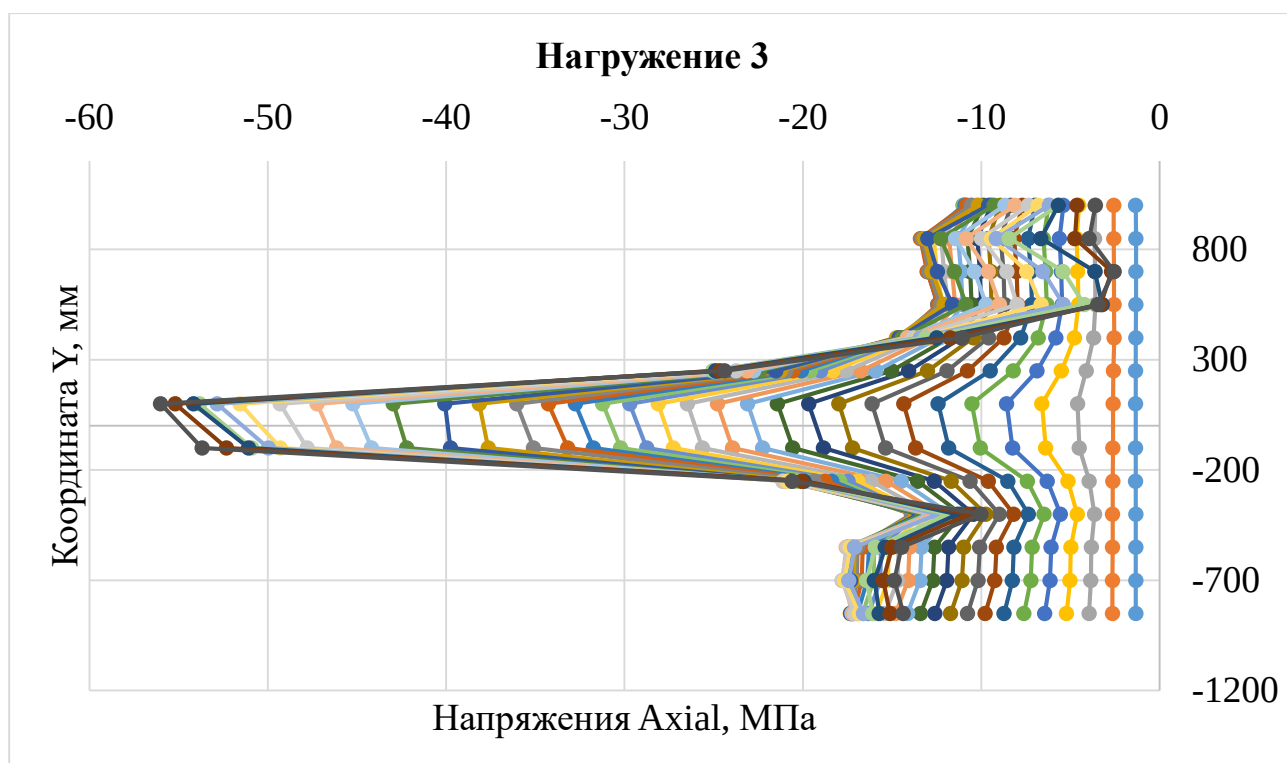


Рисунок 61 – Напряжения в рабочей арматуре со стороны растянутой грани для линий нагрузки 3 и 4 при модели бетона СП63

Дополнительная оценка характера работы конструкции была выполнена на основе анализа графиков зависимости вертикальной силы и изгибающего момента от соответствующих перемещений и поворотов (Рисунок 62 – , Рисунок 63 –).

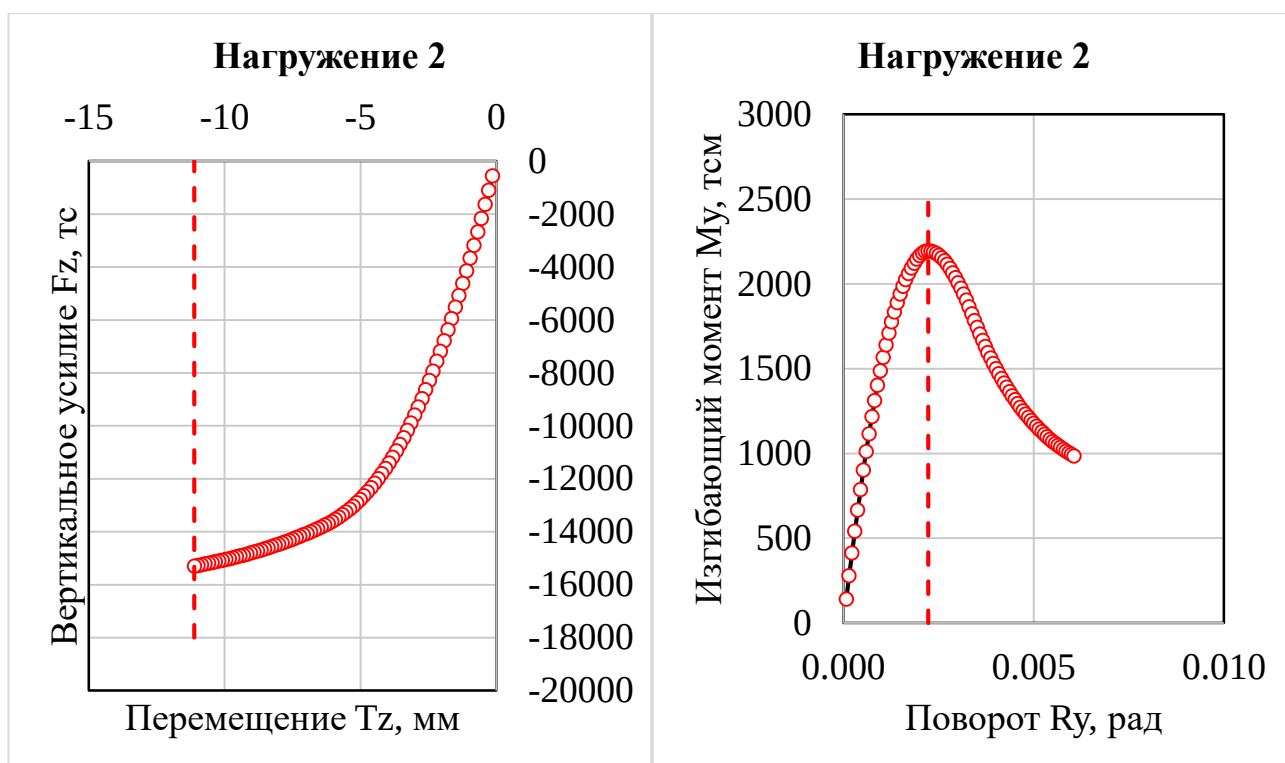


Рисунок 62 – График зависимости нагрузки от перемещений при хрупком характере разрушения

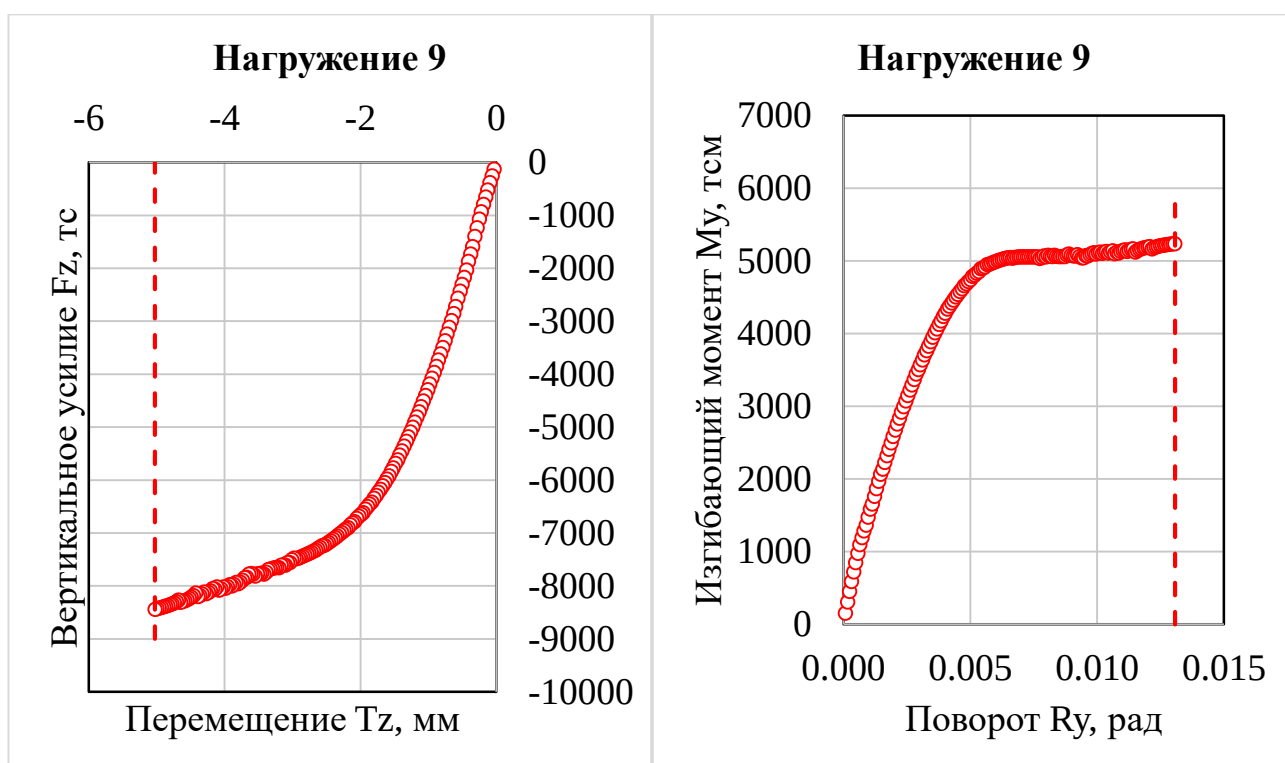


Рисунок 63 – График зависимости нагрузки от перемещений при пластичном характере разрушения

Критерием оценки характера работы конструкции в рассматриваемых моделях является форма диаграмм «изгибающий момент – поворот», а именно наличие или отсутствие выраженного максимума с последующим спадом несущей способности либо формирование протяженного плато после достижения предельного значения момента. Наличие пика с нисходящей ветвью интерпретируется как признак хрупкого разрушения, тогда как развитие горизонтального участка указывает на формирование пластического механизма и наличие деформационной способности элемента.

Хрупкий характер разрушения, фиксируемый в модели *Thorenfeldt* для линий нагружения 1–8, проявляется в наличии выраженного максимума на диаграммах с последующим снижением воспринимаемого изгибающего момента. Такая форма кривой соответствует достижению предельных деформаций сжатого бетона при еще не реализованной текучести арматуры. В этих условиях несущая способность определяется состоянием сжатой зоны, и после достижения критических деформаций происходит потеря способности элемента воспринимать нагрузку без существенного увеличения деформаций, что и отражает хрупкий механизм разрушения.

При повышенных уровнях нагружения возрастает вероятность того, что предельные деформации в сжатой зоне бетона будут достигнуты раньше, чем напряжения в растянутой арматуре достигнут предела текучести. Это связано с перераспределением напряжений по сечению и увеличением доли сжатой зоны, в которой бетон работает в условиях высоких относительных деформаций. В результате предельное состояние определяется исчерпанием деформационной способности бетона, а не развитием пластических деформаций арматуры. Такой механизм характеризуется отсутствием стадии перераспределения усилий и сопровождается резким снижением несущей способности после достижения максимума, что соответствует хрупкому характеру разрушения.

Формирование плато, наблюдаемое начиная с более высоких линий нагружения, свидетельствует о переходе к иному механизму работы. После

достижения максимального изгибающего момента конструкция сохраняет способность воспринимать нагрузку при увеличении поворота, что указывает на развитие текучести арматуры и перераспределение внутренних усилий.

В модели по СП 63 наблюдается аналогичная тенденция, однако выраженные пики исчезают уже с 6-й линии нагружения, а устойчивое плато формируется для линий 7–11, что свидетельствует о более раннем переходе конструкции к пластическому механизму работы по сравнению с моделью *Thorenfeldt*.

4.1.4. Выводы по результатам численного эксперимента

Проведенный численный эксперимент подтвердил, что диаграммы предельных состояний железобетонного элемента, построенные по разработанному в диссертационной работе алгоритму нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений, корректно воспроизводят характерные стадии напряженно-деформированного состояния, полученные в пространственной конечно-элементной модели с учетом нелинейности материалов и трещинообразования. Согласование результатов носит как количественный, так и качественный характер и проявляется в совпадении формы диаграмм и последовательности смены механизмов работы сечения.

Установлено, что предложенный эквивалентный способ учета нормативного ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона адекватно отражает физический механизм достижения предельного состояния. В численной модели в соответствующих областях фиксируются потеря несущей способности сжатого бетона, снижение жесткости и признаки хрупкого разрушения, что подтверждает физическую обоснованность введенного понижающего воздействия на расчетные характеристики бетона.

Анализ деформаций продольной арматуры со стороны растянутой грани показал, что разработанный деформационный критерий границы сжатия корректно определяет состояние сечения, при котором арматура остается в сжатии либо находится вблизи нейтральной оси. Переход арматуры в растянутое состояние в

численной модели происходит при более высоких значениях эксцентриситета, чем по теоретической границе сжатия, что подтверждает консервативность и инженерную обоснованность критерия.

Сопоставление результатов, полученных при использовании различных нелинейных диаграмм деформирования бетона (по отечественным нормативным подходам и модели *Thorenfeldt*), показало устойчивость выявленных закономерностей. Независимо от принятой диаграммы сохраняются взаимное положение характерных точек и общий характер диаграмм предельных состояний, что свидетельствует о слабой чувствительности разработанных положений к выбору аппроксимации постпикового поведения бетона.

В целом результаты численного эксперимента подтверждают корректность, физическую обоснованность и практическую применимость разработанных методических положений по построению диаграмм предельных состояний железобетонных элементов при совместном действии продольной силы и изгибающего момента без использования итерационных процедур. Подход обеспечивает адекватное воспроизведение напряженно-деформированного состояния и может рассматриваться как инженерно обоснованная альтернатива традиционным нелинейным итерационным методам расчета.

4.2. Сравнительный анализ алгоритмов построения диаграмм предельных состояний

В процессе проектирования железобетонных опор мостов важны не только точность оценки несущей способности, но и вычислительная эффективность расчетных методик. Нелинейная деформационная модель обеспечивает физически обоснованное описание напряженно-деформированного состояния, однако ее реализация обычно требует итерационного поиска положения нейтральной оси и уточнения условий равновесия. Это увеличивает вычислительные затраты при усложнении геометрии сечения и схемы армирования, а также делает время расчета зависимым от параметров дискретизации, используемых при интегрировании напряжений.

В этой связи актуальны методы с фиксированной вычислительной сложностью. Разработанный в исследовании аналитический алгоритм построения диаграмм предельных состояний основан на прямом решении уравнений равновесия и не использует итерационные процедуры, что исключает зависимость времени расчета от дискретизации при сохранении нормативной корректности.

Для обоснования его применения выполнен количественный анализ вычислительной эффективности в сравнении с итерационными методами нелинейной деформационной модели. Исследование направлено на выявление различий в алгоритмической структуре и масштабируемости подходов.

Объект исследования – алгоритмы построения диаграмм предельных состояний железобетонных элементов при совместном действии продольной силы и изгибающего момента. **Предмет** – вычислительная эффективность этих алгоритмов, рассматриваемая как зависимость времени расчета от параметров модели, прежде всего степени дискретизации сечения. **Цель** – установление закономерностей изменения вычислительных затрат при усложнении модели и выявление различий в масштабировании вычислительной сложности итерационного и аналитического подходов.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**:

- сформировать серию расчетных моделей с контролируемым изменением параметров, определяющих вычислительную сложность итерационного алгоритма;
- выполнить экспериментальную оценку продолжительности расчета диаграмм предельных состояний при варьировании степени дискретизации поперечного сечения;
- установить характер зависимости вычислительных затрат от числа конечных элементов при использовании итерационного подхода;
- выполнить сопоставление полученных результатов с временными характеристиками аналитического алгоритма, не использующего итерационные процедуры;

- проанализировать устойчивость вычислительных характеристик аналитического метода при изменении геометрических параметров сечения и параметров армирования.

Исследование направлено на установление зависимости вида:

$$T = f(N),$$

где T – время выполнения анализа, N – число конечных элементов,

Поскольку итерационная методика реализована в закрытом программном комплексе, влияние аппаратных факторов в рамках исследования не учитывается; расчеты выполнены на фиксированном оборудовании в идентичных условиях.

Аналитический алгоритм реализован в веб-приложении «Диаграммы предельных состояний». Поскольку он не использует итерации и дискретизацию сечения, проверяется гипотеза о независимости времени вычислений от геометрии и армирования.

Для эксперимента сформированы модели с различной геометрией, дискретизацией и армированием. Базой приняты квадратные сечения, что исключает влияние геометрической асимметрии и позволяет выделить влияние алгоритма. Диапазон размеров – от 200x200 до 5000x5000 мм. Для максимального сечения использованы шаги дискретизации $h = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5$ м (Рисунок 64 –), определяющие число конечных элементов и объем вычислений.

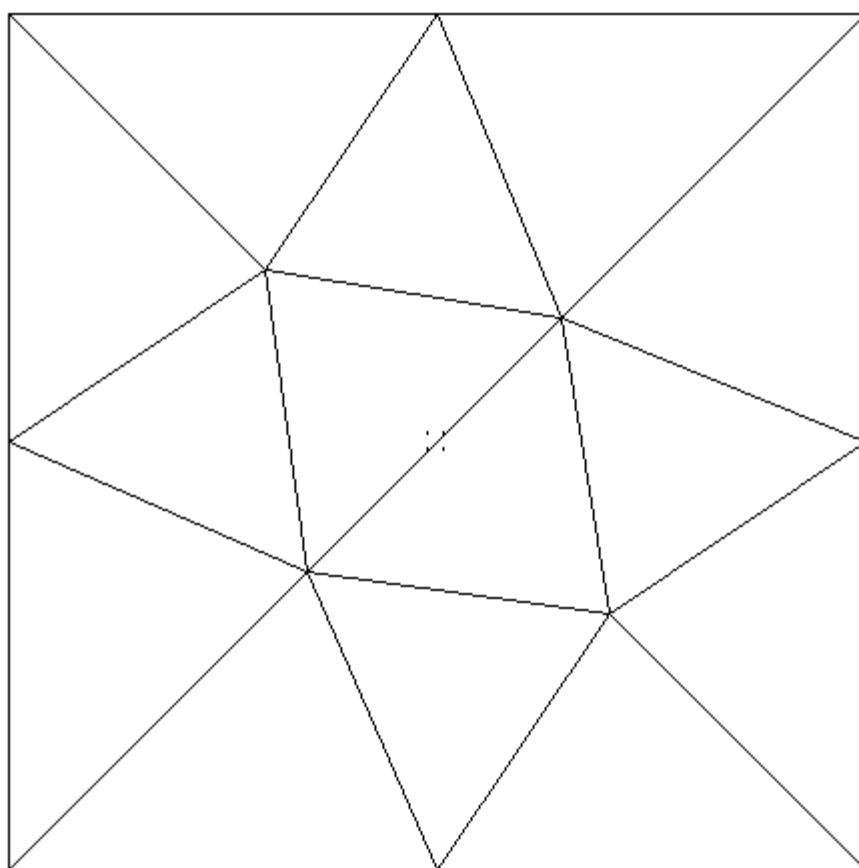
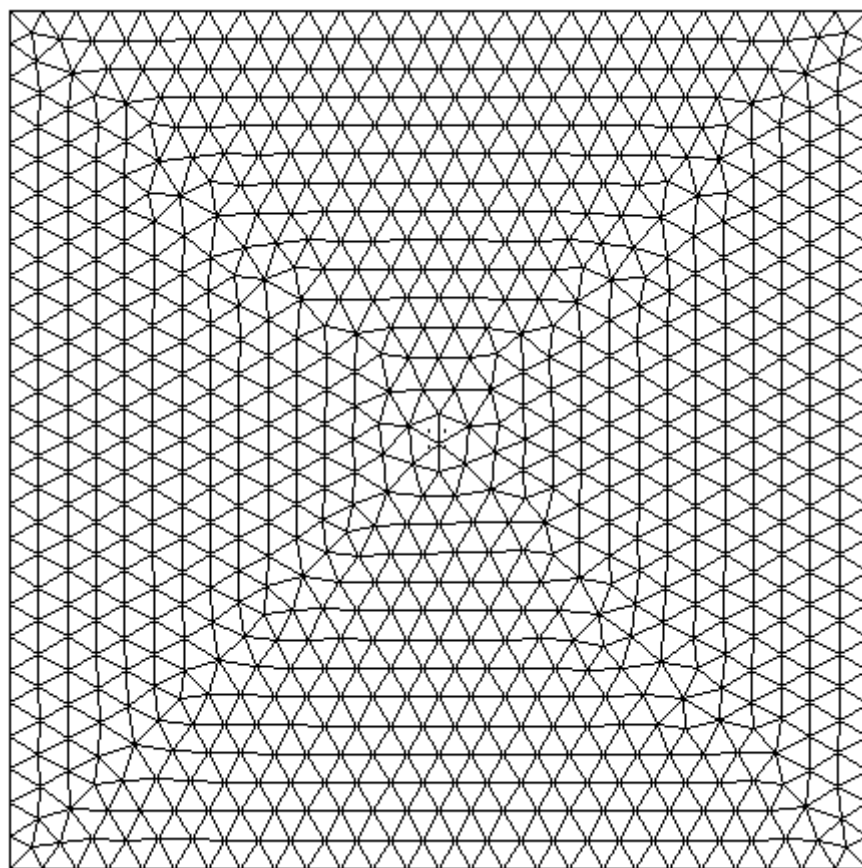


Рисунок 64 – Сетка конечных элементов при шаге дискретизации 0,1 и 2,5 м

Следует подчеркнуть, что варьирование плотности сетки направлено не на выбор оптимального шага дискретизации, а на установление зависимости времени расчета от числа конечных элементов и выявление характера масштабирования вычислительной сложности итерационного метода.

Параметры модели разделены на определяющие и вторичные. К определяющим отнесено число конечных элементов, характеризующее совместное влияние геометрии сечения и шага сетки. К вторичным – количество продольной арматуры, влияющее на объем вычислений, но не на структуру итерационного процесса.

Параметры вычислительной платформы и настройки сходимости в рамках исследования фиксированы, что обеспечивает сопоставимость результатов.

Материалы сечений принимались неизменными во всех сериях расчетов:

- класс бетона – В30;
- класс арматуры – А400;
- расчетная схема – внецентренно-сжатый элемент при осевом сжатии и изгибе в одной плоскости.

Для оценки влияния армирования рассматривались варианты с различным числом продольных стержней: 2, 4, 8, 16, 32 и 100. Арматура располагалась симметрично по периметру сечения.

Расчет выполнялся для каждого сочетания параметров:

- Постоянный шаг сетки при изменении размеров сечения (определение влияния геометрии);
- Постоянный размер сечения при изменении шага дискретизации (определение влияния количества конечных элементов);
- Постоянные геометрические характеристики при изменении количества арматурных стержней (оценка влияния армирования).

Для оценки вычислительной эффективности итерационного алгоритма, реализованного в программном комплексе Midas GSD, была разработана

специализированная методика измерения продолжительности анализа. Поскольку программный комплекс не содержит встроенных инструментов для регистрации времени выполнения расчета, фиксация проводилась с использованием внешних средств автоматизации.

Измерение времени осуществлялось с помощью скрипта, написанного в среде AutoHotkey, который выполнял автоматический контроль начала и окончания расчета. Такой подход позволил исключить влияние человеческого фактора и обеспечить высокую точность синхронизации момента запуска и завершения вычислений.

Алгоритм работы системы измерения включал следующие этапы:

1. Инициализация расчета. После активации проекта в Midas GSD скрипт ожидал нажатия клавиши F5, запускающей процесс анализа. Момент нажатия фиксировался системным счетчиком времени `A_TickCount` как начало расчета;
2. Мониторинг выполнения. В процессе работы программа анализировала текстовые сообщения, отображаемые в окне Midas GSD, с целью определения признаков завершения расчета;
3. Фиксация окончания. Завершением анализа считалось появление строки «Section properties are calculated» в окне вывода сообщений. Этот момент фиксировался как конец расчета;
4. Регистрация данных. После завершения анализа в автоматическом режиме формировалась запись в журнал (лог-файл) следующего вида:

Модель: midas GSD Ver. 350 – [Project1]

Начало: 2025-09-15 14:30:25

Длительность анализа: 47.825 сек.

Каждая запись включала название модели, дату и время начала анализа, а также длительность вычислений с точностью до 0,001 секунды. Полученные данные сохранялись в отдельный текстовый файл, расположенный на рабочем

столе пользователя. Каждый расчет проводился пять раз, после чего вычислялось среднее значение времени анализа и стандартное отклонение, характеризующее стабильность результатов. Разброс значений не превышал 7%, что подтверждает достаточную повторяемость измерений.

Для оценки производительности аналитического метода расчета, реализованного в разработанном автором веб-приложении «Диаграммы предельных состояний», была применена методика измерения времени вычислений, адаптированная к особенностям работы веб-сервиса.

Поскольку аналитический метод не использует итерационные процедуры и не требует дискретизации сечения, продолжительность анализа определяется исключительно временем выполнения математических операций, связанных с решением системы уравнений равновесия и совместимости деформаций. В связи с этим регистрация времени выполнялась непосредственно в программном коде приложения с использованием встроенных средств точного хронометража.

Время начала и окончания расчета фиксировалось при помощи функции `time.perf_counter()`, обеспечивающей высокоточную (до микросекунд) регистрацию интервалов выполнения вычислений. Для каждого анализа автоматически сохранялись общая продолжительность вычислений, выраженная в секундах.

Регистрируемые значения показали, что длительность выполнения расчета по аналитическому методу оставалась практически неизменной при варьировании размеров сечения, шага дискретизации и количества арматурных стержней.

Полученные значения продолжительности расчета относятся к конкретной реализации итерационного алгоритма в программном комплексе Midas GSD и фиксированной вычислительной платформе. В рамках исследования анализируется не абсолютное значение времени выполнения анализа, а характер его изменения при увеличении сложности расчетной модели.

Анализ полученных экспериментальных данных направлен на выявление закономерностей изменения продолжительности расчета при усложнении расчетной модели, а также на сопоставление вычислительной природы

итерационного и аналитического подходов к построению диаграмм предельных состояний железобетонных элементов. Основное внимание уделено зависимости времени выполнения анализа от числа конечных элементов как ключевого параметра, определяющего размерность задачи и вычислительную сложность алгоритма.

В результате исследования получены экспериментальные зависимости времени расчета для двух принципиально различных методов:

- итерационного метода на основе нелинейной деформационной модели с численным поиском положения нейтральной оси;
- аналитического метода, основанного на прямом решении уравнений равновесия и не использующего итерационные процедуры.

Установлено, что для итерационного метода наблюдается выраженная зависимость времени расчета от сложности модели, определяемой числом конечных элементов и плотностью сеточной разбивки, а также в меньшей степени количеством продольной арматуры. Увеличение дискретизации сечения приводит к существенному росту времени анализа, обусловленному увеличением объема операций численного интегрирования и многократным повторением вычислений в рамках итерационного процесса поиска нейтральной оси.

Для аналитического метода подобной зависимости не выявлено: при изменении геометрии сечения, шага дискретизации и количества арматурных стержней продолжительность расчета оставалась практически постоянной (0,037–0,074 с), что указывает на постоянную вычислительную сложность алгоритма и его устойчивость к росту размерности задачи, что особенно важно для многовариантных расчетов.

Для оценки влияния геометрических параметров выполнено сопоставление времени расчета для квадратных сечений размером от 200x200 до 5000x5000 мм при фиксированном шаге сетки. Установлено, что при постоянной плотности дискретизации увеличение размеров сечения приводит к росту времени расчета вследствие увеличения числа конечных элементов. Характер зависимости носит

нелинейный вид и отражает доминирующее влияние дискретизации на вычислительную нагрузку (Рисунок 65 –).

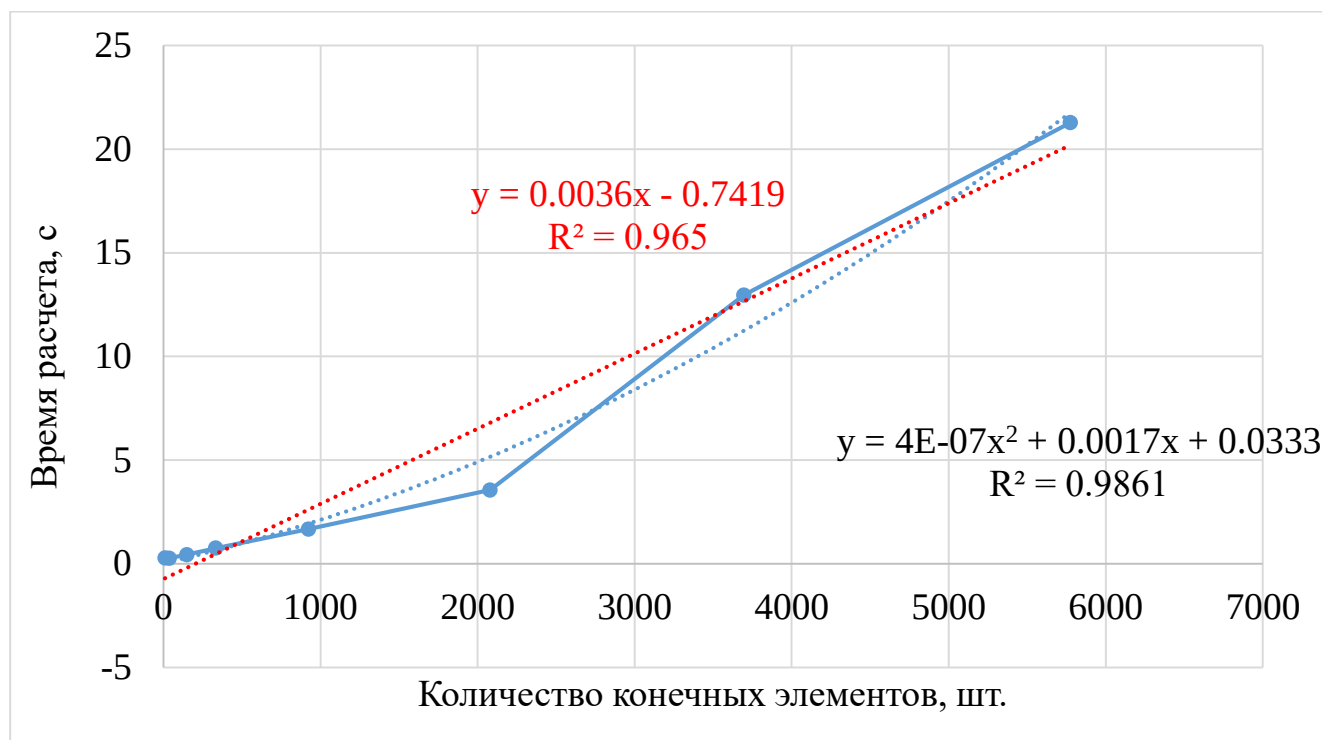


Рисунок 65 – Зависимость времени расчета от количества конечных элементов при изменении размеров сечения

Аналогичная закономерность подтверждается при фиксированной геометрии и изменении шага сетки (Рисунок 66 –): уменьшение шага приводит к резкому увеличению времени расчета, что подтверждает ключевую роль дискретизации в формировании вычислительной сложности итерационного метода.

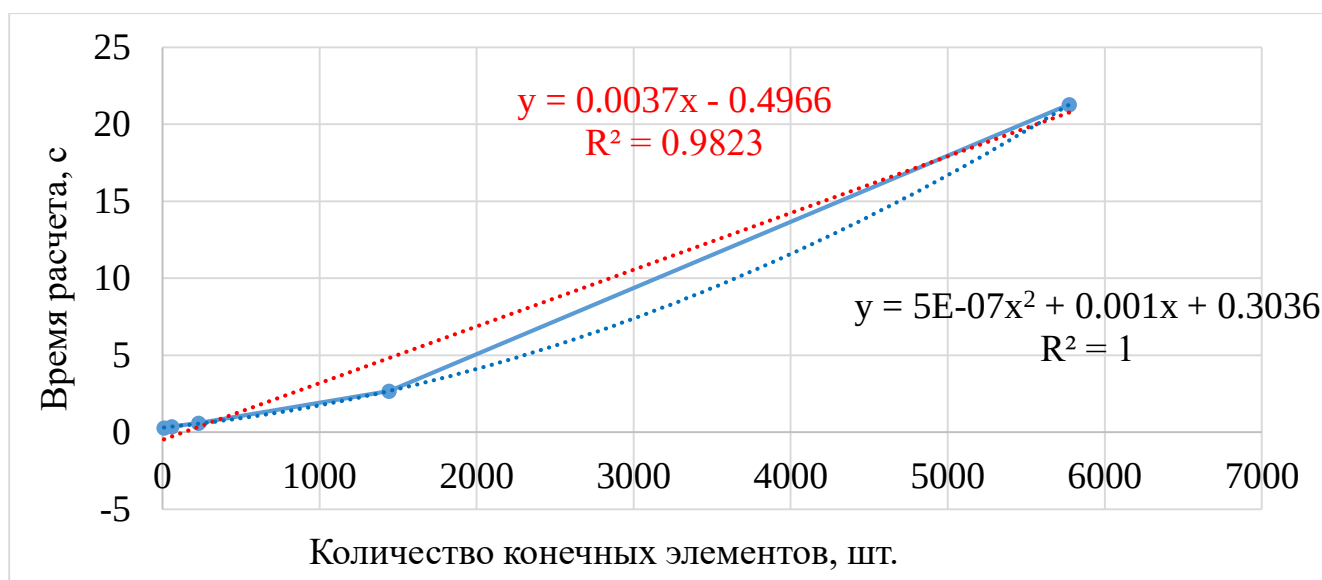


Рисунок 66 – Зависимость времени расчета от количества конечных элементов при изменении шага дискретизации сечения

Влияние количества продольных арматурных стержней оказалось менее значимым (Рисунок 67 –): при числе до 16 изменение времени расчета не превышало 5 %, при увеличении до 32 и более – составляет порядка 8–12 %, что связано с ростом объема операций учета арматуры и не влияет на структуру итерационного процесса.

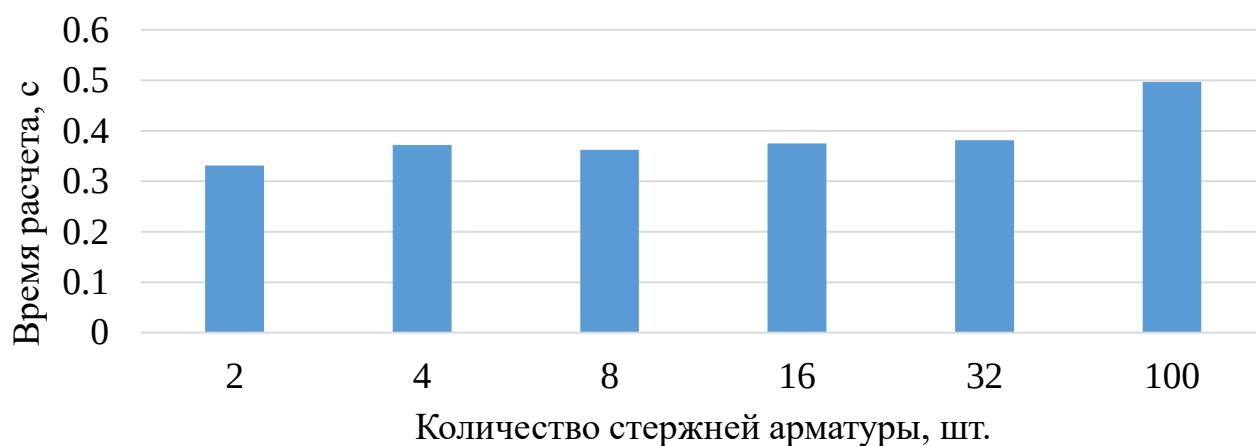


Рисунок 67 – Зависимость времени расчета от количества арматурных стержней

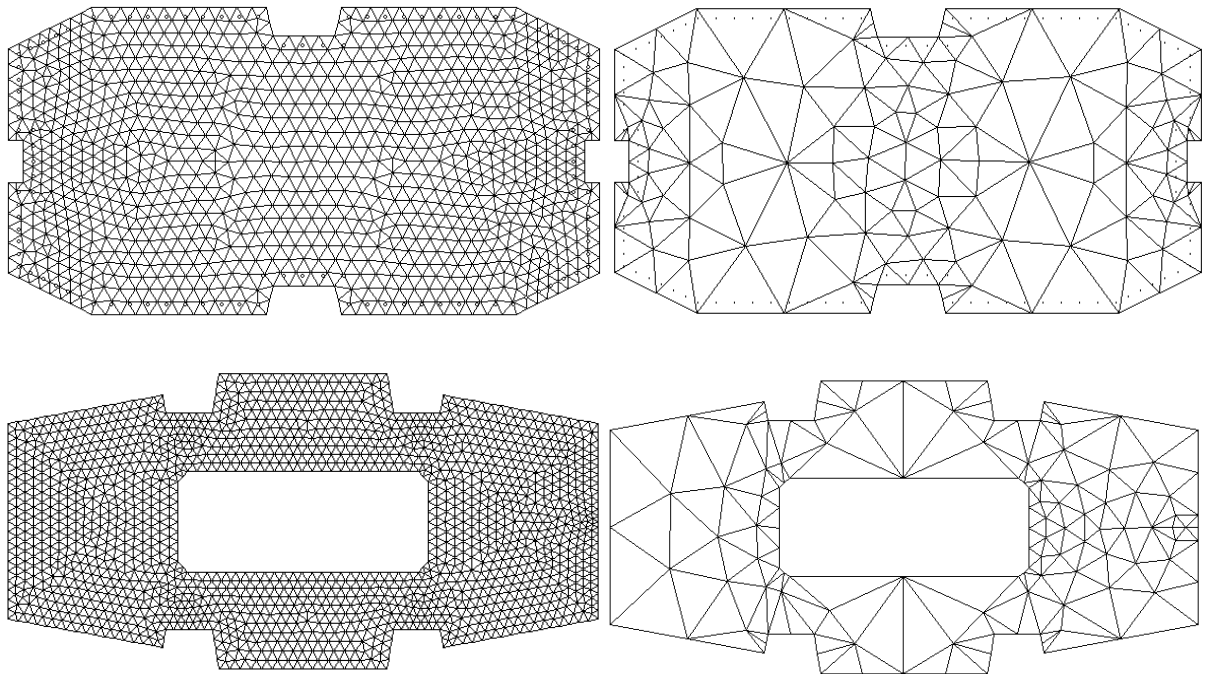
Экспериментальные данные были аппроксимированы квадратичной зависимостью:

$$T = 4 * 10^{-7} * N^2 + 0,0017N + 0,0333$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0,9861$ свидетельствует о высоком соответствии аппроксимирующей функции экспериментальным данным.

Квадратичный характер зависимости обусловлен совокупным влиянием роста числа операций численного интегрирования и повторного пересчета напряженно-деформированного состояния на каждом шаге итерационного поиска положения нейтральной оси, что приводит к нелинейному увеличению вычислительных затрат.

Для проверки универсальности выявленных закономерностей и оценки их применимости к инженерным задачам выполнены дополнительные расчеты для железобетонных опор мостовых сооружений со сложной геометрией поперечного сечения (Рисунок 68 –). В отличие от модельных квадратных сечений, данные конструкции характеризуются наличием вырезов, внутренних полостей, переменной толщины стенок и асимметричного армирования.



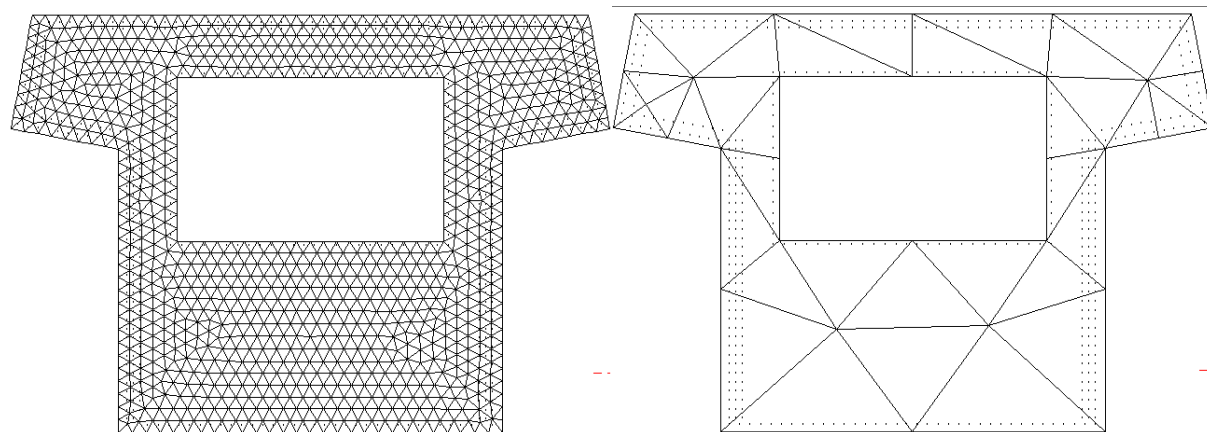


Рисунок 68 – Дискретизация поперечных сечений рассматриваемых железобетонных опор (сверху вниз – Мост Бетанкура, Мост через Корабельный фарватер ЗСД, Центральный мост г. Новосибирск)

Рассмотрены расчетные модели реальных опор мостов, применявшихся в ранее реализованных проектах, включая коробчатые и составные сечения. Для каждой геометрии выполнялись расчеты при различных шагах сеточной разбивки, соответствующих диапазону базового эксперимента, что позволило получить сопоставимые значения времени при различной форме расчетной области и близком числе конечных элементов.

Результаты для реальных опор нанесены на обобщенный график зависимости времени расчета от числа конечных элементов совместно с данными для квадратных сечений (Рисунок 69 –). Установлено, что экспериментальные точки для сложных сечений попадают в ту же область зависимости $T=f(N)$ и согласуются с ранее полученной закономерностью.

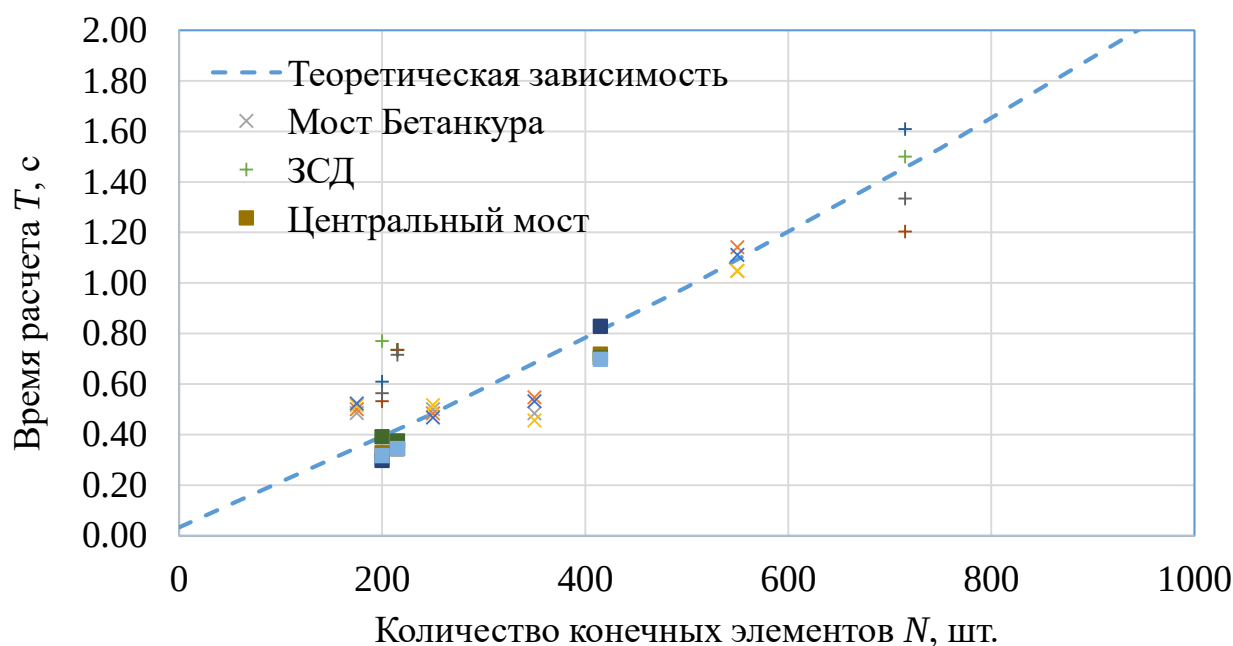
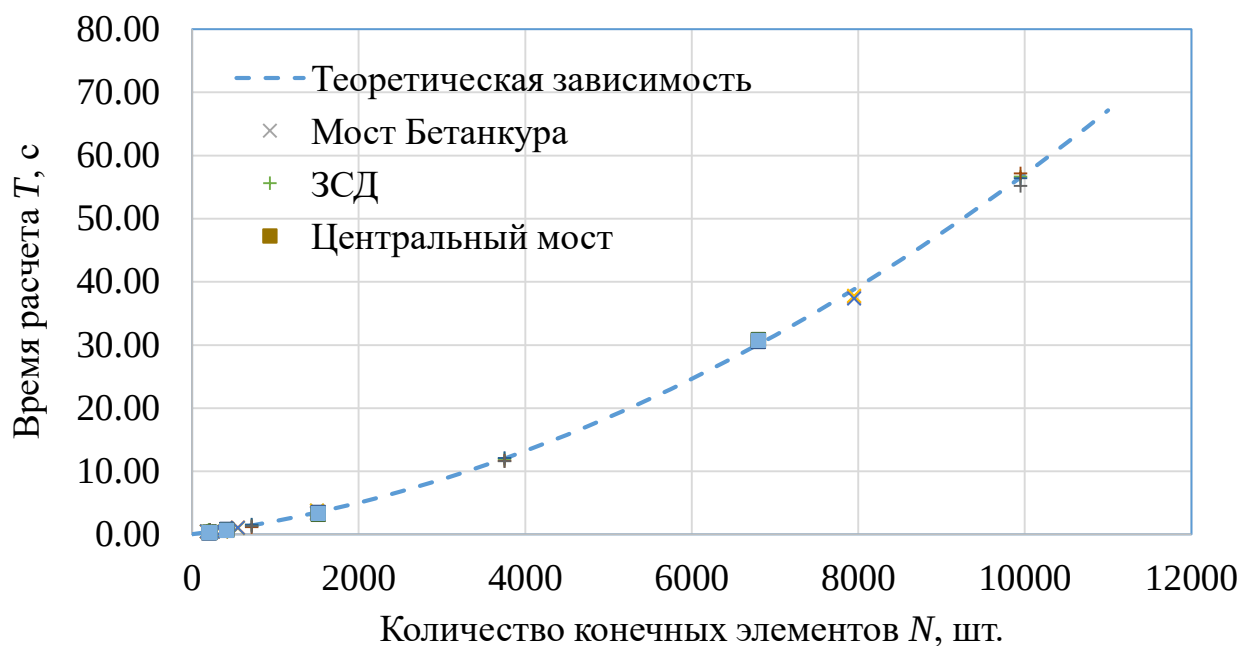


Рисунок 69 – Сравнение скорости алгоритма расчета реальных мостовых сооружений с выведенной теоретической зависимостью

Полученный результат свидетельствует о том, что геометрическая сложность поперечного сечения не является определяющим фактором вычислительной эффективности итерационного алгоритма. Основным параметром, формирующим продолжительность расчета, остается число конечных элементов дискретизированной области, независимо от конфигурации их распределения.

Дополнительно установлено, что изменение шага дискретизации для реальных опор не приводит к изменению характерных точек и формы диаграмм предельных состояний. В рассматриваемом диапазоне увеличение плотности сетки влияет исключительно на продолжительность расчета и не сопровождается уточнением результатов, получаемых в рамках итерационного метода.

Совпадение результатов для сечений различной формы подтверждает обобщающий характер зависимости и корректность использования числа конечных элементов как интегрального параметра вычислительной сложности итерационного метода. Это исключает привязку полученных выводов к частному выбору геометрии расчетной модели и повышает их методическую значимость.

В целом установлено, что вычислительная сложность итерационного метода построения диаграмм предельных состояний возрастает нелинейно, близко к квадратичному закону, при увеличении числа конечных элементов. Доминирующим фактором остается необходимость многократного пересчета напряженно-деформированного состояния в процессе поиска положения нейтральной оси, тогда как влияние количества арматурных стержней носит второстепенный характер.

Выявленные закономерности сохраняются как для простых, так и для реальных сложных сечений, что подтверждает их универсальность и обусловленность алгоритмической природой итерационного подхода, ограничивающей его эффективность при высокой дискретизации и многовариантных расчетах.

4.3. Практическое применение результатов исследования

4.3.1. Применение нелинейной деформационной модели при расчете железобетонных опор мостов сложной формы поперечного сечения

При расчете железобетонных элементов произвольной формы поперечного сечения по прочности с использованием метода предельного равновесия на практике широко применяется метод расчета с приведением фактического сечения

к условному. В этом случае исходное сечение заменяется на упрощенное с геометрическими характеристиками, приближенными к исходным. Такой подход значительно облегчает расчет, особенно при использовании стандартных средств автоматизации проектирования. Однако замена исходного сечения на условное может приводить к появлению избыточных запасов прочности, вызванных невозможностью полного соответствия геометрических характеристик исходного и условного сечения. Напротив, при расчете с использованием нелинейной деформационной модели и построении диаграмм предельных состояний анализ выполняется для исходной геометрии без приближений, что позволяет исключить упомянутые запасы.

Целью данного подраздела является экспериментально-численное подтверждение особенностей различных методов построения диаграмм предельных состояний на примере сложного железобетонного элемента – пилона вантового моста через р. Обь в г. Новосибирске (Рисунок 70 –). Рассмотрение данного примера позволяет подтвердить закономерности расхождений в области сжатия, выведенных в предыдущих главах на примере условного прямоугольного железобетонного элемента.

Мост запроектирован для пересечения реки Обь автомобильной дорогой с выходом на Каменскую магистраль. Схема моста $(42+60+2 \times 72+60) + (77,2+3 \times 110+2 \times 126+116,8) + (229,03+102+48) + (39+39)$, полная длина по задним граням открылков устоев составляет 1555,23 м. Полная ширина пролетного строения переменная 30,26...31,86 м. Класс сооружения принят КС-3 в соответствии с ГОСТ Р 54257-2010 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения и требования», т.к. длина пролета вантового моста превышает 200 м. ответственности сооружения для данного класса повышенный, коэффициент надежности по ответственности составляет 1,1.

Таблица 8 – Основные технические параметры центрального моста через р. Обь в г. Новосибирск

Параметр	Значение
----------	----------

Схема моста, м	$(42+60+2 \times 72+60) + (77,2+3 \times 110+2 \times 126+116,8) + (229,03+102+48) + (39+39)$
Полная длина моста, м	1555,23
Габарит проезжей части моста	Г- (12,75...13,35+3,68+12,75...13,35)
Количество полос движения	6
Ширина моста, м	30,26...31,86
Класс судоходства	III
Судоходный габарит	2x(120x13,5)
Количество опор	18
Высота пилона, м	114.409 м
Расчетные нагрузки	A14, H14
Габарит пересекаемой подъездной дороги к ЛОС и ТП в пролете 1-1...1-2, м	Г-4,5 м, Н=4,5 м
Габарит путепровода в створе Красного проспекта в пролете 1-14...1-15, м	Г-31,5 м, Н=5,0 м

Со стороны правого берега на подходе к русловой части мостового перехода устраивается трех-пролетное вантовое пролетное строение по схеме 229,03+102+48 с одним пилоном. Балка жесткости основного пролета длиной 229,03 м выполнена металлической с ортотропной плитой. В поперечном сечении балка жесткости состоит из одной коробчатой главной балки на всю ширину пролетного строения с нижней и верхней ортотропными плитами. Главная балка разделена стенками на три отсека.

Опора вантового участка 1-14 – пилон (Рисунок 73 –). Пилон выполнен в виде двух железобетонных стоек Т-образного сечения, объединенных нижней железобетонной перемычкой прямоугольного сечения под пролетным строением и верхней металлической перемычкой прямоугольного сечения под зоной установки анкерных устройств вант (сталь 15ХСНД-2 и 10ХСНД-2). Металлическая перемычка объединена с железобетонными стойками через закладные детали. Фундаменты стоек опоры 1-14 отдельные выполнены на буронабивных сваях диаметром 1,5 м длиной от 6,3 до 20,8 м. Сваи по верху объединены монолитными железобетонными ростверками высотой 5,0 м. Стойки пилона имеют

технологическую шахту на всю высоту пилона для обслуживания вантовой системы. Высота пилона составляет 114,409 м.

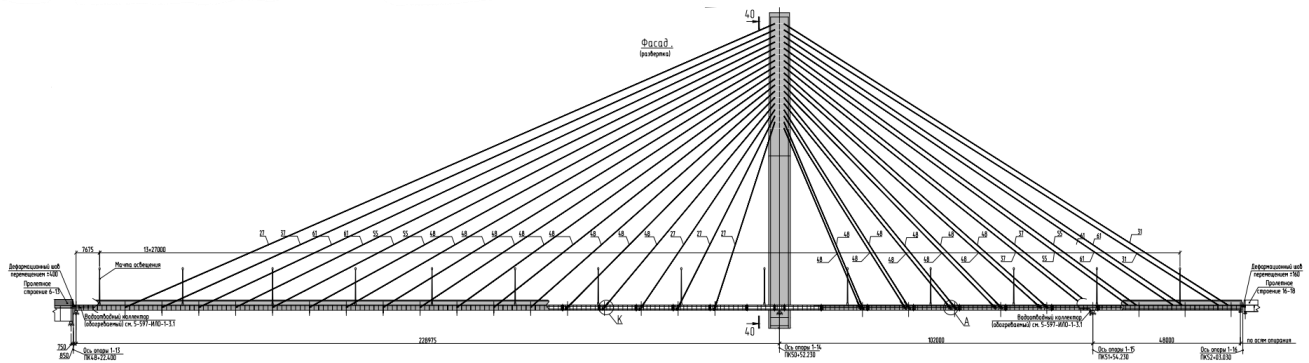


Рисунок 70 – Общий вид вантового моста через р. Обь в г. Новосибирск



Рисунок 71 – Фотография пилона во время бетонирования

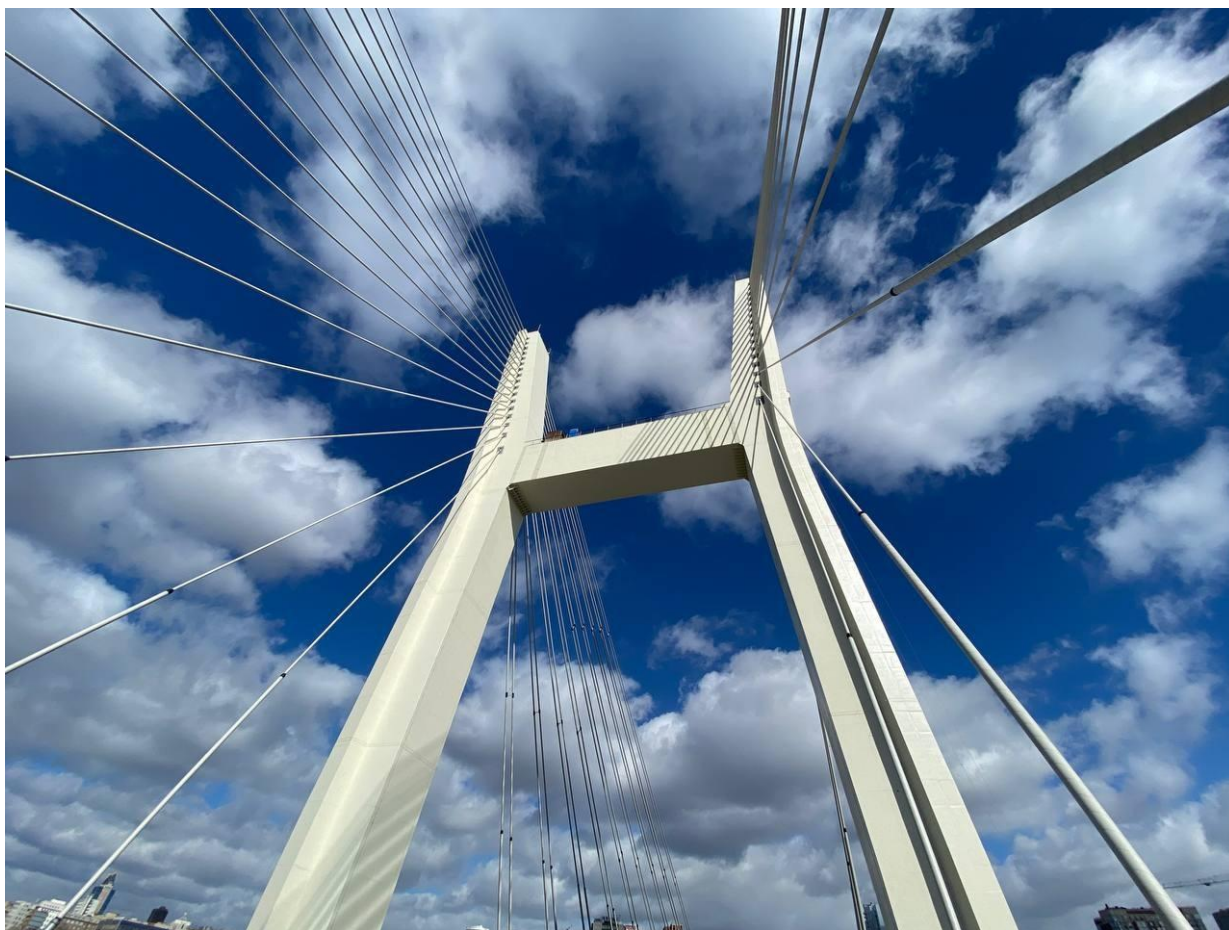


Рисунок 72 – Фотография пилонa после натяжения вант

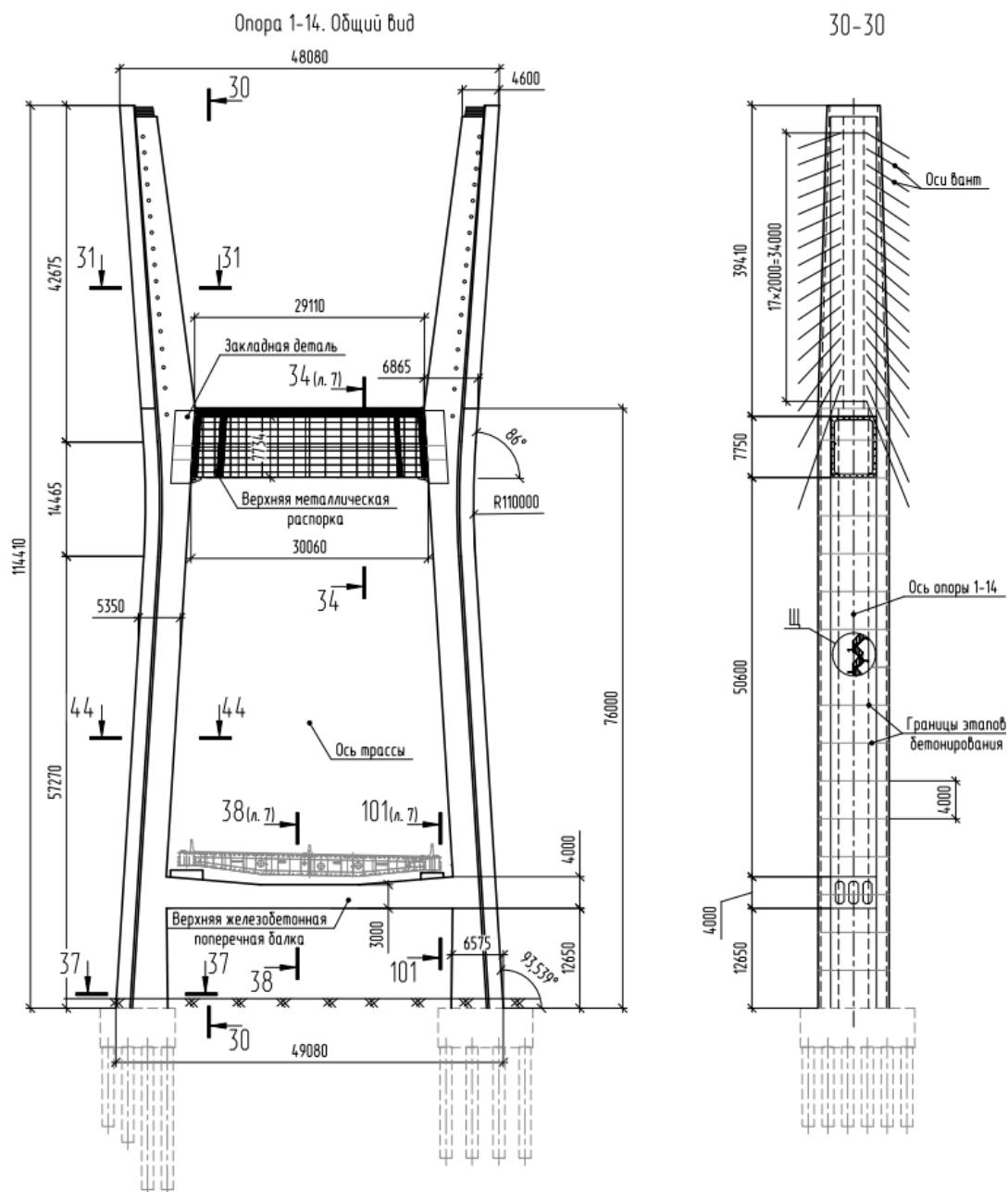


Рисунок 73 – Общий вид пилона

При проектировании данного сооружения в составе проектной и рабочей документации были проведены расчеты по требованиям нормативных документов [16, 116].

Расчет по методу предельного равновесия реализован в программной среде MS Excel в соответствии с СП 35.13330.2011. При этом использовалось условное сечение двутавровой формы, эквивалентное исходному Т-образному сечению пилона по площади и моменту инерции (Рисунок 75 –). Такой подход обеспечивает

простоту вычислений и скорость реализации, однако не учитывает реальное перераспределение напряжений в несимметричных и сложных по геометрии сечениях. При действии изгибающего момента поперек моста применение условного двутаврового сечения является допустимым приближением, тогда как при действии момента вдоль оси моста вследствие отсутствия симметрии корректность такого приведения существенно снижается.

Нелинейная деформационная модель рассматривалась в итерационной постановке и была реализована в двух программных средах: в MS Excel с использованием модуля Solver и в программном комплексе Midas Civil (модуль GSD). В обоих случаях положение нейтральной оси определялось методом последовательных приближений до выполнения условий равновесия, что обеспечивало учет реальной геометрии сечения и нелинейной работы материалов (Рисунок 76 –).

Сравнение результатов расчетов (Рисунок 77 –) показало, что при использовании метода предельного равновесия получаются завышенные значения предельных изгибающих моментов по сравнению с НДМ. Для рассматриваемого сечения различие составляет порядка 28% при одинаковом армировании, что обусловлено применением условного сечения, геометрия которого лишь приближенно соответствует исходной. Вследствие этого формируется избыточный запас прочности, величина которого зависит от степени расхождения геометрических характеристик условного и реального сечений.

В отличие от метода предельного равновесия, нелинейная деформационная модель позволяет учитывать фактическую форму поперечного сечения, нелинейную работу бетона в сжатой зоне и изменение напряжений в арматуре в зависимости от уровня деформаций. Расчеты, выполненные в MS Excel и Midas Civil, демонстрируют высокую сходимость результатов, расхождение не превышает 1–2 %, что подтверждает корректность и устойчивость метода при реализации в различных программных средах.

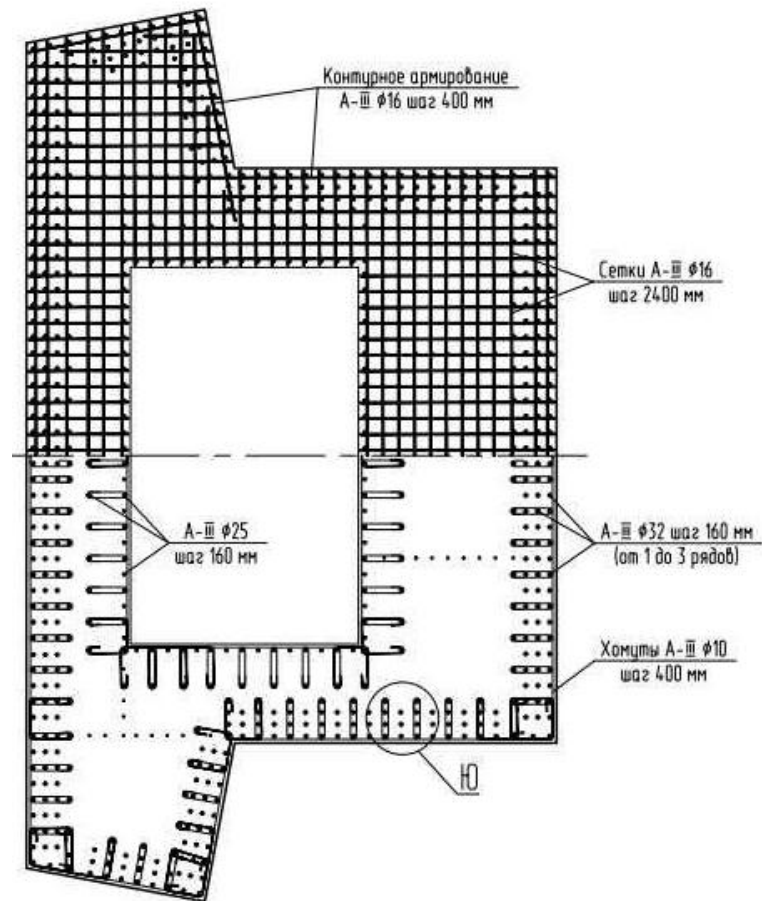


Рисунок 74 – Поперечное сечение стойки тела пилон

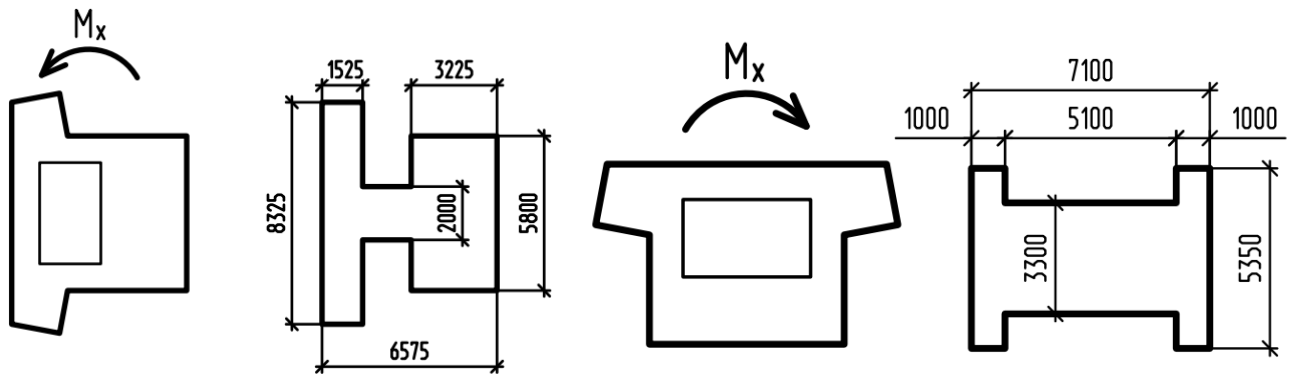


Рисунок 75 – Условное сечение при расчете поперек оси моста (слева) и вдоль оси моста (справа) при расчете по методу предельного равновесия

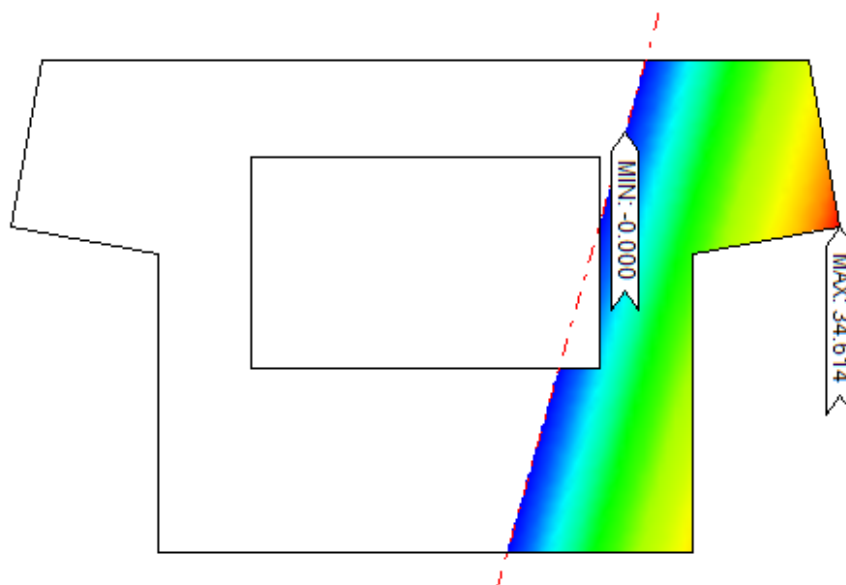


Рисунок 76 – Расчетное сечение в программном модуле GSD Midas Civil

Сравнение результатов расчетов, выполненных по методу предельного равновесия и по нелинейной деформационной модели, позволило выявить ключевые различия в оценке несущей способности.

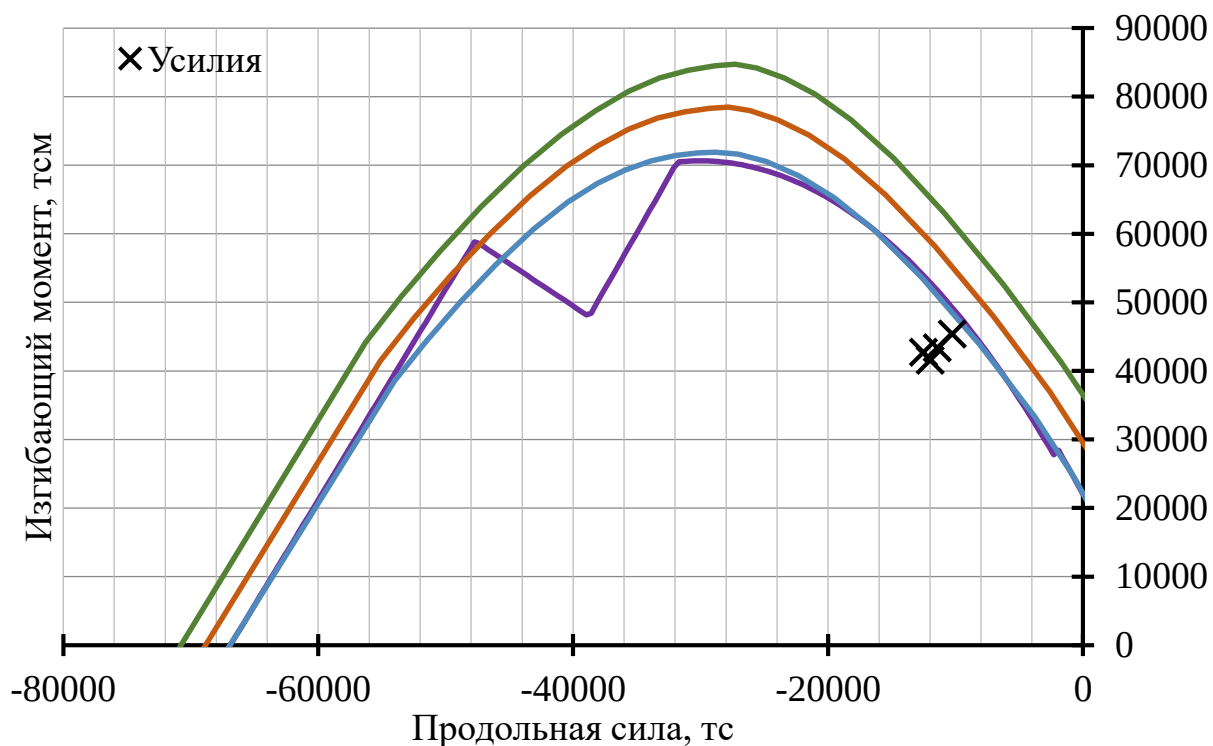


Рисунок 77 – Диаграммы предельных состояний поперечного сечения железобетонного тела пилон по разным методам расчета (Сверху вниз: по НДМ с тремя, двумя и одним рядом армирования, снизу – по методу предельного равновесия)

Таблица 9 – Результаты расчета железобетонного тела пилона по различным методикам

Характеристика	Запас прочности, %	Расход арматуры, т/п.м.	Экономия арматуры, %
Расчет условного двутаврового сечения по СП 35.13330.2011 с 3 рядами рабочей арматуры	13,86	2,450	-
Расчет по НДМ с 3 рядами рабочей арматуры	41,89	2,450	-
Расчет по НДМ с 2 рядами рабочей арматуры	27,06	2,319	5,34%
Расчет по НДМ с 1 рядом рабочей арматуры	11,90	2,175	11,23%

Анализ диаграмм предельных состояний (Рисунок 77 –) показывает, что для метода предельного равновесия характерна вогнутая форма границы в области внецентренного сжатия, тогда как при использовании НДМ она имеет плавное очертание, отражающее непрерывный характер перераспределения напряжений.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что применение нелинейной деформационной модели позволяет учитывать действительную геометрию сечения и нелинейный характер работы бетона и арматуры, что принципиально влияет на оценку несущей способности и требуемого армирования. Как следует из данных (Таблица 9 –), при переходе от расчета условного двутаврового сечения по СП 35.13330.2011 к расчету по НДМ при неизменном армировании (3 ряда) запас прочности возрастает с 13,86% до 41,89%. Это указывает на то, что в рамках метода предельного равновесия фактическая работа сечения учитывается упрощенно, некоторые характеристики сечения оказываются заниженными, вследствие чего несущая способность недооценивается, а требуемый расход арматуры оказывается завышенным.

Дальнейшее варьирование схемы армирования в рамках НДМ демонстрирует наличие значительного резерва несущей способности. При уменьшении количества рядов рабочей арматуры с трех до двух расход снижается

с 2,450 до 2,319 т/п.м. (на 5,34%), при этом запас прочности остается на уровне 27,06%, существенно превышающем аналогичный показатель для расчета по СП. При переходе к одному ряду рабочей арматуры расход дополнительно уменьшается до 2,175 т/п.м., что соответствует экономии 11,23%, а запас прочности составляет 11,90%, то есть остается сопоставимым с результатом расчета по нормативной методике (13,86%).

Анализ показывает, что использование НДМ позволяет более точно учитывать реальное напряженно-деформированное состояние сечения и выявлять скрытые резервы несущей способности. В свою очередь, метод условных приведенных-условных сечений, применяемый в рамках метода предельного равновесия, за счет принятых допущений формирует избыточный конструктивный запас, который проявляется в увеличенном расходе арматуры при сопоставимом уровне обеспеченности по несущей способности.

4.3.2. Применение разработанного алгоритма построения диаграмм предельных состояний без итерационных вычислений в задачах проектирования железобетонных опор мостов

В рамках настоящего диссертационного исследования рассмотрен пример практического применения разработанного алгоритма построения диаграмм предельных состояний без итерационных вычислений при решении задачи анализа и подбора продольного армирования железобетонной стойки промежуточной опоры мостового сооружения. Пример носит иллюстративный характер и служит для демонстрации структуры расчетной процедуры и особенностей интерпретации результатов в рамках нелинейной деформационной модели без итераций.

В качестве расчетного объекта рассматривался элемент железобетонной опоры участка высокоскоростной железнодорожной магистрали ВСЖМ-1 «Москва – Санкт-Петербург». Практическая апробация выполнялась специалистами АО «Институт «Стройпроект» в рамках разработки проектной документации. Выбор обусловлен характерным сочетанием значительных продольных сил и изгибающих

моментов, а также повышенными требованиями к обоснованности расчетных решений.

Геометрические характеристики, расчетные сочетания усилий и нормативные требования принимались в соответствии с СП 453.1325800.2019 [117] и приведены ранее в главе. Расчетная схема соответствовала внецентренно сжатому элементу при действии продольной силы и изгибающего момента в одной плоскости.

Инженерная задача заключалась в оценке несущей способности сечения и подборе продольного армирования при фиксированной геометрии и заданных нагрузках. В традиционной практике такие задачи решаются через последовательное уточнение армирования с повторными расчетами, что при использовании НДМ с итерационным поиском нейтральной оси приводит к необходимости многократного выполнения численного итерационного процесса.

Разработанный в диссертации алгоритм НДМ без итерационных вычислений основан на прямом формировании диаграмм предельных состояний по заданным деформационным состояниям. Это позволило выполнить анализ для всех расчетных сочетаний усилий без численного поиска положения нейтральной оси и без итерационного уточнения параметров.

Построенные диаграммы использовались для определения положения расчетных точек и анализа характера работы сечения в различных режимах. Такой подход обеспечивает интерпретацию подбора армирования как задачи анализа положения расчетных точек относительно предельных границ, а не как последовательности отдельных проверок.

Следует подчеркнуть, что в данном подразделе не рассматривается оценка вычислительной эффективности метода; пример используется исключительно для демонстрации его применимости в реальной проектной задаче и методических особенностей результатов.

Дополнительно проверена возможность интеграции алгоритма в цифровую проектную среду. В качестве источника исходных данных использовалась параметрическая модель железобетонной стойки, сформированная в NanoCAD

ВІМ Строительство [118]. Геометрические параметры были экспортированы в табличный формат и использованы как входные данные расчетного модуля.

Полученные результаты подтвердили корректность обработки параметров и устойчивость алгоритма при автоматизированном считывании данных.

В целом рассмотренный пример подтверждает методическую состоятельность разработанного алгоритма НДМ без итерационных вычислений и его применимость к анализу и проектированию железобетонных опор мостовых сооружений. При этом он не заменяет нормативные методы расчета, а дополняет их, обеспечивая формализованное построение диаграмм предельных состояний и расширяя возможности инженерного анализа.

4.3.3. Применение критерия границы сжатия при оценке возможности снижения материалоемкости железобетонных опор мостов

При проектировании железобетонных опор мостовых сооружений важное практическое значение имеет корректная идентификация характера работы продольной арматуры, в частности определение условий, при которых арматура условно растянутой грани фактически остается в зоне сжатия. Данный вопрос имеет и нормативное значение, поскольку влияет на применимость отдельных положений действующих норм, включая п. 7.163 СП 35.13330, допускающий сокращение длины стыковки ненапрягаемой арматуры при отсутствии растягивающих усилий.

В рамках традиционных подходов оценка работы арматуры выполняется различными способами. При использовании нелинейной деформационной модели с итерационным расчетом она определяется непосредственно по рассчитанным деформациям и напряжениям, что физически корректно, но требует полного повторного расчета для каждого сочетания нагрузок и существенно усложняет многовариантный анализ.

В методе предельного равновесия напряжения в арматуре, как правило, не определяются напрямую, а характер работы сечения оценивается косвенно – по

положению равнодействующей относительно ядра сечения. При этом традиционно считается, что при превышении эксцентриситетом ядрового расстояния возникает растяжение у соответствующей грани, а при меньших значениях сечение работает в сжатии.

Однако, как показано в главе 2 и подтверждено численным экспериментом главы 4, такая геометрическая интерпретация не является универсально корректной. В слабоармированных сечениях фактическое напряженно-деформированное состояние зависит также от характеристик бетона и арматуры и их реального расположения, поэтому возможны случаи, когда при эксцентриситете, не превышающем ядровое расстояние, арматура уже работает на растяжение. Следовательно, использование ядрового расстояния как единственного критерия может приводить к методически некорректным выводам.

Разработанный в диссертации критерий границы между областями полного и частичного сжатия основан на положении нейтральной оси относительно рабочей арматуры в пространстве диаграмм предельных состояний. Это позволяет перейти от геометрической интерпретации к деформационно-обоснованному критерию, сохраняя при этом вычислительную простоту и исключая необходимость выполнения дополнительных итерационных расчетов.

Принципиально важно, что новизна подхода заключается не в определении факта растяжения или сжатия арматуры как такового, а в формализации этого определения в рамках диаграмм предельных состояний. Это обеспечивает однозначную идентификацию расчетных режимов для всего множества сочетаний усилий без выполнения дополнительных расчетов.

Практическая применимость критерия продемонстрирована на примере расчета железобетонной стойки промежуточной опоры ИССО «Эстакада основного хода Э108» в составе второго этапа Широтной магистрали скоростного движения с мостом через р. Неву. Расчет выполнялся с использованием метода предельного равновесия и нелинейной деформационной модели без итерационных процедур.

На основе диаграммы предельных состояний (Рисунок 81 –) установлено, что при всех расчетных сочетаниях нагрузок арматура нижней зоны находится в состоянии сжатия. Вывод получен непосредственно из положения характерных точек диаграммы и положения нейтральной оси, без дополнительных итерационных расчетов для отдельных сочетаний усилий.

Данный результат позволил обоснованно рассмотреть применение п. 7.163 СП 35.13330 в части сокращения длины стыковки арматуры при отсутствии растягивающих напряжений. В рамках проектного решения было исключено вертикальное разнесение стыков, что увеличило длину отдельных стыковочных участков (Рисунок 80 –).

Сравнение вариантов показало снижение расхода арматуры с 186,43 до 184,12 кг/м³. Эта разница не рассматривается как критерий эффективности метода, а лишь иллюстрирует отсутствие избыточного армирования при использовании предлагаемого критерия без снижения надежности.

В целом пример подтверждает, что использование диаграмм предельных состояний совместно с разработанным критерием границы сжатия обеспечивает более строгую и деформационно-обоснованную интерпретацию работы сечения по сравнению с геометрическими критериями, сохраняя нормативную применимость и методическую прозрачность расчета.

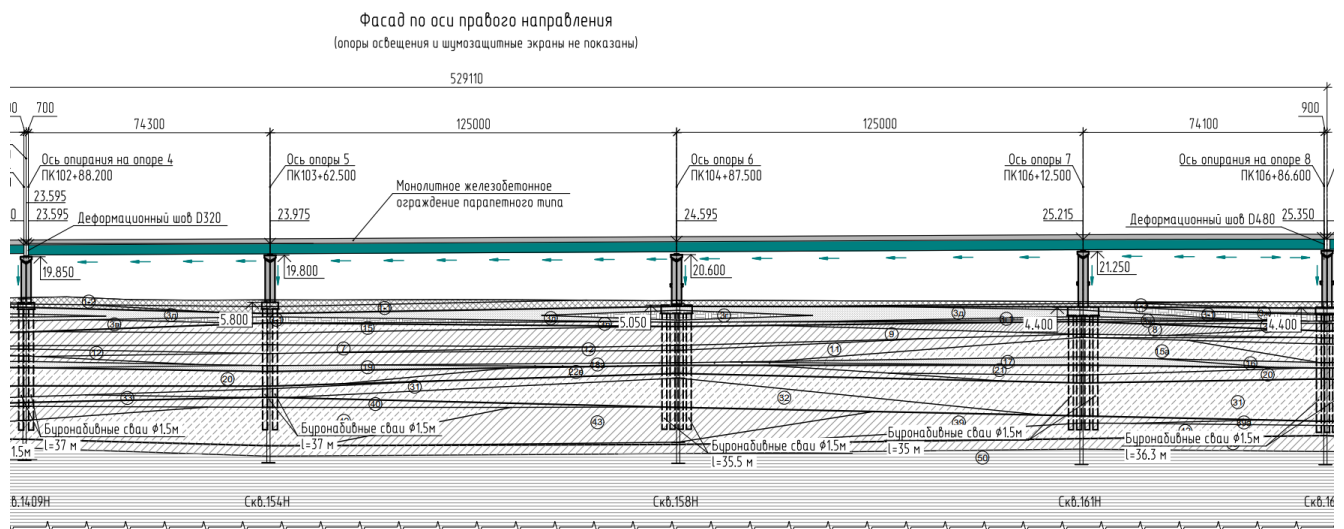
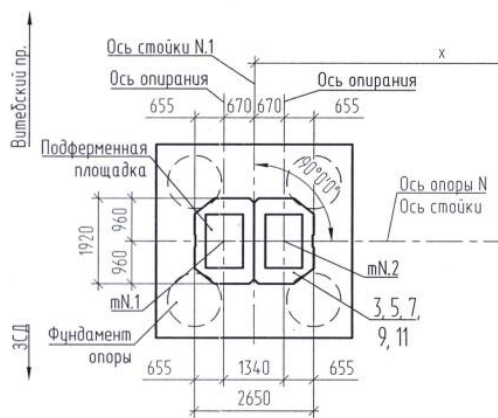


Рисунок 78 – Общий эстакады основного хода Э108



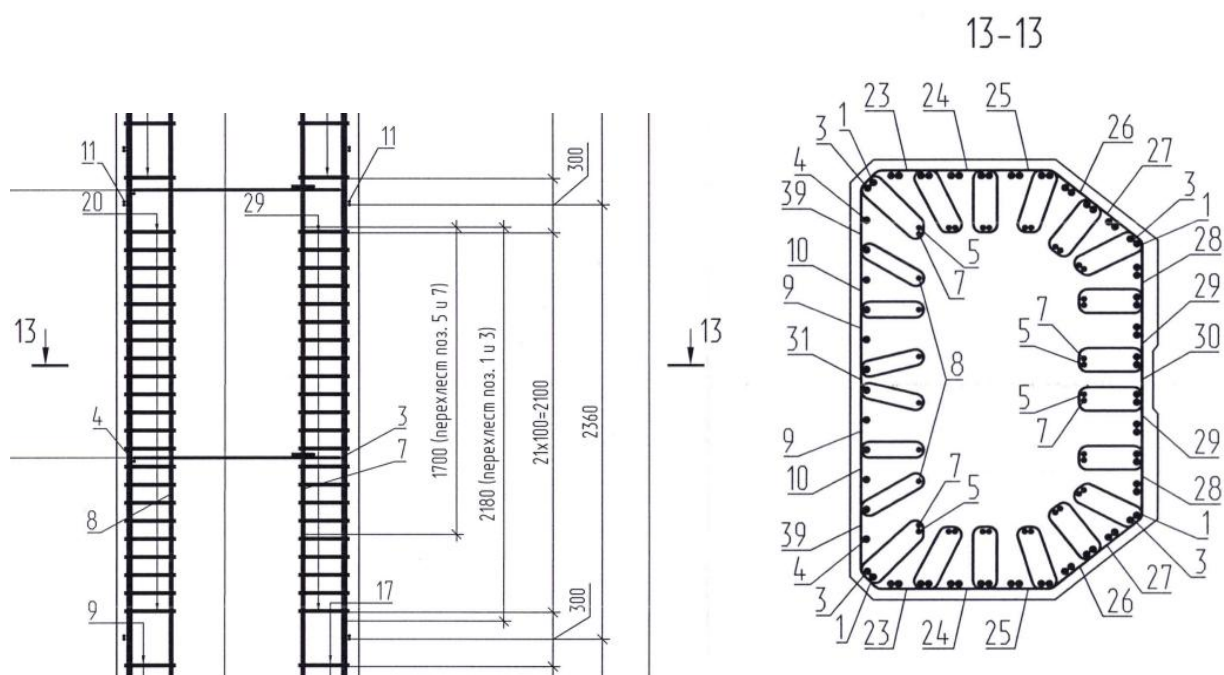


Рисунок 80 – Принципиальная схема армирования и стыковки арматуры

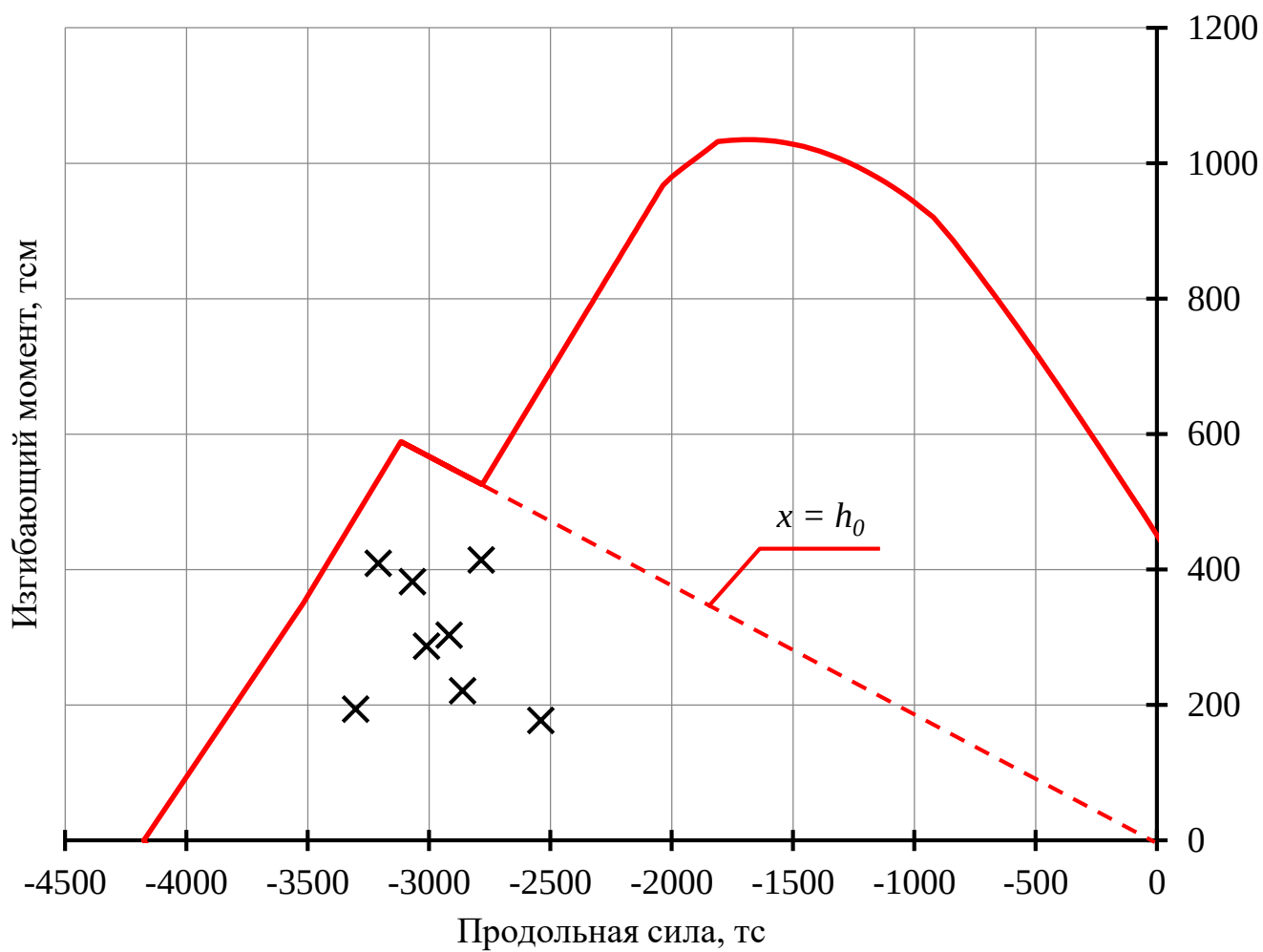


Рисунок 81 – Диаграмма предельных состояний поперечного сечения железобетонной стойки тела опоры

4.4. Выводы по четвертой главе

В четвертой главе выполнена численная верификация разработанного алгоритма построения диаграмм предельных состояний железобетонных элементов на основе нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений и оценена его практическая применимость в задачах проектирования и анализа железобетонных конструкций.

Установлено, что предложенный деформационный критерий границы сжатия сечения, основанный на отсутствии растягивающих напряжений в арматуре, обеспечивает устойчивую идентификацию переходных режимов работы сечения. Сопоставление с результатами конечно-элементного моделирования в Midas FEA NX показало расхождение не более 5–10 % по эксцентриситету, что подтверждает корректность критерия.

Показано, что диаграммы предельных состояний, полученные по разработанному алгоритму, в целом согласуются с результатами итерационной нелинейной деформационной модели и методом предельного равновесия. Наибольшие различия наблюдаются в переходных зонах работы сечения, где традиционные методы чувствительны к допущениям, тогда как предложенный подход сохраняет физическую интерпретируемость результатов.

Установлено принципиальное отличие вычислительной природы сравниваемых методов. Для итерационных реализаций характерен рост вычислительных затрат при увеличении числа конечных элементов, тогда как в разработанном алгоритме время расчета определяется только числом деформационных состояний и не зависит от дискретизации сечения. Экспериментально показано, что время построения одной диаграммы составляет порядка 0,05 с против до 21 с для итерационного расчета, что особенно важно при многовариантных расчетах.

Практическая значимость подтверждена на примере анализа железобетонной стойки промежуточной опоры, где показана возможность интерактивного подбора армирования и снижение трудоемкости проектирования более чем в 2 раза.

Дополнительно установлена возможность применения критерия для анализа продольной работы элемента и уточнения границ зоны полного сжатия, что позволило обосновать оптимизацию решений по стыковке арматуры.

Научная новизна заключается в разработке и верификации деформационного критерия границы сжатия в рамках диаграмм предельных состояний и формализации нелинейной деформационной модели в виде алгоритма без итерационного решения уравнений равновесия. Также установлены закономерности масштабирования вычислительных затрат и независимость вычислительной сложности от степени дискретизации.

Теоретическая значимость состоит в развитии нелинейной деформационной теории железобетона в части уточнения условий перехода сечения в предельные состояния и формализации связи между деформационным состоянием и диаграммой предельных состояний без итерационных процедур.

Практическая значимость определяется возможностью применения алгоритма в расчетах и оптимизации железобетонных мостовых конструкций, а также его интеграцией в цифровые проектные среды, обеспечивающей повышение вычислительной эффективности при сохранении нормативной корректности.

Основные выводы

1. В рамках анализа нормативных документов, а также отечественных и зарубежных исследований по расчету железобетонных конструкций установлено, что применение нелинейной деформационной модели при учете ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона сопровождается рядом методических противоречий. Показано, что использование геометрического ограничения, принятого в методе предельного равновесия, в рамках деформационной модели приводит к формированию области некорректных расчетных решений и не обеспечивает согласованности параметров напряженно-деформированного состояния сечения;

2. Разработана деформационно-прочностная модель учета ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, основанная на переходе от геометрического условия к его заданию через параметры напряженно-деформированного состояния. Установлено, что предложенный подход обеспечивает корректное включение ограничения в расчетную схему нелинейной деформационной модели без нарушения ее теоретических предпосылок;

3. Впервые установлены количественные критерии начала и окончания действия ограничения относительной высоты сжатой зоны бетона, выраженные через деформационные параметры сечения. Показано, что введение данных критериев позволяет формализовать область применимости ограничения и устранить неопределенность при переходе между различными режимами работы железобетонного элемента;

4. Получена степенная зависимость коэффициента понижения расчетного сопротивления бетона от деформаций растянутой арматуры, отражающая взаимосвязь параметров напряженно-деформированного состояния сечения. Установлено, что использование данной зависимости обеспечивает возможность аналитического учета ограничения без применения итерационных процедур и повышает вычислительную эффективность расчетов;

5. Разработан способ построения диаграмм предельных состояний железобетонных элементов на основе нелинейной деформационной модели без итерационных вычислений. Показано, что предложенный алгоритм учитывает деформационно-прочностную модель, критерии ее применения и изменение расчетного сопротивления бетона, обеспечивая согласование результатов с методом предельного равновесия при корректном воспроизведении предельных состояний;

6. Выполнена численная верификация разработанного подхода на основе конечно-элементного моделирования. Установлено, что предложенные методические положения обеспечивают адекватное воспроизведение напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов при совместном действии продольной силы и изгибающего момента, а также согласуются с результатами итерационных методов расчета;

7. Показано, что разработанный алгоритм обеспечивает существенное повышение вычислительной эффективности по сравнению с итерационными методами. Установлено, что время расчета определяется числом рассматриваемых деформационных состояний и не зависит от сложности расчетной схемы, что позволяет эффективно применять его при многовариантных расчетах и оптимизации конструктивных решений;

8. Подтверждена практическая применимость разработанной методики на примерах расчета железобетонных опор мостовых сооружений. Установлено, что предложенный подход позволяет повысить достоверность построения диаграмм предельных состояний, обеспечить физическую интерпретируемость результатов и снизить трудоемкость инженерных расчетов.

Перспективы дальнейшей разработки темы:

– расширение области применения предложенного подхода на составные и пространственные конструкции с учетом сложных условий нагружения и работы материалов;

- развитие методов учета длительных и циклических воздействий в рамках деформационной модели с использованием полученных зависимостей;
- интеграция разработанного алгоритма в программные комплексы инженерного анализа для автоматизации многовариантных расчетов и оптимизации конструктивных решений.

Список литературы

1. Колмогоров А.Г., Плевков В.С. Расчет железобетонных конструкций по российским и зарубежным нормам. – М.: АСВ, 2014. – 512 с.
2. Беглов, А. Д.; Санжаровский, Р. С. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и евростандарты. – М. : АСВ, 2006. – 222 с.
3. Алмазов, В. О. Проектирование железобетонных конструкций по Евронормам. – М. : АСВ, 2011. – 216 с.
4. Биби Э. В., Нараянан Р. С. Руководство для проектировщиков к Еврокоду 2: проектирование железобетонных конструкций // МГСУ, 2013. – 291 с.
5. Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н. Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. – М.: АСВ, 2011. – 352 с.
6. Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций: учебник / 2-е изд., доп. – М.: Машиностроение, 2002. – 435 с.
7. Яковлев С.К., Мысляева Я.И. Расчет железобетонных конструкций по Еврокоду EN 1992. В 2 ч. Ч. 1. – М.: МГСУ, 2015. – 204 с.
8. Филиппов, В. А.; Тошин, Д. С. Основы расчёта железобетона: электронное учебное пособие. – Тольятти: Тольяттинский государственный университет, 2017. – 216 с. – ISBN 978-5-8259-1131-1.
9. НиТУ 123-55. Нормы и технические условия проектирования бетонных и железобетонных конструкций. – Утв. Госкомитетом Совета Министров СССР по делам строительства 07.03.1955. – Введ. в действие с 01.08.1955. – Взамен НиТУ 3-49 и НиТУ 4-49.
10. СН 10-57. Инструкция по проектированию предварительно напряжённых железобетонных конструкций. – Москва: Госстрой СССР, 1958. – 87 с.
11. СНиП II-Б.1-62. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. – Москва: Госстрой СССР, 1970. – 80 с.
12. СНиП II-21-75. Бетонные и железобетонные конструкции. – Москва: Госстрой СССР, 1976. – 108 с.

13. СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. – М.: ГУП НИИ НСБ Госстроя России, 2003. – 24 с.
14. СНиП 2.03.01-84* Бетонные и железобетонные конструкции. – М.: НИИЖБ Госстрой СССР, 1985. – 87 с.
15. CEB-FIP Model Code 90. Design Code. – London: Thomas Telford Services Ltd., 1998. – 462 с.
16. СП 35.13330.2011. Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*. – Москва: Минстрой России, 2011. – 404 с.
17. Маркова О.М. Диаграммный метод в расчетах усиленных железобетонных элементов // Научный журнал. – 2017. – № 7(20). – С. 17–19. – EDN YZIREX.
18. Болдышев, А.М. Прочность нормальных сечений железобетонных элементов [текст] / А.М. Болдышев, В.С. Плевков // Томск: ЦНТИ, 1989. -236 с.
19. Боль Д.В. О диаграммах предельных состояний при расчете стержневых железобетонных элементов мостовых сооружений // Инженерное образование XXI века: сб. трудов Междунар. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург – СПб.: ПГУПС, 2024. – С. 24–30. – EDN PWFFFM.
20. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу равновесия. – М.: Госстройиздат, 1949. – 168 с.
21. Гвоздев А. А. Расчёт несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып. 1. Сущность метода и его обоснование // М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
22. Келдыш В. М., Гвоздев А. А. Введение в теорию расчёта конструкций по предельному состоянию: Вып. 1. – М., 1948. – 280 с.
23. Руководство по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1975. – 192 с.
24. Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н. Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. – М.: АСВ, 2011. – 352 с.

25. Плевков В. С. Прочность и трещиностойкость эксплуатируемых железобетонных конструкций зданий и сооружений при статическом и кратковременном динамическом нагружении: дис. ... д-ра техн. наук. – Томск, 2003. – 536 с..

26. Плевков В.С., Балдин И.В., Плевков Р.А. Особенности расчета прочности нормальных сечений железобетонных изгибаемых элементов с использованием областей относительного сопротивления // Строительство и реконструкция. – 2017. – № 1 (69). – С. 56–66.

27. Попов В.М., Плюснин М.Г. Влияние деформационных характеристик бетона на несущую способность изгибаемых железобетонных элементов // Промышленное и гражданское строительство. – 2015. – № 8. – С. 5–10.

28. Типовые строительные конструкции, изделия и узлы. Серия 3.500.1-1.93 «Сваи забивные железобетонные цельные сплошного квадратного сечения для опор мостов». Выпуск 0. Указания по применению. – М.: Ленгипротрансмост, 2006. – 48 с.

29. Mast, Robert F. Unified Design Provision for Reinforced and Prestressed Concrete Members // ACI Structural Journal. – Vol. 89, No. 2. – March–April 1992. – P. 185–199.

30. Bianchini, A. C.; Woods, R. E.; Kesler, C. E. Effect of Floor Concrete Strength on Column Strength // ACI Journal, Proceedings. – Vol. 56, No. 11. – May 1960. – P. 1149–1169.

31. Ospina, C. E.; Alexander, S. D. B. Transmission of Interior Concrete Column Loads through Floors // ASCE Journal of Structural Engineering. – Vol. 124, No. 6. – June 1998. – P. 630–638.

32. Pfister, J. F. Influence of Ties on the Behavior of Reinforced Concrete Columns // ACI Journal, Proceedings. – Vol. 61, No. 5. – May 1964. – P. 521–537.

33. Hudson, Fred M. Reinforced Concrete Columns: Effect of Lateral Tie Spacing on Ultimate Strength // ACI Special Publication SP-13. – Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 1966. – P. 235–244.

34. ACI Committee 340. Design Handbook. Volume 2 – Columns (ACI 340.2R-91). – SP-17A(90). – Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 1991. – 250 p.

35. Bresler, B.; Gilbert, P. H. Tie Requirements for Reinforced Concrete Columns // ACI Journal. – Vol. 58, No. 5. – November 1961. – P. 555–570.

36. ACI Committee 363. State-of-the-Art Report on High-Strength Concrete (ACI 363-R-92). – ACI Manual of Concrete Practice. – Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 1992.

37. Warner, Robert F.; Rangan, B. V.; Hall, A. S. Reinforced Concrete. – Sydney: Pitman Australia, 1976. – 475 p.

38. Brøndum-Nielsen, Troels. Ultimate Limit States of Cracked Arbitrary Concrete Sections under Axial Load and Biaxial Loading // Concrete International: Design and Construction. – Vol. 4, No. 11. – November 1982. – P. 51–55.

39. Bresler, B. Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending // ACI Journal, Proceedings. – Vol. 57, No. 5. – November 1960. – P. 481–490; Discussion: P. 1621–1638.

40. Gouwens, A. J. Biaxial Bending Simplified // Reinforced Concrete Columns. – SP-50. – Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 1975. – P. 233–261.

41. MacGregor, James G. Simple Design Procedures for Concrete Columns // Introductory Report, Symposium on Design and Safety of Reinforced Concrete Compression Members, Reports of the Working Commissions, Vol. 15. – Zurich. : International Association of Bridge and Structural Engineering, April 1973. – P. 23–49.

42. Hognestad, E. A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members. – Bulletin 399. – Urbana, IL: University of Illinois Engineering Experiment Station, June 1951. – 128 p.

43. Koenen M. Für die Berechnung der Stärke der Monierschen Cement-platten // Zentralblatt der Bauverwaltung. – 1886. – No. 47. – 462 p.

44. ACI Committee 105. Reinforced Concrete Column Investigation // ACI Journal, Proceedings. – Vol. 26, No. 29. – September 1932. – P. 53–56.

45. ACI-ASCE Committee 327. Report on Ultimate Strength Design // Proceedings ASCE. – Vol. 81. – October 1955. – Paper 809; также: ACI Journal, Proceedings. – Vol. 2, No. 7. – January 1956. – P. 505–524.

46. Wight, James K.; Richart, F. E., Jr.; MacGregor, James G. Reinforced Concrete: Mechanics and Design. – 6th ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2012. – Rev. ed. of: Reinforced Concrete / MacGregor, James G.; Wight, James K. – 5th ed., 2009.

47. ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318-19). – Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 2019. – 623 p.

48. Гаджиев М.А., Алаева С.М. Оценка точности упрощенных диаграмм Евростандартов при исследовании несущей способности железобетонных колонн // Вестник Азербайджанской инженерной академии. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 65–79.

49. Whitney, C. S. Design of Reinforced Concrete Members Under Flexure or Combined Flexure and Direct Compression // ACI Journal Proceedings. – March–April 1937. – Vol. 8, No. 4. – P. 483–498.

50. Paul H. Kaar; Hanson N. W.; Capell H. T. Stress–Strain Characteristics of High-Strength Concrete // Proceedings of the Douglas McHenry International Symposium on Concrete and Concrete Structures (ACI Publication SP-55). – Detroit: American Concrete Institute, 1978. – P. 161-185.

51. Hassan, B.; Hamid, R. R. Statistical analysis of the concrete rectangular stress block parameters // Proceedings of the International Conference on Computational Technologies in Concrete Structures (CTCS13). – Jeju, Korea, 2013.

52. Ziehl, P. H.; Cloyd, J. E.; Kreger, Michael E. Investigation of Minimum Longitudinal Reinforcements for Concrete Columns Using Present-Day Construction Materials // ACI Structural Journal. – Vol. 101, No. 2. – March–April 2004. – P. 165–175.

53. Furlong, Richard W.; Hsu, C.-T. T.; Mirza, Sher A. Analysis and Design of Concrete Columns for Biaxial Bending – Overview // *ACI Structural Journal*. – Vol. 101, No. 3. – May–June 2004. – P. 413–423.
54. Johnson, Paul. P-M Characteristics of Reinforced Concrete Sections. – Clemson University, 2008. – (All Theses, Paper 511).
55. Bleyer, J.; Pham, D. T.; de Buhan, P. Numerical Yield Design Analysis of High-Rise Reinforced Concrete Walls in Fire Conditions // In: *Advances in Direct Methods for Materials and Structures*. – Springer, 2018. – P. 143–161. – DOI: 10.1007/978-3-319-59810-.
56. Shet, S.; Shetty, S.; Shetty, S. Analysis of Pu-Mu Interaction Diagram of C-Shaped Equal Legged RC Column Developed using ETABS and Analytical Method // *International Journal of Engineering & Technology*. – Vol. 7, No. 3.34. – 2018. – P. 835–839.
57. Bureau of Indian Standards. SP 16 (1980): Design Aids for Reinforced Concrete to IS 456:1978. – New Delhi: CED 2: Cement and Concrete, 1980.
58. Lee, Ho; Aschheim, Mark; Hernández-Montes, Enrique; Gil-Martín, Luisa. Optimum RC Column Reinforcement Considering Multiple Load Combinations // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – Vol. 39, No. 2. – 2009. – P. 153–170. – DOI: 10.1007/s00158-008-0318-4.
59. Ali, Shehroze; Ahmad, Junaid; Sheikh, M. Neaz; Yu, Tao; Hadi, Muhammad N. S. Analytical Load-Moment (P-M) Interaction Diagrams of GFRP Bar Reinforced Circular Geopolymer Concrete Columns // *Structures*. – Vol. 34. – 2021. – P. 2445–2454.
60. Eröz, Murat; White, Donald; Desroches, Reginald. Direct Analysis and Design of Steel Frames Accounting for Partially Restrained Column Base Conditions // *Journal of Structural Engineering (ASCE)*. – Vol. 134, No. 11. – November 2008. – P. 1693–1702.
61. Papadopoulou, K.; Gazetas, G. Eccentricity Effects on Bearing Capacity of Strip and Square Footings on Two-Layered Clay // *Geotechnical and Geological Engineering*. – 2019. – Vol. 37. – P. 4099–4120. – DOI: 10.1007/s10706-019-00896-z.

62. Fargier-Gabaldón, L. B. Simplified Footing Design with Interaction Diagrams // Practice Periodical on Structural Design and Construction. – 2023. – Vol. 28, No. 1. – DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000749.

63. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 (с изм. 1, 2).

64. Стебаков, Е. И. NormCAD: краткое руководство. – Реутов: ООО ЦРСАП «САПРОТОН», 2017. – 92 с.: ил.

65. ARBAT. Расчет элементов бетонных и железобетонных конструкций : руководство пользователя. – SCAD Soft, 2006. – 82 с.

66. Белокопытова, И. А.; Криксунов, Э. З.; Микитаренко, М. А.; Перельмутер, М. А. «Арбат» – программа для расчета железобетонных строительных конструкций // Архитектура и строительство. CADmaster. – 2001. – № 4 (9). – С. 59–63.

67. <https://lira-soft.com/wiki/notes/55-raschyet-zhelezobetonnykh-kolonn/>
Р.ж.к.[.р.–.Р.д.

68. Болдышев, А. М.; Плевков, В. С. Прочность нормальных сечений железобетонных элементов // В помощь проектировщику. – 1990.

69. Interaction Diagram for a Tied Square Concrete Column [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://structurepoint.org/> (дата обращения: 02.02.2025).

70. Применение модуля GSD: проектировщик сечений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://midasoft.ru/blog/primenenie-modulya-gsd/> (дата обращения: 02.02.2025).

71. Применение модуля GSD: проектировщик сечений // URL: <https://midasoft.ru/blog/primenenie-modulya-gsd/> (дата обращения: 02.02.2025). [Электронный ресурс]

72. What is a Column Interaction Curve [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://skyciv.com/docs/tutorials/reinforced-concrete-tutorials/what-is-a-column-interaction-curve/> (дата обращения: 02.02.2025).

73. Interaction diagram [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://wiki.csiamerica.com/display/sap2000/Interaction+diagram> (дата обращения: 02.02.2025).

74. Диаграммы взаимодействия моментов ACI 318-19 в RFEM 6 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.dlupal.com/ru/podderzhka-i-obuchenije/podderzhka/baza-znaniy/001814> (дата обращения: 02.02.2025).

75. Диаграммы взаимодействия моментов ACI 318-19 в RFEM 6 [Электронный ресурс]. – 2024. – Режим доступа: <https://www.dlupal.com/ru/podderzhka-i-obuchenije/podderzhka/baza-znaniy/001814> (дата обращения: 02.02.2025). [Электронный ресурс]

76. Майоров В. И. Расчет граничных значений относительной высоты сжатой зоны ξ_R и процента армирования μ_R по деформационной модели // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2008. №3.

77. Вахненко П. Ф. Граничная высота сжатой зоны при сложных деформациях // В кн.: Бетон и железобетон. – 1990. – № 11. – С. 27–28.

78. Расчет железобетонных конструкций при сложных деформациях / Под ред. М. С. Торяника. – М.: Стройиздат. – 1974. – 297 с.

79. Овчинников И.И., Майстренко И.Ю., Овчинников И.Г., Кокодеев А.В. Аварии и разрушения мостовых сооружений, анализ из причин. Часть 1 // Транспортные сооружения, 2017 №4.

80. Овчинников И.И., Майстренко И.Ю., Овчинников И.Г., Кокодеев А.В. Аварии и разрушения мостовых сооружений, анализ из причин. Часть 2 // Транспортные сооружения, 2017 №4.

81. Овчинников И.И., Майстренко И.Ю., Овчинников И.Г., Кокодеев А.В. Аварии и разрушения мостовых сооружений, анализ из причин. Часть 3 // Транспортные сооружения, 2018 №5.

82. Гвоздев А. А., Дмитриев С. А. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций // М.: Стройиздат, 1978. – 272 с.

83. Плевков В.С., Балдин И.В., Невский А.В. К определению расчетных напряжений в стальной и углекомпозитной арматуре нормальных сечений

железобетонных элементов // Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2017. – № 1 (60). – С. 96–113.

84. E. H. Inelastic behaviour in tests of eccentrically loaded short reinforced concrete columns. – Bulletin 2. – Urbana, IL: University of Illinois, 1952.

85. Деформации внецентренно сжатых железобетонных элементов в стадии, близкой к разрушению // Теория железобетона. – М.: Стройиздат, 1972.

86. Рискинд Б.Я., Шорникова Г.И. Исследование работы сжатых железобетонных элементов с термически упрочненной арматурой // Железобетонные конструкции. – Челябинск, Уралниипромстройпроект, 1972.

87. Таль К.Э. О деформативности бетона при сжатии // Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов. – М.: Госстройиздат ЦНИИС, 1955.

88. Рахманов В.А., Семин А.И., Розовский Е.Л. и др. Исследовать динамическую прочность и долговечность строительных материалов и конструкций: отчет о НИР, № ГР 01.85.0011305. – М.: ВНИИ Железобетон, 1985. – Кн. 1 – 96 с.; Кн. 2 – 172 с.

89. Болдышев, А. М.; Плевков, В. С. Прочность нормальных сечений железобетонных элементов. – Томск : Изд-во Том. ЦНТИ, 1989. – 236 с.

90. Сапожников Н.Я. Об оценке уровня надежности изгибаемых железобетонных конструкций по нормальным сечениям // Бетон и железобетон. – 1986. – № 7. – С. 40–42.

91. Чистяков Е.А. Основы теории, методы расчета и экспериментальные исследования несущей способности сжатых железобетонных элементов при статическом нагружении: автореф. дис. докт. техн. наук. – М., 1988. – 48 с.

92. Радайкин, О.В. Развитие теории диаграммного метода расчёта стержневых элементов из армированного бетона: дис.. докт. техн. наук: спец. 2.1.1 «Строительные конструкции, здания и сооружения». – Казань, 2023. – 471 с.

93. Донченко, О. М. Расчет внецентренно-сжатых железобетонных элементов по прочности нормальных сечений на основе нелинейной

деформационно-прочностной модели / О. М. Донченко, Л. А. Сулейманова, С. М. Есипов // Вестник евразийской науки. – 2023. – Т. 15. – №6.

94. И.Т. Мирсаяпов, Г.Т. Апхадзе Сопротивление сжатых с малым эксцентриситетом элементов с учетом фактической высоты сжатой зоны бетона // Вестник МГСУ. 2024. №9.

95. Сейфуллаев Х. К., Гараев А. Н. Приложение нелинейной деформационной модели к расчету изгибаемых железобетонных элементов // Sciences of Europe. 2018. №33-1 (33).

96. Старишко, И.Н. Расчёт несущей способности внецентренно сжатых железобетонных элементов при различных значениях эксцентриситетов приложения продольных сил / И.Н. Старишко // Строительная механика инженерных сооружений. – 2015. – № 5. – С. 21–33.

97. ГОСТ 27751–2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2019. – 27 с.

98. Боль, Д. В.; Богданов, Г. И. Составление диаграмм предельных состояний для расчета железобетонных элементов мостовых сооружений // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2024. – № 4 (76). – С. 114–122. – DOI: 10.36622/2541-7592.2024.76.4.010.

99. Мандриков А.П. Примеры расчета железобетонных конструкций: учеб. пособие для техникумов / ред. Г.А. Лебедева, Л.И. Круглова. – М.: Стройиздат, 1989. – 506 с.

100. Fédération internationale du béton (fib). Model Code 2010 – Final Draft. – Vol. 2. – Lausanne: fib Bulletin 66, 2013. – 370 p.

101. Соколов Б.С., Радакин О.В. Диаграммные методы расчёта железобетонных конструкций: краткий конспект лекций. – Казань: Изд-во Казан. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2014. – 65 с.

102. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. О диаграммной методике расчета деформаций стержневых элементов и ее частных случаях // Бетон и железобетон. – 2012. – Вып. 6. – С. 20–27.

103. Радайкин О.В. К построению диаграмм деформирования бетона при одноосном кратковременном растяжении/сжатии с применением деформационного критерия повреждаемости // Вестник гражданских инженеров. – 2017. – № 6. – С. 71–78.

104. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. К определению деформаций изгибаемых железобетонных элементов с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 2. – С. 11–20.

105. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Анализ и совершенствование криволинейных диаграмм деформирования бетона для расчёта железобетонных конструкций по деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – Вып. 1. – С. 28–30.

106. Киселёв Д. А. Разработка методов расчёта железобетонных балочных пролетных строений мостов: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.11. – Тамбов, 2015. – 21 с.

107. Смолянин А.Г. Математическое моделирование динамического разрушения балок и оболочек из железобетона при ударе: автореф. дис. канд. техн. наук. – М., 1985. – 24 с.

108. Методические рекомендации по применению СП 35.13330.2011 «Мосты и трубы»: Минстрой РФ. – М., 2017. – 170 с.

109. Ананян, А. М.; Горохов, М. Ю.; Злотников, А. Г.; Стешов, А. И. Определение предельно допустимых усилий в нормальных сечениях железобетонных элементов по критерию предельных относительных деформаций в бетоне и арматуре при расчете по прочности. // Автомобильные дороги. – 2021. – № 6. – С. 40–44.

110. Ананян, А. М.; Горохов, М. Ю.; Злотников, А. Г.; Стешов, А. И. О предельных деформациях железобетонного элемента полигонального поперечного сечения // Автомобильные дороги. – 2022. – № 10. – С. 200–204.

111. Боль, Д. В. Об упрощении диаграмм предельных состояний для расчета железобетонных элементов мостовых сооружений // Вестник Московского

автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ). – 2024. – № 4 (79). – С. 3–11. – EDN BEINKI.

112. Боль Д.В. О диаграммах предельных состояний при расчете стержневых железобетонных элементов мостовых сооружений // Инженерное образование XXI века: сб. трудов Междунар. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург – СПб.: ПГУПС, 2024. – С. 24–30. – EDN PWFFFM.

113. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024683071 «Диаграммы предельных состояний по условию прочности для стержневых железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения» / Д.В. Боль.

114. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2025666101 «Диаграммы предельных состояний по условию прочности и устойчивости для стержневых железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения» / Д.В. Боль.

115. Thorenfeldt E., Tomaszewicz A., Jensen J.J. Mechanical properties of high-strength concrete and applications in design // Proc. Symp. Utilization of High-Strength Concrete. Stavanger, Norway. Trondheim: Tapir, 1987.

116. СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия». Утв. приказом Минстроя РФ от 30.12.2016 № 1002/пр.

117. СП 453.1325800.2019 Свод правил. Сооружения искусственные высокоскоростных железнодорожных линий. ОКС 93.040: дата введения 2020-06-17.

118. Боль, Д. В. Интеграция BIM-модели стойки опоры с расчетом по диаграммам предельных состояний / Д. В. Боль, С. Е. Свинцов, А. П. Ледяев // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2025. – Т. 22, № 3. – С. 750-760. – DOI 10.20295/1815-588X-2025-3-750-760.

119. DIN 1045-1:2001. Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion. – Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2001. – 148 с.

120. Раевский А.Н., Мальков А.А. Анализ предельного состояния внецентренно-сжатых колонн из нелинейно-упругого материала по прочности и

устойчивости (применительно к железобетону) // Материалы Всероссийской XXXI научно-технической конференции. – Пенза, 2001.

121. Мальков, А.А. Несущая способность стержневых конструкций из бетона и железобетона по прочности, устойчивости и деформативности: дис.. канд. техн. наук: 05.23.01. – Пенза, 2001. – 158 с.

122. BAEL 91, revise 99. Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites. – Paris: Ministère de l'Équipement, 1999. – 246 с.

123. Балдин, С. В. Прочность и трещиностойкость железобетонных элементов при совместном действии изгибающих моментов, продольных и поперечных сил от статического и кратковременного динамического нагружения : автореферат дис.. д-ра техн. наук. – Томск, 2013.

124. Арбат. Расчет элементов бетонных и железобетонных конструкций : руководство пользователя. – М.: SCAD Soft, 2006. – 82 с.

125. Боль, Д. В. О составлении диаграмм предельных состояний для расчета железобетонных элементов мостовых сооружений по условию устойчивости / Д. В. Боль, А. И. Шишкин // Инновации и инвестиции. – 2025. – № 7. – С. 688-693. – EDN XWERTK.