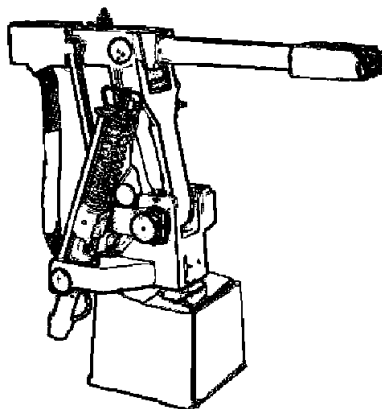


ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра робототехнических систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине "Проектирование роботов и РТС"
для студентов специальности 220402
"Роботы и робототехнические системы"
очной и очно-заочной форм обучения



Воронеж 2010

Составители: канд. техн. наук В.А. Трубецкой,
канд. техн. наук С.С. Ревнёв

УДК 621.865.8

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Проектирование роботов и РТС" для студентов специальности 220402 "Роботы и робототехнические системы" очной и очно-заочной форм обучения / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. В.А. Трубецкой, С.С. Ревнёв. Воронеж, 2010. 30 с.

Методические указания содержат теоретические сведения и практические рекомендации по структурному и функциональному проектированию роботов и РТС. Приведены конкретные варианты расчетов захватных устройств, а также погрешности позиционирования, кинематики и динамики на примерах манипуляторов различной конфигурации.

Предназначены для студентов IV - V курсов обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS WORD, содержатся в файле proekt_robot_praktika.doc.

Табл. 4. Ил. 5. Библиогр.: 2 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. А.К. Муконин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. А.И. Шиянов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ГОУВПО Воронежский государственный
технический университет, 2010

ЗАДАНИЕ № 1

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ С УЧЕТОМ ТОЛЬКО ПЕРЕНОСНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПОДВИЖНОСТИ

Исследование кинематики является важным этапом проектирования манипуляторов. На этом этапе производится стыковка геометрических характеристик проектируемых модулей степеней подвижности и манипулятора в целом с рабочим пространством и рабочей зоной робота; определяются возможности манипулятора с точки зрения кинематики при выполнении тех или иных технологических операций. Результаты таких исследований используются для корректировки конструкторских решений, принятых на предыдущих этапах проектирования.

Для постановки и решения задач кинематики составляют расчетную кинематическую модель манипулятора, в основу которой положены предполагаемые или имеющиеся геометрические размеры звеньев, а также типы, количество и распределение кинематических пар.

В зависимости от поставленной задачи для одного и того же манипулятора можно составить несколько моделей. Рассмотрим вариант, когда учитываются лишь основные (переносные) степени подвижности.

В качестве объекта моделирования рассмотрим типовые компоновки роботов, приведенные на рис. 1. Первая компоновка (рис.1, а) соответствует роботу, работающему в цилиндрической системе координат; вторая (рис.1, б) – роботу, работающему в сферической системе; третья (рис.1, в) – шарнирному роботу, у которого все степени подвижности вращательные.

Первая компоновка учитывает три основных степени подвижности робота, работающего в цилиндрической системе координат. Три обобщенные координаты r, φ и z позволяют определить координаты x_p, y_p, z_p некоторой точки Р манипулятора (например, полюса схвата):

$$x_p = r \cdot \cos \varphi; y_p = r \cdot \sin \varphi; z_p = z \quad (1)$$

Для кинематической модели (рис.1, б) робота, работающего в сферической системе координат, вводятся три обобщенные координаты

r, φ_1 и φ_2 .

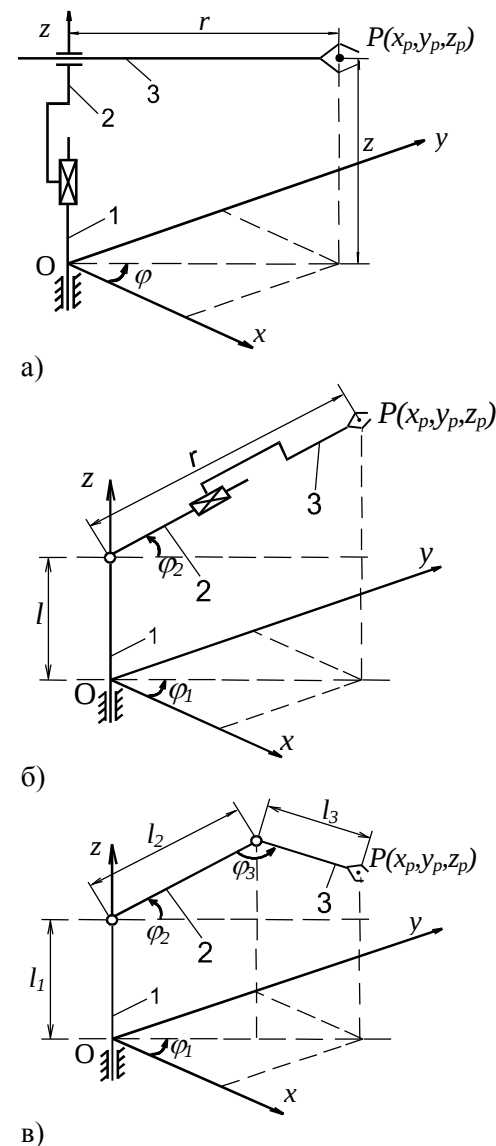


Рис. 1. Типовые компоновки манипуляторов

Тогда координаты точки Р манипулятора:

$$\begin{aligned}x_p &= r \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2; \\y_p &= r \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2; \\z_p &= l + r \cdot \sin\varphi_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Третья компоновка (рис.1, в) характеризуется обобщенными координатами φ_1, φ_2 и φ_3 . Тогда координаты точки Р манипулятора:

$$\begin{aligned}x_p &= l_2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + l_3 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3); \\y_p &= l_2 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + l_3 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3); \\z_p &= l_1 + l_2 \cdot \sin\varphi_2 + l_3 \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3).\end{aligned}\quad (3)$$

На основе полученных соотношений решают прямую и обратную задачи кинематики. Прямая задача о положении манипуляторов заключается в том, что по заданным относительным перемещениям q_i в кинематических парах рассчитывают положение рабочего органа, а также звеньев манипулятора. С помощью обратной задачи о положении манипулятора определяют обобщенные координаты q_i манипулятора по заданному в опорной системе координат положению рабочего органа или некоторого звена манипулятора.

Для рассматриваемых компоновок обратную задачу можно решить аналитически. Для кинематической модели (рис.1, а):

$$r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}; \varphi = \arctg \frac{y_p}{x_p}; z = z_p \quad (4)$$

Для кинематической модели (рис.1, б):

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + (z_p - l)^2}; \\ \varphi_1 &= \arctg \frac{y_p}{z_p}; \\ \varphi_2 &= \arctg \frac{z_p - l}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}.\end{aligned}\quad (5)$$

Для кинематической модели (рис.1, в):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arctg \frac{y_p}{x_p}; \\ \varphi_2 &= \arctg \frac{z_p - l}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \pm \arccos \frac{l_2^2 - l_3^2 + x_p^2 + y_p^2 + (z_p - l_1)^2}{2 \cdot l_2 \cdot \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + (z_p - l)^2}}; \\ \varphi_3 &= \pm \left[\pi - \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - x_p^2 - y_p^2 - (z_p - l_1)^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3} \right].\end{aligned}\quad (6)$$

ЗАДАНИЕ № 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ С УЧЕТОМ ОРИЕНТИРУЮЩИХ СТЕПЕНЕЙ ПОДВИЖНОСТИ МАНИПУЛЯТОРА

При решении задач кинематики будем считать звенья манипулятора (звенья исполнительного механизма) со всеми закрепленными на них элементами твердыми телами и рассматривать манипулятор как механическую систему, для которой справедливы основные положения механики твердого тела. Кинематические соотношения, определяющие положение, скорость и ускорения звеньев манипулятора без учета воздействия управляющих сил и моментов, можно получить, рассмотрев движение каждого звена как твердого тела с учетом связей между ними.

Положение твердого тела в пространстве может быть задано шестью независимыми величинами, например: тремя координатами x'_0, y'_0, z'_0 какой-либо точки O' тела и тремя углами, характеризующими ориентацию системы осей $O'x'y'z'$, связанных с ним, относительно неподвижной системы $Oxyz$. Эти углы удобнее всего задавать с помощью матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{matrix} & x & y & z \\ \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}.\quad (1)$$

Элемент α_{sk} этой матрицы представляет собой проекцию единичного вектора i'_s системы осей $O'x'y'z'$ на направление i_k системы $Oxyz$, т.е. скалярное произведение векторов i'_s и i_k :

$$\alpha_{sk} = i'_s \cdot i_k; s, k = 1, 2, 3.$$

С учетом взаимной ортогональности систем векторов i_1, i_2, i_3 и i'_1, i'_2, i'_3 нетрудно записать шесть соотношений связывающих между собой девять косинусов:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 &= 1; & \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} &= 0; \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 &= 1; & \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} &= 0; \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1; & \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

В результате из девяти элементов матрицы α лишь три являются независимыми величинами.

Переменные x'_0, y'_0, z'_0 и матрица α позволяют записать простые соотношения, характеризующие преобразования координат из системы осей $O'x'y'z'$ в систему $Oxyz$. Если положение точки M в системе $O'x'y'z'$, связанной с телом, задано вектором $r_M = (x_1 \ y_1 \ z_1)^T$, то ее координаты в неподвижной системе определяются как:

$$(x \ y \ z)^T = (x'_0 \ y'_0 \ z'_0)^T + \alpha \cdot (x_1 \ y_1 \ z_1)^T. \quad (3)$$

При этом можно получить соотношения, характеризующие связь скоростей и ускорений точки M в системах $O'x'y'z'$ и $Oxyz$, а также обратные преобразования названных величин.

Кинематическая цепь манипулятора состоит из кинематических пар; относительное положение звеньев задает в конечном счете и их положение в инерциальном пространстве. Связав со звеном i систему координат $O_i x_i y_i z_i$ ($i = 1, \dots, n$), можно свести определение взаимного положения звеньев к задаче преобразования одной системы связанных осей в другую. Такое преобразование в трехмерном пространстве удобно описывать с помощью специальных матриц размера 4×4 , введение которых тесно связано с понятием однородных координат проективного пространства. Если декартовы координаты точки равны x, y, z , то ее

однородными координатами называют числа x_1, x_2, x_3, x_4 , не все одновременно равные нулю, связанные с x, y, z равенствами

$$x_1 = \frac{x}{x_4}; \quad x_2 = \frac{y}{x_4}; \quad x_3 = \frac{z}{x_4}.$$

Если $x_4 = 1$, то однородные координаты определяют вектор положения следующего вида:

$$r^0 = (x_1, y_1, z_1, 1)^T.$$

При использовании однородных координат различные преобразования в трехмерном пространстве могут быть сведены к композиции двух преобразований – вращения и переноса, которым отвечают матрицы:

$$A_\alpha = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \alpha & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (4)$$

$$A_r = \left[\begin{array}{ccc|c} & E & & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (5)$$

Результирующая матрица преобразования имеет вид:

$$A = A_\alpha \cdot A_r = \left[\begin{array}{ccc|c} & \alpha & & \alpha \cdot r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (6)$$

В формулах (4) – (6) приняты обозначения: α – матрица размера 3×3 направляющих косинусов осей $O'x', O'y', O'z'$ относительно осей Ox, Oy, Oz ; r – вектор положения точки O' в системе осей $Oxyz$; E – единичная матрица размера 3×3 .

Матрица A характеризует переход от системы осей $O'x'y'z'$ к системе $Oxyz$. Обратному переходу отвечает матрица:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \alpha^T & & -\alpha^T \cdot r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (7)$$

Рассмотрим выбор систем координат, используемых при описании движения манипулятора. С неподвижным основанием связывается система осей $Ox_0 y_0 z_0$. Система $O_i x_i y_i z_i$ связана со звеном i и имеет ось $O_i z_i$, совпадающую с осью сочленения звеньев

i и $i+1$. Для пар вращательного типа ось $O_i z_i$ совпадает с осью относительного поворота, для поступательных – она параллельна направлению относительного поступательного перемещения. Ось $O_i x_i$ перпендикулярна осям $O_i z_i$ и $O_{i-1} z_{i-1}$; ось $O_i y_i$ – осям $O_i x_i$ и $O_i z_i$ и дополняет их до правой триады. Номера звеньев обозначаются как $i = 0, 1, \dots, N$. Индекс 0 соответствует неподвижному основанию, индекс N – захвату (рабочему инструменту). Система осей $O_N x_N y_N z_N$ не связана с подвижным соединением звеньев – она определяет ориентацию и положение захватного устройства.

Примеры, показывающие правило разметки звеньев и систем координат с ними связанных, приведены на рис. 1, а.

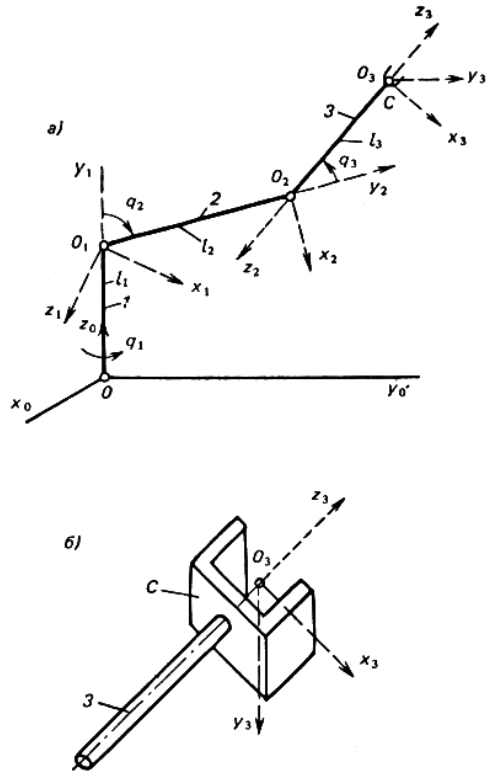


Рис. 1. Связанные со звеньями системы координат трехзвенного манипулятора

Система осей $Ox_0 y_0 z_0$ связана с неподвижным основанием O , при этом ось Oz_0 направлена вдоль оси звена 1. Система осей $O_1 x_1 y_1 z_1$ выбрана таким образом: точка O_1 совпадает с геометрическим центром пары звеньев 1 и 2, ось $O_1 z_1$ – с осью этой пары, ось $O_1 x_1$ перпендикулярна осям $O_1 z_1$ и Oz_0 одновременно, а ось $O_1 y_1$ дополняет оси $O_1 z_1$ и $O_1 x_1$ до правой триады – ее направление совпадает с положением звена 1. Система осей $O_2 x_2 y_2 z_2$ выбрана следующим образом: точка O_2 совпадает с центром соединения звеньев 2 и 3, а ось $O_2 z_2$ – с осью этой пары, ось $O_2 x_2$ перпендикулярна осям $O_2 z_2$ и $O_1 z_1$ одновременно, а ось $O_2 y_2$ дополняет оси $O_2 z_2$ и $O_2 x_2$ до правой триады – ее направление совпадает с продолжением звена 2. На рис. 1, б показана система координат, связанная с захватным устройством. Ось $O_3 z_3$ совпадает с осью звена 3 и характеризует ориентацию оси захвата. Положение точки O_3 может быть выбрано произвольно. Ось $O_3 x_3$ перпендикулярна $O_3 z_3$ и $O_2 z_2$, ось $O_3 y_3$ дополняет оси $O_3 x_3$ и $O_3 z_3$ до правой триады. Из рис. 1, а видно, что углы поворота звеньев q_1, q_2, q_3 отсчитываются в системах координат $Ox_0 y_0 z_0$, $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $O_2 x_2 y_2 z_2$ соответственно, т.е. q_i ($i=1, 2, 3$) отсчитывается в системах осей $i-1$.

Приведенные правила ориентации осей систем координат, связанных со звеньями, определяют важное обстоятельство: взаимное положение систем координат i и $i-1$ двух соседних звеньев зависит от четырех параметров, один из которых является обобщенной координатой, а три других – конструктивными константами. Матрица перехода от системы осей i к системе $i-1$ равна:

$$A_i = A_{\theta i} \cdot A_{S i} \cdot A_{a i} \cdot A_{r i} \begin{bmatrix} \alpha(i) & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $A_{\theta i}$, $A_{S i}$, $A_{a i}$, $A_{r i}$ – матрицы, характеризующие четыре преобразования, выполняемые в следующем порядке:

- 1) поворот системы осей $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ вокруг оси $O_{i-1} z_{i-1}$ на угол θ_i , обеспечивающий параллельность осей $O_{i-1} x_{i-1}$

и $O_i x_i$. Он характеризуется матрицей

$$A_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (8)$$

- 2) перенос системы осей $i-1$ вдоль оси $O_{i-1} z_{i-1}$ на величину S_i до того, как оси $O_{i-1} x_{i-1}$ и $O_i x_i$ окажутся на одной прямой. Ему отвечает матрица

$$A_{S_i} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

- 3) перенос системы осей $i-1$ вдоль оси $O_i x_i$ на величину a_i до совпадения O_{i-1} и O_i . Он характеризуется матрицей

$$A_{a_i} = \begin{bmatrix} E & a_i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

- 4) поворот системы осей $i-1$ на угол γ_i вокруг оси $O_i x_i$ до совмещения всех осей. Ему отвечает матрица

$$A_{\gamma_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_i & -\sin\gamma_i & 0 \\ 0 & \sin\gamma_i & \cos\gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

С учетом выражений (8) – (11) запишем матрицу (7) в виде

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\gamma_i & \sin\theta_i \cdot \sin\gamma_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\gamma_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\gamma_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\gamma_i & \cos\gamma_i & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Кинематические пары вращательного типа зависят от одной переменной – угла θ_i , остальные величины S_i , a_i и γ_i –

постоянные. В случае поступательных пар переменной является величина S_i , а θ_i , a_i , γ_i – постоянные. Итак, матрица A_i зависит от одной обобщенной координаты q_i (равной θ_i или S_i) и определяет положение и ориентацию системы осей $O_i x_i y_i z_i$ в системе $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МАНИПУЛЯТОРА, РАБОТАЮЩЕГО В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Манипулятор имеет одну вращательную и две поступательные кинематические пары, следовательно, число степеней свободы равно трем. Расчетная и конструктивная кинематические схемы изображены на рис. 2 а и б соответственно.

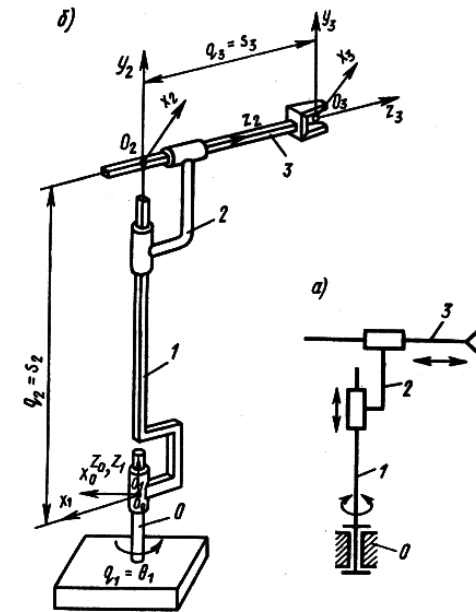


Рис. 2. Расчетная и конструктивная кинематические схемы манипулятора

Специальные системы координат выбираем в соответствии с методикой. Ось z_0 идет по оси вращательной пары (0,1), т.е. по оси

вращения тела 1; ось z_1 идет по оси пары (1,2), вдоль которой тело 2 поступательно перемещается относительно тела 1; ось z_2 идет вдоль оси поступательной пары (2,3); ось z_3 идет также, как ось z_2 . Направление осей x и положения начал координат показаны на рис.1, а.

Типы пар и значения параметров приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Кинематическая пара	Тип пары	№ звена	Значения параметров			
			θ	γ	S	a
0,1	вращательная	1	θ_1	0	0	0
1,2	поступательная	2	π	$\frac{\pi}{2}$	S_2	0
2,3	поступательная	3	0	0	S_3	0

Составляем матрицы A_i :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Вычисляем элементы матрицы T_3 :

$$T_3 = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & -S_3\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & S_3\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

ЗАДАНИЕ № 3

ВЫБОР КОМПОНОВКИ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ МОДУЛЬНОГО ТИПА ПО УСЛОВИЯМ ТОЧНОСТИ

Выбор компоновки модульного робота является одним из основных этапов его разработки. Для каждого варианта системы модулей можно сформировать несколько компоновок, решающих задачу обслуживания станков или других элементов технологического оборудования заданного РТК. Однако с точки зрения производительности РТК, качества выполнения работ, затрат на формирование РТК эти компоновки не равноценны. Чтобы сравнить компоновки модульных роботов на этапе их формирования, необходимо для данного РТК определить критерии, характеризующие качество функционирования робота с выбранной компоновкой в данном РТК. Такими критериями могут быть: общее время движения робота в данном РТК; точность позиционирования на рабочих точках РТК; энергетические затраты при выполнении движений; массогабаритные характеристики компоновок; экономические показатели.

Рассмотрим методику расчета и выбора модульного робота РПМ – 25 по условиям точности при обслуживании участка из трех станков.

Для решения поставленной задачи выбора компоновки используем следующий порядок расчета. Возьмем несколько типовых компоновок робота РПМ – 25, определим для каждой компоновки значения перемещений в модулях, погрешность позиционирования и время перемещения при установке детали на каждый станок. Имея эти данные для всех рассматриваемых компоновок, можно выбирать одну из них по условию получения минимальных погрешностей на станках.

Координаты точек загрузки на станках приведены в табл. 1.

Таблица 1.

№ точки позиционирования	Координаты точек позиционирования, м		
	x	y	z
1	0	1,8	1,7
2	1,56	-0,9	1,95
3	-0,92	-0,92	1,5

Рассмотрим три варианта компоновок: В||П⊥П, П⊥П⊥П и В⊥В||П (на рис.1. позиции а, б, в соответственно). Значения погрешностей позиционирования по обобщенным координатам из технических характеристик составляющих модулей приведены в табл. 2.

Таблица 2.

Тип манипулятора	Погрешности позиционирования по обобщенным координатам		
	Δq_1	Δq_2	Δq_3
В П⊥П	$\Delta \varphi_1 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$	$\Delta S_2 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta S_3 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
П⊥П⊥П	$\Delta S_1 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta S_2 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta S_3 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
В⊥В П	$\Delta \varphi_1 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$	$\Delta \varphi_2 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$	$\Delta S_3 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ РОБОТА С КОМПОНОВКОЙ ТИПА В||П⊥П

Запишем координаты захватного устройства:

$$\begin{aligned} x_3 &= \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \cos \varphi_1; \\ y_3 &= \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \sin \varphi_1; \\ z_3 &= S_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где h – смещение захватного устройства относительно оси горизонтальной поступательной пары;

φ_1 – угол поворота во вращательной паре;

S_2 – вертикальное перемещение в поступательной паре;

S_3 – горизонтальное перемещение в поступательной паре.

Выражения для вычисления погрешности позиционирования представим в приращениях обобщенных координат:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \Delta \varphi_1 + \cos \varphi_1 \cdot \frac{S_3}{\sqrt{h^2 + S_3^2}} \cdot \Delta S_3; \\ \Delta y &= \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \cos \varphi_1 \cdot \Delta \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cdot \frac{S_3}{\sqrt{h^2 + S_3^2}} \cdot \Delta S_3; \end{aligned} \quad (2)$$

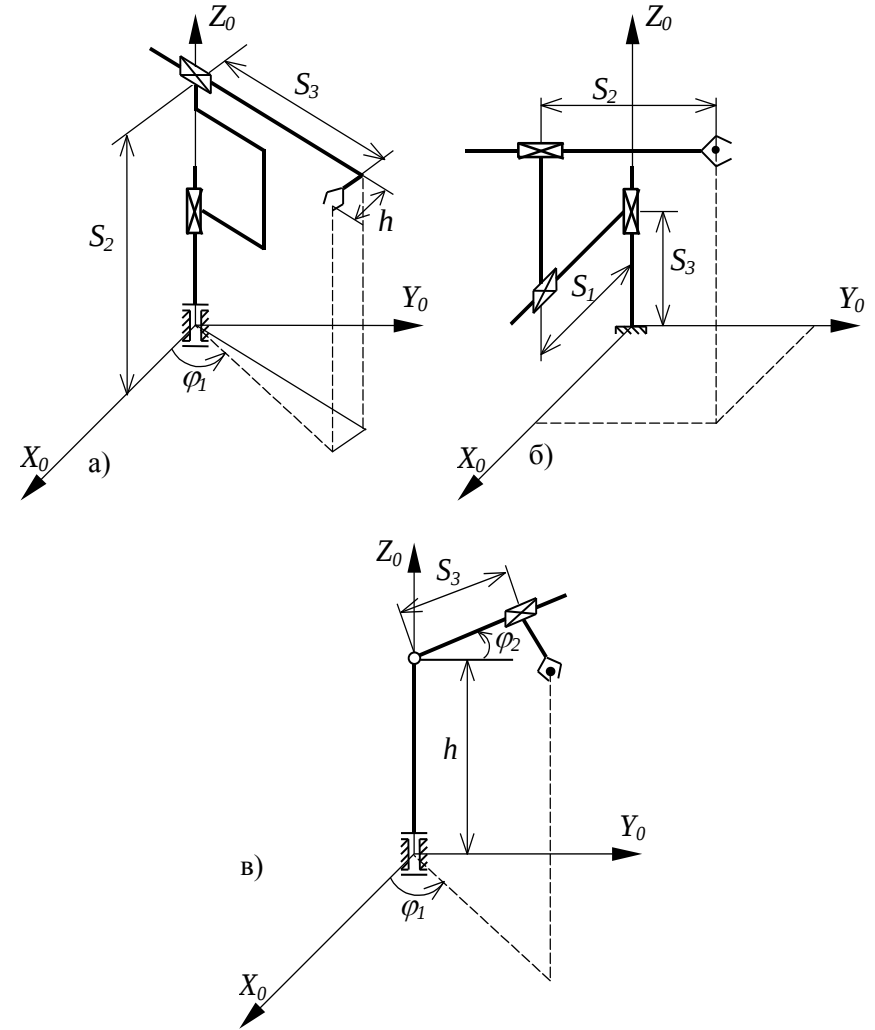


Рис. 1. Три варианта компоновок манипуляторов

$\Delta z = \Delta S_2$ Из условия совпадения координат захватного устройства робота с координатами точки загрузки первого станка получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \cos \varphi_1 = 0 \\ \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \sin \varphi_1 = 1,8 \text{ м}; \\ S_2 = 1,7 \text{ м} \end{cases} \quad (3)$$

где $h=0,5$ м.

Решая данную систему уравнений, находим значения обобщенных координат: $\varphi_1 = 90^\circ$; $S_3 = 1,8$ м.

Подставляя найденные значения обобщенных координат в выражения (2) и взяв погрешности выдвижения и поворота из табл.2, получим погрешности позиционирования захватного устройства робота по каждой из осей:

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \Delta \varphi_1 + \cos \varphi_1 \cdot \frac{S_3}{\sqrt{h^2 + S_3^2}} \cdot \Delta S_3 = \\ &= -\sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3 \cdot \sin(90^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} + \\ &+ \cos(90^\circ) \cdot \frac{1,8 \cdot 10^3}{\sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3} \cdot 0,8 = -1,35 (\text{мм}); \\ \Delta y &= \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \cos \varphi_1 \cdot \Delta \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cdot \frac{S_3}{\sqrt{h^2 + S_3^2}} \cdot \Delta S_3 = \\ &= \sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3 \cdot \cos(90^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} + \\ &+ \sin(90^\circ) \cdot \frac{1,8 \cdot 10^3}{\sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3} \cdot 0,8 = 0,77 (\text{мм}); \\ \Delta z &= \Delta S_2 = 0,4 (\text{мм}). \end{aligned}$$

Модуль максимальной погрешности позиционирования определяется как:

$$\Delta \rho_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(-1,35)^2 + 0,77^2 + 0,4^2} = 1,6 (\text{мм})$$

Из условия равенства координат $x_3 = x_{cm2}$; $y_3 = y_{cm2}$; $z_3 = z_{cm2}$ запишем систему уравнений для определения значений

обобщенных координат робота при загрузке второго станка:

$$\begin{cases} \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \cos \varphi_1 = 1,56 \text{ м} \\ \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \sin \varphi_1 = -0,9 \text{ м}; \\ S_2 = 1,95 \text{ м} \end{cases} \quad (4)$$

Получим $\varphi_1 = -30^\circ$; $S_3 = 1,8$ м.

Подставим эти значения обобщенных координат в выражение (2):

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3 \cdot \sin(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} + \\ &+ \cos(-30^\circ) \cdot \frac{1,8 \cdot 10^3}{\sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3} \cdot 0,8 = 1,31 (\text{мм}); \\ \Delta y &= \sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3 \cdot \cos(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} + \\ &+ \sin(-30^\circ) \cdot \frac{1,8 \cdot 10^3}{\sqrt{0,5^2 + 1,8^2} \cdot 10^3} \cdot 0,8 = 1,5 (\text{мм}); \\ \Delta z &= \Delta S_2 = 0,4 (\text{мм}). \end{aligned}$$

Модуль погрешности позиционирования на втором станке:

$$\Delta \rho_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{1,31^2 + 1,5^2 + 0,4^2} = 2,03 (\text{мм}).$$

Из условия совпадения координат захватного устройства с координатами точки третьего станка получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \cos \varphi_1 = -0,92 \text{ м} \\ \sqrt{h^2 + S_3^2} \cdot \sin \varphi_1 = -0,92 \text{ м}; \\ S_2 = 1,5 \text{ м} \end{cases} \quad (5)$$

Решая данную систему уравнений, находим значения обобщенных координат: $\varphi_1 = 225^\circ$; $S_2 = 1,5$ м; $S_3 = 1,3$ м.

Подставим найденные значения обобщенных координат в выражения (2):

$$\Delta x = -\sqrt{0,5^2 + 1,3^2} \cdot 10^3 \cdot \sin(225^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} +$$

$$+ \cos(225^\circ) \cdot \frac{1,3 \cdot 10^3}{\sqrt{0,5^2 + 1,3^2 \cdot 10^3}} \cdot 0,8 = 0,15 \text{ (мм)};$$

$$\Delta y = \sqrt{0,5^2 + 1,3^2 \cdot 10^3} \cdot \cos(225^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} +$$

$$+ \sin(225^\circ) \cdot \frac{1,3 \cdot 10^3}{\sqrt{0,5^2 + 1,3^2 \cdot 10^3}} \cdot 0,8 = -1,19 \text{ (мм)};$$

$$\Delta z = \Delta S_2 = 0,4 \text{ (мм)}.$$

Модуль погрешности позиционирования на третьем станке:

$$\Delta \rho_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{0,15^2 + (-1,19)^2 + 0,4^2} = 1,38 \text{ (мм)}$$

Средняя погрешность позиционирования при обслуживании участка роботом данной компоновки:

$$\Delta \rho_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^3 \Delta \rho_i}{3} = \frac{1,6 + 2,03 + 1,38}{3} = 1,67 \text{ (мм)}.$$

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ РОБОТА С КОМПОНОВКОЙ ТИПА П⊥П⊥П

Запишем координаты захватного устройства робота:

$$x_3 = S_1; y_3 = S_2; z_3 = S_3, \quad (6)$$

где S_1, S_2, S_3 – перемещения в соответствующих кинематических парах.

Значения погрешностей позиционирования по обобщенным координатам берем из технических характеристик составляющих модулей:

$$\Delta x = \Delta S_1 = 0,4 \text{ (мм)};$$

$$\Delta y = \Delta S_2 = 0,8 \text{ (мм)};$$

$$\Delta z = \Delta S_3 = 0,8 \text{ (мм)}. \quad (7)$$

Модуль погрешности позиционирования захватного устройства робота этой компоновки не зависит от положения станка:

$$\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,8^2 + 0,8^2} = 0,89 \text{ (мм)}.$$

Средняя погрешность $\Delta \rho_{cp} = 0,89$ мм.

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ РОБОТА С КОМПОНОВКОЙ ТИПА В⊥В||П

Запишем координаты захватного устройства:

$$x_3 = S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1;$$

$$y_3 = S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1; \quad (8)$$

$$z_3 = h + S_3 \cdot \sin \varphi_2;$$

где φ_1, φ_2 – углы поворота в соответствующих вращательных парах; S_3 – перемещение в поступательной паре; $h = 0,73$ м – высота стойки манипулятора.

Запишем выражения для расчета погрешности позиционирования:

$$\Delta x = \Delta S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cdot \Delta \varphi_2 \cdot S_3 \cdot \cos \varphi_1 -$$

$$- \sin \varphi_1 \cdot \Delta \varphi_1 \cdot S_3 \cdot \cos \varphi_2;$$

$$\Delta y = \Delta S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cdot \Delta \varphi_2 \cdot S_3 \cdot \sin \varphi_1 +$$

$$+ \cos \varphi_2 \cdot S_3 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \Delta \varphi_1; \quad (9)$$

$$\Delta z = \Delta S_3 \cdot \sin \varphi_2 + S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \Delta \varphi_2.$$

Из условия достижимости захватным устройством робота точки загрузки первого станка получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 = 0 \\ S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 = 1,8 \text{ м;} \\ 0,73 + S_3 \cdot \sin \varphi_2 = 1,7 \text{ м} \end{cases} \quad (10)$$

Решая данную систему уравнений, получим значения обобщенных координат робота при загрузке первого станка: $\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = 28^\circ, S_3 = 2,05$ м.

Значения выражений для расчета погрешностей позиционирования робота по каждой из осей:

$$\Delta x = -2,05 \cdot 10^3 \cdot \sin 90^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 28^\circ = 1,3 \text{ (мм)}$$

$$\Delta y = 0,8 \cdot \cos 28^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 28^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,05 \cdot 10^3 \cdot \sin 90^\circ = 0,01 \text{ (мм)}$$

$$\Delta z = 0,8 \cdot \sin 28^\circ + 2,05 \cdot 10^3 \cdot \cos 28^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} = 1,67 \text{ (мм)}.$$

Модуль погрешности вычисляется по формуле:

$$\Delta \rho_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{1,3^2 + 0,01^2 + 1,07^2} = 2,12 \text{ (мм)}.$$

Запишем систему уравнений для определения обобщенных координат робота при загрузке второго станка:

$$\begin{cases} S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 = 1,56 \text{ м} \\ S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 = -0,9 \text{ м}; \\ 0,73 + S_3 \cdot \sin \varphi_2 = 1,95 \text{ м} \end{cases} \quad (11)$$

Решение этой системы дает $\varphi_1 = -30^\circ$, $\varphi_2 = 34^\circ$, $S_3 = 2,16 \text{ м}$.

При подстановке полученных значений в (9) запишем значения погрешностей робота по каждой из осей:

$$\Delta x = 0,8 \cdot \cos 34^\circ \cdot \cos(-30^\circ) - \sin 34^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,16 \cdot 10^3 \cdot \cos(-30^\circ) - \sin(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,16 \cdot 10^3 \cdot \cos 34^\circ = 0,47 \text{ (мм)};$$

$$\Delta y = 0,8 \cdot \cos 34^\circ \cdot \sin(-30^\circ) - \sin 34^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,16 \cdot 10^3 \cdot \sin(-30^\circ) + \cos 34^\circ \cdot 2,16 \cdot 10^3 \cdot \cos(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} = 1,22 \text{ (мм)};$$

$$\Delta z = 0,8 \cdot \sin 34^\circ + 2,16 \cdot 10^3 \cdot \cos 34^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} = 1,74 \text{ (мм)}.$$

Модуль погрешности позиционирования:

$$\Delta \rho_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{0,47^2 + 1,22^2 + 1,74^2} = 2,18 \text{ (мм)}.$$

Система уравнений для определения обобщенных координат при загрузке третьего станка:

$$\begin{cases} S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 = -0,92 \text{ м} \\ S_3 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 = -0,92 \text{ м}; \\ 0,73 + S_3 \cdot \sin \varphi_2 = 1,5 \text{ м} \end{cases} \quad (12)$$

Решение этой системы: $\varphi_1 = 225^\circ$, $\varphi_2 = -30^\circ$, $S_3 = 1,5 \text{ м}$.

Значения погрешности по каждой из осей:

$$\Delta x = 0,8 \cdot \cos(-30^\circ) \cdot \cos 225^\circ - \sin(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot \cos 225^\circ - \sin 225^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot S_3 \cdot \cos(-30^\circ) = -0,21 \text{ (мм)};$$

$$\Delta y = 0,8 \cdot \cos(-30^\circ) \cdot \sin 225^\circ - \sin(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot \sin 225^\circ + \cos(-30^\circ) \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot \cos 225^\circ \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} = -1,53 \text{ (мм)};$$

$$\Delta z = 0,8 \cdot \sin(-30^\circ) + 1,5 \cdot 10^3 \cdot \cos(-30^\circ) \cdot 7,2 \cdot 10^{-4} = 0,54 \text{ (мм)}.$$

Модуль погрешности:

$$\Delta \rho_3 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(-0,21)^2 + (-1,53)^2 + 0,54^2} = 1,64 \text{ (мм)}.$$

Средняя погрешность:

$$\Delta \rho_{cp} = \frac{2,12 + 2,18 + 1,64}{3} = 1,98 \text{ (мм)}.$$

Результаты расчетов сведем в табл. 3.

Таблица 3

Тип компоновки робота	$\Delta \rho$, мм на станке			$\Delta \rho_{cp}$, мм
	1	2	3	
В П⊥П	1,6	2,03	1,38	1,67
П⊥П⊥П	0,89	0,89	0,89	0,89
В⊥В П	2,12	2,18	1,64	1,98

Результат приведенных расчетов показывает, что с точки зрения точности оптимальной является компоновка типа П⊥П⊥П.

ЗАДАНИЕ №4

КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТИПОВЫХ КОМПОНОВОК ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

Кинетостатический расчет манипуляторов связан с применением принципа Даламбера для определения усилий приводов и реакций, возникающих в кинематических парах при выполнении некоторого заданного движения манипулятора.

Расчет усилий приводов, необходимых для реализации заданного движения объекта с помощью манипулятора, позволяет обоснованно выбрать мощность приводов, а определение сил и моментов сил инерции звеньев необходимо для последующих расчетов механической системы на прочность и жесткость.

Метод кинетостатики является также одним из самых эффективных при составлении уравнений движения манипуляторов на ЭВМ.

Ниже рассмотрим подробно вопросы кинетостатического расчета некоторых типовых компоновок агрегатно-модульных ПР. Ориентирующие степени подвижности при этом не учитываются: влияние движения по ним на динамические усилия в приводах переносных движений обычно невелико, но их учет значительно усложняет расчет.

Силы инерции каждого звена i приведем к его центру масс S_i и заменим главным вектором сил инерции звена и главным моментом сил инерции звена относительно его центра масс.

Главный вектор сил инерции звена i :

$$F_{ui} = -m_i a_{si}, \quad (1)$$

где m_i — масса звена, a_{si} — ускорение центра масс звена; $i = 1, 2, \dots$.

Моменты сил инерции звеньев относительно их центров масс определим следующим образом.

На основании теоремы об изменении момента количества движения твердого тела относительно центра масс имеем

$$\frac{dK_{si}}{dt} = M_{si}, \quad (2)$$

где K_{si} — кинетический момент звена i относительно его центра масс S_i ; M_{si} — момент внешних сил и реакций связей относительно центра масс звена i .

С другой стороны, на основе принципа Даламбера для этого же тела можно записать:

$$M_{usi} + M_{si} = 0. \quad (3)$$

Сравнивая последние две формулы, получим

$$M_{usi} = -\frac{dK_{si}}{dt}. \quad (4)$$

Используя понятие относительной производной, запишем последнее выражение в виде

$$M_{usi} = -\frac{d'K_{si}}{dt} + \Omega_i \times K_{si}, \quad (5)$$

где $\frac{d'K_{si}}{dt}$ — относительная производная вектора кинетического момента, определяемая как вектор, проекции которого на подвижные оси, связанные с телом, равны производным от

проекций K_{si} на эти оси; Ω_i — вектор абсолютной угловой скорости звена i .

Проекции M_{usi}^x , M_{usi}^y , M_{usi}^z момента сил инерции звена i на главные центральные оси, связанные с ним, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M_{usi}^x &= -\left(\frac{dK_{si}^x}{dt} + \Omega_i^y \cdot K_{si}^z - \Omega_i^z \cdot K_{si}^y \right); \\ M_{usi}^y &= -\left(\frac{dK_{si}^y}{dt} + \Omega_i^z \cdot K_{si}^x - \Omega_i^x \cdot K_{si}^z \right); \\ M_{usi}^z &= -\left(\frac{dK_{si}^z}{dt} + \Omega_i^x \cdot K_{si}^y - \Omega_i^y \cdot K_{si}^x \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где K_{si}^x , K_{si}^y , K_{si}^z , Ω_i^x , Ω_i^y , Ω_i^z — соответственно проекции кинетического момента и вектора абсолютной угловой скорости звена i на подвижные оси, связанные со звеном.

Проекции вектора кинетического момента на главные центральные оси, связанные со звеном, соответственно составляют

$$K_{si}^x = J_{xi} \cdot \Omega_i^x; \quad K_{si}^y = J_{yi} \cdot \Omega_i^y; \quad K_{si}^z = J_{zi} \cdot \Omega_i^z, \quad (7)$$

где J_{xi} , J_{yi} , J_{zi} — главные осевые моменты инерции звена i .

Подставляя выражения (7) в формулы (6), получим

$$\left. \begin{aligned} M_{usi}^x &= -\left[J_{xi} \cdot \dot{\Omega}_i^x + (J_{zi} - J_{yi}) \cdot \Omega_i^y \cdot \Omega_i^z \right]; \\ M_{usi}^y &= -\left[J_{yi} \cdot \dot{\Omega}_i^y + (J_{xi} - J_{zi}) \cdot \Omega_i^z \cdot \Omega_i^x \right]; \\ M_{usi}^z &= -\left[J_{zi} \cdot \dot{\Omega}_i^z + (J_{yi} - J_{xi}) \cdot \Omega_i^x \cdot \Omega_i^y \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь $\dot{\Omega}_i^x$, $\dot{\Omega}_i^y$, $\dot{\Omega}_i^z$ — производные по времени от проекций абсолютной угловой скорости звена на подвижные оси.

Для определения реакций в кинематических парах приложим к звеньям манипулятора наряду с действующими активными силами силы инерции, приведя их к центрам масс звеньев и заменив их главным вектором сил инерции F_{ui} и главным моментом сил инерции M_{usi} .

Размыкая поочередно кинематическую цепь манипулятора в каждой кинематической паре, составим уравнения проекций всех активных сил и сил инерции звеньев свободной части цепи на оси прямоугольной системы координат, связанной с последним звеном кинематической цепи, оставшейся после отсоединения свободной части, а также составим уравнения проекций моментов всех сил на эти оси координат. Полученные уравнения дают возможность определить пять неизвестных составляющих реакций вращательной кинематической пары — три проекции силы R_k^x, R_k^y, R_k^z и две проекции момента на оси, перпендикулярные оси вращения, а также момент привода вращательной пары.

В поступательной кинематической паре с помощью уравнений проекций сил и моментов сил находим две проекции силы на оси, перпендикулярные оси поступательной пары, три проекции момента M_k^x, M_k^y, M_k^z и силу привода поступательной пары.

При рассмотрении поступательной кинематической пары одно из уравнений проекций сил может быть использовано для определения силы привода. В этом случае вместо R_k^x, R_k^y или R_k^z записывается Q_k — сила привода.

При рассмотрении вращательной кинематической пары одно из уравнений проекций моментов в зависимости от оси вращения кинематической пары может быть использовано для определения момента привода. В этом случае вместо M_k^x, M_k^y или M_k^z записывается M_k — момент привода.

КИНЕТОСТАТИКА МАНИПУЛЯТОРА, РАБОТАЮЩЕГО В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Определение сил и моментов сил инерции звеньев. Рассмотрим схему манипулятора, содержащего одну вращательную и две поступательные кинематические пары (рис. 1). Такая компоновка является одной из наиболее распространенных.

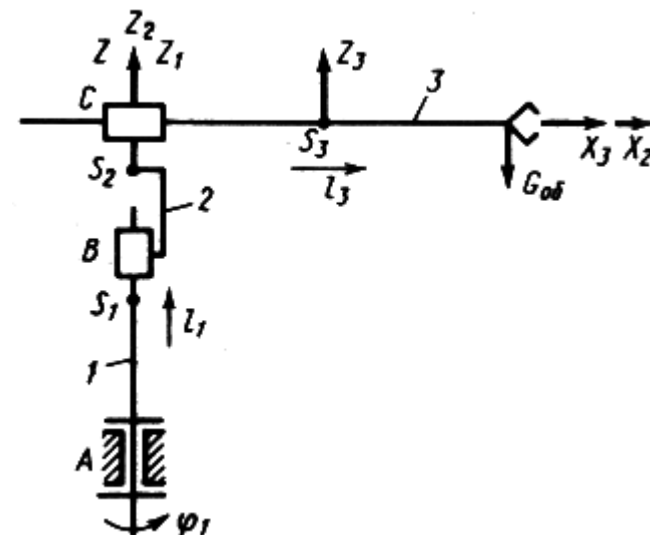


Рис. 1. Расчетная схема манипулятора, работающего в цилиндрической системе координат

Сначала определим линейные ускорения центров масс звеньев геометрическим методом.

Известно, что в сложном движении абсолютное ускорение точки равно сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова. Так как звенья манипулятора совершают сложные движения, то при определении абсолютных ускорений центров масс звеньев за переносное движение звена i будем принимать движение звена $i-1$, считая от неподвижного. Причем это переносное движение, как правило, тоже является сложным, поэтому переносное ускорение точек звена $i-1$ также находится как ускорение точек в сложном движении. За обобщенные координаты примем относительные перемещения звеньев в кинематических парах A, B, C — соответственно угол φ_1 и линейные перемещения l_1 и l_3 .

Свяжем со звеньями манипулятора системы координат, как показано на рис. 1. Центры масс звеньев 1 и 2 расположим на оси вращательной пары A , а центр масс звена 3 — на оси X звена 3. Ускорение центра масс звена 1 (точки S_1) равно нулю.

Линейное ускорение точки S_2 (центра масс звена 2) может быть определено как ускорение точки S_2 в сложном движении:

$$a_{s2} = a_{s2}^e + a_{s2}^r + a_{s2}^k, \quad (9)$$

где a_{s2}^e — переносное ускорение; a_{s2}^r — относительное ускорение; a_{s2}^k — кориолисово ускорение точки S_2 .

Для точки S_2 имеем $a_{s2}^k = 0$, $a_{s2}^e = 0$, $a_{s1} = 0$, $a_{s2}^r = \ddot{l}_1 k$, где k — орт оси Z поступательной пары B ; $\ddot{l}_1 = \frac{d^2 l_1}{dt^2}$ — ускорение точки S_2 в поступательном движении.

Ускорение точки S_3 центра масс звена 3 может быть найдено как сумма трех ускорений:

$$a_{s3} = a_{s3}^e + a_{s3}^r + a_{s3}^k. \quad (10)$$

Для определения составляющих ускорения точки S_3 свяжем точку S_3 со звеном 2 и обозначим эту точку S_{32} . Тогда переносное ускорение a_{s3}^e будет равно ускорению точки S_{32} , т. е. $a_{s3}^e = a_{s32}$.

В свою очередь ускорение a_{s32} определяется как сумма трех ускорений:

$$a_{s32} = a_{s32}^e + a_{s32}^r + a_{s32}^k, \quad (11)$$

где $a_{s32}^e = a_{s31}$ — ускорение точки S_3 звена 2 в переносном движении, равное ускорению точки S_3 , связанной со звеном 1, совершающим вращательное движение; a_{s32}^r — относительное ускорение точки S_3 звена 2 (в движении, относительно звена 1); a_{s32}^k — кориолисово ускорение точки S_3 звена 2 (в движении относительно звена 1).

Найдем каждое из этих ускорений:

$$\left. \begin{aligned} a_{s32}^e &= a_{s31} = -\dot{\phi}_1^2 l_3 i_1 + \ddot{\phi}_1 l_3 j_1; \\ a_{s32}^r &= \ddot{l}_1 k_1; \\ a_{s32}^k &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\dot{\phi}_1 = \frac{d\phi_1}{dt}$ — угловая скорость звена 1; $\ddot{\phi}_1 = \frac{d^2\phi_1}{dt^2}$ — угловое ускорение звена 1; i_1 — орт оси X_1 ; j_1 — орт оси Y_1 .

Подставив (12) в уравнение (11), получим

$$a_{s32} = -\dot{\phi}_1^2 l_3 i_1 + \ddot{\phi}_1 l_3 j_1 + \ddot{l}_1 k_1.$$

Учитывая, что $a_{s3}^e = a_{s32}$, запишем

$$a_{s3}^e = -\dot{\phi}_1^2 l_3 i_1 + \ddot{\phi}_1 l_3 j_1 + \ddot{l}_1 k_1.$$

Ускорение точки S_3 звена 3 в ее движении относительно точки звена 2 (поступательное движение) $a_{s3}^r = \ddot{l}_3 i_1$.

Кориолисово ускорение точки S_3 звена 3 в ее движении относительно точки S_3 звена 2

$$a_{s3}^k = 2\dot{\phi}_1 k_1 \times \ddot{l}_3 i_1 = 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3 j_1, \quad (13)$$

где $\dot{l}_3 = \frac{dl_3}{dt}$ — скорость точки S_3 звена 3 в движении относительно точки S_3 звена 2.

Таким образом, ускорение центра масс звена 3

$$a_{s3} = (-\dot{\phi}_1^2 l_3 + \ddot{l}_3) i_1 + (\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) j_1 + \ddot{l}_1 k_1.$$

Найдем выражения для определения сил и моментов сил инерции звеньев. Все силы инерции звена приведем к двум векторам F_{ui} и M_{ui} , приложенным в центре масс к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции.

Для манипуляторов, работающих в цилиндрической системе координат, главные векторы сил инерции звеньев

$$\left. \begin{aligned} F_{u1} &= 0; & F_{u2} &= -m_2 \ddot{l}_1 k_1; \\ F_{u3} &= -m_3 \left[(-\dot{\phi}_1^2 l_3 + \ddot{l}_3) i_1 + (\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) j_1 + \ddot{l}_1 k_1 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

главные моменты сил инерции звеньев

$$\left. \begin{aligned} M_{us1} &= -J_{z1} \ddot{\phi}_1 k_1; \\ M_{us2} &= -J_{z2} \ddot{\phi}_1 k_1; \\ M_{us3} &= -J_{z3} \ddot{\phi}_1 k_1; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где J_{z1} , J_{z2} , J_{z3} — моменты инерции звеньев 1 – 3 относительно центральных осей звеньев 1 – 3, параллельных оси вращения Z_1 .

При наличии в захватном устройстве манипулятора объекта массой $m_{об}$ и моментом инерции $J_{Z об}$ относительно центральной оси объекта, параллельной оси Z_1 , главный вектор силы инерции этого тела

$$F_{u об} = -m_{об} \left[(-\ddot{\phi}_1^2 l_4 + \ddot{l}_4) j_1 + (\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4) j_1 + \ddot{l}_1 k_1 \right], \quad (16)$$

а главный вектор момента сил инерции тела $M_{u об} = -J_{Z об} \ddot{\phi}_1 k_1$.

Определение реакций в кинематических парах, моментов и сил приводов. Приложим к звеньям манипулятора наряду с действующими активными силами главные векторы сил инерции и моментов сил инерции. Поочередно разомкнем кинематическую цепь манипулятора в каждой кинематической паре, начиная с последней, и составим уравнения всех сил и моментов сил, действующих на свободную часть цепи. Тогда для звена 3 уравнение сил запишется в виде

$$G_3 + G_{об} + F_{u3} + F_{u об} + R_c = 0, \quad (17)$$

где G_3 и $G_{об}$ — соответственно вес звена 3 и вес объекта манипулирования; R_c — реакция пары C .

Уравнение моментов относительно точки S_3 — центра масс звена 3:

$$M_{us3} + M_{u об} - F_{u3} \times l_3 - F_{u об} \times l_4 - G_3 \times l_3 - G_{об} \times l_4 + M_c = 0, \quad (18)$$

где $M_{us3} = -J_{z3} \ddot{\phi}_1 k_1$; $M_{u об} = -J_{Z об} \ddot{\phi}_1 k_1$; l_4 — перемещение груза относительно шарнира B ; M_c — момент, воспринимаемый поступательной парой C .

Для определения реакций в кинематической паре C представим уравнения сил и моментов в виде проекций на соответствующие оси системы координат $X_3 Y_3 Z_3$. Так как поступательная кинематическая пара C накладывает пять ограничений на относительное движение звеньев 2 и 3, образующих ее, то необходимо иметь пять уравнений статики для определения реакций этой пары.

Уравнение проекций сил на ось Y_3 :

$$-m_3 (\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) - m_{об} (\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4) + R_c^y = 0;$$

уравнение проекций сил на ось Z_3 :

$$-(m_3 + m_{об}) \ddot{l}_1 - G_3 - G_{об} + R_c^z = 0,$$

Здесь R_c^y и R_c^z — проекции реакции пары C на оси Y_3 и Z_3 .

Уравнение проекций моментов на ось X_3 :

$$M_{us3}^x + M_{u об}^x + M_c^x = 0,$$

где M_{us3}^x и $M_{u об}^x$ — моменты сил инерции масс m_3 и $m_{об}$ относительно оси X_3 , равные нулю; M_c^x — проекция момента пары C на ось X_3 .

Уравнение проекций моментов на ось Y_3 :

$$M_{us3}^y + M_{u об}^y - m_3 \ddot{l}_1 l_3 - m_{об} \ddot{l}_1 l_4 - G_3 l_3 - G_{об} l_4 + M_c^y = 0.$$

Здесь $M_{us3}^y = 0$ и $M_{u об}^y = 0$.

Уравнение проекций моментов на ось Z_3 :

$$(J_{z3} + J_{Z об}) \ddot{\phi}_1 + m_3 (\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) + m_{об} (\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4) + M_c^z = 0.$$

Для определения силы привода поступательной пары C спроектируем все силы на ось X_3 звена 3. Тогда

$$-m_3 (\ddot{l}_3 - \dot{\phi}_1^2 l_3) - m_{об} (\ddot{l}_4 - \dot{\phi}_1^2 l_4) = Q_c,$$

где Q_c — сила привода поступательной пары C .

Для кинематической цепи, состоящей из звеньев 2 и 3, уравнения проекций сил имеют следующий вид:

на ось X_2

$$-m_3 (\ddot{l}_3 - \dot{\phi}_1^2 l_3) - m_{об} (\ddot{l}_4 - \dot{\phi}_1^2 l_4) + R_B^x = 0;$$

на ось Y_2

$$-m_3 (\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) - m_{об} (\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4) + R_B^y = 0.$$

Для той же кинематической цепи уравнения проекций моментов сил имеют вид:

на ось X_2

$$- [m_3 (\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) + m_{об} (\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4)] (l_2 - l_1) + M_B^x = 0;$$

на ось Y_2

$$[m_3 (\ddot{l}_3 - \dot{\phi}_1^2 l_3) + m_{об} (\ddot{l}_4 - \dot{\phi}_1^2 l_4)] (l_2 - l_1) - G_3 l_3 - G_{об} l_4 + M_B^y = 0;$$

на ось Z_2

$$m_3(\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3)_3 + m_{об}(\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4)_4 + M_B^Z = 0.$$

Для определения силы привода поступательной пары B спроектируем все силы на ось Z_2 . Тогда

$$-(m_2 + m_3 + m_{об})\ddot{l}_1 - G_2 - G_3 - G_{об} = Q_B$$

где Q_B — сила привода поступательной пары B .

Рассмотрим кинематическую цепь, состоящую из звеньев 1-3, разомкнув ее на шарнире A . Для определения реакций в этом шарнире запишем уравнения проекций сил на оси прямоугольной системы координат.

Уравнения проекций сил:

на ось X_1

$$-m_3(\ddot{l}_3 - \dot{\phi}_1^2 l_3) - m_{об}(\ddot{l}_4 - \dot{\phi}_1^2 l_4) + R_A^X = 0;$$

на ось Y_1

$$-m_3(\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3) - m_{об}(\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4) + R_A^Y = 0;$$

на ось Z_1

$$-(m_1 + m_2 + m_3 + m_{об})\ddot{l}_1 - G_1 - G_2 - G_3 - G_{об} + R_A^Z = 0.$$

Уравнения проекций моментов сил:

на ось X_1

$$-m_3(\ddot{\phi}_1 l_3 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_3)_2 - m_{об}(\ddot{\phi}_1 l_4 + 2\dot{\phi}_1 \dot{l}_4)_2 + M_A^X = 0;$$

на ось Y_1

$$m_3(\ddot{l}_3 - \dot{\phi}_1^2 l_3)_2 + m_{об}(\ddot{l}_4 - \dot{\phi}_1^2 l_4)_2 - G_3 l_3 - G_{об} l_4 + M_A^Y = 0.$$

Для определения момента M_1 привода шарнира A следует составить уравнение моментов относительно оси Z шарнира.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юревич Е.И. Основы робототехники: учеб. пособие для вузов / Е.И. Юревич. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 416 с.
2. Бурдаков С.Ф. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов: учеб. пособие для студентов вузов / С.Ф. Бурдаков / М: Высш. шк., 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Задание № 1. Решение прямой и обратной задач кинематики с учетом только переносных степеней подвижности	1
2.	Задание № 2. Решение задач кинематики с учетом ориентирующих степеней подвижности манипулятора	4
3.	Задание № 3. Выбор компоновки промышленных роботов модульного типа по условиям точности	12
4.	Задание № 4. Кинетостатический расчет типовых компоновок промышленных роботов	20

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по курсу "Проектирование роботов и РТС"
для студентов специальности 220402
"Роботы и робототехнические системы"
очной и очно-заочной форм обучения

Составители: Трубецкой Виктор Александрович
Ревнёв Станислав Сергеевич

В авторской редакции
Компьютерный набор С.С. Ревнёва

Подписано к изданию 25.06.2010.
Уч.-изд. л. 1,7. "С"

ГОУВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14